РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 13, № 2 2007

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

Том 13, № 2

Екатеринбург
2007

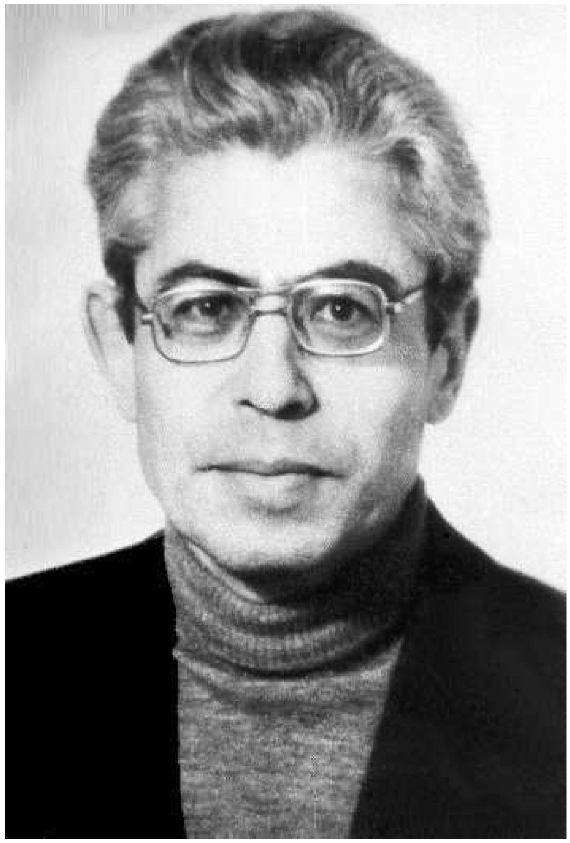
Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 13, № 2. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. 235 с.
ISBN 5–7691–1885–7.

Настоящий выпуск посвящен 75-летию со дня рождения академика РАН Арлена Михайловича Ильина. Тематика статей данного выпуска относится к исследованиям в области асимптотического анализа, теории оптимального управления, теории приближений и алгебры.

Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов.

ISBN 5–7691–1885–7

Т $\dfrac{106(07)}{8\Pi 6(03)-1998}$ ПВ–2007



Редакция Трудов Института математики и механики поздравляет члена Редколлегии академика РАН Арлена Михайловича Ильина с 75-летием и желает ему крепкого здоровья и творческих успехов.

СОДЕРЖАНИЕ

Р. Р. Акопян. Оптимальное восстановление аналитических в полуплоскости функций 3

В. А. Белоногов. О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n 13

Д. И. Борисов. Асимптотики собственных значений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами 33

С. Г. Глебов, О. М. Киселев, В. А. Лазарев. Порог авторезонанса в системе слабо связанных осцилляторов 43

А. Р. Данилин, Ю. В. Парышева. Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае 55

Ю. Ф. Долгий, Е. В. Ульянов. Применение сингулярных чисел оператора монодромии для нахождения достаточных условий асимптотической устойчивости периодической системы дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием .. 66

С. В. Захаров. Конструкция решения уравнения Бюргерса с заданной асимптотикой 80

В. И. Зенков. О пересечениях разрешимых холловых подгрупп в конечных неразрешимых группах 86

В. И. Зенков, А. С. Кондратьев, В. М. Левчук. Конечные группы, в которых нормализаторы пересечений пар силовских 2-подгрупп имеют нечетные индексы. 90

Л. А. Калякин, М. А. Шамсутдинов. Адиабатические приближения для уравнений Ландау — Лифшица 104

А. В. Ким, Н. Г. Колмогорцева. О степени гладкости решений функционально–дифференциальных уравнений 120

О. О. Коврижных. Об асимптотическом решении сингулярно возмущенной системы с двумя малыми параметрами 124

Н. Ю. Лукоянов. О вязкостном решении функциональных уравнений типа Гамильтона — Якоби для наследственных систем 135

В. Г. Пименов. Многошаговые численные методы решения функционально-дифференциально-алгебраических уравнений 145

Ю. Н. Субботин. Аппроксимации полиномиальными и тригонометрическими сплайнами третьего порядка, сохраняющие некоторые свойства аппроксимируемых функций 156

Д. В. Хлопин. Ломаные Эйлера в системах с условиями Каратеодори 167

А. Г. Ченцов. Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия 184

Г. И. Шишкин. Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных параболических уравнений с кусочно-непрерывными начально-краевыми условиями 218

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 517.547+517.983

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ[1]

Р. Р. Акопян

На классе аналитических и ограниченных в полуплоскости функций, имеющих ограниченную производную порядка $n \geq 0$, решены задачи оптимального восстановления значений функции и ее производных порядка $m \geq 0$ по сужению спектральной функции. Получены соответствующие точные неравенства для аналитических в полуплоскости функций.

1. Постановка задачи и основные результаты

Обозначим через $H_\infty = H_\infty(\Pi)$ пространство Харди функций, аналитических в верхней полуплоскости $\Pi = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, с конечной нормой

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \Pi\}.$$

Спектральной функцией функции $f \in H_\infty$ назовем (обобщенную) функцию φ, определяемую равенством

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \int\limits_{\mathbb{R}+i\alpha} \frac{f(p)}{(ip)^2}\, e^{-ipt}\, dp, \ \ \alpha > 0.$$

Носитель функции φ, называемый *спектром* функции f, принадлежит неотрицательной полуоси: $\operatorname{supp}\varphi \in \mathbb{R}_+$. Функция f соответственно является преобразованием Фурье—Лапласа (обобщенной) функции φ (см., например, [3, гл. 2, §10]). Такое соответствие функций f и φ будем обозначать в виде

$$f = \mathcal{F}[\varphi].$$

Пусть φ_σ — сужение (локальный элемент [3, гл. 2, §5, п. 5]) функции φ на интервал $(-\varepsilon, \sigma)$, $\varepsilon > 0$. Отметим, что φ_σ не зависит от ε и имеет носитель в отрезке $[0, \sigma]$: $\operatorname{supp}\varphi_\sigma \subset [0, \sigma]$.

Обозначим через H_∞^n класс Харди—Соболева (при $n = 0$ называемый классом Харди) функций $f \in H_\infty$ с производной порядка n, ограниченной единицей:

$$H_\infty^n = \left\{ f \in H_\infty : \|f^{(n)}\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Пусть I — информационный оператор, отображающий класс функций W в некоторое линейное пространство. Любое отображение $\Phi : I(W) \to \mathbb{C}$ назовем методом восстановления. Величина

$$e(\Psi, I, W, \Phi) = \sup_{f \in W} |\Psi(f) - \Phi(If)|$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00233) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-5120.2006.1).

называется погрешностью метода восстановления Φ функционала Ψ на классе W по известной информации о функции I, а величина

$$E(\Psi, I, W) = \inf_{\Phi} e(\Psi, I, W, \Phi) \tag{1.1}$$

— погрешностью оптимального восстановления. Здесь нижняя грань берется по всем методам восстановления; метод Φ_0, на котором в (1.1) достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления.

В настоящей работе исследуется задача оптимального восстановления значения производной порядка $m \geq 0$ (значения функции при $m = 0$) в точке z, $\operatorname{Im} z > 0$, по сужению φ_σ спектральной функции φ функции f на классе H^n_∞ Харди—Соболева, т.е. задача (1.1) при $\Psi(f) = f^{(m)}(z)$, $W = H^n_\infty$, $If = \varphi_\sigma$,

$$E(\Psi, I, W) = E[m, n, \sigma, z] = \inf_{\Phi} \sup_{f \in H^n_\infty} |f^{(m)}(z) - \Phi(\varphi_\sigma)|. \tag{1.2}$$

Класс H^n_∞ выпуклый, центрально-симметричный. Следовательно, для величины $E[m, n, \sigma, z]$ справедливо равенство [13, гл. 1, §1.3]

$$E[m, n, \sigma, z] = \sup\Big\{|f^{(m)}(z)| \,:\, f \in H_\infty(\sigma) \cap H^n_\infty\Big\}, \tag{1.3}$$

где $H_\infty(\sigma)$ — класс функций из H_∞ со спектром в полупрямой $[\sigma, \infty)$:

$$H_\infty(\sigma) = e^{i\sigma z} H_\infty = \left\{e^{i\sigma z} g(z) \,: g \in H_\infty\right\}.$$

Если для фиксированных значений m, n, σ, z величина $\mathcal{K} = E[m, n, \sigma, z]$ конечна, то на классе $H_\infty(\sigma)$ справедливо точное неравенство

$$|f^{(m)}(z)| \leq \mathcal{K}\, \|f^{(n)}\|_\infty, \;\; f \in H_\infty(\sigma). \tag{1.4}$$

В настоящей работе мы покажем, что для любых фиксированных значений m, $n \geq 0$, $\sigma > 0$, $z = x + iy$ $(y > 0)$ величина (1.3) конечна; более того, справедливы неравенства

$$\varepsilon(m - n, \sigma, y) \leq E[m, n, \sigma, z] \leq \mathcal{E}(m - n, \sigma, y), \tag{1.5}$$

где

$$\varepsilon(s, \sigma, y) = \begin{cases} s^s (ye)^{-s}, & \sigma y \leq s, \\ \sigma^s e^{-\sigma y}, & \sigma y \geq s; \end{cases} \qquad \mathcal{E}(s, \sigma, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} |J_s(x)|\, dx,$$

$$J_s(x) = \int\limits_0^\infty (t + \sigma)^s e^{-y(t+\sigma)} \cos(tx)\, dt = (-1)^s \frac{\partial^s}{\partial y^s} \left(\frac{y e^{-\sigma y}}{x^2 + y^2}\right). \tag{1.6}$$

Более того, мы найдем решение задачи (1.2) (а следовательно, значение величины (1.3) и точную константу в неравенстве (1.4)) в случаях

(I) $\quad m - n \leq 0, \quad y > 0,$
(II) $\quad m - n > 0, \quad y \geq \sigma^{-1}\left(m - n + \sqrt{m - n}\right),$
(III) $\quad 0 < m - n \leq 4, \;\; y \geq \sigma^{-1}(m - n).$

Точнее, в работе будет доказана следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что параметры* $m, n \geq 0$, $\sigma > 0$ *и* $z = x + iy$ *удовлетворяют хотя бы одному из условий* (I), (II) *или* (III). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Имеет место равенство*

$$E[m, n, \sigma, z] = \sigma^{m-n} e^{-\sigma y}. \tag{1.7}$$

(2) *Оптимальным в* (1.2) *является линейный метод*

$$\Phi_0(\varphi_\sigma) = \lim_{\delta\to+0} \mathcal{F}\,[\varphi_\sigma\lambda_\delta], \tag{1.8}$$

в котором λ_δ, $0 < \delta < \sigma$, *есть семейство функций, бесконечно дифференцируемых на всей числовой прямой, построенных по функции*

$$\lambda_0(t) = (it)^m \left(1 - \left(\frac{t}{2\sigma - t}\right)^{n-m} e^{2y(t-\sigma)}\right), \qquad t \in (0,\sigma), \tag{1.9}$$

таким образом, что

$$\lambda_\delta(t) = \begin{cases} \lambda_0(t), & \text{если} \;\; 0 \le t \le \sigma - \delta, \\ 0, & \text{если} \;\; t \le -\varepsilon \;\text{ или }\; t \ge \sigma, \end{cases}$$

и величины $\|\lambda_\delta''\|_{L_1(\sigma-\delta,\sigma)}$ *являются равномерно ограниченными по* $\delta \in (0,\sigma)$.

(3) *Верхняя грань в* (1.3) *достигается на функции* $\sigma^{-n}e^{i\sigma z}$ *и как следствие неравенство* (1.4) *обращается в равенство на функциях* $ce^{i\sigma z}$, $c \in \mathbb{C}$.

В случае $m = 0, n \in \mathbb{N}$, взяв в обеих частях неравенства (1.4) верхнюю грань по $z \in \Pi$, получим точное неравенство

$$\|f\|_\infty \le \sigma^{-n}\; \|f^{(n)}\|_\infty, \;\; f \in H_\infty(\sigma), \tag{1.10}$$

являющееся аналогом неравенства Бора — Фавара для аналитических в полуплоскости функций. Неравенство (1.10) можно перенести на пространства Харди H_p $(1 \le p < \infty)$ функций, аналитических в верхней полуплоскости Π, с конечной нормой

$$\|f\|_p = \sup_{y>0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Пусть $H_p(\sigma) = H_\infty(\sigma) \bigcap H_p$ — класс функций из H_p со спектром в полупрямой $[\sigma, \infty)$.

Следствие. *Для любых* $n \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$ *и* p, $1 \le p \le \infty$, *справедливо точное неравенство*

$$\|f\|_p \le \sigma^{-n} \|f^{(n)}\|_p, \;\; f \in H_p(\sigma). \tag{1.11}$$

При $p = \infty$ *неравенство* (1.11) *обращается в равенство на функциях* $ce^{i\sigma z}$, $c \in \mathbb{C}$.

2. Предшествующие результаты

Неравенства (1.4), (1.10) и (1.11) на классе функций со спектром в промежутке $[\sigma, +\infty)$ интересно сравнить со следующими известными неравенствами Бернштейна и Виртингера — Бора — Фавара на классах функций, имеющих спектр соответственно в отрезке $[-\sigma, \sigma]$ и вне интервала $(-\sigma, \sigma)$ (т.е. во множестве $(-\infty, -\sigma] \cup [\sigma, +\infty)$).

Для $\sigma > 0$ обозначим через B_σ класс целых функций экспоненциального типа σ, ограниченных на вещественной оси. Для произвольной функции $f \in B_\sigma$ и точки $z = x + iy$ при $m \ge 0$ справедливо неравенство [2, гл. 4, п. 83]

$$|f^{(m)}(z)| \le \sigma^m \, e^{\sigma|y|} \|f\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Помимо того, имеет место соответствующее неравенство для норм, называемое неравенством Бернштейна,

$$\|f^{(m)}\|_{L_p(\mathbb{R})} \le \sigma^m \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad 0 \le p \le \infty,$$

которое исследовали С.Н. Бернштейн, А. Зигмунд, В.В. Арестов, R.P. Boas, Q.I. Rahman, G. Schmeisser и другие (см. работы [1, 15] и приведенную в них библиографию).

Для функции $f \in C(\mathbb{R})$, имеющей локально абсолютно непрерывную производную порядка $n-1$ на оси и спектр вне интервала $(-\sigma, \sigma)$, справедливо точное неравенство [4, 10]

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} \le \sigma^{-n}\mathcal{K}_n\|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}, \qquad \mathcal{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j(n+1)}}{(2j+1)^{n+1}},$$

называемое неравенством Виртингера — Бора — Фавара. Подобные неравенства для различных норм исследовало большое число математиков: В. Виртингер, Х. Бор, С.Н. Бернштейн, Ж. Фавар, Р. Беллман, Н.И. Ахиезер, С.Б. Стечкин, Б.М. Левитан, Л. Хёрмандер и другие [2, 4, 9, 10, 14].

Для нас представляет интерес следующий результат, относящийся к задаче оптимального восстановления функционала $\Psi(f) = f(\tau)$ (значения функции f в точке $\tau \in D = \{z : |z| < 1\}$) на классе Харди — Соболева $W = H^1_\infty(D)$ функций, аналитических в единичном круге D, удовлетворяющих неравенству $\|f'\|_{H_\infty(D)} \le 1$, по информации $If = (f(0), f'(0), \ldots, f^{(r-1)}(0))$, $r \in \mathbb{N}$. Для ошибки оптимального восстановления справедливо равенство

$$E(f(\tau), H^1_\infty(D), I) = |\tau|^r/r;$$

оптимальным является метод

$$\Phi_0(If) = \sum_{k=0}^{r}\left(1 - \frac{k|\tau|^{2(r-k)}}{2r-k}\right)\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,\tau^k$$

(Д. Ньюмен [12, пример 4.6]). С помощью отображения $\tau = e^{iz}$ этот результат можно интерпретировать следующим образом. Для ошибки оптимального восстановления функционала $\Psi(f) = f(z)$ $\big($значения функции f в точке $z = x + iy$ $(y > 0)\big)$ на классе $W = H^1_{\infty,2\pi}$ функций, аналитических, 2π-периодических в полуплоскости $\Pi = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ и удовлетворяющих условию $\|f'\|_\infty \le 1$, по коэффициентам Фурье $If = (c_0, c_1, \ldots, c_{r-1})$ в представлении $f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\zeta}$ справедливо равенство

$$E(f(z), H^1_{\infty,2\pi}, I) = r^{-1}e^{-ry},$$

и оптимальным является метод восстановления

$$\Phi_0(If) = \sum_{k=0}^{r}\left(1 - \frac{k\,e^{-2y(r-k)}}{2r-k}\right)c_k e^{ikz}.$$

Задачам оптимального восстановления аналитических функций и их производных посвящена монография К.Ю. Осипенко [13]. Задачи оптимального восстановления функции по информации о ее спектре рассматривались в работах [5–8, 11].

3. Вспомогательные утверждения

Для промежутка $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ обозначим через $C^\infty(\mathbb{I})$ класс бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{I}$ функций. Пусть неотрицательная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция ψ_0 и числа $\sigma, y > 0$ удовлетворяют условиям

(i) $\psi_0 \in C^\infty((\sigma, +\infty))$;

(ii) $\forall s \in \mathbb{Z}_+\ \exists C_s > 0,\ k_s \in \mathbb{N}:\ \forall t \in (\sigma, +\infty)\quad |\psi_0^{(s)}(t)| \le C_s t^{k_s}$;

(iii) $\psi_0(t+\sigma)e^{-yt}$ — четная функция, и, следовательно, $\psi_0(t) = \psi_0(2\sigma - t)\, e^{2y(t-\sigma)}$ при $t \le \sigma$.

Семейство функций ψ_δ, $0 < \delta < \sigma$, удовлетворяет условиям

(iv) $\psi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$;
(v) $\forall t \in \mathbb{R} \setminus (\sigma-\delta, \sigma) \quad \psi_\delta(t) = \psi_0(t)$;
(vi) $\exists M > 0: \quad \|\psi_\delta''\|_{L_1(\sigma-\delta,\sigma)} \le M \ \forall \delta, \quad 0 < \delta < \sigma$.

Отметим, что из условий (i)–(vi) следуют утверждения:
(a) при любых $0 < \delta < \sigma$ имеет место неравенство

$$\|\psi_\delta'\|_{L_1(\sigma-\delta,\sigma)} \le M\delta;$$

(b) справедливо равенство

$$\lim_{\delta\to+0} \|\psi_0 - \psi_\delta\|_{L_1(\sigma-\delta,\sigma)} = 0; \tag{3.1}$$

(c) при $\beta = \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} p > 0$ функция $\left(\psi_\delta(t)\, e^{izt}\right)'' e^{-ipt}$ суммируема по t на числовой оси; более того, существует δ_0 такое, что для любых $\delta < \delta_0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \left(\psi_\delta(t)\ e^{izt}\right)''\ e^{-ipt} \right| \, dt \le 2(M_\beta^2 + 2|z|M_\beta^1 + |z|^2 M_\beta^0 + M), \tag{3.2}$$

где $M_\beta^s = \|\psi_0^{(s)}(t) e^{-\beta t}\|_{L_1(\sigma,+\infty)}$.

Функция ψ_0 порождает линейный функционал U_z, определенный на функциях $f \in H_\infty$ равенством

$$U_z f = \lim_{\delta\to+0} \mathcal{F}\,[\varphi\psi_\delta](z),$$

где $f = \mathcal{F}[\varphi]$, а z имеет положительную мнимую часть, $\operatorname{Im} z > 0$.

В следующих леммах будут получены представление функционала U_z и оценки его нормы на пространстве H_∞.

Лемма 1. *Для произвольного $z = x + iy$, $y > 0$, справедлива формула*

$$U_z f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}+i\alpha} f(p) l(z-p)\, dp, \qquad \alpha > 0, \tag{3.3}$$

в которой

$$l(p) = \mathcal{F}\,[\psi_0](p).$$

При этом справедливо неравенство

$$|U_z f| \le \mathcal{C}\, \|f\|_\infty, \qquad f \in H_\infty, \tag{3.4}$$

где

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_0^\infty \psi_0(t+\sigma) e^{-y(t+\sigma)} \cos(tx)\, dt \right| dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения спектральной функции следует представление для функционала U_z

$$U_z f = \lim_{\delta\to+0} \mathcal{F}\,[\varphi\psi_\delta](z) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(t)\ \left(\psi_\delta(t)\ e^{izt}\right)''\, dt,$$

где

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}+i\alpha} \frac{f(p)}{(ip)^2}\ e^{-ipt}\, dp, \qquad 0 < \alpha < y/2;$$

отметим, что $\phi(t)=0$ при любых $t<0$ и ϕ не зависит от α. Изменив порядок интегрирования, получим равенство

$$U_z f=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}+i\alpha}\frac{f(p)}{(ip)^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\big(\psi_\delta(t)\;e^{izt}\big)''\;e^{-ipt}\,dt\,dp.$$

Покажем, что существует предел

$$\lim_{\delta\to+0}\frac{f(p)}{(ip)^2}\int\limits_{\mathbb{R}}(\psi_\delta(t)\,e^{izt})''\,e^{-ipt}\,dt=f(p)\int\limits_{\mathbb{R}}\psi_0(t)\,e^{i(z-p)t}\,dt,\tag{3.5}$$

равномерный по p на прямой $\mathbb{R}+i\alpha$. Действительно, в силу (v)

$$\sup_{p\in\mathbb{R}+i\alpha}\left|\frac{f(p)}{(ip)^2}\int\limits_{\mathbb{R}}(\psi_\delta(t)\,e^{izt})''\,e^{-ipt}\,dt-f(p)\int\limits_{\mathbb{R}}\psi_0(t)\,e^{i(z-p)t}\,dt\right|$$

$$=\sup_{p\in\mathbb{R}+i\alpha}\left|f(p)\int\limits_{\mathbb{R}}(\psi_\delta(t)-\psi_0(t))\,e^{i(z-p)t}\,dt\right|\le\|f\|_\infty\int\limits_{\sigma-\delta}^{\sigma}|\psi_\delta(t)-\psi_0(t)|\,e^{-(y-\alpha)t}dt,$$

и правая часть неравенства в силу (3.1) стремится к нулю при $\delta\to0$, т. е. (3.5) доказано. Далее, интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}+i\alpha}\frac{f(p)}{(ip)^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\big(\psi_\delta(t)\;e^{izt}\big)''\;e^{-ipt}\,dt\,dp$$

сходится равномерно по δ в положительной полуокрестности нуля в силу равномерной оценки (3.2). Таким образом, имеем

$$U_z f=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}+i\alpha}f(p)\int\limits_{\mathbb{R}}\psi_0(t)\,e^{i(z-p)t}\,dt\,dp,\tag{3.6}$$

т. е. представление (3.3) имеет место.

Покажем, что справедливо неравенство (3.4). Обозначим через J функцию, определяемую равенством

$$J(\zeta)=\int\limits_{\mathbb{R}}\psi_0(t+\sigma)\,e^{-y(t+\sigma)}e^{i\zeta t}\,dt.\tag{3.7}$$

Из свойств функции ψ_0 следует, что J — функция, аналитическая в полосе $|\operatorname{Im}\zeta|<y$, и

$$J(\zeta)=\frac{\widetilde{J}(\zeta)}{(\zeta+iy)^2},\quad \widetilde{J}(\zeta)=e^{-y\sigma}\psi_0'(\sigma-0)-e^{-y\sigma}\psi_0'(\sigma+0)-\int\limits_{\mathbb{R}}\psi_0''(t+\sigma)\,e^{-y(t+\sigma)}e^{i\zeta t}\,dt,\tag{3.8}$$

где функция $\widetilde{J}$ является аналитической и ограниченной в полосе $|\operatorname{Im}\zeta|\le y/2$. При этом

$$|J(x-i\alpha)-J(x)|\le\int\limits_{\mathbb{R}_+}\psi_0(t+\sigma)\,e^{-y(t+\sigma)}(e^{\alpha t}-1)\,dt$$

$$\le e^{-y\sigma}M^0_{y/2}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left\{e^{-\frac{yt}{2}}(e^{\alpha t}-1)\right\}=e^{-y\sigma}M^0_{y/2}\,\frac{2\alpha}{y-2\alpha}\Big(1-\frac{2\alpha}{y}\Big)^{\frac{y}{2\alpha}}.$$

Отсюда следует, что $J(x-i\alpha)$ стремится к $J(x)$ при $\alpha\to+0$ равномерно по $x\in\mathbb{R}$.

Используя (3.6) и (3.7), при $0 < \alpha < y/2$ получим

$$|U_z f| \le \frac{e^{\alpha\sigma}}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(\xi + i\alpha)|\ |J(x - (\xi + i\alpha))|\ d\xi,$$

откуда

$$|U_z f| \le \frac{e^{\alpha\sigma}}{2\pi}\, \|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{R}} |J(-\xi - i\alpha)|\ d\xi.$$

Интеграл в правой части неравенства в силу представления (3.8) сходится равномерно по $\alpha \in [0, y/2]$. Перейдя к пределу при $\alpha \to 0$, получим

$$|U_z f| \le \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} |J(-\xi)|\ d\xi.$$

При этом из (iii) следует равенство

$$J(-\xi) = 2 \int\limits_{\mathbb{R}_+} \psi_0(t + \sigma)\, e^{-y(t+\sigma)} \cos(t\xi)\, dt.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для произвольного* $z = x + iy$, $y > 0$, *справедливо неравенство*

$$\|U_z\| \ge \sup\left\{\psi_0(t)\, e^{-yt}\ :\ t \in \mathbb{R}_+\right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $t \ge 0$ справедливо неравенство

$$\|U_z\| = \sup\left\{\frac{|U_z f|}{\|f\|_\infty} : f \in H_\infty\right\} \ge \frac{|U_z e^{itz}|}{\|e^{itz}\|_\infty} = \psi_0(t)\, e^{-yt},$$

откуда следует утверждение леммы 2.

В настоящей работе будет рассматриваться только функционал U_z, порождаемый функцией $\psi_0 = \psi_0[m, n, \sigma]$, определяемой равенством

$$\psi_0(t) = \begin{cases} (2\sigma - t)^{m-n}\, e^{-2y(\sigma - t)}, & t \le \sigma, \\ t^{m-n}, & t \ge \sigma. \end{cases} \tag{3.9}$$

Отметим, что в этом случае функция J, заданная равенством (3.7), обладает свойством

$$J(x) = 2J_{m-n}(x),\ \ x \in \mathbb{R},$$

где функция J_s определена равенством (1.6).

Лемма 3. *При любых* $m, n \ge 0$, $\sigma > 0$, $z = x + iy$, *удовлетворяющих хотя бы одному из условий* (I), (II) *или* (III), *и для функции* ψ_0, *определенной в* (3.9), *справедливо равенство*

$$\|U_z\| = \sigma^{m-n} e^{-y\sigma}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2 получим оценку снизу

$$\|U_z\| \ge \sup\left\{(t + \sigma)^{m-n} e^{-y(t+\sigma)}\ :\ t \in \mathbb{R}_+\right\}.$$

Если $m - n \le 0$ или $\sigma y > m - n > 0$, то верхняя грань достигается при $t = 0$. Отсюда следует, что при любом из условий (I), (II) или (III) справедливо неравенство

$$\|U_z\| \ge \sigma^{m-n} e^{-y\sigma}.$$

С другой стороны, если функция $J(x) = 2J_{m-n}(x)$ неотрицательна, то по лемме 1

$$\|U_z\| \le \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^\infty (t+\sigma)^{m-n} e^{-y(t+\sigma)} \cos(tx)\, dt\, dx = \sigma^{m-n} e^{-y\sigma}.$$

Покажем, что величина $J_{m-n}(x)$ для любых x неотрицательна, если справедливо хотя бы одно из условий (I), (II) или (III). Дважды интегрируя по частям, получим

$$J_{m-n}(x) = \frac{2}{x^2} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \Big((t+\sigma)^{m-n}\, e^{-y(t+\sigma)} \Big)'' (1 - \cos xt)\; dt.$$

Если справедливо условие (I) или (II), то функция $(t+\sigma)^{m-n}\, e^{-y(t+\sigma)}$ выпукла на полуоси $\mathbb{R}_+$, откуда имеем $J_{m-n}(x) \ge 0$. Для функций $J_s(x), 1 \le s \le 4$, справедливы равенства

$$J_1(x) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ye^{-\sigma y}}{x^2+y^2}\right) = \frac{e^{-y\sigma}}{(x^2+y^2)^2}\left[(\sigma y - 1)x^2 + y^2(\sigma y + 1)\right];$$

$$J_2(x) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{ye^{-\sigma y}}{x^2+y^2}\right) = \frac{e^{-y\sigma}}{(x^2+y^2)^3}\left[\sigma(\sigma y - 2)x^4 + 2y\left((\sigma y)^2 - 3\right)x^2 + y^3\left((\sigma y)^2 + \sigma y + 2\right)\right];$$

$$\begin{aligned} J_3(x) = -\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{ye^{-\sigma y}}{x^2+y^2}\right) = \frac{e^{-y\sigma}}{(x^2+y^2)^4}\Big[&\sigma^2(\sigma y - 3)x^6 + 3\left((\sigma y)^3 - (\sigma y)^2 - 6\sigma y + 2\right)x^4 \\ &+ 3y^2\left((\sigma y)^3 + (\sigma y)^2 - 4\sigma y - 12\right)x^2 + y^4\left((\sigma y)^3 + (\sigma y)^2 + 6\sigma y + 6\right)\Big]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_4(x) = \frac{\partial^4}{\partial y^4}\left(\frac{ye^{-\sigma y}}{x^2+y^2}\right) = \frac{e^{-y\sigma}}{(x^2+y^2)^5}\Big[&\sigma^3(\sigma y - 4)x^8 + 4\sigma\left((\sigma y)^3 - 2(\sigma y)^2 - 9\sigma y + 6\right)x^6 \\ &+ 6y\left((\sigma y)^4 - 10(\sigma y)^2 - 20\sigma y + 20\right)x^4 + 4y^3\left((\sigma y)^4 + 2(\sigma y)^3 - 3(\sigma y)^2 - 30\sigma y - 60\right)x^2 \\ &+ y^5\left((\sigma y)^4 + 4(\sigma y)^3 + 12(\sigma y)^2 + 24\sigma y + 24\right)\Big]. \end{aligned}$$

В каждом из представлений $J_s, 1 \le s \le 4$, первый множитель положителен, а второй является четным многочленом по переменной x, при этом нетрудно показать, что коэффициенты многочленов положительны при $\sigma y \ge s$. При условии (III) отсюда вытекает неравенство $J_{m-n}(x) \ge 0$. Лемма 3 доказана.

4. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы. Вначале отметим, что в качестве λ_δ можно взять функции $\lambda_\delta(t) = \lambda_0(t)\eta_\delta(\sigma - t)\eta_\varepsilon(t)$, где η_δ определяются равенствами (см. [3, гл. 1, §5, п. 2])

$$\eta_\delta(t) = \int\limits_0^t \omega_{\delta/2}(\tau - \frac{\delta}{2})d\tau, \qquad \omega_{\delta/2}(t) = \begin{cases} c\, e^{-\frac{\delta^2}{\delta^2 - 4t^2}}, & |t| < \delta/2, \\ 0, & |t| \ge \delta/2, \end{cases} \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \omega_{\delta/2}(t)dt = 1.$$

Покажем, что для погрешности оптимального восстановления (1.2) или, что то же самое, для точной константы в неравенстве (1.4) справедливо равенство (1.7).

Для произвольной функции $f \in H_\infty(\sigma)$ со спектром в $[\sigma, +\infty)$ справедливо равенство

$$U_z f^{(n)} = i^{n-m} f^{(m)}(z).$$

Отсюда и из лемм 1 и 2 вытекает неравенство (1.5), а из леммы 3 — равенство (1.7).

Осталось показать, что метод (1.8) является оптимальным. Так как φ_σ — сужение (локальный элемент) φ на интервал $(-\varepsilon,\sigma)$ и функции λ_δ, определенные равенством (1.9), имеют носитель в $[-\varepsilon,\sigma]$, то

$$\left|f^{(m)}(z)-\Phi_0(\varphi_\sigma)\right|=\left|\mathcal{F}\,[(it)^m\varphi]\,(z)-\lim_{\delta\to+0}\mathcal{F}\,[\varphi_\sigma\,\lambda_\delta]\,(z)\right|$$

$$=\left|\lim_{\delta\to+0}\mathcal{F}\,[\varphi\,((it)^m-\lambda_\delta)]\,(z)\right|=\left|\lim_{\delta\to+0}\mathcal{F}\,[(it)^n\varphi\,\psi_\delta]\,(z)\right|=\left|U_z f^{(n)}\right|.$$

Применяя лемму 3, получим неравенство

$$\left|f^{(m)}(z)-\Phi_0(\varphi_\sigma)\right|\le\sigma^{m-n}\,e^{-y\sigma}\|f^{(n)}\|_\infty.$$

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия. Для доказательства неравенства (1.11) воспользуемся методом Стейна. Для произвольной функции $f\in H_p(\sigma)$ рассмотрим функцию F_y, определяемую равенством

$$F_y(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t+z)g(t+iy)dt,$$

где

$$g(z)=|f(z)|^{p-1}\exp\Big(-i\arg\big(f(z)\big)\Big)\,\|f(\cdot+iy)\|^{1-p}_{L_p(\mathbb{R})}.$$

При этом для $q=\dfrac{p}{p-1}$

$$\|g(\cdot+iy)\|^q_{L_q(\mathbb{R})}=\int\limits_{\mathbb{R}}|g(t+iy)|^q\,dt=\|f(\cdot+iy)\|^{-p}_{L_p(\mathbb{R})}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(t+iy)|^p\,dt=1.$$

Функция F_y принадлежит классу $H_\infty(\sigma)$. Если $f^{(n)}\in H_p$, то справедливо равенство

$$F_y^{(n)}(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f^{(n)}(t+z)g(t+iy)dt.$$

Тогда, воспользовавшись неравенством (1.10) для равномерных норм, получим

$$\|f(\cdot+iy)\|_{L_p(\mathbb{R})}=F_y(iy)\le\sigma^{-n}e^{-y\sigma}\|F_y^{(n)}\|_\infty.$$

При этом

$$\|F_y^{(n)}\|_\infty=\sup_{z\in\Pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f^{(n)}(t+z)g(t+iy)dt\right|$$

$$\le\|f^{(n)}\|_p\,\|g(\cdot+iy)\|_{L_q(\mathbb{R})}=\|f^{(n)}\|_p,$$

откуда следует, что

$$\|f(\cdot+iy)\|_{L_p(\mathbb{R})}\le\sigma^{-n}e^{-y\sigma}\|f^{(n)}\|_p.$$

Рассмотрев верхнюю грань по $y>0$ в обеих частях неравенства, получим (1.11).

Для обоснования точности неравенства (1.11) при $1\le p<\infty$ рассмотрим функцию

$$f_h(z)=\frac{1}{h}\int\limits_{\sigma}^{\sigma+h}\varphi\Big(\frac{t-\sigma}{h}\Big)e^{izt}dt=e^{i\sigma z}\int\limits_0^1\varphi(u)e^{izuh}du,$$

где $\varphi \in C^\infty$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$, $\varphi \geq 0$. Нетрудно понять, что $f_h \in H_p$, $p \geq 1$, и $\|f_h\|_p \to \infty$ при $h \to 0$. Для $f_h^{(n)}$ имеет место представление

$$f_h^{(n)}(z) = \frac{1}{h}\int\limits_{\sigma}^{\sigma+h}(it)^n\varphi\Big(\frac{t-\sigma}{h}\Big)e^{izt}dt = (i\sigma)^n f_h(z) + i^n e^{i\sigma z}\sum_{k=1}^{n}h^k g_k(hz),$$

в котором

$$g_k(z) = \int\limits_0^1 \sigma^{n-k}C_n^k u^k\varphi(u)e^{izu}du.$$

И, следовательно, справедливо неравенство

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f_h^{(n)}\|_p}{\|f_h\|_p} \leq \sigma^n + \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}h^{k-\frac{1}{p}}\frac{\|g_k\|_p}{\|f_h\|_p} = \sigma^n.$$

Следствие доказано.

Поступила 1.12.2006

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В.В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
2. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: ГТТИ, 1947.
3. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
4. **Левитан Б.М.** (B.M. Lewitan) Über eine Verallgemeinerung von S. Bernstein und H. Bohr // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. С. 169–172.
5. **Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю., Тихомиров В.М.** Оптимальное восстановление и теория экстремума // Докл. РАН. 2001. Т. 379, № 2. С. 161–164.
6. **Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.** Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 3. С. 79–100.
7. **Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.** Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его приложения. 2003. Т. 37, № 3. С. 51–64.
8. **Осипенко К.Ю.** Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди — Соболева // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 2. С. 67–86.
9. **Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.** Неравенства (С добавлениями В.И. Левина и С.Б. Стечкина). М.: ИЛ, 1948.
10. **Hörmander L.** A new proof and a generalization of an inequality of Bohr // Math. Scand. 1954. Vol. 2. P. 33–45.
11. **Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu., Tikhomirov V.M.** Optimal recovery and extremum theory // Comput. Methods Function Theory. 2002. Vol. 2, no. 1. P. 87–112.
12. **Micchelli C.A., Rivlin T.J.** A survey of optimal recovery// Optimal estimation in approximation theory. New York: Plenum Press, 1977. P. 1–55.
13. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of analytic functions. Huntington: Nova Science Publ. Inc., 2000.
14. **Tikhomirov V.M.** Approximation theory// Analysis II. Convex analysis and approximation theory/ Ed. by R.V.Gamkrelidze. New York: Springer-Verlag, 1990. P. 93–255.
15. **Rahman Q.I., Schmeisser G.** L^p inequalities for entire functions of exponential type // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 320, no. 1. P. 91–103.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 512.54

О НЕКОТОРЫХ ПАРАХ НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРОВ ГРУПП S_n [1]

В. А. Белоногов

Продолжается изучение пар неприводимых характеров симметрической группы S_n, имеющих одно и то же множество корней на одном из множеств A_n и $S_n \setminus A_n$. Найдены все такие пары неприводимых характеров группы S_n в случае, когда наименьшая из длин главных диагоналей диаграмм Юнга, соответствующих этим характерам, не превосходит двух. Получены некоторые доводы в пользу гипотезы: знакопеременные группы A_n не имеют пар полупропорциональных неприводимых характеров.

1. Введение

Настоящая работа продолжает начатое в [1] изучение пар неприводимых характеров группы S_n, имеющих одно и то же множество корней на одном из множеств A_n и $S_n \setminus A_n$ $(n \geq 1)$. Побуждающим мотивом такого исследования, как отмечено в [1], является задача описания пар полупропорциональных неприводимых характеров конечных групп (определение напоминается ниже перед гипотезой 1), интересная обнаружившейся связью между наличием или отсутствием у группы такой пары и локальным строением этой группы.

Всюду далее n — натуральное число, $P(n)$ — множество всех разбиений числа n, χ^α — неприводимый характер группы S_n, соответствующий разбиению $\alpha \in P(n)$, и для $\varepsilon \in \{1, -1\}$

$S_n^\varepsilon := S_n^+ := A_n$, если $\varepsilon = 1$, и $S_n^\varepsilon := S_n^- := S_n \setminus A_n$, если $\varepsilon = -1$.

В [1] найдены все пары χ^α и χ^β неприводимых характеров групп S_n, имеющих одно и то же множество корней на S_n^ε $(\varepsilon = \pm 1)$, в случае, когда *каждая* из длин $d(\alpha)$ и $d(\beta)$ главных диагоналей диаграмм Юнга, соответствующих этим характерам, меньше трёх. В настоящей работе находятся все такие пары χ^α и χ^β в случае, когда лишь *одна* из длин $d(\alpha)$ и $d(\beta)$ меньше трёх. Главным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n, имеющие одни и те же корни на S_n^ε при некотором $\varepsilon = \pm 1$, но не исчезающие тождественно на S_n^ε, причём $\alpha \neq' \beta$. Предположим, что $d(\alpha) = 2 < d(\beta)$. Тогда выполнено одно из следующих условий*:

(1) $n = 10,\ \varepsilon = -1,\ \alpha =' (5, 5),\quad \beta =' (4, 3^2)$;
(2) $n = 14,\ \varepsilon = +1,\ \alpha =' (6, 6, 2),\quad \beta =' (6, 4, 4)$;
(3) $n = 11,\ \varepsilon = +1,\ \alpha =' (7, 2, 1^2),\quad \beta =' (4, 3^2, 1)$;
(4) $n = 14,\ \varepsilon = -1,\ \alpha =' (9, 2, 1^3),\quad \beta =' (5, 4, 3, 1^2)$;
(5) $n = 15,\ \varepsilon = +1,\ \alpha =' (8, 3, 2, 1^2),\quad \beta =' (5, 4^2, 1^2)$;
(6) $n = 18,\ \varepsilon = -1,\ \alpha =' (10, 3, 2, 1^3),\quad \beta =' (6, 5, 4, 1^3)$;
(7) $n = 19,\ \varepsilon = +1,\ \alpha =' (9, 4, 2^2, 1^2),\quad \beta =' (6, 4^2, 3, 1^2)$;
(8) $n = 22,\ \varepsilon = -1,\ \alpha =' (11, 4, 2^2, 1^3),\quad \beta =' (7, 5^2, 2, 1^3)$;
(9) $n = 26,\ \varepsilon = -1,\ \alpha =' (12, 5, 2^3, 1^3),\quad \beta =' (8, 5^2, 3, 2, 1^3)$.

Обратно, в каждом из пунктов (1)–(9) *выполнены условия теоремы.*

Условие $\alpha \neq' \beta$ здесь равносильно тому, что характеры χ^α и χ^β различны и не ассоциированы, а потому лишь исключает тривиальные случаи. Исчезновение (обращение в нуль)

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00148) и РФФИ-ГФЕН Китая (проект 05-01-39000).

характеров χ^α и χ^β на S_n^ε также есть тривиальный случай; согласно предложению 2.1 оно равносильно тому, что $\varepsilon=-1$, а разбиения α и β оба самоассоциированы.

Теорема 1 является объединением теорем 4.1 и 5.1, которые доказываются в разд. 4 и 5 соответственно. Она позволяет сделать некоторое продвижение в доказательстве следующей гипотезы, выдвинутой в [1]. Характеры φ и ψ группы G называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого подмножества M из G пропорциональны ограничения φ и ψ на M и их ограничения на $G\setminus M$.

Гипотеза 1. *Знакопеременная группа A_n при любом натуральном n не имеет полупропорциональных неприводимых характеров.*

Теорема 2. *Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы A_n. Тогда φ и ψ являются ограничениями на A_n некоторых неприводимых характеров χ^α и χ^β группы S_n ($\alpha,\beta\in P(n)$), причём длины главных диагоналей диаграмм Юнга разбиений α и β отличаются не более, чем на единицу, и каждая из этих длин — не меньше трёх.*

Действительно, по теореме 2 из [2] φ и ψ являются ограничениями на A_n некоторых неприводимых характеров χ^α и χ^β группы S_n ($\alpha,\beta\in P(n)$, $\alpha\neq\alpha'$, $\beta\neq\beta'$); по предложению 2.1 из [6] $|d(\alpha)-d(\beta)|\le 1$; остальное непосредственно следует из теоремы 1.

Используемые обозначения в основном стандартны (см., например, [3] и [4]). Запись $A:=B$ (читается: A по определению равно B) означает, что A есть обозначение для B.

Если φ и ψ — классовые функции группы G, $S\subseteq G$ и ограничения $\varphi|_S$ и $\psi|_S$ имеют одно и то же множество корней, то мы говорим, что φ и ψ *имеют одно и то же множество корней на* S, и пишем "$\varphi\sim\psi$ на S" (знак "$\sim$" можно читать как "эквивалентно").

Некоторые обозначения, связанные с разбиениями, напоминаются в разд. 2.

2. Разбиения и характеры групп S_n и A_n

Все необходимые здесь понятия и обозначения, связанные с разбиениями, имеются в [1]. Напомним лишь, что если $\alpha,\beta\in P(n)$ и H — крюк в $[\alpha]$, то $\alpha-H$ есть разбиение с диаграммой $[\alpha]\setminus R(H)$; $\alpha^{ij}:=\alpha-H^\alpha_{ij}$; $\mathrm{H}^\alpha(m)$ — множество всех крюков длины m в $[\alpha]$; $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m):=\mathrm{H}^\alpha(m)\cup\mathrm{H}^\beta(m)$; мы пишем $\alpha='\beta$, если $\alpha\in\{\beta,\beta'\}$, и $\alpha\neq'\beta$ в противном случае; $()$ есть разбиение числа 0, т. е. последовательность длины 0 ($[()]=\varnothing$).

Предложение 2.1 ([4, теоремы 2.1.7, 2.1.8, 2.1.11, 2.3.15] или [5, утверждения 2.3, 4.12, 6.7]).

(1) $\mathrm{Cl}(S_n)=\{C_\alpha\mid\alpha\in P(n)\}$, $\mathrm{Irr}(S_n)=\{\chi^\alpha\mid\alpha\in P(n)\}$, $|\mathrm{Cl}(S_n)|=|\mathrm{Irr}(S_n)|=|P(n)|$.

(3) $\chi^{(n)}=1_{S_n}$ *— главный характер группы* S_n, $\chi^{(1^n)}=\xi$ *— знакопеременный характер* S_n.

(4) $\chi^{\alpha'}=\chi^\alpha\xi$ *для всех* $\alpha\in P(n)$.

(5) χ^α *исчезает на* $S_n\setminus A_n$, *если и только если* $\alpha=\alpha'$ ($\alpha\in P(n)$).

Если $\{1,\dots,n\}=\Gamma\cup\Delta$, где $\Gamma\cap\Delta=\varnothing$, $g\in S_\Gamma$ и $d\in S_\Delta$, то $g\times d$ обозначает элемент из S_n, ограничение которого на Γ равно g, а ограничение на Δ равно d.

Предложение 2.2 ([4, теорема 2.4.7] или [5, утверждение 21.1]). *Пусть $\alpha\in P(n)$, $k\in\mathbb{N}$, $k\le n$, x — произвольная перестановка элементов $1,\dots,n-k$, и z — циклическая перестановка остальных k элементов $n-k+1,\dots,n$. Тогда*

$$\chi^\alpha(z\times x)=\sum_{(i,j)\in[\alpha],\ h^\alpha_{ij}=k}(-1)^{l_{ij}}\chi^{\alpha^{ij}}(x),$$

где l_{ij} — длина ноги крюка H^α_{ij} (считается, что $\chi^{()}(x)=1$, а пустая сумма равна нулю).

3. Вспомогательные результаты

Приводимые ниже леммы — это леммы с теми же номерами из [1].

Лемма 3.3. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$ *и* $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ *на* S_n^ε, *где* $\varepsilon \in \{1, -1\}$. *Если* $[\alpha]$ *или* $[\beta]$ *имеет крюк некоторой длины* m, *то*

$$\sum_{H \in \mathrm{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha - H} \sim \sum_{K \in \mathrm{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta - K} \quad \text{на} \quad S_{n-m}^\delta, \quad \text{где} \ \ \delta = (-1)^{m+1}\varepsilon.$$

Лемма 3.4. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$ *и* $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ *на* S_n^ε, *где* $\varepsilon \in \{1, -1\}$. *Если* $[\alpha]$ *имеет единственный крюк* H *длины* m, *а* $[\beta]$ *не имеет крюков длины* m, *то* $\alpha - H = (\alpha - H)'$ *и* $\varepsilon = (-1)^m$.

Лемма 3.5. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$ *и* $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ *на* S_n^ε, *где* $\varepsilon \in \{1, -1\}$. *Если диаграммы* $[\alpha]$ *и* $[\beta]$ *имеют точно по одному крюку* H *и* K *соответственно некоторой длины* m, *то*

$$\chi^{\alpha - H} \sim \chi^{\beta - K} \quad \text{на} \ \ S_{n-m}^\delta, \quad \text{где} \ \ \delta = (-1)^{m+1}\varepsilon.$$

Лемма 3.7. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$ *и* $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ *на* S_n^ε, *где* $\varepsilon \in \{1, -1\}$. *Если* $[\alpha]$ *имеет точно два крюка* H *и* K *некоторой длины* m, *а* $[\beta]$ *не имеет крюков длины* m, *то верно одно из утверждений*:

(1) $\varepsilon = (-1)^{m+1}$, $l_H + l_K$ *нечётно* *и* $\alpha - H =' \alpha - K$;

(2) $\varepsilon = (-1)^m$ *и* *либо* $\alpha - H =' \alpha - K$, *либо разбиения* $\alpha - H$ *и* $\alpha - K$ *самоассоциированны.*

Условие $(*)$. *Пусть* χ^α *и* χ^β — *неприводимые характеры группы* S_n, *имеющие одни и те же корни на* S_n^ε *при некотором* $\varepsilon = \pm 1$, *но не исчезающие тождественно на* S_n^ε.

Теорема 3.1 [1, теорема 4.1]. *Пусть выполнено условие* $(*)$ *и* $d(\beta) > d(\alpha) = 1$. *Тогда* $n \le 11$ *и верно одно из следующих утверждений*:

(1) $\varepsilon = +1$, $\alpha =' (4)$, $\beta = (2,2)$;
(2) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (5)$, $\beta = (3,2)$;
(3) $\varepsilon = +1$, $\alpha =' (5,1)$, $\beta = (3,3)$;
(4) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (6,1)$, $\beta = (4,3)$;
(5) $\varepsilon = +1$, $\alpha =' (6,1^2)$, $\beta = (3,3,2)$;
(6) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (7,1^2)$, $\beta = (4,4,1)$;
(7) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (8,1^3)$, $\beta = (4,4,2,1)$.

Теорема 3.2 [1, теорема 5.1]. *Пусть выполнено условие* $(*)$, *причём* $d(\alpha) = d(\beta) = 2$ *и* $h_{11}^\alpha > h_{11}^\beta$. *Тогда* $n \le 16$ *и верно одно из следующих утверждений*:

(1) $\varepsilon = +1$, $\alpha =' (5,2)$, $\beta = (4,3)$;
(2) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (6,2)$, $\beta = (5,3)$;
(3) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (7,2,1)$, $\beta = (5,4,1)$;
(4) $\varepsilon = +1$, $\alpha =' (6,3,2)$, $\beta = (5,4,2)$;
(5) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (9,3,2)$, $\beta = (6,3,2^2,1)$;
(6) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (8,3,2,1)$, $\beta = (6,5,2,1)$;
(7) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (8,4,2^2)$, $\beta = (7,5,2^2)$.

Теорема 3.3 [1, теорема 6.1]. *Пусть выполнено условие* $(*)$, *причём* $d(\alpha) = d(\beta) \le 2$, $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$ *и* $\alpha \ne' \beta$. *Тогда* $n \le 10$ *и с точностью до перемены мест* α *и* β *верно одно из следующих утверждений*:

(1) $\varepsilon = +1$, $\alpha =' (3)$, $\beta =' (2,1)$;
(2) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (4)$, $\beta =' (3,1)$;
(3) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (6,3)$, $\beta =' (5,2^2)$;
(4) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (5,4)$, $\beta =' (4,3,2)$;
(5) $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (7,3)$, $\beta =' (5,2^2,1)$.

4. $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на S_n^ε. Случай $d(\beta) > d(\alpha) = 2$ и $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$

Теорема 4.1. *Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n, имеющие одни и те же корни на S_n^ε при некотором $\varepsilon = \pm 1$, но не исчезающие тождественно на S_n^ε. Предположим, что $d(\alpha) = 2 < d(\beta)$ и $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$. Тогда верно одно из следующих утверждений*:
(1) $n = 10$, $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (5,5)$, $\beta =' (4,3^2)$;
(2) $n = 14$, $\varepsilon = -1$, $\alpha =' (6,6,2)$, $\beta =' (6,4,4)$.

Доказательство. По теореме 2.1 $d(\beta) = 3$. Пусть $m := h_{11}^\alpha$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m) = \{H_{11}^\alpha, H_{11}^\beta\}$ и по лемме 3.5

$$\chi^{\alpha^{11}} \sim \chi^{\beta^{11}} \quad \text{на} \quad S_{n-m}^\sigma, \quad \text{где} \quad \sigma = (-1)^{m+1}\varepsilon. \tag{4.0}$$

Так как $d(\beta^{11}) > d(\alpha^{11}) = 1$, то по теореме 3.1 выполнено одно из следующих условий:
(1′) $\alpha^{11} =' (4)$, $\beta^{11} =' (2,2)$, $\sigma = 1$;
(2′) $\alpha^{11} =' (5)$, $\beta^{11} =' (3,2)$, $\sigma = -1$;
(3′) $\alpha^{11} =' (5,1)$, $\beta^{11} =' (3,3)$, $\sigma = 1$;
(4′) $\alpha^{11} =' (6,1)$, $\beta^{11} =' (4,3)$, $\sigma = -1$;
(5′) $\alpha^{11} =' (6,1^2)$, $\beta^{11} =' (3,3,2)$, $\sigma = 1$;
(6′) $\alpha^{11} =' (7,1^2)$, $\beta^{11} =' (4,4,1)$, $\sigma = -1$;
(7′) $\alpha^{11} =' (8,1^3)$, $\beta^{11} =' (4,4,2,1)$, $\sigma = -1$.

Случай 1. Пусть $\alpha^{11} =' (4), \beta^{11} =' (2,2)$ и $\sigma = 1$ ($\varepsilon = (-1)^{m+1}$).

Без ограничения общности можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ в рассматриваемом случае имеют вид, изображённый на рис. 1, где $\{a,b,c,d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $c \geq d$.

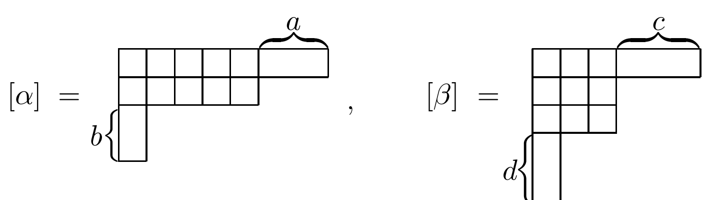


Рис. 1

Тогда $n = 10 + a + b = 9 + c + d$, $m = 6 + a + b$ и поэтому (с учётом (4.0))

$$1 + a + b = c + d, \tag{4.1}$$

$$\varepsilon = (-1)^{m+1} = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{c+d}. \tag{4.1a}$$

Вычислим некоторые длины крюков из $[\alpha]$ и $[\beta]$.

$h_{12}^\alpha = 5 + a$,	$h_{21}^\alpha = 5 + b$,	$h_{12}^\beta = 4 + c$,	$h_{21}^\beta = 4 + d$,
$h_{13}^\alpha = 4 + a$,	$h_{31}^\alpha = b$,	$h_{13}^\beta = 3 + c$,	$h_{31}^\beta = 3 + d$,
$h_{14}^\alpha = 3 + a$,	$h_{22}^\alpha = 4$,	$h_{14}^\beta = c$,	$h_{41}^\beta = d$.

Подобные списки мы будем составлять и в следующих случаях. Их нужно иметь в виду всякий раз, когда будут устанавливаться какие-либо соотношения между длинами крюков.

Пусть M есть множество всех максимальных элементов из $\{a,b,c,d\}$. Если $b \in M$, то $a \notin M$ по (4.1) и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+b) = \{H_{21}^\alpha\}$. Тогда по лемме 3.4 $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, что противоречиво. Значит, $b \notin M$. Кроме того, $M \neq \{c,d\}$, так как иначе $a \leq c-1$ и $b \leq c-1$, откуда $1+a+b < 2c$, что противоречит (4.1). Поэтому возможен лишь один из следующих случаев 1.1 и 1.2.

Случай 1.1. Пусть $a \in M$. Тогда $a > b$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+a) = \{H_{12}^\alpha\}$ (см. список длин крюков) и по лемме 3.4 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$, откуда следует (см. рис. 1), что $b = 2$.

Если $M = \{a\}$, то по (4.1) $a > 1 + b = 3$, а тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4+a) = \{H_{13}^\alpha\}$ и по лемме 3.4 $\varepsilon = (-1)^{4+a} = (-1)^a \neq (-1)^{1+a+b}$ в противоречие с (4.1a).

Если $M = \{a,c\}$, то по (4.1) $d = 1 + b = 3$ и $a = c \geq 4$. Из списка длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ видно, что $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4+a) = \{H_{13}^\alpha, H_{12}^\beta\}$, откуда по лемме 3.5 и рис. 1 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_8^δ, где $\delta = (-1)^{5+a}\varepsilon = 1$, $\alpha^{13} = (4,2,1^2)$, $\beta^{12} = (2^2,1^4)$. Но это соотношение противоречит условию теоремы, так как значения характеров $\chi^{\alpha^{13}}$ и $\chi^{\beta^{12}}$ на элементе $g_{(6,2)}$ из S_8^δ равны (согласно предложению 2.2) 0 и 1 соответственно. (Вид разбиений α^{13} и β^{12} усматриваются из рис. 1. Далее в подобных случаях *ссылка на рисунок не приводится*, а при вычислении значений характеров *ссылки на предложение 2.2, как правило, опускаются.*)

Если же $M = \{a, c, d\}$ (последняя возможность), то $a = c = d = 3$ (последнее по (4.1)) и $n = 15$. Теперь $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5) = \{H^\alpha_{15}\}$, откуда по лемме 3.4 $\alpha^{15} = (\alpha^{15})'$. Но это противоречиво, так как $\alpha^{15} = (4, 4, 1^2)$. Случай 1.1 противоречив.

Случай 1.2. Пусть $M = \{c\}$. Тогда $\mathrm{H}^\beta(4+c) = \{H^\beta_{12}\}$. Так как диаграмма $[\beta^{12}]$ не самоассоциирована, то по лемме 3.4 $[\alpha]$ имеет крюк длины $4+c$. Из списка длин крюков в $[\alpha]$ видно, что $\mathrm{H}^\alpha(4+c) \subseteq \{H^\alpha_{12}, H^\alpha_{21}\}$, и поэтому возможен лишь один из следующих трёх подслучаев.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4+c) = \{H^\alpha_{12}, H^\beta_{12}\}$. Тогда $4 + c = 5 + a \neq 5 + b$, $c = 1 + a$ и по (4.1) $d = b$. По лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^δ_{5+d}, где $\delta = \pm 1$, $\alpha^{12} = (4, 1^{1+d})$, $\beta^{12} = (2^2, 1^{1+d})$. Так как $d(\alpha^{12}) = 1 < d(\beta^{12})$, то по теореме 3.1 тройка $(\alpha^{12}, \beta^{12}, \delta)$ должна удовлетворять одному из условий (1)–(7) её заключения на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$. Но ни при каком d это не возможно.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4+c) = \{H^\alpha_{21}, H^\beta_{12}\}$. Тогда $4+c = 5+b \neq 5+a$, откуда $c = 1+b$, $b \neq a$ и по (4.1) $d = a$. По лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^δ_{5+d}, где $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (5 + a)$, $\beta^{12} = (2^2, 1^{1+d})$. Согласно теореме 3.1 это соотношение может быть выполнено только при $a = d = 0$ и $\delta = -1$. Так как $b \neq a$, то $c = 1 + b \geq 2$. Если $c > 2$, то $3 + c \geq 5$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(3 + c) = \{H^\beta_{13}\}$ и по лемме 3.4 должно быть $\beta^{13} = (\beta^{13})'$, что противоречиво, так как $\beta^{13} = (2^3)$. Следовательно, $c = 2$, $b = 1$, $n = 11$, $\alpha = (5, 5, 1)$, $\beta = (5, 3, 3)$ и $\varepsilon = 1$. Однако при $g = g_{(5,4,2)}$ получаем (с помощью предложения 2.2) $\chi^\alpha(g) = -\chi^{(4,1^2)}(g_{(4,2)}) = 0$ и $\chi^\beta(g) = -\chi^{(2,2,2)}(g_{(4,2)}) = -1$, что противоречиво.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4+c) = \{H^\alpha_{12}, H^\alpha_{21}, H^\beta_{12}\}$. Тогда $4+c = 5+a = 5+b$, $c = 1+a = 1+b$ и по (4.1) $d = b = a$. По лемме 3.3 $-\chi^{\alpha^{12}} + (-1)^b\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^δ_{5+d}, где $\delta = (-1)^{5+c}\varepsilon = (-1)^{1+c}\varepsilon = (-1)^{1+d}$ (использовано (4.1a)). Из рис. 1 видно, что $\alpha^{12} = (4, 1 + d)$, $\alpha^{21} = (5 + d)$ и $\beta^{12} = (2^2, 1^{1+d})$. Предположим, что $d \geq 2$. Тогда при $g = g_{(2+d,3)}$ $(\in S^\delta_{5+d})$ с помощью предложения 1.2 получим $\chi^{\alpha^{12}}(g) = 0$, $\chi^{\alpha^{21}}(g) = 1$ и $\chi^{\beta^{12}}(g) = 0$, что противоречит выписанному выше соотношению. Если $d = 1$, то $\alpha = (6, 5, 1)$, $\beta = (5, 3, 3, 1)$, $\varepsilon = -1$, и (снова по предложению 2.2) при $g = g_{(6,3,3)}$ $(\in S^-_{12})$ получим $\chi^\alpha(g) = -\chi^{(4,2)}(g_{(3,3)}) = -\chi^{(1^3)}(g_{(3)}) = -1$ и $\chi^\beta(g) = \chi^{(2^2,1^2)}(g_{(3,3)}) = 0$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $d = 0$ $(= a = b)$ и $c = 1$. Тогда $\alpha = (5, 5)$, $\beta = (4, 3^3)$ и $\varepsilon = -1$, т. е. выполнено утверждение (1) теоремы.

Итак, в случае 1 выполнено условие (1) заключения теоремы.

Случай 2. Пусть $\alpha^{11} =' (5), \beta^{11} =' (3, 2)$ и $\sigma = -1$ $(\varepsilon = (-1)^m)$.

Без ограничения общности можно считать, что $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют вид, изображённый на рис. 2 ($\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$). Тогда $n = 12 + a + b = 11 + c + d$, $m = 7 + a + b$, и поэтому

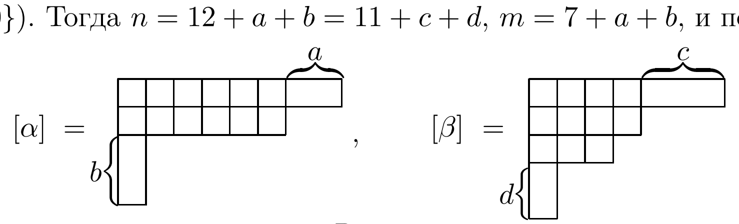


Рис. 2

$$1 + a + b = c + d, \tag{4.2}$$

$$\varepsilon = (-1)^m = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{c+d}. \tag{4.2a}$$

Нам потребуются следующие длины крюков из $[\alpha]$ и $[\beta]$.

$h^\alpha_{12} = 6 + a$,	$h^\alpha_{21} = 6 + b$,	$h^\beta_{12} = 5 + c$,	$h^\beta_{21} = 5 + d$,
$h^\alpha_{13} = 5 + a$,	$h^\alpha_{31} = b$,	$h^\beta_{13} = 4 + c$,	$h^\beta_{31} = 3 + d$,
$h^\alpha_{14} = 4 + a$,	$h^\alpha_{22} = 5$,	$h^\beta_{14} = 2 + c$,	$h^\beta_{41} = d$.
$h^\alpha_{15} = 3 + a$,		$h^\beta_{15} = c$,	

Пусть M есть множество всех максимальных элементов из $\{a,b,c,d\}$. Если $b \in M$, то по (4.2) $a \notin M$ и, следовательно, $\mathrm{H}(6+b) = \{H^{\alpha}_{21}\}$. Тогда по лемме 3.4 $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, что противоречиво, так как $\alpha^{21} = (6{+}a)$. Следовательно, $b \notin M$. Кроме того, M не может совпадать с $\{c,d\}$ так как в противном случае $a \le c-1$ и $b \le c-1$, откуда $1+a+b \le 2c-1 < c+d$ в противоречие с (4.2). Поэтому необходимо рассмотреть лишь следующие случаи 2.1—2.3.

Случай 2.1. Пусть $a \in M$. Из списка длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ видно, что $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5{+}a) = \{H^{\alpha}_{12}\}$, и по лемме 3.4 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$, откуда следует, что $b = 3$.

Если $M = \{a\}$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+a) = \{H^{\alpha}_{13}\}$ ($5+a \ne 6+b$, так как иначе по (4.2) $c+d = 2a$ и $\{c,d\} \subseteq M$), и по лемме 3.4 $\varepsilon = (-1)^{5+a} = (-1)^{1+a}$. Но это противоречит (4.2a), так как $b = 3$.

Если $M = \{a,c\}$, то по (4.2) $a = c > d = b+1 = 4$, $n = 15+a$, и из списка длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ видно, что $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+a) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{12}\}$, откуда по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{10}, где $\delta = (-1)^a\varepsilon = 1$, $\alpha^{13} = (5,2,1^3)$, $\beta^{12} = (7,2,1)'$. Но это противоречит условию теоремы, так как $\chi^{\alpha^{13}}(g_{(7,3)}) = 0$ и $\chi^{\beta^{12}}(g_{(7,3)}) = 1$, а элемент $g_{(7,3)}$ принадлежит $S^{\delta}_{10} = A_{10}$.

Если $M = \{a,d\}$, то, как и в предыдущем случае, $a = d > c = 1+b = 4$, $n = 15+a$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+a) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{21}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{10}, $\delta = (-1)^a\varepsilon = 1$, $\alpha^{13} = (5,2,1^3)$, $\beta^{12} = (8,2)$. Но это противоречиво, так как $\chi^{\alpha^{13}}(g_{(8,2)}) = 0$ и $\chi^{\beta^{12}}(g_{(8,2)}) = 1$.

Следовательно, $M = \{a,c,d\}$. Тогда $a = c = d = b+1 = 4$ по (4.2); $n = 19$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8) = \{H^{\alpha}_{14}, H^{\beta}_{13}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{14}} \sim \chi^{\beta^{13}}$ на S^{δ}_{11}, $\delta = (-1)^9\varepsilon = -1$, $\alpha^{14} = (5,3,1^3)$, $\beta^{13} = (7,3,1)'$. Однако $\chi^{\alpha^{14}}(g_{(7,4)}) = 0$ и $\chi^{\beta^{13}}(g_{(7,4)}) = 1$. Случай 2.1 противоречив.

Случай 2.2. Пусть $M = \{c\}$. Тогда $\mathrm{H}^{\beta}(5+c) = \{H^{\beta}_{12}\}$. Предположим, что $[\alpha]$ не имеет крюков длины $5+c$. Тогда по лемме 3.4 диаграмма $[\beta^{12}]$ самоассоциирована и $\varepsilon = (-1)^{1+c}$. Так как $\beta^{12} = (3,2,1,1^d)$, то $d = 0$. Но тогда по (4.2a) $\varepsilon = (-1)^{c+d} = (-1)^c$ в противоречие с установленным выше. Следовательно, $[\alpha]$ имеет крюк длины $5+c$. Как видно из списка длин крюков в $[\alpha]$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5{+}c)$ совпадает с одним из множеств $\{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{12}\}$, $\{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$, $\{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$.

Если $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5{+}c) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{12}\}$, то $4{+}c = 5{+}a \ne 5{+}b$, $c = 1{+}a$ и по (4.2) $d = b$. По лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{6+d}, $\delta = (-1)^c\varepsilon = (-1)^d$, $\alpha^{12} = (5,1^{1+d})$, $\beta^{12} = (3,2,1^{1+d})$, что противоречит теореме 3.1. Если же $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+c) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$, то $c = 1+b$, $d = a$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{6+d}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (6+d)$, $\beta^{12} = (3,2,1^{1+d})$, что снова противоречит теореме 3.1.

Поэтому $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+c) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$ и (с учётом (4.2)) $a = b = d = c-1 \ge 0$. Если $a \ge 2$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4{+}a) = \{H^{\alpha}_{14}\}$ и по лемме 3.4 $\alpha^{14} = (\alpha^{14})'$, что противоречиво, так как $\alpha^{14} = (5,3,1^a)$. Если $a = 1$, то $\alpha = (7,6,1)$, $\beta = (6,4,3,1)$, $\varepsilon = -1$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5) = \{H^{\alpha}_{14}, H^{\alpha}_{22}\}$. По лемме 3.7 либо $\alpha^{14} = (\alpha^{22})'$, либо разбиения α^{14} и α^{22} оба самоассоциированы. Однако, как видно из рис. 2, каждое из этих условий противоречиво. Следовательно, $a = b = d = 0$ и $c = 1$. Тогда $\alpha = (6,6)$, $\beta = (5,4,3)$ и $\varepsilon = -1$. Это также противоречиво, так как на элементе $g = g_{(6,4,2)}$ характеры χ^{α} и χ^{β} принимают значения 2 и 0 соответственно. Случай 2.2 противоречив.

Случай 2.3. Пусть $M = \{d\}$. Тогда $\mathrm{H}^{\beta}(5+d) = \{H^{\beta}_{21}\}$. Так как диаграмма $[\beta^{21}]$ не самоассоциирована, то по лемме 3.4 диаграмма $[\alpha]$ имеет крюк длины $5+d$ и, как видно из списка длин крюков в $[\alpha]$, возможны лишь следующие три случая: (а) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5{+}d) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{21}\}$, $d = 1+a$ и (по (4.2)) $c = b$; (б) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+d) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{21}\}$, $d = 1+b$ и $c = a$; (в) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+c) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{21}\}$ и $a = b = c = d-1$.

Если верно (а) или (б), то по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{6+c}, $\alpha^{12} = (5,1^{1+b})$, $\beta^{21} = (4{+}b,2)$, или $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{6+c}, $\alpha^{21} = (6+c)$, $\beta^{21} = (4+c,2)$, что противоречит теореме 3.1.

Пусть верно (в). По лемме 3.3 $-\chi^{\alpha^{12}} + (-1)^b\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{5+b}, где $\delta = (-1)^{6+d}\varepsilon = (-1)^c = (-1)^b$, $\alpha^{12} = (5,1+b)$, $\alpha^{21} = (6+b)$ и $\beta^{21} = (4+b,2)$. Если $b \ge 2$, то $[\alpha^{12}]$ и $[\beta^{21}]$ не имеют крюков длины $3+b$ и поэтому значения левой и правой частей записанного выше соотношения на элементе $g_{(3+b,3)} \in S^{\delta}_{6+b}$ равны $(-1)^b$ и 0 соответственно, что противоречиво. Случай $b = 1$ также противоречив, так как тогда значения левой и правой частей того же соотношения на элементе $g_{(4,3)} \in S^{\delta}_{6+b}$ равны -2 и 0 соответственно. Следовательно, $b = 0$,

$\alpha = (6,6)$, $\beta = (4^2,3,1)$, $\varepsilon = -1$. Но тогда на элементе $g_{(6,3^2)}$ характеры χ^α и χ^β принимают значения 2 и 0 соответственно, что противоречит условию теоремы. Случай 2.3 невозможен.

Итак, случай 2 противоречив.

Случай 3. Пусть $\alpha^{11} =' (5,1), \beta^{11} =' (3,3)$ и $\sigma = 1$ ($\varepsilon = (-1)^{m+1}$).

Без ограничения общности можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют вид, изображённый на рис. 3 ($\{a,b,c,d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$). Тогда $n = 14 + a + b = 12 + c + d$, $m = 7 + a$,

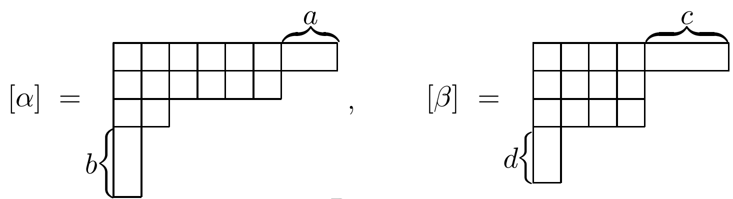


Рис. 3

$$2 + a + b = c + d, \tag{4.3}$$

$$\varepsilon = (-1)^{m+1} = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{1+c+d},$$

и справедливы равенства:

$$\begin{array}{llll}
h^\alpha_{12} = 7 + a, & h^\alpha_{21} = 7 + b, & h^\beta_{12} = 5 + c, & h^\beta_{21} = 5 + d, \\
h^\alpha_{13} = 5 + a, & h^\alpha_{31} = 2 + b, & h^\beta_{13} = 4 + c, & h^\beta_{31} = 4 + d, \\
h^\alpha_{14} = 4 + a, & h^\alpha_{22} = 6, & h^\beta_{14} = 3 + c, & h^\beta_{22} = 4. \\
h^\alpha_{15} = 3 + a, & & h^\beta_{15} = c, &
\end{array}$$

Пусть M есть множество всех максимальных элементов из $\{a,b,c,d\}$.

Случай 3.1. Пусть $a \in M$. Тогда $b < a$ по (4.3) и поэтому $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7{+}a) = \{H^\alpha_{12}\}$. По лемме 3.4 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$, откуда следует (см. рис. 3), что $b = 2$ и $n = 16 + a \geq 19$.

Пусть $M = \{a\}$. Тогда $2a - 2 \geq c + d$, а так как по (4.3) $c + d = 2 + a + b = 4 + a$, то $a > 4$ и $5 + a > 7 + b$. Но тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5 + a) = \{H^\alpha_{13}\}$ и по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$. Но это противоречиво, так как $\alpha^{13} = (5,2^2,1^2)$. Пусть $M = \{a,c\}$. По (4.3) $d = 2 + b = 4$. Следовательно, $a = c \geq 5$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5 + a) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{12}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^δ_{11}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (5,2^2,1^2)$, $\beta^{12} = (7,2,2)$, что противоречит теореме 3.3. Пусть $M = \{a,d\}$. Тогда по (4.3) $c = 2 + b = 4$. Следовательно, $a = d \geq 5$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5 + a) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{21}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^δ_{11}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (5,2^2,1^2)$, $\beta^{21} = (8,3)$, что противоречит теореме 3.3.

Пусть $M = \{a,c,d\}$. Тогда по (4.3) $a = c = d = 2 + b = 4$, $n = 20$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7) = \{H^\alpha_{15}, H^\beta_{14}\}$, откуда по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{15}} \sim \chi^{\beta^{14}}$ на S^δ_{13}, где $\delta = \pm 1$, $\alpha^{15} = (5,4,2,1^2)$, $\beta^{14} = (7,3,3)'$. Представим себе диаграммы $[\alpha^{15}]$, $[\beta^{14}]$ и заметим, что они имеют точно по одному крюку длины 9. Следовательно, по лемме 3.5, применённой к записанному выше соотношению на S^δ_{13}, имеем $\chi^{(3,1)} \sim \chi^{(2,2)}$ на S^ω_4, где $\omega = \pm 1$. Но это противоречит теореме 3.1. Случай 3.1 противоречив.

Случай 3.2. Пусть $b \in M$. Тогда $b > a$ (по (4.3)) и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + b) = \{H^\alpha_{21}\}$. По лемме 3.4 должно быть $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$. Но это не так. Случай 3.2 противоречив и поэтому $M \subseteq \{c,d\}$.

Случай 3.3. Пусть $M = \{c\}$. Тогда $\mathrm{H}^\beta(5 + c) = \{H^\beta_{12}\}$. Так как $\beta^{12} = (3^2,1^{1+d}) \neq (\beta^{12})'$, то по лемме 3.4 $\mathrm{H}^\alpha(5 + c) \neq \varnothing$. Ввиду (4.3) $c > 1$ и, следовательно, $5 + c > 6$. Поэтому $\mathrm{H}^\alpha(5 + c) \subseteq \{H^\alpha_{12}, H^\alpha_{21}\}$ и имеются лишь следующие три возможности для $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5 + c)$.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5 + c) = \{H^\alpha_{12}, H^\beta_{12}\}$. Тогда $c = 2 + a$, и по (4.3) $d = b$. По лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^δ_{7+d}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{12} = (5,1^{2+d})$, $\beta^{12} = (3^2,1^{1+d})$, что противоречит теореме 3.1. Подобное противоречие получаем и при $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5 + c) = \{H^\alpha_{21}, H^\beta_{12}\}$ ($\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^δ_{7+d}).

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5 + c) = \{H^\alpha_{12}, H^\alpha_{21}, H^\beta_{12}\}$. Тогда, учитывая (4.3), имеем $a = b = d = c - 2$, $n = 10 + 2c$, и по лемме 3.3 $\chi^{\alpha^{12}} + (-1)^{c-1}\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^δ_{5+c}, где $\delta = (-1)^{c-1}$ $\alpha^{12} = (5,1^c)$, $\alpha^{21} = (4 + c,1)$, $\beta^{12} = (1 + c,2^2)$. Если $c > 3$, то $[\alpha^{12}]$ и $[\beta^{21}]$ не имеют крюков длины $c + 1$ и поэтому значения левой и правой частей приведённого выше соотношения на элементе $g_{(c+1,4)}$ из S^δ_{5+c} равны 1 и 0 соответственно, что противоречиво. Следовательно, $c \in \{2,3\}$. Если $c = 3$, то $\varepsilon = 1$, и на элементе $g_{(5,3)}$ значения левой и правой частей приведённого выше соотношения равны 0 и 1 соответственно, что также противоречиво. Следовательно, $c = 2$, $n = 14$, $\alpha = (6,6,2)$, $\beta = (6,4,4)$ и $\varepsilon = -1$, т. е. выполнено утверждение (2) теоремы.

Случай 3.4. Пусть $M = \{d\}$. Тогда $\mathrm{H}^\beta(5+d) = \{H^\beta_{21}\}$. Так как диаграмма $[\beta^{21}]$ не самоассоциирована, то по лемме 3.4 $[\alpha]$ имеет крюк длины $5+d$. По (4.3) $d > 1$ и, как видно из списка длин крюков в $[\alpha]$, возможны лишь следующие три случая:

(а) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+d) = \{H^\alpha_{12}, H^\beta_{21}\}$, $d = 2+a$ и (по (4.3)) $c = b$;

(б) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+d) = \{H^\alpha_{21}, H^\beta_{21}\}$, $d = 2+b$ и $c = a$;

(в) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+c) = \{H^\alpha_{12}, H^\alpha_{21}, H^\beta_{21}\}$, и $a = b = c = d-2$.

Если верно (а), то по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^δ_{7+c}, $\delta = \pm 1$, причём $\alpha^{12} = (5, 1^{2+c})$ и $\beta^{21} = (4+c, 3)$. Но это противоречит теореме 3.1.

Пусть верно (б). Тогда по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^δ_{7+c}, где $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (6+c, 1)$, $\beta^{21} = (4+c, 3)$. Согласно теореме 3.1 это возможно лишь при $c = 0$. Таким образом, $a = c = 0$, $d = 2+b$ и $n = 14+b$. Если $b > 1$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4+d) = \{H^\beta_{31}\}$, и по лемме 3.4 должно быть $\beta^{31} = (\beta^{31})'$. Но это противоречиво, так как $\beta^{31} = (4,4)$. Значит, $a = c = 0$ и $b \in \{0,1\}$. Если $b = 1$, то $n = 15$, $\alpha = (6,6,2,1)$, $\beta = (4^3, 1^3)$, $\varepsilon = 1$ и, как легко увидеть, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7) = \{H^\alpha_{12}, H^\beta_{31}\}$. По лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{31}}$ на S^δ_8, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{12} = (5, 1^3)$, $\beta^{31} = (4,4)$, что противоречит теореме 3.1. Следовательно, $b = 0$, $n = 14$, $\alpha = (6,6,2)$ и $\beta = (4^3, 1^2)$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6) = \{H^\alpha_{22}, H^\beta_{31}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{22}} \sim \chi^{\beta^{31}}$ на S^δ_8, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{22} = (6, 1^2)$, $\beta^{31} = (4,4)$, что противоречит теореме 3.1.

Пусть верно (в). Тогда $a = b = c = d-2$, $n = 10+2d$, и по лемме 3.3 $\chi^{\alpha^{12}} + (-1)^{d-1}\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^δ_{5+d}, где $\delta = (-1)^d\varepsilon = (-1)^{1+d}$, $\alpha^{12} = (5, 1^d)$, $\alpha^{21} = (4+d, 1)$ и $\beta^{21} = (2+b, 3)$. При $d > 2$ имеем $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4+d) = \{H^\beta_{31}\}$ и по лемме 3.4 $\beta^{31} = (\beta^{31})'$. Но это не так: $\beta^{31} = (4+c, 4)$. Следовательно, $d = 2$, $n = 14$, и $\chi^{(5,1^2)} - \chi^{(6,1)} \sim \chi^{(4,3)}$ на S^-_7. Но это противоречиво, так как значения левой и правой частей этого соотношения на элементе $g_{(2^3,1)}$ равны -3 и 0 соответственно. Случай 3.4 противоречив.

Случай 3.5. Пусть $M = \{c, d\}$. Здесь $a \le c-1$, $b \le c-1$ и по (4.3) $a + b = 2c - 2$, т. е. $a = b = c-1$. Тогда $7 + a = 7 + b > 5 + c = 5 + d$ и поэтому $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7+a) = \{H^\alpha_{12}, H^\alpha_{21}\}$ и согласно лемме 3.7 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$ или разбиения α^{12} и α^{21} самоассоциированы. Однако это ложно.

Итак, в случае 3 выполнено утверждение (2) теоремы.

Случай 4. Пусть $\alpha^{11} =' (6,1), \beta^{11} =' (4,3)$ и $\sigma = -1$ ($\varepsilon = (-1)^m$).

Без ограничения общности можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют вид, изображённый на рис. 4 ($\{a,b,c,d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$). Тогда $n = 16 + a + b = 14 + c + d$ и поэтому

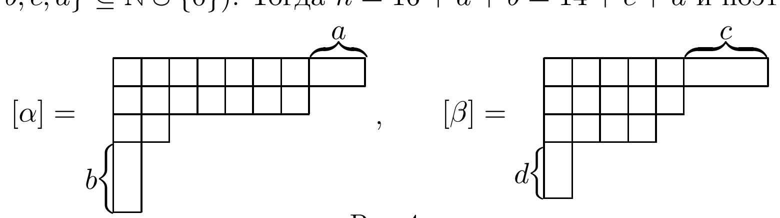


Рис. 4

$$2 + a + b = c + d, \tag{4.4}$$

$$\varepsilon = (-1)^{m+1} = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{1+c+d},$$

$$
\begin{array}{llll}
h^\alpha_{12} = 8 + a, & h^\alpha_{21} = 8 + b, & h^\beta_{12} = 6 + c, & h^\beta_{21} = 6 + d, \\
h^\alpha_{13} = 6 + a, & h^\alpha_{31} = 2 + b, & h^\beta_{13} = 5 + c, & h^\beta_{31} = 4 + d, \\
h^\alpha_{14} = 5 + a, & h^\alpha_{22} = 7, & h^\beta_{14} = 4 + c, & h^\beta_{22} = 5. \\
h^\alpha_{15} = 4 + a, & & h^\beta_{15} = 2 + c, &
\end{array}
$$

Пусть M есть множество всех максимальных элементов из $\{a, b, c, d\}$.

Случай 4.1. Пусть $a \in M$. Тогда $b < a$ по (4.4) и поэтому $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8+a) = \{H^{\alpha}_{12}\}$. По лемме 3.4 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$, откуда следует (см. рис. 4), что $b = 3$ и, следовательно, $n = 19 + a$, и $a \geq 4$.

Пусть $M = \{a\}$. Диаграмма $[\beta]$ не имеет крюков длины $6+a$. При $a \neq 5$ $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6+a) = \{H^{\alpha}_{13}\}$ и по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$. Но это противоречиво, так как $\alpha^{13} = (6, 2^2, 1^3)$. Следовательно, $a = 5$. Но тогда $c \leq 4$, $d \leq 4$ и $c + d < 10 = 2 + a + b$ в противоречие с (4.4).

Пусть $M = \{a, c\}$. По (4.4) $d = 2+b = 5$. Следовательно, $a = c \geq 6$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6+a) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{12}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{13}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (6, 2^2, 1^3)$, $\beta^{12} = (8, 2, 2, 1)'$, что противоречит теореме 3.3. При $M = \{a, d\}$ получаем подобное противоречие: $c = 2 + b = 5$, $a = d > 5$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + a) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{21}\}$ и $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{13}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (6, 2^2, 1^3)$, $\beta^{21} = (10, 3)$.

Пусть $M = \{a, c, d\}$. По (4.4) $a = c = d = 2 + b = 5$, $n = 24$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(10) = \{H^{\alpha}_{14}, H^{\beta}_{13}\}$, откуда по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{14}} \sim \chi^{\beta^{13}}$ на S^{δ}_{14}, где $\delta = \pm 1$, $\alpha^{14} = (6, 3, 2, 1^3)'$, $\beta^{13} = (8, 3, 2, 1)'$. Отсюда и из очевидного равенства $\mathrm{H}^{\alpha^{14},\beta^{13}}(9) = \{H^{\beta^{13}}_{21}\}$ по лемме 3.4 следует, что разбиение $(\beta^{13})^{21} = (4, 1)$ должно быть самоассоциированным, что противоречиво. Случай 4.1 противоречив.

Случай 4.2. Пусть $b \in M$. Тогда $b > a$ (ввиду (4.4)) и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + b) = \{H^{\alpha}_{21}\}$. По лемме 3.4 $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, что не так. Следовательно, этот случай противоречив и $M \subseteq \{c, d\}$.

Случай 4.3. Пусть $M = \{c\}$. Тогда $\mathrm{H}^{\beta}(6 + c) = \{H^{\beta}_{12}\}$. Так как $\beta^{12} = (4, 3, 1^{1+d}) \neq (\beta^{12})'$, то по лемме 3.4 $[\alpha]$ имеет крюк длины $6 + c$. Ввиду (4.4) $c > 1$ и, следовательно, $6 + c > 7$. Поэтому $\mathrm{H}^{\alpha}(6+c) \subseteq \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}\}$ и имеются лишь следующие три возможности для $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6+c)$.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + c) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{12}\}$. Тогда $c = 2 + a$ и по (4.4) $d = b$. По лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{8+d}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{12} = (6, 1^{2+d})$, $\beta^{12} = (4, 3, 1^{1+d})$, что противоречит теореме 3.1. При $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + c) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$ получаем подобное противоречие: по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{8+d}.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + c) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$. Отсюда и из (4.4) следует, что $a = b = d = c - 2 \geq 0$, $n = 12 + 2c$ и $\varepsilon = -1$. Предположим, что $c > 2$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5 + c) = \{H^{\beta}_{13}\}$ и по лемме 3.4 разбиение $\beta^{13} = (4, 3, 2, 1^d)$ должно быть самоассоциировано, что возможно лишь при $d = 1$, т. е. при $c = 3$. Таким образом, $c \in \{2, 3\}$. Кроме того, по лемме 3.3 $\chi^{\alpha^{12}} + (-1)^{c-1}\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{6+c}, где $\delta = (-1)^c$, причём $\alpha^{12} = (6, 1^c)$, $\alpha^{21} = (5 + c, 1)$, $\beta^{12} = (1 + c, 2^2, 1)'$. Однако значения левой и правой частей этого соотношения равны -1 и 0 на элементе $g_{(6,3)}$ при $c = 3$ и равны 2 и 0 на элементе $g_{(5,3)}$ при $c = 2$, что противоречиво.

Случай 4.4. Пусть $M = \{d\}$. Тогда $\mathrm{H}^{\beta}(6 + d) = \{H^{\beta}_{21}\}$, а так как диаграмма $[\beta^{21}]$ не самоассоциирована, то по лемме 3.4 диаграмма $[\alpha]$ имеет крюк длины $6 + d$. По (4.4) $d > 1$ и, как видно из списка длин крюков в $[\alpha]$, возможны лишь следующие три случая:

(а) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + d) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{21}\}$, $d = 2 + a$ и (по (4.4)) $c = b$;

(б) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + d) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{21}\}$, $d = 2 + b$ и $c = a$;

(в) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + d) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{21}\}$ и $a = b = c = d - 2$.

Если верно (а) или (б), то по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{8+c}, $\alpha^{12} = (6, 1^{2+c})$, $\beta^{21} = (5 + c, 3)$ или $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{8+c}, $\alpha^{21} = (7 + c, 1)$, $\beta^{21} = (5 + c, 3)$, что противоречит теореме 3.1.

Пусть верно (в). Тогда, $a = b = c = d - 2$, $n = 10 + 2d \geq 14$, $\varepsilon = -1$ и по лемме 3.3 $\chi^{\alpha^{12}} + (-1)^{d-1}\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{6+d}, где $\delta = (-1)^d$. Здесь $\alpha^{12} = (6, 1^d)$, $\alpha^{21} = (5 + d, 1)$ и $\beta^{21} = (3 + d, 3)$. При $d > 4$ значения левой и правой частей этого соотношения на элементе $g_{(d+1,5)}$ из $S^{\delta}_{6_d}$ равны ± 1 и 0 соответственно, что противоречиво. Следовательно, $d \in \{2, 3, 4\}$. Однако в каждом из этих трёх случаев записанное соотношение также противоречиво: при $d = 2$ значения левой и правой частей на элементе $g_{(4,4)}$ равны $-2, 0$; при $d = 3$ значения этих частей на элементе $g_{(4,3,1^2)}$ равны $2, 0$; а при $d = 4$ их значения на элементе $g_{(6,4)}$ равны $1, 0$. Случай 4.4 противоречив.

Случай 4.5. Пусть $M = \{c, d\}$. Тогда $a \leq c - 1$, $b \leq c - 1$, и по (4.4) $a + b = 2c - 2$, т. е. $a = b = c - 1$. Здесь $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + a) = \{H^{\alpha}_{12}\, H^{\alpha}_{21}\}$, откуда согласно лемме 3.7 должно быть либо

$\alpha^{12} = (\alpha^{21})'$, либо каждое из разбиений α^{12} и α^{21} самоассоциировано. Однако это ложно, так как $\alpha^{12} = (6, 1^{2+b})$ и $\alpha^{21} = (7 + a, 1)$.

Случай 4 противоречив.

Случай 5. Пусть $\alpha^{11} =' (6, 1^2), \beta^{11} =' (3, 3, 2)$ и $\sigma = 1$ $(\varepsilon = (-1)^{m+1})$.

Без ограничения общности можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют вид, изображённый на рис. 5, $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $c \geq d$. Тогда $n = 18 + a + b = 15 + c + d$ и поэтому

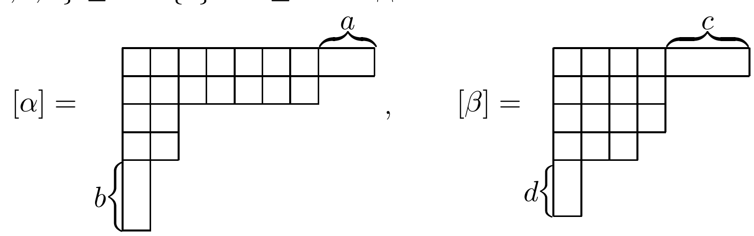


Рис. 5

$$3 + a + b = c + d, \tag{4.5}$$

$$\varepsilon = (-1)^{m+1} = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{c+d},$$

$$\begin{array}{llll}
h_{12}^{\alpha} = 9 + a, & h_{21}^{\alpha} = 9 + b, & h_{12}^{\beta} = 6 + c, & h_{21}^{\beta} = 6 + d, \\
h_{13}^{\alpha} = 6 + a, & h_{22}^{\alpha} = 8, & h_{13}^{\beta} = 5 + c, & h_{22}^{\beta} = 5, \\
h_{14}^{\alpha} = 5 + a, & h_{31}^{\alpha} = 3 + b, & h_{14}^{\beta} = 3 + c, & h_{31}^{\beta} = 5 + d, \\
h_{15}^{\alpha} = 4 + a, & h_{41}^{\alpha} = 2 + b, & h_{15}^{\beta} = c, & h_{41}^{\beta} = 3 + d.
\end{array}$$

Пусть M есть множество всех максимальных элементов из $\{a, b, c, d\}$.

Случай 5.1. Пусть $a \in M$. Тогда по (4.5) $b \leq a - 2$, и поэтому $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9 + a) = \{H_{12}^{\alpha}\}$. По лемме 3.4 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$, откуда следует (см. рис. 5), что $b = 2$, $n = 20 + a$ и $a \geq 2 + b = 4$.

Если $M = \{a\}$, то диаграмма $[\beta]$ не имеет крюков длины $6{+}a$. При $a \neq 5$ $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6{+}a) = \{H_{13}^{\alpha}\}$ и по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$, что противоречиво, так как $\alpha^{13} = (6, 2^3, 1^2)$. Следовательно, $a = 5$, а тогда $c \leq 4$, $d \leq 4$ и $c + d < 10 = 3 + a + b$ в противоречие с (4.5). Если же $M = \{a, c\}$, то $d = 3 + b = 5$ (по (4.5)), $a = c \geq 6$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + a) = \{H_{13}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_{14}^{δ}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (6, 2^3, 1^2)$, $\beta^{12} = (9, 3, 2)'$, что противоречит теореме 3.3.

Следовательно $M = \{a, c, d\}$. Тогда по (4.5) $a = c = d = 3 + b = 5$, $n = 25$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7) = \{H_{17}^{\alpha}\}$, откуда по лемме 3.4 разбиение $\alpha^{17} = (6^2, 2^2, 1^2)$ должно быть самоассоциированным, что противоречиво. Случай 5.1 противоречив.

Случай 5.2. Пусть $b \in M$. Тогда $b > a$ (по (4.5)) и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9 + b) = \{H_{21}^{\alpha}\}$. По лемме 3.4 должно быть $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, что, очевидно, не так.

Случай 5.3. Пусть $M = \{c\}$. Тогда $\mathrm{H}^{\beta}(6{+}c) = \{H_{12}^{\beta}\}$. Так как $\beta^{12} = (4, 3, 2, 1^{1+d}) \neq (\beta^{12})'$, то по лемме 3.4 $[\alpha]$ имеет крюк длины $6 + c$. Ввиду (4.5) $c \geq 2$ и $6 + c \geq 8$. Поэтому $\mathrm{H}^{\alpha}(6 + c) \subseteq \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{22}^{\alpha}\}$ и имеются лишь следующие четыре возможности для $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + c)$.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + c) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$. Тогда $c = 2 + a$ и по (4.5) $d = b$. По лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_{9+d}^{δ}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{12} = (6, 1^{3+d})$, $\beta^{12} = (3^2, 2, 1^{1+d})$, что противоречит теореме 3.1. Подобное противоречие получаем при $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + c) = \{H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$ (по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_{9+d}^{δ}).

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + c) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$. Отсюда, учитывая (4.5), получаем $a = b = d = c - 3$, $n = 12 + 2c$, $c \geq 3$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8) = \{H_{22}^{\alpha}, H_{13}^{\beta}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{22}} \sim \chi^{\beta^{13}}$ на S_{10}^{δ}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{22} = (7, 1^3)$, $\beta^{13} = (3^2, 2^2)$, что снова противоречит теореме 3.1.

Пусть, наконец, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6{+}c) = \{H_{22}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$. Тогда $c = 2$ и по (4.5) $d = 1$ и $a = b = 0$. По лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{22}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_{10}^{δ}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{22} = (7, 1^3)$, $\beta^{12} = (5, 3, 2)'$, в противоречие с теоремой 4.1.

Случай 5.4. Пусть $M = \{c, d\}$. В этом случае по (4.5) $\{a, b\} = \{c{-}1, c{-}2\}$ и, следовательно, $\{h_{12}^{\alpha}, h_{21}^{\alpha}\} = \{7 + c, 8 + c\}$. В любом случае $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9 + b) = \{H_{21}^{\alpha}\}$, и по лемме 3.4 разбиение α^{21} самоассоциировано. Однако это ложно.

Случай 5 противоречив.

Случай 6. Пусть $\alpha^{11} =' (7, 1^2), \beta^{11} =' (4, 4, 1)$ и $\sigma = -1$ ($\varepsilon = (-1)^m$).

Без ограничения общности можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют вид, изображённый на рис. 6 ($\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$). Тогда $n = 20 + a + b = 17 + c + d$, и поэтому

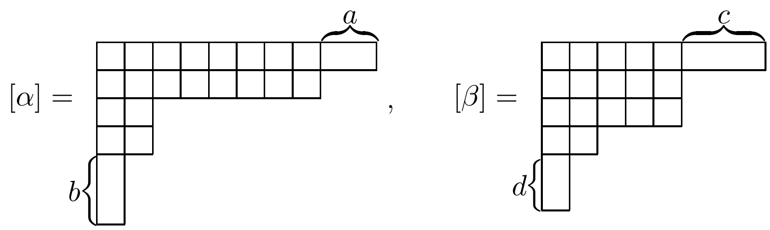


Рис. 6

$$3 + a + b = c + d, \tag{4.6}$$

$$\varepsilon = (-1)^m = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{c+d}.$$

Далее нам потребуются следующие длины крюков из $[\alpha]$ и $[\beta]$:

$h^{\alpha}_{12} = 10 + a,$	$h^{\alpha}_{21} = 10 + b,$	$h^{\beta}_{12} = 7 + c,$	$h^{\beta}_{21} = 7 + d,$
$h^{\alpha}_{13} = 7 + a,$	$h^{\alpha}_{31} = 3 + b,$	$h^{\beta}_{13} = 5 + c,$	$h^{\beta}_{31} = 6 + d,$
$h^{\alpha}_{14} = 6 + a,$	$h^{\alpha}_{41} = 2 + b,$	$h^{\beta}_{14} = 4 + c,$	$h^{\beta}_{41} = 2 + d,$
$h^{\alpha}_{15} = 5 + a,$	$h^{\alpha}_{22} = 9,$	$h^{\beta}_{15} = 3 + c,$	$h^{\beta}_{22} = 6.$

Пусть M есть множество всех максимальных элементов из $\{a, b, c, d\}$. Если $b \in M$, то $b > a$ по (4.6), $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(10 + b) = \{H^{\alpha}_{21}\}$ и по лемме 3.4 должно быть $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, что, очевидно, не так. Следовательно, возможен лишь один из следующих четырёх случаев.

Случай 6.1. Пусть $a \in M$. Тогда $b < a$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(10 + a) = \{H^{\alpha}_{12}\}$. По лемме 3.4 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$ и поэтому (см. рис. 5) $b = 3$. Итак, $b = 3$, $n = 23 + a$ и $\varepsilon = (-1)^a$.

Пусть $M = \{a\}$. Тогда $b \leq a - 5$, так как иначе $b \geq a - 4$ и по (4.6) $c + d = 3 + a + b \geq 2a - 1$, откуда $c = a$ или $d = a$. Следовательно, $7 + a > 10 + b$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + a) = \{H^{\alpha}_{13}\}$, откуда по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$. Но это противоречиво, так как $\alpha^{13} = (7, 2^3, 1^3)$.

Пусть $M = \{a, c\}$. По (4.6) $d = 3 + b = 6$. Тогда $a = c \geq 7$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + a) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{12}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{16}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (7, 2^3, 1^3)$, $\beta^{12} = (10, 2^3)'$, что противоречит теореме 3.3. Подобное противоречие получаем при $M = \{a, d\}$: $c = 3 + b = 6$, $a = d \geq 7$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + a) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{21}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{16}, $\alpha^{13} = (7, 2^3, 1^3)$, $\beta^{21} = (11, 4, 1)$.

Пусть, наконец, $M = \{a, c, d\}$. По (4.6) $a = c = d = 3 + b = 6$, $n = 29$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(12) = \{H^{\alpha}_{14}, H^{\beta}_{31}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{14}} \sim \chi^{\beta^{31}}$ на S^{δ}_{17}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{14} = (7, 3, 2^2, 1^3)$, $\beta^{31} = (11, 5, 1)$, что противоречит теореме 3.3. Случай 6.1 противоречив.

Случай 6.2. Пусть $M = \{c\}$. Тогда $\mathrm{H}^{\beta}(7 + c) = \{H^{\beta}_{12}\}$. Так как $\beta^{12} = (4, 4, 1^{2+d}) \neq (\beta^{12})'$, то по лемме 3.4 $[\alpha]$ имеет крюк длины $7 + c$. Ввиду (4.6) $c \geq 2$ и, следовательно, $7 + c \geq 9$. Поэтому $\mathrm{H}^{\alpha}(7 + c) \subseteq \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\alpha}_{22}\}$ и имеются лишь следующие возможности для $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + c)$.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + c) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{12}\}$. Тогда $c = 3 + a$ и по (4.6) $d = b$. По лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{10+d}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{12} = (7, 1^{3+d})$, $\beta^{12} = (4^2, 1^{2+d})$, что противоречит теореме 3.1. Подобное противоречие получаем при $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + c) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$: по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{10+d}, где $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (8 + d, 1^2)$, $\beta^{12} = (4^2, 1^{2+d})$.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + c) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$. Отсюда и из (4.6) получаем $a = b = d = c - 3$, $n = 20 + 2a = 14 + 2c$, $c \geq 3$. Если $c \neq 4$, то $\mathrm{H}^{\beta}(5 + c) = \{H^{\beta}_{13}\}$, однако $\beta^{13} = (4, 4, 2^2, 1^a) \neq (\beta^{13})'$, что противоречит лемме 3.4. Поэтому $c = 4$, $a = b = d = 1$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9) = \{H^{\alpha}_{22}, H^{\beta}_{13}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{22}} \sim \chi^{\beta^{13}}$ на S^{δ}_{13}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{22} = (9, 1^4)$, $\beta^{13} = (4^2, 2^2, 1)$, в противоречие с теоремой 3.1.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7+c) = \{H^{\alpha}_{22}, H^{\beta}_{12}\}$. Тогда $c = 2$ и по (4.6) $d = 1$ и $a = b = 0$. Кроме того, по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{22}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{11}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{22} = (8, 1^3)$, $\beta^{12} = (4, 4, 1^3)'$, что противоречит теореме 3.1. Случай 6.2 противоречив.

Случай 6.3. Пусть $M = \{d\}$. Тогда $\mathrm{H}^{\beta}(7+d) = \{H^{\beta}_{21}\}$. Так как диаграмма $[\beta^{21}]$ не самоассоциирована, то по лемме 3.4 $[\alpha]$ имеет крюк длины $7+d$. По (4.6) $d > 1$ и, как видно из списка длин крюков в $[\alpha]$ и (4.6), возможны лишь следующие три случая.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7+d)$ равно $\{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{21}\}$ или $\{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{21}\}$. Тогда либо $d = 3+a$, $c = b$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{10+c}, $\alpha^{12} = (7, 1^{3+c})$, $\beta^{21} = (5+c, 4, 1)$, либо $d = 3+b$, $c = a$ и $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{10+c}, $\alpha^{21} = (7+c, 1^3)$, $\beta^{21} = (5+c, 4, 1)$ $(\delta = \pm 1)$. Но это противоречит теореме 3.1.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7+c) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{21}\}$. Тогда $a = b = c = d-3$, $n = 14+2d$, $d \geq 3$. Если $d > 3$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6+d) = \{H^{\beta}_{31}\}$, а так как $\beta^{31} = (5+c, 5, 1)$ не самоассоциировано, это противоречит лемме 3.4. Следовательно, $d = 3$, $a = b = c = 0$, $n = 20$, $\varepsilon = -1$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9) = \{H^{\alpha}_{22}, H^{\beta}_{31}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{22}} \sim \chi^{\beta^{31}}$ на S^{δ}_{11}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{22} = (8, 1^3)$, $\beta^{31} = (5, 5, 1)$, что противоречит теореме 3.1. Случай 6.3 противоречив.

Случай 6.4. Пусть $M = \{c, d\}$. В этом случае $c = d$ и по (4.6) $\{a, b\} = \{c-1, c-2\}$. Если $a = c-1$ и $b = c-2$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8+c) = \{H^{\alpha}_{21}\}$ и по лемме 3.4 $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, что противоречиво, так как $\alpha^{21} = (8+a, 1^3)$. Если же $a = c-2$ и $b = c-1$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9+c) = \{H^{\alpha}_{21}\}$, что, как и выше, противоречиво.

Случай 6 противоречив.

Случай 7. Пусть $\alpha^{11} =' (8, 1^3), \beta^{11} =' (4, 4, 2, 1)$ и $\sigma = -1$ $(\varepsilon = (-1)^m)$.

Без ограничения общности можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют вид, изображённый на рис. 7 ($\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$). Тогда $n = 24+a+b = 20+c+d$, $m = 13+a+b$,

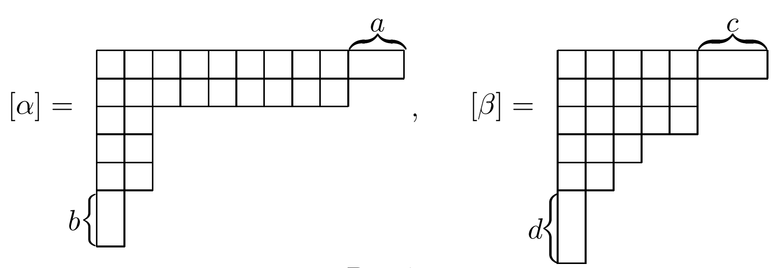


Рис. 7

$$4+a+b = c+d, \tag{4.7}$$

$$\varepsilon = (-1)^m = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{1+c+d},$$

$$\begin{array}{llll}
h^{\alpha}_{12} = 12+a, & h^{\alpha}_{21} = 12+b, & h^{\beta}_{12} = 8+c, & h^{\beta}_{21} = 8+d, \\
h^{\alpha}_{13} = 8+a, & h^{\alpha}_{31} = 4+b, & h^{\beta}_{13} = 6+c, & h^{\beta}_{31} = 7+d, \\
h^{\alpha}_{14} = 7+a, & h^{\alpha}_{41} = 3+b, & h^{\beta}_{14} = 4+c, & h^{\beta}_{41} = 4+d, \\
h^{\alpha}_{15} = 6+a, & h^{\alpha}_{51} = 2+b, & h^{\beta}_{15} = 3+c, & h^{\beta}_{51} = 2+d, \\
h^{\alpha}_{16} = 5+a, & h^{\alpha}_{22} = 11, & h^{\beta}_{16} = c, & h^{\beta}_{22} = 7.
\end{array}$$

Пусть M есть множество всех максимальных элементов из $\{a, b, c, d\}$.

Случай 7.1. Пусть $a \in M$. Тогда $b < a$ по (4.7) и поэтому $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(10+a) = \{H^{\alpha}_{12}\}$. По лемме 3.4 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$, откуда следует (см. рис. 7), что $b = 3$, и тогда $n = 27+a$ и $\varepsilon = (-1)^a$.

Пусть $M = \{a\}$. Тогда $b \leq a-6$, так как иначе $b \geq a-5$ и по (4.7) $c+d = 4+a+b \geq 2a-1$, откуда $c = a$ или $d = a$. Следовательно, $8+a > 12+b$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8+a) = \{H^{\alpha}_{13}\}$, откуда по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$. Но это противоречиво, так как $\alpha^{13} = (8, 2^4, 1^3)$.

Пусть $M = \{a, c\}$. По (4.7) $d = 4+b = 7$. Тогда $a = c \geq 8$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8+a) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{12}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{19}, где $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (8, 2^4, 1^3)$, $\beta^{12} = (12, 3, 2^2)'$, что противоречит теореме 3.3. Подобное противоречие получается при $M = \{a, d\}$: $c = 4 + b = 7$, $a = d \geq 8$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + a) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{21}\}$ и $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{19}, где $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (8, 2^4, 1^3)$, $\beta^{21} = (12, 4, 2, 1)$.

Пусть $M = \{a, c, d\}$. По (4.7) $a = c = d = 4 + b = 7$, $n = 34$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(14) = \{H^{\alpha}_{14}, H^{\beta}_{31}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{14}} \sim \chi^{\beta^{31}}$ на S^{δ}_{20}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{14} = (8, 3, 2^3, 1^3)$, $\beta^{31} = (12, 5, 2, 1)$, что противоречит теореме 3.3. Случай 7.1 противоречив.

Случай 7.2. Пусть $b \in M$. Тогда $b > a$ (по (4.7)) и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(12 + b) = \{H^{\alpha}_{21}\}$. По лемме 3.4 должно быть $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, что, очевидно, не так. Случай 7.2 противоречив.

Случай 7.3. Пусть $M = \{c\}$. Тогда $\mathrm{H}^{\beta}(8+c) = \{H^{\beta}_{12}\}$. Так как $\beta^{12} = (4, 4, 2, 1^{2+d}) \neq (\beta^{12})'$, то по лемме 3.4 $[\alpha]$ имеет крюк длины $8 + c$. Ввиду (4.7) $c \geq 3$ и $8 + c \geq 11$. Поэтому $\mathrm{H}^{\alpha}(8 + c) \subseteq \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\alpha}_{22}\}$ и имеются лишь следующие четыре возможности для $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + c)$.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + c)$ есть $\{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{12}\}$ или $\{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$. Тогда либо $c = 4 + a$, $d = b$ (по (4.7)) и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{12+d}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{12} = (8, 1^{4+d})$, $\beta^{12} = (4^2, 2, 1^{2+d})$, либо $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{12+d}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (9 + d, 1^3)$, $\beta^{12} = (4^2, 2, 1^{2+d})$, что противоречит теореме 3.1.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + c) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$. Отсюда и из (4.7) получаем $a = b = d = c - 4$, $c \geq 4$. Если $c \neq 5$, то $\mathrm{H}^{\beta}(6+c) = \{H^{\beta}_{13}\}$, однако $\beta^{13} = (4, 4, 2^3, 1^a) \neq (\beta^{13})'$, что противоречит лемме 3.4. Следовательно, $c = 5$, $a = b = d = 1$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(11) = \{H^{\alpha}_{22}, H^{\beta}_{13}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{22}} \sim \chi^{\beta^{13}}$ на S^{δ}_{15}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{22} = (10, 1^5)$, $\beta^{13} = (4, 4, 2^3, 1)$, что снова противоречит теореме 3.1.

Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + c) = \{H^{\alpha}_{22}, H^{\beta}_{12}\}$. Тогда $c = 3$ и по (4.7) $1 + a + b = d \leq 2$, т. е. либо $d = 1$ и $a = b = 0$, либо $d = 2$ и $a + b = 1$. По лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{22}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{12+d}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{22} = (9 + a, 1^{4+b})$, $\beta^{12} = (4, 4, 2, 1^{2+d})'$, что противоречит теореме 3.1 ($n > 11$). Случай 7.3 противоречив.

Случай 7.4. Пусть $M = \{d\}$. Тогда $\mathrm{H}^{\beta}(8 + d) = \{H^{\beta}_{21}\}$, а так как диаграмма $[\beta^{21}]$ не самоассоциирована, то по лемме 3.4 $[\alpha]$ имеет крюк длины $8 + d$. По (4.7) $d \geq 3$. Если $d = 3$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + d) = \{H^{\alpha}_{22}, H^{\beta}_{21}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{22}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{13+a+b}, где $\delta = \pm 1$, что противоречит теореме 3.1. Следовательно, $d \geq 4$ и, как видно из списка длин крюков в $[\alpha]$ и (4.7), возможны лишь следующие три случая:

(а) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + d) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{21}\}$, $d = 4 + a$ и $c = b$;

(б) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + d) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{21}\}$, $d = 4 + b$ и $c = a$;

(в) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + c) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{21}\}$ и $a = b = c = d - 4$.

Если верны (а) или (б), то по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{12+c}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{12} = (8, 1^{4+c})$, $\beta^{21} = (5 + c, 4, 2, 1)$ или $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{12+c}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (9 + c, 1^3)$, $\beta^{21} = (5 + c, 4, 2, 1)$, что противоречит теореме 3.1.

Пусть верно (в). Тогда $a = b = c = d - 4$, $n = 16 + 2d$, $d \geq 4$. Если $d \neq 4$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + d) = \{H^{\beta}_{31}\}$, а так как $\beta^{31} = (5 + c, 5, 2, 1)$ не самоассоциировано, это противоречит лемме 3.4. Следовательно, $d = 4$, $a = b = c = 0$, $n = 24$, $\varepsilon = -1$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(11) = \{H^{\alpha}_{22}, H^{\beta}_{31}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{22}} \sim \chi^{\beta^{31}}$ на S^{δ}_{13}, где $\delta = \pm 1$, $\alpha^{22} = (9, 1^4)$, $\beta^{31} = (5, 5, 2, 1)$, а это противоречит теореме 3.1. Случай 7.4 противоречив.

Случай 7.5. Пусть $M = \{c, d\}$. В этом случае по (4.7) $4 + a + b = 2c$ и для a и b имеются лишь следующие три возможности. Пусть $a = c - 1$ и $b = c - 3$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9 + c) = \{H^{\alpha}_{21}\}$ и по лемме 3.4 $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$. Но это противоречиво, так как $\alpha^{21} = (8 + c, 1^3)$. Пусть $a = b = c - 2$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(10 + c) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}\}$ и по лемме 3.7 либо $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, либо α^{12} и α^{21} оба самоассоциированы. Но это противоречиво, так как $\alpha^{12} = (8, 1^{2+c})$ и $\alpha^{21} = (7 + c, 1^3)$. Пусть $a = c - 3$ и $b = c - 1$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(11 + c) = \{H^{\alpha}_{21}\}$ и по лемме 3.4 $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$. Но это противоречиво, так как $\alpha^{21} = (8 + c, 1^3)$. Случай 7 противоречив.

Итак, при выполнении условия теоремы верно одно из утверждений (1) и (2).

Обратное утверждение может быть проверено при помощи предложения 2.2 или с помощью компьютерной системы GAP [7]. Теорема 4.1 доказана.

5. $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на S_n^ε. Случай $d(\beta) > d(\alpha) = 2$ и $h_{11}^\alpha \neq h_{11}^\beta$

Теорема 5.1. *Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n, имеющие одни и те же корни на S_n^ε при некотором $\varepsilon = \pm 1$, но не исчезающие тождественно на S_n^ε. Предположим, что $d(\alpha) = 2 < d(\beta)$ и $h_{11}^\alpha \neq h_{11}^\beta$.*

Тогда выполнено одно из следующих условий:

(1) $n = 11,\ \ \varepsilon = +1,\ \ \alpha =' (7, 2, 1^2),\quad \beta =' (4, 3^2, 1)$;
(2) $n = 14,\ \ \varepsilon = -1,\ \ \alpha =' (9, 2, 1^3),\quad \beta =' (5, 4, 3, 1^2)$;
(3) $n = 15,\ \ \varepsilon = +1,\ \ \alpha =' (8, 3, 2, 1^2),\quad \beta =' (5, 4^2, 1^2)$;
(4) $n = 18,\ \ \varepsilon = -1,\ \ \alpha =' (10, 3, 2, 1^3),\quad \beta =' (6, 5, 4, 1^3)$;
(5) $n = 19,\ \ \varepsilon = +1,\ \ \alpha =' (9, 4, 2^2, 1^2),\quad \beta =' (6, 4^2, 3, 1^2)$;
(6) $n = 22,\ \ \varepsilon = -1,\ \ \alpha =' (11, 4, 2^2, 1^3),\quad \beta =' (7, 5^2, 2, 1^3)$;
(7) $n = 26,\ \ \varepsilon = -1,\ \ \alpha =' (12, 5, 2^3, 1^3),\quad \beta =' (8, 5^2, 3, 2, 1^3)$.

Обратно, в каждом из пунктов (1)–(7) *выполнены условия теоремы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие теоремы. Тогда по теореме 2.1 из [6] $f(\alpha) = h(\beta)$, $f'(\alpha) = h'(\beta)$ (в частности, $\alpha \neq \alpha'$), $d(\beta) = d(\alpha) + 1 = 3$ и $\operatorname{sign}(f(\alpha)) = \varepsilon$. Так как согласно предложению 2.2 из [6] $l(f(\alpha)) = d(\alpha) + 1$, то $\operatorname{sign}(f(\alpha)) = (-1)^{n - l(f(\alpha))} = (-1)^{n-1}$. Таким образом,

$$f(\alpha) = h(\beta),\ d(\beta) = 3, \tag{5.1}$$

$$\varepsilon = (-1)^{n+1}. \tag{5.2}$$

В дальнейшем при вычислении ε мы будем использовать (5.2) без ссылок. Без ограничения общности будем считать, что $h_{12}^\alpha \geq h_{21}^\alpha$. Так как $d(\alpha) > 1$, то по определению 2.2 из [6] либо $f(\alpha) = (h_{11}^\alpha) * f(\alpha^{11})$ и $\alpha^{11} \neq (\alpha^{11})'$, либо $f(\alpha) = (h_{12}^\alpha) * f(\alpha^{12})$ $(= (h_2^\alpha) * f(\alpha^2)$ в терминах из [6]) и $\alpha^{11} = (\alpha^{11})'$. (Напомним, что если $a = (a_1, \dots, a_k)$ и $b = (b_1, \dots, b_l)$, то $a * b := (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$.) Так как $h_{11}^\alpha \neq h_{11}^\beta$, то ввиду (5.1) реализуется вторая возможность:

$$f(\alpha) = (h_{12}^\alpha) * f(\alpha^{12}) \ \text{ и } \ \alpha^{11} = (\alpha^{11})'. \tag{5.3}$$

Следовательно, диаграмма $[\alpha]$ имеет вид, изображённый на рис. 8, где $\{a, b, s\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $a > b$ (так как $\alpha \neq \alpha'$). На этом же рисунке изображена диаграмма $[\alpha^{12}]$.

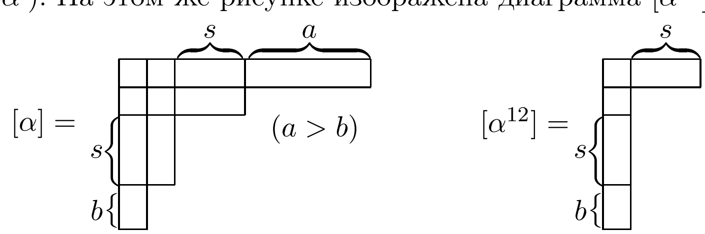


Рис. 8

Так как по (5.3) $f(\alpha) = (h_{12}^\alpha, \dots)$ и по (5.1) $f(\alpha) = h(\beta) = (h_{11}^\beta, h_{22}^\beta, h_{33}^\beta)$, то $h_{12}^\alpha = h_{11}^\beta$. Этот факт позволяет нам применить результаты статьи [1]. Положим

$$m := h_{12}^\alpha = h_{11}^\beta.$$

Очевидно, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m) = \{H_{12}^\alpha, H_{11}^\beta\}$ и по лемме 3.5

$$\chi^{\alpha^{12}} \sim \chi^{\beta^{11}} \text{ на } S_{n-m}^\sigma, \quad \text{где } \ \sigma = (-1)^{m+1}\varepsilon.$$

Так как $d(\beta^{11}) > d(\alpha^{12}) = 1$, то по теореме 3.1 выполнено одно из следующих условий:

(1′) $\alpha^{12} =' (4)$, $\beta^{11} =' (2, 2)$, $\sigma = 1$;
(2′) $\alpha^{12} =' (5)$, $\beta^{11} =' (3, 2)$, $\sigma = -1$;
(3′) $\alpha^{12} =' (5, 1)$, $\beta^{11} =' (3, 3)$, $\sigma = 1$;
(5′) $\alpha^{12} =' (6, 1^2)$, $\beta^{11} =' (3, 3, 2)$, $\sigma = 1$;
(6′) $\alpha^{12} =' (7, 1^2)$, $\beta^{11} =' (4, 4, 1)$, $\sigma = -1$;
(7′) $\alpha^{12} =' (8, 1^3)$, $\beta^{11} =' (4, 4, 2, 1)$, $\sigma = -1$.

(4′) $\alpha^{12} =' (6,1)$, $\beta^{11} =' (4,3)$, $\sigma = -1$;

Случай 1. Пусть $\alpha^{12} =' (4), \beta^{11} =' (2,2)$ и $\sigma = 1$.

Из вида $[\alpha^{12}]$ следует, что $s = 0$ и $b = 2$. Можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют вид, изображённый на рис. 9, где $\{a,c,d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a > 2$ и $c \geq d$, так как $\beta^{11} = (\beta^{11})'$.

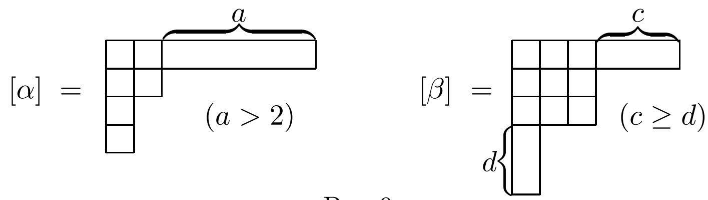


Рис. 9

Тогда $n = 6 + a = 9 + c + d$ и поэтому (с учётом (5.2))

$$a = 3 + c + d, \tag{5.4}$$

$$\varepsilon = (-1)^{a+1} = (-1)^{c+d},$$

$h^{\alpha}_{12} = 2 + a = 5 + c + d$, $h^{\alpha}_{21} = 5$, $h^{\beta}_{11} = 5 + c + d$, $h^{\beta}_{21} = 5 + d$,
$h^{\alpha}_{13} = a = 3 + c + d$, $h^{\alpha}_{31} = 3$, $h^{\beta}_{12} = 4 + c$, $h^{\beta}_{31} = 3 + d$.
$h^{\alpha}_{14} = 2 + c + d$, $h^{\beta}_{13} = 3 + c$,

Если $c \geq 2$ и $d \geq 2$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(a) = \{H^{\alpha}_{13}\}$. Тогда по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$, что противоречиво, так как $\alpha^{13} = (2^2, 1^2)$. Следовательно, $c \leq 1$ или $d \leq 1$, и (так как $c \geq d$) имеет место один из следующих двух случаев.

Случай 1.1. Пусть $c \leq 1$ и $d \leq 1$. Если $c = d = 0$, то $n = 9$, $\alpha = (5,2,1^2)$, $\beta = (3^3)$, $\varepsilon = 1$ и на элементе $g_{(3^3)}$ характеры χ^{α} и χ^{β} принимают значения 0 и 6 соответственно, что противоречиво. Если $c = 1$ и $d = 0$, то $\alpha = (6,2,1^2)$, $\beta = (4,3^2)$, $\varepsilon = -1$, и на элементе $g_{(5,4,1)}$ характеры χ^{α} и χ^{β} принимают значения 0 и 1 соответственно, что противоречиво. Наконец, при $c = d = 1$ будет $\alpha = (7,2,1^2)$, $\beta = (4,3^2,1)$, $\varepsilon = 1$, т. е. верно утверждение (1) теоремы 5.1.

Случай 1.2. Пусть $d \leq 1$ и $c \geq 2$. Если $d = 0$, то $a = 3 + c \geq 4$ (по (5.4)) и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4 + c) = \{H^{\beta}_{12}\}$. Тогда по лемме 3.4 диаграмма $[\beta^{12}]$ должна быть самоассоциированной, что противоречиво, так как $\beta^{12} = (2,2,1)$. Следовательно, $d = 1$ и $a = 4+c \geq 6$. Предположим, что $c > 2$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(3+c) = \{H^{\alpha}_{14}, H^{\beta}_{13}\}$. По лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{14}} \sim \chi^{\beta^{13}}$ на S^{δ}_7, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{14} = (3,2,1^2)$, $\beta^{13} = (4,3)'$, а это противоречит теореме 3.2. Следовательно, $c = 2$ и тогда $n = 12$, $\alpha = (8,2,1^2)$, $\beta = (5,3^2,1)$, $\varepsilon = -1$, и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5) = \{H^{\alpha}_{14}, H^{\beta}_{13}, H^{\beta}_{21}\}$. По лемме 3.3 $\chi^{\alpha^{14}} \sim \chi^{\beta^{13}} + \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_7, где $\delta = \varepsilon = -1$, причём $\alpha^{14} = (3,2,1^2)$, $\beta^{13} = (4,3)'$ и $\beta^{21} = (5,2)$. Однако это противоречиво, так как на элементе $g_{(5,2)}$ левая и правая части этого соотношения принимают значения 1 и 0 соответственно. Случай 1.2 противоречив.

Таким образом, в случае 1 выполнено утверждение (1) теоремы.

Случай 2. Пусть $\alpha^{12} =' (5), \beta^{11} =' (3,2)$ и $\sigma = -1$.

Из вида $[\alpha^{12}]$ (см. рис. 8) следует, что $s = 0$ и $b = 3$. Можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ в этом случае имеют вид, изображённый на рис. 10, где $\{a,c,d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a > 3$.

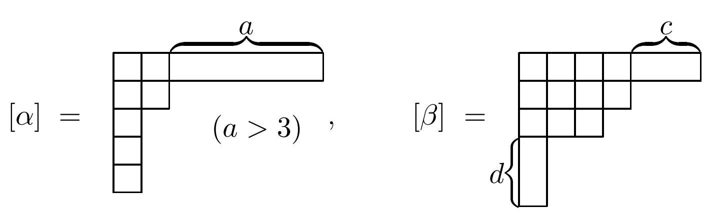


Рис. 10

Тогда $n = 7 + a = 11 + c + d$ и поэтому

$$a = 4 + c + d, \tag{5.5}$$

$$\varepsilon = (-1)^a = (-1)^{c+d},$$

$$\begin{array}{llll} h^\alpha_{12} = 2 + a = 6 + c + d, & h^\alpha_{21} = 5, & h^\beta_{11} = 6 + c + d, & h^\beta_{21} = 5 + d, \\ h^\alpha_{13} = a = 4 + c + d, & h^\alpha_{31} = 3, & h^\beta_{12} = 5 + c, & h^\beta_{31} = 3 + d. \\ h^\alpha_{14} = 3 + c + d, & & h^\beta_{13} = 4 + c, & \end{array}$$

Если $c \geq 2$ и $d \geq 2$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(a) = \{H^\alpha_{13}\}$. Тогда по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$, что противоречиво, так как $\alpha^{13} = (2^2, 1^3)$. Следовательно, $c \leq 1$ или $d \leq 1$.

Случай 2.1. Пусть $c \leq 1$ и $d \leq 1$. Во всех случаях здесь мы получаем противоречие с условием теоремы. Если $c = d = 0$, то $n = 11$, $\alpha = (6, 2, 1^3)$, $\beta = (4, 4, 3)$, $\varepsilon = 1$, однако $\chi^\alpha(g_{(4,4,3)}) = 0$ и $\chi^\beta(g_{(4,4,3)}) = 2$. Если $c = 0$ и $d = 1$, то $n = 12$, $\alpha = (7, 2, 1^3)$, $\beta = (4, 4, 3, 1)$, $\varepsilon = -1$, $\chi^\alpha(g_{(6,5,1)}) = 0$ и $\chi^\beta(g_{(6,5,1)}) = -1$. Если $c = 1$ и $d = 0$, то $n = 12$, $\alpha = (7, 2, 1^3)$, $\beta = (5, 4, 3)$, $\varepsilon = -1$, $\chi^\alpha(g_{(6,5,1)}) = 0$ и $\chi^\beta(g_{(6,5,1)}) = 1$. Наконец, при $c = d = 1$ будет $n = 13$, $\alpha = (8, 2, 1^3)$, $\beta = (5, 4, 3, 1)$, $\varepsilon = 1$, $\chi^\alpha(g_{(6,4,1^3)}) = 0$ и $\chi^\beta(g_{(6,4,1^3)}) = 1$. Случай 2.1 противоречив.

Случай 2.2. Пусть $c \leq 1$ и $d \geq 2$. Если $c = 0$, то $a = 4 + d \geq 6$ (по (5.5)) и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(a) = \{H^\alpha_{13}\}$. Тогда по лемме 3.4 диаграмма $[\alpha^{13}]$ должна быть самоассоциированной, что противоречиво, так как $\alpha^{13} = (2, 2, 1^3)$. Следовательно, $c = 1$ и $a = 5 + d \geq 7$. Предположим, что $d > 2$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(a - 1) = \{H^\alpha_{14}\}$ и по лемме 3.4 $\alpha^{14} = (\alpha^{14})'$, что противоречиво. Следовательно, $d = 2$ и тогда $n = 14$, $\alpha = (9, 2, 1^3)$, $\beta = (5, 4, 3, 1^2)$, как в утверждении (2) теоремы.

Случай 2.3. Пусть $d \leq 1$ и $c \geq 2$. Если $d = 0$, то $a = 4 + c \geq 6$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(a) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{13}\}$. Тогда по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{13}}$ на S^δ_7, $\delta = (-1)^{a+1}\varepsilon = -1$, $\alpha^{13} = (5, 2)'$, $\beta^{13} = (3, 2^2)$, что противоречит теореме 3.2. Следовательно, $d = 1$, $a = 5 + c \geq 7$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(a) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{12}\}$. Тогда по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^δ_7, $\delta = (-1)^{a+1}\varepsilon = -1$, $\alpha^{13} = (5, 2)'$, $\beta^{12} = (3, 2, 1^2)$, что противоречит теореме 3.2.

Таким образом, в случае 2 выполнено утверждение (2) теоремы.

Случай 3. Пусть $\alpha^{12} =' (5, 1), \beta^{11} =' (3, 3)$ и $\sigma = 1$.

Из вида $[\alpha^{12}]$ (см. рис. 8) следует, что $s = 0$ и $b = 3$. Можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ в этом случае имеют вид, изображённый на рис. 11, где $\{a, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a > 2$. Тогда

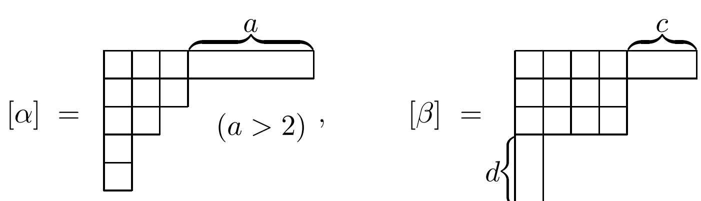


Рис. 11

$$a = 2 + c + d, \tag{5.6}$$

$$\varepsilon = (-1)^{1+a} = (-1)^{1+c+d},$$

$$\begin{array}{llll} h^\alpha_{12} = 4 + a = 6 + c + d, & h^\alpha_{15} = a - 1 = 1 + c + d, & h^\beta_{11} = 6 + c + d, & h^\beta_{14} = 3 + c, \\ h^\alpha_{13} = 2 + a = 4 + c + d, & h^\alpha_{21} = 6, & h^\beta_{12} = 5 + c, & h^\beta_{21} = 5 + d, \\ h^\alpha_{14} = a = 2 + c + d, & h^\alpha_{31} = 4, & h^\beta_{13} = 4 + c, & h^\beta_{31} = 4 + d. \end{array}$$

Если $c \geq 2$ и $d \geq 2$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2 + a) = \{H^\alpha_{13}\}$. Тогда по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$, что противоречиво. Следовательно, $c \leq 1$ или $d \leq 1$.

Случай 3.1. Пусть $c \leq 1$ и $d \leq 1$. Так как $a > 2$, то по (5.6) $c + d > 0$. Если $c = 0$ и $d = 1$, то $n = 13$, $\alpha = (6, 3, 2, 1^2)$, $\beta = (4^3, 1)$, $\varepsilon = 1$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{12}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_8^δ, $\delta = (-1)^6\varepsilon = 1$, $\alpha^{13} = (5,3)'$, $\beta^{12} = (4,2^2)$, но это противоречит теореме 3.3. Если $c = 1$ и $d = 0$, то $n = 13$, $\alpha = (6,3,2,1^2)$, $\beta = (5,4^2)$, $\varepsilon = 1$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6) = \{H_{21}^\alpha, H_{12}^\beta\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_7^δ, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (6,1)$, $\beta^{12} = (3,3,1)$, что противоречит теореме 3.1. Если $c = d = 1$, то $n = 14$, $\alpha = (7,3,2,1^2)$, $\beta = (5,4^2,1)$, $\varepsilon = -1$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5) = \{H_{13}^\beta, H_{21}^\beta\}$, и по лемме 3.7 либо $\beta^{13} =' \beta^{21}$, либо β^{13} и β^{21} оба самоассоциированы. Но то и другое противоречиво. Случай 3.1 противоречив.

Случай 3.2. Пусть $c \le 1$ и $d \ge 2$. Если $c = 0$, то $a = 4 + d \ge 6$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+d) = \{H_{21}^\beta\}$. Тогда по лемме 3.4 диаграмма $[\beta^{21}]$ должна быть самоассоциированной, что противоречиво. Следовательно, $c = 1$ и $a = 2 + d \ge 4$. Предположим, что $d > 2$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4+d) = \{H_{31}^\beta\}$ и по лемме 3.4 $\beta^{21} = (\beta^{21})'$, что противоречиво. Следовательно, $d = 2$ и тогда $n = 15$, $\alpha = (8.3, 2, 1^2)$, $\beta = (5, 4^2, 1^2)$, $\varepsilon = 1$, т. е. выполнено утверждение (3) теоремы.

Случай 3.3. Пусть $d \le 1$ и $c \ge 2$. Если $d = 0$, то $a = 4 + c \ge 6$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+c) = \{H_{12}^\beta\}$, но разбиение β^{12} не самоассоциировано в противоречие с леммой 3.4. Следовательно, $d = 1$, $a = 3 + c \ge 5$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+c) = \{H_{13}^\alpha, H_{12}^\beta\}$. Тогда по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_8^δ, $\delta = (-1)^{a+1}\varepsilon = -1$, $\alpha^{13} = (5,3)'$, $\beta^{12} = (4,2,2)'$, а это противоречит теореме 3.3.

Итак, в случае 3 выполнено утверждение (3) теоремы.

Случай 4. Пусть $\alpha^{12} =' (6,1), \beta^{11} =' (4,3)$ и $\sigma = -1$.

Из вида $[\alpha^{12}]$ (см. рис. 8) следует, что $s = 1$ и $b = 3$. Можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ в этом случае имеют вид, изображённый на рис. 12, где $\{a,c,d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a > 3$. Тогда

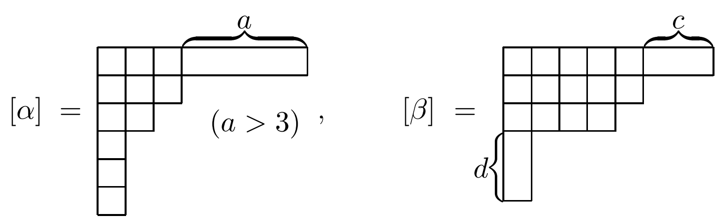


Рис. 12

$$a = 3 + c + d, \tag{5.7}$$

$$\varepsilon = (-1)^a = (-1)^{1+c+d},$$

$$\begin{array}{llll}
h_{12}^\alpha = 4 + a = 7 + c + d, & h_{15}^\alpha = a - 1 = 2 + c + d, & h_{11}^\beta = 7 + c + d, & h_{14}^\beta = 4 + c, \\
h_{13}^\alpha = 2 + a = 5 + c + d, & h_{21}^\alpha = 7, & h_{12}^\beta = 6 + c, & h_{21}^\beta = 6 + d, \\
h_{14}^\alpha = a = 3 + c + d, & h_{31}^\alpha = 5, & h_{13}^\beta = 5 + c, & h_{31}^\beta = 4 + d.
\end{array}$$

Если $c \ge 2$ и $d \ge 2$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2+a) = \{H_{13}^\alpha\}$. Тогда по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$, что противоречиво. Следовательно, $c \le 1$ или $d \le 1$.

Случай 4.1. Пусть $c \le 1$ и $d \le 1$. Так как $a > 3$, то по (5.7) $c + d > 0$. Если $c = 0$ и $d = 1$, то $a = 4$, $n = 15$, $\alpha = (7,3,2,1^3)$, $\beta = (5^2,4,1)$, $\varepsilon = 1$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7) = \{H_{21}^\alpha, H_{21}^\beta\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S_8^δ, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (7,1)'$, $\beta^{21} = (5,3)$, что противоречит теореме 3.1. Если $c = 1$ и $d = 0$, то $a = 4$, $n = 15$, $\alpha = (7,3,2,1^3)$, $\beta = (6,5,4)$, $\varepsilon = 1$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7) = \{H_{21}^\alpha, H_{12}^\beta\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_8^δ, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (7,1)$, $\beta^{12} = (4,3,1)$, что противоречит теореме 3.1. Если $c = d = 1$, то $a = 5$, $n = 16$, $\alpha = (8,3,2,1^2)$, $\beta = (6,5,4,1)$, $\varepsilon = (-1)^a = -1$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6) = \{H_{13}^\beta\}$, и по лемме 3.4 должно быть $\varepsilon = (-1)^6 = 1$ в противоречие с предыдущим предложением. Случай 4.1 противоречив.

Случай 4.2. Пусть $c \le 1$ и $d \ge 2$. Если $c = 0$, то $a = 4 + d \ge 6$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6+d) = \{H_{21}^\beta\}$. Тогда по лемме 3.4 диаграмма $[\beta^{21}]$ должна быть самоассоциированной, что противоречиво, так как $\beta = (4,3,1)$. Следовательно, $c = 1$, $a = 4 + d \ge 6$, $n = 15 + d \ge 17$. Предположим, что $d > 2$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4+d) = \{H_{14}^\alpha, H_{31}^\beta\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{14}} \sim \chi^{\beta^{31}}$ на S_{11}^δ, $\delta = \pm 1$. Поскольку

$\alpha^{14} = (6,3,2)'$ и $\beta^{31} = (6,5)$, то это противоречит теореме 3.2. Следовательно, $d \in \{2,3\}$. Если $d=2$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7) = \{H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_{10}^{δ}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (9,2)$, $\beta^{31} = (4,3,1^3)$, что противоречит теореме 3.1. Следовательно, $d=3$, $n=18$, $\alpha = (10,3,2,1^3)$, $\beta = (6,5,4,1^3)$ и $\varepsilon = -1$, т. е. выполнено утверждение (4) теоремы.

Случай 4.3. Пусть $d \le 1$ и $c \ge 2$. Если $d=0$, то $a = 3+c \ge 5$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6+c) = \{H_{12}^{\beta}\}$. Тогда по лемме 3.4 разбиение β^{12} $(= (4,3,1^2))$ должно быть самоассоциированным, что противоречиво. Следовательно, $d=1$, $a = 4+c \ge 6$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6+c) = \{H_{13}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$. Тогда по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_9^{δ}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (6,3)'$, $\beta^{12} = (4,3,1^2)$, что противоречит теореме 3.3.

Итак, в случае 4 верно утверждение (4) теоремы.

Случай 5. Пусть $\alpha^{12} =' (6,1^2), \beta^{11} = (3,3,2)$ и $\sigma = 1$.

Из вида $[\alpha^{12}]$ (см. рис. 8) следует, что $s=2$ и $b=2$. Можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют вид, изображённый на рис. 13, где $\{a,c,d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a>2$ и $c \ge d$. Тогда

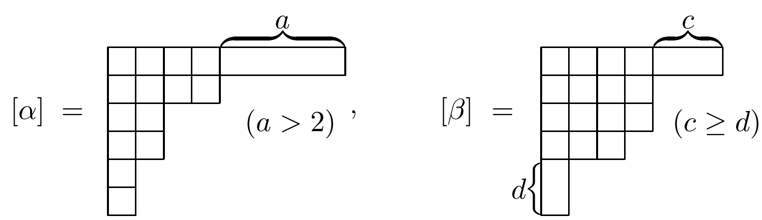


Рис. 13

$$a = 1 + c + d, \tag{5.8}$$

$$\varepsilon = (-1)^{1+a} = (-1)^{c+d},$$

$$\begin{array}{llll}
h_{12}^{\alpha} = 6 + a = 7 + c + d, & h_{21}^{\alpha} = 8, & h_{11}^{\beta} = 7 + c + d, & h_{21}^{\beta} = 6 + d, \\
h_{13}^{\alpha} = 3 + a = 4 + c + d, & h_{31}^{\alpha} = 5, & h_{12}^{\beta} = 6 + c, & h_{31}^{\beta} = 5 + d, \\
h_{14}^{\alpha} = 2 + a = 3 + c + d, & & h_{13}^{\beta} = 5 + c, & h_{41}^{\beta} = 3 + d. \\
h_{15}^{\alpha} = a = 1 + c + d, & & h_{14}^{\beta} = 3 + c, &
\end{array}$$

Если $d \ge 3$, то $c \ge 3$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(3+a) = \{H_{13}^{\alpha}\}$. Тогда по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$, что противоречиво. Следовательно, $c \ge d \in \{0,1,2\}$.

Случай 5.1. Пусть $d=0$. Так как $a>2$, то по (5.8) $c \ge 2$. Если $c>2$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6+c) = \{H_{12}^{\beta}\}$, и по лемме 3.4 $\beta^{12} = (\beta^{12})'$, что противоречиво, так как $\beta^{12} = (3,3,2,1)$. Следовательно, $c=2$, $a=3$, $n=17$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8) = \{H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_9^{δ}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (7,1^2)$, $\beta^{12} = (4,3,2)'$. Но это противоречит теореме 3.1. Случай 5.1 противоречив.

Случай 5.2. Пусть $d=1$. При $c>3$ $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(5+c) = \{H_{13}^{\alpha}, H_{13}^{\beta}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{13}}$ на S_{11}^{δ} $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (6,4,1)'$, $\beta^{13} = (5,4,2)$, что противоречит теореме 3.2. Следовательно, $c \in \{1,2,3\}$. Если $c=3$, то $n=19$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7) = \{H_{14}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{14}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S_{12}^{δ}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{14} = (6,4,2)'$, $\beta^{21} = (7,3,2)$, что противоречит теореме 3.2. Если $c=2$, то $n=18$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8) = \{H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_{10}^{δ}, $\delta = -\varepsilon = 1$, $\alpha^{21} = (8,1^2)$, $\beta^{12} = (5,3,2)'$, что противоречит теореме 3.1. Следовательно, $c=1$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8) = \{H_{21}^{\alpha}\}$, и по лемме 3.4 $\beta^{21} = (\beta^{21})'$, что противоречиво, так как $\alpha^{21} = (7,1^2)$. Случай 5.2 противоречив.

Случай 5.3. Пусть $d=2$. При $c>2$ $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6+c) = \{H_{13}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S_{11}^{δ}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (6,4,1)'$, $\beta^{13} = (6,3,2)'$, что противоречит теореме 3.3. Поэтому $c=2$, $a=5$, $n=19$, $\alpha = (9,4,2^2,1^2)$, $\beta = (6,4^2,3,1^2)$, $\varepsilon = 1$, т. е. верно утверждение (5) теоремы.

Итак, в случае 5 верно утверждение (5) теоремы.

Случай 6. Пусть $\alpha^{12} =' (7,1^2), \beta^{11} =' (4,4,1)$ и $\sigma = -1$.

Из вида $[\alpha^{12}]$ (см. рис. 8) следует, что $s=2$ и $b=3$. Можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ в этом случае имеют вид, изображённый на рис. 14, где $\{a,c,d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a>3$. Тогда

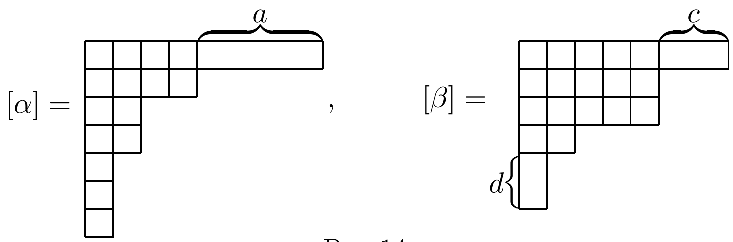


Рис. 14

$$a = 2 + c + d, \tag{5.9}$$
$$\varepsilon = (-1)^a = (-1)^{c+d}.$$

$$\begin{array}{llll}
h^\alpha_{12} = 6 + a = 8 + c + d, & h^\alpha_{21} = 9, & h^\beta_{11} = 8 + c + d, & h^\beta_{21} = 7 + d, \\
h^\alpha_{13} = 3 + a = 5 + c + d, & h^\alpha_{31} = 6, & h^\beta_{12} = 7 + c, & h^\beta_{31} = 6 + d, \\
h^\alpha_{14} = 2 + a = 4 + c + d, & h^\alpha_{22} = 5, & h^\beta_{13} = 5 + c, & h^\beta_{22} = 6. \\
h^\alpha_{15} = a = 2 + c + d, & & h^\beta_{14} = 4 + c, &
\end{array}$$

Если $c \geq 3$ и $d \geq 3$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(3 + a) = \{H^\alpha_{13}\}$. Тогда по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$, что противоречиво. Следовательно, $c \leq 2$ или $d \leq 2$.

Случай 6.1. Пусть $c \leq 2$ и $d \leq 2$. Так как $a > 3$, то по (5.9) $c + d \geq 2$. Поэтому возможны лишь следующие 6 случаев. Если $c = 0$ и $d = 2$, то по (5.9) $a = 4$, $n = 19$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9) = \{H^\alpha_{21}, H^\beta_{21}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^δ_{10}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (8, 1^2)$, $\beta^{21} = (5, 4, 1)$, что противоречит теореме 3.1. Если $c = d = 1$, то $a = 4$, $n = 19$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9) = \{H^\alpha_{21}\}$, и по лемме 3.4 $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, что противоречиво. Если $c = 1$ и $d = 2$, то $a = 5$, $n = 20$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9) = \{H^\alpha_{21}, H^\beta_{21}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^δ_{11}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (9, 1^2)$, $\beta^{21} = (6, 4, 1)$, что противоречит теореме 3.1. Если $c = 2$ и $d = 0$, то $a = 4$, $n = 19$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9) = \{H^\alpha_{21}, H^\beta_{12}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^δ_{10}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (8, 1^2)$, $\beta^{12} = (4, 4, 1^2)$, что противоречит теореме 3.1. Если $c = 2$ и $d = 1$, то $a = 5$, $n = 20$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(9) = \{H^\alpha_{21}, H^\beta_{12}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^δ_{11}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (9, 1^2)$, $\beta^{12} = (4, 4, 1^3)$. Но это противоречит теореме 3.1. Если $c = d = 2$, то $a = 6$, $n = 21$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8) = \{H^\beta_{31}\}$, и по лемме 3.4 $\beta^{12} = (\beta^{12})'$, что противоречиво. Случай 6.1 противоречив.

Случай 6.2. Пусть $c \leq 2$ и $d \geq 3$. Если $c \in \{0, 1\}$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + d) = \{H^\beta_{21}\}$. Тогда по лемме 3.4 диаграмма $[\beta^{21}]$ должна быть самоассоциированной, что противоречиво, так как $\beta^{21} = (5 + c, 4, 1)$. Следовательно, $c = 2$, $a = 4 + d \geq 7$, $n = 19 + d \geq 22$. Предположим, что $d > 3$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(6 + d) = \{H^\alpha_{14}, H^\beta_{31}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{14}} \sim \chi^{\beta^{31}}$ на S^δ_{12}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (7, 4, 2)'$, $\beta^{31} = (7, 5, 1)$, что противоречит теореме 3.3. Следовательно, $d = 3$, а тогда $n = 22$, $\alpha = (11, 4, 2^2, 1^3)$, $\beta = (7, 5^2, 2, 1^3)$ и $\varepsilon = -1$, т. е. верно утверждение (6) теоремы.

Случай 6.3. Пусть $d \leq 2$ и $c \geq 3$. Если $d \leq 1$, то $a = 2 + c \geq 5$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + c) = \{H^\beta_{12}\}$. Тогда по лемме 3.4 $\beta^{12} = (\beta^{12})'$, что противоречиво $(= (4 + c, 4, 1^2))$. Следовательно, $d = 2$, $a = 4 + c \geq 7$, $n = 19 + c$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(7 + c) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{12}\}$. Тогда по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^δ_{12}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (7, 4, 1)'$, $\beta^{12} = (4, 4, 1^4)$, что противоречит теореме 3.3.

Итак, в случае 6 верно утверждение (6) теоремы.

Случай 7. Пусть $\alpha^{12} =' (8, 1^3), \beta^{11} =' (4, 4, 2, 1)$ и $\sigma = -1$.

Из вида $[\alpha^{12}]$ (см. рис. 8) следует, что $s = 3$ и $b = 3$. Можно считать, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ в этом случае имеют вид, изображённый на рис. 15, где $\{a, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a > 3$. Тогда

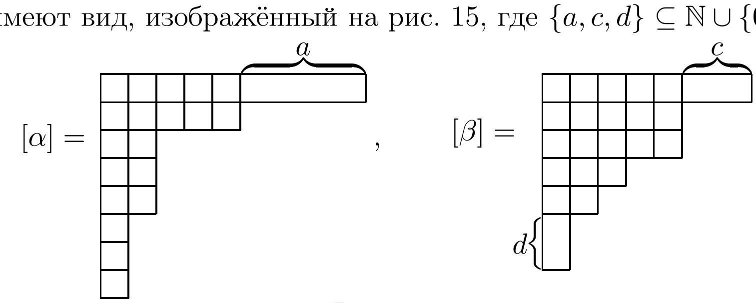


Рис. 15

$$a = 1 + c + d, \tag{5.10}$$
$$\varepsilon = (-1)^a = (-1)^{1+c+d}.$$

$$\begin{array}{llll}
h^{\alpha}_{12} = 8 + a = 9 + c + d, & h^{\alpha}_{15} = a = 1 + c + d, & h^{\beta}_{11} = 9 + c + d, & h^{\beta}_{15} = 3 + c, \\
h^{\alpha}_{13} = 4 + a = 5 + c + d, & h^{\alpha}_{21} = 11, & h^{\beta}_{12} = 8 + c, & h^{\beta}_{21} = 8 + d, \\
h^{\alpha}_{14} = 3 + a = 4 + c + d, & h^{\alpha}_{31} = 7, & h^{\beta}_{13} = 6 + c, & h^{\beta}_{31} = 7 + d, \\
h^{\alpha}_{15} = 2 + a = 3 + c + d, & h^{\alpha}_{22} = 7, & h^{\beta}_{14} = 4 + c, & h^{\beta}_{22} = 7.
\end{array}$$

Если $c \geq 4$ и $d \geq 4$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4 + a) = \{H^{\alpha}_{13}\}$. Тогда по лемме 3.4 $\alpha^{13} = (\alpha^{13})'$, что противоречиво. Следовательно, $c \leq 3$ или $d \leq 3$.

Случай 7.1. Пусть $c \leq 3$ и $d \leq 3$. Так как $a > 3$, то по (5.10) $c + d \geq 3$. Поэтому для c и d имеются лишь следующие 4 возможности. Пусть $c \leq 2$ и $d = 3$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(11) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{21}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{12+c}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (9 + c, 1^3)$, $\beta^{21} = (5 + c, 4, 2, 1)$, что противоречит теореме 3.1. Пусть $d \leq 2$ и $c = 3$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(11) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$, и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{21}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{12+d}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{21} = (9 + d, 1^3)$, $\beta^{21} = (4, 4, 2, 1^{2+d})$, что противоречит теореме 3.1. Пусть $c \leq 2$ и $d \leq 2$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(11) = \{H^{\alpha}_{21}\}$, и по лемме 3.4 $\alpha^{21} = (\alpha^{21})'$, что противоречиво. Пусть, наконец, $c = d = 3$. Тогда $n = 26$, $\alpha = (12, 5, 2^3, 1^3)$, $\beta = (8, 5^2, 3, 2, 1^3)$, $\varepsilon = -1$, т. е. выполнено утверждение (7) теоремы.

Случай 7.2. Пусть $c \leq 3$ и $d \geq 4$. Если $c < 3$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + d) = \{H^{\beta}_{21}\}$. Тогда по лемме 3.4 диаграмма $[\beta^{21}]$ должна быть самоассоциированной, что противоречиво, так как $\beta^{21} = (5 + c, 4, 1^3)$. Следовательно, $c = 3$, $n = 23 + d$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + d) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{21}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{21}}$ на S^{δ}_{15+c}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (8, 5, 1^2)'$, $\beta^{21} = (8, 4, 1^3)$, что противоречит теореме 3.3.

Случай 7.3. Пусть $d \leq 3$ и $c \geq 4$. При $d < 3$ $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + c) = \{H^{\beta}_{12}\}$. Тогда по лемме 3.4 диаграмма $[\beta^{12}]$ должна быть самоассоциированной, что противоречиво, так как $\beta^{12} = (5 + d, 4, 2^2)'$. Следовательно, $d = 3$, $n = 23 + c$, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(8 + c) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{12}\}$ и по лемме 3.5 $\chi^{\alpha^{13}} \sim \chi^{\beta^{12}}$ на S^{δ}_{15+d}, $\delta = \pm 1$, $\alpha^{13} = (8, 5, 1^2)'$, $\beta^{12} = (8, 4, 2^2)$, что противоречит теореме 3.3.

Итак, в случае 7 верно утверждение (7) теоремы.

Таким образом, при условии теоремы верно одно из утверждений (1)–(7).

Обратное утверждение проверено автором с помощью компьютерной системы GAP [7].

Теорема 5.1 доказана.

Поступила 15.10.2006

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В. А.** О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n и A_n // Тр. Ин-та матемематики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, №1. С. 3–35.
2. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах групп S_n и A_n // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, №5. С. 977–994.
3. **Белоногов В. А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990.
4. **James G., Kerber A.** The representation theory of the symmetric group. London: Addison–Wesley, 1981.
5. **Джеймс Г.** Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982.
6. **Белоногов В. А.** О равнокорневых неприводимых характерах групп S_n и A_n // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, №1. С. 3–25.
7. **Schönert M. et. al.** GAP (Groups, Algorithms, Programming), Version 4.4.6. Aachen: Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH, 2005.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 517.956

АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Д. И. Борисов

Рассматривается сингулярно возмущенный матричный оператор второго порядка во всем пространстве с быстро осциллирующими коэффициентами. Строятся полные асимптотические разложения собственных значений, сходящихся к изолированным собственным значениям усредненного оператора, а также полные асимптотические разложения соответствующих собственных функций.

Введение

Исследованию асимптотического поведения решений эллиптических систем в ограниченных областях посвящено большое число работ (см., например, [1, 2] и список литературы в этих книгах). Аналогичные вопросы для случая неограниченной области изучены в гораздо меньшей степени. В последние годы было начато достаточно интенсивное изучение таких задач (см. [3–6] и список литературы в этих статьях). Одним из интересных вопросов является поведение спектра упомянутых операторов в неограниченных областях, рассматриваемых как операторы в пространстве L_2. Одномерный скалярный оператор изучался в [7–10]. Здесь рассматривались операторы с коэффициентами, зависящими от медленной и быстрой переменных. Зависимость от медленной переменной предполагалась локализованной на конечном интервале, т.е. на бесконечности коэффициенты либо зависели от быстрой переменной, либо были постоянны. Было подробно исследовано асимптотическое поведение непрерывного и точечного спектров, построены асимптотические разложения для собственных значений и собственных функций, а также для краев зон непрерывного спектра.

В настоящей статье мы обобщаем часть результатов цитированных работ на многомерный случай. А именно, рассматривается матричный оператор второго порядка в многомерном пространстве с быстро осциллирующими коэффициентами. Коэффициенты оператора зависят от медленной и быстрой переменных. По быстрой переменной коэффициенты периодичны, в то время как по медленной переменной равномерно ограничены вместе со всеми своими производными. Основным результатом работы являются полные асимптотические разложения собственных значений возмущенного оператора, сходящихся к изолированным собственным значениям усредненного оператора. Кроме того, строятся полные асимптотические разложения соответствующих собственных функций. Отметим также, что аналогичный матричный оператор уже рассматривался в [3], где были построены первые члены асимптотического разложения резольвенты в равномерной норме. В [3] было также показано, что основные операторы математической физики являются частными случаями данного оператора; большое число содержательных примеров было приведено и в [4, 5]. Для всех этих примеров применимы результаты настоящей работы, причем в случае примеров из [4, 5] допускается зависимость коэффициентов от медленной переменной.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00037). Автор также был поддержан стипендией “Marie Curie International Fellowship” 6-й Европейской рамочной программы (MIF1-CT-2005-006254), стипендией из премии Бальзана, присужденной Пьеру Делиню в 2004 г., и грантом Республики Башкортостан молодым ученым и молодежным научным коллективам.

1. Постановка задачи и основные результаты

Пусть Y — некоторое банахово пространство. Через $W^k_\infty(\mathbb{R}^d;Y)$ и $W^k_2(\mathbb{R}^d;Y)$, $d\geqslant 1$, обозначим соболевские пространства функций на $\mathbb{R}^d$ со значениями в Y, обладающих конечными нормами

$$\|\mathbf{u}\|_{W^k_\infty(\mathbb{R}^d;Y)}:=\max_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+\\|\alpha|\leqslant k}}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d}\left\|\frac{\partial^{|\alpha|}\mathbf{u}}{\partial x^a}\right\|_Y,\quad \|\mathbf{u}\|^2_{W^k_2(\mathbb{R}^d;Y)}=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+\\|\alpha|\leqslant k}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left\|\frac{\partial^{|\alpha|}\mathbf{u}}{\partial x^a}\right\|^2_Y dx.$$

В случае $k=0$ мы будем использовать обозначение $L_\infty(\mathbb{R}^d;Y):=W^0_\infty(\mathbb{R}^d;Y)$, $L_2(\mathbb{R}^d;Y):=W^0_2(\mathbb{R}^d;Y)$. Обозначим $\mathcal{W}(\mathbb{R}^d;Y):=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}W^k_\infty(\mathbb{R}^d;Y)$.

В пространстве $\mathbb{R}^d$ выберем произвольную периодическую решетку с элементарной ячейкой $\square$. Символом $C^\gamma_{per}(\overline{\square})$ обозначаем пространство $\square$-периодических функций с конечными нормами Гельдера $\|\cdot\|_{C^\gamma_{per}(\overline{\square})}:=\|\cdot\|_{C^\gamma(\overline{\square})}$. В пространстве $\mathbb{R}^d$ введем декартовы координаты $x=(x_1,\ldots,x_d)$ и $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)$. Функции $f=f(x,\xi)$, $\square$-периодические по ξ, мы часто будем рассматривать как отображения точек $x\in\mathbb{R}^d$ в функции $f(x,\cdot)$. Это позволит нам говорить о принадлежности этих функций пространствам $W^k_\infty(\mathbb{R}^d;C^\gamma_{per}(\overline{\square}))$ и $W^k_2(\mathbb{R}^d;C^\gamma_{per}(\overline{\square}))$.

Пусть $A=A(x,\xi)\in\mathcal{W}(\mathbb{R}^d;C^{1+\beta}_{per}(\overline{\square}))$ — матричная функция размера $m\times m$, $m\geqslant 1$, $\beta\in(0,1)$, эрмитова и удовлетворяющая равномерной по $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d}$ оценке

$$c_1E_m\leqslant A(x,\xi)\leqslant c_2E_m,$$

где E_m — единичная матрица размера $m\times m$. Через $B=B(\zeta)$ обозначим матричную функцию $B(\zeta)=\sum_{i=1}^d B_i\zeta_i$, где $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_d)$, B_i — постоянные матрицы размера $m\times n$, $m\geqslant n$, $\operatorname{rank}B(\zeta)=n$, $\zeta\neq 0$. Пусть $V=V(x,\xi)\in\mathcal{W}(\mathbb{R}^d;C^\beta_{per}(\overline{\square}))$, $a_i=a_i(x,\xi)\in\mathcal{W}(\mathbb{R}^d;C^{1+\beta}_{per}(\overline{\square}))$, $b_i=b_i(x)\in\mathcal{W}(\mathbb{R}^d)$ — матричные функции размера $n\times n$, причем матрицу V будем считать эрмитовой. У всех введенных матриц компоненты предполагаются комплекснозначными. Через ε обозначим малый положительный параметр и для любой функции $f(x,\xi)$ положим $f_\varepsilon(x):=f(x,x/\varepsilon)$.

Возмущенный оператор введем следующим образом:

$$\mathcal{H}_\varepsilon:=B(\partial)^*A_\varepsilon B(\partial)+a_\varepsilon(x,\partial)+V_\varepsilon$$

в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с областью определения $W^2_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь

$$B(\partial):=\sum_{i=1}^d B_i\partial_i,\quad B(\partial)^*:=-\sum_{i=1}^d B_i^*\partial_i,$$

$$a_\varepsilon(x,\partial):=a\left(x,\frac{x}{\varepsilon},\partial\right),\quad a(x,\xi,\zeta):=\sum_{i=1}^d\Big(a_i(x,\xi)\zeta_i b_i(x)-b_i^*(x)\zeta_i a_i^*(x,\xi)\Big),$$

где $\partial=(\partial_1,\ldots,\partial_d)$, ∂_i — производная по x_i, индекс * означает эрмитово сопряжение. В [3] было показано, что оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ самосопряжен и равномерно по ε полуограничен снизу, а также был получен усредненный оператор для $\mathcal{H}_\varepsilon$. Опишем последний.

Пусть $\Lambda_0=\Lambda_0(x,\xi),\Lambda_1=\Lambda_1(x,\xi)$ — матрицы размера $n\times n$ и $n\times m$, соответственно, являющиеся $\square$-периодическими по ξ решениями уравнений

$$\begin{aligned}&B(\partial_\xi)^*A(x,\xi)B(\partial_\xi)\Lambda_0(x,\xi)-\sum_{i=1}^d b_i^*(x)\frac{\partial a_i^*}{\partial\xi_i}(x,\xi)=0,\quad &(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d},\\ &B(\partial_\xi)^*A(x,\xi)\Big(B(\partial_\xi)\Lambda_1(x,\xi)+E_m\Big)=0,\quad &(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d},\end{aligned}\tag{1.1}$$

и удовлетворяющие условиям

$$\int\limits_{\square} \Lambda_i(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0, \quad x\in\mathbb{R}^d, \qquad i=0,1. \tag{1.2}$$

Здесь $\partial_\xi = \left(\dfrac{\partial}{\partial\xi_1},\dots,\dfrac{\partial}{\partial\xi_d}\right)$. В [3] было установлено, что решения задач (1.1), (1.2) существуют и единственны, и $\Lambda_i\in W^1_\infty(\mathbb{R}^d; C^{2+\beta}_{per}(\overline{\square}))$. Усредненный оператор $\mathcal{H}_0$ определялся следующим образом:

$$\mathcal{H}_0 = B(\partial)^* A_2 B(\partial) + A_1(x,\partial) + A_0,$$

$$A_2(x) := \frac{1}{|\square|}\int\limits_{\square} A(x,\xi)\big(B(\partial_\xi)\Lambda_1(x,\xi) + E_m\big)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$A_1(x,\partial) := \frac{1}{|\square|}B(\partial)^*\int\limits_{\square} A(x,\xi)B(\partial_\xi)\Lambda_0(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$+\left(\frac{1}{|\square|}\int\limits_{\square}\big(B(\partial_\xi)\Lambda_0(x,\xi)\big)^* A(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)B(\partial) + \frac{1}{|\square|}\int\limits_{\square} a(x,\xi,\partial)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$A_0(x) := -\frac{1}{|\square|}\int\limits_{\square}\big(B(\partial_\xi)\Lambda_0(x,\xi)\big)^* A(x,\xi)B(\partial_\xi)\Lambda_0(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{|\square|}\int\limits_{\square} V(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

и рассматривался как оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с областью определения $W^2_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Было показано, что данный оператор самосопряжен и полуограничен снизу.

Пусть λ_0 — изолированное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$ конечной кратности N. Из [3, следствие 1.2] вытекает, что существует ровно N собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(i)}$, $i=1,\dots,N$, оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ (с учетом кратности), сходящихся к λ_0 при $\varepsilon\to+0$. Целью нашей работы является построение полных асимптотических разложений данных собственных значений и соответствующих собственных функций. Прежде чем сформулировать основной результат, введем дополнительные обозначения.

Пусть $\boldsymbol{\psi}_0^{(i)}$, $i=1,\dots,N$, — ортонормированные в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ собственные вектор-функции, соответствующие λ_0. Введем в рассмотрение матрицу T с элементами

$$T_{ij} := \frac{1}{|\square|}\Big(\mathcal{K}_{-1}(\Lambda_1 B(\partial_x)+\Lambda_0)\boldsymbol{\psi}_0^{(i)}, (\Lambda_1 B(\partial_x)+\Lambda_0)\boldsymbol{\psi}_0^{(j)}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d\times\square;\mathbb{C}^n)}$$

$$+\frac{1}{|\square|}\Big(\boldsymbol{\psi}_0^{(i)}, \mathcal{K}_0(\Lambda_1 B(\partial_x)+\Lambda_0)\boldsymbol{\psi}_0^{(j)}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d\times\square;\mathbb{C}^n)} + \frac{1}{|\square|}\Big(\mathcal{K}_0(\Lambda_1 B(\partial_x)+\Lambda_0)\boldsymbol{\psi}_0^{(i)}, \boldsymbol{\psi}_0^{(j)}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d\times\square;\mathbb{C}^n)},$$

$$\mathcal{K}_{-1} := B(\partial_\xi)^* A B(\partial_x) + B(\partial_x)^* A B(\partial_\xi) + a(x,\xi,\partial_\xi), \qquad \mathcal{K}_0 := B(\partial_x)^* A B(\partial_x) + a(x,\xi,\partial_x) + V,$$

где $\partial_x := \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial}{\partial x_d}\right)$, $\partial_\xi := \left(\dfrac{\partial}{\partial\xi_1},\dots,\dfrac{\partial}{\partial\xi_d}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial}{\partial\xi_i}$ — частные производные по x_i и ξ_i от функций вида $u=u(x,\xi)$. Аргументами всех функций в приведенных формулах, кроме $\boldsymbol{\psi}_0^{(j)}$, являются (x,ξ).

Матрица T, очевидно, эрмитова, поэтому существует унитарная матрица S_0 такая, что матрица $S_0 T S_0^*$ диагональна. Обозначим $\boldsymbol{\Psi}_0^{(i)} := \sum_{j=1}^N S_{ij}^{(0)}\boldsymbol{\psi}_0^{(j)}$, где $S_{ij}^{(0)}$ — элементы матрицы S_0. Вектор-функции $\boldsymbol{\Psi}_0^{(i)}$ ортонормированы в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Через τ_i, $i=1,\dots,N$, обозначим собственные значения матрицы T. Наш основной результат выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Пусть собственные значения матрицы T различны. Тогда собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(i)}$ имеют асимптотики*

$$\lambda_\varepsilon^{(i)} = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j^{(i)}, \tag{1.3}$$

где

$$\lambda_1^{(i)} = \tau_i, \tag{1.4}$$

а остальные коэффициенты определяются леммой 5. *Собственные вектор-функции, соответствующие $\lambda_\varepsilon^{(i)}$, можно выбрать так, что в норме $W_2^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ они будут иметь следующие асимптотические разложения:*

$$\boldsymbol{\psi}_\varepsilon^{(i)}(x) = \boldsymbol{\Psi}_0^{(i)}(x) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \boldsymbol{\Psi}_j^{(i)}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_1^{(i)}(x,\xi) = \Big(\Lambda_1(x,\xi)B(\partial_x) + \Lambda_0(x,\xi)\Big)\boldsymbol{\Psi}_0^{i}(x) + \boldsymbol{\phi}_1^{(i)}(x), \tag{1.6}$$

где $\boldsymbol{\phi}_1^{(i)}$ определяется формулой (3.10), *уравнением* (3.7) *и равенствами* (3.13). *Остальные коэффициенты ряда* (1.5) *даются в утверждении леммы* 5.

Подчеркнем, что условие $\tau_i \neq \tau_j$, $i \neq j$, не является существенным для построения асимптотик собственных значений и собственных вектор-функций оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$. Мы использовали его лишь для упрощения некоторых технических деталей в процессе построения асимптотик. Если данное условие не выполнено, то наша техника позволяет построить асимптотики и в этом случае. Также отметим, что упомянутое условие является случаем общего положения, если λ_0 — кратное собственное значение, и заведомо выполнено, если λ_0 — простое собственное значение.

2. Вспомогательные утверждения

В настоящем параграфе мы докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для любого $\mathbf{u} \in W_2^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ справедлива равномерная по ε оценка:*

$$\|\mathbf{u}\|_{W_2^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon^{-5}\left(\|\mathcal{H}_\varepsilon \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\right).$$

Доказательство. Оценку достаточно доказать для вектор-функций $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ в силу плотности последнего множества в $W_2^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Всюду в доказательстве через C обозначаем несущественные константы, не зависящие от ε.

Положим $\mathbf{f} := \mathcal{H}_\varepsilon \mathbf{u}$. Так как

$$(\mathbf{f},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} = \big(A_\varepsilon B(\partial)\mathbf{u}, B(\partial)\mathbf{u}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} + 2\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{d}\left(a_{i,\varepsilon}\partial_i b_i \mathbf{u},\mathbf{u}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \big(V_\varepsilon \mathbf{u},\mathbf{u}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},$$

то из равномерного по ε неравенства

$$C_1\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \big(A_\varepsilon B(\partial)\mathbf{u}, B(\partial)\mathbf{u}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} \leqslant C_2\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},$$

установленного в лемме 2.1 в [3], следует

$$\|\mathbf{u}\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\left(\|\mathbf{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\right). \tag{2.1}$$

В силу определения матрицы A_ε и последней оценки выводим:

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i,j=1}^{d} B_i^* A_\varepsilon B_j \partial_{ij}\mathbf{u}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} &\leqslant \|\mathbf{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + C\varepsilon^{-1}\|\mathbf{u}\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \\ &\leqslant C\varepsilon^{-1}\left(\|\mathbf{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\right). \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Пусть $\sum\limits_p \chi_p^2(x) = 1$ — разбиение единицы для пространства $\mathbb{R}^d$ такое, что каждая из срезающих функций удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \|\chi_p\|_{C^2(\operatorname{supp}\chi_p)} \leqslant C$, где константа C не зависит от p, и сдвигом носитель каждой из функций χ_p можно поместить в некоторую конечную область, не зависящую от p. Также предполагаем, что число функций χ_p, отличных от нуля в заданной точке $x \in \mathbb{R}^d$, ограничено равномерно по $x \in \mathbb{R}^d$. Обозначим $\mathbf{u}_p(x) := \chi_p(x/\varepsilon^2)\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{f}_p := -\sum_{i,j=1}^d B_i^* A_\varepsilon B_j \partial_{ij}\mathbf{u}_p$. Отметим, что в силу (2.1), (2.2)

$$\begin{aligned}\sum_p \|\mathbf{f}_p\|^2_{L_2(\Omega_{p,\varepsilon})} &\leqslant C\varepsilon^{-9}\sum_p\left(\|\chi_p\mathbf{f}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{u}_p\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\right) \\ &= C\varepsilon^{-9}\left(\|\mathbf{f}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\right), \qquad (2.3)\end{aligned}$$

где $\Omega_{p,\varepsilon} := \operatorname{supp}\chi_p(x/\varepsilon^2)$. Из определения функции χ_p следует, что $\operatorname{supp}\mathbf{u}_p \subseteq \Omega_{p,\varepsilon}$, причем линейный размер носителя $\Omega_{p,\varepsilon}$ порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Пусть $x_p^{(0)}$ — некоторая точка из этого носителя. В силу гладкости матрица A_ε удовлетворяет равенству

$$A_\varepsilon(x) = A_\varepsilon(x_p^{(0)}) + \varepsilon\widetilde{A}(x,p,\varepsilon), \qquad |\widetilde{A}(x,p,\varepsilon)| \leqslant C, \quad x \in \Omega_{p,\varepsilon},$$

где константа C не зависит от ε, p и $x \in \Omega_{p,\varepsilon}$. Следовательно,

$$-\sum_{i,j=1}^{d} B_i^* A_\varepsilon(x_p^{(0)}) B_j \partial_{ij}\mathbf{u}_p = \mathbf{f}_p + \varepsilon\sum_{i,j=1}^{d} B_i^*\widetilde{A}_\varepsilon B_j\partial_{ij}\mathbf{u}_p, \quad x \in \Omega_{p,\varepsilon}.$$

В правой части данного уравнения стоит дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, что позволяет применить оценку (10.1) из [11, гл. IV, теорема 10.1], согласно которой

$$\sum_{i,j=1}^{d}\|\partial_{ij}\mathbf{u}_p\|_{L_2(\Omega_{p,\varepsilon};\mathbb{C}^n)} \leqslant C\Bigg(\|\mathbf{f}_p\|_{L_2(\Omega_{p,\varepsilon};\mathbb{C}^n)} + \varepsilon\sum_{i,j=1}^{d}\|\partial_{ij}\mathbf{u}_p\|_{L_2(\Omega_{p,\varepsilon};\mathbb{C}^n)}\Bigg),$$

где константа C не зависит от ε и p. С учетом (2.3) теперь заключаем

$$\sum_{i,j=1}^{d}\|\partial_{ij}\mathbf{u}_p\|_{L_2(\Omega_{p,\varepsilon};\mathbb{C}^n)} \leqslant C\|\mathbf{f}_p\|_{L_2(\Omega_{p,\varepsilon};\mathbb{C}^n)},$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{d}\|\partial_{ij}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} &= \sum_{i,j=1}^{d}\sum_p\big\|\chi_p\partial_{ij}\mathbf{u}\big\|^2_{L_2(\Omega_p;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\sum_p\sum_{i,j=1}^{d}\|\partial_{ij}\mathbf{u}_p\|^2_{L_2(\Omega_p;\mathbb{C}^n)} \\ &+ C\varepsilon^{-8}\sum_p\|\mathbf{u}\|^2_{W_2^1(\Omega_p;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon^{-9}\left(\|\mathbf{f}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{u}\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\right).\end{aligned}$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{f}(x,\cdot) \in C^{\beta}_{per}(\overline{\square})$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^d$. *Система*

$$B(\partial_\xi)^* A(x,\xi) B(\partial_\xi)\mathbf{v}(x,\xi) = \mathbf{f}(x,\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

имеет $\square$*-периодическое по* ξ *решение* $\mathbf{v}(x,\cdot)\in C^{2+\beta}_{per}(\overline{\square})$*, определенное с точностью до постоянного (по* ξ*) вектора, если и только если*

$$\int\limits_{\square}\mathbf{f}(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi=0,\quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{2.4}$$

Если выполнено (2.4)*, то существует единственное решение* $\mathbf{v}$*, также удовлетворяющее условию* (2.4)*. Если* $\mathbf{f}\in W^k_p\big(\mathbb{R}^d;C^{\beta}_{per}(\overline{\square})\big)$*,* $p=2$*,* $p=\infty$*, то* $\mathbf{v}\in W^k_p\big(\mathbb{R}^d;C^{2+\beta}_{per}(\overline{\square})\big)$ *и верна оценка*

$$\|\mathbf{v}\|_{W^k_p(\mathbb{R}^d;C^{2+\beta}_{per}(\overline{\square}))}\leqslant C\|\mathbf{f}\|_{W^k_p(\mathbb{R}^d;C^{\beta}_{per}(\overline{\square}))}.$$

Данная лемма доказывается совершенно аналогично лемме 2.2 в [3].

Лемма 3. *Для* λ*, близких к* λ_0*, достаточно малых* ε *и любой* $\mathbf{f}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *справедливо представление*

$$(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}\mathbf{f}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathbf{\Psi}^{(i)}_\varepsilon}{\lambda^{(i)}_\varepsilon-\lambda}(\mathbf{f},\mathbf{\Psi}^{(i)}_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}+\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{\Psi}^{(i)}_\varepsilon$ *— ортонормированные в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *собственные вектор-функции, соответствующие* $\lambda^{(i)}_\varepsilon$*, а вектор-функция* $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ *удовлетворяет равномерным по* ε *и* λ *оценкам:*

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\leqslant C\|\mathbf{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},\qquad \|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{W^2_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\leqslant C\varepsilon^{-5}\|\mathbf{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Представление (2.5) следует из [12, гл. V, формула (3.21)], где вектор-функция $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ голоморфна по λ, близким к λ_0, в норме $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Нетрудно убедиться, что

$$\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon=(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}\widetilde{\mathbf{f}},\qquad \widetilde{\mathbf{f}}:=\mathbf{f}-\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{f},\mathbf{\Psi}^{(i)}_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\mathbf{\Psi}^{(i)}_\varepsilon. \tag{2.7}$$

Пусть δ — фиксированное число такое, что $\sigma(\mathcal{H}_0)\cap\{\lambda:|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta\}=\{\lambda_0\}$. Тогда в силу сходимостей $\lambda^{(i)}_\varepsilon\to\lambda_0$ при достаточно малых ε справедливо неравенство $\operatorname{dist}\big(\sigma(\mathcal{H}_\varepsilon),\{\lambda:|\lambda-\lambda_0|=\delta\}\big)\geqslant\delta/2$. Отсюда, из [12, гл. V, формула (3.16)] и (2.7) следует, что верна первая оценка в (2.6) при $|\lambda-\lambda_0|=\delta$, где константа C не зависит от ε и λ. В силу принципа максимума модуля для голоморфных функций заключаем, что данная оценка верна и при $|\lambda-\lambda_0|<\delta$. Вторая оценка в (2.6) теперь вытекает из леммы 1.

3. Доказательство теоремы 1

В доказательстве вначале мы формально построим асимптотики собственных значений и собственных функций. Затем будет проведено обоснование этих асимптотик.

Для формального построения мы применим метод двухмасштабных разложений [1]. Асимптотики собственных значений оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, сходящихся к λ_0, будем строить в виде рядов (1.3), а асимптотики соответствующих собственных вектор-функций — в виде (1.5). Целью формального построения является определение коэффициентов рядов (1.3), (1.5). Вектор-функции $\Psi^{(i)}_j=\Psi^{(i)}_j(x,\xi)$, $j\geqslant 1$, будем искать $\square$-периодическими по ξ и быстро убывающими при $|x|\to+\infty$. Более точно гладкость этих вектор-функций и их поведение на бесконечности будут определены в ходе построения.

Подставим ряды (1.3), (1.5) в уравнение $\mathcal{H}_\varepsilon\boldsymbol{\psi}^{(i)}_\varepsilon=\lambda^{(i)}_\varepsilon\boldsymbol{\psi}^{(i)}_\varepsilon$ и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда получим серию уравнений:

$$B(\partial_\xi)^*AB(\partial_\xi)\mathbf{\Psi}^{(i)}_{j+2}=-\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Psi}^{(i)}_{j+1}-\mathcal{K}_0\mathbf{\Psi}^{(i)}_j+\lambda_0\mathbf{\Psi}^{(i)}_j+\sum_{k=1}^{j}\lambda^{(i)}_k\mathbf{\Psi}^{(i)}_{j-k},\quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d}, \tag{3.1}$$

где $j \geqslant -1$, $A = A(x,\xi)$, $V = V(x,\xi)$, $\mathbf{\Psi}_j^{(i)} = \mathbf{\Psi}_j^{(i)}(x,\xi)$, $q \geqslant 1$, $\mathbf{\Psi}_j^{(i)} \equiv 0$, $j < 0$. При $j = -1$ уравнение (3.1) принимает вид

$$B(\partial_\xi)^* AB(\partial_\xi)\mathbf{\Psi}_1^{(i)} = -\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Psi}_0^{(i)}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}.$$

Как следует из (1.1) и определения оператора $\mathcal{K}_{-1}$, $\square$-периодическое по ξ решение этого уравнения дается равенством

$$\mathbf{\Psi}_1^{(i)}(x,\xi) = \mathbf{\Upsilon}_1^{(i)}(x,\xi) + \boldsymbol{\phi}_1^{(i)}(x), \quad \mathbf{\Upsilon}_1^{(i)} := (\Lambda_1 B(\partial) + \Lambda_0)\mathbf{\Psi}_i^{(0)}, \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{\phi}_1^{(i)}$ — некоторая пока не определенная вектор-функция.

Из леммы 2 следует, что $\Lambda_i \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^d; C_{per}^{2+\beta}(\overline{\square}))$, а потому коэффициенты оператора $\mathcal{H}_0$ принадлежат $\mathcal{W}(\mathbb{R}^d)$. Используя этот факт и дифференцируя уравнение $(\mathcal{H}_0 - \lambda_0)\Psi_0^{(i)} = 0$, нетрудно убедиться, что $\mathbf{\Psi}_0^{(i)} \in W_2^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, где $W_2^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} W_2^k(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Отсюда уже следует, что $\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)} \in W_2^\infty(\mathbb{R}^d; C_{per}^{2+\beta}(\overline{\square}))$.

Подставим равенство (3.2) в уравнение (3.1) с $j = 0$:

$$B(\partial_\xi)^* AB(\partial_\xi)\mathbf{\Psi}_2^{(i)} = -\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)} - \mathcal{K}_0\mathbf{\Psi}_0^{(i)} + \lambda_0\mathbf{\Psi}_0^{(i)} - \mathcal{K}_{-1}\boldsymbol{\phi}_1^{(i)}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}. \tag{3.3}$$

Согласно лемме 2, данное уравнение разрешимо в классе $\square$-периодических по ξ вектор-функций, если выполнено условие разрешимости (2.4). С учетом равенств

$$\int\limits_{\square} (B(\partial_\xi)\Lambda_0)^* A \,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{d} \int\limits_{\square} a_i b_i \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\xi, \quad \int\limits_{\square} \big(B(\partial_\xi)\Lambda_0\big)^* AB(\partial_\xi)\Lambda_0 \,\mathrm{d}\xi = -\sum_{i=1}^{d} \int\limits_{\square} a_i b_i \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\xi, \tag{3.4}$$

установленных в [3], нетрудно проверить, что данное условие разрешимости приводит к уравнению $(\mathcal{H}_0 - \lambda_0)\mathbf{\Psi}_0^{(i)} = 0$, которое выполнено по определению вектор-функций $\mathbf{\Psi}_0^{(i)}$. Следовательно, вектор-функция $\mathbf{\Psi}_2^{(i)}$ имеет вид

$$\mathbf{\Psi}_2^{(i)}(x,\xi) = \mathbf{\Upsilon}_2^{(i)}(x,\xi) + (\Lambda_1(x,\xi)B(\partial) + \Lambda_0(x,\xi))\boldsymbol{\phi}_1^{(i)}(x) + \boldsymbol{\phi}_2^{(i)}(x), \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{\phi}_2^{(i)}$ — некоторая пока не определенная вектор-функция, а $\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)}$ являются $\square$-периодическими по ξ решениями уравнения

$$B(\partial_\xi)^* AB(\partial_\xi)\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)} = -\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)} - \mathcal{K}_0\mathbf{\Psi}_0^{(i)} + \lambda_0\mathbf{\Psi}_0^{(i)}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}, \tag{3.6}$$

удовлетворяющими условиям (2.4). Данное уравнение однозначно разрешимо, так как правая часть уравнения (3.3) и вектор-функция $\mathcal{K}_{-1}\boldsymbol{\phi}_1^{(i)}$ удовлетворяют условию (2.4). В силу леммы 2 верно $\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)} \in W_2^\infty(\mathbb{R}^d; C_{per}^{2+\beta}(\overline{\square}))$.

Подставим теперь (3.2), (3.5) в уравнение (3.1) с $j = 1$:

$$\begin{aligned} B(\partial_\xi)^* AB(\partial_\xi)\mathbf{\Psi}_3^{(i)} = -\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)} - \mathcal{K}_0\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)} + \lambda_0\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)} - \mathcal{K}_{-1}(\Lambda_1 B(\partial_x) + \Lambda_0)\boldsymbol{\phi}_1^{(i)} \\ - \mathcal{K}_0\boldsymbol{\phi}_1^{(i)} + \lambda_0\boldsymbol{\phi}_1^{(i)} + \lambda_1^{(i)}\mathbf{\Psi}_0^{(i)} - \mathcal{K}_{-1}\boldsymbol{\phi}_2^{(i)}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Выпишем для этого уравнения условие разрешимости (2.4) и учтем соотношения (3.4) и условие (1.2). Тогда получим следующее уравнение для $\boldsymbol{\phi}_1^{(i)}$:

$$(\mathcal{H}_0 - \lambda_0)\boldsymbol{\phi}_1^{(i)} = \lambda_1^{(i)}\mathbf{\Psi}_0^{(i)} - \frac{1}{|\square|}\int\limits_{\square} (\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)} + \mathcal{K}_0\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)})\,\mathrm{d}\xi. \tag{3.8}$$

Его правая часть является элементом пространства $W_2^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Так как λ_0 — изолированное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$, то данное уравнение разрешимо в $W_2^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, если и только если

$$\left(\lambda_1^{(i)}\mathbf{\Psi}_0^{(i)} - \frac{1}{|\square|}\int\limits_{\square}(\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)} + \mathcal{K}_0\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)})\,\mathrm{d}\xi, \mathbf{\Psi}_0^{(k)}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} = 0, \quad k = 1,\ldots,N. \tag{3.9}$$

Если выполнены данные условия, то решение уравнения (3.8) определено однозначно с точностью до линейной комбинации функций $\mathbf{\Psi}_0^{(i)}$.

Лемма 4. *Справедливы равенства*

$$\frac{1}{|\square|}(\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)} + \mathcal{K}_0\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)}, \mathbf{\Psi}_0^{(k)})_{L_2(\mathbb{R}^d\times\square;\mathbb{C}^n)} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ \tau_i, & i = k. \end{cases}$$

Доказательство. Интегрируя по частям и учитывая уравнения (1.1), (3.6) и условия (1.2), получаем

$$(\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)}, \mathbf{\Psi}_0^{(k)})_{L_2(\mathbb{R}^d\times\square;\mathbb{C}^n)} = (\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)}, \mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Psi}_0^{(k)})_{L_2(\mathbb{R}^d\times\square;\mathbb{C}^n)}$$
$$= -(\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)}, B(\partial_\xi)^*AB(\partial_\xi)\mathbf{\Upsilon}_1^{(k)})_{L_2(\mathbb{R}^d\times\square;\mathbb{C}^n)} = -(B(\partial_\xi)^*AB(\partial_\xi)\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)}, \mathbf{\Upsilon}_1^{(k)})_{L_2(\mathbb{R}^d\times\square;\mathbb{C}^n)}$$
$$= (\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)}, \mathbf{\Upsilon}_1^{(k)})_{L_2(\mathbb{R}^d\times\square;\mathbb{C}^n)} + (\mathbf{\Psi}_0^{(i)}, \mathcal{K}_0\mathbf{\Upsilon}_1^{(k)})_{L_2(\mathbb{R}^d\times\square;\mathbb{C}^n)}.$$

Отсюда и из определения матрицы T и вектор-функций $\mathbf{\Psi}_0^{(i)}$ следует утверждение леммы.

В силу определения вектор-функций $\mathbf{\Psi}_i^{(0)}$ равенства (3.9) выполнены, если числа $\lambda_1^{(i)}$ выбрать в соответствии с (1.4). Соответствующее решение уравнения (3.8) имеет вид

$$\boldsymbol{\phi}_1^{(i)} = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_1^{(i)} + \sum_{p=1}^N S_{ik}^{(1)}\mathbf{\Psi}_0^{(k)}, \quad \big(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_1^{(i)}, \mathbf{\Psi}_0^{(k)}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} = 0, \quad k = 1,\ldots,N, \tag{3.10}$$

где $S_{ip}^{(1)}$ — некоторые числа и $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_1^{(i)} \in W_2^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Последнее включение легко получить, дифференцируя уравнение (3.8). Решение уравнения (3.7) имеет вид:

$$\mathbf{\Psi}_3^{(i)}(x,\xi) = \mathbf{\Phi}_3^{(i)}(x,\xi) + (\Lambda_1(x,\xi)B(\partial_x) + \Lambda_0(x,\xi))\boldsymbol{\phi}_2^{(i)}(x) + \sum_{k=1}^N S_{ik}^{(1)}\mathbf{\Upsilon}_2^{(k)}(x,\xi) + \boldsymbol{\phi}_3^{(i)}(x), \tag{3.11}$$

где $\boldsymbol{\phi}_3^{(i)}$ — некоторая вектор-функция, а $\mathbf{\Phi}_3^{(i)} \in W_2^\infty(\mathbb{R}^d; C_{per}^{2+\beta}(\overline{\square}))$ — решение уравнения

$$B(\partial_\xi)^*AB(\partial_\xi)\mathbf{\Phi}_3^{(i)} = -\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)} - \mathcal{K}_0\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)} + \lambda_0\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)} - \mathcal{K}_{-1}(\Lambda_1B(\partial_x) + \Lambda_0)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_1^{(i)}$$
$$- \mathcal{K}_0\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_1^{(i)} + \lambda_0\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_1^{(i)} + \lambda_1^{(i)}\mathbf{\Psi}_0^{(i)}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}.$$

Покажем теперь, как определяются числа $S_{ip}^{(1)}$ и коэффициенты $\lambda_2^{(i)}$ ряда (1.3). Подставим (3.2), (3.5), (3.10), (3.11) в уравнение (3.1) с $j = 2$ и выпишем для него условие разрешимости (2.4). Тогда получим следующее уравнение:

$$(\mathcal{H}_0 - \lambda_0)\boldsymbol{\phi}_2^{(i)} = \lambda_1^{(i)}\sum_{p=1}^N S_{ip}^{(1)}\mathbf{\Psi}_0^{(p)} - \frac{1}{|\square|}\sum_{k=1}^N S_{ik}^{(1)}\int\limits_{\square}(\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Upsilon}_2^{(k)} + \mathcal{K}_0\mathbf{\Upsilon}_1^{(k)})\,\mathrm{d}\xi$$
$$+ \lambda_1^{(i)}\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_1^{(i)} + \lambda_2^{(i)}\mathbf{\Psi}_0^{(i)} - \mathbf{g}_2^{(i)}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{g}_2^{(i)} := \frac{1}{|\square|}\int\limits_{\square} \Big(\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Phi}_3^{(i)} + \mathcal{K}_0\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)} + \mathcal{K}_0(\Lambda_1 B(\partial_x)+\Lambda_0)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_1^{(i)}\Big)\,\mathrm{d}\xi.$$

Правая часть полученного уравнения принадлежит $W_2^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Выпишем теперь условие разрешимости уравнения (3.12) и учтем лемму 4 и равенства (1.4). Тогда получим

$$(\tau_1^{(i)}-\tau_1^{(k)})S_{ik}^{(1)} + \lambda_2^{(i)}\delta_{ik} - (\mathbf{g}_2^{(i)},\mathbf{\Psi}_0^{(k)})_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} = 0, \qquad k=1,\dots,N,$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Отсюда и из предположения $\tau_i\neq\tau_j$, $i\neq j$, следует, что

$$S_{ik}^{(1)} = \frac{(\mathbf{g}_2^{(i)},\mathbf{\Psi}_0^{(k)})_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}}{\tau_i-\tau_k}, \qquad k\neq i, \qquad \lambda_2^{(i)} = (\mathbf{g}_2^{(i)},\mathbf{\Psi}_0^{(i)})_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \tag{3.13}$$

Без ограничения общности положим $S_{ii}^{(1)}=0$. Формулы (1.6) доказаны.

Построение остальных членов рядов (1.3), (1.5) проводится по той же схеме. Результаты этого построения сформулируем в виде следующей леммы, которая доказывается по индукции.

Лемма 5. *Существуют единственные решения уравнений* (3.1) *и однозначно определяемые числа* $\lambda_j^{(i)}$, *имеющие следующий вид*:

$$\mathbf{\Psi}_j^{(i)}(x,\xi) = \mathbf{\Phi}_j^{(i)}(x,\xi) + (\Lambda_1(x,\xi)B(\partial_x)+\Lambda_0(x,\xi))\boldsymbol{\phi}_{j-1}^{(i)}(x) + \sum_{k=1}^N S_{ik}^{(j-2)}\mathbf{\Upsilon}_k^{(2)}(x,\xi) + \boldsymbol{\phi}_j^{(i)}(x),$$

$$\boldsymbol{\phi}_j^{(i)}(x) = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_j^{(i)}(x) + \sum_{k=1}^N S_{ik}^{(j)}\mathbf{\Psi}_0^{(k)}(x),$$

где $\mathbf{\Phi}_j^{(i)}\in W_2^\infty(\mathbb{R}^d;C_{per}^{2+\beta}(\overline{\square}))$ *— решения уравнений*

$$B(\partial_\xi)^*AB(\partial_\xi)\mathbf{\Phi}_j^{(i)} = -\mathcal{K}_{-1}\Bigg(\mathbf{\Phi}_{j-1}^{(i)} + (\Lambda_1 B(\partial_x)+\Lambda_0)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{j-2}^{(i)} + \sum_{k=1}^N S_{ik}^{(j-3)}\mathbf{\Upsilon}_2^{(k)}\Bigg)$$

$$-\mathcal{K}_0\Bigg(\mathbf{\Phi}_{j-2}^{(i)} + (\Lambda_1 B(\partial_x)+\Lambda_0)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{j-3}^{(i)} + \sum_{k=1}^N S_{ik}^{(j-4)}\mathbf{\Upsilon}_2^{(k)} + \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{j-2}^{(i)}\Bigg) + \sum_{k=0}^{j-2}\lambda_k^{(i)}\mathbf{\Psi}_{j-k-2}, \qquad (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d},$$

удовлетворяющие условиям (2.4), *и* $\lambda_0^{(i)} := \lambda_0$. *Вектор-функции* $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_j^{(i)}\in W_2^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *являются решениями уравнений*

$$(\mathcal{H}_0-\lambda_0)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_j^{(i)} = \lambda_1^{(i)}\sum_{k=1}^N S_{ik}^{(j)}\mathbf{\Psi}_0^{(k)} - \frac{1}{|\square|}\sum_{k=1}^N S_{ik}^{(j)}\int\limits_{\square}(\mathcal{K}_{-1}\mathbf{\Upsilon}_2^{(i)} + \mathcal{K}_0\mathbf{\Upsilon}_1^{(i)})\,\mathrm{d}\xi$$

$$+\lambda_j^{(i)}\mathbf{\Psi}_0^{(i)} + \sum_{k=2}^{j-1}\lambda_k^{(i)}\boldsymbol{\phi}_{j-k}^{(1)} - \mathbf{g}_j^{(i)},$$

$$\mathbf{g}_j^{(i)} := \frac{1}{|\square|}\int\limits_{\square}\Bigg(\mathcal{K}_{-1}\Phi_{j+1}^{(i)} + \mathcal{K}_0\big(\Phi_{j+2}^{(i)} + (\Lambda_1 B(\partial_x)+\Lambda_0)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{j-1}^{(i)}\big) + \sum_{k=1}^N S_{ik}^{(j-2)}\mathbf{\Upsilon}_2^{(k)}\Bigg)\,\mathrm{d}\xi,$$

ортогональными $\mathbf{\Psi}_0^{(k)}$, $k=1,\dots,N$, *в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Числа* $S_{ik}^{(j)}$ *и* $\lambda_j^{(i)}$ *определяются равенствами*

$$S_{ik}^{(j)} = \frac{(\mathbf{g}_j^{(i)},\mathbf{\Psi}_0^{(k)})_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}}{\tau_i-\tau_k}, \qquad i\neq k, \qquad S_{ii}^{(j)}=0, \qquad \lambda_j^{(i)} = (\mathbf{g}_j^{(i)},\mathbf{\Psi}_0^{(i)})_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}.$$

Таким образом, коэффициенты рядов (1.3), (1.5) полностью определены, что завершает формальное построение асимптотик.

Обозначим

$$\lambda_{\varepsilon,k}^{(i)} := \lambda_0 + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j \lambda_j^{(i)}, \qquad \boldsymbol{\psi}_{\varepsilon,k}^{(i)}(x) := \boldsymbol{\Psi}_0^{(i)}(x) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j \boldsymbol{\Psi}_j^{(i)}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Непосредственно из леммы 5 и вида уравнений (3.1) вытекает следующее утверждение.

Лемма 6. *Функция $\boldsymbol{\psi}_{\varepsilon,k}^{(i)} \in W_2^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет уравнению $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,k}^{(i)})\boldsymbol{\psi}_{\varepsilon,k}^{(i)} = \mathbf{f}_{\varepsilon,k}^{(i)}$, где для функции $\mathbf{f}_{\varepsilon,k}^{(i)} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ справедлива равномерная по ε оценка*

$$\|\mathbf{f}_{\varepsilon,k}^{(i)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon^{k-1}.$$

На основе лемм 3, 6 совершенно аналогично доказательству леммы 4.3 и теоремы 1.1 в [13] теперь нетрудно показать, что собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(i)}$ и соответствующие собственные функции имеют асимптотические разложения (1.3), (1.5).

Поступила 20.04.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.** Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
2. **Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.** Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
3. **Борисов Д.И.** Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами //Алгебра и анализ. Принято к печати.
4. **Бирман М.Ш., Суслина Т.А.** Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, № 5. С. 1–108.
5. **Бирман М.Ш., Суслина Т.А.** Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ // Алгебра и анализ. 2006. Т. 18, № 6. С. 1–130.
6. **Жиков В.В.** Об операторных оценках в теории усреднения // Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 3. С. 305–308.
7. **Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р.** О спектре оператора Шредингера с быстро осциллирующим финитным потенциалом // Теор. и мат. физика. 2006. Т. 147, № 1. С. 58–63.
8. **Борисов Д.И.** О некоторых сингулярных возмущениях периодических операторов // Теор. и мат. физика. 2007. Т. 151, № 2. С. 207–218.
9. **Борисов Д.И.** О спектре оператора Шредингера, возмущенного быстро осциллирующим потенциалом // Проблемы мат. анализа. 2006. Т. 33. С. 13–76.
10. **Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р.** О спектре самосопряженного дифференциального оператора на оси с быстро осциллирующими коэффициентами // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 8. Принято к печати.
11. **Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.** Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // Commun. Pure Appl. Math. 1964. Vol. 17. P. 35–92.
12. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
13. **D. Borisov.** On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition // Asymptotic Analysis. 2003. Vol. 35, no. 1. P. 1–26.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 517.977

ПОРОГ АВТОРЕЗОНАНСА В СИСТЕМЕ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ[1]

С. Г. Глебов, О. М. Киселев, В. А. Лазарев

Исследуется система двух слабо связанных осцилляторов. Показано, что при внешнем периодическом возмущении возможен захват в резонанс. Приведены описание этого эффекта методами асимптотического анализа и численное моделирование. Получена явная формула для порогового значения амплитуды возмущения, при котором имеет место авторезонанс.

Введение

Система нелинейных осцилляторов часто используется в качестве стандартной модели для описания физических процессов колебательной природы. Такая система имеет собственные частоты и при наличии нелинейной связи может допускать резонансные взаимодействия как между собственными модами, так и с внешней силой, если таковая имеется. В самой простой ситуации, когда все частоты постоянны и связаны некоторым специальным резонансным соотношением, которое определяется нелинейностью системы, это может вызвать рост амплитуды осцилляций, т.е. резонанс.

Медленное изменение частот может приводить к совершенно новым эффектам, к захвату в резонанс, при котором частота возмущения приходит к резонансному значению и в дальнейшем эволюционирует около него. При этом растет амплитуда решения. Эффекты такого сорта в нелинейных уравнениях принято называть *авторезонансом* [1–3]. Авторезонансные эффекты наблюдались в различных областях: в атомной и молекулярной физике [4], нелинейной динамике [5, 6], нелинейных волнах [7].

Здесь мы будем рассматривать пару слабо связанных нелинейных осцилляторов, возмущенную малой внешней силой. Собственные частоты осцилляторов считаются постоянными и относятся друг к другу как 1 : 2. Такое отношение соответствует случаю так называемого параметрического резонанса. Вопрос состоит в том, можно ли за счет малого осциллирующего возмущения получить решения большой амплитуды. Стандартный ответ на этот вопрос для линейных систем — возмущение должно быть резонансным. В нелинейных системах частота возмущения должна медленно меняться так, чтобы в системе наступил авторезонанс.

Не так давно было обнаружено численно [8, 9], что простой рецепт медленного изменения частоты возмущения для захвата системы в авторезонанс не всегда работает. Оказалось, для некоторых систем существуют пороговые значения величины возмущения, менее которых авторезонанс не наблюдается. Позднее пороговые значения были найдены аналитически для ряда модельных одномерных систем, часто используемых в теории авторезонанса [10, 11]. Однако для системы трех связанных осцилляторов в работе [12] пороговых значений обнаружено не было.

В предлагаемой работе построены асимптотики алгебраических решений двумерной системы уравнений главного резонанса. Показано, что авторезонанс возникает при превышении порога значения амплитудой возмущения. Пороговое значение вычислено явно.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06–01–00124, 06–01–92052-КЭ).

1. Постановка задачи и результат

Рассматривается система уравнений главного резонанса:

$$\begin{aligned} A'(t) &= -i\Big(2tA + \frac{1}{2}A^*B + f\Big), \\ B'(t) &= -i\Big(4tB + \frac{1}{4}A^2\Big). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Эта система является асимптотической редукцией системы слабо связанных осцилляторов, возмущенной внешней осциллирующей силой.

Задача состоит в том, чтобы исследовать поведение решений системы (1.1) при больших значениях t.

Показано, что при больших значениях t существуют два типа решений: растущие и ограниченные. Детально исследованы ограниченные решения. Показано, что при внешнем периодическом возмущении возможен захват в резонанс. Этому соответствуют растущие решения. Приведены описание этого эффекта методами асимптотического анализа и численное моделирование. Получены явные формулы, определяющие пороговые значения амплитуды возмущения. При $|f| \geq 12$ существуют решения, соответствующие авторезонансу.

2. Вывод системы уравнений главного резонанса

Система уравнений главного резонанса выводится из системы уравнений слабо связанных осцилляторов

$$\begin{aligned} x'' + \omega^2 x &= \varepsilon\alpha_1 xy + \varepsilon(\gamma\exp\{i\varphi\} + c.c.), \\ y'' + (2\omega)^2 y &= \varepsilon\alpha_2 x^2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\varphi = (\omega + \varepsilon\alpha\tau)\theta,\ \tau = \varepsilon\theta$, ε — малый положительный параметр.

Постоянные в системе имеют следующий смысл: $\omega = \mathrm{const}$ — частота осциллятора с амплитудой x, α_1 и α_2 — параметры нелинейной связи осцилляторов, γ — амплитуда внешнего воздействия, α — производная от расстройки частоты внешней силы по медленному времени τ.

Решение системы (2.1) будем искать в комплексной форме

$$x = \mathcal{A}(\tau)\exp\{i\omega\theta\} + c.c., \qquad y = \mathcal{B}(\tau)\exp\{2i\omega\theta\} + c.c. \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (2.1) и усреднив по быстрой переменной θ, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(\tau) &= -\frac{i\alpha_1}{2\omega}\mathcal{A}^*\mathcal{B} - \frac{i\gamma}{2\omega}\exp\{i\alpha\tau^2\} + \frac{i\varepsilon\mathcal{A}''}{2\omega}, \\ \mathcal{B}'(\tau) &= -\frac{i\alpha_2}{4\omega}\mathcal{A}^2 + \frac{i\varepsilon\mathcal{B}''}{4\omega}. \end{aligned}$$

Отбрасывая слагаемые порядка ε и делая замену

$$\mathcal{A} = a(\tau)\exp\{i\alpha\tau^2\}, \quad \mathcal{B} = b(\tau)\exp\{2i\alpha\tau^2\},$$

получаем

$$\begin{aligned} a'(\tau) &= -2i\alpha\tau a - \frac{i\alpha_1}{2\omega}a^*b - \frac{i\gamma}{2\omega}, \\ b'(\tau) &= -4i\alpha\tau b - \frac{i\alpha_2}{4\omega}a^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Растяжением независимой переменной τ и амплитуд a и b в системе (2.3) часть параметров можно сделать равными единице. Для этого сделаем замену

$$a(\tau) = \lambda A(t), \quad b(\tau) = \kappa B(t), \quad \tau = \chi t,$$

где

$$\kappa = \frac{\omega\sqrt{\alpha}}{\alpha_1}, \quad \lambda = \omega\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1\alpha_2}}, \quad \chi^2 = \frac{1}{\alpha}.$$

В результате получим систему (1.1), где $f = \dfrac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\gamma}{\alpha\omega^2}$. В дальнейшем именно эта система и будет анализироваться. Она является асимптотической редукцией системы (2.1).

3. Численные эксперименты

В данном разделе мы приводим результаты численного счета для системы (1.1). На рис. 1 и 2 приведена динамика изменения $|A(t)|$ для не захваченного в авторезонанс решения и захваченного. При численном счете использовались одинаковые начальные данные

$$A(100) = 102.669 - i793.88, \quad B(100) = 386.825 + i101.831.$$

В первом случае значение амплитуды возмущения $f = 11.9$. Вторая картинка соответствует захваченному решению, при этом амплитуда возмущения больше порогового значения $f = 12.1$.

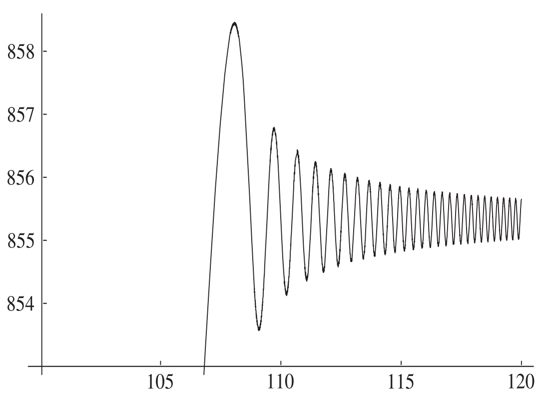


Рис. 1. Незахваченное решение.

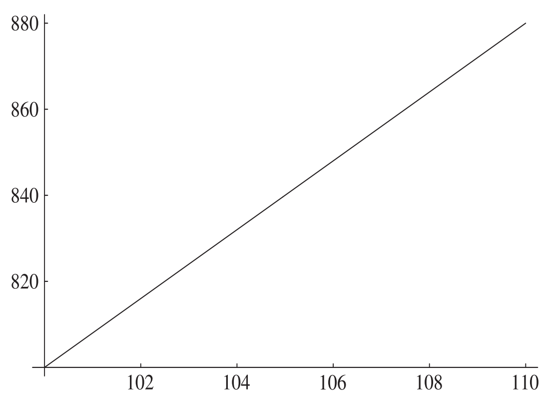


Рис. 2. Захваченное решение.

Графики для $|B|$ в обоих случаях ведут себя так же. Приведенные численные результаты показывают, что существует пороговое значение внешней силы, при котором происходит перестройка структуры решения.

4. Алгебраические асимптотические решения

В этом разделе построены алгебраические асимптотические решения системы (1.1) при $t \to \infty$ в виде рядов по целым степеням t.

Теорема 1. *Существует решение системы уравнений* (1.1) *с асимптотикой при* $t \to \infty$ *вида*

$$\begin{aligned} A_2(t) &= -\frac{f}{2}t^{-1} + \frac{if}{4}t^{-3} + \Big(\frac{3f}{8} - \frac{f^3}{512}\Big)t^{-5} + O(t^{-7}), \\ B_2(t) &= -\frac{f^2}{64}t^{-3} + \frac{7if^2}{256}t^{-5} + O(t^{-7}). \end{aligned}$$

Если $|f| \geq 12$, *тогда существуют решения системы* (1.1) *с асимптотиками при* $t \to \infty$

$$\begin{aligned} A_1(t) &= -8\big(\cos(\Psi) + i\sin(\Psi)\big)t + \frac{f}{4}t^{-1} + O(t^{-3}), \\ B_1(t) &= -4\big(\cos(2\Psi) + i\sin(2\Psi)\big)t + \Big(-\frac{f}{4} - 2i\Big)t^{-1} + O(t^{-3}), \end{aligned}$$

где $\sin(\Psi) = \dfrac{12}{f}$;

$$\begin{aligned} A_3(t) &= 8\big(\cos(\Psi) + i\sin(\Psi)\big)t + \frac{f}{4}t^{-1} + O(t^{-3}), \\ B_3(t) &= -4\big(\cos(2\Psi) + i\sin(2\Psi)\big)t + \bigg(-\cos(\Psi)\Big[\frac{f}{4} + \frac{24}{f}\Big] + 2i[1 + \sin^2(\Psi)]\bigg)t^{-1} + O(t^{-3}), \end{aligned}$$

где $\sin(\Psi) = -\dfrac{12}{f}$.

Общий подход к построению степенных асимптотик изложен, например, в [13, 14].

Доказательство теоремы состоит в построении формальных асимптотических рядов и применении теоремы Кузнецова [15]. Перейдем к построению формальных асимптотик. Рассмотрим систему (1.1) и будем строить решения в виде

$$A(t) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k t^{-k}, \qquad B(t) = \sum_{k=-1}^{\infty} b_k t^{-k}. \tag{4.1}$$

Подстановка представления (4.1) в систему (1.1) и группировка слагаемых с одинаковыми степенями независимой переменной t приводит к рекуррентной системе уравнений для определения коэффициентов a_k, b_k асимптотики (4.1)

$$\begin{aligned} 2ia_k + \frac{i}{2}\left(a_k^* b_{-1} + a_{-1}^* b_k\right) &= (k-2)a_{k-2} - \frac{i}{2}\sum_{m,l} a_m^* b_l, \\ 4ib_k + \frac{i}{2}a_k a_{-1} &= (k-2)b_{k-2} - \frac{i}{4}\sum_{m,l} a_m a_l, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где суммирование производится таким образом, что $m + l = 1 - k$ и индексы суммирования не равны k.

Соотношения в главном, при t^2, имеют вид

$$2a_{-1} + \frac{1}{2}a_{-1}^* b_{-1} = 0, \quad 4b_{-1} + \frac{1}{4}a_{-1}^2 = 0.$$

Коэффициент a_{-1} определяется как решение уравнения

$$\frac{1}{32}|a_{-1}|^2 a_{-1} - 2a_{-1} = 0.$$

Это показывает, что есть пара растущих как t решений, для которых $|a_{-1}|^2 = 64$ и одно нерастущее решение с $a_{-1} = 0$. При этом $b_{-1} = -\dfrac{1}{16}a_{-1}^2$.

Здесь будет приведено построение асимптотического решения, “уходящего” на $+\infty$ при возрастании переменной t. Построение решения “уходящего” на $-\infty$ мы обсудим ниже.

Далее будем считать, что

$$a_{-1} = 8\exp\{i\Psi\}, \quad b_{-1} = -4\exp\{2i\Psi\}.$$

Соотношения при t дают однородную систему уравнений для определения a_0 и b_0. Переписанная для вещественной и мнимой части a_0 и b_0 матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4\cos(\Psi)\sin(\Psi) & -4\cos(\Psi)^2 & 4\sin(\Psi) & -4\cos(\Psi) \\ 4\sin(\Psi)^2 & -4\cos(\Psi)\sin(\Psi) & 4\cos(\Psi) & 4\sin(\Psi) \\ -4\sin(\Psi) & -4\cos(\Psi) & 0 & -4 \\ 4\cos(\Psi) & -4\sin(\Psi) & 4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Ранг матрицы равен трем, следовательно решение зависит от параметра. В качестве решения мы выбираем

$$Y = \mu_0 Y_0 = \mu_0\big(\sin(\Psi), -\cos(\Psi), -\sin(2\Psi), \cos(2\Psi)\big),$$

что дает для a_0, b_0 следующее представление:

$$a_0 = \mu_0\big[\sin(\Psi) - i\cos(\Psi)\big], \quad b_0 = \mu_0\big[-\sin(2\Psi) + i\cos(2\Psi)\big].$$

На следующем шаге, при t^0, мы получаем неоднородную систему уравнений для вещественной и мнимой части a_1 и b_1. Матрица системы имеет вид (4.3) и для разрешимости системы необходимо, чтобы правая часть системы

$$F = \Big(-8\cos(\Psi) - \frac{1}{2}\mu_0^2\sin(\Psi), -f + \frac{1}{2}\mu_0^2\cos(\Psi) - 8\sin(\Psi),$$

$$4\cos(\Psi)^2 - \frac{1}{2}\mu_0^2\cos(\Psi)\sin(\Psi) - 4\sin(\Psi)^2, \frac{1}{4}\mu_0^2\cos(\Psi)^2 + 8\cos(\Psi)\sin(\Psi) - \frac{1}{4}\mu_0^2\sin(\Psi)^2\Big)$$

была ортогональна решениям союзной (сопряженной) системы. Решение союзной системы имеет вид

$$Z = \big(-\cos(\Psi), -\sin(\Psi), \cos(2\Psi), \sin(2\Psi)\big). \tag{4.4}$$

Условие разрешимости системы уравнений для вещественной и мнимой части a_1 и b_1 имеет вид

$$\sin(\Psi) = -\frac{12}{f}. \tag{4.5}$$

Переменную Ψ, определяющую угол поворота для главного члена асимптотики, можно определить при $|f| \geq 12$.

Вещественные и мнимые части для a_1 и b_1 определяются как сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения

$$(\mathrm{Re}[a_1], \mathrm{Im}[a_1], \mathrm{Re}[b_1], \mathrm{Im}[b_1])$$

$$= \mu_1 Y + \Big(\frac{4\cos(\Psi) - \mu_0^2}{16\cos(\Psi)}, 0, \frac{\cos(\Psi)(-192 - 2f^2 + f\mu_0^2\cos(\Psi))}{8f},$$

$$\frac{1152f\cos(\Psi) + 8f^3\cos(\Psi) + 864\mu_0^2 - 9f^2\mu_0^2}{4f^3\cos(\Psi)}\Big)^T.$$

Дальнейшая рекуррентная процедура определения коэффициентов асимптотики аналогична описанной выше. На каждом шаге приходится решать неоднородную систему линейных алгебраических уравнений с вырожденной матрицей. Решение строится как сумма некоторого частного решения неоднородной системы и общего решения однородной системы, умноженного на некоторый произвольный параметр μ_k. Значение параметра μ_k определяется через шаг из условия ортогональности правой части системы к однородному решению союзной системы уравнений

$$Z \cdot (F_1, F_2, F_3, F_4) = 0. \tag{4.6}$$

Здесь Z — решение (4.4) союзной системы, вектор (F_1, F_2, F_3, F_4) — правая часть системы алгебраических уравнений, которым удовлетворяют мнимая и вещественная часть коэффициентов a_{k+2}, b_{k+2}, а $\cdot$ означает скалярное произведение.

Исследуем, как формируется правая часть системы (F_1, F_2, F_3, F_4). Ее компоненты содержат все возможные произведения коэффициентов младших членов асимптотики (4.1). При этом, поскольку система линейных уравнений написана для вектора

$$\Big(\mathrm{Re}[a_k], \mathrm{Im}[a_k], \mathrm{Re}[b_k], \mathrm{Im}[b_k]\Big),$$

с учетом структуры нелинейности правило формирования правой части следующее:

$$\begin{aligned}
F_1 &= -\mathrm{Re}[a_{k-1}] + \mathrm{Re}\Big[\sum a_m^* b_l\Big],\\
F_2 &= -\mathrm{Im}[a_{k-1}] + \mathrm{Im}\Big[\sum a_m^* b_l\Big],\\
F_3 &= -\mathrm{Re}[b_{k-1}] + \mathrm{Re}\Big[\sum a_m a_l\Big],\\
F_4 &= -\mathrm{Im}[b_{k-1}] + \mathrm{Im}\Big[\sum a_m a_l\Big].
\end{aligned}$$

Проверим, что за счет параметра μ_k удается добиться выполнения соотношения (4.6) на каждом шаге рекуррентных построений коэффициентов асимптотики. Для этого исследуем, как появляется уравнение для определения параметра. Это уравнение представляет собой следующее соотношение:

$$Z \cdot (Y_0 \odot X_k) - Z \cdot X_{k-1} = 0, \tag{4.7}$$

где Z — решение однородной союзной системы, Y_0 — решение однородной системы, а X_k частное решение неоднородной системы для k-й поправки. Операция $\odot$ действует на векторы Y, X следующим образом:

$$Y \odot X = \begin{pmatrix} y_3x_1 + y_4x_2 + y_1x_3 + y_2x_4 \\ -y_3x_2 + y_4x_1 - y_4x_3 + y_1x_4 \\ 2y_1x_1 - 2y_2x_2 \\ 2y_2x_1 + 2y_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь важно отметить, что выполнения соотношения (4.7) мы как раз и добиваемся за счет правильного определения параметра μ_k.

Решение X_k может быть разложено по базису Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, где

$$\begin{aligned}
Y_0 &= \big(\sin(\Psi), -\cos(\Psi), -\sin(2\Psi), \cos(2\Psi)\big),\\
Y_1 &= \big(\cos(\Psi), \sin(\Psi), 0, 0\big),\\
Y_2 &= \big(0, 0, \cos(2\Psi), \sin(2\Psi)\big),\\
Y_3 &= \big(0, 0, -\sin(2\Psi)\cos(2\Psi), \cos(2\Psi)\sin(2\Psi)\big).
\end{aligned}$$

И мы будем проверять (4.7) на векторах Y_i. Прямые вычисления показывают, что

$$Z \cdot (Y_0 \odot Y_i) = 0 \ \text{ при } \ i = 0, 1 \quad \text{ и } \quad Z \cdot (Y_0 \odot Y_i) \neq 0 \ \text{ при } \ i = 2, 3$$

и вектор Z не ортогонален векторам Y_1, Y_2, Y_3. Таким образом, мы получаем нетривиальное уравнение для определения параметра μ_k

$$\mu_k Z \cdot \big(Y_0 \odot [C_{k,2}Y_2 + C_{k,3}Y_3]\big) = Z \cdot \big(C_{k-1,1}Y_1 + C_{k-1,2}Y_2 + C_{k-1,3}Y_3\big).$$

Это позволяет на каждом шаге строить нетривиальные решения системы алгебраических уравнений и соответственно определять коэффициенты асимптотики.

З а м е ч а н и е. Построение алгебраического решения с главным членом $a_1 = -8$ проводится аналогично. Смена знака приводит только к изменениям в значениях для коэффициентов асимптотики. В частности, в правой части условия (4.5) знак меняется на противоположный.

Приведенные построения дают следующие алгебраические асимптотики для растущих решений:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= -8\big(\cos(\Psi) + i\sin(\Psi)\big)t + \frac{f}{4}t^{-1} + O(t^{-3}), \\ B_1(t) &= -4\big(\cos(2\Psi) + i\sin(2\Psi)\big)t + \big(-\frac{f}{4} - 2i\big)t^{-1} + \dots, \end{aligned}$$

где $\sin(\Psi) = \dfrac{12}{f}$;

$$\begin{aligned} A_3(t) &= 8\big(\cos(\Psi) + i\sin(\Psi)\big)t + \frac{f}{4}t^{-1} + O(t^{-3}), \\ B_3(t) &= -4\big(\cos(2\Psi) + i\sin(2\Psi)\big)t + \bigg(-\cos(\Psi)\Big[\frac{f}{4} + \frac{24}{f}\Big] + 2i[1 + \sin^2(\Psi)]\bigg)t^{-1} + O(t^{-3}), \end{aligned} \tag{4.8}$$

где $\sin(\Psi) = -\dfrac{12}{f}$.

Таким образом, растущие асимптотические решения построены.

Ограниченное решение будем строить в виде

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{-k}, \\ B(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{-k}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Подстановка представления (4.9) в уравнение дает последовательность рекуррентных задач (4.2) для определения коэффициентов a_k, b_k. Как и при анализе растущих решений, мы будем на каждом шаге выписывать систему линейных алгебраических уравнений для вещественной и мнимой частей a_k, b_k. Однако здесь матрица системы оказывается невырожденной и имеет вид $\mathrm{diag}(2, -2, 4, -4)$, поэтому задача определения коэффициентов асимптотики разрешима на каждом шаге.

Соотношения в главном, при t^0, дают следующую систему для вещественной и мнимой части главного члена

$$2ia_{1r} - 2a_{1i} = -if, \quad 4ib_{1r} - 4b_{1i=0}.$$

Эти уравнения позволяют определить главный член асимптотики

$$a_1 = -\frac{f}{2}, \quad b_1 = 0.$$

При t^{-1} мы получаем однородную систему алгебраических уравнений для вещественной и мнимой части a_2, b_2 с невырожденной матрицей, которая может быть удовлетворена только при $a_2 = b_2 = 0$.

Рассматривая коэффициент при t^{-2}, получаем нетривиальные соотношения

$$2ia_{3r} - 2a_{3i} = -\frac{f}{2}, \quad 4ib_{3r} - 4b_{3i} = -\frac{if^2}{16},$$

что дает ответы

$$a_3 = \frac{if}{4}, \quad b_3 = -\frac{f^2}{64}.$$

Продолжая рекуррентно решать задачи для коэффициентов асимптотики, получаем

$$\begin{aligned} A_2(t) &= -\frac{f}{2}t^{-1} + \frac{if}{4}t^{-3} + \Big(\frac{3f}{8} - \frac{f^3}{512}\Big)t^{-5} + O(t^{-7}), \\ B_2(t) &= -\frac{f^2}{64}t^{-3} + \frac{7if^2}{256}t^{-5} + O(t^{-7}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Таким образом, асимптотическое решение, стремящееся к нулю, построено.

5. Окрестности положений равновесия

5.1. Анализ устойчивости по линейному приближению

В этом пункте проведен анализ устойчивости по линейному приближению построенных алгебраических асимптотик.

Рассмотрим систему уравнений, линеаризованную на растущем алгебраическом асимптотическом решении $(A_1(t), B_1(t))$. В результате подстановки в систему уравнений (1.1) формулы для решения в виде

$$a(t) = A_1(t) + \alpha(t), \quad b(t) = B_1(t) + \beta(t)$$

и линеаризации, получается система линейных дифференциальных уравнений для функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ с переменными коэффициентами. Для дальнейшего анализа удобно переписать эту систему уравнений отдельно для вещественных и мнимых частей функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Собственные числа для такой системы будут иметь вид

$$\lambda_1 = -4i\sqrt{3}t + O(t^{-1}), \quad \lambda_2 = 4i\sqrt{3}t + O(t^{-1}), \quad \lambda_3 = -\frac{\sqrt[4]{(f^2-144)}}{\sqrt{6}}, \quad \lambda_4 = \frac{\sqrt[4]{(f^2-144)}}{\sqrt{6}}.$$

Так как λ_4 имеет положительную вещественную часть, следовательно, построенное алгебраическое асимптотическое решение неустойчиво по отношению к малым возмущениям.

Такая же линеаризация на алгебраическом решении $A_2(t), B_2(t)$ приводит к матрице для линеаризованной системы уравнений с собственными числами

$$\lambda_1 = -4it + O(t^{-1}), \quad \lambda_2 = 4it + O(t^{-1}), \quad \lambda_3 = -2it, \quad \lambda_4 = 2it.$$

Главные члены приведенных асимптотик чисто мнимые. Следовательно, для анализа устойчивости решения $A_2(t), B_2(t)$ требуется дополнительное исследование.

Линеаризация на решении $A_3(t), B_3(t)$ приводит к матрице для линеаризованной системы уравнений с собственными числами

$$\lambda_1 = -4it + O(t^{-1}), \quad \lambda_2 = 4it + O(t^{-1}), \quad \lambda_3 = -i\frac{\sqrt[4]{f^2-144}}{\sqrt{6}}, \quad \lambda_4 = i\frac{\sqrt[4]{f^2-144}}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно, для анализа устойчивости решения $A_3(t), B_3(t)$ также требуется дополнительное исследование.

5.2. Осциллирующее асимптотическое решение в окрестности нуля

В этом пункте мы приведем осциллирующее асимптотическое решение в окрестности убывающего алгебраического решения, стремящегося к нулю (4.10). Решение системы (1.1) будем искать в виде

$$A(t) = a(t)\exp\{-it^2\}, \quad B(t) = b(t)\exp\{-2it^2\}.$$

После подстановки мы получаем

$$\begin{aligned} ia'(t) &= \frac{1}{2}a^*b + f\exp\{it^2\}, \\ ib'(t) &= \frac{1}{4}a^2. \end{aligned}$$

Исследуем поведение решения этой системы в окрестности найденного убывающего асимптотического решения (A_2, B_2). Мы будем искать решение в виде

$$a = A_2\exp\{it^2\} + \alpha, \quad b = B_2\exp\{2it^2\} + \beta, \tag{5.1}$$

тогда для α, β получаем систему

$$\begin{aligned} i\alpha' &= \frac{1}{2}\alpha^*\beta + \frac{1}{2}\Big(A_2^*\beta\exp\{-it^2\} + \alpha^* B_2\exp\{2it^2\}\Big), \\ i\beta' &= \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{2}A_2\alpha\exp\{it^2\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Теорема 2. *Существует формальное асимптотическое решение системы* (5.2) *в виде*

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k t^{-k}, \quad \beta = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k t^{-k}, \tag{5.3}$$

зависящее от четырех вещественных параметров. Главные члены разложения определяются в терминах эллиптических функций.

Аналогичная теорема для системы трех связанных осцилляторов была доказана в работе [16].

Доказательство теоремы состоит в построении рядов (5.3) с помощью прямой теории возмущений. Подставляя анзац (5.3) в систему (5.2), учитывая (4.10) и собирая слагаемые при одинаковых степенях τ, получаем рекуррентную систему для коэффициентов. Для главных членов получается система

$$\begin{aligned} i\alpha_0'(t) &= \frac{1}{2}\alpha_0^*\beta_0, \\ i\beta_0'(t) &= \frac{1}{4}\alpha_0^2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Эта система может быть решена в терминах эллиптических функций. Отметим, что система имеет два закона сохранения

$$|\alpha_0|^2 + 2|\beta_0|^2 = E^2,$$

$$(\alpha_0^*)^2\beta_0 + (\alpha_0)^2\beta_0^* = H.$$

Функция $-\dfrac{iH}{4}$ является гамильтонианом системы (5.4). Первый закон сохранения позволяет представить главные члены асимптотики α_0, β_0 в виде

$$\alpha_0 = E\exp\{i\varphi\}\cos(\Psi), \quad \beta_0 = \frac{E}{\sqrt{2}}\exp\{i\psi\}\sin(\Psi).$$

После такой подстановки второй закон сохранения переписывается в виде

$$H = \sqrt{2}E^3\cos^2(\Psi)\sin(\Psi)\cos(\Phi), \text{ где } \Phi = 2\varphi - \psi. \tag{5.5}$$

Система (5.4) принимает вид

$$\begin{aligned}
\varphi' &= -\frac{E}{2\sqrt{2}}\cos(\Phi)\sin(\Psi),\\
\psi' &= -\frac{E}{2\sqrt{2}}\cos(\Phi)\cos^2(\Psi)\sin^{-1}(\Psi),\\
\Psi' &= \frac{E}{2\sqrt{2}}\sin(\Phi)\cos(\Psi),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Воспользуемся выражением (5.5) для того, чтобы исключить переменную Φ из третьего уравнения системы (5.6). После тривиальных преобразований система распадается, и мы получаем отдельное уравнение для Ψ

$$\Psi' = \frac{\sqrt{2E^6\cos^4(\Psi)\sin^2(\Psi) - H^2}}{4E^2\cos(\Psi)\sin(\Psi)}.$$

Его решение

$$\int\limits_{u_0}^{\cos(2\Psi)} \frac{du}{\sqrt{G - u^3 - u^2 + u}} = -\frac{Et}{2},$$

где $G = \dfrac{E^6 - 4H^4}{E^6}$. Таким образом, функция $\cos(2\Psi)$ — ограниченная периодическая по t функция. Функция Φ определяется из (5.5), после чего интегрируется первое уравнение системы (5.6)

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{H}{4E^2}\int^t \frac{dt}{1+\cos^2(2\Psi)}.$$

Подынтегральная функция представляет собой периодическую функцию по t с ненулевым средним. Следовательно, $\varphi = O(t),\ t \to \infty$. Функция ψ определяется из соотношения $\psi = 2\varphi - \Phi$. Таким образом, построено четырехпараметрическое семейство решений α_0, β_0, зависящих от параметров E, G, u_0, φ_0.

Первые поправки в (5.1) определяются из линеаризованной системы

$$\begin{aligned}
i\alpha_1' - \frac{1}{2}(\alpha_1^*\beta_0 + \alpha_0^*\beta_1) &= -\frac{f}{4}\beta_0\exp\{-it^2\},\\
i\beta_1' - \frac{1}{2}\alpha_0\alpha_1 &= -\frac{f}{4}\alpha_0\exp\{it^2\}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Фундаментальная матрица W однородной системы, соответствующей (5.7), составляется из производных решений нелинейной системы (5.4) по параметрам. При этом оказывается, что при $t \to \infty$

$$\partial_E\alpha_0 = O(t), \quad \partial_G\alpha_0 = O(t), \quad \partial_{u_0}\alpha_0 = O(1), \quad \partial_{\varphi_0}\alpha_0 = O(1).$$

Аналогичные формулы справедливы и для $\alpha_0^*, \beta_0, \beta_0^*$. Таким образом, фундаментальная матрица содержит два столбца порядка t. Ее определитель равен константе, поскольку след матрицы системы (5.7) равен нулю.

Решение неоднородной системы оказывается убывающим вследствие быстрых осцилляций в правых частях. Представим для удобства правую часть системы в виде суммы двух вектор-функций $g^+\exp\{it^2\} + g^-\exp\{-it^2\}$. Здесь

$$g^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{f\beta_0^*}{4} \\ -\frac{f\alpha_0}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g^- = \begin{pmatrix} -\frac{f\beta_0}{4} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{f\alpha_0^*}{4} \end{pmatrix}.$$

В формуле Коши для решения системы (5.7) проинтегрируем по частям два раза интегральные слагаемые:

$$W\int_t^\infty W^{-1}g^+\exp\{it^2\}dt$$

$$= \frac{g^+}{2it}\exp\{it^2\} + \frac{W}{4t}\Big(\frac{W^{-1}g^+}{t}\Big)'\exp\{it^2\} - W\int_t^\infty \Big[\Big(\frac{W^{-1}g^+}{2t}\Big)'\frac{1}{2t}\Big]'\exp\{it^2\}dt$$

$$= \frac{g^+}{it}\exp\{it^2\} + \frac{1}{t}\Big(\frac{g^+}{t}\Big)'\exp\{it^2\} + \frac{W}{t}\cdot\frac{(W^{-1})'g^+}{t}\exp\{it^2\} - W\int_t^\infty \Big[\Big(\frac{W^{-1}g^+}{2t}\Big)'\frac{1}{2t}\Big]'\exp\{it^2\}dt.$$

Ранг матрицы W в главном равен двум, следовательно, любой ее минор не будет содержать членов порядка t^2 и старшая степень по t будет равна единице. Принимая во внимание, что определитель фундаментальной матрицы равен константе, легко понять, что элементы обратной матрицы W^{-1} имеют порядок $O(t)$. Таким образом, слагаемое $\dfrac{W}{t}\cdot\dfrac{(W^{-1})'g^+}{t}$ представляет собой величину порядка единицы. Оставшийся интеграл можно взять по частям и получить для него оценку $O(t^{-1})$. Аналогичные выкладки можно проделать и для части решения с g^-. Таким образом, первая поправка α_1, β_1 ограничена.

Следующие поправки определяем из системы уравнений, аналогичной системе (5.7), правые части которых являются квадратичными выражениями от предыдущих поправок α_k, β_k и коэффициентов асимптотики (4.10) и представляют собой ограниченные функции с быстро осциллирующими множителями. Это позволяет построить поправки для любого порядка t. Теорема доказана.

5.3. Окрестность растущего алгебраического решения

Окрестность растущего алгебраического асимптотического решения $(A_3(t), B_3(t))$ (4.8) исследуем численно. Для этого будем решать задачу Коши с начальными условиями, заданными при большом значении переменной t и близкими к построенной алгебраической асимптотике. Обозначим через $A_3(t;2)$ и $B_3(t;2)$ первые два члена в асимптотическом разложении формального асимптотического решения, построенного выше. Построим численно решение системы уравнений (1.1) при $f = 12.1$ с начальными условиями

$$A|_{t=100} = A_3(100;2) + 0.1, \quad B|_{t=100} = B_3(100;2) + 0.1.$$

Результаты вычислений приведены ниже. Графики построены на комплексных плоскостях A и B. Параметр t на приведенных графиках меняется от 100 до 150.

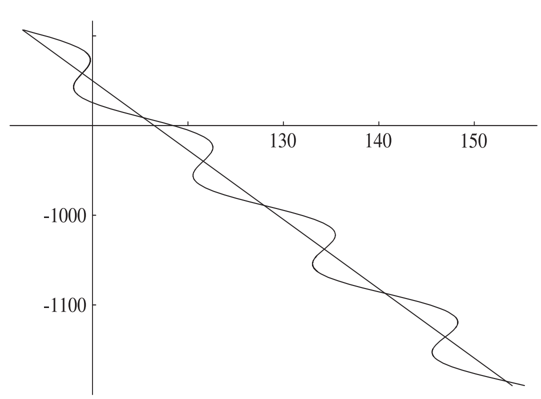


Рис. 3. Прямая линия — $A_3(t)$;
кривая — построенное численное решение $A(t)$.

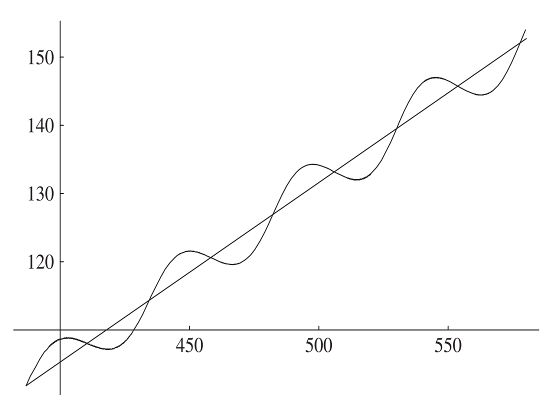


Рис. 4. Прямая линия — $B_3(t)$;
кривая — построенное численное решение $B(t)$.

Приведем график относительной величины разности для численного решения и алгебраической асимптотики и график модуля численного решения $|A(t)|$:

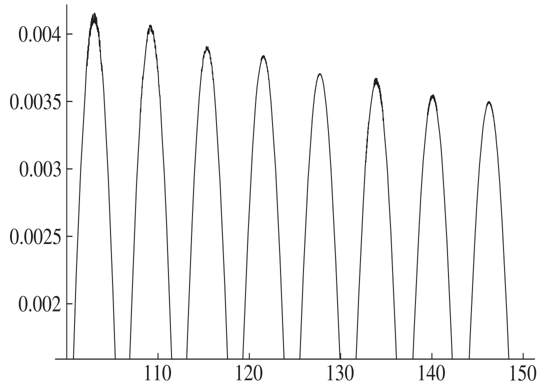


Рис. 5. Относительная разность $\left|\frac{A(t)-A_3(t)}{A(t)}\right|$.

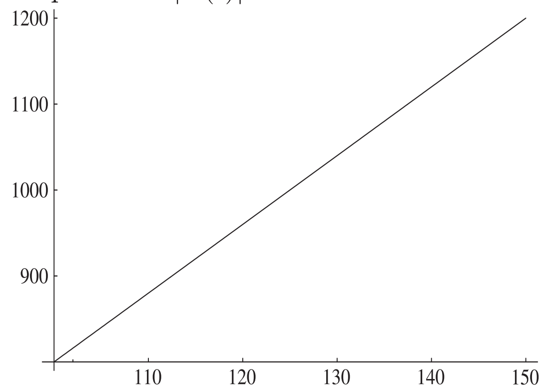


Рис. 6. Модуль численного решения $|A(t)|$.

График $|B(t)|$ для численного решения имеет похожий вид.

Полученное численное решение показывает, что в окрестности растущей асимптотики существуют осциллирующие решения.

Поступила 19.04.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **McMillan E.M.** The synchrotron–a proposed high energy particle accelerator // Phys. Rev. 1945. 68, 143.
2. **Векслер В.И.** Новый метод ускорения релятивистских частиц // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43, № 8. С. 346–348.
3. **Векслер В.И.** О новом методе ускорения релятивистских частиц // Докл. АН СССР. 1944. Т. 44, № 9. С. 393—396.
4. **Meerson B. , Friedland L.** Strong autoresonance excitation of Rydberg atoms: the Rydberg accelerator // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. P. 5233–5236.
5. **Meerson B. and Yariv S.** A rigid rotator under slowly-varying kicks: dynamic autoresonance and time-varying chaos // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. P. 3570–3582.
6. **Cohen G. , Meerson B.** Dynamic autoresonance and global chaos in a slowly evolving system of two coupled oscillators // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 47, no. 2. P. 967–975.
7. **Friedland L.** Autoresonant solutions of nonlinear Schrödinger equation // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 3865–3875.
8. **Friedland L.** Subharmonic autoresonance of the diocotron mode // Physics of plasmas. 2000. Vol. 7, no. 5. P. 1712–1718.
9. **Friedland L.** Subharmonic autoresonance // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61, no. 4. P. 3732—3735.
10. **Калякин Л.А.** Асимптотический анализ модели авторезонанса // Докл. РАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 594–597.
11. **Калякин Л.А.** Асимптотическое решение задачи о пороговом эффекте для уравнений главного резонанса // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С 731–739.
12. **Калякин Л.А.** Резонансный захват в нелинейной системе // Теор. и мат. физика. 2005. Т. 144, №. 1. С. 74–82.
13. **Козлов В.В., Фурта С.Д.** Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: МГУ, 1966. 244 с.
14. **Брюно А.Д.** Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.
15. **Кузнецов А.Н.** Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений // Функц. анализ и его приложения. 1972. Т. 6, вып. 2. С. 41–51.
16. **Калякин Л.А., Багдерина Ю.Ю.** Асимптотика ограниченных на бесконечности решений уравнений квадратичного главного резонанса // Мат. заметки. 2005. Т. 78, вып. 1. С. 85–97.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В РЕГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ[1]

А. Р. Данилин, Ю. В. Парышева

Исследуется задача оптимального управления для линейной системы с быстрыми и медленными переменными, выпуклым терминальным функционалом качества, зависящим от медленных переменных, и гладкими геометрическими ограничениями на управление. Представлены достаточные условия регулярности асимптотики решения такой задачи и построено полное асимптотическое разложение оптимального значения функционала качества по степеням малого параметра.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления [1,2] с быстрыми и медленными переменными [3–5]

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_1 x_\varepsilon + B_1 y_\varepsilon + C_1 u, \qquad t\in[0,T], \qquad \|u\|\le 1,\\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = -B_2 y_\varepsilon + C_2 u, \qquad x_\varepsilon(0)=x^0, \qquad y_\varepsilon(0)=y^0,\\ \sigma(x_\varepsilon(T)) \to \inf\limits_{\|u\|\le 1}\sigma(x_\varepsilon(T)) =: \omega_\varepsilon(T,x^0,y^0), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $u\in\mathbb{R}^r$; $A_1, B_i, C_i, i=1,2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности; $\mathrm{Re}\lambda(B_2)\ge\alpha>0$, а $\sigma(\cdot)$ — бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго выпуклая и кофинитная (т.е. [6] $\forall\, x\in\mathbb{R}^n \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-1}\sigma(\lambda x)=+\infty$) функция.

При этих условиях функция $\sigma^*(\cdot)$ — сопряженная к $\sigma(\cdot)$ в смысле выпуклого анализа — также будет бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}^n$, строго выпуклой и кофинитной [6]. В частности,

$$\text{матрица } D^2\sigma^*(r) \text{ вторых производных функции } \sigma^*(\cdot) \text{ положительно определена при всех } r. \tag{1.2}$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма, а $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в рассматриваемых конечномерных пространствах.

Отметим, что [5] $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\omega_\varepsilon(T,x^0,y^0)=\omega_0(T,x^0)$, где $\omega_0(T,x^0)$ — оптимальное значение функционала качества в предельной задаче

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + Cu, \qquad t\in[0,T], \qquad \|u\|\le 1,\\ x(0)=x^0, \qquad C := C_1 + B_1B_2^{-1}C_2,\\ \sigma(x(T)) \to \inf\limits_{\|u\|\le 1}\sigma(x(T)) =: \omega(T,x^0). \end{cases} \tag{1.3}$$

Исследуем полную асимптотику $\omega_\varepsilon(T,x^0,y^0)$ при $\varepsilon\to+0$ и фиксированных T,x^0,y^0.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (проекты 05-01-01008, 06-01-00148) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН.

2. Определяющие соотношения

Покажем, что рассматриваемая задача эквивалентна задаче нахождения асимптотики решения некоторой системы уравнений. Применим принцип максимума Понтрягина [1] к предельной и возмущенным задачам. В предельной задаче сопряженная система имеет вид

$$\dot{\Psi} = -A_1^*\Psi, \tag{2.1}$$

$$\Psi(T) = -\nabla\sigma(x_0^{\mathrm{opt}}(T)), \tag{2.2}$$

а оптимальное управление $u_0^{\mathrm{opt}}(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\langle C^*\Psi(t), u_0^{\mathrm{opt}}(t)\rangle = \max_{\|v\|\le 1}\langle C^*\Psi(t), v\rangle = \|C^*\Psi(t)\|. \tag{2.3}$$

Здесь и в дальнейшем, если A — линейный оператор (матрица), то A^* — сопряженный к A оператор (транспонированная матрица).

Из (2.1) находим, что $\Psi(t) = e^{-A_1^*t}l_0$, где l_0 — вектор из $\mathbb{R}^n$, подлежащий определению, а из (2.3) заключаем, что при t таком, что

$$C^*e^{-A_1^*t}l_0 \ne 0, \tag{2.4}$$

$u_0^{\mathrm{opt}}(t) = \dfrac{C^*e^{-A_1^*t}l_0}{\|C^*e^{-A_1^*t}l_0\|}$. Тогда $x_0^{\mathrm{opt}}(T) = e^{A_1T}x^0 + \displaystyle\int_0^T \frac{e^{A_1(T-\tau)}CC^*e^{-A_1^*\tau}l_0}{\|C^*e^{-A_1^*\tau}l_0\|}d\tau$ и поэтому условие (2.2) дает следующее соотношение для l_0:

$$\nabla\sigma\Bigg(\bar{x} - \int_0^T \frac{e^{A_1\tau}CC^*e^{A_1^*\tau}r_0}{\|C^*e^{A_1^*\tau}r_0\|}d\tau\Bigg) = r_0, \tag{2.5}$$

где $\bar{x} := e^{A_1T}x^0$, $r_0 := -\,e^{-A_1^*T}l_0$. Но (2.5) эквивалентно тому, что [7, следствие I.5.2]

$$\bar{x} - \int_0^T \frac{e^{A_1\tau}CC^*e^{A_1^*\tau}r_0}{\|C^*e^{A_1^*\tau}r_0\|}d\tau = \nabla\sigma^*(r_0),$$

т.е.

$$\bar{x} - \int_0^T \frac{C_0(\tau)r_0}{\langle C_0(\tau)r_0, r_0\rangle^{1/2}}d\tau = \nabla\sigma^*(r_0), \tag{2.6}$$

где $C_0(\tau) := F_0(\tau)F_0^*(\tau)$, $\quad F_0(\tau) := e^{A_1\tau}C = e^{A_1\tau}(C_1 + B_1B_2^{-1}C_2)$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\forall\,\tau\in[0;T] \quad \varphi(\tau) := \langle C_0(\tau)r_0, r_0\rangle \ne 0. \tag{2.7}$$

Это, в частности, справедливо, если $\operatorname{Ker} C^* = \{0\}$.

Отметим также, что если выполнено (2.7), то и (2.4) выполнено при всех $\tau\in[0;T]$.

В возмущенной задаче сопряженная система имеет вид

$$\dot{\Psi}_\varepsilon^1 = -A_1^*\Psi_\varepsilon^1, \tag{2.8}$$

$$\dot{\Psi}_\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon}B_2^*\Psi_\varepsilon^2 - B_1^*\Psi_\varepsilon^1, \tag{2.9}$$

$$\Psi_\varepsilon^1(T) = -\nabla_x\sigma(x_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(T)) = -\nabla\sigma(x_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(T)), \tag{2.10}$$

$$\Psi_\varepsilon^2(T) = -\nabla_y\sigma(x_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(T)) = 0, \tag{2.11}$$

а оптимальное управление $u_\varepsilon^{\rm opt}(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\Big\langle C_1^*\Psi_\varepsilon^1(t)+\frac{1}{\varepsilon}C_2^*\Psi_\varepsilon^2(t),u_\varepsilon^{\rm opt}(t)\Big\rangle=\max_{\|v\|\le 1}\Big\langle C_1^*\Psi_\varepsilon^1(t)+\frac{1}{\varepsilon}C_2^*\Psi_\varepsilon^2(t),v\Big\rangle$$

$$=\Big\|C_1^*\Psi_\varepsilon^1(t)+\frac{1}{\varepsilon}C_2^*\Psi_\varepsilon^2(t)\Big\|. \qquad (2.12)$$

Из (2.8), (2.9) находим, что $\Psi_\varepsilon^1(t)=e^{-A^*t}l_\varepsilon$, $\Psi_\varepsilon^2(t)=e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2^*t}\tilde l_\varepsilon-e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2^*t}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2^*\tau}B_1^*e^{-A^*\tau}l_\varepsilon d\tau$, а из (2.11) следует, что $\tilde l_\varepsilon=\int\limits_0^T e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2^*\tau}B_1^*e^{-A^*\tau}l_\varepsilon d\tau$, и поэтому $\Psi_\varepsilon^2(t)=e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2^*t}\int\limits_t^T e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2^*\tau}B_1^*e^{-A^*\tau}l_\varepsilon d\tau$.

Из (2.12) следует, что при t таком, что

$$\Big(C_1^*e^{-A_1^*t}+\frac{1}{\varepsilon}\,C_2^*e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2^*t}\int\limits_t^T e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2^*\tau}B_1^*e^{-A_1^*\tau}d\tau\Big)l_\varepsilon\ne 0, \qquad (2.13)$$

$$u_\varepsilon^{\rm opt}(t)=\frac{\big(C_1^*e^{-A_1^*t}+\frac{1}{\varepsilon}\,C_2^*e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2^*t}\int\limits_t^T e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2^*\tau}B_1^*e^{-A_1^*\tau}d\tau\big)l_\varepsilon}{\Big\|\big(C_1^*e^{-A_1^*t}+\frac{1}{\varepsilon}\,C_2^*e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2^*t}\int\limits_t^T e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2^*\tau}B_1^*e^{-A_1^*\tau}d\tau\big)l_\varepsilon\Big\|}.$$

Заметим, что

$$u_\varepsilon^{\rm opt}(T-t)=\frac{\big(C_1^*e^{A_1^*t}+\frac{1}{\varepsilon}\,C_2^*e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2^*t}\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2^*\tau}B_1^*e^{A_1^*\tau}d\tau\big)e^{-A_1^*T}l_\varepsilon}{\Big\|\big(C_1^*e^{A_1^*t}+\frac{1}{\varepsilon}\,C_2^*e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2^*t}\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2^*\tau}B_1^*e^{A_1^*\tau}d\tau\big)e^{-A_1^*T}l_\varepsilon\Big\|}. \qquad (2.14)$$

Теперь

$$y_\varepsilon^{\rm opt}(\tau)=e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2\tau}y^0+e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2\tau}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2s}C_2u_\varepsilon^{\rm opt}(s)ds,$$

$$x_\varepsilon^{\rm opt}(T)=e^{A_1T}x^0+e^{A_1T}\int\limits_0^T e^{-A_1\tau}\big(B_1y_\varepsilon^{\rm opt}(\tau)+C_1u_\varepsilon^{\rm opt}(\tau)\big)d\tau$$

$$=\bar x+\bar y_\varepsilon+e^{A_1T}\int\limits_0^T e^{-A_1\tau}B_1e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2\tau}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2s}C_2u_\varepsilon^{\rm opt}(s)dsd\tau+e^{A_1T}\int\limits_0^T e^{-A_1\tau}C_1u_\varepsilon^{\rm opt}(\tau)d\tau,$$

где

$$\bar y_\varepsilon:=\Big(e^{A_1T}\int\limits_0^T e^{-A_1\tau}B_1e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2\tau}d\tau\Big)y^0.$$

Поменяв порядок интегрирования, получим

$$x_\varepsilon^{\rm opt}(T)=\bar x+\bar y_\varepsilon+e^{A_1T}\int\limits_0^T\Big\{e^{-A_1\tau}C_1+\frac{1}{\varepsilon}\Big(\int\limits_\tau^T e^{-A_1s}B_1e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2s}ds\Big)e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2\tau}C_2\Big\}u_\varepsilon^{\rm opt}(\tau)d\tau.$$

Или

$$x_\varepsilon^{\rm opt}(T) = \bar{x} + \bar{y}_\varepsilon + \int\limits_0^T \Big\{ e^{A_1\tau}C_1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int\limits_{T-\tau}^T e^{A_1(T-s)}B_1 e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2(T-s)}ds \Big) e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2\tau}C_2 \Big\} u_\varepsilon^{\rm opt}(T-\tau)d\tau$$

$$= \bar{x} + \bar{y}_\varepsilon + \int\limits_0^T \Big\{ e^{A_1\tau}C_1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int\limits_0^\tau e^{A_1 s}B_1 e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2 s}ds \Big) e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2\tau}C_2 \Big\} u_\varepsilon^{\rm opt}(T-\tau)d\tau.$$

Подставляя $u_\varepsilon^{\rm opt}(T-\tau)$ из (2.14), получаем, что

$$x_\varepsilon^{\rm opt}(T) = \bar{x} + \bar{y}_\varepsilon + \int\limits_0^T \Big\{ e^{A_1\tau}C_1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int\limits_0^\tau e^{A_1 s}B_1 e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2 s}ds \Big) e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2\tau}C_2 \Big\}$$

$$\times \left\{ \frac{(C_1^* e^{A_1^*\tau} + \frac{1}{\varepsilon}C_2^* e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2^*\tau}\int_0^\tau e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2^* s}B_1^* e^{A_1^* s}ds)e^{-A_1^*T}l_\varepsilon}{\Big\|(C_1^* e^{A_1^*\tau} + \frac{1}{\varepsilon}C_2^* e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2^*\tau}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2^* s}B_1^* e^{A_1^* s}ds)e^{-A_1^*T}l_\varepsilon\Big\|} \right\} d\tau$$

$$= \bar{x} + \bar{y}_\varepsilon - \int\limits_0^T \frac{F_\varepsilon(\tau)F_\varepsilon^*(\tau)r_\varepsilon}{\langle F_\varepsilon(\tau)F_\varepsilon^*(\tau)r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle^{1/2}}\,d\tau = \bar{x} + \bar{y}_\varepsilon - \int\limits_0^T \frac{G_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon}{\langle G_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle^{1/2}}\,d\tau,$$

где

$$G_\varepsilon(\tau) \;:=\; F_\varepsilon(\tau)F_\varepsilon^*(\tau), \quad F_\varepsilon(\tau) \;:=\; e^{A_1\tau}C_1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int\limits_0^\tau e^{A_1 s}B_1 e^{\frac{1}{\varepsilon}B_2 s}ds \Big) e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2\tau}C_2$$

$$= e^{A_1\tau}\Big(C_1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int\limits_0^\tau e^{-A_1 s}B_1 e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2 s}ds \Big) C_2 \Big), \quad r_\varepsilon \;:=\; -e^{-A_1^*T}l_\varepsilon.$$

Условие (2.10) дает следующее соотношение на r_ε: $\nabla\sigma\Big(\bar{x} + \bar{y}_\varepsilon - \int\limits_0^T \frac{G_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon}{\langle G_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle^{1/2}}d\tau \Big) = r_\varepsilon$, что эквивалентно соотношению

$$\bar{x} + \bar{y}_\varepsilon - \int\limits_0^T \frac{G_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon}{\langle G_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle^{1/2}}d\tau = \nabla\sigma^*(r_\varepsilon). \tag{2.15}$$

Отметим, что [8, гл. 5, п. 5, следствие к теореме 5] в рассмотренных случаях принцип максимума является достаточным для оптимальности управления, т.е. $u_0^{\rm opt}(t)$, $u_\varepsilon^{\rm opt}(t)$, определяемые соотношениями (2.3), (2.12), в которых l_0 и l_ε находятся через r_0 и r_ε — решения уравнений (2.6), (2.15), являются оптимальными управлениями соответственно в предельной и возмущенной задачах. При этом оптимальное значение функционала качества имеет вид

$$\omega_0(T, x^0) = \sigma(x_0^{\rm opt}(T)) = \sigma(\nabla\sigma^*(r_0)) = \sigma^{**}(\nabla\sigma^*(r_0))$$

$$= \sup_{s\in\mathbb{R}^n}\big(\langle\nabla\sigma^*(r_0), s\rangle - \sigma^*(s) \big) = \langle\nabla\sigma^*(r_0), s_0\rangle - \sigma^*(s_0), \tag{2.16}$$

где s_0 таково, что

$$\nabla\sigma^*(r_0) = \nabla\sigma^*(s_0),$$

и в частности, например, $s_0 = r_0$, и поэтому

$$\omega_0(T, x^0) = \langle\nabla\sigma^*(r_0), r_0\rangle - \sigma^*(r_0). \tag{2.17}$$

Отметим, что второе равенство в (2.16) справедливо в силу (2.6), а в третьем равенстве существенно использована выпуклость $\sigma(x)$.

Аналогично показывается, что

$$\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0) = \langle \nabla\sigma^*(r_\varepsilon), r_\varepsilon \rangle - \sigma^*(r_\varepsilon). \tag{2.18}$$

Таким образом, для нахождения асимптотики $\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0)$ достаточно исследовать асимптотику вектора r_ε, который является решением уравнения (2.15).

3. Построение асимптотического разложения $\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0)$

Будем искать r_ε в виде асимптотического ряда по степеням ε : $r_\varepsilon \sim r_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k r_k$. Тогда

$$\nabla\sigma^*(r_\varepsilon) \sim \nabla\sigma^*(r_0) + \varepsilon D^2\sigma^*(r_0)r_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \Big(D^2\sigma^*(r_0)r_k + \overset{1}{F}_k\,(R_{k-1}) \Big),$$

где $R_k := (r_0, \ldots, r_k)$, а через $\overset{i}{F}_k$ здесь и далее будем обозначать некоторые известные к текущему моменту функции. Поэтому уравнение (2.15) с учетом равенства (2.6) принимает вид

$$0 \sim \varepsilon D^2\sigma^*(r_0)r_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \Big(D^2\sigma^*(r_0)r_k + \overset{1}{F}_k\,(R_{k-1}) \Big) - y_\varepsilon$$

$$+ \int\limits_0^T \frac{C_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon}{\langle C_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle^{1/2}}\,d\tau - \int\limits_0^T \frac{C_0(\tau)r_0}{\langle C_0(\tau)r_0, r_0\rangle^{1/2}}\,d\tau. \tag{3.1}$$

Обозначим первый интеграл в (3.1) через $J(\varepsilon)$, а второй — через J_0.

Найдем асимптотическое разложение для $J(\varepsilon)$, в котором отдельно выделим слагаемые, зависящие от r_k и от R_{k-1}, а также найдем асимптотику y_ε. Поскольку, как будет видно ниже, функция $C_\varepsilon(\tau)$ на $[0, T]$ имеет два естественных равномерных асимптотических разложения — внешнее (вне малой окрестности точки $\tau = 0$) и внутреннее (в малой окрестности точки $\tau = 0$), то для нахождения асимптотики $J(\varepsilon)$ воспользуемся методом дополнительного параметра из [9].

Пусть в дальнейшем μ — малый вспомогательный параметр, $\mu = \varepsilon^p$ $(0 < p < 1)$.

Предварительно рассмотрим асимптотику интеграла $\int\limits_0^\tau e^{-A_1 s} B_1 e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2 s} ds$ при $\tau \in [0, T]$:

$$\int\limits_0^\tau e^{-A_1 s} B_1 e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2 s} ds = \varepsilon \int\limits_0^{\tau/\varepsilon} e^{-A_1 \varepsilon r} B_1 e^{-B_2 r} dr = \varepsilon \int\limits_0^{\tau/\varepsilon} \Big(E + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (-A_1)^k \frac{r^k}{k!} \Big) B_1 e^{-B_2 r} dr$$

$$= \varepsilon \Bigg(B_1 \int\limits_0^{\tau/\varepsilon} e^{-B_2 r} dr + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (-A_1)^k B_1 \int\limits_0^{\tau/\varepsilon} \frac{r^k}{k!} e^{-B_2 r} dr \Bigg) = \varepsilon \Big(B_1 I_0^\varepsilon(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (-A_1)^k B_1 I_k^\varepsilon(t) \Big),$$

где

$$I_0^\varepsilon(\tau) := \int\limits_0^{\tau/\varepsilon} e^{-B_2 r} dr = B_2^{-1}(E - e^{-B_2 \frac{\tau}{\varepsilon}}),$$

а для $k \geq 1$, дифференцируя k раз по частям, получаем, что

$$I_k^\varepsilon(\tau) := \int\limits_0^{\tau/\varepsilon} \frac{r^k}{k!}\, e^{-B_2 r} dr = -\Big(\sum_{n=1}^{k} B_2^{n-k-1}\frac{1}{n!}\frac{\tau^n}{\varepsilon^n}e^{-B_2\frac{\tau}{\varepsilon}} + B_2^{-k}I_0^\varepsilon(\tau)\Big)$$

$$= -\Big(\sum_{n=1}^{k} B_2^{n-k-1}\frac{1}{n!}\frac{\tau^n}{\varepsilon^n}e^{-B_2\frac{\tau}{\varepsilon}} + B_2^{-k-1}(E - e^{-B_2\frac{\tau}{\varepsilon}})\Big).$$

Таким образом

$$\int\limits_0^{\tau} e^{-A_1 s}B_1 e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2 s}ds = \varepsilon\Bigg(B_1B_2^{-1}(E - e^{-B_2\frac{\tau}{\varepsilon}})$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(-A_1)^kB_1\Big(\sum_{n=1}^{k} B_2^{n-k-1}\frac{1}{n!}\frac{\tau^n}{\varepsilon^n}e^{-B_2\frac{\tau}{\varepsilon}} + B_2^{-k-1}(E - e^{-B_2\frac{\tau}{\varepsilon}})\Big)\Bigg). \tag{3.2}$$

Видно, что равномерно по $\tau \geq \mu$

$$\int\limits_0^{\tau} e^{-A_1 s}B_1 e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2 s}ds = \varepsilon\Big(B_1B_2^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(-A_1)^kB_1B_2^{-k-1}\Big) + O(\varepsilon^{+\infty}), \tag{3.3}$$

где через $O(\varepsilon^{+\infty})$ обозначается любая функция порядка $O(\varepsilon^\alpha)$ при всех $\alpha > 0$.

Соответственно, при $\tau \geq \mu$ для $F_\varepsilon(\tau) := e^{A_1\tau}\Big(C_1 + \dfrac{1}{\varepsilon}\Big(\displaystyle\int\limits_0^{\tau} e^{-A_1 s}B_1 e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2 s}ds\Big)C_2\Big)$ имеем

$$F_\varepsilon(\tau) \sim e^{A_1\tau}\Bigg(C_1 + \Big(B_1B_2^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(-A_1)^kB_1B_2^{-k-1}\Big)C_2\Bigg) = F_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kF_k(\tau),$$

где $F_0(\tau) := e^{A_1\tau}(C_1 + B_1B_2^{-1}C_2)$, $F_k(\tau) := (-1)^{k+1}e^{A_1\tau}A_1^kB_1B_2^{-k-1}C_2$, $k \geq 1$.

Тогда, очевидно,

$$F_\varepsilon^*(t) \sim F_0^*(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kF_k^*(\tau);$$

$$C_\varepsilon(\tau) := F_\varepsilon(\tau)F_\varepsilon^*(\tau) \sim \Big(F_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kF_k(\tau)\Big)\Big(F_0^*(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kF_k^*(\tau)\Big) = G_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kG_k(\tau),$$

где $G_k(\tau) := \sum\limits_{n=0}^{k} F_n(\tau)F_{k-n}^*(\tau)$ — самосопряженные и аналитические по τ функции, а $G_0(\tau) = F_0(\tau)F_0^*(\tau) = C_0(\tau)$. Далее имеем

$$\langle C_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle \sim \langle C_0(\tau)r_0, r_0\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Big(2\langle C_0(\tau)r_0, r_k\rangle + \overset{2}{F}_k(\tau, R_{k-1})\Big);$$

$$\langle C_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle^{-1/2} \sim \varphi^{-1/2}(\tau)\Bigg(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Big(\varphi^{-1}(\tau)\langle C_0(\tau)r_0, r_k\rangle + \overset{3}{F}_k(\tau, R_{k-1})\Big)\Bigg).$$

Таким образом, равномерно по $\tau \geq \mu$ подынтегральное выражение в $J(\varepsilon)$ разлагается в асимптотический ряд

$$\langle C_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle^{-1/2}C_\varepsilon(\tau)r_\varepsilon$$

$$\sim \varphi^{-1/2}(\tau)\Big(C_0(\tau)r_0+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Big(C_0(\tau)r_k-\varphi^{-1}(\tau)\langle C_0(\tau)r_0,r_k\rangle C_0(\tau)r_0+\overset{4}{F}_k(\tau,R_{k-1})\Big)\Big). \tag{3.4}$$

В малой окрестности нуля при $0\le\tau\le\mu$ перейдем к новой "внутренней" переменной $\eta:=\dfrac{\tau}{\varepsilon}$. Тогда из (3.2) для $F_\varepsilon(\varepsilon\eta):=e^{A_1\varepsilon\eta}\Big(C_1+\dfrac{1}{\varepsilon}\Big(\int\limits_0^{\varepsilon\eta}e^{-A_1s}B_1e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2s}ds\Big)C_2\Big)$ получаем

$$F_\varepsilon(\varepsilon\eta)\sim\Big(E+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\frac{A_1^k\eta^k}{k!}\Big)\Big(C_1+B_1B_2^{-1}(E-e^{-B_2\eta})C_2$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(-A_1)^kB_1\Big(\sum_{n=1}^{k}B_2^{n-k-1}\frac{1}{n!}\eta^ne^{-B_2\eta}+B_2^{-k-1}(E-e^{-B_2\eta})\Big)C_2\Big)$$

$$=\Big(E+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\frac{A_1^k\eta^k}{k!}\Big)\Big(S_0(\eta)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\tilde S_k(\eta)\Big)=S_0(\eta)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kS_k(\eta),$$

где

$$S_0(\eta):=C_1+B_1B_2^{-1}(E-e^{-B_2\eta})C_2=C-B_1B_2^{-1}e^{-B_2\eta}C_2, \tag{3.5}$$

$$\tilde S_k(\eta):=-(-A_1)^kB_1\Big(\sum_{n=1}^{k}B_2^{n-k-1}\frac{1}{n!}\eta^ne^{-B_2\eta}+B_2^{-k-1}(E-e^{-B_2\eta})\Big)C_2,\ \ k\ge1,$$

$$S_k(\eta):=\sum_{n=0}^{k}\frac{A_1^n\eta^n}{n!}\tilde S_{k-n}(\eta),\ \ k\ge1.$$

Отметим, что функции $S_k(\eta),\ k\ge1$, имеют вид

$$S_k(\eta)=\mathcal{P}_k(\eta)e^{-B_2\eta}+P_k(\eta)(E-e^{-B_2\eta})C_2. \tag{3.6}$$

Здесь и далее через $P_k(z),\ Q_k(z),\ T_k(z)$ будем обозначать многочлены степени $k\ge0$ от переменной $z\in\mathbb{R}$ с векторными либо матричными коэффициентами, причем запись $\mathcal{P}_k$ означает, что многочлен не содержит свободного члена.

Далее, очевидно,

$$F_\varepsilon^*(\varepsilon\eta)\sim S_0^*(\eta)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kS_k^*(\eta);\qquad C_\varepsilon(\varepsilon\eta)\sim S_0(\eta)S_0^*(\eta)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kV_k(\eta),$$

где

$$V_k(\eta):=\sum_{n=0}^{k}S_n(\eta)S_{k-n}^*(\eta),\ \ k\ge1. \tag{3.7}$$

Поэтому

$$\langle C_\varepsilon(\varepsilon\eta)r_\varepsilon,r_\varepsilon\rangle\sim\langle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0,r_0\rangle+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Big(2\langle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0,r_k\rangle+\overset{5}{F}_k(\eta,R_{k-1})\Big).$$

Будем далее считать, что

$$\forall\,\eta>0\ \langle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0,r_0\rangle=||S_0^*(\eta)r_0||^2\ne0, \tag{3.8}$$

т.е. $0\ne S_0^*(\eta)r_0=C^*r_0-C_2^*e^{-B_2^*\eta}(B_2^{-1})^*B_1^*r_0=C_1^*r_0+C_2^*(E-e^{-B_2^*\eta})(B_2^{-1})^*B_1^*r_0$ для $\eta>0$.

Отметим, что в силу (2.7) соотношение $0\ne S_0^*(\eta)r_0$ заведомо выполняется при больших η.

Простым достаточным условием выполнения (3.8) является следующее: $B_1^* r_0 = 0$ или $C_1 = 0 \wedge \operatorname{Ker} C_2^* = \{0\}$.

Отметим также, что условия (3.8) и (2.7) независимы, а вместе влекут за собой выполнимость (2.13) при всех $t \in [0, T]$.

Далее,

$$\langle C_\varepsilon(\eta) r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle^{-1/2} \sim \langle S_0(\eta) S_0^*(\eta) r_0, r_0\rangle^{-1/2} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\frac{\langle S_0(\eta) S_0^*(\eta) r_0, r_k\rangle}{\langle S_0(\eta) S_0^*(\eta) r_0, r_0\rangle} + \overset{6}{F}_k(\eta, R_{k-1})\right)\right);$$

$$C_\varepsilon(\varepsilon\eta) r_\varepsilon \sim S_0(\eta) S_0^*(\eta) r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Big(S_0(\eta) S_0^*(\eta) r_k + \overset{7}{F}_k(\eta, R_{k-1})\Big)$$

$$= S_0(\eta) S_0^*(\eta) \left(E\, r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Big(E\, r_k + \overset{8}{F}_k(\eta, R_{k-1})\Big)\right),$$

и, следовательно,

$$\langle C_\varepsilon(\varepsilon\eta) r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle^{-1/2} C_\varepsilon(\varepsilon\eta) r_\varepsilon \sim \frac{S_0(\eta) S_0^*(\eta)}{\langle S_0(\eta) S_0^*(\eta) r_0, r_0\rangle^{1/2}}$$

$$\times \left(E\, r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(E\, r_k - \frac{\langle S_0(\eta) S_0^*(\eta) r_0, r_k\rangle}{\langle S_0(\eta) S_0^*(\eta) r_0, r_0\rangle} E\, r_0 + \overset{9}{F}_k(\eta, R_{k-1})\right)\right). \tag{3.9}$$

Теперь представим $J(\varepsilon)$ в виде

$$J(\varepsilon) = \int_0^\mu \frac{C_\varepsilon(\tau) r_\varepsilon}{\langle C_\varepsilon(\tau) r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle^{1/2}}\, d\tau + \int_\mu^T \frac{C_\varepsilon(\tau) r_\varepsilon}{\langle C_\varepsilon(\tau) r_\varepsilon, r_\varepsilon\rangle^{1/2}}\, d\tau =: J_1(\varepsilon, \mu) + J_2(\varepsilon, \mu)$$

и, воспользовавшись разложениями (3.4), (3.9), найдем асимптотику $J_1(\varepsilon, \mu)$, $J_2(\varepsilon, \mu)$ с точностью до слагаемых вида $\alpha \mu^a \ln^b \mu\, \varepsilon^c \ln^d \varepsilon$ (где $a^2 + b^2 \neq 0$), конечное число которых в силу леммы 4.4 из [9] при получении итоговой асимптотики для $J(\varepsilon)$ можно не учитывать. Будем обозначать конечное число слагаемых указанного вида через $\mathcal{F}_k(\varepsilon, \mu)$.

Рассмотрим сначала $J_2(\varepsilon, \mu)$. В силу (3.4)

$$J_2(\varepsilon, \mu) \sim \int_\mu^T \varphi^{-1/2}(\tau) \left(C_0(\tau) r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Big(C_0(\tau) r_k - \varphi^{-1}(\tau) \langle C_0(\tau) r_0, r_k\rangle C_0(\tau) r_0 + \overset{4}{F}_k(\tau, R_{k-1})\Big)\right) d\tau.$$

Учитывая, что $\varphi(\tau) \geq \gamma > 0$ при $\tau \in [0, T]$, представим этот интеграл в виде

$$\int_\mu^T = \int_0^T - \int_0^\mu \sim J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \int_0^T \left(\frac{C_0(\tau) r_k}{\varphi^{1/2}(\tau)} - \frac{\langle C_0(\tau) r_0, r_k\rangle C_0(\tau) r_0}{\varphi^{3/2}(\tau)} + \overset{10}{F}_k(\tau, R_{k-1})\right) d\tau$$

$$- \int_0^\mu \frac{C_0(\tau) r_0}{\varphi^{1/2}(\tau)}\, d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \int_0^\mu \left(\frac{C_0(\tau) r_k}{\varphi^{1/2}(\tau)} - \frac{\langle C_0(\tau) r_0, r_k\rangle C_0(\tau) r_0}{\varphi^{3/2}(\tau)} + \overset{10}{F}_k(\tau, R_{k-1})\right) d\tau.$$

Все подынтегральные функции аналитичны в точке $\tau = 0$, поэтому все интегралы по промежутку $[0,\, \mu]$ разлагаются в асимптотические ряды по степеням μ, начинающиеся с μ^1. Таким образом,

$$J_2(\varepsilon, \mu) \sim J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\int_0^T \left(\frac{C_0(\tau) r_k}{\varphi^{1/2}(\tau)} - \frac{\langle C_0(\tau) r_0, r_k\rangle C_0(\tau) r_0}{\varphi^{3/2}(\tau)}\right) + \overset{10}{F}_k(R_{k-1})\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \overset{1}{\mathcal{F}}_k(\varepsilon, \mu). \tag{3.10}$$

Рассмотрим теперь асимптотику $J_1(\varepsilon,\mu)$. Сделаем в этом интеграле замену $\eta=\tau/\varepsilon$:

$$J_1(\varepsilon,\mu)=\varepsilon\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{C_\varepsilon(\varepsilon\eta)r_\varepsilon}{\langle C_\varepsilon(\varepsilon\eta)r_\varepsilon,r_\varepsilon\rangle^{1/2}}.$$

В силу (3.9)

$$J_1(\varepsilon,\mu)\sim\varepsilon\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0}{\langle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0,r_0\rangle^{1/2}}\,d\eta+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k+1}\Bigg(\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_k}{\langle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0,r_0\rangle^{1/2}}\,d\eta$$

$$-\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{\langle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0,r_k\rangle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0}{\langle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0,r_0\rangle^{3/2}}\,d\eta+\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\overset{11}{F}_k(\eta,R_{k-1})d\eta\Bigg).\tag{3.11}$$

Для подынтегральных выражений в (3.11) справедливы представления

$$\frac{S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0}{\langle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0,r_0\rangle^{1/2}}=\overset{1}{P}_0(\eta)+\overset{1}{\delta}_0(\eta),\qquad \frac{S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_k}{\langle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0,r_0\rangle^{1/2}}=\overset{2}{P}_0(\eta)+\overset{2}{\delta}_0(\eta),$$

$$\frac{\langle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0,r_k\rangle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0}{\langle S_0(\eta)S_0^*(\eta)r_0,r_0\rangle^{3/2}}=\overset{3}{P}_0(\eta)+\overset{3}{\delta}_0(\eta),\qquad \overset{11}{F}_k(\eta,R_{k-1})=\overset{4}{P}_k(\eta)+\overset{4}{\delta}_k(\eta),$$

где $\overset{i}{P}_k(\eta)$ — многочлены степени k по переменной η с векторными коэффициентами, а

$$\|\overset{i}{\delta}_0(\eta)\|\le\overset{i}{c}_0\,e^{-\alpha\eta},\quad \|\overset{4}{\delta}_k(\eta)\|\le\overset{4}{c}_k\,e^{-\frac12\alpha\eta}\ \ (k\ge1),\ \ \overset{i}{c}_k>0\ \ (k\ge0),\quad i=1,2,3.$$

Если

$$C_1^*r_0\ne0\tag{3.12}$$

или

$$C_1=0,\tag{3.13}$$

то все четыре подынтегральные функции не имеют особенностей в нуле. Последнее очевидно в случае (3.12) и требует обоснования только в случае (3.13).

Заметим, что

$$S_0(\eta)=B_1B_2^{-1}(E-e^{-B_2\eta})C_2\sim\eta B_1C_2,\ \ \eta\to0,\tag{3.14}$$

откуда сразу следует ограниченность в нуле функций в первых трех интегралах в (3.11).

Покажем ограниченность $\overset{11}{F}_k(\eta,R_{k-1})$. Из (3.6) следует, что для $k\ge1$

$$S_k(\eta)\sim\eta\,Q_k(\eta),\ \ \eta\to0.\tag{3.15}$$

Из (3.14), (3.15) и (3.7) заключаем, что

$$V_k(\eta)\sim\eta^2\,T_k(\eta),\ \ \eta\to0,\ \ k\ge1,\tag{3.16}$$

откуда и из (3.14) следует ограниченность в нуле функций $\overset{6}{F}_k(\eta,R_{k-1})$, $\overset{8}{F}_k(\eta,R_{k-1})$, а поэтому и $\overset{9}{F}_k(\eta,R_{k-1})$ и $\overset{11}{F}_k(\eta,R_{k-1})$.

Итак, пусть в дальнейшем C_1 и r_0 таковы, что справедливо либо (3.12), либо (3.13).

Тогда интегралы в (3.11) имеют вид

$$\overset{i}{S}_k+\overset{i}{\mathcal{P}}_{k+1}\Big(\frac{\mu}{\varepsilon}\Big)+O(\varepsilon^{+\infty}),\ \ i=1,2,3,4,\ \ k\ge0,\tag{3.17}$$

где $\overset{i}{S}_k$ — постоянные векторы, а $\overset{i}{\mathcal{P}}_k\,(\frac{\mu}{\varepsilon})$ — многочлены степени k от $\frac{\mu}{\varepsilon}$, не содержащие свободных членов. Таким образом,

$$J_1(\varepsilon,\mu) \sim \varepsilon\,\overset{1}{S}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k+1}\Big(\overset{2}{S}_0\,(r_k) - \overset{3}{S}_0\,(r_k) + \overset{4}{S}_k\,(R_{k-1})\Big) + \sum_{k=0}^{\infty}\overset{2}{\mathcal{F}}_k\,(\varepsilon,\mu). \tag{3.18}$$

Собирая вместе асимптотики (3.10) и (3.18) интегралов $J_2(\varepsilon,\mu)$ и $J_1(\varepsilon,\mu)$, заменяя в них бесконечные суммы $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overset{1}{\mathcal{F}}_k\,(\varepsilon,\mu)$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overset{2}{\mathcal{F}}_k\,(\varepsilon,\mu)$ на конечные суммы с известной оценкой остатка и применяя лемму 4.4 из [9], получаем

$$J(\varepsilon) \sim J_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Bigg(\int\limits_0^T\Big(\frac{C_0(\tau)r_k}{\varphi^{1/2}(\tau)} - \frac{\langle C_0(\tau)r_0, r_k\rangle C_0(\tau)r_0}{\varphi^{3/2}(\tau)}\Big) + \overset{12}{F}_k\,(R_{k-1})\Bigg). \tag{3.19}$$

Для вектора $\bar{y}_\varepsilon := e^{A_1T}\Big(\int\limits_0^T e^{-A_1\tau}B_1e^{-\frac{1}{\varepsilon}B_2\tau}d\tau\Big)y^0$ из (3.3) получаем разложение

$$\bar{y}_\varepsilon \sim e^{A_1T}\varepsilon\Big(B_1B_2^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(-A_1)^kB_1B_2^{-k-1}\Big)y^0 =: \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k y_k. \tag{3.20}$$

Подставив асимптотики (3.19) и (3.20) в уравнение (3.1), получим для нахождения векторов $\{r_k\}$ следующую систему уравнений:

$$D^2\sigma^*(r_0)r_k + \int\limits_0^T\Big(\frac{C_0(\tau)r_k}{\varphi^{1/2}(\tau)} - \frac{\langle C_0(\tau)r_0, r_k\rangle C_0(\tau)r_0}{\varphi^{3/2}(\tau)}\Big)d\tau = y_k - \overset{12}{F}_k\,(R_{k-1}). \tag{3.21}$$

В [10] показано, что если выполнено (1.2), то полученная система (3.21) разрешима единственным образом при любых $\{y_k\}$. Там же обосновано, что формальный асимптотический ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k r_k$, где $\{r_k\}$ $(k>0)$ получены из решения системы (3.21), является асимптотическим разложением вектора r_ε. Подставляя это разложение в формулу (2.18), получим асимптотическое разложение для $\omega_\varepsilon(T,x^0,y^0)$:

$$\omega_\varepsilon(T,x^0,y^0) \sim \omega_0(T,x^0) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\omega_k(T,x^0,y^0), \tag{3.22}$$

где $\omega_0(T,x^0)$ — решение задачи (1.3), а коэффициенты $\omega_k(T,x^0,y^0)$ выражаются в силу формулы Тейлора через значения дифференциалов функции σ^* в точках $r_0,\ldots,r_k$. Например, $\omega_1 = \langle D^2\sigma^*(r_0)r_0, r_1\rangle$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2.7), (3.8) *и либо* (3.12), *либо* (3.13). *Тогда решение* $\omega_\varepsilon(T,x^0,y^0)$ *задачи* (1.1) *разлагается в асимптотический ряд* (3.22) *по степеням* ε.

Отметим, что выполнение условий (2.7), (3.8), а также условия (3.12) или (3.13) является существенным для степенного характера асимптотики решения рассматриваемой задачи. В случае нарушения этих условий могут возникать иные, отличные от степенных и более сложные асимптотики (см. [11], где рассмотрена ситуация, когда выполнены все условия, кроме (2.7)).

Поступила 12.03.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. **Kokotović P.V., Yackel R.A.** Singular perturbation of linear regulators: Basic theorems // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. Vol. 17, no. 1. P. 29–37.
4. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Мат. анализ. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
5. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987.
6. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
7. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
8. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
9. **Данилин А.Р.** Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 27–60.
10. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в регулярном случае // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 11. С. 1473–1480.
11. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 517.929

СИНГУЛЯРНЫЕ ЧИСЛА ОПЕРАТОРА МОНОДРОМИИ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Ю. Ф. Долгий, Е. В. Ульянов

При получении достаточных условий асимптотической устойчивости линейных периодических систем с постоянным запаздыванием, соизмеримым с периодом коэффициентов, используются сингулярные числа оператора монодромии, а для нахождения последних — самосопряженная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследовано движение собственных чисел краевой задачи при изменении параметра, а получение достаточных условий асимптотической устойчивости сведено к нахождению бифуркационного значения параметра для этой задачи.

Введение

Рассмотрим линейную периодическую систему дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau), \tag{0.1}$$

где $x:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $\omega > 0$; $A,\ B$ — ω-периодические матричные функции с кусочно-непрерывными элементами. Предполагается, что кусочно-непрерывные функции имеют конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[0, \omega]$.

Оператор монодромии U действует в гильбертовом функциональном пространстве состояний $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} \psi^\top(\vartheta)\varphi(\vartheta)d\vartheta.$$

Здесь $\top$ — значок операции транспонирования. Оператор монодромии является вполне непрерывным и определяется формулой

$$(U\varphi)(\vartheta) = x(\omega + \vartheta, \varphi), \quad \vartheta \in [-\tau, 0],$$

в которой $x(\cdot, \varphi)$ — решение системы (0.1) с начальным моментом $t_0 = 0$ и начальной функцией φ. Его спектр состоит из собственных чисел, а также может содержать точку $\rho = 0$ [1–3]. Для асимптотической устойчивости системы (0.1) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа ρ оператора монодромии были меньше единицы по модулю. Если существует собственное число с модулем, большим единицы, то система (0.1) неустойчива [2,3]. Различные методы нахождения условий устойчивости системы (0.1) описаны в работах [4–10].

Пусть запаздывание τ соизмеримо с периодом ω. Тогда задачу нахождения ненулевых собственных чисел оператора монодромии системы (0.1) можно свести к задаче нахождения собственных чисел краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений [9,11,12].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект №06-01-00399) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 13 “Математические методы в нелинейной динамике”.

В работах [9, 13–15] при изучении спектральных свойств этих задач показано, что существует класс периодических систем с запаздыванием, для которых соответствующие краевые задачи становятся самосопряженными, когда собственное число оператора монодромии имеет модуль, равный единице. В этом случае эффективно работают бифуркационные методы изучения устойчивости.

В настоящей работе при нахождении достаточных условий асимптотической устойчивости системы (0.1) используются сингулярные числа оператора монодромии.

О п р е д е л е н и е 1 [16]. *Сингулярными числами* вполне непрерывного оператора U в гильбертовом пространстве называются собственные числа оператора $H = (U^*U)^{1/2}$.

Модули собственных чисел оператора U не превосходят его максимального сингулярного числа [17]. Поэтому для асимптотической устойчивости системы (0.1) достаточно, чтобы сингулярные числа вполне непрерывного оператора U были меньше единицы.

В работе при нахождении сингулярных чисел используется самосопряженная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследовано движение собственных чисел краевой задачи при изменении параметра, а получение достаточных условий асимптотической устойчивости линейной периодической системы с запаздыванием сведено к нахождению бифуркационного значения параметра для этой задачи.

1. Краевая задача для оператора монодромии

Задачу определения значений оператора U можно свести к нахождению решений специальной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Введем обозначения

$$x_0(\vartheta) = \varphi(\vartheta),\ x_k(\vartheta) = x(k\tau + \vartheta, \varphi),$$
$$A_k(\vartheta) = A(k\tau + \vartheta),\ B_k(\vartheta) = B(k\tau + \vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad k = \overline{1, m}.$$

Лемма 1. *Оператор монодромии определяется формулой $Ux_0 = x_m$, где элемент x_0 принадлежит $\mathbb{H}$, а функция $x_m(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, является компонентой решения краевой задачи*

$$\frac{dx_k}{d\vartheta} = A_k(\vartheta)x_k + B_k(\vartheta)x_{k-1}, \tag{1.1}$$

$$x_k(-\tau) = x_{k-1}(0), \quad 1 \le k \le m. \tag{1.2}$$

Справедливость утверждений леммы доказывается с использованием метода шагов для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием [18, с. 17].

2. Краевая задача для сопряженного оператора

Задачу определения значений сопряженного оператора U^* можно свести к нахождению решений специальной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Близкая задача решалась в [20]. В данной работе модифицирована предложенная в [20] методика. Вначале рассмотрим частный случай.

Лемма 2. *При $A(t) \equiv 0$, $t \in [0, \omega]$, сопряженный оператор U^* определяется следующей формулой*

$$(U^*y_0)(\vartheta) = \begin{cases} B_1^\top(\vartheta)y_m(\vartheta), & \vartheta \in [-\tau, 0), \\ y_m(-\tau), & \vartheta = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где элемент y_0 принадлежит $\mathbb{H}$, а функция $y_m(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, является компонентой решения краевой задачи

$$\frac{dy_1}{d\vartheta} = -y_0,\ \frac{dy_k}{d\vartheta} = -B_{m+2-k}^\top(\vartheta)y_{k-1}, \quad k = \overline{2, m}, \tag{2.2}$$

$$y_1(0) = y_0(0),\ \ y_k(0) = y_{k-1}(-\tau), \quad k = \overline{2,m}. \tag{2.3}$$

При $m = 1$ в каждой из формул (2.2), (2.3) берется только первое равенство.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению оператора U^* [19, с. 77], имеем

$$(x_0, U^* y_0) = (Ux_0, y_0)\,. \tag{2.4}$$

Используя формулу интегрирования по частям, скалярное произведение в правой части последнего равенства можно преобразовать:

$$(Ux_0, y_0) = (x_m, y_0) = y_0^\top(0)x_m(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} y_0^\top(\vartheta)x_m(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$= y_0^\top(0)x_m(0) - \int\limits_{-\tau}^{0} \frac{d}{d\vartheta}\Bigg(\int\limits_{\vartheta}^{0} y_0^\top(\alpha)\,d\alpha\Bigg)x_m(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$= y_0^\top(0)x_m(0) - \int\limits_{\vartheta}^{0} y_0^\top(\alpha)\,d\alpha\, x_m(\vartheta)\Bigg|_{-\tau}^{0} + \int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{\vartheta}^{0} y_0^\top(\alpha)\,d\alpha\ \left(dx_m(\vartheta)/d\vartheta\right)d\vartheta.$$

Согласно лемме 1, имеют место равенства $dx_m(\vartheta)/d\vartheta = B_m(\vartheta)x_{m-1}(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $x_m(-\tau) = x_{m-1}(0)$, с помощью которых скалярное произведение (Ux_0, y_0) преобразуется к виду

$$(Ux_0, y_0) = y_0^\top(0)x_m(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} y_0^\top(\alpha)\,d\alpha\, x_{m-1}(0) + \int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{\vartheta}^{0} y_0^\top(\alpha)\,d\alpha\, B_m(\vartheta)x_{m-1}(\vartheta)d\vartheta. \tag{2.5}$$

Интегрируя равенство $dx_m(\vartheta)/d\vartheta = B_m(\vartheta)x_{m-1}(\vartheta)$ и учитывая краевое условие $x_m(-\tau) = x_{m-1}(0)$, находим

$$x_m(0) = x_{m-1}(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} B_m(\vartheta)x_{m-1}(\vartheta)d\vartheta.$$

Применяя это равенство в (2.5), имеем

$$(Ux_0, y_0) = \Bigg(y_0^\top(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} y_0^\top(\alpha)\,d\alpha\Bigg)x_{m-1}(0)$$

$$+ \int\limits_{-\tau}^{0}\Bigg[y_0^\top(0) + \int\limits_{\vartheta}^{0} y_0^\top(\alpha)\,d\alpha\Bigg]B_m(\vartheta)x_{m-1}(\vartheta)d\vartheta. \tag{2.6}$$

Введем обозначение

$$y_1(\vartheta) = y_0(0) + \int\limits_{\vartheta}^{0} y_0(\alpha)\,d\alpha \quad (\vartheta \in [-\tau, 0]) \tag{2.7}$$

и преобразуем формулу (2.6) к виду

$$(Ux_0, y_0) = y_1^\top(-\tau)x_{m-1}(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} y_1^\top(\vartheta)B_m(\vartheta)x_{m-1}(\vartheta)d\vartheta. \tag{2.8}$$

При $m > 1$ продолжим преобразование скалярного произведения (Ux_0, y_0). Интегрируя равенство $dx_{m-1}(\vartheta)/d\vartheta = B_{m-1}(\vartheta)x_{m-2}(\vartheta)$ и учитывая краевое условие $x_{m-1}(-\tau) = x_{m-2}(0)$, находим

$$x_{m-1}(0) = x_{m-2}(0) + \int_{-\tau}^{0} B_{m-1}(\vartheta)x_{m-2}(\vartheta)d\vartheta.$$

Преобразуем скалярное произведение (2.8), используя последнее равенство, формулу интегрирования по частям и краевую задачу из леммы 1:

$$(Ux_0, y_0) = y_1^\top(-\tau)\Big[x_{m-2}(0) + \int_{-\tau}^{0} B_{m-1}(\vartheta)x_{m-2}(\vartheta)d\vartheta\Big]$$

$$- \int_{-\tau}^{0} \frac{d}{d\vartheta}\Big(\int_{\vartheta}^{0} y_1^\top(\alpha)B_m(\alpha)\,d\alpha\Big)x_{m-1}(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$= y_1^\top(-\tau)\Big[x_{m-2}(0) + \int_{-\tau}^{0} B_{m-1}(\vartheta)x_{m-2}(\vartheta)d\vartheta\Big]$$

$$- \int_{\vartheta}^{0} y_1^\top(\alpha)B_m(\alpha)\,d\alpha\,x_{m-1}(\vartheta)\Big|_{-\tau}^{0} + \int_{-\tau}^{0}\int_{\vartheta}^{0} y_1^\top(\alpha)B_m(\alpha)\,d\alpha\;(dx_{m-1}(\vartheta)/d\vartheta)\,d\vartheta$$

$$= y_1^\top(-\tau)\Big[x_{m-2}(0) + \int_{-\tau}^{0} B_{m-1}(\vartheta)x_{m-2}(\vartheta)d\vartheta\Big]$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} y_1^\top(\alpha)B_m(\alpha)\,d\alpha\,x_{m-2}(0) + \int_{-\tau}^{0}\int_{\vartheta}^{0} y_1^\top(\alpha)B_m(\alpha)\,d\alpha\,B_{m-1}(\vartheta)x_{m-2}(\vartheta)d\vartheta$$

$$= \Big[y_1^\top(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} y_1^\top(\alpha)B_m(\alpha)\,d\alpha\Big]x_{m-2}(0)$$

$$+ \int_{-\tau}^{0}\Big[y_1^\top(-\tau) + \int_{\vartheta}^{0} y_1^\top(\alpha)B_m(\alpha)\,d\alpha\Big]B_{m-1}(\vartheta)x_{m-2}(\vartheta)d\vartheta.$$

Введем обозначение $y_2(\vartheta) = y_1(-\tau) + \int_{\vartheta}^{0} B_m^\top(\alpha)y_1(\alpha)\,d\alpha$ $(\vartheta \in [-\tau, 0])$ и преобразуем скалярное произведение к виду

$$(Ux_0, y_0) = y_2^\top(-\tau)x_{m-2}(0) + \int_{-\tau}^{0} y_2^\top(\vartheta)B_{m-1}(\vartheta)x_{m-2}(\vartheta)d\vartheta. \tag{2.9}$$

При $m > 2$ докажем, используя метод математической индукции, справедливость следующей формулы:

$$(Ux_0, y_0) = y_k^\top(-\tau)x_{m-k}(0) + \int_{-\tau}^{0} y_k^\top(\vartheta)B_{m+1-k}(\vartheta)x_{m-k}(\vartheta)d\vartheta, \tag{2.10}$$

где

$$y_k(\vartheta) = y_{k-1}(-\tau) + \int\limits_{\vartheta}^{0} B^\top_{m+2-k}(\alpha) y_{k-1}(\alpha)\, d\alpha, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad 2 \le k \le m. \tag{2.11}$$

При $k = 2$ формула (2.10) совпадает с (2.9). Далее, следуя методу доказательства, предположим, что для некоторого числа $k,\ 2 < k < m$, формула (2.10) справедлива. Покажем, что она справедлива для $k+1$. Интегрируя равенство $dx_{m-k}(\vartheta)/d\vartheta = B_{m-k}(\vartheta)x_{m-k-1}(\vartheta)$ и учитывая краевое условие $x_{m-k}(-\tau) = x_{m-k-1}(0)$, имеем

$$x_{m-k}(0) = x_{m-k-1}(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} B_{m-k}(\vartheta) x_{m-k-1}(\vartheta) d\vartheta. \tag{2.12}$$

Применяя формулу интегрирования по частям для интеграла из равенства (2.10) и лемму 1, имеем

$$\int\limits_{-\tau}^{0} y_k^\top(\vartheta) B_{m+1-k}(\vartheta) x_{m-k}(\vartheta) d\vartheta = -\int\limits_{\vartheta}^{0} y_k^\top(\alpha) B_{m+1-k}(\alpha) d\alpha\, x_{m-k}(\vartheta)\Bigg|_{-\tau}^{0}$$
$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{\vartheta}^{0} y_k^\top(\alpha) B_{m+1-k}(\alpha) d\alpha\, B_{m-k}(\vartheta) x_{m-k-1}(\vartheta) d\vartheta$$
$$= \int\limits_{-\tau}^{0} y_k^\top(\alpha) B_{m+1-k}(\alpha) d\alpha\, x_{m-k-1}(0) + \int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{\vartheta}^{0} y_k^\top(\alpha) B_{m+1-k}(\alpha) d\alpha\, B_{m-k}(\vartheta) x_{m-k-1}(\vartheta) d\vartheta.$$

Подставив (2.12) и найденное выражение для интеграла в формулу (2.10), получим после преобразований

$$(Ux_0, y_0) = \left(y_k^\top(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{0} y_k^\top(\alpha) B_{m+1-k}(\alpha) d\alpha\right) x_{m-k-1}(0)$$
$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\left[y_k^\top(-\tau) + \int\limits_{\vartheta}^{0} y_k^\top(\alpha) B_{m+1-k}(\alpha) d\alpha\right] B_{m-k}(\vartheta) x_{m-k-1}(\vartheta) d\vartheta.$$

С учетом (2.11) последняя формула примет вид

$$(Ux_0, y_0) = y_{k+1}^\top(-\tau) x_{m-k-1}(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} y_{k+1}^\top(\vartheta) B_{m-k}(\vartheta) x_{m-k-1}(\vartheta) d\vartheta.$$

Таким образом, справедливость формулы (2.10) доказана.

При $k = m$ из (2.10) находим

$$(Ux_0, y_0) = y_m^\top(-\tau) x_0(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} y_m^\top(\vartheta) B_1(\vartheta) x_0(\vartheta) d\vartheta. \tag{2.13}$$

Обозначим $z_0 = U^* y_0$. Тогда скалярное произведение $(x_0, U^* y_0)$ определится формулой

$$(x_0, U^* y_0) = (x_0, z_0) = z_0^\top(0) x_0(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} z_0^\top(\vartheta) x_0(\vartheta) d\vartheta.$$

Учитывая последнее равенство, а также равенства (2.13) и (2.4), имеем

$$z_0(\vartheta) = \begin{cases} B_1^\top(\vartheta) y_m(\vartheta), & \vartheta \in [-\tau, 0), \\ y_m(-\tau), & \vartheta = 0. \end{cases}$$

В результате нашли значение сопряженного оператора U^*.

Покажем, что функция $y_m(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, является компонентой решения краевой задачи (2.2), (2.3). Равенство (2.7) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\frac{dy_1}{d\vartheta} = -y_0, \quad \vartheta \in [-\tau, 0],$$

с краевым условием $y_1(0) = y_0(0)$. Равенство (2.11) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\frac{dy_k}{d\vartheta} = -B_{m+2-k}^\top(\vartheta) y_{k-1}, \quad k = \overline{2, m},$$

с краевым условием $y_k(0) = y_{k-1}(-\tau),\ k = \overline{2, m}$.

Таким образом, функции $y_k(\vartheta)$, $k = \overline{1, m}$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, являются компонентами решения краевой задачи (2.2), (2.3).

Переходим к построению краевой задачи для определения значений сопряженного оператора в общем случае.

Лемма 3. *Сопряженный оператор U^* определяется формулой*

$$(U^* y_0)(\vartheta) = \begin{cases} B_1^\top(\vartheta) y_m(\vartheta), & \vartheta \in [-\tau, 0), \\ y_m(-\tau), & \vartheta = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

где элемент y_0 принадлежит $\mathbb{H}$, а функция $y_m(\vartheta)$ ($\vartheta \in [-\tau, 0]$) — компонента решения краевой задачи

$$\frac{dy_1}{d\vartheta} = -A_m^\top(\vartheta) y_1 - y_0,\ \frac{dy_k}{d\vartheta} = -A_{m+1-k}^\top(\vartheta) y_k - B_{m+2-k}^\top(\vartheta) y_{k-1}, \quad k = \overline{2, m}, \tag{2.15}$$

$$y_1(0) = y_0(0),\ y_k(0) = y_{k-1}(-\tau), \quad k = \overline{2, m}. \tag{2.16}$$

При $m = 1$ в каждой из формул (2.15), (2.16) берется только первое равенство.

Доказательство. Пусть Φ ($\Phi(0) = I_n$) — нормированная фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x$. В краевой задаче (1.1), (1.2) выполним замены переменных

$$x_k = \Phi_k(\vartheta) \tilde{x}_k,\ \vartheta \in [-\tau, 0], \quad k = \overline{0, m}, \tag{2.17}$$

где $\Phi_k(\vartheta) = \Phi(k\tau + \vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $\ k = \overline{0, m}$. Тогда система (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{d\tilde{x}_k}{d\vartheta} = \Phi_k^{-1}(\vartheta) B_k(\vartheta) \Phi_{k-1}(\vartheta) \tilde{x}_{k-1}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Для краевых условий (1.2) имеем $x_k(-\tau) = \Phi_k(-\tau)\tilde{x}_k(-\tau) = x_{k-1}(0) = \Phi_k(-\tau)\tilde{x}_k(0) = \Phi_{k-1}(0)\tilde{x}_k(0)$, $\ k = \overline{1, m}$. Таким образом, получили следующую краевую задачу

$$\frac{d\tilde{x}_k}{d\vartheta} = \tilde{B}_k(\vartheta) \tilde{x}_{k-1}, \tag{2.18}$$

$$\tilde{x}_k(-\tau) = \tilde{x}_{k-1}(0), \quad k = \overline{1, m}, \tag{2.19}$$

где
$$\tilde{B}_k(\vartheta) = \Phi_k^{-1}(\vartheta) B_k(\vartheta) \Phi_{k-1}(\vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad k = \overline{1, m}. \tag{2.20}$$
Решения краевых задач (1.1), (1.2) и (2.18), (2.19) связаны формулами (2.17).

Рассмотрим оператор $\tilde{U}$, определяемый формулой $\tilde{U}\tilde{x}_0 = \tilde{x}_m$, где $x_0 \in \mathbb{H}$, а функция $x_m(\vartheta)$ $(\vartheta \in [-\tau, 0])$ — компонента решения краевой задачи (2.18), (2.19). Сопряженный оператор $\tilde{U}^*$, согласно лемме 2, определяется формулой
$$(\tilde{U}^* \tilde{y}_0)(\vartheta) = \begin{cases} \tilde{B}_1^\top(\vartheta) \tilde{y}_m(\vartheta), & \vartheta \in [-\tau, 0), \\ \tilde{y}_m(-\tau), & \vartheta = 0, \end{cases} \tag{2.21}$$
где $y_0 \in \mathbb{H}$, а функция $y_m(\vartheta)$ $(\vartheta \in [-\tau, 0])$ — компонента решения краевой задачи
$$\frac{d\tilde{y}_1}{d\vartheta} = -\tilde{y}_0, \ \frac{d\tilde{y}_k}{d\vartheta} = -\tilde{B}_{m+2-k}^\top(\vartheta) \tilde{y}_{k-1}, \quad k = \overline{2, m}, \tag{2.22}$$
$$\tilde{y}_1(0) = \tilde{y}_0(0), \ \tilde{y}_k(0) = \tilde{y}_{k-1}(-\tau), \quad k = \overline{2, m}. \tag{2.23}$$

Покажем, что при $y_0(\vartheta) = \Phi_m^{-1\top}(\vartheta) \tilde{y}_0(\vartheta), \ \vartheta \in [-\tau, 0]$, решения краевых задач (2.15), (2.16) и (2.22), (2.23) связаны формулами
$$y_k(\vartheta) = \Phi_{m+1-k}^{-1\top}(\vartheta) \tilde{y}_k(\vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad k = \overline{1, m}. \tag{2.24}$$
Дифференцируя эти равенства, находим
$$\frac{dy_k(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{\Phi_{m+1-k}^{-1\top}(\vartheta)}{d\vartheta} \tilde{y}_k(\vartheta) + \Phi_{m+1-k}^{-1\top}(\vartheta) \frac{\tilde{y}_k(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad k = \overline{1, m}. \tag{2.25}$$
Для фундаментальной матрицы $\Phi(t), \ t \in [0, \omega]$, справедливы следующие тождества
$$\frac{d\Phi_k(\vartheta)}{d\vartheta} \equiv A_k(\vartheta) \Phi_k(\vartheta), \ \vartheta \in [-\tau, 0], \quad k = \overline{1, m}. \tag{2.26}$$
Дифференцируя тождества $\Phi_k^{-1}(\vartheta) \Phi_k(\vartheta) \equiv I_n, \ \vartheta \in [-\tau, 0], \ k = \overline{1, m}$, получим $\big(d\Phi_k^{-1}(\vartheta)/d\vartheta\big) \times$ $\Phi_k(\vartheta) + \Phi_k^{-1}(\vartheta) \left(d\Phi_k(\vartheta)/d\vartheta\right) \equiv 0, \ \vartheta \in [-\tau, 0], \ k = \overline{1, m}$. Отсюда, учитывая (2.26), находим $d\Phi_k^{-1\top}(\vartheta)/d\vartheta \equiv -A_k^\top(\vartheta) \Phi_k^{-1\top}(\vartheta), \ \vartheta \in [-\tau, 0], \ k = \overline{1, m}$. Учитывая дифференциальные уравнения (2.22), последнее тождество и равенства (2.20), (2.25), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.15).

Учитывая формулы (2.24), равенства (2.23) и (2.20), находим $y_1(0) = \Phi_m^{-1\top}(0) \tilde{y}_1(0) = \Phi_m^{-1\top}(0) \tilde{y}_0(0) = y_0(0)$. Аналогично, имеем $y_k(0) = \Phi_{m+1-k}^{-1\top}(0) \tilde{y}_k(0) = \Phi_{m+1-k}^{-1\top}(0) \tilde{y}_{k-1}(-\tau) = \Phi_{m+1-k}^{-1\top}(0) \Phi_{m+2-k}^\top(-\tau) y_{k-1}(-\tau) = y_{k-1}(-\tau)$ при $k = \overline{2, m}$.

Таким образом, для решений краевых задач (2.15), (2.16) и (2.22), (2.23) справедлива формула (2.24).

Учитывая связь решений краевых задач (1.1), (1.2) и (2.18), (2.19), а также решений краевых задач (2.15), (2.16) и (2.22), (2.23), имеем $(Ux_0, y_0) = (x_m, y_0) = (\Phi_m \tilde{x}_m, y_0) = (\tilde{x}_m, \Phi_m^\top y_0) = (\tilde{x}_m, \tilde{y}_0) = (\tilde{U}\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (\tilde{x}_0, \tilde{U}^* \tilde{y}_0) = (\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$, где $\tilde{z}_0 = \tilde{U}^* \tilde{y}_0$. С другой стороны, $(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0) = (Ux_0, y_0) = (x_0, U^* y_0) = (x_0, z_0) = (\Phi_0 \tilde{x}_0, z_0) = (\tilde{x}_0, \Phi_0^\top z_0)$, где $z_0 = U^* y_0$. Тогда $z_0(\vartheta) = \Phi_0^{-1\top}(\vartheta) \times$ $\tilde{z}_0(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$. Учитывая формулу (2.21), получим
$$z_0(\vartheta) = \begin{cases} \Phi_0^{-1\top}(\vartheta) \tilde{B}_1^\top(\vartheta) \tilde{y}_m(\vartheta), & \vartheta \in [-\tau, 0), \\ \Phi_0^{-1\top}(0) \tilde{y}_m(-\tau), & \vartheta = 0. \end{cases}$$
Из этой формулы имеем $(U^* y_0)(\vartheta) = \Phi_0^{-1\top}(\vartheta) \tilde{B}_1^\top(\vartheta) \tilde{y}_m(\vartheta) = \Phi_0^{-1\top}(\vartheta) \Phi_0^\top(\vartheta) B_1^\top(\vartheta) \Phi_1^{-1\top}(\vartheta) \times$ $\tilde{y}_m(\vartheta) = B_1^\top(\vartheta) y_m(\vartheta), \ \vartheta \in [-\tau, 0), \ (U^* y_0)(0) = \Phi_0^{-1\top}(0) \tilde{y}_m(-\tau) = \Phi_0^{-1\top}(0) \Phi_1^\top(-\tau) y_m(-\tau) = y_m(-\tau)$. Таким образом, сопряженный оператор U^* определяется формулой (2.14).

3. Сингулярные числа оператора монодромии

Полученные в предыдущих разделах результаты используем для построения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, собственные числа которой определяют сингулярные числа оператора монодромии.

Теорема 1. *Положительное число s тогда и только тогда является сингулярным числом оператора монодромии U, когда имеет ненулевое решение при $z = s^{-1}$ следующая краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\frac{dx_1}{d\vartheta} = A_1(\vartheta)x_1 + zB_1(\vartheta)B_1^\top(\vartheta)y_m,$$

$$\frac{dx_k}{d\vartheta} = A_k(\vartheta)x_k + B_k(\vartheta)x_{k-1}, \quad k = \overline{2,m},$$

$$\frac{dy_k}{d\vartheta} = -A_k^\top(\vartheta)y_k - B_{k+1}^\top(\vartheta)y_{k+1}, \quad k = \overline{1,m-1},$$

$$\frac{dy_m}{d\vartheta} = -A_m^\top(\vartheta)y_m - zx_m, \tag{3.1}$$

$$x_1(-\tau) = zy_1(-\tau), \quad x_k(-\tau) = x_{k-1}(0), \quad k = \overline{2,m},$$

$$y_k(0) = y_{k+1}(-\tau), \quad k = \overline{1,m-1}, \quad y_m(0) = zx_m(0). \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для сингулярного числа s выполняются равенства

$$H^2x_0 = U^*Ux_0 = s^2x_0$$

при ненулевом элементе x_0 гильбертова пространства $\mathbb{H}$. Следовательно, положительное число s тогда и только тогда является сингулярным числом оператора U, когда система уравнений

$$Ux_0 = s\tilde{y}_0, \ U^*\tilde{y}_0 = sx_0 \tag{3.3}$$

имеет ненулевое решение. Из лемм 1 и 3 вытекают следующие равенства: $(Ux_0)(\vartheta) = x_m(\vartheta)$, $(U^*\tilde{y}_0)(\vartheta) = B_1^\top(\vartheta)\tilde{y}_m(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $(Ux_0)(0) = x_m(0)$, $(U^*\tilde{y}_0)(0) = \tilde{y}_m(0)$, где $x_m(\vartheta)$ и $\tilde{y}_m(\vartheta)$ ($\vartheta \in [-\tau, 0]$) — компоненты решений краевых задач (1.1), (1.2) и (2.15), (2.16) соответственно. Следовательно, для положительного числа s система уравнений (3.3) тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда при $z = s^{-1}$ нетривиальное решение имеет краевая задача для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{d\vartheta} = A_1(\vartheta)x_1 + zB_1(\vartheta)B_1^\top(\vartheta)\tilde{y}_m,$$

$$\frac{dx_k}{d\vartheta} = A_k(\vartheta)x_k + B_k(\vartheta)x_{k-1}, \quad k = \overline{2,m}$$

$$\frac{d\tilde{y}_1}{d\vartheta} = -A_m^\top(\vartheta)\tilde{y}_1 - zx_m,$$

$$\frac{d\tilde{y}_k}{d\vartheta} = -A_{m+1-k}^\top(\vartheta)\tilde{y}_k - B_{m+2-k}^\top(\vartheta)\tilde{y}_{k-1}, \quad k = \overline{2,m}.$$

$$x_1(-\tau) = z\tilde{y}_m(-\tau), \ x_k(-\tau) = x_{k-1}(0),$$

$$\tilde{y}_1(0) = zx_m(0), \ \tilde{y}_k(0) = \tilde{y}_{k-1}(-\tau), \quad k = \overline{2,m}.$$

Проведя замены $y_k = \widetilde{y}_{m+1-k}$, $k = \overline{1,m}$, получим краевую задачу (3.1), (3.2).

З а м е ч а н и е. Собственные числа z краевой задачи (3.1), (3.2) вещественные и расположены на числовой оси симметрично относительно нуля.

Действительно, при $z \neq 0$ число $s^2 = z^{-2}$ является собственным числом оператора U^*U. Следовательно, число $s = z^{-1}$ вещественное. Если при $s = \tilde{s}$ система уравнений (3.3) имеет нетривиальное решение $x_0 = \tilde{x}_0$, $y_0 = \tilde{y}_0$, то при $s = -\tilde{s}$ система уравнений (3.3) имеет нетривиальное решение $x_0 = \tilde{x}_0$, $y_0 = -\tilde{y}_0$.

Краевая задача (3.1), (3.2) записывается в векторной форме

$$\frac{du}{d\vartheta} = \mathcal{P}(\vartheta, z)u, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{A}(z)u(-\tau) = \mathcal{B}(z)u(0). \tag{3.5}$$

Здесь $u^\top = (x_1^\top, \ldots, x_m^\top, y_1^\top, \ldots, y_m^\top)$, $z = s^{-1}$, O_n — нулевая, а I_n — единичная матрица размерности $n \times n$ и $O_{n\cdot m}$ — нулевая, а $I_{n\cdot m}$ — единичная матрица размерности $nm \times nm$,

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & z\mathcal{P}_{12} \\ -z\mathcal{P}_{21} & -\mathcal{P}_{11}^\top \end{pmatrix}, \ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_{n\cdot m} & -z\mathcal{A}_{12} \\ O_{n\cdot m} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}, \ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{22}^\top & O_{n\cdot m} \\ -z\mathcal{P}_{21} & I_{n\cdot m} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_{11} = \begin{pmatrix} A_1 & O_n & \ldots & O_n & O_n \\ B_2 & A_2 & \ldots & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & \ldots & A_{m-1} & O_n \\ O_n & O_n & \ldots & B_m & A_m \end{pmatrix}, \ \mathcal{A}_{22} = \begin{pmatrix} O_n & I_n & \ldots & O_n & O_n \\ O_n & O_n & \ldots & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & \ldots & O_n & I_n \\ O_n & O_n & \ldots & O_n & O_n \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_{12} = \begin{pmatrix} B_1 B_1^\top & \ldots & O_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_n & \ldots & O_n \end{pmatrix}, \ \mathcal{P}_{21} = \begin{pmatrix} O_n & \ldots & O_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_n & \ldots & I_n \end{pmatrix}, \ \mathcal{A}_{21} = \begin{pmatrix} I_n & \ldots & O_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_n & \ldots & O_n \end{pmatrix}.$$

Краевая задача (3.4), (3.5) преобразуется к виду

$$J\frac{du}{d\vartheta} = \Big(\mathcal{H}_1(\vartheta) + z\mathcal{H}_2(\vartheta)\Big)u, \tag{3.6}$$

$$\left(\mathcal{A}_1 + z\mathcal{A}_2\right)u(-\tau) = \left(\mathcal{B}_1 + z\mathcal{B}_2\right)u(0). \tag{3.7}$$

Здесь

$$J = \begin{pmatrix} O_{n\cdot m} & -I_{n\cdot m} \\ I_{n\cdot m} & O_{n\cdot m} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} O_{n\cdot m} & \mathcal{P}_{11}^\top \\ \mathcal{P}_{11} & O_{n\cdot m} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{21}^\top & O_{n\cdot m} \\ O_{n\cdot m} & \mathcal{P}_{12} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} I_{n\cdot m} & O_{n\cdot m} \\ O_{n\cdot m} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} O_{n\cdot m} & -\mathcal{A}_{12} \\ O_{n\cdot m} & O_{n\cdot m} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{22}^\top & O_{n\cdot m} \\ O_{n\cdot m} & I_{n\cdot m} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} O_{n\cdot m} & O_{n\cdot m} \\ -\mathcal{P}_{21} & O_{n\cdot m} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1. *При вещественном числе z краевая задача* (3.6), (3.7) *является самосопряженной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверяем выполнение условий самосопряженности для краевой задачи (3.6), (3.7) [21, с. 175]: (1) матрицы $\mathcal{H}_2(\vartheta)$ являются неотрицательными для почти всех ϑ на отрезке $[-\tau, 0]$, (2) система уравнений $Jdu/d\vartheta = \mathcal{H}_1(\vartheta)u$, $\mathcal{H}_2(\vartheta)u = 0$ с краевым условием $\mathcal{A}(z)u(-\tau) = \mathcal{B}(z)u(0)$ имеет только тривиальное решение.

Для первого условия $c^\top\mathcal{H}_2(\vartheta)c = c^{1\top}\mathcal{P}_{21}(\vartheta)c^1 + c^{2\top}\mathcal{P}_{12}(\vartheta)c^2 = c_m^{1\top}c_m^1 + c_1^{2\top}B_1(\vartheta)B_1^\top(\vartheta)c_1^2 \geq 0$ почти всюду на отрезке $[-\tau, 0]$ для любого вектора $c \in \mathbb{R}^{nm}$, $c^\top = \left(c_1^{1\top}, \ldots, c_m^{1\top}, c_1^{2\top}, \ldots, c_m^{2\top}\right)$. Из уравнения $\mathcal{H}_2(\vartheta)u = 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, находим $x(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$. С учетом этого условия краевая задача $Jdu/d\vartheta = \mathcal{H}_1(\vartheta)u$, $\mathcal{A}(z)u(-\tau) = \mathcal{B}(z)u(0)$ имеет только тривиальное решение.

4. Достаточные условия асимптотической устойчивости периодической системы дифференциальных уравнений с запаздыванием

Введем в краевую задачу (3.6), (3.7) положительный параметр μ следующим образом:

$$J\frac{du}{d\vartheta} = \left(\mathcal{H}_1(\vartheta) + \mu z\mathcal{H}_2(\vartheta)\right)u, \tag{4.1}$$

$$\left(\mathcal{A}_1 + z\mathcal{A}_2\right)u(-\tau) = \left(\mathcal{B}_1 + z\mathcal{B}_2\right)u(0). \tag{4.2}$$

Утверждение 2. *При* $\mu = 0$ *собственные числа* z *краевой задачи* (4.1), (4.2) *являются корнями уравнения*

$$\det\left(z^2\Psi_m^\top(0)\Psi_m(0) - I_n\right) = 0. \tag{4.3}$$

Здесь Ψ_m *— компонента решения системы дифференциальных матричных уравнений*

$$\frac{d\Psi_1}{d\vartheta} = A_1(\vartheta)\Psi_1, \quad \frac{d\Psi_k}{d\vartheta} = A_k(\vartheta)\Psi_k + B_k(\vartheta)\Psi_{k-1}, \quad k = \overline{2,m}, \tag{4.4}$$

с краевыми условиями

$$\Psi_1(-\tau) = I_n, \quad \Psi_k(-\tau) = \Psi_{k-1}(0), \quad k = \overline{2,m}. \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\mu = 0$ краевая задача (4.1), (4.2) принимает вид

$$\frac{dx_1}{d\vartheta} = A_1(\vartheta)x_1,$$

$$\frac{dx_k}{d\vartheta} = A_k(\vartheta)x_k + B_k(\vartheta)x_{k-1}, \quad k = \overline{2,m},$$

$$\frac{dy_k}{d\vartheta} = -A_k^\top(\vartheta)y_k - B_{k+1}^\top(\vartheta)y_{k+1}, \quad k = \overline{1,m-1},$$

$$\frac{dy_m}{d\vartheta} = -A_m^\top(\vartheta)y_m - zx_m,$$

$$x_1(-\tau) = zy_1(-\tau), \quad x_k(-\tau) = x_{k-1}(0), \quad k = \overline{2,m},$$

$$y_k(0) = y_{k+1}(-\tau), \quad k = \overline{1,m-1}, \quad y_m(0) = zx_m(0).$$

Решения краевой задачи

$$\frac{dx_1}{d\vartheta} = A_1(\vartheta)x_1, \quad \frac{dx_k}{d\vartheta} = A_k(\vartheta)x_k + B_k(\vartheta)x_{k-1}, \quad k = \overline{2,m},$$

$$x_k(-\tau) = x_{k-1}(0), \quad k = \overline{2,m},$$

определяются формулами

$$x_k(\vartheta) = \Psi_k(\vartheta)x_1(-\tau), \ \vartheta \in [-\tau, 0], \ k = \overline{1,m}, \tag{4.6}$$

где Ψ_k, $k = \overline{1,m}$, являются решениями краевой задачи (4.4), (4.5). Решения краевой задачи

$$\frac{dy_k}{d\vartheta} = -A_k^\top(\vartheta)y_k - B_{k+1}^\top(\vartheta)y_{k+1}, \quad k = \overline{1,m-1}, \quad \frac{dy_m}{d\vartheta} = -A_m^\top(\vartheta)y_m - zx_m,$$

$$y_k(0) = y_{k+1}(-\tau), \quad k = \overline{1,m-1}.$$

определяются формулой

$$y_k(\vartheta) = \hat{\Psi}_k(\vartheta)y_m(0), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad k = \overline{1,m}, \tag{4.7}$$

где $\hat{\Psi}_k$ $(k=\overline{1,m})$ — решения краевой задачи

$$\frac{d\hat{\Psi}_k}{d\vartheta}=-A_k^\top(\vartheta)\hat{\Psi}_k-B_{k+1}^\top(\vartheta)\hat{\Psi}_{k+1},\quad k=\overline{1,m-1},\quad \frac{d\hat{\Psi}_1}{d\vartheta}=A_1(\vartheta)\hat{\Psi}_1, \tag{4.8}$$

$$\hat{\Psi}_k(0)=\hat{\Psi}_{k-1}(-\tau),\quad k=\overline{1,m-1},\quad \hat{\Psi}_1(0)=I_n,\quad k=\overline{2,m}. \tag{4.9}$$

Система (4.8) сопряжена к системе (4.4). Поэтому для их решений выполняется равенство $\hat{\Psi}^\top(-\tau)\Psi(-\tau)=\hat{\Psi}^\top(0)\Psi(0)$ [21, c. 81]. Учитывая краевые условия (4.5) и (4.9), находим

$$\hat{\Psi}^\top(-\tau)\Psi(-\tau)=\sum_{k=1}^{m}\hat{\Psi}_k^\top(-\tau)\Psi_k(-\tau)=\hat{\Psi}_1^\top(-\tau)+\sum_{k=2}^{m}\hat{\Psi}_k^\top(-\tau)\Psi_{k-1}(0),$$

$$\hat{\Psi}^\top(0)\Psi(0)=\sum_{k=1}^{m}\hat{\Psi}_k^\top(0)\Psi_k(0)=\Psi_m(0)+\sum_{k=2}^{m}\hat{\Psi}_k^\top(-\tau)\Psi_{k-1}(0).$$

Отсюда имеем $\hat{\Psi}_1^\top(-\tau)=\Psi_m(0)$. Используя формулы (4.6), (4.7) и краевые условия $x_1(-\tau)=zy_1(-\tau)$, $y_m(0)=zx_m(0)$, получим для нахождения $x_1(-\tau)$, $y_m(0)$ линейную систему уравнений

$$x_1(-\tau)=z\hat{\Psi}_1^\top(-\tau)y_m(0),\ \ y_m(0)=z\Psi_m(0)x_1(-\tau).$$

Она имеет ненулевое решение, если число z является корнем уравнения (4.3).

Исследуем движение положительных собственных чисел краевой задачи (4.1), (4.2) при изменении положительного параметра μ.

Утверждение 3. *Пусть при $\mu=\mu_*>0$ краевая задача* (4.1), (4.2) *имеет собственное число $z=1$. Тогда при увеличении параметра μ в окрестности значения μ_* величина соответствующего собственного числа z краевой задачи убывает.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В краевой задаче (4.1), (4.2) полагаем $\mu=\mu_*+\hat{\mu}$ и ищем асимптотическое решение этой задачи

$$z=1+\hat{z}\hat{\mu}+O(\hat{\mu}^2),\ \ u=u_*+\hat{u}\hat{\mu}+O(\hat{\mu}^2). \tag{4.10}$$

Введем обозначения: $\mathcal{H}_*=\mathcal{H}_1+\mu_*\mathcal{H}_2$, $\mathcal{A}_*=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_*=\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2$, $\hat{\lambda}=1+\hat{z}\mu_*$. Коэффициенты асимптотических разложений (4.10) определяются из краевых задач

$$J\frac{du_*}{d\vartheta}=\mathcal{H}_*(\vartheta)u_*,\quad \mathcal{A}_*u_*(-\tau)=\mathcal{B}_*u_*(0). \tag{4.11}$$

$$J\frac{d\hat{u}}{d\vartheta}=\mathcal{H}_*(\vartheta)\hat{u}+\hat{\lambda}\mathcal{H}_2(\vartheta)u_*(\vartheta),\quad \mathcal{A}_*\hat{u}(-\tau)-\mathcal{B}_*\hat{u}(0)=\hat{z}\left(\mathcal{B}_2u_*(0)-\mathcal{A}_2u_*(-\tau)\right). \tag{4.12}$$

Используя последнюю краевую задачу и формулу интегрирования по частям, находим

$$\hat{\lambda}\int\limits_{-\tau}^{0}u_*^\top(\vartheta)\mathcal{H}_2(\vartheta)u_*(\vartheta)d\vartheta=\int\limits_{-\tau}^{0}u_*^\top(\vartheta)J(d\hat{u}(\vartheta)/d\vartheta)d\vartheta-\int\limits_{-\tau}^{0}u_*^\top(\vartheta)\mathcal{H}_*(\vartheta)\hat{u}(\vartheta)d\vartheta,$$

$$\int\limits_{-\tau}^{0}u_*^\top(\vartheta)J(d\hat{u}(\vartheta)/d\vartheta)d\vartheta=u_*^\top(\vartheta)J\hat{u}(\vartheta)\Big|_{-\tau}^{0}-\int\limits_{-\tau}^{0}(du_*^\top(\vartheta)/d\vartheta)J\hat{u}(\vartheta)d\vartheta,$$

$$\hat{\lambda}\int\limits_{-\tau}^{0}u_*^\top(\vartheta)\mathcal{H}_2(\vartheta)u_*(\vartheta)d\vartheta=u_*^\top(\vartheta)J\hat{u}(\vartheta)\Big|_{-\tau}^{0}+\int\limits_{-\tau}^{0}\left(Jdu_*(\vartheta)/d\vartheta-\mathcal{H}_*(\vartheta)u_*(\vartheta)\right)^\top\hat{u}(\vartheta)d\vartheta.$$

Используя краевую задачу (4.11), из последней формулы получим

$$\hat{\lambda}\int\limits_{-\tau}^{0} u_*^\top(\vartheta)\mathcal{H}_2(\vartheta)u_*(\vartheta)d\vartheta = u_*^\top(\vartheta)J\hat{u}(\vartheta)\Big|_{-\tau}^{0}. \tag{4.13}$$

Вычисляем $u_*^\top(\vartheta)\mathcal{H}_2(\vartheta)u_*(\vartheta) = x_*^\top(\vartheta)\mathcal{P}_{21}(\vartheta)x_*(\vartheta) + y_*^\top(\vartheta)\mathcal{P}_{12}(\vartheta)y_*(\vartheta) = x_{*m}^\top(\vartheta)x_{*m}(\vartheta) + y_{*1}^\top(\vartheta)B_1(\vartheta)B_1^\top(\vartheta)y_{*1}(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$. Покажем, что функция x_{*m} не равняется тождественно нулю на отрезке $[-\tau, 0]$. В противном случае из краевой задачи (4.11) имеем

$$\frac{dy_{*m}}{d\vartheta} = -A_m^\top(\vartheta)y_{*m},\ y_{*m}(0) = 0. \tag{4.14}$$

Тогда y_{*m} равняется тождественно нулю на отрезке $[-\tau, 0]$. Используя математическую индукцию, предполагаем, что функции $y_{*m}, \ldots, y_{*k+1}$ равняются тождественно нулю на отрезке $[-\tau, 0]$. Из краевой задачи (4.11) имеем

$$\frac{dy_{*k}}{d\vartheta} = -A_k^\top(\vartheta)y_{*k},\ y_{*k}(0) = 0. \tag{4.15}$$

В результате находим, что все функции $y_{*m}, \ldots, y_{*1}$ равняются тождественно нулю на отрезке $[-\tau, 0]$. Далее, из краевой задачи (4.11) имеем

$$\frac{dx_{*1}}{d\vartheta} = A_1(\vartheta)x_{*1},\ x_{*1}(-\tau) = 0. \tag{4.16}$$

Тогда x_{*1} равняется тождественно нулю на отрезке $[-\tau, 0]$. Используя математическую индукцию, предполагаем, что функции $x_{*1}, \ldots, x_{*k-1}$ равняются тождественно нулю на отрезке $[-\tau, 0]$. Из краевой задачи (4.11) имеем

$$\frac{dx_{*k}}{d\vartheta} = A_k(\vartheta)x_{*k},\quad x_{*k}(0) = 0. \tag{4.17}$$

В результате находим, что все функции $x_*, \ldots, x_{*m}$ равняются тождественно нулю на отрезке $[-\tau, 0]$. Получили противоречие. Отсюда следует, что $\alpha = \int\limits_{-\tau}^{0} u_*^\top(\vartheta)\mathcal{H}_2(\vartheta)u_*(\vartheta)d\vartheta > 0$.

Вычисляем $u_*^\top(\vartheta)J\hat{u}(\vartheta)\big|_{-\tau}^{0} = u_*^\top(0)J\hat{u}(0) - u_*^\top(-\tau)J\hat{u}(-\tau)$. Краевые условия (4.11), (4.12) представим в следующей форме:

$$\begin{gathered} x_{*1}(-\tau) = y_{*1}(-\tau),\ x_{*k}(-\tau) = x_{*k-1}(0),\ k = \overline{2, m}, \\ y_{*k}(0) = y_{*k+1}(-\tau),\ k = \overline{1, m-1},\ y_{*m}(0) = x_{*m}(0), \end{gathered} \tag{4.18}$$

$$\begin{gathered} \hat{x}_1(-\tau) = \hat{y}_1(-\tau) + \hat{z}y_{*1}(-\tau),\ \hat{x}_k(-\tau) = \hat{x}_{k-1}(0),\ k = \overline{2, m}, \\ \hat{y}_k(0) = \hat{y}_{k+1}(-\tau),\ k = \overline{1, m-1},\ \hat{y}_m(0) = \hat{x}_m(0) + \hat{z}x_{*m}(0). \end{gathered} \tag{4.19}$$

Учитывая эти условия, находим

$$u_*^\top(0)J\hat{u}(0) = y_*^\top(0)\hat{x}(0) - x_*^\top(0)\hat{y}(0) = -\hat{z}x_{*m}^\top(0)x_{*m}(0) + \sum_{k=1}^{m-1}\left(y_{*k}^\top(0)\hat{x}_k(0) - x_{*k}^\top(0)\hat{y}_k(0)\right),$$

$$\begin{gathered} u_*^\top(-\tau)J\hat{u}(-\tau) = y_*^\top(-\tau)\hat{x}(-\tau) - x_*^\top(-\tau)\hat{y}(-\tau) = \hat{z}y_{*1}^\top(-\tau)y_{*1}(-\tau) \\ + \sum_{k=1}^{m-1}\left(y_{*k}^\top(0)\hat{x}_k(0) - x_{*k}^\top(0)\hat{y}_k(0)\right). \end{gathered}$$

В результате имеем $u_*^\top(\vartheta)J\hat{u}(\vartheta)\big|_{-\tau}^{0} = -\hat{z}\left(x_{*m}^\top(0)x_{*m}(0) + y_{*1}^\top(-\tau)y_{*1}(-\tau)\right) = -\hat{z}\beta$, где $\beta \geq 0$.

С учетом полученных результатов из формулы (4.13) находим $\hat{z} = -\alpha/(\beta + \alpha\mu_*) < 0$.

Определение 2. Значение μ_* называется *бифуркационным значением* параметра μ краевой задачи (4.1), (4.2), если при этом значении краевая задача имеет собственное число $z = 1$.

Теорема 2. *Пусть все положительные корни уравнения* (4.3) *и наименьшее положительное бифуркационное значение параметра краевой задачи* (4.1), (4.2) *больше единицы. Тогда система* (0.1) *асимптотически устойчива.*

Доказательство. Модули собственных чисел оператора монодромии не превосходят максимального сингулярного числа этого оператора [17]. Поэтому для асимптотической устойчивости системы (0.1) достаточно, чтобы максимальное сингулярное число оператора монодромии было меньше единицы. Последнее выполняется, если все положительные собственные числа краевой задачи (3.1), (3.2) больше единицы. Собственные числа этой краевой задачи совпадают с собственными числами краевой задачи (4.1), (4.2) при значении параметра $\mu = 1$. При $\mu = 0$ собственные числа краевой задачи (4.1), (4.2) являются корнями уравнения (4.3). Поэтому при малых положительных значениях параметра μ все положительные собственные числа краевой задачи (4.1), (4.2) больше единицы. При возрастании параметра μ для появления у этой краевой задачи положительного собственного числа, меньшего единицы, необходимо, чтобы существовало конечное бифуркационное значение μ_*. В случае его существования, согласно утверждению 3, краевая задача (4.1), (4.2) имеет положительное собственное число, меньшее единицы, при $\mu > \mu_*$ и не имеет положительного собственного числа, меньшего единицы, при $0 < \mu < \mu_*$, если μ_* — наименьшее положительное бифуркационное значение параметра.

Пример 1. Рассматривается скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием и с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bx(t-\tau), \quad a \neq 0. \tag{4.20}$$

Для составления уравнения (4.3) требуется найти решение краевой задачи (4.4), (4.5), которая для исследуемого объекта имеет вид

$$\frac{d\Psi_1}{d\vartheta} = a\Psi_1, \quad \Psi_1(-\tau) = 1,$$

Имеем $\Psi_1(\vartheta) = \exp(a(\vartheta + \tau))$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$. Находим уравнение (4.3) для рассматриваемого примера:

$$z^2\exp(2a\tau) - 1 = 0.$$

При $a < 0$ выполняется требование теоремы 2, чтобы все положительные корни уравнения (4.3) были больше единицы. Запишем краевую задачу (4.1), (4.2) при $\mu \neq 0$ для рассматриваемого примера:

$$\frac{dx}{d\vartheta} = ax + \lambda b^2 y, \quad \frac{dx}{d\vartheta} = -\lambda x - ay, \quad \lambda = \mu z, \tag{4.21}$$

$$x(-\tau) = zy(-\tau), \quad y(0) = zx(0). \tag{4.22}$$

Решения системы (4.21) определяются формулами

$$x = (a+\rho)\exp(\rho\vartheta)D_1 + (a-\rho)\exp(-\rho\vartheta)D_2, \quad y = -\lambda\big(\exp(\rho\vartheta)D_1 + \exp(-\rho\vartheta)D_2\big),$$

где $\rho = \left(a^2 - \lambda^2 b^2\right)^{1/2}$. Учитывая краевые условия (4.22), находим характеристическое уравнение

$$\left(a^2 - \lambda^2 b^2\right)^{1/2} = (\mu + a)z^2.$$

При $z = 1$ из последнего уравнения найдем наименьшее положительное бифуркационное значение параметра $\mu_* = -2a/\left(1 + b^2\right)$. По теореме 2 имеем следующее достаточное условие асимптотической устойчивости уравнения (4.20):

$$b^2 + 2a + 1 < 0.$$

Поступила 19.10.2006

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и с запаздыванием времени // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, № 3. С. 450–458.
4. **Lilo J.C.** First order periodic differential difference equations // J. Math. Anal. Appl. 1979. Vol. 70, no. 2. P. 389–398.
5. **Kulenovic M.R.S., Ladas G., Meimaridou A.** Stability of solutions of linear delay differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 100, no. 3. P. 433–441.
6. **Башкиров А.И.** Признак экспоненциальной устойчивости уравнения с последействием и с периодическими параметрами // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1994–1997.
7. **Малыгина В.В.** Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 10. С. 1716–1723.
8. **Азбелев Н.В., Симонов П.М.** Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Пермский ун-т. 2001.
9. **Долгий Ю.Ф.** Устойчивость периодических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1994. 32 с.
10. **Долгий Ю.Ф., Шиманов С.Н.** Существование зоны устойчивости для одного уравнения с запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: УрГУ, 1988. С. 11–18.
11. **Гасилов Г.Л.** О характеристическом уравнении системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1972, № 4 (119). С. 60–66.
12. **Зверкин А.М.** К теории дифференциально-разностных уравнений с запаздываниями, соизмеримыми с периодом коэффициентов // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 9. С. 1481–1492.
13. **Долгий Ю.Ф.** Об устойчивости одной периодической системы с запаздыванием // Краевые задачи. Пермь: Пермский политех. ин-т, 1989. С. 16–21.
14. **Долгий Ю.Ф., Николаев С.Г.** Об устойчивости периодической системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 10. С. 1330–1336.
15. **Долгий Ю.Ф.** Использование самосопряженных краевых задач при исследовании устойчивости периодических систем с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2006. Т. 12, № 2. С. 78–87.
16. **Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
17. **Weyl H.** Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation // Proc. Acad. Sci. USU. 1949. Vol. 35. P. 408–411.
18. **Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
19. **Ахиезер Н.И., Глазман И.М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
20. **Долгий Ю.Ф., Путилова Е.Н.** Продолжение назад решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием как некорректная задача // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 8. С. 1317–1323.
21. **Якубович В.А., Старжинский В.М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 517.95

КОНСТРУКЦИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С ЗАДАННОЙ АСИМПТОТИКОЙ[1]

С. В. Захаров

Описывается конструкция решений уравнения Бюргерса и уравнения теплопроводности на плоскости независимых переменных по заданной асимптотике на минус-бесконечности по времени. Применение конструкции демонстрируется на примерах асимптотических рядов по полуцелым степеням времени.

1. Идея

Применение метода согласования к построению асимптотики по малому параметру решения задачи Коши для параболического уравнения с начальными данными достаточно общего вида приводит к следующей задаче. Требуется доказать существование и найти асимптотику при $|x|+|t|\to\infty$ решения уравнения

$$u_t + uu_x = u_{xx}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

с условием

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,t), \quad t\to-\infty, \tag{1.2}$$

где формальный ряд в правой части — это некоторое асимптотическое решение уравнения (1.1). Такая задача возникала в [1, гл. VI, §4] и [2]. Очевидно, что решение $u(x,t)$ не всегда может быть определено во всей плоскости независимых переменных.

С помощью преобразования Коула — Хопфа

$$u(x,t) = -\frac{2}{\Psi(x,t)}\cdot\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} \tag{1.3}$$

перейдем к задаче для уравнения теплопроводности

$$\Psi_t = \Psi_{xx}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2, \tag{1.4}$$

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n(x,t), \quad t\to-\infty. \tag{1.5}$$

Будем предполагать, что члены формального ряда (1.5) аналитически продолжаются на мнимую ось по переменной x таким образом, что комплекснозначные функции $\Psi_n(-ix,t)$ вещественной переменной x растут не быстрее полиномов при $x\to\infty$. Тогда для каждого $n\geqslant 0$ определено распределение $K^t_{x\to s}\Psi_n(x,t)$, которое задается следующим преобразованием:

$$K^t_{x\to s}\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}e^{-ts^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixs}\Psi(-ix,t)dx, \tag{1.6}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 05-01-01008) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН.

где интеграл понимается как преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{S}'$ распределений умеренного роста ($\mathcal{S}$ — пространство Шварца [3]).

Предположим, что в слабой топологии пространства $\mathcal{S}'$ существуют пределы

$$\varkappa_n(s) = \lim_{t\to-\infty} K^t_{x\to s}\Psi_n(x,t), \qquad n \geqslant 0,$$

$$J = \sum_{n=0}^{\infty}\varkappa_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\varkappa_n. \tag{1.7}$$

Если J — вещественное распределение, "быстро стремящееся к нулю" на бесконечности, то можно определить вещественное решение задачи (1.4)–(1.5), действуя этим распределением на фурье-образ функции Грина уравнения теплопроводности. Дадим строгую формулировку этого утверждения[2].

Теорема 1. *Пусть* $J \in \mathcal{S}'$ *и выполнены следующие условия*:

(a) *распределение* J *представимо в виде суммы*:

$$J = J_{\text{sing}} + J_{\text{reg}},$$

где J_{sing} *— распределение с компактным носителем, а* J_{reg} *—* C^∞*-гладкая функция, которая при всех* $s \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет оценке*

$$|J_{\text{reg}}(s)| \leqslant M\exp(-|s|^{2+\rho}), \qquad M>0, \quad \rho>0; \tag{1.8}$$

(b) $\operatorname{Im}\langle J(s), h(s)\rangle = 0$ *для всех* $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *таких, что* $\operatorname{Im} h(s) \equiv 0$. *Тогда при всех* $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ *формула*

$$\Psi(x,t) = \langle J(s), \exp(ts^2+xs)\rangle \equiv \langle J_{\text{sing}}(s), \exp(ts^2+xs)\rangle + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_{\text{reg}}(s)\exp(ts^2+xs)ds \tag{1.9}$$

определяет вещественное C^∞*-гладкое решение уравнения* (1.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Гладкость первого слагаемого следует из непрерывности J_{sing}, а гладкость второго — из оценки (1.8) и теоремы о дифференцировании интеграла с параметром. Из этих же условий вытекает, что функция Ψ определена при всех $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ и является решением уравнения (1.4).

Предыдущую формулу легко привести к следующему виду:

$$\Psi(x,t) = \langle J(s), \chi_N(s)\exp(ts^2+xs)\rangle + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_{\text{reg}}(s)(1-\chi_N(s))\exp(ts^2+xs)ds,$$

где χ_N — вещественная финитная функция и $\chi_N(s) = 1$ при $s \in [-N,N] \supset \operatorname{supp} J_{\text{sing}}$. Первое слагаемое вещественное по условию (b), а второе стремится к нулю при $N \to \infty$. Отсюда вытекает вещественнозначность функции Ψ.

Теорема доказана.

Если распределение, определяемое формулой (1.7), удовлетворяет условиям теоремы 1, то в качестве решения задачи (1.1), (1.2) возьмем функцию, определяемую формулами (1.3), (1.9). Разумеется, при этом должно выполняться условие

$$\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}^2 \quad \Psi(x,t) \neq 0.$$

Следует отметить, что в каждом конкретном случае необходимо отдельно доказывать, что для полученного решения действительно справедливо разложение (1.2).

Ниже на примерах показано, что предложенная конструкция действительно дает решения, разлагающиеся в заданные асимптотические ряды.

[2]Обозначение $J(s)$ указывает, что распределение J действует на функции переменной s.

2. Примеры

Исследуем действие преобразования $K^t_{x\to s}$ на асимптотические ряды (1.5) специального вида

$$\Psi = \sum_{n=n_0}^{\infty} |t|^{-n/2} h_n(\theta), \qquad \theta = \frac{x}{2\sqrt{-t}}. \tag{2.1}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1.4), для коэффициентов $h_n(\theta)$ получаем

$$h_n'' - 2\theta h_n' - 2nh_n = 0.$$

Хорошо известно (см., например, [4]), что решения этого уравнения (за исключением случая неположительных n) определяются через вырожденную гипергеометрическую функцию. Однако здесь более удобно выбрать решения, как в [5]:

$$H_n^-(\theta) = H_{-n}(\theta), \qquad n \leqslant 0; \tag{2.2}$$

$$H_n^+(\theta) = H_{-n}(\theta) \int\limits_0^\theta \exp(z^2)\,dz - S_{-n-1}(\theta)\exp(\theta^2), \qquad n \leqslant 0; \tag{2.3}$$

$$H_n^-(\theta) = \widetilde{H}_{n-1}(\theta)\exp(\theta^2) \int\limits_{-\infty}^\theta \exp(-z^2)\,dz + \widetilde{S}_{n-2}(\theta), \qquad n \geqslant 1; \tag{2.4}$$

$$H_n^+(\theta) = \sqrt{\pi}\widetilde{H}_{n-1}(\theta)\exp(\theta^2), \qquad n \geqslant 1; \tag{2.5}$$

где $H_n(\theta)$ и $\widetilde{H}_n(\theta)$ — полиномы Эрмита (вещественного и мнимого аргументов, соответственно)

$$H_n(\theta) = (-1)^n \exp(\theta^2)\frac{d^n\exp(-\theta^2)}{d\theta^n}, \qquad \widetilde{H}_n(\theta) = \exp(-\theta^2)\frac{d^n\exp(\theta^2)}{d\theta^n},$$

а полиномы $S_n(\theta)$ определяются следующим образом:

$$S_{-1}(\theta) = 0, \qquad S_n(\theta) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m H_{n-m}^{(m)}(\theta), \quad n \geqslant 0.$$

Для $\widetilde{S}_n(\theta)$ формулы те же, если вместо H подставить $\widetilde{H}$. Ясно, что функции (2.2)–(2.5) аналитически продолжаются на мнимую ось таким образом, что комплекснозначные функции $H_n^\pm(-i\theta)$ вещественной переменной θ растут не быстрее полиномов при $\theta \to \infty$.

Если существует предел $J(s) = \lim\limits_{t\to-\infty} K^t_{x\to s}\Psi(x,t)$, определенный по формуле (1.7), то будем писать $\Psi(x,t) \mapsto J(s)$. Из формулы (1.6) и элементарных свойств распределений вытекают следующие соотношения:

$$|t|^{-n/2}H_n^+(\theta) \mapsto (2s)^{n-1}, \qquad |t|^{-n/2}H_n^-(\theta) \mapsto (2s)^{n-1}\Theta(s), \quad n \geqslant 1; \tag{2.6}$$

$$H_0^+(\theta) \mapsto \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\mathrm{P}\frac{1}{s}, \qquad H_0^-(\theta) \mapsto \delta(s); \tag{2.7}$$

$$|t|^{1/2}H_{-1}^-(\theta) \mapsto -\delta'(s). \tag{2.8}$$

Через Θ, δ и P обозначены функция Хевисайда, дельта-функция Дирака и главное значение в смысле Коши, соответственно. Распределения

$$K^t_{x\to s}\left[|t|^{1/2}H_{-1}^+(\theta)\right] \quad \text{и} \quad K^t_{x\to s}\left[|t|^{-n/2}H_n^\pm(\theta)\right]$$

при $n \leqslant -2$ не имеют пределов при $t \to -\infty$.

В качестве примера построим главный член асимптотики в задаче о переходе слабого разрыва в сильный [2] в окрестности точки перехода. Ищем решение уравнения (1.1) с условием

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} |t|^{(2-3k)/2} R_{k,0,0}(\theta), \qquad t \to -\infty, \tag{2.9}$$

где

$$R_{1,0,0}(\theta) = (\ln \Lambda(\theta))',$$

$$R_{2,0,0}(\theta) = -b\Big[4\theta^2 + 2 + \frac{8\theta^3}{3\sqrt{\pi}}\Lambda(\theta) - \frac{8(\theta^2+1)}{3\pi}\Lambda^2(\theta)\Big] = \frac{b}{3\pi}\left[(H_4^-(\theta) - H_4^+(\theta))\Lambda(\theta)\right]',$$

$$\Lambda(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\exp(-\theta^2)}{\int\limits_{\theta}^{\infty} \exp(-y^2)\,dy}.$$

Остальные функции

$$R_{k,0,0}(\theta) = \gamma_k \left[(H_{3k-2}^-(\theta) - H_{3k-2}^+(\theta))\Lambda(\theta)\right]', \qquad k \geqslant 3,$$

единственным образом находятся из системы уравнений [2, лемма 1]

$$T_{-3k+2} R_{k,0,0} = 2\sum_{m=1}^{k-2} R_{k-m,0,0} {R'}_{m+1,0,0},$$

где

$$T_n R \equiv R'' - 2(\theta + R_{1,0,0}(\theta))R' - 2(R'_{1,0,0}(\theta) - n)R.$$

С помощью (1.3) и (2.9) находим формальное выражение

$$\Psi(x,t) = \exp\Big\{-\sum_{p=0}^{\infty} |t|^{-3p/2} \int\limits_0^{\theta} R_{p+1,0,0}(\theta_1)d\theta_1\Big\}.$$

Вычисления, основанные на формуле

$$\widetilde{H}_n(\theta)\,\widetilde{H}_m(\theta) = \sum_{r=0}^{m} \frac{(-2)^r m!\,n!}{r!\,(m-r)!\,(n-r)!}\,\widetilde{H}_{n+m-2r}(\theta), \qquad n \geqslant m,$$

дают асимптотический ряд

$$\Psi(x,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b^p}{p!\,6^p} |t|^{-(3p+1)/2} \Big[H_{3p+1}^+(\theta) - H_{3p+1}^-(\theta)\Big]. \tag{2.10}$$

Применяя преобразование $K_{x\to s}^t$ к p-му члену ряда (2.10) и переходя к пределу при $t \to -\infty$, согласно (1.7) и (2.6) получаем распределение

$$J(s) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\Big(\frac{4b}{3}\Big)^p \Big[1 - \Theta(s)\Big] s^{3p} = \Theta(-s)\exp\Big(\frac{4b}{3}s^3\Big),$$

очевидно, удовлетворяющее условиям теоремы 1. Подставляя $J(s)$ в (1.9), получаем следующее решение уравнения (1.4) с условием (2.10):

$$\Psi(x,t) = \langle J(s), \exp(ts^2 + xs)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\Big(\frac{4b}{3}s^3 + ts^2 + xs\Big)\,ds. \tag{2.11}$$

Согласно [2, теорема 1], для функции $u(x,t)$, заданной выражениями (1.3) и (2.11), справедливо разложение (2.9).

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим линейное уравнение

$$v_t + (uv)_x - v_{xx} = 0, \tag{2.12}$$

в котором u — решение уравнения (1.1), заданное выражениями (1.3) и (2.11), и условие

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} |t|^{(3-3k)/2} R_{k,0,1}(\theta), \qquad t \to -\infty, \tag{2.13}$$

где

$$R_{1,0,1}(\theta) = -\Lambda'(\theta);$$

остальные функции $R_{k,0,1}(\theta)$ (при $k \geqslant 2$) единственным образом находятся из системы уравнений [2, лемма 1]

$$T_{-3k+3} R_{k,0,1} = 2 \sum_{m=1}^{k-1} R_{k-m,0,1} {R'}_{m+1,0,0}.$$

Путем замены

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\Omega(x,t)}{\Psi(x,t)}\right], \tag{2.14}$$

где Ψ — функция (2.11), перейдем от уравнения (2.12) к однородному уравнению теплопроводности

$$\Omega_t - \Omega_{xx} = 0. \tag{2.15}$$

С помощью распределения $J_1(s) = -\sqrt{\pi}\,\delta(s)$ получаем

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\langle J_1(s), \exp(ts^2 + xs)\rangle}{\Psi(x,t)}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{[\Psi(x,t)]^2} \cdot \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}. \tag{2.16}$$

Согласно [2, теорема 2], для функции $v(x,t)$, заданной выражениями (2.11) и (2.16), справедливо разложение (2.13).

В задаче Коши с градиентной катастрофой, порождаемой гладкой начальной функцией [1, гл. VI], требуется найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию

$$u(x,t) = H(x,t) + \sum_{l=1}^{\infty} h_{1-4l}(x,t), \qquad t \to -\infty,$$

где $H(x,t)$ — функция сборки Уитни, $H^3 - tH + x = 0$, $h_l(x,t)$ — однородные функции степени l относительно $H(x,t)$, $\sqrt{-t}$ и $\sqrt{3[H(x,t)]^2 - t}$, являющиеся полиномами от $H(x,t)$, t и $(3[H(x,t)]^2 - t)^{-1}$. Хотя этот ряд и не имеет вида (2.1), путем замены $x = 2\theta\sqrt{-t}$ он может быть приведен к такому виду. Например,

$$H(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta^{2n+1} |t|^{-2n-1/2}, \qquad t \to -\infty,$$

где $a_0 = -2$, $a_n = -\sum\limits_{n_1+n_2+n_3=n-1} a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3}$.

В этом случае

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n n!} |t|^{-2n-1/2} H^{+}_{4n+1}(\theta).$$

По формуле (2.6) получаем $J_2(s) = \exp(-2s^4)$ и

$$\Psi(x,t) = \langle J_2(s), \exp(ts^2 + xs)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-2s^4 + ts^2 + xs)\,ds$$

(вещественный аналог функции Пирси).

В заключение приведем простой пример распределения с компактным носителем

$$J_3(s) = \delta(s) + \delta(s + v_+) + \delta(s + v_-),$$

которое порождает главный член асимптотики

$$u(x,t) = -2\frac{\langle sJ_3(s), \exp(ts^2 + xs)\rangle}{\langle J_3(s), \exp(ts^2 + xs)\rangle} = \frac{2v_+ \exp(tv_+^2 - xv_+) + 2v_- \exp(tv_-^2 - xv_-)}{1 + \exp(tv_+^2 - xv_+) + \exp(tv_-^2 - xv_-)}$$

в окрестности точки слияния двух волн [6], имеющих скорости v_+ и v_-.

Поступила 14.11.2006

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
2. **Захаров С. В.** Асимптотическое решение одной задачи Коши в окрестности градиентной катастрофы // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 6. С. 47–62.
3. **Хёрмандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1: Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
4. **Лебедев Н.Н.** Специальные функции и их приложения. М.: ГИФМЛ, 1963.
5. **Захаров С. В., Ильин А. М.** От слабого разрыва к градиентной катастрофе // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 3–18.
6. **Нестерова Т.Н.** Об асимптотике решения уравнения Бюргерса в окрестности слияния двух линий разрыва // Дифференциальные уравнения с малым параметром. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. С. 66–86.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 512.54

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ РАЗРЕШИМЫХ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ[1]

В. И. Зенков

Автор продолжает изучение пересечений холловых подгрупп в конечных группах. Ранее им было доказано, что в случае, когда холлова подгруппа является силовской, найдется три сопряженных с ней подгруппы, пересечение которых совпадает с максимальной нормальной примарной подгруппой. Для холловых подгрупп в разрешимых группах справедливо аналогичное утверждение. Целью настоящей работы является построение примеров (неразрешимой) группы, в которой пересечение любых четырех подгрупп, сопряженных с некоторой холловой подгруппой, неединично.

Введение

В работе [1] Пассман доказал, что в разрешимой конечной группе G для любой силовской p-подгруппы P найдутся элементы x и y такие, что $P\bigcap P^x\bigcap P^y = O_p(G)$. Автором [2] было доказано, что для любой π-разрешимой конечной группы G с нильпотентной холловой π-подгруппой H найдутся элементы x и y из G такие, что $H\bigcap H^x\bigcap H^y = O_\pi(G)$. Недавно Е.П. Вдовин [3] анонсировал, что утверждение $H\bigcap H^x\bigcap H^y = O_\pi(G)$ справедливо для разрешимой группы H. Эти результаты приводят к следующему вопросу: справедливо ли равенство $H\bigcap H^x\bigcap H^y = O_\pi(G)$ для произвольной конечной группы G и произвольной холловой подгруппы H из нее? Автором [4] была подтверждена справедливость этого равенства в случае, когда холлова подгруппа H является силовской. Однако в случае, когда холлова подгруппа H не является силовской, равенство $H\bigcap H^x\bigcap H^y = O_\pi(G)$ нарушается. Соответствующим примером является группа $G\simeq S_5$, а в качестве холловой подгруппы H выбирается подгруппа, изоморфная S_4. Действительно, стабилизатор точки в естественном представлении группы подстановок S_5 изоморфен S_4, поэтому пересечение $H\bigcap H^x\bigcap H^y$ содержит подгруппу порядка 2, изоморфную стабилизатору трех точек в рассматриваемом представлении. Значит, пересечение любых трех холловых подгрупп из G, сопряженных с H, неединично. Если же мы рассмотрим пересечение $H\bigcap H^x\bigcap H^y\bigcap H^z$ любых четырех различных сопряженных с H подгрупп, то, поскольку стабилизатор четырех точек в S_5 тривиален, имеем $H\bigcap H^x\bigcap H^y\bigcap H^z = 1$. В данной работе мы построим пример конечной группы G и холловой π-подгруппы H из G такой, что $H\bigcap H^x\bigcap H^y\bigcap H^z \neq O_\pi(G)$ для любых элементов x, y и z из G. В то же время в G найдутся элементы x_1, y_1, z_1 и t_1 такие, что $H\bigcap H^{x_1}\bigcap H^{y_1}\bigcap H^{z_1}\bigcap H^{t_1} = 1$. Подробное изучение этого примера, а также рассмотрение многих сопутствующих результатов дают нам некоторые основания надеяться, что справедлива следующая

Гипотеза. Пусть G — конечная группа, π — некоторое подмножество простых чисел и H — холлова π-подгруппа из G. Тогда в G найдутся элементы x, y, z и t такие, что $H\bigcap H^x\bigcap H^y\bigcap H^z\bigcap H^t = O_\pi(G)$.

В работе доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная группа, изоморфная подстановочному сплетению $S_5 \wr S_4$, H — холлова $\{2,3\}$-подгруппа из G. Тогда пересечение любых четырех сопряженных с H подгрупп неединично и найдется пять сопряженных с H подгрупп, пересечение которых единично.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 07-01-00148).

1. Свойства группы S_5

Для доказательства нам понадобится хорошо известное свойство группы S_5: стабилизатор точки в S_5 изоморфен S_4 и действует четырежды транзитивно на упорядоченные наборы из четырех точек. Заметим, что S_4 — холлова $\{2,3\}$-подгруппа из S_5. Далее, стабилизатор любых трех точек в S_5 изоморфен S_2. Это означает, что любые три сопряженные с S_4 подгруппы пересекаются в S_5 по подгруппе порядка 2. Так как поточечный стабилизатор четырех точек в S_5 тривиален, то любые четыре различные холловы $\{2,3\}$-подгруппы в S_5 имеют единичное пересечение. Если мы зафиксируем одну из пяти холловых $\{2,3\}$-подгрупп из S_5, то из оставшихся четырех сопряженных с фиксированной холловой $\{2,3\}$-подгруппой мы можем получить $C_4^3 \cdot 3! = 4!$ упорядоченных троек таких подгрупп. Во введении было замечено, что любые четыре холловы $\{2,3\}$-подгруппы из S_5 имеют единичное пересечение. Следовательно, фиксированная подгруппа S_4 действует транзитивно на множестве упорядоченных троек холловых подгрупп, которые пересекаются с ней по единице.

2. Построение примера

Для доказательства теоремы понадобится следующая

Лемма. *Пусть $G \simeq S_5 \wr S_2$ и H — холлова $\{2,3\}$-подгруппа из G. Тогда пересечение любых четырех холловых $\{2,3\}$-подгрупп из G неединично.*

Доказательство. Представим группу G в виде $(G_1 \times G_1^t) \leftthreetimes \langle t\rangle$, где $G_1 \simeq S_5$, а t — инволюция, переставляющая подгруппы G_1 и G_1^t между собой. Обозначим через H_1 холлову $\{2,3\}$-подгруппу из G_1, изоморфную S_4. Тогда подгруппа $H = (H_1 \times H_1^t) \leftthreetimes \langle t\rangle$ — холлова $\{2,3\}$-подгруппа из G. Из действия t на базе $G_1 \times G_1^t$ сплетения видно, что t централизует диагональ в $G_1 \times G_1^t$, изоморфную S_5. Следовательно, инволюция t лежит по крайней мере в пяти холловых $\{2,3\}$-подгруппах из G вида $(H_i \times H_i^t) \leftthreetimes \langle t\rangle$, сопряженных с H, в частности, есть тройка $(H_2 \times H_2^t) \leftthreetimes \langle t\rangle$, $(H_3 \times H_3^t) \leftthreetimes \langle t\rangle$, $(H_4 \times H_4^t) \leftthreetimes \langle t\rangle$ подгрупп, пересекающихся с H по подгруппе $\langle t\rangle$, которые в базе сплетения дают единичное пересечение, т.е. $(H_1 \times H_1^t) \bigcap (H_2 \times H_2^t) \bigcap (H_3 \times H_3^t) \bigcap (H_4 \times H_4^t) = 1$. Далее, рассмотрим произвольное пересечение $D = H \bigcap H^x \bigcap H^y \bigcap H^z$ четырех холловых $\{2,3\}$-подгрупп из G.

Допустим, что $D = 1$. Тогда $D_0 = (G_1 \times G_1^t) \bigcap D = 1$. Так как подгруппа $G_1 \times G_1^t$ нормальна в G, то $(G_1 \times G_1^t) \bigcap H$, $(G_1 \times G_1^t) \bigcap H^x$, $(G_1 \times G_1^t) \bigcap H^y$ и $(G_1 \times G_1^t) \bigcap H^z$ — холловы $\{2,3\}$-подгруппы из $G_1 \times G_1^t$. Значит, при фиксированной холловой $\{2,3\}$-подгруппе $H_1 \times H_1^t$ из базы сплетения мы имеем тройку сопряженных с ней холловых $\{2,3\}$-подгрупп из $G_1 \times G_1^t$ с единичным пересечением. Выше мы заметили, что подгруппа H_1, а значит, и $H_1 \times H_1^t$ действует трижды транзитивно на множестве всех упорядоченных троек такого вида, не содержащих H_1, соответственно $H_1 \times H_1^t$. Следовательно, наша тройка с единичным пересечением сопряжена элементом h из $H_1 \times H_1^t$ с тройкой $H_2 \times H_2^t$, $H_3 \times H_3^t$, $H_4 \times H_4^t$. Но тройка $H_2 \times H_2^t$, $H_3 \times H_3^t$, $H_4 \times H_4^t$ вложена в тройку холловых подгрупп из G, которые пересекаются с H по подгруппе $\langle t\rangle$. Но тогда инволюция $t^{h^{-1}}$ лежит в H, и так как каждая холлова $\{2,3\}$-подгруппа из $G_1 \times G_1^t$ лежит в единственной холловой $\{2,3\}$-подгруппе из G, то инволюция $t^{h^{-1}}$ лежит в тройке сопряженных с $(H_2 \times H_2^t) \leftthreetimes \langle t\rangle$, $(H_3 \times H_3^t) \leftthreetimes \langle t\rangle$, $(H_4 \times H_4^t) \leftthreetimes \langle t\rangle$ подгрупп, пересечение которых в силу единственности совпадает с $H^x \bigcap H^y \bigcap H^z$; противоречие.

Лемма доказана.

Построенный пример показывает, что в произвольной конечной группе G меньше, чем пятью сопряженными разрешимыми холловыми π-подгруппами, пересечение которых равно $O_\pi(G)$, не обойтись. А так как в группе $S_5 \wr S_2$ ровно пять холловых $\{2,3\}$-подгрупп, то гипотеза для нее справедлива. Теорема служит иллюстрацией доказательства гипотезы в частном случае.

3. Доказательство теоремы

Заметим, что из леммы следует первое утверждение теоремы.

Действительно, поскольку рассматривается подстановочное сплетение, то группу G можно представить в виде $(G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4) \leftthreetimes G_5$, где $G_i \simeq S_5$ для $i = 1, \dots, 4$ и $G_5 \simeq S_4$. В подгруппе G_5 силовская 2-подгруппа G_6 может быть представлена как

$$\big(\langle(1,2)\rangle \times \langle(3,4)\rangle\big) \leftthreetimes \big\langle(1,3)(2,4)\big\rangle.$$

Тогда $(G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4) \leftthreetimes G_6 \simeq (S_5 \wr S_2) \wr S_2$. По лемме в группе $S_5 \wr S_2$ пересечение любых четырех холловых $\{2,3\}$-подгрупп неединично. Следовательно, в прямом произведении $(S_5 \wr S_2) \times (S_5 \wr S_2)$, которое является базой сплетения $(S_5 \wr S_2) \wr S_2$, пересечение любых четырех холловых $\{2,3\}$-подгрупп неединично. Значит, подгруппа $(H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_4) \leftthreetimes G_6$ пересекается с любыми сопряженными с ней посредством элементов x, y и z из $G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4) \leftthreetimes G_6$ подгруппами нетривиально. Так как $(H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_4) \leftthreetimes G_6 < (H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_4) \leftthreetimes G_5$, то $H \bigcap H^u \bigcap H^v \bigcap H^w \neq 1$ для любых элементов u, v и w из G.

Осталось доказать, что в G найдется пять холловых $\{2,3\}$-подгрупп с единичным пересечением. Для этого в подгруппе $G_1 \simeq S_5$ зафиксируем холлову $\{2,3\}$-подгруппу $H_1 \simeq S_4$. Тогда существует 4! упорядоченных наборов из оставшихся четырех сопряженных с H_1 подгрупп, для которых, очевидно, $H_1 \bigcap H_1^x \bigcap H_1^y \bigcap H_1^z \bigcap H_1^t = 1$. Но выше мы видели, что и $H_1 \bigcap H_1^x \bigcap H_1^y \bigcap H_1^z = 1$. Следовательно, на месте подгруппы H_1^t может находиться любая из подгрупп H_1^x, H_1^y или H_1^z и свойство единичности пересечения сохранится. Поэтому мы можем рассмотреть для данной упорядоченной тройки H_1^x, H_1^y и H_1^z следующие упорядоченные четверки:

$$\begin{aligned}
&(H_1^x, \quad H_1^y, \quad H_1^z, \quad H_1^x),\\
&(H_1^x, \quad H_1^y, \quad H_1^z, \quad H_1^y),\\
&(H_1^x, \quad H_1^y, \quad H_1^z, \quad H_1^z).
\end{aligned}$$

Тогда эти четверки вместе с четверкой $(H_1^x, H_1^y, H_1^z, H_1^t)$ будут представителями четырех орбит для пересечений пяти холловых $\{2,3\}$-подгрупп из G_1 под действием H_1. Действительно, если под действием H_1 одна четверка переходит в другую, то это эквивалентно тому, что в группе S_5 поточечный стабилизатор четырех символов $(H_1, H_1^x, H_1^y, H_1^z)$ действует нетривиально. Противоречие.

Теперь в базе сплетения построим пять холловых $\{2,3\}$-подгрупп следующим образом. В подгруппе G_1 рассмотрим набор $H_1, H_1^{x_1}$, $H_1^{y_1}, H_1^{z_1}$, $H_1^{t_1}$. Под действием элементов из G_5 этот набор перейдет в соответствующий набор из G_i вида $H_i, H_i^{x_i}$, $H_i^{y_i}, H_i^{z_i}$, $H_i^{t_i}$, $i = 1,2,3,4$. В G_2 заменим $H_2^{t_2}$ на $H_2^{x_2}$, в G_3 заменим $H_3^{t_3}$ на $H_3^{y_3}$, в G_4 заменим $H_4^{t_4}$ на $H_4^{z_4}$.

Рассмотрим пять холловых $\{2,3\}$-подгрупп из базы сплетения: $F_1 = H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_4$, $F_2 = H_1^{x_1} \times H_2^{x_2} \times H_3^{x_3} \times H_4^{x_4}$, $F_3 = H_1^{y_1} \times H_2^{y_2} \times H_3^{y_3} \times H_4^{y_4}$, $F_4 = H_1^{z_1} \times H_2^{z_2} \times H_3^{z_3} \times H_4^{z_4}$, $F_5 = H_1 \times H_2^{x_2} \times H_3^{y_3} \times H_4^{z_4}$. Так как элементы из G_5 переставляют подгруппы G_i $(i = 1,2,3,4)$, то G_5 централизует диагональ базы $G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4$, изоморфную S_5. В частности, холлова $\{2,3\}$-подгруппа H из G, содержащая F_1, имеет вид $(H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_4) \leftthreetimes G_5$. Ясно, что есть еще четыре холловых $\{2,3\}$-подгруппы $T_1 = F_2 \leftthreetimes G_5$, $T_2 = F_3 \leftthreetimes G_5$, $T_3 = F_4 \leftthreetimes G_5$ и подгруппа T_4, содержащая F_5. Подгруппа T_4 существует, так как в базе сплетения ровно один класс холловых $\{2,3\}$-подгрупп. Допустим, что $D = H \bigcap T_1 \bigcap T_2 \bigcap T_3 \bigcap T_4 \neq 1$. Любой элемент из D имеет вид $d = gh$, где $g \in G_5$ и $h_1 \in H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_4$. Элемент d лежит в T_i, $i = 1,2,3,4$. Следовательно, элемент d нормализует $F_i = T_i \bigcap (G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4)$. Кроме того, по построению, элемент g нормализует F_i для $i = 1,2,3,4$. Поэтому элемент h нормализует F_i для $i = 1,2,3,4$. Значит, $h \in F_i$ для $i = 1,2,3,4$. Так как в $G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4$ пересечение любых четырех холловых $\{2,3\}$-подгрупп равно единице, то $h = 1$. Поэтому $d = g$. Без ограничения общности, в силу транзитивности S_4 можно считать, что элемент g действует нетривиально на G_1. Понятно, что элемент g лежит в $H \bigcap T_1 \bigcap T_2 \bigcap T_3$.

Покажем, что $g \notin T_4$. Действительно, элемент g переводит подгруппу G_1 в некоторую другую подгруппу G_2. Но тогда $H_1^g = H_2$, и если бы элемент $g \in T_4$, то $g \in N(T_4 \bigcap G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4) = N(F_5)$. Но тогда $H_1^g = H_2^{x_2}$, что невозможно, так как $(H_1^g)^{g^{-1}} = H_1$, а $(H_2^{x_2})^{g^{-1}} = H_1^{x_1}$ и $H_1 \neq H_1^{x_1}$. Противоречие.

Теорема доказана.

Поступила 3.05.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Passman D.S.** Groups with normal solvable Hall p-subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123. C. 99–111.
2. **Зенков В.И.** Структура пересечений нильпотентных π-подгрупп в π-разрешимых конечных группах // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 103–107.
3. **Vdovin E.P.** Regular orbits of solvable linear p'-groups // Sib. Electronic Math. Reports. 2007. Vol. 4. P. 345–360.
4. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундамент. и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1–92.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, В КОТОРЫХ НОРМАЛИЗАТОРЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПАР СИЛОВСКИХ 2-ПОДГРУПП ИМЕЮТ НЕЧЕТНЫЕ ИНДЕКСЫ[1]

В. И. Зенков, А. С. Кондратьев, В. М. Левчук

Описаны все конечные полупростые группы, в которых нормализаторы пересечений пар силовских 2-подгрупп имеют нечетные индексы, и тем самым в основном решен вопрос 5.14 (в) из “Коуровской тетради”.

Введение

Отвечая на вопрос В.Д. Мазурова и С.А. Сыскина, В.В. Кабанов, А.А. Махнев и А.И. Старостин [1] доказали, что если в конечной группе пересечение двух силовских 2-подгрупп нормально по крайней мере в одной из них, то оно нормально и в обеих этих подгруппах, откуда вывели описание строения конечных групп с этим свойством. Они же поставили в “Коуровской тетради” [2] вопрос 5.14 (в) об описании конечных групп, в которых нормализатор пересечения любых двух силовских 2-подгрупп имеет нечетный индекс. Назовем для краткости такие группы ПН-группами. Разрешимые ПН-группы допускают удовлетворительное описание [1]. В [3–5] классифицированы простые ПН-группы лиева типа характеристики 2. В данной работе авторы описывают все полупростые (т. е. с единичным разрешимым радикалом) ПН-группы и тем самым в основном решают вопрос 5.14 (в). Доказана следующая

Теорема. *Неединичная группа G является полупростой ПН-группой тогда и только тогда, когда*

$$K_1' \times ... \times K_n' \leq O^{2'}(G) \leq K_1 \times ... \times K_n,$$

где каждая из групп K_1, ..., K_n изоморфна одной из следующих групп: $L_2(q)$ для $3 < q \not\equiv \pm 1 \pmod{16}$, $L_3(2^m)$, $U_3(2^m)$ с $m > 1$, $PSp_4(2^m)$ с $m > 1$, ${}^2B_2(q)$ с $q > 2$, ${}^2G_2(q)$ с $q > 3$, $U_3(3)$, $G_2(3)$, A_7, J_1, S_7, расширение группы $L_2(q^2)$ с $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ посредством группы полевых автоморфизмов порядка 2.

З а м е ч а н и е. Свойство ПН переносится на нормальные подгруппы и прямые произведения двух групп, но в общем случае расширение (даже расщепляемое) ПН-группы посредством ПН-группы не обязательно является ПН-группой. Например, подстановочное сплетение $S_3 \wr S_6$ не является ПН-группой, хотя база и активная группа этого сплетения являются ПН-группами. Интересно также, что $U_3(3) < G_2(2) < G_2(3) < \mathrm{Aut}(G_2(3))$, но $U_3(3)$ и $G_2(3)$ являются ПН-группами, а $G_2(2)$ и $\mathrm{Aut}(G_2(3))$ — нет.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [6–8]. Если A и B — группы и n — натуральное число, то через $A.B$ (соответственно $A : B$ или $A \leftthreetimes B$) обозначается расширение (соответственно расщепляемое расширение) группы A посредством

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 04-01-00463, 06-01-00824) и РФФИ-ГФЕН Китая (проект 05-01-39000).

группы B, через $A \circ B$ — некоторое их нетривиальное центральное произведение, через A^n — прямое произведение n изоморфных A групп. Если n — натуральное число и r — простое число, то n и r^n будут обозначать также соответственно циклическую группу порядка n и элементарную абелеву r-группу порядка r^n. Если G — конечная группа, то через $E(G)$ обозначается подгруппа, порожденная всеми квазипростыми субнормальными подгрупами группы G, а через $F^*(G)$ — группа $F(G)E(G)$.

Пусть q — натуральная степень простого числа, n —натуральное число и $\epsilon = \pm$. Тогда для краткости обозначим через $GL^\epsilon_n(q)$, $PGL^\epsilon_n(q)$, $SL^\epsilon_n(q)$, $L^\epsilon_n(q)$ и $E^\epsilon_6(q)$ соответственно группы $GL_n(q)$, $PGL_n(q)$, $SL_n(q)$, $PSL_n(q)$ и $E_6(q)$ при $\epsilon = +$ и группы $GU_n(q)$, $PGU_n(q)$, $SU_n(q)$, $PSU_n(q)$ и ${}^2E_6(q)$ при $\epsilon = -$.

Мы часто будем использовать следующие четыре результата.

Лемма 1.1 ([9], лемма 3.2). *Пусть G — конечная группа и M — p-локальная подгруппа в G с условием $M = N_G(O_p(M))$. Если M имеет силовские p-подгруппы Q_1 и Q_2 такие, что $Q_1 \bigcap Q_2 = O_p(M)$, то G имеет силовские p-подгруппы P_1 и P_2 такие, что $P_1 \bigcap P_2 = O_p(M)$.*

Лемма 1.2 ([10]). *В любой конечной неабелевой простой группе для любого простого числа p найдется пара силовских p-подгрупп с единичным пересечением.*

Лемма 1.3. *Свойство существования в конечной группе пары силовских p-подгрупп с единичным пересечением переносится на нормальные подгруппы и на прямое произведение двух групп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Лемма 1.4. *Если G — одна из групп S_n при $4 \le n \ne 8$, $\mathrm{Aut}(G_2(4))$ и $\mathrm{Aut}(Fi_{22})$, то в G найдется пара силовских 2-подгрупп, пересекающихся по $O_2(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $G = S_n$ при $n \le 4$ утверждение леммы очевидно. См. также в [9] лемму 3.27 для $G = S_n$ при $5 \le n \ne 8$, теорему 5.1 для $G = \mathrm{Aut}(G_2(4))$ и лемму 3.31 для $G = \mathrm{Aut}(Fi_{22})$.

Нам понадобится также следующая лемма, имеющая самостоятельный интерес.

Лемма 1.5. *Пусть L — одна из классических групп $SL^\epsilon_n(q)$, $Sp_n(q)$ или $\Omega^+_{2n}(q)$, где $n = 2^m \ge 2$ и q нечетно. Предположим, что H — конечная группа с нормальной подгрупой L и группа $H/Z(L)$ изоморфна $PGL^\epsilon_n(q)$, $PSp_n(q)$ или $PGO^+_{2n}(q)$ соответственно. Пусть $L \le G \le H$ и S — силовская 2-подгруппа из G. Тогда $Z(S)$ — циклическая группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем индукцию по n.

Так как $SL^\epsilon_2(q) \cong Sp_2(q) \cong SL_2(q)$, силовские 2-подгруппы из $SL_2(q)$ и $PGL_2(q)$ изоморфны соответственно $Q_{(q^2-1)_2}$ и $D_{(q^2-1)_2}$, а $\Omega^+_4(q) \cong SL_2(q) \circ SL_2(q)$, то утверждение леммы для $n = 2$ верно.

Допустим, что $n > 2$ и утверждение леммы верно для $n/2$. Покажем, что оно верно и для n. Предположим противное. Ввиду [8, 4.2.9, 4.2.10, 4.2.11] в L есть 2-локальная подгруппа M нечетного индекса такая, что M имеет нормальную подгруппу $M_1 \times M_2$, $N_L(M_1) = N_L(M_2)$ — подгруппа индекса 2 в L, причем элемент из $L \setminus N_L(M_1)$ переставляет подгруппы M_1 и M_2, $C_L(M_1) = M_2 \times Z$, где $Z \cong (q - \epsilon 1)$ при $G = SL^\epsilon_n(q)$ и $Z \cong 2$ в остальных случаях, подгруппа M_1 изоморфна $SL^\epsilon_{n/2}(q)$, $Sp_{n/2}(q)$ или $\Omega^+_n(q)$ и группа $N_C(L_1)/C_C(L_1)$ изоморфна $PGL^\epsilon_{n/2}(q)$, $PSp_{n/2}(q)$ или $PGO^+_n(q)$ соответственно. Можно считать, что $S \cap M$ — силовская 2-подгруппа в L. По предположению индукции $Z(S \cap L)$ — циклическая группа. В частности, L не изоморфна $Sp_n(q)$.

Так как G — контрпример к лемме, то $L < G = LS$ и $Z(S) \setminus L$ содержит инволюцию t. Можно считать, что $G = L\langle t \rangle$. Так как M — 2-локальная подгруппа в L, то t нормализует M. Поэтому t нормализует подгруппу M_1 и, следовательно, подгруппу $N_L(M_1)$.

Предположим, что t индуцирует на M_1 внешний автоморфизм. Из [11, (9-1)] и строения группы $N_L(M_1)/C_L(M_1)$ следует, что t индуцирует на M_1 полевой, графово-полевой или графовый инволютивный автоморфизм. В первом случае $q = q_0^2$ и ввиду [11, (9-1)] централизатор $C_{M_1}(t)$ изоморфен $SL^{\epsilon}_{n/2}(q_0)$ или $\Omega^+_n(q_0)$ соответственно, а это противоречит легко проверяемому неравенству $|C_{M_1}(t)|_2 < |M_1|_2$. Поэтому t индуцирует на M_1 графово-полевой или графовый автоморфизм. В частности, L не изоморфна $SU_n(q)$. Если $L \cong \Omega^+_{2n}(q)$, то ввиду [12, 4.33] инволюция t действует нетривиально на четверной группе $N_L(M_1)/C_L(M_1)$, что противоречит включению $t \in Z(S)$. Таким образом, $L \cong SL_n(q)$. Если t индуцирует на M_1 графово-полевой автоморфизм, то по [11, (9-1)] централизатор $C_{M_1}(t)$ изоморфен $SU_{n/2}(q)$, и опять получаем $|C_{M_1}(t)|_2 < |M_1|_2$, что невозможно. Поэтому t индуцирует на M_1 графовый автоморфизм. Ввиду [12, 4.27, 4.28] централизатор $C_{M_1}(t)$ изоморфен одной из групп $Sp_{n/2}(q)$, $SO^+_{n/2}(q)$ или $SO^-_{n/2}(q)$, и опять получаем $|C_{M_1}(t)|_2 < |M_1|_2$, что невозможно.

Итак, t индуцирует на M_1 внутренний автоморфизм. Положим $K = M_1\langle t\rangle$. Тогда $K = M_1C_K(M_1)$. Так как $Z(S\cap M_1)$ — циклическая группа и $S\cap K = (S\cap M_1)\times\langle t\rangle$, то $C_K(M_1) = Z(M_1)\times\langle t_1\rangle$ для некоторой инволюции t_1. Но $Z(K) = Z(M_1)\times\langle t_1\rangle \le Z((S\cap M_1)\times\langle t\rangle) = Z(S\cap M_1)\times\langle t\rangle$, значит, t централизует M_1. Аналогично t централизует M_2. Таким образом, t централизует $(M_1\times M_2)S$. Это противоречит строению централизаторов диагональных инволюций в классических группах над полями нечетной характеристики, приведенному в [13].

2. Некоторые почти простые ПН-группы

Предложение 2.1. *Группа G с цоколем, изоморфным A_n $(n \ge 5)$, является ПН-группой тогда и только тогда, когда G изоморфна A_5, A_6, A_7, S_6 или S_7.*

Доказательство. Если $G \cong A_5$, то G является ПН-группой, так как силовская 2-подгруппа в G есть четверная группа.

Пусть $G \cong S_5$. Тогда по [6] группа G содержит максимальную подгруппу $M \cong 2\times S_3$ и, следовательно, в M найдется пара силовских 2-подгрупп, которые пересекаются по $O_2(M)$. Отсюда по лемме 1.1 в G найдется пара силовских 2-подгрупп, которые пересекаются по $O_2(M)$. Так как $M = N_G(O_2(M))$ и индекс $|G:M|$ четен, то G не является ПН-группой.

Если $G \cong S_6$ или S_7, то G является ПН-группой, так как по [6] силовская 2-подгруппа из G изоморфна $Z_2\times D_8$, централизаторы всех инволюций в G имеют нечетные индексы, все инволюции в G' сопряжены и каждая четверная подгруппа из G содержит инволюцию из G'.

Пусть $G \cong PGL_2(9) \cong A_6 : 2$ или $G \cong M_{10} \cong A_6{\cdot}2$. Тогда по [6] группа G' содержит максимальную подгруппу $M \cong S_4$ такую, что $M = N_G(O_2(M))$, поэтому, рассуждая, как в случае $G \cong S_5$, получим, что G не является ПН-группой.

Пусть $G \cong A_8$. Покажем, что G не является ПН-группой. Отсюда будет следовать, что и группа S_8 не является ПН-группой. Пусть T — силовская 2-подгруппа в G. Ввиду [14, §3] группа T порождается инволюциями a, b, c, d, e, f с соотношениями $[c, e] = [b, f] = a$, $[d, e] = b$, $[d, f] = c$, остальные коммутаторы пар порождающих тривиальны. В частности, $T = (\langle a\rangle\times\langle b\rangle\times\langle c\rangle\times\langle d\rangle)\leftthreetimes(\langle e\rangle\times\langle f\rangle)$ и T имеет точно 9 классов сопряженных инволюций с представителями $a, b, c, bc, d, ad, e, f, ef$ и мощностями 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4 соответственно, причем можно считать, что картина слияния этих инволюций в G следующая: $a\sim c\sim f\sim bc\sim ef\sim d \mid b\sim e\sim ad$. Пусть $Q = \langle a, b, c, e, f\rangle$ и $M = C_G(a)$. Тогда $Q \cong Q_8\circ Q_8$ и $M = Q\leftthreetimes(\langle x\rangle\leftthreetimes\langle d\rangle)$, где $|x| = 3$, $x^d = x^{-1}$ и $C_M(x) = \langle a\rangle$. Положим $U = \langle bc, f\rangle$ и $D = C_G(U)$. Тогда $U \cong D_8$ и $Z(U) = \langle a\rangle$, откуда $D = C_G(U) = (\langle a\rangle\times\langle c\rangle)\leftthreetimes(\langle ef\rangle)$ и $Q = U\circ D$. Имеем $C_G(D) = C_M(D) = U$ и $N_G(D) \le M$. Если индекс $|M : N_M(D)|$ нечетен, то $N_G(D)/C_G(D) = N_G(D)/U \cong D_8$ и, следовательно, $N_G(D)$ содержит элемент порядка 8, что не так ($\exp(T) = 4$). Поэтому $N_G(D) = Q$. Ясно, что $D = C_G(bc)\bigcap C_G(f)$ является пересечением некоторых двух силовских 2-подгрупп из $C_G(bc)$ и $C_G(f)$ (которые являются силовскими 2-подгруппами из G). Так как индекс $|G : N_G(D)|$ четен, то G не является ПН-группой.

Пусть $n > 8$. Достаточно доказать, что $G \cong A_n$ не является ПН-группой. Можно считать, что $G < S_n$. Рассмотрим в S_n стабилизатор N подмножества $Y = \{i \mid 1 \le i \le 8\}$ множества $X = \{i \mid 1 \le i \le n\}$, на котором группа S_n действует естественно, т.е. $S_n = S(X)$. Тогда $N = N_1 \times N_2$, где $N_1 = S(Y) \cong S_8$ и $N_2 = S(X \setminus Y) \cong S_{n-8}$. Из предыдущего абзаца следует, что в группе N_1' найдется пересечение D двух силовских 2-подгрупп такое, что $D \cong D_8$, все инволюции из D являются произведениями четырех независимых транспозиций из N_1, индекс $|N_1' : N_{N_1'}(D)|$ четен и для $U = C_{N_1'}(D)$ имеем $D = C_{N_1'}(U)$. Пусть $Z(D) = \langle a \rangle$. Тогда подгруппа $C_{N_1}(a)$ изоморфна подстановочному сплетению $2 \wr S_4$. Легко проверить, что $D = C_{N_1}(U)$ и $N_{N_1}(D) = O_2(C_{N_1}(a))$. Поэтому D есть пересечение некоторых двух силовских 2-подгрупп T_1 и T_2 из N_1, причем индекс $|N_1 : N_{N_1}(D)|$ четен.

Предположим, что индекс $|S_n : N|$ нечетен. Тогда $8 \ne n-8 \ge 6$, и поэтому ввиду леммы 1.4 в N_2 найдутся две силовские 2-подгруппы R_1 и R_2, имеющие единичное пересечение. Положим $U_i = T_i \times R_i$ для $i = 1, 2$. Тогда U_1 и U_2 являются силовскими 2-подгруппами в N, пересечение которых равно D. Следовательно, $U_1 \bigcap G$ и $U_2 \bigcap G$ являются силовскими 2-подгруппами в G, пересечение которых равно D. Но $N_G(D) \le C_G(a) \le N \bigcap G$, поэтому индекс $|G : N_G(D)|$ четен, т.е. G не является ПН-группой.

Пусть теперь индекс $|S_n : N|$ четен. Предположим сначала, что $n \ne 16$. Ясно, что $C_{S_n}(a) = C_{N_1}(a) \times N_2$ и, следовательно, $O_2(C_{S_n}(a)) = O_2(C_{N_1}(a)) \times O_2(N_2)$. Ввиду лемм 1.3 и 1.4 в $C_{S_n}(a)$ найдутся две силовские 2-подгруппы, пересечение которых равно $O_2(C_{S_n}(a))$. Но, как легко видеть, $Z(O_2(C_{S_n}(a))) \bigcap (O_2(C_{S_n}(a))' = \langle a \rangle$, поэтому $N_{S_n}(O_2(C_{S_n}(a))) = C_{S_n}(a)$. Таким образом, ввиду леммы 1.1 в S_n найдутся две силовские 2-подгруппы U_1 и U_2, пересечение которых равно $O_2(C_{S_n}(a))$. Следовательно, $U_1 \bigcap G$ и $U_2 \bigcap G$ являются силовскими 2-подгруппами в G, пересечение которых равно $O_2(C_G(a))$. Так как $Z(O_2(C_G(a))) \bigcap (O_2(C_G(a))') = \langle a \rangle$, то нормализатор в G этого пересечения содержится в $C_G(a)$ и поэтому имеет четный индекс в G, т.е. G не является ПН-группой.

Пусть, наконец, $n = 16$. Возьмем в N_2 транспозицию t. Тогда $C_{N_2}(t)) \cong 2 \times S_6$, и поэтому ввиду лемм 1.4 и 1.1 в N_2 найдутся две силовские 2-подгруппы R_1 и R_2, пересечение которых равно $\langle t \rangle$. Положим $U_i = T_i \times R_i$ для $i = 1, 2$. Тогда U_1 и U_2 являются силовскими 2-подгруппами в N, пересечение которых равно $D \times \langle t \rangle$. Следовательно, $U_1 \bigcap G$ и $U_2 \bigcap G$ являются силовскими 2-подгруппами в $N \bigcap G$, пересечение которых равно D. Подгруппа $U_i \bigcap G$ строго содержится в некоторой силовской 2-подгруппе V_i группы G для $i = 1, 2$. Ясно, что $D \le V_1 \bigcap V_2$. Так как $N_G(D) \le N \bigcap G$, то $N_{V_1 \bigcap V_2}(D) \le (V_1 \bigcap N) \bigcap (V_2 \bigcap N) = (U_1 \bigcap G) \bigcap (U_2 \bigcap G) = D$. Отсюда следует, что $V_1 \bigcap V_2 = D$. Так как индекс $|G : N_G(D)|$ четен, то G не является ПН-группой.

Предложение 2.1 доказано.

Предложение 2.2. *Группа G с цоколем, изоморфным одной из конечных простых спорадических групп, является ПН-группой тогда и только тогда, когда $G \cong J_1$.*

Доказательство. Достаточность очевидна, так как силовская 2-подгруппа группы J_1 абелева и $\mathrm{Out}(J_1) = 1$. Докажем необходимость. Так как свойство ПН переносится на нормальные подгруппы, то достаточно доказать, что конечная простая спорадическая группа G, не изоморфная J_1, не является ПН-группой.

Через M обозначим 2-локальную подгруппу в G четного индекса с условием $M = N_G(O_2(M))$. Ввиду [6] существуют следующие пары (G, M) (обозначения как в [6]): (M_{11}, S_4), $(M_{12}, A_4 \times S_3)$, $(M_{22}, 2^3 : L_3(2))$, $(J_2, A_4 \times A_5)$, $(M_{23}, 2^3 : L_3(2))$, $(HS, 2^4 : S_6)$, $(J_3, 2^4 : (3 \times A_5))$, $(He, S_4 \times L_3(2))$, $(Ru, (2^2 \times Sz(8)) : 3)$, $(Co_3, 2 \times M_{12})$, $(Co_2, (2_+^{1+6} \times 2^4).A_8)$, $(Fi_{22}, 2^6 : S_6(2))$, $(HN, 2^6 : U_4(2))$, $(Fi_{23}, S_4 \times S_6(2))$, $(Co_1, (A_4 \times G_2(4)) : 2)$, $(J_4, 2^{10} : L_5(2))$, $(Fi_{24}', 2^{\cdot}\mathrm{Aut}(Fi_{22}))$, $(B, [2^{30}].L_5(2))$, $(M, 2^{\cdot}B)$. Непосредственное применение лемм 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4 исключает все пары из вышеприведенного списка.

Осталось исследовать группы M_{24}, McL, Suz, $O^{\cdot}N$, Ly, Th.

Пусть $G = M_{24}$. Ввиду [6] в G есть максимальная подгруппа H нечетного индекса, изоморфная $2^6 : A_8$. Ввиду предложения 2.1 в группе H найдутся две силовские 2-подгруппы с пересечением D, нормализатор которого в H имеет четный индекс. Но подгруппа $O_2(H)$ слабо замкнута в любой ее содержащей 2-подгруппе из G (см. [15, утверждение (vi) в §3]), поэтому $N_G(D) \leq H$ и, следовательно, индекс $|G : N_G(D)|$ четен.

Пусть $G = McL$. Ввиду [6] в группе G есть максимальная подгруппа H, изоморфная $U_4(3)$. Возьмем инволюцию z из H. Тогда по [6] имеем $C_H(z) \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3)).2^2$. Пусть $Q = O_2(C_H(z))$. Тогда $Q \cong Q_8 \circ Q_8 \cong D_8 \circ D_8$. Пусть $Q = K_1 \circ K_2$, где $K_1 \cong K_2 \cong D_8$. Пусть z_1 и z_2 — инволюции, порождающие подгруппу K_1. Из [6] и [16, лемма 5.3] получаем, что $C_G(\langle z, z_1\rangle) \cong 2^4 : A_4$ и $C_G(\langle z, z_1\rangle)\langle z_2\rangle \cong 2^4 : S_4$. Поэтому $C_G(K_1) = C_T(z_2)$, где $T = O_2(C_G(\langle z, z_1\rangle))$. Но фактор-группа $T\langle z_2\rangle/\langle z, z_1\rangle$ изоморфна сплетению $2^2 \wr 2$ и, следовательно, ее центр имеет порядок 4. Отсюда ясно, что $|C_T(z_2)| \leq 8$. Так как $D_8 \cong K_2 \leq C_G(K_1)$, получаем, что $C_G(K_1) = K_2$. Так как подгруппы K_1 и K_2 равноправны, то и $C_G(K_2) = K_1$. Все инволюции в группе G сопряжены, поэтому $K_2 = C_G(K_1) = C_G(z_1) \cap C_G(z_2)$ является пересечением некоторых двух силовских 2-подгрупп из $C_G(z_1)$ и $C_G(z_2)$, которые являются силовскими 2-подгруппами в G. Но $\mathrm{Aut}(D_8) \cong D_8$, значит, $|N_G(K_2)|_2 \leq 8|C_G(K_2)| = 2^6 < 2^7 = |G|_2$. Таким образом, индекс $|G : N_G(K_2)|$ четен.

Пусть $G = Suz$. Ввиду [6] в G есть максимальная подгруппа H индекса, кратного 16, изоморфная $(A_4 \times L_3(4)) : 2$. По лемме 2.2 в группе $H' = C_G(O_2(H)) \cong A_4 \times L_3(4)$ найдутся силовские 2-подгруппы T_1 и T_2 такие, что $O_2(H) = T_1 \cap T_2$. В H найдутся силовские 2-подгруппы R_1 и R_2 такие, что $T_i < R_i$ для $i = 1, 2$. Пусть $D = R_1 \cap R_2$. Предположим, что индекс $|G : N_G(D)|$ нечетен. Тогда $O_2(H) < D$ и, следовательно, $D \cong D_8$. Но в D точно две четверные группы, поэтому $|N_G(D) : N_{N_G(D)}(O_2(H))| = 2$, что противоречит делимости на 16 индекса $|G : H|$.

Пусть $G = O'N$. Ввиду [6] в G есть максимальная подгруппа H, изоморфная $4_2{}^{\cdot}L_3(4) : 2_1$. Положим $\bar{H} = H/O_2(H)$. По лемме 1.2 в группе $\bar{H}'$ найдутся силовские 2-подгруппы $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ с единичным пересечением. В $\bar{H}$ найдутся силовские 2-подгруппы $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ такие, что $\bar{T}_i < \bar{R}_i$ для $i = 1, 2$. По [9, теорема 5.1] имеем $|\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2| = 2$. Пусть D — полный прообраз подгруппы $\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2$ в H. Тогда подгруппа $\Phi(D) = \Omega_1(O_2(H))$ характеристична в D и, следовательно, $N_G(D) \leq H$. Но $\overline{N_G(D)} \leq N_{\bar{H}}(\bar{D}) \cong 2 \times (3^2 : Q_8)$, откуда $|N_G(D)|_2 \leq 2^6$ и, следовательно, индекс $|G : N_G(D)|$ четен.

Пусть $G = Ly$. Ввиду [6] в G есть максимальная подгруппа H, изоморфная $2{}^{\cdot}A_{11}$. Положим $\bar{H} = H/O_2(H)$. В группе $\bar{H}$ есть максимальная подгруппа $\bar{M}$ четного индекса, изоморфная подгруппе $(A_4 \times A_7) : 2$ из $S_4 \times S_7$. Рассмотрим полный прообраз M подгруппы $\bar{M}$ в H. Ввиду лемм 1.2, 1.3 и 1.4 в группе M найдутся две силовские 2-подгруппы с пересечением, равным $O_2(M)$. Если $\Phi(O_2(M)) \neq 1$, то $\Phi(O_2(M)) = O_2(H)$ и, следовательно, $N_G(O_2(M)) = M$. Пусть $\Phi(O_2(M)) = 1$. Так как 2-ранг группы G равен 4, то $C_G(O_2(M)) \cong 2^2 \times 2{}^{\cdot}A_7$ и поэтому опять $N_G(O_2(M)) = M$. Итак, в любом случае $N_G(O_2(M)) = M$. По лемме 1.1 в группе G найдутся две силовские 2-подгруппы с пересечением, равным $O_2(M)$ и, следовательно, G не является ПН-группой.

Пусть $G = Th$. Ввиду [6] в G есть максимальная подгруппа H, изоморфная $2_+^{1+8}.A_9$. Положим $\bar{H} = H/O_2(H)$. В группе $\bar{H}$ есть максимальная подгруппа $\bar{M}$ четного индекса, изоморфная подгруппе $(A_4 \times A_5) : 2$ из $S_4 \times S_5$. Рассмотрим полный прообраз M подгруппы $\bar{M}$ в H. Ввиду лемм 1.2, 1.3 и 1.4 в группе M найдутся две силовские 2-подгруппы с пересечением, равным $O_2(M)$. Так как $C_G(O_2(H)) = Z(O_2(H))$, то $C_G(O_2(M)) = Z(O_2(H))$. Поэтому $N_G(O_2(M)) = M$. По лемме 1.1 в группе G найдутся две силовские 2-подгруппы с пересечением, равным $O_2(M)$ и, следовательно, G не является ПН-группой.

Предложение 2.2 доказано.

Предложение 2.3. *Группа $U_3(3)$ является ПН-группой.*

Доказательство. Пусть $G \cong U_3(3)$ и $D = T_1 \cap T_2$ для некоторых силовских 2-подгрупп T_1 и T_2 из G. Пусть $U_i = Z(T_i)$ для $i = 1, 2$, $U = \langle U_1, U_2\rangle$ и $C = C_G(U_1)$. Ввиду [6] $T_1 \cong 4 \wr 2$ все инволюции в G сопряжены, $U_1 \cong 4$, $C = C_G(\Omega_1(U_1)) \cong 4.S_4 \cong (4 \circ Q_8).S_3$

и циклические подгруппы порядка 4 в G сопряжены либо с T_1', либо с $Z(T_1)$. Отсюда следует, что U_1 и U_2 — сопряженные TI-подгруппы в G, и можно считать, что D не является циклической группой порядка ≤ 4. Если $U_1 = U_2$, то $O_2(C) \leq D$ и, следовательно, D — нормальная подгруппа в T_1.

Пусть $U_1 \neq U_2$. Тогда $U_1 \cap U_2 = 1$ и, следовательно, $|U| \geq |U_1U_2| = 16$. Так как подгруппа U централизует D, то она централизует некоторую инволюцию $d \in D$. Подгруппа U является 2-группой, так как в противном случае по строению централизатора $C_G(d)$ подгруппа D была бы циклической группой порядка ≤ 4. Поэтому U является подгруппой индекса ≤ 2 в некоторой силовской 2-подгруппе T из G. Если D не содержится в U, то можно считать, что $T = UD$ и, следовательно, D — нормальная подгруппа в T. Таким образом, полагаем, что D — нециклическая подгруппа в $Z(U)$ и $|U| = 16$. Если U неабелева, то $D = Z(U) \lhd T$. Поэтому полагаем, что U абелева и, следовательно, $U \cong 4 \times 4$. Если $|D| = 4$, то $D = \Omega_1(U) \lhd T$. Итак, можно считать, что $D \cong 2 \times 4$. Но по [6] имеем $N_G(U)/\Omega_1(U) \cong S_4$, поэтому подгруппа D нормальна в некоторой силовской 2-подгруппе из $N_G(U)$, а значит, и из G.

Предложение 2.3 доказано.

Предложение 2.4. *Группа $G_2(3)$ является ПН-группой.*

Доказательство. Пусть $G \cong G_2(3)$ и $D = T_1 \cap T_2$ для некоторых силовских 2-подгрупп T_1 и T_2 из G. Докажем, что индекс $|G : N_G(D)|$ нечетен. Ввиду [17] имеем $T_1 = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes (\langle u \rangle \times \langle t \rangle)$, где $|a| = |b| = 4$, $|u| = |t| = 2$, $a^u = a^{-1}$, $b^u = b^{-1}$, $a^t = b$, откуда, в частности, следует, что $Z(T_1) = \langle a^2b^2 \rangle \cong 2$, $T_1' = \langle a^2 \rangle \times \langle ab^{-1} \rangle \cong 2 \times 4$ и $\exp(T_1) = 8$. Пусть $\langle z_i \rangle = Z(T_i)$ для $i = 1, 2$, $Z = \langle a^2 \times b^2 \rangle \cong 2 \times 2$, $C = C_G(z_1)$ и $T = \langle z_1, z_2 \rangle$. Ввиду [6] имеем $C = (L_1 \circ L_2)\langle s \rangle$, где L_1 и L_2 — нормальные подгруппы в C, изоморфные $SL_2(3)$, s — некоторая инволюция и $L_i\langle s \rangle \cong GL_2(3)$ для $i = 1, 2$, $C_G(Z) = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle u \rangle$, $N_G(Z) = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle u \rangle \times (\langle x, t \rangle))$, где $|x| = 3$ и $\langle x, t \rangle \cong S_3$.

Покажем, что группа $N_G(E)/E$ изоморфна $GL_3(2)$ или S_4 для любой элементарной подгруппы E порядка 8 из T_1. Действительно, ввиду [6] в G есть подгруппа G_0, изоморфная $U_3(3)$, с силовской 2-подгруппой $T_0 = T_1 \cap G_0$, имеющей циклический центр порядка 4, и все инволюции из E сопряжены в G, причем каждая инволюция $e \in E$ является квадратом некоторого элемента $x_e \in N_G(E)$, порождающего подгруппу, сопряженную в G с $Z(T_0)$. Если e и e_1 — различные инволюции из E, то $x_eE \neq x_{e_1}E$, так как $\langle x_e \rangle E \cong \langle x_{e_1} \rangle E \cong 2 \times D_8$ и $\langle x_e \rangle \cap \langle x_{e_1} \rangle = 1$. Поэтому в группе $N_G(E)/E$ имеется по крайней мере 7 инволюций, а именно, x_eE $(e \in E \setminus \{1\})$. Так как $C_{T_1}(e) \cong 2 \times D_8$ для $e \in E \setminus T_0$, то $C_{T_1}(E) = E$. По теореме Бернсайда о сдвиге имеем $C_G(E) = E \times O(C_G(E))$. Но из строения подгруппы C следует, что $O(C_G(E)) = 1$. Таким образом, $C_G(E) = E$, и значит, группа $N_G(E)/E$ изоморфна подгруппе из $GL_3(2)$, содержащей по крайней мере 7 инволюций. Поэтому $N_G(E)/E \cong GL_3(2)$ или S_4.

Ввиду [6] все инволюции в G сопряжены, поэтому можно считать, что $|D| > 2$. Так как $|T_1 : O_2(C)| = 2$, то полагаем, что $z_1 \neq z_2$ и, следовательно, $D < T_1$. Имеем $D \leq C_G(z_1) \cap C_G(z_2) = C_G(T)$, причем T — нециклическая диэдральная группа, централизующая некоторую инволюцию $d \in Z(D)$. Ввиду [6] нормализаторы циклических подгрупп порядка 4 имеют в G нечетный индекс, а циклические подгруппы порядка 8 самоцентрализуемы в G. Поэтому и ввиду предыдущего абзаца можно считать, что D — нециклическая группа, не изоморфная элементарной группе порядка 8.

Группа T является 2-группой, так как в противном случае ввиду строения группы $C_G(d)$ получим $T \cong S_3$ и, следовательно, подгруппа $C_{C_G(d)}(T)$ циклическая, что противоречит нецикличности подгруппы D. Если $|T| \geq 16$, то T содержит циклическую подгруппу порядка 8, которая самоцентрализуема в G, и, следовательно, D содержится в этой подгруппе, что противоречит нецикличности подгруппы D. Таким образом, подгруппа T изоморфна 2^2 или D_8.

Пусть сначала $T \cong D_8$. Возьмем инволюцию t из $Z(T)$. Тогда $C_G(T) < C_G(t) = (K_1 \circ K_2)(\langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle)\langle f \rangle$, где $K_1 \cong K_2 \cong Q_8$, $|u_1| = |u_2| = 3$, $|f| = 2$, $K_i\langle u_i \rangle \cong SL_2(3)$ и $K_i\langle u_i \rangle\langle f \rangle \cong GL_2(3)$ для $i = 1, 2$. Обозначим подгруппу $O_2(C_G(t)) = K_1K_2$ через Q.

Предположим, что $T \leq Q$. Тогда $Q = T \circ R$, где $R \cong D_8$ и $C_G(T) = R$. Отсюда $D \leq R$.

Допустим, что $D = R$. Тогда в фактор-группе $\overline{C_G(t)} = C_G(t)/\langle t\rangle$ имеем $|\bar{D} \cap \bar{K}_i| = 2$ и $\bar{K}_i\langle \bar{u}_i\rangle\langle \bar{f}\rangle \cong S_4$ для $i = 1, 2$. Поэтому подгруппа $\langle \bar{u}_1\rangle \times \langle \bar{u}_2\rangle$ действует транзитивно на множестве всех четверных подгрупп вида $\langle \bar{v}_1\rangle \times \langle \bar{v}_2\rangle$, где $\bar{v}_i \in \bar{K}_i$ для $i = 1, 2$. Отсюда следует, что нормализатор в $\overline{C_G(t)}$ подгруппы $\bar{D}$ имеет нечетный индекс. Значит, индекс $|C_G(t) : N_G(D)|$ нечетен.

Таким образом, можно считать, что D — четверная группа. Тогда $C_Q(D) \cong 2 \times D_8$. Ввиду [18] в Q ровно 9 подгрупп, изоморфных $2 \times D_8$, и все они сопряжены относительно подгруппы $\langle u_1\rangle \times \langle u_2\rangle$. Поэтому нормализатор в $C_G(t)$ подгруппы $C_Q(D)$ имеет нечетный индекс. Но $D = Z(C_Q(D))$, поэтому и нормализатор подгруппы D в $C_G(t)$ имеет нечетный индекс.

Пусть теперь $T \nleq Q$. Тогда $T \setminus Q$ содержит некоторую инволюцию t_1 и $C_G(T) \leq C_G(t) \cap C_G(t_1) = C_{C_G(t)}(t_1)$. Ввиду строения группы $C_G(t)$ имеем $C_{C_G(t)}(t_1) \cong 2^3$, откуда $t \in D = C_Q(t_1) \cong 2^2$. Но тогда подгруппа D нормальна в силовской 2-подгруппе $Q\langle t_1\rangle$ из $C_G(t)$.

Итак, можно считать, что T — четверная группа. Положим $O_2(C) = Q$.

Предположим, что $T \nleq Q$. Тогда $T \setminus Q$ содержит некоторую инволюцию t_1, для которой $C_G(T) = C_C(t_1) \cong 2^3$. Следовательно, D — четверная группа. Если $D \leq Q$, то $N_C(D)$ имеет в C нечетный индекс. Пусть $D \nleq Q$ и $V = C_C(D)$. Тогда $V \cong 2^3$ и $T < V$. Ясно, что $V \cap Q = C_C(D) = C_C(T)$, поэтому $V \cap Q$ является нормальной четверной подгруппой в T_1, откуда $V \cap Q = Z$. По [17] имеем $N_G(V)/V \cong GL_3(2)$. Но тогда $N_G(V)$ транзитивно действует на множестве всех четверных подгрупп из V, поэтому нормализатор подгруппы D в $N_G(V)$ имеет нечетный индекс.

Таким образом, можно считать, что $T \leq Q$. Тогда $C_Q(T) \cong 2 \times D_8$. Как и выше, показываем, что нормализатор подгруппы $C_Q(T)$ в C имеет нечетный индекс. Но $T = Z(C_Q(T))$, поэтому нормализатор подгруппы T в C имеет нечетный индекс. Ясно, что $D \leq C_G(T) \cong (2 \times D_8).2 \cong (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle u\rangle$.

Предположим, что $D \leq Q$. Если $D = C_Q(T)$, то нормализатор подгруппы D в C имеет нечетный индекс. Поэтому можно считать, что $D < C_Q(T)$. Если D — неабелева группа, то $D \cong D_8$ и, рассуждая, как выше, получим, что нормализатор подгруппы D в C имеет нечетный индекс. Если D — абелева группа, то $D \cong 2^2$ или 4×2^2. В первом случае D содержится в элементарной подгруппе V порядка 8 из $C_Q(T)$, причем $T < V$, поэтому, как и выше, получим, что нормализатор подгруппы D в $N_G(V)$ имеет нечетный индекс. Во втором случае D — характеристическая подгруппа в $C_Q(T)$, поэтому опять нормализатор подгруппы D в C имеет нечетный индекс.

Итак, можно считать, что $D \nleq Q$. Тогда $C_Q(D) = T$. Так как $T \leq Q$, то $z_2 \in Z(D)$. Предположим, что $T \nleq D$. Тогда $z_1 \notin D$ и, следовательно, $D \cong 2^2$ или D_8. В первом случае D содержится в элементарной подгруппе $V = DT$ порядка 8 из $C_G(T)$, поэтому, как и выше, получим, что нормализатор подгруппы D в $N_G(V)$ имеет нечетный индекс. Во втором случае, заменяя T_1 на T_2 и рассуждая, как и выше, получим, что $T \leq Q^g < T_2$ ($T_2 = T_1^g$ для некоторого $g \in G$), и значит, $T \leq D$. Таким образом, в любом случае можно считать, что $T \leq D$. Так как $D \ncong 2^3$, то $D \cap J(C_G(T))$ содержит максимальную подгруппу из $J(C_G(T))$, изоморфную 2×4. Но ввиду [6] $N_G(T)/C_G(T) \cong S_3$ и $N_G(T)$ действует транзитивно на множестве всех трех максимальных подгрупп из $J(C_G(T))$, поэтому каждая из этих подгрупп является коммутантом некоторой силовской 2-подгруппы из $N_G(T)$. Это значит, что нормализатор подгруппы D в $N_G(T)$ имеет нечетный индекс.

Предложение 2.4 доказано.

3. Доказательство теоремы

Достаточность очевидна ввиду предложений 2.1–2.4. Докажем необходимость.

Пусть G — контрпример наименьшего порядка к теореме.

Лемма 3.1. *Группа G проста.*

Доказательство. Так как условие ПН переносится на нормальные подгруппы и фактор-группы конечной группы, то $S(G) = 1$ и $O^{2'}(G) = G$, откуда $F^*(G) = K_1 \times ... \times K_n$, где $K_1, ..., K_n$ — неабелевы простые группы. Пусть π — действие сопряжением группы G на множестве $\{K_1, ..., K_n\}$. Предположим, что $\ker(\pi) \neq G$. Тогда $n > 1$ и найдется 2-элемент $g \in G \setminus \ker \pi$ такой, что $g^2 \in \ker(\pi)$. Можно считать, что $K_1^g = K_2$. Пусть $X = F^*(G)\langle g\rangle$. Тогда подгруппа $C_X(K_1K_2)$ нормальна в X. Положим $\bar{X} = X/C_X(K_1K_2)$. Тогда $\bar{X} = (\bar{K}_1 \times \bar{K}_2)\langle\bar{g}\rangle$. Предположим, что $\bar{g}^2 \in \bar{K}_1\bar{K}_2$. Покажем, что $\bar{X} \cong \bar{K}_1 \wr 2$. Пусть H_1 — некоторая силовская 2-подгруппа из $\bar{K}_1$, $\bar{z}_1$ — некоторая инволюция из $Z(\bar{H}_1)$ и $\bar{Z}_1 = \langle\bar{z}_1\rangle$. Имеем, что $\bar{Z}_1 \times \bar{Z}_1^{\bar{g}} \trianglelefteq \bar{H}_1 \times \bar{H}_1^{\bar{g}} >= \bar{H}$. Положим $\tilde{H} = \bar{H}/(\bar{Z}_1 \times \bar{Z}_1^{\bar{g}})$. Тогда $\tilde{H} = (\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_1^{\tilde{g}})\langle\tilde{g}\rangle$. По индукции $\tilde{H} \cong \tilde{H}_1 \wr 2$, следовательно, элемент $\tilde{g}$ можно считать инволюцией. Но тогда полный прообраз в $\bar{H}$ подгруппы $\langle\tilde{g}\rangle$ изоморфен D_8, и значит, элемент $\bar{g}$ можно считать инволюцией. Таким образом, подгруппа $\bar{C} = C_{\bar{K}_1\bar{K}_2}(\bar{g})$ изоморфна $\bar{K}_1$ и имеет с $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_2$ единичные пересечения. В $\bar{C} \times \langle\bar{g}\rangle$ найдутся две силовские 2-подгруппы $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ такие, что $\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 = \langle\bar{g}\rangle$. По лемме 1.1 в группе $\bar{X}$ найдутся две силовские 2-подгруппы $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ такие, что $\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 = \langle\bar{g}\rangle$. Поэтому в X найдутся две силовские 2-подгруппы T_1 и T_2, образы которых при естественном гомоморфизме группы X на группу $\bar{X}$ совпадают соответственно с $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$. Подгруппы T_1 и T_2 содержатся в силовских 2-подгруппах U_1 и U_2 группы G соответственно. Положим $D = U_1 \cap U_2$. По условию подгруппа D нормальна в некоторой силовской 2-подгруппе U из G. Тогда $U \cap X$ — силовская 2-подгруппа в X и $D \cap X \trianglelefteq U \cap X$. Но это невозможно, так как $D \cap X = T_1 \cap T_2$, $\overline{D \cap X} = \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 = \langle\bar{g}\rangle$ и $N_{\bar{X}}(\bar{g} >) \cong \bar{K}_1$, откуда индекс $|\bar{X} : N_{\bar{X}}(\langle\bar{g}\rangle)|$ четен.

Итак, $\bar{g}^2 \notin \bar{K}_1 \times \bar{K}_2$. Рассмотрим подгруппу $X_1 = F^*(G)\langle g^2\rangle$ из $\ker(\pi)$. По индукции $\ker(\pi)$ удовлетворяет заключению теоремы и, следовательно, элемент $\bar{g}^2$ индуцирует на подгруппах K_1 и K_2 инволютивные полевые автоморфизмы, централизующие в каждой из них некоторую силовскую 2-подгруппу. Но

$$C_{\bar{K}_1\bar{K}_2}(\bar{g}) \leq C_{\bar{K}_1\bar{K}_2}(\bar{g}^2) = C_{\bar{K}_1}(\bar{g}^2) \times C_{\bar{K}_2}(\bar{g}^2),$$

поэтому $C_{\bar{K}_1\bar{K}_2}(\bar{g})$ есть подгруппа, изоморфная $C_{\bar{K}_1}(\bar{g}^2)$ и имеющая с $C_{\bar{K}_1}(\bar{g}^2)$ и $C_{\bar{K}_2}(\bar{g}^2)$ единичные пересечения. Рассуждая, как в случае, когда $\bar{g}^2 \in \bar{K}_1\bar{K}_2$, приходим к противоречию.

Итак, $\ker(\pi) = G$ и, следовательно, $n = 1$, то есть G — почти простая группа. Через S обозначим цоколь группы G.

Допустим, что $S < G$. Тогда по индукции группа S изоморфна одной из простых групп из заключения теоремы.

Пусть $S \cong L_2(q)$, где $q \not\equiv \pm 1 \pmod{16}$. Предположим, что q четно. Тогда G содержит инволюцию t, индуцирующую на S полевой автоморфизм. Тогда $S\langle t\rangle \trianglelefteq G$. Покажем, что $S\langle t\rangle$ не является ПН-группой. Имеем $C_S(t) \cong L_2(\sqrt{q})$, в частности, $|C_S(t)|_2 < |G|_2$. По лемме 1.2 в $C_S(t)$ найдется пара силовских 2-подгрупп T_1 и T_2 с единичным пересечением. Тогда пересечение силовских 2-подгрупп $T_1\langle t\rangle$ и $T_2\langle t\rangle$ из $C_S(t)\langle t\rangle$ равно $\langle t\rangle$. По лемме 1.1 в $S\langle t\rangle$ найдутся силовские 2-подгруппы U_1 и U_2 такие, что $U_1 \cap U_2 = \langle t\rangle$. Но по условию $C_S(t)$ имеет нечетный индекс в S, что невозможно.

Таким образом, q нечетно. Предположим, что $PGL_2(q) \leq G$. Тогда $PGL_2(q) \trianglelefteq G$ и силовская 2-подгруппа в $PGL_2(q)$ неабелева диэдральная. Возьмем инволюцию $t \in PGL_2(q) \setminus S$. Тогда $C_S(t) \cong D_{q-\epsilon 1}$, где $\epsilon = \pm$ и 4 не делит $q - \epsilon 1$. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, показываем, что $PGL_2(q)$ не является ПН-группой.

Если G содержит элемент t, индуцирующий на S полевой автоморфизм порядка 4, то $q = q_1^4 \equiv 1 \pmod{16}$, что невозможно.

Итак, $G = S\langle t\rangle$, где элемент t индуцирует на S автоморфизм, являющийся произведением диагонального и полевого инволютивных автоморфизмов. Поэтому силовская 2-подгруппа в G полудиэдральная порядка 16. В S есть подгруппа M такая, что $M \cong S_4$ и $N_G(O_2(M)) = M$. Поэтому ввиду леммы 1.1 $O_2(M)$ есть пересечение двух силовских 2-подгрупп из G. По условию индекс $|G : N_G(O_2(M))|$ нечетен; противоречие.

Пусть $S \cong PSp_4(q)$, где q четно. Тогда $Out(S)$ — циклическая группа и, следовательно, G содержит инволюцию t, индуцирующую на S полевой или графовый автоморфизм. Имеем $C_S(t) \cong PSp_4(\sqrt{q})$ или $Sz(q)$, откуда $|C_S(t)|_2 < |S|_2$. Рассуждая, как выше, показываем, что $S\langle t\rangle$ не является ПН-группой.

Случай, когда $S \cong L_2(q^2)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, рассматривается, как выше.

Если $S \cong U_3(q)$, где $q = 2^m > 2$, то S является TI-группой, и поэтому инволюция из $G \setminus S$ (индуцирующая на S полевой автоморфизм) не может централизовать силовскую 2-подгруппу из S, то есть G не является ПН-группой.

Пусть $S \cong L_3(q)$,где $q = 2^m$. Тогда по по [11, (9-1)] можно считать, что $G = S\langle t\rangle$, где t — инволюция индуцирующая на S полевой, графовый или графово-полевой автоморфизм. Ввиду [11, (9-1)] и [12, 4.27, 4.28] получаем, что $|C_S(t)|_2 < |S|_2$, то есть G не является ПН-группой.

Если $S \cong U_3(3)$, то $G \cong G_2(2)$, что невозможно по [3].

Если группа S изоморфна ${}^2B_2(q)$ или ${}^2G_2(q)$, то $Out(S)$ — циклическая группа нечетного порядка, и поэтому $G = S$, что невозможно.

Учитывая предложения 2.1 и 2.2, получаем, что $G \cong \mathrm{Aut}(G_2(3))$. Но по [6] в $G\setminus S$ есть инволюция t такая, что $C_S(t) \cong {}^2G_2(3)$, откуда $|C_S(t)|_2 < |S|_2$. Рассуждая, как выше, показываем, что G не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Ввиду [3–5] и предложений 2.1 и 2.2 G — конечная простая группа лиева типа над полем нечетной характеристики.

Лемма 3.2. *$G \ncong L_2(q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong L_2(q)$. Так как G — контрпример к теореме, то $q \equiv \pm 1 \pmod{16}$ и, следовательно, силовская 2-подгруппа из G изоморфна диэдральной группе порядка ≥ 16. Пусть V — четверная подгруппа из G. Тогда $N_G(V) \cong S_4$, откуда индекс $|G : N_G(V)|$ четен. Но V является пересечением двух силовских 2-подгрупп из G; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *$G \ncong L_3^{\epsilon}(q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong L_3^{\epsilon}(q)$. Если $q \equiv -\epsilon 1 \pmod 4$, то силовская 2-подгруппа из G изоморфна полудиэдральной группе, и, рассуждая, как в лемме 3.2, приходим к противоречию. Поэтому $q \equiv \epsilon 1 \pmod 4$ и силовская 2-подгруппа из G изоморфна сплетению циклической группы порядка 2^n с группой порядка 2, где $n \geq 2$. Так как G — контрпример к теореме, то $q > 3$. Пусть z — инволюция из G, $C = C_G(z)$ и $\bar{C} = C/F(C)$. Тогда $C \cong ((q - \epsilon 1) \circ SL_2(q)).2$ и $\bar{C} \cong PGL_2(q)$. Пусть $\bar{x}$ — инволюция из $\bar{C} \setminus \bar{C}'$. Тогда $C_{\bar{C}}(\bar{x}) \cong 2 \times D_{q+\epsilon 1}$, где $q + \epsilon 1 = 2m$ для некоторого нечетного числа m, большего 1. Пусть D — силовская 2-подгруппа из полного прообраза в C подгруппы $\langle \bar{x}\rangle$. Так как $\Omega_1(Z(D)) = \langle z\rangle$, то $N := N_G(D) \leq C$. Имеем $\bar{N} = C_{\bar{C}}(\bar{x})$. Подгруппа $\langle \bar{x}\rangle$ равна пересечению некоторых двух силовских 2-подгрупп из $C_{\bar{C}}(\bar{x})$. Поэтому в N найдется пара силовских 2-подгрупп, пересекающихся по $D = O_2(N)$. По лемме 1.1 подгруппа D равна пересечению некоторых двух силовских 2-подгрупп из G. Но индекс $|C : N|$ четен; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *$G \ncong L_{2^n}^{\epsilon}(q)$ для всех $n > 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong L_{2^n}^{\epsilon}(q)$ для $n > 1$. Ввиду [8, 4.2.9] группа G содержит центральную инволюцию z такую, что для $C = C_G(z)$ имеем $C = (Z \circ L_1 \circ L_2).a.2$, где $Z \cong (q - \epsilon 1)$, $L_1 \cong L_2 \cong SL_{2^{n-1}}^{\epsilon}(q)$, $N_C(L_1) = N_C(L_2)$ — подгруппа индекса 2 в C и $N_C(L_1)/C_C(L_1) \cong PGL_{2^{n-1}}^{\epsilon}(q)_2(q)$.

Пусть $n = 2$ и $q = 3$. Если $\epsilon = +$, то по [6] в G есть максимальная подгруппа четного индекса, изоморфная $S_4 \times S_4$, поэтому, применяя леммы 1.1–1.4, получим, что G не является ПН-группой. Если $\epsilon = -$, то по [6] $C < McL$, поэтому, рассуждая, как при доказательстве леммы 3.2 в случае группы McL, показываем, что G не является ПН-группой.

Пусть $q > 3$ или $n \geq 3$. Тогда $E(C) = L_1L_2$. Пусть T_1 — силовская 2-подгруппа в L_1. Ввиду леммы 1.2 в L_2 найдутся две силовские 2-подгруппы R_1 и R_2, пересечение которых равно $Z(L_2)$. Положим $U_i = O_2(Z)T_1R_i$ для $i = 1, 2$. Тогда U_1 и U_2 являются силовскими 2-подгруппами в L_1L_2, пересечение которых равно $O_2(Z)T_1$. Подгруппа U_i строго содержится в некоторой силовской 2-подгруппе V_i группы C для $i = 1, 2$. Пусть $D = V_1 \bigcap V_2$. По условию ПН подгруппа D нормальна в некоторой силовской 2-подгруппе S из G. По лемме 1.5 центр силовской 2-подгруппы из $SL^{\epsilon}_{2^n}(q)$ циклический. Поэтому $\Omega_1(Z(D)) = \langle z\rangle$ и, следовательно, $N_G(D) \leq C$. Но тогда $T_1 = D \bigcap E(C) \triangleleft S$, что невозможно, так как в S есть элемент, переставляющий подгруппы L_1 и L_2. Поэтому G не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.5. *$G \ncong PSp_{2^n}(q)$, $n \geq 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong PSp_{2^n}(q)$, $n \geq 2$. Ввиду [8, 4.2.10] группа G содержит центральную инволюцию z такую, что для $C = C_G(z)$ имеем $C = (L_1 \circ L_2)\langle x\rangle$, где $L_1 \cong L_2 \cong Sp_{2^{n-1}}(q)$, $|x| = 2$ и $L_1^x = L_2$.

Пусть $n = 2$ и $q = 3$. Пусть T — силовская 2-подгруппа в C и $Q = T \cap L_1L_2$. Тогда $Q \cong Q_8 \circ Q_8 \cong D_8 \circ D_8$. Пусть $Q = K_1 \circ K_2$, где $K_1 \cong K_2 \cong D_8$. Пусть z_1 и z_2 — инволюции, порождающие подгруппу K_1. Тогда силовская 2-подгруппа D из $C_G(K_1) = C_G(z_1) \cap C_G(z_2)$ является максимальным пересечением некоторых двух силовских 2-подгрупп из $C_G(z_1)$ и $C_G(z_2)$. Покажем, что $N_G(K_1) = Q$. Предположим, что $Q < N_G(K_1)$. Ясно, что $N_G(K_1) \leq C$ и $N_{L_1L_2}(K_1) = Q$. Поэтому $|N_G(K_1) : Q| = 2$. Можно считать, что $N_G(K_1) = T$. Группа $T/C_T(K_1)$ изоморфна либо четверной группе, либо D_8. Во втором случае $C_T(K_1) = K_2$ и, следовательно, T содержит элемент порядка 8, что ввиду [6] невозможно. Поэтому $T/C_T(K_1)$ изоморфна четверной группе и, следовательно, $T = QC_T(K_1)$, т.е. $|C_T(K_1) : K_2| = 2$. Ясно, что $C_{C_T(K_1)}(K_2) = C_T(Q) = \langle z\rangle$. Поэтому $C_T(K_1)/\langle z\rangle \cong \mathrm{Aut}(K_2) \cong D_8$ и, как выше, $C_T(K_1)$ содержит элемент порядка 8, что невозможно. Итак, $N_G(K_1) = Q$, откуда индекс $|G : N_G(K_1)|$ четен. Аналогично доказывается, что индекс $|G : N_G(K_2)|$ четен. Так как $D \leq C_G(K_1) = K_2$, то $D = K_2$ и, следовательно, G не является ПН-группой.

Пусть $q > 3$ или $n \geq 3$. Тогда $E(L) = L_1L_2$. Пусть D — силовская 2-подгруппа в L_1. Ввиду леммы 1.2 в L_2 найдутся две силовские 2-подгруппы R_1 и R_2, пересечение которых равно $\langle z\rangle$. Положим $U_i = DR_i$ для $i = 1, 2$. Тогда U_1 и U_2 являются силовскими 2-подгруппами в L_1L_2, пересечение которых равно D. Ввиду леммы 1.5 $\Omega_1(Z(D)) = \langle z\rangle$, поэтому $N_G(D) \leq C$. Так как $L_1^x = L_2$, то $N_G(D) < L_1L_2$. Подгруппа U_i строго содержится в некоторой силовской 2-подгруппе V_i группы C для $i = 1, 2$. Ясно, что $D \leq V_1 \bigcap V_2$. Имеем $N_{V_1 \bigcap V_2}(D) \leq (V_1 \bigcap L_1L_2) \bigcap (V_2 \bigcap L_1L_2) = U_1 \bigcap U_2 = D$. Поэтому $V_1 \bigcap V_2 = D$. Так как индекс $|G : N_G(D)|$ четен, то G не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.6. *$G \ncong P\Omega^+_{2^n}(q)$ для всех $n > 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong P\Omega^+_{2^n}(q)$, $n > 2$. Ввиду [8, 4.2.11] группа G содержит центральную инволюцию z такую, что для $C = C_G(z)$ имеем $C = (L_1 \circ L_2).2^2.2$, где $L_1 \cong L_2 \cong \Omega^+_{2^{n-1}}(q)$, $N_C(L_1) = N_C(L_2)$ — подгруппа индекса 2 в C и $N_C(L_1)/L_1 \cong P\Omega^+_{2^{n-1}}(q)$. Заметим, что $\Omega^+_4(q) \cong SL_2(q) \circ SL_2(q)$.

Пусть $n = 2$ и $q = 3$. Тогда по [6] в G есть максимальная подгруппа четного индекса, изоморфная $(A_4 \times U_4(2)) : 2$, поэтому, применяя леммы 1.1–1.4, получим, что G не является ПН-группой.

Пусть $q > 3$ или $n \geq 3$. Тогда $E(C) = L_1L_2$. Пусть T_1 — силовская 2-подгруппа в L_1. Ввиду леммы 1.2 в L_2 найдутся две силовские 2-подгруппы R_1 и R_2, пересечение которых равно $Z(L_2)$. Положим $U_i = T_1R_i$ для $i = 1, 2$. Тогда U_1 и U_2 являются силовскими 2-подгруппами в L_1L_2, пересечение которых равно T_1. Подгруппа U_i строго содержится в некоторой силовской 2-подгруппе V_i группы C для $i = 1, 2$. Пусть $D = V_1 \bigcap V_2$. По условию ПН подгруппа D нормальна в некоторой силовской 2-подгруппе S из G. По лемме 1.5 $\Omega_1(Z(D)) = \langle z\rangle$ и, следовательно, $N_G(D) \leq C$. Но тогда $T_1 = D \bigcap E(C) \lhd S$, что невозможно, так как в S есть элемент, переставляющий подгруппы L_1 и L_2. Поэтому G не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.7. *$G \not\cong PSp_{2n}(q)$ для всех $n \geq 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong PSp_{2^n}(q)$, $n \geq 2$. Рассмотрим 2-адическое разложение числа $2n$: $2n = 2^{n_1} + ... + 2^{n_k}$, где $n_1 > ... > n_k \geq 1$. Ввиду леммы 3.5 имеем $k \geq 2$ и, следовательно, $n_1 \geq 2$. Ввиду [8, 4.1.3] группа G содержит центральную инволюцию z такую, что для $C = C_G(z)$ имеем $C = L_1 \circ L_2$, где $L_1 \cong Sp_{2^{n_1}}(q)$ и $L_2 \cong Sp_{2n-2^{n_1}}(q)$. Ввиду леммы 3.5 в L_1 найдутся две силовские 2-подгруппы T_1 и T_2 такие, что для $D_1 = T_1 \bigcap T_2$ индекс $|L_1 : N_{L_1}(D_1)|$ четен и $\Omega_1(Z(D_1)) = \Omega_1(Z(L_1)) = \langle z\rangle$. Ввиду леммы 1.2 в L_2 найдутся две силовские 2-подгруппы R_1 и R_2 такие, что $R_1 \bigcap R_2 = O_2(L_2)$. Положим $U_i = T_iR_i$ для $i = 1, 2$. Тогда U_1 и U_2 являются силовскими 2-подгруппами в C (а значит, и в G), пересечение D которых равно $D_1O_2(L_2)$. По условию ПН подгруппа D нормальна в некоторой силовской 2-подгруппе S из G. Так как $Z(D) = \langle z\rangle$, то $S < C$. Но $L_1 \lhd C$, поэтому $D_1 = D \bigcap L_1 \lhd S \bigcap L_1$; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.8. *$G \not\cong L^{\epsilon}_n(q)$ для всех $n > 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $H = SL^{\epsilon}_n(q)$, где $n > 2$, и докажем, что H не является ПН-группой. Отсюда, очевидно, будет следовать утверждение леммы. Рассмотрим 2-адическое разложение числа n: $n = 2^{n_1} + ... + 2^{n_k}$, где $n_1 > ... > n_k \geq 0$. Ввиду лемм 3.3 и 3.4 имеем $k \geq 2$ и, следовательно, $n_1 \geq 2$. Ввиду [8, 4.1.4] группа H содержит центральную инволюцию z такую, что для $C = C_H(z)$ имеем $C = (L_1 \times L_2).[q - \epsilon 1]$, где $[q - \epsilon 1]$ обозначает некоторую группу порядка $q - \epsilon 1$, $L_1 \cong SL^{\epsilon}_{2^{n_1}}(q)$, $L_2 \cong SL^{\epsilon}_{n-2^{n_1}}(q)$, L_1 и L_2 — нормальные подгруппы в C и $C/C_C(L_1) \cong PGL^{\epsilon}_{2^{n_1}}(q)$. Теперь, рассуждая как в лемме 3.7, получим, что H не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.9. *$G \not\cong P\Omega_{2n+1}(q)$ для всех $n \geq 3$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong P\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 3$.

Предположим, что $n = 3$. Если $q = 3$, то по [6] в G есть максимальная подгруппа H четного индекса, изоморфная $S_4 \times S_6$, поэтому, применяя леммы 1.1 и 1.4, получим, что G не является ПН-группой. Таким образом, $q > 3$. Ввиду [8, 4.1.6, 2.9.1] группа G содержит центральную инволюцию z такую, что для $C = C_G(z)$ имеем $C = (L_1 \times L_2).2^2$, где $L_1 \cong \Omega_3(q) \cong L_2(q)$, $L_2 \cong \Omega^+_4(q) \cong SL_2(q) \circ SL_2(q)$ и $C/L_1 \cong PGO^+_4(q)$. Рассуждая, как при доказательстве леммы 3.7, получим, что G не является ПН-группой.

Итак, $n > 3$. Рассмотрим 2-адическое разложение числа $2n$: $2n = 2^{n_1} + ...+ 2^{n_k}$, где $n_1 > ... > n_k \geq 1$ и $n_1 \geq 3$. Ввиду [8, 4.1.6] группа G содержит центральную инволюцию z такую, что для $C = C_G(z)$ имеем: если $k = 1$, то $C = L_1.2$, где $L_1 \cong \Omega_{2^{n_1}}(q)$ и $C/Z(L_1)$ изоморфна подгруппе из $PGO^+_{2^{n_1}}(q)$; если $k > 1$, то $C = (L_1 \times L_2).2^2$, где $L_1 \cong \Omega_{2^{n_1}}(q)$, $L_2 \cong \Omega_{2n+1-2^{n_1}}(q)$ и $C/C_C(L_1)) \cong PGO^+_{2^{n_1}}(q)$. Опять рассуждая, как при доказательстве леммы 3.7, получим, что G не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.10. *$G \ncong P\Omega^+_{2n}(q)$ для всех $n \geq 4$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong P\Omega^+_{2n}(q)$, $n \geq 4$. Ввиду леммы 3.6 n не является степенью 2 и, в частности, $n > 4$. Рассмотрим 2-адическое разложение числа $2n$: $2n = 2^{n_1} + ... + 2^{n_k}$, где $n_1 > ... > n_k \geq 1$, $k > 1$ и $n_1 \geq 3$. Ввиду [8, 4.1.6] группа G содержит центральную инволюцию z такую, что для $C = C_G(z)$ имеем $C = (L_1L_2).2^2$, где $L_1 \cong \Omega^+_{2^{n_1}}(q)$, $L_2 \cong \Omega^+_{2n-2^{n_1}}(q)$ и $C/C_C(L_1) \cong PGO^+_{2^{n_1}}(q)$. Опять рассуждая, как при доказательстве леммы 3.7, получим, что G не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.11. *$G \ncong P\Omega^-_{2n}(q)$ для всех $n \geq 4$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong P\Omega^-_{2n}(q)$, $n \geq 4$.

Предположим, что $n = 4$. Ввиду [8, 4.1.6, 2.9.1] группа G содержит центральную инволюцию z такую, что для $C = C_G(z)$ имеем: $C = (L_1 \times L_2).2^2$, где $L_1 \cong \Omega^-_4(q) \cong L_2(q^2)$, $L_2 \cong \Omega^+_4(q) \cong SL_2(q) \circ SL_2(q)$, $C/C_C(L_2)) \cong PGO^+_4(q)$ и $C/L_2 \cong 2 \times PGO^-_4(q)$. Пусть $L_2 = M_1 \circ M_2$, где $M_1 \cong M_2 \cong SL_2(q)$. Тогда $N_C(M_1) = N_C(M_2)$ — подгруппа индекса 2 в C и $N_C(M_1)/C_C(M_1) \cong PGL_2(q)$.

Пусть $q = 3$. Тогда по [6] в G есть максимальная подгруппа H нечетного индекса такая, что $F^*(H) \cong 4 \times L_4(3)$, $\bar{H} := H/O_2(H) \cong L_4(3) : 2_2 \cong PGO^+_6(3)$ и в $\bar{H}$ есть максимальная подгруппа $\bar{L}$ четного индекса, изоморфная $2\times S_4\times S_4$, причем $\bar{L} \bigcap F^*(H) \cong S_4\times S_4$. Ввиду лемм 1.1 и 1.4 в H найдутся две силовские 2-подгруппы, пересечение D которых изоморфно $D_8 \times 2^2$, причем индекс $|H : N_H(D)|$ четен. Но $N_G(D) \leq N_G(D') = H$, поэтому индекс $|G : N_G(D)|$ четен, т. е. G не является ПН-группой.

Таким образом, $q > 3$. Поэтому $E(L) = L_1 \times M_1 \circ M_2$. Пусть T — силовская 2-подгруппа в M_1. Ввиду лемм 1.2 и 1.3 в $E(L)$ найдутся две силовские 2-подгруппы R_1 и R_2, пересечение которых равно T. Подгруппа R_i строго содержится в некоторой силовской 2-подгруппе V_i группы C для $i = 1, 2$. Пусть $D = V_1 \bigcap V_2$. По условию ПН подгруппа D нормальна в некоторой силовской 2-подгруппе S из G. Так как $Z(D) = \langle z\rangle$, то $S < C$. Но тогда $L_1 \lhd C$, поэтому $T = D \bigcap E(C) \lhd S$, что невозможно, так как в S есть элемент, переставляющий подгруппы M_1 и M_2.

Итак, $n > 4$. Рассмотрим 2-адическое разложение числа $2n$: $2n = 2^{n_1} + ... + 2^{n_k}$, где $n_1 > ... > n_k \geq 1$ и $n_1 \geq 3$. Ввиду [8, 4.1.6] группа G содержит центральную инволюцию z такую, что для $C = C_G(z)$ имеем: если $k = 1$, то $C = (L_1 \circ L_2).2^2$, где $L_1 \cong \Omega^+_{2^{n_1-1}}(q)$, $L_2 \cong \Omega^-_{2^{n_1-1}}(q)$ и $C/C_C(L_1) \cong P\Omega^+_{2^{n_1-1}}(q)$; если $k > 1$, то $C = (L_1L_2).2^2$, где $L_1 \cong \Omega^+_{2^{n_1}}(q)$, $L_2 \cong \Omega^-_{2n-2^{n_1}}(q)$ и $C/C_C(L_1) \cong P\Omega^+_{2^{n_1}}(q)$. Опять рассуждая, как при доказательстве леммы 3.7, получим, что G не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.12. *$G \ncong G_2(q)$ и ${}^3D_4(q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong G_2(q)$ или ${}^3D_4(q)$. Тогда ввиду [12, леммы 4.21 и 4.22] и [19, таблица 5.1] для централизатора $L = C_G(t)$ любой инволюции t из G имеем $L = (L_1 \circ L_2).2$, где L_1 и L_2 — нормальные подгруппы в L, $L_1 \cong SL_2(q)$, $L_2 \cong SL_2(q)$ или $SL_2(q^3)$ соответственно, $C_G(L_1L_2) = \langle t\rangle$ и $L/L_1 \cong PGL_2(q)$ или $PGL_2(q^3)$ соответственно. Ввиду предложения 2.4, если $G \cong G_2(q)$, то $q > 3$. Пусть T — силовская 2-подгруппа в L_1 и $N = N_L(T)$. Тогда $L = L_1N$ и, следовательно, $\bar{N} = N/N \cap L_1 \cong PGL_2(q)$ или $PGL_2(q^3)$ соответственно. Рассуждая, как в соответствующем месте доказательства леммы 3.1, получаем, что в $\bar{N}$ найдутся две силовские 2-подгруппы $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ такие, что $\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 = \langle \bar{u}\rangle$ для некоторой инволюции $\langle \bar{u}\rangle$ из $\bar{N} \setminus \bar{N}'$, причем индекс $|\bar{N} : N_{\bar{N}}(\langle \bar{u}\rangle)|$ четен. Пусть D — некоторая силовская 2-подгруппа из полного прообраза в N группы $\langle \bar{u}\rangle$ и R_i — некоторая силовская 2-подгруппа из полного прообраза в N группы $\bar{R}_i$, содержащая D, для $i = 1, 2$. Тогда $D = R_1 \cap R_2$ и $\bar{D} = \langle \bar{u}\rangle$.

Отсюда следует, что $T < D$ и индекс $|L : N_L(D)|$ четен. Так как D' — циклическая группа, содержащая $\langle t\rangle$, то $N_G(D) \leq C_G(t)$. Поэтому индекс $|G : N_G(D)|$ четен и, следовательно, G не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.13. *$G \ncong F_4(q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong F_4(q)$. Тогда по [12, лемма 4.20] группа G содержит нецентральную инволюцию t такую, что для $L = C_G(t)$ имеем $L \cong \mathrm{Spin}_9(q)$ и $Z(L) = O_2(L) = \langle t\rangle$. Применяя леммы 1.1 и 1.2, получим, что G не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.14. *$G \ncong E_7(q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong E_7(q)$. Тогда по [12, лемма 4.24] и [19, табл. 5.1] группа G содержит нецентральную инволюцию t такую, что для $L = C_G(t)$ имеем $L = (J \circ Z).e$, где $J \cong e.E_6^\epsilon(q)$, $e = (3, q - \epsilon 1)$, $q \equiv \epsilon 1 \pmod 4$ и $C_G(J) = Z \cong q - \epsilon 1$. Применяя леммы 1.1 и 1.2, получим, что G не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.15. *$G \ncong E_8(q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong E_8(q)$. Тогда ввиду [21, теоремы 1 и 2] группа G содержит подгруппу H четного индекса такую, что $O_2(H) \cong 2^5.2^{10}$, $G/H \cong L_5(2)$ и $H = N_G(O_2(H))$. Применяя леммы 1.1 и 1.2, получим, что G не является ПН-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.16. *$G \ncong E_6^\epsilon(q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G \cong E_6^\epsilon(q)$. Тогда ввиду [12, леммы 4.25 и 4.26] и [19, таблица 5.1] группа G содержит нецентральную инволюцию t такую, что для $L = C_G(t)$ имеем $L = (L_1 \circ L_2).2$, где $L_1 \cong SL_2(q)$, $L_2 \cong SL_6^\epsilon(q)/O_3(Z(SL_6^\epsilon(q)))$, $C_G(L_1L_2) = \langle t\rangle$ и $L/L_2 \cong PGL_2(q)$. Ввиду лемм 1.2 и 1.3 в L_1L_2 найдутся силовские 2-подгруппы T_1 и T_2 такие, что $T_1 \cap T_2 = O_2(L_1L_2) = O_2(L)$. В L найдутся силовские 2-подгруппы R_1 и R_2 такие, что $T_i < R_i$ для $i = 1, 2$. Если $T_1 \cap T_2 = R_1 \cap R_2$, то, применяя лемму 1.1, получим, что G не является ПН-группой. Поэтому $O_2(L) < R_1 \cap R_2$ и $|R_1 \cap R_2 : O_2(L)| = 2$. В L найдутся силовские 2-подгруппы U_1 и U_2 такие, что $R_i < U_i$ для $i = 1, 2$. Положим $D = U_1 \cap U_2$.

Пусть $q = 3$. Тогда $O_2(L) = O_2(L_1) \cong Q_8$ и $L/L_2 \cong PGL_2(3) \cong S_4$. Так как $R_1 \cap R_2 \cap L_1L_2 = T_1 \cap T_2 = O_2(L)$ и $R_1 \cap R_2 \cap L_2 = \langle t\rangle$, то $(R_1 \cap R_2)L_2/L_2 \cong R_1 \cap R_2/\langle t\rangle \cong D_8$. Поэтому коммутант подгруппы $R_1 \cap R_2$ есть циклическая подгруппа порядка 4, содержащая t. Если $R_1 \cap R_2 < D$, то $R_1 \cap R_2 < N_D(R_1 \cap R_2)$. Но $N_D(R_1 \cap R_2)$ централизует t, и значит, содержится в $R_1 \cap R_2$; противоречие. Таким образом, $R_1 \cap R_2 = D$ и, следовательно, $N_G(D) \leq L$, откуда G не является ПН-группой.

Итак, $q > 3$ и, следовательно, $O_2(L) = \langle t\rangle$ и $|R_1 \cap R_2| = 4$. Если $R_1 \cap R_2$ — циклическая группа, то, рассуждая как в предыдущем абзаце, получим, что G не является ПН-группой. Поэтому $R_1 \cap R_2 = \langle t\rangle \times \langle u\rangle$ — четверная группа. Положим $V = \langle t\rangle \times \langle u\rangle$.

Предположим, что $V = D$. Тогда $|N_G(V)|_2 = |G|_2$. Но $|N_G(V)/C_G(V)|_2 \leq 2$ и $|C_G(V)|_2 \leq |L|_2$, следовательно, $|N_G(V)|_2 \leq 2|L|_2$. Получаем противоречие с тем, что $|G|_2 = 8|L|_2$.

Таким образом, $V < D$. Так как $C_D(t) = C_{U_1}(t) \cap C_{U_2}(t) = R_1 \cap R_2 = V$, то ввиду [20, I.14.9 и III.7.6] получаем, что D — неабелева диэдральная или полудиэдральная группа. Поэтому можно считать, что $Z(D) = \langle u\rangle$ и $t^x = tu$ для некоторого элемента x из $N_D(V)$. В частности, u — центральная инволюция в G. Пусть $R = R_1 \cap (L_1\langle u\rangle)$. Тогда R — полудиэдральная группа порядка 16 и, следовательно, $u^y = tu$ для некоторого элемента y из $N_R(V)$. Таким образом, получаем, что все инволюции в G сопряжены. Это противоречит тому, что u — центральная инволюция, а t — нецентральная инволюция в G.

Лемма доказана.

Теперь теорема следует из предложений 2.1–2.4 и лемм 3.1, 3.7–3.16.

Поступила 16.04.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кабанов В.В., Махнев А.А., Старостин А.И.** Конечные группы с нормальными пересечениями силовских 2-подгрупп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 6. С. 655–658.
2. Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь. 15-е изд. Новосибирск: НГУ, 2002.
3. **Войтенко Т.Ю., Левчук В.М.** Парные унипотентные пересечения групп Шевалле малых лиевых рангов // Симметрия и дифференциальные уравнения. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2000. С. 71–74.
4. **Войтенко Т.Ю., Левчук В.М.** Гипотеза В. И. Зенкова о парных p-силовских пересечениях групп Шевалле характеристики p // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 749–761.
5. **Левчук В.М.** Гиперцентральные ряды и парные пересечения силовских подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 6. С. 730–744.
6. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
7. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
8. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups // London Math. Soc. Lect. Note Ser. 1990. Vol. 129.
9. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундамент. и прикл. математика. 1996. Т. 2, № 1. С. 1–92.
10. **Зенков В.И., Мазуров В.Д.** О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 424–432.
11. **Gorenstein D., Lyons R.** The local structure of finite groups of characteristic 2 type // Mem. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 42, no. 276. P. 1–731.
12. **Harris M. E.** Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over a field of odd order // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272, no 1. P. 1–65.
13. **Дьедонне Ж.** Геометрия классических групп. М.: Мир, 1974.
14. **Gorenstein D., Harada K.** On finite groups with Sylow 2-subgroup of type A_n, $n = 8,\ 9,\ 10,\ 11$ // Math. Z. 1970. Bd. 117. P. 207–238.
15. **Schoenwaelder U.** Finite groups with a Sylow 2-subgroup of type M_{24}, I // J. Algebra. 1974. Vol. 28, no. 1. P. 20–45.
16. **Finkelstein L.** The maximal subgroups of Conway's group C_3 and Mclaughlin's group // J. Algebra. 1973. Vol. 25, no. 1. P. 58–89.
17. **Gorenstein D., Harada K.** Finite simple groups of low 2-rank and the families $G_2(q)$, $D_4^2(q)$, q odd // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, no. 6. P. 829–862.
18. **Hall D., Senior K.** The groups of order $2^n (n \leq 6)$. New York: The Macmillan Company, 1964.
19. **Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3) 1992. Vol. 65, no. 2. P. 297–325.
20. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer, 1967.
21. **Cohen A.M., Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** The local maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic // Proc. London Math. Soc. (3) 1992. Vol. 64, no. 1. P. 21–48.

Том 13 № 2 2007

УДК 517.956.226

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАНДАУ — ЛИФШИЦА[1]

Л. А. Калякин, М. А. Шамсутдинов

Исследована асимптотика по малому параметру решений системы уравнений Ландау — Лифшица с медленно меняющимися коэффициентами и малыми диссипативными слагаемыми. Эти уравнения представляют собой математическую модель для одноосного ферромагнетика в нестационарном магнитном поле. Построенные асимптотики позволяют описать эффект перемагничивания и выявить влияние параметров внешнего магнитного поля и диссипации на устойчивость этого процесса.

Введение

Основным объектом исследования в данной статье являются два дифференциальных уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = h\sqrt{1-r^2}\sin\psi + \lambda(1-r^2)\Big[\Omega + \Big(a + r - h\dfrac{r\cos\psi}{\sqrt{1-r^2}}\Big)\Big], \\[2ex] \dfrac{d\psi}{dt} = a + r - \dfrac{h}{\sqrt{1-r^2}}\Big(r\cos\psi + \lambda\sin\psi\Big), \end{cases} \tag{0.1}$$

которые содержат малые параметры в аргументах медленно меняющихся коэффициентов: $a(\varepsilon t), h(\varepsilon t), \Omega(\varepsilon t),\ 0 < \varepsilon \ll 1$, и в множителе λ, $0 \le \lambda \ll 1$. Заданные функции $a(\tau), h(\tau), \Omega(\tau)$ считаются гладкими — бесконечно дифференцируемыми по τ. Целью работы является построение асимптотики решений при $\varepsilon \to 0$ с $\lambda = \mathcal{O}(\varepsilon)$ на большом промежутке времени $0 < t \le \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, когда коэффициенты уравнений значительно меняются. Основное внимание уделяется решениям вблизи устойчивого положения равновесия соответствующей системы с “замороженными” коэффициентами.

Подходы к такого типа задачам хорошо известны и обычно связываются с терминами *усреднение* и *двухмасштабное разложение* [1]. Интерес к конкретным уравнениям (0.1) обусловлен их ролью в задачах магнитодинамики [2, 3]. Предъявляемые нами решения описывают процесс перемагничивания однодоменного одноосного ферромагнетика в нестационарном магнитном поле. Полученные результаты дают представление о роли различных параметров внешнего поля в процессе перемагничивания, который в математической модели выглядит как медленное движение положения равновесия при медленном изменении коэффициентов. В реальных физических экспериментах такая ситуация реализуется при квазистатическом перемагничивании, когда кривая намагничивания соответствует непрерывной последовательности равновесных состояний [4]. В этом случае время управляемого перемагничивания T_h остается намного бóльшим характерного времени $T_{fm} = \omega_{fm}^{-1}$, связанного с частотой линейного ферромагнитного резонанса ω_{fm}. Строгий анализ динамики прохождения магнитной системой последовательности таких равновесных состояний до настоящего времени отсутствовал.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-00124, 06-01-92052), INTAS (проект 03-51-4286).

1. Происхождение задачи

Рассмотрим динамику вектора намагниченности $\mathbf{M}$ в ферромагнетике при медленном изменении характеристик внешнего магнитного поля. Исходные уравнения Ландау — Лифшица для вектора намагниченности $\mathbf{M}$ обычно выписываются через векторные произведения с участием эффективного магнитного поля $\mathbf{H}_{eff}$. Для пространственно однородной системы эти уравнения будут обыкновенными и в случае ферромагнетика имеют вид [2,3,5]:

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\tilde{t}} = -\gamma[\mathbf{M}, \mathbf{H}_{eff}] - \frac{\lambda_1}{\mathbf{M}^2}[\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{H}_{eff}]]. \tag{1.1}$$

Коэффициенты $\gamma, \lambda_1 = \mathrm{const} \geq 0$ соответствуют гиромагнитному отношению и параметру затухания; они считаются постоянными.

Имея в виду закон сохранения $|\mathbf{M}(\tilde{t})| = M_0 = \mathrm{const}$, эти уравнения можно переписать для двух углов θ, φ, которые представляют собой полярные координаты вектора намагниченности

$$\mathbf{M} = M_0(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

Структура получаемых таким образом уравнений зависит от выбора вектора $\mathbf{H}_{eff}$. Ниже рассматривается модель, в которой присутствует заданное внешнее магнитное поле, определяемое вектором $\mathbf{h} = (h_0(\cos\Phi, \sin\Phi), h_3)$. Величины h_0, h_3 задают поперечную и продольную амплитуды поля, а фаза $\Phi = \Phi(\tilde{t})$ задает вращение поперечной компоненты с частотой $\tilde{\Omega} = \Phi'(\tilde{t})$. Считается, что амплитуды и частота поля могут зависеть от времени; скорость их изменения (характерный временной масштаб) характеризуется величиной T_h так, что производные этих функций имеют оценки

$$\sup_{\tilde{t}} \Big\{ |h_0'(\tilde{t})|, |h_3'(\tilde{t})|, |\tilde{\Omega}'(\tilde{t})| \Big\} = 1/T_h \qquad (T_h = \mathrm{const}).$$

Помимо того, в эффективном поле учитывается одноосная анизотропия с коэффициентом $K = \mathrm{const} > 0$. Таким образом, $\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{h} + 2K/M_0(0, 0, \cos\theta)$.

Уравнения принимают наиболее простую форму в системе координат, вращающейся с частотой внешнего поля. Переход в такую систему координат соответствует замене азимутального угла φ на переменную $\psi = \varphi - \Phi$. Для функций θ, ψ получаются уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = -h\sin\psi + \lambda[h\cos\theta\cos\psi - (a + \Omega + \cos\theta)\sin\theta], \\[2ex] \Big[\dfrac{d\psi}{dt} - a - \cos\theta\Big]\sin\theta = -h\cos\theta\cos\psi - \lambda h\sin\psi. \end{cases} \tag{1.2}$$

Фигурирующие здесь коэффициенты связаны с исходными данными следующими формулами:

$$\lambda = \lambda_1/M_0\gamma, \quad \Omega = M_0\tilde{\Omega}/2K\gamma, \quad a = M_0 h_3/2K - \Omega, \quad h = M_0 h_0/2K.$$

Кроме того, в (1.2) изменен масштаб времени так, что новая независимая переменная t связана со старой $\tilde{t}$ соотношением: $t = \tilde{t}\cdot\omega_{fm}$, где $\omega_{fm} = 2K\gamma/M_0$. Масштаб времени T_h, характерный для внешнего поля, индуцирует в коэффициентах $a, h, \Omega(\tau)$ зависимость от временно́й переменной $\tau = \varepsilon t$. Множитель $\varepsilon = (\omega_{fm}T_h)^{-1} = T_{fm}/T_h \ll 1$ характеризует отношение временны́х масштабов и считается малым. Это неравенство составляет основное ограничение на параметры внешнего поля, помимо требования ограниченности и гладкости функций $a, h, \Omega(\tau) = \mathcal{O}(1)$.

Уравнения рассматриваются на цилиндре с традиционным для физиков выбором границ: $0 < \theta < \pi$, $-3\pi/2 < \psi \leq \pi/2$. Иногда вместо угла θ удобно использовать переменную типа амплитуды $r = \cos\theta$. Как раз в этих переменных r, ψ уравнения принимают форму (0.1). В случае нулевого коэффициента диссипации $\lambda = 0$ они оказываются гамильтоновыми

$$\frac{dr}{dt} = \partial_\psi H, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\partial_r H \tag{1.3}$$

с гамильтонианом

$$H(r,\psi) = -ar - r^2/2 - h\sqrt{1-r^2}\cos\psi,$$

который имеет смысл энергии системы.

Отметим, что уравнения (0.1) инвариантны относительно преобразования со сменой знака $r \Rightarrow -r,\ \psi \Rightarrow -\psi,\ a \Rightarrow -a,\ \Omega \Rightarrow -\Omega$, а также относительно преобразования $\psi \Rightarrow \psi+\pi,\ h \Rightarrow -h$. Поэтому достаточно исследовать решения уравнений с неотрицательными коэффициентами $a, h \geq 0$. Коэффициент диссипации считается неотрицательным $\lambda \geq 0$ из физических соображений. Знак коэффициента Ω не оговаривается.

2. Основной результат

В том случае, когда коэффициенты постоянны, система (0.1) имеет неподвижные точки. Например, в случае $\Omega = 0$ пара таких точек: $r = r_+,\ \psi = 0$ и $r = r_-,\ \psi = -\pi$ определяется через корни $r_\pm$ пары уравнений

$$a + r \mp hr/\sqrt{1-r^2} = 0. \tag{2.1}$$

Такие решения интерпретируются как состояния равновесия соответствующей физической системы. Очевидно, они зависят от значений коэффициентов a, h, а в конечном счете от параметров внешнего поля $\mathbf{h}$. Исходная задача ставится следующим образом: требуется перевести систему из положения равновесия с одним значением коэффициентов в положение равновесия с другим значением, используя медленную (по времени) деформацию коэффициентов, т.е. параметров внешнего поля $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\tilde{t})$. В математической постановке речь идет об исследовании решений дифференциальных уравнений, коэффициенты которых медленно меняются.

Для неавтономных уравнений даже в гамильтоновом случае (1.3) выписать какие-либо формулы для точных решений невозможно. Однако наличие малого параметра ε позволяет построить асимптотические решения, которые отличаются от точных на величину порядка $\mathcal{O}(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0$. Для гамильтоновых систем такие конструкции известны под названием *адиабатические приближения*. Этот подход с успехом применяется и для более общих систем, в которые негамильтоновы слагаемые входят с малыми множителями и рассматриваются как малые возмущения. Как раз таким способом исследуются уравнения (0.1). Основной результат содержится в следующем утверждении:

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнений* (0.1) *зависят от медленного времени* $\tau = \varepsilon t$, *и* $a^{2/3} + h^{2/3} > 1,\ h_0 \leq h(\tau) \leq h_1;\ \lambda = \mathcal{O}(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0;\ h_0, h_1 = \mathrm{const} > 0$. *Тогда*

(1) *существует асимптотическое решение*

$$r(t;\varepsilon) = r_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n r_n(\tau), \quad \psi(t;\varepsilon) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(\tau), \quad \varepsilon \to 0, \quad \forall\, \tau = \varepsilon t \in [0, \mathcal{O}(1)], \tag{2.2}$$

главный член которого $r_0 = r_+,\ \psi_0 = 0$, *либо* $r_0 = r_-,\ \psi_0 = -\pi$ *определяется единственным корнем соответствующего уравнения* (2.1);

(2) *Если коэффициент* $a(\tau) \to \pm\infty,\ \tau \to \infty$, *то главный член асимптотики принимает значения, близкие к граничным*: $|r_0(\tau)| \to 1,\ \tau \to \infty$;

(3) *Если частота* $\Omega(\tau) \geq 0$ *положительна, то решение с* $r_0 = r_+,\ \psi_0 = 0$ *устойчиво, а решение с* $r_0 = r_-,\ \psi_0 = -\pi$ *неустойчиво относительно возмущения начальных данных на временах* $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$;

(4) *Если частота* $\Omega(\tau) \leq \Omega_0 < 0$ *достаточно большая отрицательная, то решение с* $r_0 = r_+,\ \psi_0 = 0$ *неустойчиво, а решение с* $r_0 = r_-,\ \psi_0 = -\pi$ *устойчиво относительно возмущения начальных данных на временах* $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

П о я с н е н и я. 1. На временах, которые соответствуют конечным значениям $\tau = \varepsilon t \in [0, \mathcal{O}(1)]$, медленно меняющаяся точка равновесия не приближается к границе $|r| = 1$, поскольку функция $a(\tau)$ ограничена, а $h(\tau)$ отделена от нуля. 2. Под устойчивостью понимается близость решений равномерно на конечном промежутке времени; этот промежуток в быстром временном масштабе $t \in [0, \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})]$ при малых $\varepsilon \ll 1$ оказывается бóльшим. Устойчивость по Ляпунову здесь не обсуждается из-за непригодности асимптотик по малому параметру на очень далеких временах $t \gg \varepsilon^{-1}$.

Дальнейшее изложение содержит конструкции асимптотических решений при $\varepsilon \to 0$, которые пригодны на временах $t \in [0, \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})]$. Доказательство теоремы 1 получается как результат этих построений. Предъявляя формальные асимптотические решения, мы не касаемся обоснования асимптотики, поскольку для рассматриваемой задачи применимы результаты по обоснованию из [8].

С точки зрения физики теорема 1 представляет собой строгое обоснование и дальнейшее развитие теории перемагничивания Стонера–Вольфарта [6], основанной на анализе энергии ферромагнетика в статическом приближении при отсутствии вращения поперечного поля. При этом неожиданный результат обнаруживается в утверждении (4). Его физическая интерпретация для одноосного ферромагнетика со слабой диссипацией в модели Ландау — Лифшица содержит предсказание возможности перемагничивания поперечным полем, вращающимся с достаточно большой частотой в направлении, противоположном направлению свободной прецессии вектора намагниченности вокруг продольного магнитного поля.

3. Анализ неподвижных точек

Рассмотрим исходные уравнения (0.1) в случае, когда все коэффициенты постоянные. Выявим в структуре неподвижных точек зависимость от этих коэффициентов как от параметров.

В случае, когда поперечное поле не вращается ($\Omega = 0$), неподвижные точки не зависят от коэффициента диссипации λ и определяются из уравнений

$$\sin\psi = 0, \quad a + r - h\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\cos\psi = 0. \tag{3.1}$$

Таким образом, в рассматриваемой части фазовой плоскости неподвижные точки могут быть лишь на линиях $\psi = -\pi$ либо $\psi = 0$. Поскольку $h > 0$, то на линии $\psi = -\pi$ имеется одна неподвижная точка, координата которой $r = r_- \le 0$ неположительна при $a \ge 0$. На линии $\psi = 0$ число неподвижных точек зависит от соотношения величин a, h, так что в области параметров имеется бифуркационная кривая $a^{2/3} + h^{2/3} = 1$.

Лемма 1. *Пусть $\Omega = 0$. В области $|r| < 1$, $\psi \in [-3\pi/2, \pi/2]$ всегда существует две неподвижных точки с координатами $\psi = 0$, $r = r_+ \ge 0$ и $\psi = -\pi$, $r = r_- \le 0$. Если $a^{2/3} + h^{2/3} > 1$, то других неподвижных точек нет. Если $a^{2/3} + h^{2/3} < 1$, то существует дополнительная пара неподвижных точек с координатами $\psi = 0$, $r = r^0_\pm$ $(-1 < r^0_- < r^0_+ \le 0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к исследованию корней уравнения четвертого порядка $(1-r^2)(a+r)^2 - h^2r^2$ в области $|r| < 1$. Зависимость корней от a, h наиболее легко усмотреть в угловой переменной θ, когда алгебраическое уравнение из (3.1) приобретает вид $a + \cos\theta = \pm h \operatorname{ctg}\theta$. Бифуркационная кривая $a^{2/3} + h^{2/3} = 1$ соответствует параметрам, при которых имеется кратный корень.

Тип неподвижной точки обычно определяется матрицей линеаризованной системы. При отсутствии диссипации, когда $\lambda = 0$, часть собственных значений матрицы оказываются чисто мнимыми, и поэтому для определения типа неподвижной точки следует учесть наличие гамильтониана. Имеет место

Лемма 2. *Пусть* $\Omega = 0$. *Если* $\lambda = 0$, *то две неподвижные точки* $\psi = -\pi$, $r = r_-$ *и* $\psi = 0$, $r = r_+$ *являются центрами. Дополнительная пара точек с координатами* $\psi = 0$, $r = r^0_\pm$ $(-1 < r^0_- < r^0_+ \leq 0)$, *которая возникает при* $a^{2/3} + h^{2/3} < 1$, *представляет собой седло и центр.*

Фазовый портрет системы (при отсутствии диссипации $\lambda = 0$) включает семейство замкнутых траекторий вблизи центров; см. рис. 1–3. Они соответствуют периодическим движениям. Кроме того, при $a \neq 0$ имеется серия незамкнутых траекторий, которые соответствуют так называемым вращающимся движениям с неограниченно растущим углом $\psi(t)$. Области, занятые замкнутыми траекториями, отделяются сепаратрисами. Две из них соединяют две пары граничных точек $r = 1$, $\psi = \pm\pi/2$ и $r = -1, \psi = -3\pi/2, -\pi/2$. В пределе $a \to 0$ сепаратрисы выходят на противоположные границы $r = \mp 1$ и слипаются, соединяя точки $r = \pm 1$ при $\psi = \pi/2$ и $\psi = -\pi/2$.

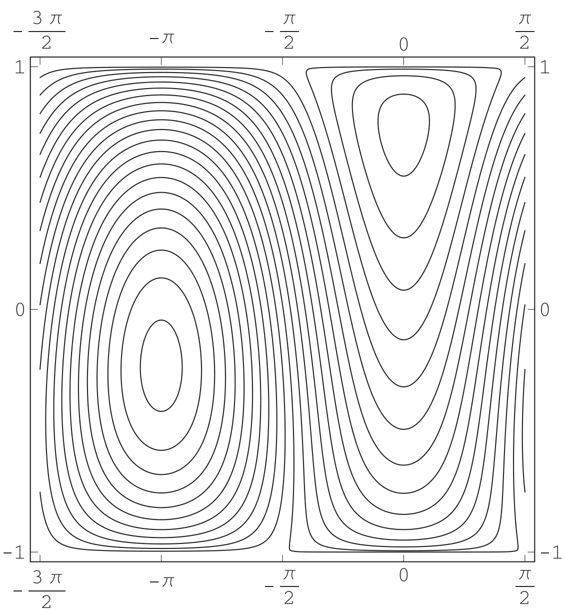


Рис. 1. Фазовый портрет при $a = 0.5$, $h = 1.1$ содержит две неподвижных точки.

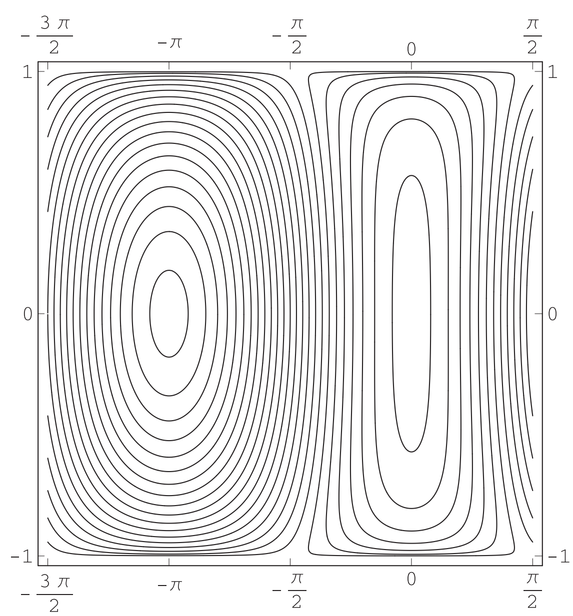


Рис. 2. Фазовый портрет при $a = 0$, $h = 1.1$ содержит две неподвижных точки – центры на оси $r = 0$, соответствующие максимуму и минимуму энергии.

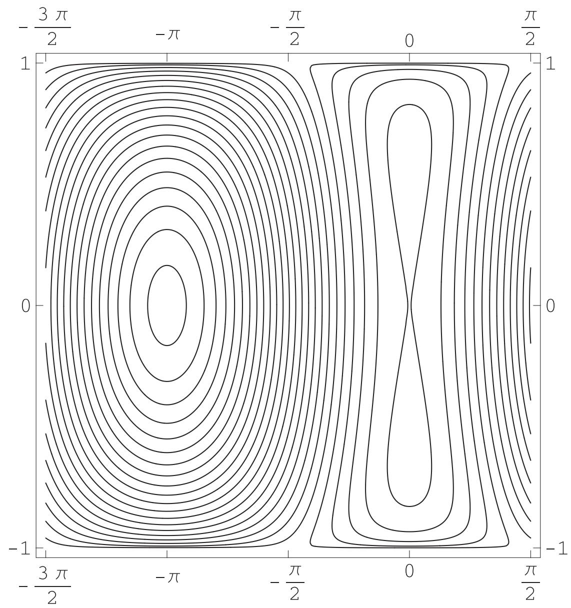


Рис. 3. Фазовый портрет при $a = 0,\ h = 0.78$ содержит четыре неподвижных точки.

Для дальнейшего интерес представляет асимптотика корней $r_\pm$ по параметру a.

Лемма 3. *Пусть* $\Omega = 0$. *Тогда*:

(1) *если* $h > 0$, *то* $r_\pm = \pm[1 - (h/a)^2] + \mathcal{O}(a^{-3}),\ a \to \infty$;

(2) *если* $h > 1$, *то* $r_\pm = \pm a/(h \mp 1) + \mathcal{O}(a^2),\ a \to 0$;

(3) *если* $0 < h < 1$, *то* $r_\pm = \pm\sqrt{1-h^2} + \mathcal{O}(a),\ a \to 0$;

(4) *асимптотики являются равномерными по* h *на любом компакте в указанных промежутках.*

Доказательство. Асимптотические формулы получаются с помощью анализа уравнений (3.1). На рис. 1–3 приведены фазовые портреты при разных значениях a, h.

В гамильтоновой модели (при отсутствии диссипации, когда $\lambda = 0$) центры являются устойчивыми положениями равновесия. Однако физически наблюдаемым состояниям соответствуют лишь те из них, которые устойчивы при диссипативном возмущении с коэффициентом $\lambda > 0$.

Лемма 4. *Пусть* $\Omega = 0$. *Если* $\lambda > 0$, *то две неподвижные точки* $r = r_+,\ \psi = 0$ *и* $r = r_-,\ \psi = -\pi$ *являются либо фокусами, если* λ *не слишком велико, либо узлами, если* λ *достаточно велико. При этом точка* $(r_+, 0)$ *устойчива, а точка* $(r_-, -\pi)$ *неустойчива.*

Доказательство сводится к анализу собственных значений $\nu_{1,2} = B \pm \sqrt{D}$ для матрицы линеаризованной системы, которые вычисляются как корни некоторого квадратного уравнения. Например, для точки $(r_+, 0)$ с $0 \le r_+ < 1$ имеем

$$B = -\frac{\lambda}{2}(1 + r_+^2 + 2a/r_+), \quad D = \lambda^2\Big(\frac{1 - r_+^2}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{a}{r_+} + 1\Big)\Big(\frac{a}{r_+} + r_+^2\Big).$$

Поскольку в этом случае $D < B^2$, то действительная часть обоих собственных значений строго отрицательна, что гарантирует устойчивость этой неподвижной точки. Для точки $(r_-, -\pi)$ в подобном представлении собственных значений можно использовать формулы

$$B = \frac{\lambda}{2}(1 - r_-^2 + 2h), \quad D = \lambda^2\Big(\frac{1 - r_-^2}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{a}{r_-} + 1\Big)^2 - h(1 - r_-^2).$$

Теперь действительная часть обоих собственных значений строго положительна, что гарантирует неустойчивость этой неподвижной точки.

З а м е ч а н и е. Дополнительная пара точек с координатами $\psi = 0$, $r = r^0_\pm$ $(-1 < r^0_- < r^0_+ \leq 0)$, которая возникает при $a^{2/3} + h^{2/3} < 1$, представляет собой седло и либо устойчивый фокус, либо узел.

Легко понять, что при наличии диссипации неподвижные точки структурно устойчивы относительно малых возмущений уравнений, поскольку устойчивы простые корни алгебраических уравнений. В частности, в исходной системе (0.1) слагаемое с множителем $\lambda\Omega = \mu$ можно рассматривать как возмущение. При малом возмущении $0 < |\mu| \ll \lambda$ тип и свойство устойчивости (или неустойчивости) неподвижной точки сохраняются, хотя ее положение смещается. Однако при больших значениях μ ситуация может измениться.

Рассмотрим возмущение гамильтоновой системы (1.3)

$$\frac{dr}{dt} = h\sqrt{1-r^2}\sin\psi + (1-r^2)\mu, \quad \frac{d\psi}{dt} = a + r - h\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\cos\psi. \tag{3.2}$$

Эти уравнения получаются из исходных (0.1) в пределе малой диссипации и большой частоты: $\lambda \to 0$, $\lambda\Omega = \mu \neq 0$.

Такая система всегда имеет две неподвижные точки, которые являются наследниками двух центров в невозмущенной гамильтоновой системе (1.3). Мы не приводим здесь детальный анализ бифуркационной поверхности в пространстве параметров a, h, μ, на которой меняется число неподвижных точек. Основное внимание уделим анализу устойчивости двух положений равновесия.

Лемма 5. *Пусть* $a > 0$, $h > 0$. *Тогда*

(1) *при любом* $\mu \neq 0$ *для системы* (3.2) *существует единственная неподвижная точка* $r = r_+$, $\psi = \psi_+$ *с положительной координатой* $r_+ > 0$, *при этом* $\psi_+ \in (-\pi/2, \pi/2)$. *Эта точка является фокусом, который устойчив при* $\mu > 0$ *и неустойчив при* $\mu < 0$;

(2) *при любом* $\mu \neq 0$ *для системы* (3.2) *существует неподвижная точка* $r = r_-$, $\psi = \psi_-$ *с отрицательной координатой* $r_- < 0$. *Если* $a \geq 1$ *или* $h^2 \geq \mu^2 + 1$, *то эта точка является фокусом, который неустойчив при* $\mu > 0$ *и устойчив при* $\mu < 0$;

(3) *если* $a \geq \mu^2 + 1$ *или* $a^{2/3} + h^{2/3} > 1$, *и значения* μ *достаточно малы, то других неподвижных точек в системе* (3.2) *не существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неподвижные точки определяются соотношениями

$$h\sin\psi = -\mu\sqrt{1-r^2}, \quad hr\cos\psi = (a+r)\sqrt{1-r^2}, \quad |r| < 1.$$

Очевидно, дело сводится к анализу корней алгебраического уравнения

$$P(r) \equiv (1-r^2)[\mu^2 r^2 + (a+r)^2] - h^2 r^2 = 0.$$

Поскольку при $a > 0$ левая часть этого соотношения обладает свойствами $P(\pm 1) < 0$, $P(0) > 0$, то всегда существуют два корня $r_\pm$ такие, что $-1 < r_- < 0 < r_+ < 1$. Из этого же соотношения следует, что на каждом из этих корней правые части уравнений (3.2) по модулю не превосходят единицы. Поэтому уравнения для ψ разрешимы. Наличие двух уравнений для ψ позволяет однозначно идентифицировать соответствующие корни $\psi_\pm$. При ограничениях из (3) алгебраическое уравнение для r не имеет других корней внутри промежутка $|r| < 1$.

Далее следует вычислить собственные значения для матрицы линеаризованной системы в каждой неподвижной точке. Эти собственные значения можно представить в единообразной форме: $\nu_{1,2} = -\mu r \pm \sqrt{D(r)}$ при $r = r_+$ или $r = r_-$. Подкоренное выражение $D(r) = -(a/r+1)(a/r+r^2)$ принимает отрицательное значение в случае $r = r_+ > 0$ всегда, а в случае $r = r_- < 0$ при условиях из (2). Поскольку корни оказываются комплексными, то неподвижные точки будут фокусами. Их устойчивость определяется знаком действительной части $-\mu r$, а в конечном счете знаком величины μ. В частности, если $\mu < 0$, то точка (r_+, ψ_+) является неустойчивым фокусом.

Рассматриваемые неподвижные точки структурно устойчивы относительно малых возмущений. В качестве таких возмущений можно рассматривать диссипативные слагаемые в исходной системе (0.1), полагая $\lambda\Omega = \mu$. При этом, если множитель $\lambda > 0$ мал, $\lambda \ll |\mu|$, то свойство устойчивости той или иной неподвижной точки определяется знаком величины μ. В случае, когда малы оба множителя λ и μ, неподвижные точки системы (0.1) находятся вблизи неподвижных точек гамильтоновой системы (1.3). С учетом предыдущих лемм их тип определяется соотношениями между величинами λ, μ. Например, при возмущении центра $(r_+, 0)$ возникает фокус (r_+, ψ_+), который устойчив при любых положительных $\lambda, \mu > 0$ и при $0 < -\mu \ll \lambda$. Однако при другом соотношении, когда $0 < \lambda \ll -\mu$, фокус оказывается неустойчивым. Лемма доказана.

Полученные результаты по анализу неподвижных точек полной системы (0.1) не используются напрямую в дальнейших асимптотических конструкциях. Однако они проясняют результаты теории возмущений об устойчивости медленно меняющихся (асимптотических) положений равновесия.

Физическое следствие. Утверждение леммы 5 о смене устойчивости неподвижных точек при смене направления вращения поперечного поля дает неожиданную физическую интерпретацию. Оказывается, что для одноосного ферромагнетика со слабой диссипацией имеется возможность быстрого неуправляемого динамического перемагничивания из состояния $(r_+,\ \psi_+)$ в состояние $(r_-,\ \psi_-)$ посредством поперечного поля, вращающегося с частотой Ω, достаточно большой по сравнению с частотой линейного ферромагнитного резонанса ω_{fm}. Причем направление вращения должно быть противоположным направлению свободной прецессии вектора намагниченности вокруг продольного магнитного поля. Детальный математический анализ этого явления здесь не проводится. Пока мы акцентируем внимание на управляемом перемагничивании, которое описывается посредством медленной деформации либо состояния $(r_+,\ \psi_+)$, либо состояния $(r_-,\ \psi_-)$ без каких-либо быстрых скачков.

4. Неосциллирующие асимптотические решения

В этом разделе содержится доказательство первых двух утверждений теоремы 1.

Рассмотрим уравнения (0.1) в предположении, что коэффициенты зависят от времени t, и зависимость эта является медленной. Последнее означает присутствие малого параметра ε в аргументах коэффициентов: $a(\varepsilon t), h(\varepsilon t), \Omega(\varepsilon t),\ 0 < \varepsilon \ll 1$. В таком случае можно выписать приближенное (асимптотическое при $\varepsilon \to 0$) решение, основываясь на формулах для решений уравнений с постоянными коэффициентами. Однако надо иметь в виду, что уравнения с постоянными коэффициентами интегрируются лишь в гамильтоновом случае (при нулевой диссипации $\lambda = 0$). Поэтому эффективные асимптотические формулы для достаточно богатого набора решений получаются лишь для уравнений с малой диссипацией $\lambda = \mathcal{O}(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0$. Основная цель предлагаемой конструкции — выявить влияние такого типа малых возмущений на главный член асимптотики для далеких времен $t \approx \varepsilon^{-1}$, когда становится существенным изменение коэффициентов уравнений. При этом считается, что коэффициент $h(\tau) \in [h_0, h_1]$ принимает значения на компакте, отделенном от нуля: $h_0 = \mathrm{const} > 0$; коэффициент $a(\tau) \in [-A, A],\ A > 0$, меняется на замкнутом промежутке, переходя нулевое значение $a(\tau_0) = 0$. Все исходные функции считаются гладкими (бесконечно дифференцируемыми).

Наиболее просто строятся асимптотические решения на основе неподвижных точек гамильтоновой системы. Они выписываются в виде рядов по степеням малого параметра с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\begin{cases} r(t;\varepsilon) = r_0(\tau) + \varepsilon r_1(\tau) + \ldots, \\ \\ \psi(t;\varepsilon) = \psi_0 + \varepsilon\psi_1(\tau) + \ldots \quad (\tau = \varepsilon t). \end{cases} \tag{4.1}$$

В качестве главных членов ψ_0, r_0 берутся корни уравнений (3.1), которые зависят от медленного времени τ постольку, поскольку зависят от τ коэффициенты $a(\tau), h(\tau)$. Поправки $\psi_n(\tau), r_n(\tau)$ определяются по рекуррентным формулам из линеаризованных уравнений. Например,

$$r_1 = 0, \quad \psi_1 = \frac{1}{h\sqrt{1-r_0^2}\cos\psi_0}\Big[r_0' - \frac{\lambda}{\varepsilon}(1-r_0^2)\Omega\Big]. \tag{4.2}$$

Главные члены асимптотических решений, которые можно построить на этом пути, представляют собой два медленно двигающихся центра гамильтоновой системы. Анализ полученных таким образом решений можно провести на основе свойств корней $r_\pm = r_\pm(a)$ в их зависимости от значений коэффициента $a(\tau)$. Ниже фактически приводится доказательство первой части теоремы 1.

Наиболее простая ситуация возникает для решения, которое основано на неподвижной точке $r_0(\tau) = r_-(a)$ при $\psi_0 = -\pi$. Если коэффициент $a(\tau) \in [-A, A]$ меняется в достаточно широких пределах $A \gg 1$, то $r_0(\tau)$ в своем изменении доходит почти до граничных значений $r_0(\tau) \in (-1+\delta, 1-\delta)$, $\delta = \mathcal{O}(A^{-2})$, $A \to \infty$. Такой результат можно интерпретировать как эффект полного перемагничивания со сменой направления (полярного угла θ) вектора намагниченности на угол, близкий к π. Однако надо помнить, что это положение равновесия неустойчиво при диссипативном возмущении с $\Omega \geq 0$ и поэтому физически не наблюдаемо.

Несколько сложнее ситуация с решением, которое соответствует другому центру $r_0(\tau) = r_+(a)$ при $\psi_0 = 0$. Здесь для полного перемагничивания требуется дополнительное условие $h(\tau_0) > 1$ в момент τ_0, когда $a(\tau_0) = 0$. Это неравенство обеспечивает переход корня $r_0(\tau)$ через нулевое значение в момент τ_0 с последующим приближением к границе $|r| = 1$. Если же оказывается, что $0 < h(\tau_0) < 1$, то корень $r_0(\tau)$ не принимает значения $r = 0$ ни при каких изменениях коэффициента $a(\tau)$. В этом случае эффект полного перемагничивания при азимутальном угле вблизи $\psi = 0$ невозможен. Предельное положение вектора намагниченности (при $a = 0$) определяется полярным углом θ_0 из выражения $\cos\theta_0 = r_+(\tau_0) = \sqrt{1-h^2(\tau_0)}$; см. рис. 3. Таким образом, доказаны первые два утверждения теоремы 1. $\square$

П о я с н е н и е. Асимптотические решения описанного типа можно также строить в общем случае на основе неподвижных точек полной системы (0.1), не предполагая малость множителя λ. К сожалению, в полной системе для других решений нет никаких аналитических представлений. Из-за этого возникают проблемы с исследованием устойчивости построенных таким способом медленно меняющихся положений равновесия, не говоря уж о построении асимптотики других решений. Преимущество автономной гамильтоновой системы (1.3) состоит в том, что для нее легко выписывается богатое семейство периодических решений. Наличие таких решений можно использовать в качестве основы для асимптотического интегрирования возмущенных уравнений (0.1) в предположении малости множителя λ и медленного изменения коэффициентов.

5. Осциллирующие асимптотические решения

В данном разделе для уравнений (0.1) строится двухпараметрическое семейство асимптотических решений. Исследование свойств этих решений, в частности, позволяет доказать вторую часть теоремы 1.

Двухпараметрические семейства периодических решений, которые существуют в окрестности центра гамильтоновой системы, и соответствующие решения возмущенной системы представляют не только математический интерес. Они проясняют роль и значение решений (4.1), основанных на неподвижных точках. Дело в том, что построенные выше асимптотики соответствуют двум изолированным решениям. Очевидно, таких решений слишком мало, чтобы их можно было обнаружить численно или в физических экспериментах. Однако они обнаруживаются как предельные состояния в случае, когда положение равновесия асимптотически устойчиво по Ляпунову (устойчиво хотя бы в возмущенной системе). С этой точки зрения физически наблюдаемым является, например, состояние, которое соответствует решению с главным членом асимптотики $r_0(\tau) = r_+$, $\psi_0 = 0$ при условии, что частота внешнего поля $\Omega \geq 0$ неотрицательна. Такое утверждение можно сделать на основе анализа устойчивости (по Ляпунову) точки равновесия в возмущенной системе. При этом решение, соответствующее другой точке равновесия $r_0 = r_-$, $\psi = -\pi$, оказывается неустойчивым, и соответствующее состояние будет физически не наблюдаемым. Эти выводы получаются на основе теории устойчивости и обоснованы лишь для уравнений с постоянными коэффициентами. Последующее изложение по сути дела представляет собой обоснование похожих утверждений в случае медленно меняющихся коэффициентов.

Излагаемый ниже подход представляет собой один из вариантов метода усреднения [1,7–9]. Наша цель — построение двухпараметрического семейства асимптотических решений в окрестности неподвижной точки невозмущенной гамильтоновой системы. Для представления главного члена асимптотики используются функции $r = r_0(t+t_0, E)$, $\psi = \psi_0(t+t_0, E)$ $(t_0, E = \mathrm{const})$, которые представляют собой двухпараметрическое семейство периодических решений автономной гамильтоновой системы (1.3). Такие решения можно параметризовать разными способами, например, значением гамильтониана (энергии) $H \equiv -ar_0 - r_0^2/2 - h\sqrt{1-r_0^2}\cos\psi_0 = E$. Для одной из обратных функций легко выписывается интегральное представление, например,

$$t + t_0 = \pm\int_{r_\pm}^{r} \frac{d\rho}{\sqrt{h^2(1-\rho^2) - (E + a\rho + \rho^2/2)^2}}, \quad r_\pm = \mathrm{const}.$$

Из этого соотношения извлекается компонента $r = r_0(t+t_0, E)$. Вторая компонента $\psi = \psi_0(t+t_0, E)$ извлекается из интеграла энергии. Впрочем, для принципиальных выводов явные формулы не нужны, и они далее не используются.

Предъявляемые решения автономной системы зависят от коэффициентов уравнений $a, h(\tau)$, а в конечном счете от τ как от параметра. Эту зависимость можно указать в явной форме, рассматривая функции $r_0, \psi_0(t, E, \tau)$, зависящие от трех переменных[2]. Период этих функций $T = T(E,\tau)$ и частота $\omega(E,\tau) = 2\pi/T$ зависят как от энергии E, так и от параметра τ. В дальнейшем удобно использовать функции, приведенные к фиксированному периоду 2π:

$$R(S,E,\tau) = r_0(S/\omega, E, \tau), \qquad \Psi(S,E,\tau) = \psi_0(S/\omega, E, \tau).$$

Отметим, что эта пара функций удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\omega\frac{\partial R}{\partial S} = \partial_\Psi H(R,\Psi,\tau), \qquad \omega\frac{\partial \Psi}{\partial S} = -\partial_R H(R,\Psi,\tau). \tag{5.1}$$

Кроме того, имеют место тождества

$$\omega[\partial_S R\partial_E\Psi - \partial_E R\partial_S\Psi] = 1, \qquad \frac{d}{d\tau}H \equiv \partial_S R\partial_\tau\Psi - \partial_\tau R\partial_S\Psi + \partial_\tau H = 0, \tag{5.2}$$

которые получаются из интеграла энергии

$$H(R,\Psi,\tau) \equiv -a(\tau)R - R^2/2 - h(\tau)\sqrt{1-R^2}\cos\Psi = E \quad (\forall\, S,E,\tau) \tag{5.3}$$

дифференцированием по E и по τ с учетом дифференциальных уравнений (5.1).

Функции R, Ψ служат основой для асимптотических конструкций, которые можно выполнять разными способами. Наиболее эффективный способ основан на сведении задачи к переменным типа действие-угол.

Для удобства изложения запишем исходные уравнения (0.1) в более короткой форме

[2]Понятно, что из-за возникающих невязок $\varepsilon\partial_\tau r_0$, $\varepsilon\partial_\tau\psi_0$ функции $r_0, \psi_0(t, E, \varepsilon t)$ не дают решения слабо неавтономной системы с коэффициентами, зависящими от εt. Более того, при $E = \mathrm{const}$ эти функции не представляют асимптотическое решение на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$ из-за секулярных членов в старших поправках асимптотики.

$$\frac{dr}{dt} = \partial_\psi H(r,\psi,\varepsilon t) + \varepsilon f(r,\psi,\varepsilon t), \qquad \frac{d\psi}{dt} = -\partial_r H(r,\psi,\varepsilon t) + \varepsilon g(r,\psi,\varepsilon t),$$

используя обозначения:

$$f = (1-r^2)\frac{\lambda}{\varepsilon}\Big[\Omega - \partial_r H\Big], \qquad g = -\frac{\lambda}{\varepsilon}(1-r^2)^{-1}\partial_\psi H. \tag{5.4}$$

Если здесь сделать замену переменных

$$r(t) = R(\mathcal{S}(t),\mathcal{E}(t),\varepsilon t), \qquad \psi(t) = \Psi(\mathcal{S}(t),\mathcal{E}(t),\varepsilon t),$$

то для новых искомых функций $\mathcal{S}(t),\mathcal{E}(t)$ получается стандартная задача о возмущении гамильтоновой системы в переменных типа действие-угол:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon F(\mathcal{S},\mathcal{E},\tau), \quad \frac{d\mathcal{S}}{dt} = \omega(\mathcal{E},\tau) + \varepsilon G(\mathcal{S},\mathcal{E},\tau), \quad (\tau = \varepsilon t). \tag{5.5}$$

Правые части выписываются в терминах функций $R,\Psi(\mathcal{S},\mathcal{E},\tau)$ через гамильтониан $H(R,\Psi,\tau)$ и исходные возмущения $f,g(R,\Psi,\tau)$:

$$F = \partial_\tau H + f\partial_R H + g\partial_\Psi H, \quad G = \omega[(g-\partial_\tau\Psi)\partial_{\mathcal{E}} R - (f-\partial_\tau R)\partial_{\mathcal{E}}\Psi].$$

Здесь при вычислении F учтено равенство нулю полной производной гамильтониана (интеграла энергии) по параметру τ.

Из структуры первого уравнения в (5.5) можно догадаться, что энергия в главном члене асимптотики $\mathcal{E}(t;\varepsilon) = \mathcal{E}_0(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, зависит лишь от медленного времени $\tau = \varepsilon t$. В таком случае усреднение этого уравнения приводит к соотношению

$$\frac{d\mathcal{E}_0}{d\tau} = \langle F(\mathcal{S},\mathcal{E}_0,\tau)\rangle, \tag{5.6}$$

из которого определяется функция $\mathcal{E}_0(\tau)$. Здесь угловыми скобками обозначается интеграл среднего значения по переменной $\mathcal{S}$. Отметим, что решение дифференциального уравнения содержит константу интегрирования $\mathcal{E}_0(\tau) = \mathcal{E}_0(\tau;E_0)$, в качестве которой может выступать начальное значение $E_0 = \mathcal{E}_0|_{\tau=0}$.

Таким образом, уравнения (5.5) разделяются в главном члене асимптотики. Впрочем, в асимптотической конструкции эти уравнения можно разделить во всех порядках. Наиболее последовательный подход состоит в реализации идеи двухмасштабных разложений в следующей форме. Энергия ищется в виде функции, зависящей от двух переменных $\mathcal{E}(t;\varepsilon) = \mathcal{E}(S,\tau;\varepsilon)$, $\tau = \varepsilon t$, и в качестве быстрой переменной вместо t используется фазовая функция $\mathcal{S}$. Как обычно, в такого типа двухмасштабном методе получается уравнение в частных производных

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathcal{S}}[\omega(\mathcal{E},\tau) + \varepsilon G(\mathcal{S},\mathcal{E},\tau)] + \varepsilon\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau} = \varepsilon F(\mathcal{S},\mathcal{E},\tau).$$

Его асимптотическое решение строится в виде степенного ряда с коэффициентами, зависящими от двух аргументов,

$$\mathcal{E}(\mathcal{S},\tau;\varepsilon,E_0) = \mathcal{E}_0(\tau;E_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mathcal{E}_n(\mathcal{S},\tau;E_0). \tag{5.7}$$

Уравнение для $\mathcal{S} = \mathcal{S}(t;\varepsilon)$ интегрируется во вторую очередь после нахождения асимптотики для энергии. Асимптотика фазы

$$\mathcal{S}(\sigma;\varepsilon,E_0,S_0) = \sigma + \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\mathcal{S}_n(\sigma,\tau;E_0) \tag{5.8}$$

содержит главную часть

$$\sigma = \varepsilon^{-1}\int\limits_0^\tau \omega(\mathcal{E}_0(\zeta),\zeta)\,d\zeta + S_0, \quad \forall\, S_0 = \mathrm{const},$$

которая по сути дела определяет быструю переменную $\sigma \approx t = \tau/\varepsilon$ в рассматриваемых разложениях. Параметр S_0 является константой интегрирования.

Теорема 2. *Для любого* $\tau^* > 0$ *система* (0.1) *имеет на промежутке* $0 < t < \tau^*\varepsilon^{-1}$ *двухпараметрическое семейство асимптотических при* $\varepsilon \to 0$ *решений в виде*

$$r(t;\varepsilon;E_0,S_0) = r_0(\mathcal{S}/\omega,\mathcal{E},\tau), \quad \psi(t;\varepsilon;E_0,S_0) = \psi_0(\mathcal{S}/\omega,\mathcal{E},\tau), \quad \omega = \omega(\mathcal{E},\tau)$$

с функциями $\mathcal{E}(\mathcal{S};\varepsilon,E_0), \mathcal{S}(\sigma;\varepsilon,E_0)$, *которые разлагаются в асимптотические ряды* (5.7), (5.8) *с произвольными параметрами* $E_0, S_0 = \mathrm{const}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к построению коэффициентов $\mathcal{E}_n(\mathcal{S},\tau;E_0)$, $\mathcal{S}_n(\sigma,\tau;E_0)$ в классе 2π–периодических функций по быстрой переменной $\mathcal{S}$ либо σ. Все они определяются из рекуррентной системы уравнений. Процедура построения асимптотических решений (5.7), (5.8) хорошо известна [1, 8], и мы ее здесь не воспроизводим.

З а м е ч а н и е. Область значений параметра E_0 зависит от τ^* и сжимается при $\tau^* \to \infty$, если $|a(\tau^*)| \to \infty$.

6. Анализ главного члена асимптотики

Мы ограничимся анализом главного члена асимптотики с функцией $\mathcal{E}_0(\tau)$. Этого будет достаточно для ответа на принципиальный вопрос об устойчивости решения, которое в главном члене асимптотики (4.1) описывается медленным движением неподвижной точки. Таким образом, дальнейшее изложение содержит доказательство утверждений (3) и (4) теоремы 1.

Энергия $\mathcal{E}_0(\tau)$ как функция медленного времени $\tau = \varepsilon t$ позволяет проследить за медленной деформацией траектории, которая описывается соотношениями $r = R(\mathcal{S},\mathcal{E}_0(\varepsilon t),\varepsilon t)$, $\psi = \Psi(\mathcal{S},\mathcal{E}_0(\varepsilon t),\varepsilon t)$. Такая траектория, расположенная в окрестности одного из центров, является замкнутой с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Медленное движение этой траектории к центру либо от центра будет свидетельствовать об устойчивости либо неустойчивости медленно движущегося центра гамильтоновой системы под действием малых возмущений.

В описанном выше подходе дело сводится к анализу усредненного уравнения для энергии (5.6), которое не выглядит тривиальным даже в гамильтоновом случае, когда $\lambda = 0$. Однако для решения вопроса об устойчивости можно использовать другой, более эффективный подход с прозрачной геометрической интерпретацией [9]. С этой целью используется площадь, которая охватывается замкнутой траекторией $r = R(\mathcal{S},\mathcal{E},\tau)$, $\psi = \Psi(\mathcal{S},\mathcal{E},\tau)$, соответствующей периодическому решению:

$$\Pi = \oint r\,d\psi = \mp\int\limits_0^{2\pi} R(\mathcal{S},\mathcal{E},\tau)\partial_S\Psi(\mathcal{S},\mathcal{E},\tau)\,d\mathcal{S} \equiv \tilde{\Pi}(\mathcal{E},\tau). \tag{6.1}$$

Знак перед интегралом соответствует направлению обхода контура: выбирается $-$ или $+$ для траектории в окрестности неподвижной точки $(r_+,0)$ или $(r_-,-\pi))$ соответственно. Соотношение (6.1) рассматривается как формула замены переменной $\mathcal{E}$ на Π в приведенных выше формулах. Это позволяет выписать для величины $\Pi(t;\varepsilon)$ разложение

$$\Pi(t;\varepsilon) = \Pi_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\Pi_n(S,\tau), \quad \tau = \varepsilon t.$$

На фазовой плоскости r, ψ главный член асимптотики решения представляется замкнутой траекторией периодического решения гамильтоновой системы. При этом фазовый портрет медленно деформируется в зависимости от $\tau = \varepsilon t$. Изменение величины $\Pi = \Pi_0(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ в главном члене соответствует изменению площади, охватываемой замкнутой траекторией. Направление изменения $\Pi_0(\tau)$ характеризует свойство устойчивости решения, соответствующего медленно меняющемуся центру.

Обратим внимание, что дифференцирование по E формулы (6.1) с учетом тождества для вронскиана (5.2) и взятие по частям одного из интегралов дает соотношение $\partial_{\mathcal{E}}\tilde{\Pi} = \pm 2\pi/\omega(\mathcal{E}, \tau)$. Поэтому полная производная по времени для $\Pi(t;\varepsilon) = \tilde{\Pi}(\mathcal{E}(t;\varepsilon), \varepsilon t)$, получаемая с учетом второго тождества из (5.2), выражается по формуле

$$\pm\frac{d\Pi}{dt} = \frac{2\pi}{\omega}\frac{d\mathcal{E}}{dt} - \frac{\varepsilon}{\omega}\int\limits_0^{2\pi} \partial_\tau H(R, \Psi, \tau)\, d\mathcal{S} \quad \text{при} \quad R, \Psi(\mathcal{S}, \mathcal{E}, \varepsilon t).$$

В таком случае для главного члена асимптотики $\Pi_0(\tau)$ производная, получаемая с учетом уравнения для энергии (5.6), выражается через интеграл среднего значения:

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = \pm\frac{2\pi}{\omega}\langle f\partial_R H + g\partial_\Psi H\rangle. \tag{6.2}$$

Правая часть здесь вычисляется через функции $f, g, H(R, \Psi, \tau)$ при $R, \Psi(\mathcal{S}, \mathcal{E}_0(\tau), \tau), \omega(\mathcal{E}_0(\tau), \tau)$; усреднение берется по переменной $\mathcal{S}$. Таким образом, вопрос об устойчивости сводится к анализу знака для интеграла среднего значения в (6.2).

В случае гамильтоновых возмущений, когда $f = \partial_\Psi H_1,\ g = -\partial_R H_1$, ответ хорошо известен. В силу гамильтоновых уравнений (5.1) для подынтегрального выражения в (6.2) получается представление через производную периодической функции:

$$f\partial_R H + g\partial_\Psi H = \partial_{\mathcal{S}} H_1(R(\mathcal{S}, \mathcal{E}_0(\tau), \tau), \Psi(\mathcal{S}, \mathcal{E}_0(\tau), \tau).$$

В таком случае интеграл среднего значения в (6.2) равен нулю, и, следовательно, $\Pi_0(\tau) \equiv \text{const}$. Величина Π является адиабатическим инвариантом [9, 10], так что остается постоянной в главном члене асимптотики $\Pi(t;\varepsilon) = \text{const} + \mathcal{O}(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0,\ 0 < \tau \le \mathcal{O}(1)$.

В частности, для рассматриваемой нами задачи площадь остается постоянной при отсутствии диссипации, поскольку $f = g = 0$ при $\lambda = 0$. Поэтому траектория остается вблизи медленно меняющегося центра вплоть до далеких времен порядка $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Однако надо иметь в виду, что область, занятая замкнутыми траекториями вблизи центра гамильтоновой системы, сжимается с ростом коэффициента $a(\tau)$, и ее площадь стремится к нулю. Поэтому при сильном изменении коэффициента $|a(\tau)| \to \infty,\ \tau \to \infty$, когда сепаратрисы приближаются к границе $r = \pm 1$, любая возмущенная траектория пересекает сепаратрису и покидает окрестность неподвижной точки на достаточно далеких временах $t \gg \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Адиабатическое приближение на далеких временах становится непригодным. Анализ такого типа задачи выходит за рамки данной работы, см. [11].

Похожая картина для поведения возмущенных траекторий имеет место при отличной от нуля диссипации $\lambda \ne 0$ с той разницей, что площадь не сохраняется в главном члене асимптотики $\Pi_0(\tau) \not\equiv \text{const}$. Теперь вопрос устойчивости на временах $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ решается определением знака производной $d\Pi/d\tau$. Например, убывание площади $\Pi_0(\tau)$ с ростом времени будет свидетельствовать о приближении возмущенной траектории к медленно меняющемуся положению равновесия[3].

Подынтегральное выражение в (6.2) с учетом формул (5.4) для возмущений $f, g(R, \Psi, \tau)$ и формулы (5.3) для гамильтониана $H(R, \Psi, \tau)$ можно привести к виду

$$f\partial_R H + g\partial_\Psi H = \frac{\lambda}{\varepsilon}\Big(- [(1-R^2)^{-1}H_\Psi^2 + (1-R^2)H_R^2] + \Omega(1-R^2)H_R\Big). \tag{6.3}$$

[3]Такой вывод об устойчивости может оказаться неверным, если равновесие приближается к границе $r = \pm 1$.

Поскольку функция $-[(1-R^2)^{-1}H_\Psi^2+(1-R^2)H_R^2]$ неположительна и обращается в нуль лишь в неподвижных точках, то в случае $\Omega=0$ интеграл в (6.2) строго отрицателен. Если же $\Omega\neq 0$, ситуация оказывается более сложной из-за отсутствия знакоопределенности выражения $(1-R^2)H_R$.

Впрочем, вдали от неподвижной точки (вне любой фиксированной окрестности) выражение (6.3) будет отрицательным при всех достаточно малых $|\Omega|<\delta$; величина δ зависит от окрестности. Это свойство вытекает из строгой отрицательности первого слагаемого вне неподвижной точки.

Чтобы в полной мере выявить влияние внешней частоты Ω на свойство устойчивости, следует вычислить соответствующее слагаемое в интеграле (6.2). С учетом уравнения $\omega\Psi_S=-H_R$ это слагаемое можно представить в виде контурного интеграла

$$J_\pm=\frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi}(1-R^2)H_R(R,\Psi,\tau)\,dS=\mp\oint(1-r^2)\,d\psi=\pm\oint r^2\,d\psi. \tag{6.4}$$

Замкнутые контуры рассматриваются в области $\mathcal{D}_+$ (правая часть рис. 1), которая ограничена сепаратрисой, выходящей из точек $r=1,\ \psi=\pm\pi/2$, либо в области $\mathcal{D}_-$, которая отделена сепаратрисой, выходящей из точек $r=-1,\ \psi=-3\pi/2$ и $\psi=-\pi/2$ (левая часть рис. 1).

Фиксированный контур определяется фазовой траекторией $r=R(S,E;a),\ \psi=\Psi(S,E;a)$, которая соответствует линии уровня гамильтониана:

$$H(R,\Psi;a)\equiv -aR-R^2/2-h\sqrt{1-R^2}\cos\Psi=E. \tag{6.5}$$

В этих соотношениях намеренно выделена зависимость от параметра a, а не от τ, как в (5.3).

Лемма 6. *Если $a>0$, то интеграл* (6.4) *отрицателен:* $J_\pm<0$.

Доказательство. В случае $a=0$ контур будет симметричным относительно оси $r=0$, и поэтому из–за четности подынтегральной функции интеграл (6.4) по замкнутому контуру равен нулю. С ростом значения a контур деформируется, и его деформация в направлении нормали легко вычисляется. Для этого надо продифференцировать по a энергетическое тождество (6.5), что приводит к соотношению $\partial_a R\partial_R H+\partial_a\Psi\partial_\Psi H=R$. Вектор, составленный из производных $(\partial_a R,\partial_a\Psi)$, определяет направление деформации контура при изменении параметра a. Как видим, в верхней полуплоскости $R>0$ деформация происходит в направлении градиента $(\partial_R H,\partial_\Psi H)$, а в нижней полуплоскости $R<0$ деформация имеет противоположное направление.

Далее следует учесть, что в окрестности минимума гамильтониана градиент направлен по внешней нормали контура (линии уровня). Поэтому в области $\mathcal{D}_+$ контур деформируется в направлении нормали так, что охватываемая им область увеличивается в верхней полуплоскости и сжимается в нижней полуплоскости (с ростом a). При этом точка пересечения контура с осью $r=0$ не зависит от a. В окрестности максимума гамильтониана градиент направлен по внутренней нормали контура. Поэтому в области $\mathcal{D}_-$ контур деформируется в направлении нормали так, что охватываемая им область сжимается в верхней полуплоскости и увеличивается в нижней полуплоскости; ср. рис. 1 и 2.

Для анализа знака интеграла (6.4) контур интегрирования удобно разбить на отдельные куски. В случае, когда на контуре имеется лишь две точки возврата $(r_1,\pm\psi_1)$, эти точки разбивают контур на две ветви[4]: верхнюю $r=R_+(\psi)$ и нижнюю $r=R_-(\psi)$. Интеграл на паре таких ветвей с учетом противоположного по ψ направления обхода можно свести к интегралу от разности подынтегральных функций по промежутку, где эти ветви определены:

$$J_\pm=\pm\int_{-\psi_1}^{\psi_1}[R_-^2(\psi)-R_+^2(\psi)]\,d\psi. \tag{6.6}$$

[4]На линии уровня $H(R,\Psi;a)=E$ точки возврата выделяются условием $H_R=0$.

Далее следует учесть несимметричность ветвей относительно оси $r = 0$ (при $a \neq 0$), что обеспечивает знакоопределенность подынтегрального выражения на рассматриваемом промежутке. В разных областях $\mathcal{D}_\pm$ подынтегральные выражения (6.6) имеют противоположные знаки ввиду указанной выше специфики формы контуров, так что в итоге получаем: $J_\pm < 0$.

В области $\mathcal{D}_+$ при малых a часть контуров может иметь шесть точек поворота. Это связано с тем, что уравнение $H(r,\psi;a) = 0$ допускает четыре корня. Форма такого контура напоминает восьмерку, см. рис. 3. Дополнительные точки поворота $(r_2, \pm\psi_2)$ и $(r_3, \pm\psi_3)$ $(0 < \psi_3 < \psi_2 < \psi_1)$ расположены симметрично относительно оси $\psi = 0$ в нижней полуплоскости: $r_3 < r_2 < 0$. В таком случае на контуре следует выделить соответствующие куски и значение интеграла на них анализировать отдельно. Ввиду симметрии контура относительно оси $\psi = 0$ интегралы по этим двум кускам совпадают и с учетом направления обхода контура сводятся к интегралу от разности функций

$$2\int_{\psi_3}^{\psi_2} [R_{3,1}^2(\psi) - R_{2,3}^2(\psi)]\, d\psi.$$

Здесь использованы функции $r = R_{3,1}(\psi)$, $\psi_3 < \psi < \psi_1$, и $r = R_{2,3}(\psi)$, $\psi_3 < \psi < \psi_2$, которые задают ветви контура между соответствующими точками поворота. С учетом направления деформации контура при $a > 0$ подынтегральное выражение здесь оказывается отрицательным в $\mathcal{D}_+$. Знак интеграла по оставшейся части контура анализируется аналогично случаю с двумя точками поворота с той разницей, что нижняя ветвь $R_-(\psi)$ имеет разрыв первого рода в нижней точке поворота при $\psi = \psi_2$. Лемма 6 доказана.

Интеграл в правой части (6.2) с учетом выражения для подынтегральной функции (6.3) можно записать в виде суммы двух интегралов

$$\langle f\partial_R H + g\partial_\Psi H\rangle = \frac{\lambda}{\varepsilon}\Big(- \big\langle (1-R^2)^{-1}H_\Psi^2 + (1-R^2)H_R^2\big\rangle + \Omega J_\pm\Big). \tag{6.7}$$

Как видим, знак этого выражения зависит как от выбора траектории, так и от параметра Ω. Поскольку $J_\pm < 0$, то в случае $\Omega > 0$ это выражение отрицательно на любом замкнутом контуре. Поэтому направление деформации площади $\Pi_0(\tau)$, определяемой из уравнения (6.2), зависит лишь от области $\mathcal{D}_\pm$, в которой находится контур: площадь уменьшается в $\mathcal{D}_+$ и увеличивается в $\mathcal{D}_-$. Отсюда, в частности, можно сделать заключение об устойчивости и неустойчивости решений с соответствующей медленно меняющейся точкой равновесия $r_0 = r_\pm(\tau)$ $(\psi = 0,\ \psi = -\pi)$.

Если же $\Omega < 0$, то выражение (6.7) может оказаться как отрицательным, так и положительным в зависимости от выбора контура и величины Ω. Если значение $\Omega \le \Omega_0 < 0$ достаточно велико, то выражение (6.7) будет положительным для всех замкнутых контуров. Таким образом, направление деформации площади $\Pi_0(\tau)$ оказывается противоположным случаю $\Omega > 0$. Отсюда для случая $\Omega \le \Omega_0 < 0$ можно сделать заключение о неустойчивости (и устойчивости) решения с соответствующей медленно меняющейся точкой равновесия $r = r_+(\tau), \psi = 0$ (либо $r = r_-(\tau), \psi = -\pi$). На этом заканчивается доказательство теоремы 1.

7. Заключение

Полученные результаты по асимптотике решения по малому параметру $\varepsilon \to 0$ справедливы равномерно по $\tau = \varepsilon t$ на любом конечном промежутке, пока коэффициенты $a, h, \Omega(\tau)$ исходных уравнений остаются ограниченными и $h(\tau)$ отделено от нуля. Эти условия гарантируют отсутствие особенностей в коэффициентах $r_n(\tau)$, $\psi_n(\tau)$ и как следствие свойство равномерной асимптотичности рядов (4.1). Специфика получаемых при этих условиях решений состоит в том, что главные члены асимптотики $r_0 = r_\pm(\tau)$ отделены от границы $|r| = 1$. В физической интерпретации такие решения соответствуют движению вектора намагниченности вдали от полюсов: при полярном угле θ, отделенном от 0 и π.

Задача с малым поперечным полем $0 \le h \ll 1$ либо с большим продольным полем $a \gg 1$ представляет интерес для приложений. Однако при ее исследовании возникают значительные математические трудности, связанные с анализом неподвижных точек и соответствующих возмущенных решений вблизи границы: $r_0(\tau) \approx \pm 1$. Непригодность в этом случае асимптотик в виде рядов (4.1) из-за особенностей в коэффициентах просматривается в формулах для первой поправки (4.2). Эта тема будет обсуждаться в отдельной публикации.

Поступила 05.05.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
2. **Landau L. D., Lifshitz E. M.** Theory of dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies // Phys. Zs. Sowjetunion. 1935. Vol. 8, no. 2. P. 153–172.
3. **Моносов Я.А.** Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971.
4. **Krupicka S.** Physik der Ferrite und der verwandten magnetischen Oxide. Praga: Academia, 1973.
5. **Гуревич А. В., Мелков Г. А.** Магнитные колебания и волны. М.: Наука, 1994.
6. **Stoner E.C., Wohlfarth E.P.** A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys // Phil. Trans. R. Soc. 1948. Vol. A240. P. 599–642.
7. **Кузмак Г.Е.** Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Прикл. математика и механика. 1951. Т. 23, № 3. С. 519–526.
8. **Ажоткин В. Д., Бабич В. М.** О применении метода двухмасштабных разложений к одночастотной задаче теории нелинейных колебаний // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 377–383.
9. **Арнольд В.И.** Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. **Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.** Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1977.
11. **Нейштадт А.И.** Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 4. С. 621–632.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 517.929

О СТЕПЕНИ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

А. В. Ким, Н. Г. Колмогорцева

Работа посвящена исследованию гладкости решений функционально-дифференциальных уравнений в зависимости от свойств их правых частей.

Во многих разделах теории дифференциальных уравнений [1–8] принципиальное значение имеет гладкость решений, например, при построении и обосновании численных методов. В частности, в [8] при построении и обосновании численных схем приближенного интегрирования функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) предполагается разложимость решений в ряд Тейлора, однако не описаны условия, гарантирующие их соответствующую гладкость. Целью настоящей работы является исследование степени гладкости решений ФДУ в зависимости от свойств дифференцируемости их правых частей. При этом используется техника i-гладкого анализа [6, 7].

Для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t)) \tag{1}$$

порядок гладкости решений зависит от гладкости функции g. Классический результат состоит в следующем (см., например, [1, с. 78–79]):

Теорема 1. *Если $g(t, x)$ имеет непрерывные частные производные по t и x до p-го порядка, то всякое решение уравнения (1) имеет непрерывные производные до $(p + 1)$-го порядка.*

В настоящей работе исследуется гладкость решений функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t + \cdot)) \tag{2}$$

в зависимости от гладкости его правой части — отображения

$$f(t, x, y(\cdot)) : R \times R^n \times Q[-\tau, 0) \to R^n. \tag{3}$$

Здесь $\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, $x(t + \cdot) = \{x(t + s), -\tau \le s < 0\}$, $Q[-\tau, 0)$ — пространство кусочно-непрерывных функций $y(\cdot) : [-\tau, 0) \to R^n$, $\tau = \mathrm{const} > 0$.

Исследование свойств решений ФДУ (см., например, [2–7]) связано в основном с вопросами существования решений и их зависимости от начальных данных. Авторам неизвестны результаты и подходы, касающиеся анализа степени гладкости решений ФДУ. Отсутствие для ФДУ результата, аналогичного теореме 1, связано, по-видимому, с тем, что в случае ФДУ возможно использование различных типов гладкости (производная Фреше, производная Гато, производная вдоль решений и др.), поэтому вопрос о том, гладкость какого типа является наиболее подходящей для исследования степени гладкости решений, требует специального изучения.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке программы Президиума РАН "Процессы управления" (проект № 22), Урало-Сибирского междисциплинарного проекта и РФФИ (проект № 05-01-00732-а).

В [5] (см., например, теорему 2.4.1) показано, что гладкость (в смысле Фреше) правой части ФДУ гарантирует соответствующую гладкость решений по начальным данным, но, вообще говоря, не исследуется степень гладкости решений по независимой переменной.

Ниже на основе использования конструкций инвариантной производной доказывается аналог теоремы 1 для ФДУ. При этом одной только инвариантной дифференцируемости правой части ФДУ недостаточно для получения требуемого результата, поэтому в работе введено понятие непрерывности функционалов вдоль линий (лайн-непрерывность), что позволило завершить доказательство соответствующей теоремы.

Всюду далее под решением функционально-дифференциального уравнения (2) будем понимать всякую функцию $x(t)$, определенную на некотором отрезке $[\alpha-\tau,\beta]$, где $\alpha<\beta$, и дифференцируемую на интервале $(\alpha-\tau,\beta)$, которая при подстановке в уравнение (2) обращает его в равенство при $t\in[\alpha,\beta)$.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение (3) называется *лайн-непрерывным* (line-continuous), если оно непрерывно вдоль любой непрерывной кривой

$$\psi(\cdot):[\alpha-\tau,\beta]\to R^n, \tag{4}$$

т.е. функция $F(t)=f(t,\psi(t),\psi(t+\cdot))$ непрерывна при $t\in[\alpha,\beta]$, $(\alpha<\beta)$.

П р и м е р 1. Рассмотрим функционал

$$V=v(x)+\int\limits_{-\tau}^{0}w(y(s))ds,$$

определенный на $\{x,y(\cdot)\}\in R^n\times Q[-\tau,0)$. Если функции $v(\cdot),w(\cdot):R^n\to R$ непрерывные, то он лайн-непрерывен, так как для любой непрерывной функции (4) функция

$$\gamma(t)=v(\psi(t))+\int\limits_{-\tau}^{0}w(\psi(t+s))ds$$

непрерывна в области определения.

Можно показать, что большинство функционалов, используемых при описании правых частей ФДУ (см., например, [4–8]), обладают свойствами лайн-непрерывности при соответствующей непрерывности входящих в их структуру конечномерных функций.

О п р е д е л е н и е 2. (а) Если отображение (3) имеет в каждой точке области $\Omega\subseteq R\times R^n\times Q[-\tau,0)$ инвариантную производную $\partial_y f$ (см. [8, с. 25]), то соответствующее отображение $\partial_y f:\Omega\to R$ называется инвариантной производной отображения f на Ω.
(б) Частные производные отображения $f(t,x,y(\cdot))$ по конечномерным переменным t и x называются конечномерными производными.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что кривая $\mu(\cdot):[\alpha-\tau,\beta]\to R^n$ $(\alpha<\beta)$ проходит в области $\Omega\subseteq R\times R^n\times Q[-\tau,0)$, если $(t,\mu(t),\mu(t+\cdot))\in\Omega$ при $t\in[\alpha,\beta]$.

Теорема 2. *Если отображение* (3) *лайн-непрерывно на множестве* $\Omega\subseteq R\times R^n\times Q[-\tau,0)$ *вместе со своими конечномерными и инвариантными производными до p-го порядка включительно, то всякое проходящее в этом множестве решение* $x(t)$ *уравнения* (2) *имеет на* $[\alpha,\beta]$ *непрерывные производные по* t *до* $(p+1)$*-го порядка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(\cdot):[\alpha-\tau,\beta]\to R^n$ – решение уравнения (2), проходящее в области $\Omega\subseteq R\times R^n\times Q[-\tau,0)$ (т.е. $(t,x(t),x(t+\cdot))\in\Omega$ при $t\in[\alpha,\beta]$). Тогда из непрерывности решения и лайн-непрерывности отображения (3) следует непрерывность по t правой части уравнения (2), а значит, и левая часть (2) — производная $\dot{x}(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$.

Допустим теперь, что $p \geq 1$. Тогда правая часть равенства (2) имеет на $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную по t, значит, и левая часть (2) имеет непрерывную производную. Продифференцировав (2) по t, получим

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x, x(t+\cdot)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, x(t+\cdot))\,\dot{x}(t) + \partial_y f(t, x, x(t+\cdot)), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Применяя к этому тождеству те же рассуждения, какие применили выше к (2), если $p \geq 2$, найдем, что $x(t)$ имеет непрерывную производную 3-го порядка и т.д.

Теорема 3. *Пусть отображение* (3) *лайн-непрерывно на множестве* $\Omega \subseteq R \times R^n \times Q[-\tau, 0)$ *вместе со своими конечномерными и инвариантными производными до p-го порядка включительно. Тогда для любого проходящего во множестве* Ω *решения* $x(\cdot) : [\alpha - \tau, \beta] \to R^n$ *уравнения* (2) *и любого* $t_* \in (\alpha, \beta)$ *справедливо разложение*

$$x(t) = x(t_*) + \sum_{k=1}^{p} \frac{x_*^{(k-1)}}{k!}(t - t_*)^k + o((t - t_*)^p),$$

где $x_*^{(k-1)}$ — *k-я полная производная отображения* f *в силу системы* (2)*, вычисленная в точке* $(t_*, x(t_*), x(t_* + \cdot))$.

Доказательство. Справедливость теоремы следует из теоремы о разложении гладких функций в ряд Тейлора [8] и достаточной дифференцируемости решения уравнения (2), вытекающей из теоремы 2.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = G[t, x(t), x(t - \tau)], \tag{5}$$

в котором функция

$$G[t, x, y] : R \times R \times R \to R \tag{6}$$

непрерывно-дифференцируема в области определения. Функционал

$$f(t, x, y(\cdot)) = G[t, x, y(-\tau)] : R \times R \times Q[-\tau, 0) \to R \tag{7}$$

в силу свойств функции (6) лайн-непрерывен в области определения. Кроме того, он имеет конечномерные производные и инвариантную производную на множестве $\Omega = R \times R \times D[-\tau, 0)$, где $D[-\tau, 0)$ — множество дифференцируемых на $[-\tau, 0)$ функций. Исследуем, какую гладкость по t имеют решения уравнения (5). Так как решения ФДУ являются дифференцируемыми функциями, то все решения уравнения (5) проходят во множестве Ω. Тогда из теоремы 2 (см. также доказательство) следует, что каждое решение уравнения (5) имеет и вторую производную.

Отметим, что из результатов других работ, в частности [5], полученная гладкость напрямую не следует. Из работы [5] следует только непрерывная дифференцируемость решения $x(t)$ по t в области определения, а также дифференцируемость решения по Фреше по начальной функции.

Замечание 1. Отметим, что в теореме 2 говорится не о сглаживаемости решений, а об их гладкости (дифференцируемости достаточное число раз). Вероятно, сглаживаемость решений может быть в какой-то степени рассмотрена и с применением лайн-свойств, но данный вопрос выходит за рамки настоящей работы.

Замечание 2. Во многих случаях проверка условий теорем 2 и 3 может быть проведена достаточно просто на основе формул для конечномерных и инвариантных производных различных классов функционалов из [6–8].

Поступила 12.03.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейник. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1959.
3. **Мышкис А.Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Гостехиздат, 1951.
4. **Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
5. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
6. **Ким А.В.** i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.
7. **Kim A.V.** Functional differential equations. Application of i–smooth calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999.
8. **Ким А.В., Пименов В.Г.** i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 517.928.4

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

О. О. Коврижных

Рассматривается начальная задача для сингулярно возмущенной системы двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с двумя малыми параметрами. Построено асимптотическое разложение решения этой задачи в предположении, что параметры стремятся к нулю независимо друг от друга.

Введение

В настоящей работе исследуется начальная задача для системы двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных.

Среди работ, посвященных сингулярно возмущенным уравнениям с несколькими малыми параметрами, пионерскими являются работы А.Н. Тихонова (см., например, [1]), где, в частности, обосновывается предельный переход к решению вырожденной системы. В статьях А.Б. Васильевой [2,3] даются асимптотические формулы для решения начальной задачи. При этом предполагается зависимость между параметрами при стремлении их к нулю.

Основным результатом данной работы является построение асимптотического решения задачи при условии, что параметры стремятся к нулю независимо друг от друга. Построение и обоснование асимптотики, равномерной по независимым малым параметрам, для системы линейных уравнений приводится в статьях [4,5]. Настоящее исследование дополняет и развивает эти работы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущенную начальную задачу

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = f(t,x,y), \qquad \mu\frac{dy}{dt} = g(t,x,y), \tag{1.1}$$

$$x|_{t=0} = x^0, \qquad y|_{t=0} = y^0, \tag{1.2}$$

где $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ — малые параметры. Исследуем решение задачи (1.1), (1.2) на отрезке $[0,T]$.

Предполагаем, что выполняются условия:

I. Функции $f(t,x,y)$, $g(t,x,y)$ непрерывно дифференцируемы достаточное число раз в некоторой области G пространства переменных (t,x,y).

II. Вырожденная система

$$0 = f(t,x,y), \qquad 0 = g(t,x,y) \tag{1.3}$$

определяет на отрезке $[0,T]$ решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ такое, что

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 05-01-00098, 05-01-00217).

(a) функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ непрерывны на $[0, T]$;

(b) точки $(t, \varphi(t), \psi(t)) \in G$ при $t \in [0, T]$;

(c) корень $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ изолирован на $[0, T]$, т.е. существует $\eta > 0$ такое, что $f(t, x, y) \neq 0$, $g(t, x, y) \neq 0$ при $0 < |x - \varphi(t)| < \eta$, $0 < |y - \psi(t)| < \eta$, $t \in [0, T]$.

III. Введем вспомогательную систему уравнений

$$\frac{d\widetilde{x}}{d\tau} = \frac{\nu}{\varepsilon} f(t; \widetilde{x}, \widetilde{y}), \qquad \frac{d\widetilde{y}}{d\tau} = \frac{\nu}{\mu} g(t; \widetilde{x}, \widetilde{y}), \tag{1.4}$$

в которой $\nu = \varepsilon + \mu$, а t рассматривается как параметр. В силу условия II $\overline{z} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})^T = (\varphi(t), \psi(t))^T$ является изолированной точкой покоя системы (1.4). Матрица первого приближения для системы (1.4)

$$A(t, \varepsilon, \mu) = \nu \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{\partial f(t, x, y)}{\partial x} & \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{\partial f(t, x, y)}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{\partial g(t, x, y)}{\partial x} & \dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{\partial g(t, x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)}} = \nu \begin{pmatrix} \dfrac{a(t)}{\varepsilon} & \dfrac{b(t)}{\varepsilon} \\[2ex] \dfrac{c(t)}{\mu} & \dfrac{d(t)}{\mu} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

имеет собственные значения

$$\alpha_i(t, \varepsilon, \mu) = \nu \frac{a(t)\mu + d(t)\varepsilon - (-1)^i \sqrt{(a(t)\mu + d(t)\varepsilon)^2 - 4\varepsilon\mu D(t)}}{2\varepsilon\mu}$$

$$= \nu \frac{a(t)\mu + d(t)\varepsilon - (-1)^i \sqrt{(a(t)\mu - d(t)\varepsilon)^2 + 4\varepsilon\mu b(t)c(t)}}{2\varepsilon\mu}.$$

Здесь $i = 1, 2$, а $D(t) = a(t)d(t) - b(t)c(t)$. При выполнении условий

$$a(t) < 0, \qquad d(t) < 0, \qquad D(t) > 0, \qquad b(t)c(t) \geqslant 0, \qquad t \in [0, T] \tag{1.6}$$

справедливы неравенства

$$\alpha_i(t, \varepsilon, \mu) < -\alpha < 0 \qquad (\varepsilon > 0, \quad \mu > 0, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2), \tag{1.7}$$

где $\alpha > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от ε, μ, t.

З а м е ч а н и е. В силу условий (1.6) $D(t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$. Тогда вместе с требованием I это обеспечивает, что функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, T]$ достаточное число раз.

IV. Начальное значение $\widetilde{z}(0) = z^0 = (x^0, y^0)^T$ для вспомогательной системы (1.4) достаточно близко к $\overline{z}(0) = (\varphi(0), \psi(0))^T$. Ниже это условие будет сформулировано точно.

Приведенные выше условия по своей структуре являются аналогами условий [6, гл. 3], поставленных для задачи с одним малым параметром.

Строится асимптотическое разложение решения задачи (1.1), (1.2) при условии, что ε, μ независимо стремятся к нулю.

2. Построение формального решения

Решение задачи (1.1), (1.2) представим в виде

$$x(t, \varepsilon, \mu) = X(t, \varepsilon, \mu) + \Pi(\tau, \varepsilon, \mu), \qquad y(t, \varepsilon, \mu) = Y(t, \varepsilon, \mu) + \Phi(\tau, \varepsilon, \mu), \tag{2.1}$$

где

$$\tau = t/(\varepsilon + \mu) = t/\nu \tag{2.2}$$

— новая переменная, $\Pi(\tau,\varepsilon,\mu)$, $\Phi(\tau,\varepsilon,\mu)$ — функции типа погранслоя в малой окрестности начальной точки (так называемое внутреннее разложение), а $X(t,\varepsilon,\mu)$, $Y(t,\varepsilon,\mu)$ — внешнее разложение, приближающее решение задачи равномерно вне малой окрестности точки $t=0$.

В свою очередь функции $X(t,\varepsilon,\mu)$, $Y(t,\varepsilon,\mu)$ и $\Pi(t,\varepsilon,\mu)$, $\Phi(t,\varepsilon,\mu)$ ищем в виде

$$X(t,\varepsilon,\mu)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon^m\mu^n x_{m,n}(t),\qquad Y(t,\varepsilon,\mu)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon^m\mu^n y_{m,n}(t),\tag{2.3}$$

$$\Pi(\tau,\varepsilon,\mu)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon^m\mu^n \Pi_{m,n}(\tau,\varepsilon,\mu),\qquad \Phi(\tau,\varepsilon,\mu)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon^m\mu^n \Phi_{m,n}(\tau,\varepsilon,\mu).\tag{2.4}$$

Подставляя разложения (2.1) в систему (1.1), получим

$$\begin{aligned}\varepsilon\frac{dX}{dt}+\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{d\Pi}{d\tau}&=f(t,X+\Pi,Y+\Phi),\\ \mu\frac{dY}{dt}+\frac{\mu}{\nu}\frac{d\Phi}{d\tau}&=g(t,X+\Pi,Y+\Phi).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Преобразуем правые части системы (2.5) к виду, аналогичному (2.1). Выпишем формулы для f (для g преобразование точно такое же):

$$f(t,X+\Pi,Y+\Phi)=f(t,X,Y)+[f(t,X+\Pi,Y+\Phi)-f(t,X,Y)]\equiv\overline{f}+Rf.$$

Учитывая разложения (2.3), получаем

$$\begin{aligned}\overline{f}&=f(t,X(t,\varepsilon,\mu),Y(t,\varepsilon,\mu))\\ &=f\Big(t,x_{0,0}(t)+\varepsilon x_{1,0}(t)+\mu x_{0,1}(t)+\varepsilon\mu x_{1,1}(t)+\ldots,y_{0,0}(t)+\varepsilon y_{1,0}(t)+\mu y_{0,1}(t)+\varepsilon\mu y_{1,1}(t)+\ldots\Big)\\ &=f(t,x_{0,0}(t),y_{0,0}(t))+\varepsilon\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_{0,0}(t),y_{0,0}(t))x_{1,0}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot)y_{1,0}(t)\Big]\\ &+\mu\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot)x_{0,1}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot)y_{0,1}(t)\Big]+\ldots+\varepsilon^m\mu^n\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot)x_{m,n}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot)y_{m,n}(t)+\overline{f}_{m,n}(t)\Big]+\ldots\\ &=\sum_{k,s=0}^{\infty}\varepsilon^k\mu^s f_{k,s}(t),\end{aligned}\tag{2.6}$$

где производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ вычисляются в точке $(t,\ x_{0,0}(t),\ y_{0,0}(t))$, а функции $\overline{f}_{k,s}(t)$ выражаются через $x_{m,n}(t)$ и $y_{m,n}(t)$ с $m+n<k+s$. Далее, учитывая (2.3), (2.4), получаем

$$\begin{aligned}Rf&=f\big(\nu\tau,\ X(\nu\tau,\varepsilon,\mu)+\Pi(\tau,\varepsilon,\mu),\ Y(\nu\tau,\varepsilon,\mu)+\Phi(\tau,\varepsilon,\mu)\big)-f\big(\nu\tau,\ X(\nu\tau,\varepsilon,\mu),\ Y(\nu\tau,\varepsilon,\mu)\big)\\ &=f\Big(\nu\tau,\ x_{0,0}(\nu\tau)+\varepsilon x_{1,0}(\nu\tau)+\mu x_{0,1}(\nu\tau)+\ldots+\Pi_{0,0}+\varepsilon\Pi_{1,0}+\mu\Pi_{0,1}+\ldots,\ y_{0,0}(\nu\tau)\\ &+\varepsilon y_{1,0}(\nu\tau)+\mu y_{0,1}(\nu\tau)+\ldots+\Phi_{0,0}+\varepsilon\Phi_{1,0}+\mu\Phi_{0,1}+\ldots\Big)\\ &-f\Big(\nu\tau,\ x_{0,0}(\nu\tau)+\varepsilon x_{1,0}(\nu\tau)+\mu x_{0,1}(\nu\tau)+\ldots,\ y_{0,0}(\nu\tau)+\varepsilon y_{1,0}(\nu\tau)+\mu y_{0,1}(\nu\tau)+\ldots\Big)\\ &=\Big[f(0,\ x_{0,0}(0)+\Pi_{0,0},\ y_{0,0}(0)+\Phi_{0,0})-f(0,x_{0,0}(0),y_{0,0}(0))\Big]\\ &+\varepsilon\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(0,\ x_{0,0}(0)+\Pi_{0,0},\ y_{0,0}(0)+\Phi_{0,0})\Pi_{1,0}+\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot)\Phi_{1,0}+F_{1,0}(\tau;\varepsilon,\mu)\Big]\end{aligned}$$

$$+\mu\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot)\Pi_{0,1}+\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot)\Phi_{0,1}+F_{0,1}(\tau;\varepsilon,\mu)\Big]+\ldots=\sum_{k,s=0}^{\infty}\varepsilon^k\mu^s Rf_{k,s}(\tau); \tag{2.7}$$

здесь производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ вычисляются в точке $(0,\ x_{0,0}(0)+\Pi_{0,0},\ y_{0,0}(0)+\Phi_{0,0})$, а функции $F_{k,s}(\tau;\varepsilon,\mu)$ выражаются через $\Pi_{m,n}$ и $\Phi_{m,n}$, где $m+n<k+s$. В частности,

$$F_{1,0}=\Big[\frac{\partial f}{\partial t}(0,\ x_{0,0}(0)+\Pi_{0,0},\ y_{0,0}(0)+\Phi_{0,0})-\frac{\partial f}{\partial t}(0,\ x_{0,0}(0),\ y_{0,0}(0))\Big]\tau$$

$$+\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(0,\ x_{0,0}(0)+\Pi_{0,0},\ y_{0,0}(0)+\Phi_{0,0})-\frac{\partial f}{\partial x}(0,\ x_{0,0}(0),\ y_{0,0}(0))\Big](x'_{0,0}(0)\tau+x_{1,0}(0))$$

$$+\Big[\frac{\partial f}{\partial y}(0,\ x_{0,0}(0)+\Pi_{0,0},\ y_{0,0}(0)+\Phi_{0,0})-\frac{\partial f}{\partial y}(0,\ x_{0,0}(0),\ y_{0,0}(0))\Big](y'_{0,0}(0)\tau+y_{1,0}(0)). \tag{2.8}$$

Такие же разложения имеют место и для функции g. Тогда система (2.5) перепишется в виде

$$\varepsilon\frac{dX}{dt}+\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{d\Pi}{d\tau}=\overline{f}+Rf,$$

$$\mu\frac{dY}{dt}+\frac{\mu}{\nu}\frac{d\Phi}{d\tau}=\overline{g}+Rg.$$

Подставляя в эту систему разложения (2.3), (2.4), (2.6), (2.7) и приравнивая члены одного порядка малости по ε и μ сначала для t, а затем для τ, получим системы уравнений для определения членов разложений (2.3), (2.4).

Для внешнего разложения в нулевом приближении имеем

$$\begin{cases} f(t,\ x_{0,0},\ y_{0,0})=0,\\[2ex] g(t,\ x_{0,0},\ y_{0,0})=0.\end{cases} \tag{2.9}$$

Система (2.9) совпадает с вырожденной системой (1.3), а значит, в силу условий I–III обладает достаточное число раз непрерывно дифференцируемым изолированным решением $x_{0,0}=\varphi(t)$, $y_{0,0}=\psi(t)$. Остальные коэффициенты разложения (2.3) последовательно находятся из систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\overline{A}(t)z_{k,s}=h_{k,s}(t), \tag{2.10}$$

где

$$\overline{A}(t)=\begin{pmatrix} a(t) & b(t)\\[2ex] c(t) & d(t)\end{pmatrix},\qquad z_{k,s}(t)=\begin{pmatrix} x_{k,s}(t)\\ y_{k,s}(t)\end{pmatrix},$$

а функции $h_{k,s}(t)$ выражаются через $z_{m,n}(t)$ $(m+n<k+s)$. Системы (2.10) однозначно разрешимы, поскольку $\det\overline{A}(t)=D(t)\neq 0$ на $[0,T]$.

3. Оценки членов внутреннего разложения

Главный член внутреннего разложения удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_{0,0}}{d\tau}=\dfrac{\nu}{\varepsilon}f(0,\ x_{0,0}(0)+\Pi_{0,0},\ y_{0,0}(0)+\Phi_{0,0}),\\[3ex] \dfrac{d\Phi_{0,0}}{d\tau}=\dfrac{\nu}{\mu}g(0,\ x_{0,0}(0)+\Pi_{0,0},\ y_{0,0}(0)+\Phi_{0,0}),\end{cases} \tag{3.1}$$

поскольку в $Rf_{0,0}$ и $Rg_{0,0}$ слагаемые $f(0,\ x_{0,0}(0),\ y_{0,0}(0))$ и $g(0,\ x_{0,0}(0),\ y_{0,0}(0))$ в силу (2.9) обращаются в нуль.

Зададим начальные условия для системы (3.1):

$$\Pi_{0,0}(0,\varepsilon,\mu) = x^0 - x_{0,0}(0), \qquad \Phi_{0,0}(0,\varepsilon,\mu) = y^0 - y_{0,0}(0). \tag{3.2}$$

Система (3.1) может быть получена из вспомогательной системы (1.4) при $t = 0$ заменой $\widetilde{x} = x_{0,0}(0) + \Pi_{0,0}$, $\widetilde{y} = y_{0,0}(0) + \Phi_{0,0}$. Поэтому в силу условий II, III точкой покоя системы (3.1) является точка $\Pi \equiv 0$, $\Phi \equiv 0$.

Обозначим

$$\Psi_{m,n}(\cdot) = \begin{pmatrix} \Pi_{m,n}(\cdot) \\ \Phi_{m,n}(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *При достаточно малом $\sigma > 0$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^\tau \| \exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau - s)) I(\varepsilon,\mu) \| \exp(-\sigma s) ds \leqslant C_\sigma \exp(-\sigma\tau), \tag{3.3}$$

где $A_0(\varepsilon,\mu) = A(0,\varepsilon,\mu)$, $I(\varepsilon,\mu) = \mathrm{diag}(\nu/\varepsilon; \nu/\mu)$, норма $\|\cdot\|$ равна сумме модулей всех элементов матрицы, а постоянная C_σ не зависит от τ, ε и μ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. В случае $b_0 c_0 > 0$ в статье [5] была получена оценка

$$\| \exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau - s)) I(\varepsilon,\mu) \| \leqslant C_1 \Big(\exp(\alpha_1(0,\varepsilon,\mu)(\tau - s)) + \frac{\nu^2}{\varepsilon\mu} \exp(\alpha_2(0,\varepsilon,\mu)(\tau - s)) \Big),$$

где C_1 — постоянная, не зависящая от τ, ε, μ. Возьмем $0 < \sigma < \alpha$, тогда в силу (1.7) выполняются неравенства $|\alpha_2(0,\varepsilon,\mu)| > |\alpha_1(0,\varepsilon,\mu)| > \alpha > \sigma$.

Опуская аргументы $(0,\varepsilon,\mu)$ в записи функций α_1, α_2, получим

$$\int\limits_0^\tau \| \exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau - s)) I(\varepsilon,\mu) \| \exp(-\sigma s) ds$$

$$\leqslant C_1 \left(\int\limits_0^\tau \exp(\alpha_1(\tau - s)) \exp(-\sigma s) ds + \frac{\nu^2}{\varepsilon\mu} \int\limits_0^\tau \exp(\alpha_2(\tau - s)) \exp(-\sigma s) ds \right)$$

$$\leqslant C_1 \left(\int\limits_0^\tau \exp(-\alpha(\tau - s)) \exp(-\sigma s) ds + \frac{\nu^2}{\varepsilon\mu} \exp(\alpha_2\tau) \int\limits_0^\tau \exp((-\alpha_2 - \sigma)s) ds \right)$$

$$\leqslant C_1 \left(\frac{1}{\alpha - \sigma} + \frac{\nu^2}{\varepsilon\mu(\alpha_1 - \alpha_2)} \right) \exp(-\sigma\tau) = C_1 \left(\frac{1}{\alpha - \sigma} + \frac{\delta + 1}{\sqrt{(d_0\delta - a_0)^2 + 4\delta b_0 c_0}} \right) \exp(-\sigma\tau)$$

$$\leqslant C_\sigma \exp(-\sigma\tau),$$

где $\delta = \varepsilon/\mu$.

2. Если $b_0 = 0$, то

$$\big\| \exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau - s)) I(\varepsilon,\mu) \big\| \leqslant C_2 \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \exp\left(\frac{a_0}{2} \frac{\nu}{\varepsilon} (\tau - s) \right) + \frac{\nu}{\mu} \exp\left(\frac{d_0}{2} \frac{\nu}{\mu} (\tau - s) \right) \right).$$

Возьмем $\sigma < |a_0|/2$ и $\sigma < |d_0|/2$, тогда

$$\int\limits_0^\tau \big\| \exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau - s)) I(\varepsilon,\mu) \big\| \exp(-\sigma s) ds$$

$$\leqslant C_2 \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \exp\left(\frac{a_0}{2}\frac{\nu}{\varepsilon}(\tau - s)\right) \exp(-\sigma s) ds + \frac{\nu}{\mu} \int\limits_0^\tau \exp\left(\frac{d_0}{2}\frac{\nu}{\mu}(\tau - s)\right) \exp(-\sigma s) ds \right)$$

$$\leqslant C_2 \exp(-\sigma\tau) \left(\frac{\dfrac{\nu}{\varepsilon}}{-\sigma - \dfrac{a_0 \nu}{2\varepsilon}} + \frac{\dfrac{\nu}{\mu}}{-\sigma - \dfrac{d_0\nu}{2\mu}} \right) \leqslant C_2 \exp(-\sigma\tau) \left(\frac{1}{-\dfrac{a_0}{2} - \sigma\dfrac{\varepsilon}{\nu}} + \frac{1}{-\dfrac{d_0}{2} - \sigma\dfrac{\mu}{\nu}} \right)$$

$$\leqslant C_2 \exp(-\sigma\tau) \left(\frac{1}{-\dfrac{a_0}{2} - \sigma} + \frac{1}{-\dfrac{d_0}{2} - \sigma} \right) \leqslant C_\sigma \exp(-\sigma\tau).$$

Таким образом, неравенство (3.3) доказано.

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$\|\Psi_{0,0}(\tau, \varepsilon, \mu)\| \leqslant R \exp(-\sigma\tau), \qquad \tau \geqslant 0, \tag{3.4}$$

где $R > 0$ и $\sigma > 0$ не зависят от ε, μ, τ; кроме того, σ достаточно мало.

Доказательство. Запишем систему (3.1) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_{0,0}}{d\tau} = \dfrac{\nu}{\varepsilon} (a_0 \Pi_{0,0} + b_0 \Phi_{0,0}) + \dfrac{\nu}{\varepsilon} H_1(\Pi_{0,0},\, \Phi_{0,0}), \\[2ex] \dfrac{d\Phi_{0,0}}{d\tau} = \dfrac{\nu}{\mu} (c_0 \Pi_{0,0} + d_0 \Phi_{0,0}) + \dfrac{\nu}{\mu} H_2(\Pi_{0,0},\, \Phi_{0,0}), \end{cases} \tag{3.5}$$

где a_0, b_0, c_0, d_0 — значения $a(0)$, $b(0)$, $c(0)$, $d(0)$ соответственно,

$$H_1(\Pi_{0,0},\, \Phi_{0,0}) = f(0,\ x_{0,0}(0) + \Pi_{0,0},\ y_{0,0}(0) + \Phi_{0,0}) - a_0\Pi_{0,0} - b_0\Phi_{0,0},$$

$$H_2(\Pi_{0,0},\, \Phi_{0,0}) = g(0,\ x_{0,0}(0) + \Pi_{0,0},\ y_{0,0}(0) + \Phi_{0,0}) - c_0\Pi_{0,0} - d_0\Phi_{0,0}.$$

Вектор-функция $H(\Pi,\, \Phi) = (H_1(\Pi,\, \Phi), H_2(\Pi,\, \Phi))^T = (H_1(\Psi), H_2(\Psi))^T = H(\Psi)$, где $\Psi = (\Pi, \Phi)^T$, обладает следующими свойствами.

(1) $H(0,0) = 0$ — см. (2.9).

(2) Для любого ξ существует $\eta = \eta(\xi)$ такое, что

$$\|H(\Psi_1) - H(\Psi_2)\| \leqslant \xi \|\Psi_1 - \Psi_2\|, \qquad \|\Psi_1\| \leqslant \eta, \quad \|\Psi_2\| \leqslant \eta. \tag{3.6}$$

Действительно, по формуле конечных приращений имеем $H(\Psi_1) - H(\Psi_2) = H_\Psi(\Psi_1 - \Psi_2)$, где $H_\Psi = H^*_\Psi - \overline{A}(0)$. Здесь символом H^*_Ψ обозначена матрица, элементы первой строки которой $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ берутся в промежуточной точке $(0, x_{0,0}(0) + \Pi_2 + \theta_1(\Pi_1 - \Pi_2), y_{0,0}(0) + \Phi_2 + \theta_1(\Phi_1 - \Phi_2))$, а элементы второй строки $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ выбираются в промежуточной точке $(0, x_{0,0}(0) + \Pi_2 + \theta_2(\Pi_1 - \Pi_2),\ y_{0,0}(0) + \Phi_2 + \theta_2(\Phi_1 - \Phi_2))$, $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $\|H_\Psi\|$ сколь угодно мала при достаточно малых $\|\Psi_1\|$, $\|\Psi_2\|$, и (2) доказано.

Система (3.5) с начальными условиями (3.2) эквивалентна интегральному уравнению

$$\Psi_{0,0}(\tau, \varepsilon, \mu) = \exp(A_0(\varepsilon, \mu)\tau)(z^0 - z_{0,0}(0)) + \int\limits_0^\tau \exp(A_0(\varepsilon, \mu)(\tau - s)) I(\varepsilon, \mu) H(\Psi_{0,0}(s, \varepsilon, \mu)) ds,$$

где $A_0(\varepsilon, \mu) = A(0, \varepsilon, \mu)$, $I(\varepsilon, \mu) = \mathrm{diag}(\nu/\varepsilon; \nu/\mu)$.

Для получения экспоненциальной оценки (3.4) применим метод последовательных приближений:

$$\Psi_{0,0}^{(0)}(\tau,\varepsilon,\mu)=\exp(A_0(\varepsilon,\mu)\tau)(z^0-z_{0,0}(0)),$$

$$\Psi_{0,0}^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)=\exp(A_0(\varepsilon,\mu)\tau)(z^0-z_{0,0}(0))+\int\limits_0^\tau \exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)H(\Psi_{0,0}^{(k-1)}(s,\varepsilon,\mu))ds,$$

$$k=1,2,\ldots$$

В статье [5] была получена оценка

$$\|\exp(A_0(\varepsilon,\mu)\tau)\|\leqslant C\exp(-\sigma\tau),\qquad \tau\geqslant 0,\qquad 0<\sigma<\alpha, \tag{3.7}$$

где C, σ — постоянные, не зависящие от τ, ε, μ. Тогда

$$\|\Psi_{0,0}^{(0)}(\tau,\varepsilon,\mu)\|\leqslant C\|z^0-z_{0,0}(0)\|\exp(-\sigma\tau). \tag{3.8}$$

Возьмем $\xi>0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\xi C_\sigma=q<1, \tag{3.9}$$

где C_σ — постоянная из леммы 1. Для этого ξ найдем $\eta=\eta(\xi)$ из условия (3.6).

Обозначим $R_0=\|z^0-z_{0,0}(0)\|$. Считаем R_0 столь малым, что справедливо неравенство

$$R_0\frac{C}{1-q}\leqslant\eta.$$

Тогда в силу неравенств (3.6) и (3.3) выполняются оценки

$$\|\Psi_{0,0}^{(0)}(\tau,\varepsilon,\mu)\|\leqslant R_0\frac{C}{1-q}\exp(-\sigma\tau)\leqslant\eta,$$

$$\|\Psi_{0,0}^{(1)}(\tau,\varepsilon,\mu)-\Psi_{0,0}^{(0)}(\tau,\varepsilon,\mu)\|\leqslant\int\limits_0^\tau\|\exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)\|\cdot\|H(\Psi_{0,0}^{(0)}(s,\varepsilon,\mu))\|ds$$

$$\leqslant\xi R_0C\int\limits_0^\tau\|\exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)\|\exp(-\sigma s)ds\leqslant R_0C\xi C_\sigma\exp(-\sigma\tau)$$

$$\leqslant R_0Cq\exp(-\sigma\tau). \tag{3.10}$$

Отсюда

$$\|\Psi_{0,0}^{(1)}(\tau,\varepsilon,\mu)\|\leqslant R_0C(1+q)\exp(-\sigma\tau)\leqslant R_0\frac{C}{1-q}\leqslant\eta. \tag{3.11}$$

Индукцией по k докажем, что при $\tau\geqslant 0$, $\varepsilon>0$, $\mu>0$ имеют место неравенства

$$\|\Psi_{0,0}^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)\|\leqslant R_0C(1+q+\ldots+q^k)\exp(-\sigma\tau),\qquad k=0,1,\ldots \tag{3.12}$$

$$\|\Psi_{0,0}^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)-\Psi_{0,0}^{(k-1)}(\tau,\varepsilon,\mu)\|\leqslant R_0Cq^k\exp(-\sigma\tau),\qquad k=1,2,\ldots \tag{3.13}$$

При $k=1$ неравенства (3.12), (3.13) имеют место в силу (3.10), (3.11). Пусть (3.12), (3.13) верны до номера k включительно, тогда в силу (3.12) $\|\Psi_{0,0}^{(k-1)}(\tau,\varepsilon,\mu)\|\leqslant\eta$ и $\|\Psi_{0,0}^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)\|\leqslant\eta$ при $\tau\geqslant 0$, $\varepsilon>0$, $\mu>0$. Отсюда, учитывая условия (3.6) и (3.13), получаем

$$\|\Psi_{0,0}^{(k+1)}(\tau,\varepsilon,\mu)-\Psi_{0,0}^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)\|$$

$$\leqslant \int\limits_0^\tau \|\exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)\|\cdot\|H(\Psi_{0,0}^{(k)}(s,\varepsilon,\mu))-H(\Psi_{0,0}^{(k-1)}(s,\varepsilon,\mu))\|ds$$

$$\leqslant \xi\int\limits_0^\tau \|\exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)\|\cdot\|\Psi_{0,0}^{(k)}(s,\varepsilon,\mu)-\Psi_{0,0}^{(k-1)}(s,\varepsilon,\mu)\|ds$$

$$\leqslant \xi R_0Cq^k\int\limits_0^\tau \|\exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)\|\exp(-\sigma s)ds \leqslant R_0Cq^k\xi C_\sigma\exp(-\sigma\tau)$$

$$\leqslant R_0Cq^{k+1}\exp(-\sigma\tau).$$

Из этого неравенства и предположения индукции следует справедливость неравенства (3.12) для номера $k+1$.

Последовательность $\Psi_{0,0}^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)$ является последовательностью частичных сумм ряда

$$\Psi_{0,0}^{(0)}+(\Psi_{0,0}^{(1)}-\Psi_{0,0}^{(0)})+\ldots+(\Psi_{0,0}^{(k)}-\Psi_{0,0}^{(k-1)})+\ldots$$

и в силу (3.13) сходится равномерно по $\tau\geqslant 0$, $\varepsilon>0$, $\mu>0$ к решению $\Psi_{0,0}(\tau,\varepsilon,\mu)$ задачи (3.5), (3.2), а из (3.12) следует оценка (3.4) с $R=R_0C/(1-q)$.

Получим оценки остальных членов внутреннего разложения.

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$\|\Psi_{m,n}(\tau,\varepsilon,\mu)\|\leqslant r\,\exp(-\sigma_1\tau),\qquad \tau\geqslant 0, \tag{3.14}$$

где $r>0$ и $\sigma_1>0$ не зависят от ε, μ, τ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Коэффициенты внутреннего разложения с номерами m,n удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_{m,n}}{d\tau}=\dfrac{\nu}{\varepsilon}\left[\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial x}(\tau;\varepsilon,\mu)\Pi_{m,n}+\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial y}(\tau;\varepsilon,\mu)\Phi_{m,n}\right]+\dfrac{\nu}{\varepsilon}F_{m,n}(\tau;\varepsilon,\mu),\\[2ex] \dfrac{d\Phi_{m,n}}{d\tau}=\dfrac{\nu}{\mu}\left[\dfrac{\partial\overline{g}}{\partial x}(\tau;\varepsilon,\mu)\Pi_{m,n}+\dfrac{\partial\overline{g}}{\partial y}(\tau;\varepsilon,\mu)\Phi_{m,n}\right]+\dfrac{\nu}{\mu}G_{m,n}(\tau;\varepsilon,\mu)\end{cases} \tag{3.15}$$

и начальным условиям

$$\Psi_{m,n}(0,\varepsilon,\mu)=-z_{m,n}(0). \tag{3.16}$$

В уравнениях (3.15) через $\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial x}(\tau;\varepsilon,\mu)$, $\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial y}(\tau;\varepsilon,\mu)$, $\dfrac{\partial\overline{g}}{\partial x}(\tau;\varepsilon,\mu)$, $\dfrac{\partial\overline{g}}{\partial y}(\tau;\varepsilon,\mu)$ обозначены соответственно производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, вычисленные в точке $(0,\ x_{0,0}(0)+\Pi_{0,0},\ y_{0,0}(0)+\Phi_{0,0})$.

Для $\Psi_{0,0}(\tau,\varepsilon,\mu)$ оценка (3.14) получена в лемме 2. Докажем соответствующее неравенство для $\Psi_{1,0}$ ($\Psi_{0,1}$). В системе (3.15) $F_{1,0}(\tau;\varepsilon,\mu)$ дается формулой (2.8) (для $G_{1,0}$ формула аналогичная). По теореме Лагранжа для функций $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ и из оценки (3.4) следует справедливость неравенства

$$\|H_{1,0}(\tau;\varepsilon,\mu)\|\leqslant C_1\exp(-\sigma_1\tau),\qquad \tau\geqslant 0, \tag{3.17}$$

где $H_{1,0}=(F_{1,0},G_{1,0})^T$, постоянные $C_1>0$ и $\sigma_1>0$ не зависят от ε, μ, τ, а σ_1 удовлетворяет условию

$$\sigma_1<\sigma, \tag{3.18}$$

(σ берется из оценок (3.4), (3.7)).

Перепишем задачу (3.15), (3.16) при $m = 1$, $n = 0$ в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_{1,0}}{d\tau} = \dfrac{\nu}{\varepsilon}\,(a_0\Pi_{1,0} + b_0\Phi_{1,0}) + \dfrac{\nu}{\varepsilon}\,\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot) - a_0\right)\Pi_{1,0} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(\cdot) - b_0\right)\Phi_{1,0}\right] + \dfrac{\nu}{\varepsilon}\,F_{1,0}(\tau;\varepsilon,\mu), \\[2ex] \dfrac{d\Phi_{1,0}}{d\tau} = \dfrac{\nu}{\mu}\,(c_0\Pi_{1,0} + d_0\Phi_{1,0}) + \dfrac{\nu}{\mu}\,\left[\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(\cdot) - c_0\right)\Pi_{1,0} + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}(\cdot) - d_0\right)\Phi_{1,0}\right] + \dfrac{\nu}{\mu}\,G_{1,0}(\tau;\varepsilon,\mu), \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\Psi_{1,0}(0,\varepsilon,\mu) = -z_{1,0}(0). \tag{3.20}$$

Система (3.19) с начальными условиями (3.20) эквивалентна интегральному уравнению

$$\Psi_{1,0}(\tau,\varepsilon,\mu) = -\exp(A_0(\varepsilon,\mu)\tau)z_{1,0}(0) + \int\limits_0^\tau \exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)P(s,\varepsilon,\mu)\Psi_{1,0}(s,\varepsilon,\mu)ds$$

$$+ \int\limits_0^\tau \exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)H_{1,0}(s,\varepsilon,\mu)ds,$$

где

$$P(\tau,\varepsilon,\mu) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, x_{0,0}(0) + \Pi_{0,0}, y_{0,0}(0) + \Phi_{0,0}) - a_0 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, x_{0,0}(0) + \Pi_{0,0}, y_{0,0}(0) + \Phi_{0,0}) - b_0 \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x}(0, x_{0,0}(0) + \Pi_{0,0}, y_{0,0}(0) + \Phi_{0,0}) - c_0 & \dfrac{\partial g}{\partial y}(0, x_{0,0}(0) + \Pi_{0,0}, y_{0,0}(0) + \Phi_{0,0}) - d_0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\|\Psi_{0,0}(\tau,\varepsilon,\mu)\| \leqslant \eta$, то в силу свойства 2 функции H (см. (3.6))

$$\|P(\tau,\varepsilon,\mu)\| \leqslant \xi, \qquad \tau \geqslant 0, \qquad \varepsilon > 0, \qquad \mu > 0,$$

где величина ξ выбрана ранее с условием (3.9).

Для получения экспоненциальной оценки (3.14) применим метод последовательных приближений:

$$\Psi_{1,0}^{(0)}(\tau,\varepsilon,\mu) = -\exp(A_0(\varepsilon,\mu)\tau)z_{1,0}(0) + \int\limits_0^\tau \exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)H_{1,0}(s,\varepsilon,\mu)ds,$$

$$\Psi_{1,0}^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu) = -\exp(A_0(\varepsilon,\mu)\tau)z_{1,0}(0) + \int\limits_0^\tau \exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)P(s,\varepsilon,\mu)\Psi_{1,0}^{(k-1)}(s,\varepsilon,\mu)ds$$

$$+ \int\limits_0^\tau \exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)H_{1,0}(s,\varepsilon,\mu)ds, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Из неравенств (3.7), (3.3), (3.17), (3.18) следует[2], что

$$\|\Psi_{1,0}^{(0)}(\tau,\varepsilon,\mu)\| \leqslant C\exp(-\sigma_1\tau),$$

[2]Вообще говоря, постоянная C здесь не совпадает с одноименной постоянной в формуле (3.7). Условимся положительные постоянные, не зависящие от ε, μ, τ, t, величина которых в рассуждениях существенной роли не играет, всюду в дальнейшем обозначать одними и теми же буквами C, K, σ.

$$\|\Psi_{1,0}^{(1)}(\tau,\varepsilon,\mu)-\Psi_{1,0}^{(0)}(\tau,\varepsilon,\mu)\| \leqslant \int\limits_0^\tau \|\exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)\|\cdot\|P(s,\varepsilon,\mu)\|\cdot\|\Psi_{1,0}^{(0)}(s,\varepsilon,\mu))\|ds$$

$$\leqslant C\,\xi C_{\sigma_1}\exp(-\sigma_1\tau). \tag{3.21}$$

Из леммы 1 и из условия (3.9) следует, что $\xi C_{\sigma_1}\leqslant \xi C_\sigma = q<1$, тогда

$$\|\Psi_{1,0}^{(1)}(\tau,\varepsilon,\mu)\| \leqslant C(1+q)\exp(-\sigma_1\tau)\leqslant \frac{C}{1-q}\exp(-\sigma_1\tau). \tag{3.22}$$

Индукцией по k докажем, что при $\tau\geqslant 0$, $\varepsilon>0$, $\mu>0$ имеют место неравенства

$$\|\Psi_{1,0}^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)\| \leqslant C(1+q+\ldots+q^k)\exp(-\sigma_1\tau),\qquad k=0,1,\ldots \tag{3.23}$$

$$\|\Psi_{1,0}^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)-\Psi_{1,0}^{(k-1)}(\tau,\varepsilon,\mu)\| \leqslant Cq^k\exp(-\sigma_1\tau),\qquad k=1,2,\ldots \tag{3.24}$$

При $k=1$ неравенства (3.23), (3.24) имеют место в силу (3.21), (3.22). Пусть (3.23), (3.24) верны до номера k включительно, тогда в силу (3.24) получаем

$$\|\Psi_{1,0}^{(k+1)}(\tau,\varepsilon,\mu)-\Psi_{1,0}^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)\|$$

$$\leqslant \int\limits_0^\tau \|\exp(A_0(\varepsilon,\mu)(\tau-s))I(\varepsilon,\mu)\|\cdot\|P(s,\varepsilon,\mu)\|\cdot\|\Psi_{1,0}^{(k)}(s,\varepsilon,\mu))-\Psi_{1,0}^{(k-1)}(s,\varepsilon,\mu))\|ds$$

$$\leqslant Cq^k\xi C_{\sigma_1}\exp(-\sigma_1\tau)\leqslant Cq^{k+1}\exp(-\sigma_1\tau).$$

Из этого неравенства и предположения индукции следует справедливость неравенства (3.23) для номера $k+1$.

Последовательность $\Psi_{1,0}^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)$ является последовательностью частичных сумм ряда

$$\Psi_{1,0}^{(0)}+(\Psi_{1,0}^{(1)}-\Psi_{1,0}^{(0)})+\ldots+(\Psi_{1,0}^{(k)}-\Psi_{1,0}^{(k-1)})+\ldots$$

и в силу неравенств (3.8), (3.24) сходится равномерно по $\tau\geqslant 0$, $\varepsilon>0$, $\mu>0$ к решению $\Psi_{1,0}(\tau,\varepsilon,\mu)$ задачи (3.19), (3.16), а из (3.23) следует оценка (3.14) с $r=\dfrac{C}{1-q}$. В неравенстве (3.14) переобозначим σ_1 на σ для удобства.

Предположим теперь, что неравенства (3.14) справедливы при $0\leqslant m+n<k$. Доказательство неравенств для $m+n=k$ проводится аналогично случаю $m=1$, $n=0$. При этом надо принять во внимание следующую оценку вектор-функции $H_{m,n}(\tau,\varepsilon,\mu)$:

$$\|H_{m,n}(\tau;\varepsilon,\mu)\|\leqslant C\exp(-\sigma_2\tau); \tag{3.25}$$

здесь $H_{m,n}=(F_{m,n},G_{m,n})^T$ (3.15), постоянные $C>0$ и $\sigma_2>0$ не зависят от ε, μ, τ, а σ_2 удовлетворяет условию

$$\sigma_2<\sigma$$

(σ берется из оценок (3.4), (3.7)). В свою очередь, доказательство неравенства (3.25) можно получить, опираясь на предположение индукции и следуя схеме из [6, гл. 3]. Тем самым лемма 3 доказана.

З а м е ч а н и е. Обоснование асимптотики в случае линейных функций

$$f(t,x,y)=a(t)x+b(t)y+\overline{f}(t),\qquad g(t,x,y)=c(t)x+d(t)y+\overline{g}(t) \tag{3.26}$$

в системе (1.1) дается в статье [5]. Обозначим

$$x_N(t,\varepsilon,\mu)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{k=0}^{i}\varepsilon^{i-k}\mu^k(x_{i-k,k}(t)+\Pi_{i-k,k}(\tau,\varepsilon,\mu)),$$
$$y_N(t,\varepsilon,\mu)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{k=0}^{i}\varepsilon^{i-k}\mu^k(y_{i-k,k}(t)+\Phi_{i-k,k}(\tau,\varepsilon,\mu))$$

или, в векторной форме, $z_N(t,\varepsilon,\mu)=\sum\limits_{i=0}^{N}\sum\limits_{k=0}^{i}\varepsilon^{i-k}\mu^k(z_{i-k,k}(t)+\Psi_{i-k,k}(\tau,\varepsilon,\mu))$. Тогда при выполнении условий (1.6) найдутся постоянные $\varepsilon_0>0$, $\mu_0>0$ и $C>0$ такие, что при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $0<\mu\leqslant\mu_0$ решение $x(t,\varepsilon,\mu)$, $y(t,\varepsilon,\mu)$ задачи (1.1), (3.26), (1.2) удовлетворяет неравенству

$$\|z(t,\varepsilon,\mu)-z_N(t,\varepsilon,\mu)\|\leqslant C(\varepsilon^{N+1}+\mu^{N+1}),\qquad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Автор выражает благодарность А.М. Ильину и А.Р. Данилину за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 20.02.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н.** Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31 (73), № 3. С. 575–586.
2. **Васильева А.Б.** Асимптотические формулы для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих при производных параметры различных порядков малости // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128, № 6. С. 1110–1113.
3. **Васильева А.Б.** Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных// Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 4. С. 611–642.
4. **Ильин А.М., Коврижных О.О.** Асимптотика решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами // Докл. РАН. 2004. Т. 396, № 1. С. 23–24.
5. **Коврижных О.О.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной системы линейных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 10. С. 1322–1331.
6. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 517.977

О ВЯЗКОСТНОМ РЕШЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ ДЛЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СИСТЕМ[1]

Н. Ю. Лукоянов

Статья посвящена развитию вязкостного подхода к обобщенному решению функциональных уравнений типа Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными и неупреждающим гамильтонианом. Эти уравнения естественным образом связаны с задачами динамической оптимизации наследственных систем и по сравнению с классическими уравнениями Гамильтона — Якоби наделены рядом дополнительных особенностей, обусловленных эффектом последействия. Дано определение вязкостного решения, учитывающего эти особенности. Обоснована согласованность данного определения с понятием решения в классическом смысле, с минимаксным подходом к обобщенному решению. Доказаны теоремы существования и единственности.

1. Введение

В задачах позиционного управления и дифференциальных играх с наследственной информацией [1–7] при описании функционала цены (величины оптимального результата — в задачах оптимального управления, величины цены игры или оптимального гарантированного результата — в дифференциальных играх) возникает [8, 9] функциональное уравнение типа Гамильтона — Якоби следующего вида:

$$\partial_t\varphi\big(t,x(\cdot)\big)+H\Big(t,x(\cdot),\nabla_{x(\cdot)}\varphi\big(t,x(\cdot)\big)\Big)=0,\quad \big(t,x(\cdot)\big)\in[t_*,T)\times C, \tag{1.1}$$

при краевом условии на правом конце

$$\varphi\big(T,x(\cdot)\big)=\sigma\big(x(\cdot)\big),\quad x(\cdot)\in C. \tag{1.2}$$

Здесь C — пространство непрерывных функций $x(\cdot)=\big\{x(t)\in\mathbb{R}^n,\ t_*\le t\le T\big\}$ с равномерной метрикой, $t_*,T\in\mathbb{R}$, $t_*<T$. Гамильтониан $H:[t_*,T]\times C\times\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ и краевой функционал $\sigma: C\mapsto\mathbb{R}$ известны. Предполагается, что при любом фиксированном $s\in\mathbb{R}^n$ отображение

$$[t_*,T]\times C\ni\big(t,x(\cdot)\big)\mapsto H\big(t,x(\cdot),s\big)\in\mathbb{R}$$

является *неупреждающим*. Это означает, что для всякого $t\in[t_*,T]$ при любых $x(\cdot),y(\cdot)\in C$, удовлетворяющих условию

$$y(\tau)=x(\tau)\ \text{при}\ \tau\in[t_*,t], \tag{1.3}$$

имеет место равенство

$$H\big(t,x(\cdot),s\big)=H\big(t,y(\cdot),s\big),\quad s\in\mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Неизвестным в (1.1) является неупреждающий функционал $\varphi:[t_*,T]\times C\mapsto\mathbb{R}$. Величины $\partial_t\varphi\big(t,x(\cdot)\big)\in\mathbb{R}$ и $\nabla_{x(\cdot)}\varphi\big(t,x(\cdot)\big)\in\mathbb{R}^n$ однозначно определяются следующим соотношением:

$$\varphi\big(\tau,y(\cdot)\big)-\varphi\big(t,x(\cdot)\big)=\partial_t\varphi\big(t,x(\cdot)\big)(\tau-t)+\Big\langle\nabla_{x(\cdot)}\varphi\big(t,x(\cdot)\big),y(\tau)-x(t)\Big\rangle+o_{y(\cdot)}(\tau-t),\quad \tau\in(t,T], \tag{1.5}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, гранта Президента РФ МД-6133.2006.1 и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00436).

где символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов. Данное соотношение должно выполняться для любых функций $y(\cdot)\in C$, удовлетворяющих условию (1.3) и липшицевых на $[t,T]$. Множество всех таких функций будем обозначать через $\mathrm{Lip}\big(t,x(\cdot)\big)$. Подчеркнем, что в (1.5) величины $\partial_t\varphi\big(t,x(\cdot)\big)$ и $\nabla_{x(\cdot)}\varphi\big(t,x(\cdot)\big)$ не зависят от выбора $y(\cdot)\in\mathrm{Lip}\big(t,x(\cdot)\big)$, в то время как бесконечно малая $o_{y(\cdot)}(\delta)$ $(o_{y(\cdot)}(\delta)/\delta\to 0$ при $\delta\downarrow 0)$ может зависеть от этого выбора. Согласно терминологии [10] величины $\partial_t\varphi\big(t,x(\cdot)\big)$ и $\nabla_{x(\cdot)}\varphi\big(t,x(\cdot)\big)$ представляют собой коинвариантные производные функционала φ в точке $\big(t,x(\cdot)\big)\in[t_*,T)\times C$, в терминологии [11] — это Clio-производные. Далее будем использовать термин *коинвариантные производные* (ci-производные). Если соотношение (1.5) имеет место при всех $\big(t,x(\cdot)\big)\in[t_*,T)\times C$, то функционал φ называем *коинвариантно дифференцируемым* (ci-дифференцируемым). Неупреждающий функционал $\varphi:[t_*,T]\times C\mapsto\mathbb{R}$ называем *коинвариантно гладким* (ci-гладким), если он непрерывен, ci-дифференцируем и отображения

$$[t_*,T)\times C\ni\big(t,x(\cdot)\big)\mapsto\partial_t\varphi\big(t,x(\cdot)\big)\in\mathbb{R},\quad [t_*,T)\times C\ni\big(t,x(\cdot)\big)\mapsto\nabla_{x(\cdot)}\varphi\big(t,x(\cdot)\big)\in\mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

непрерывны.

Для иллюстрации рассмотрим задачу оптимального управления. Пусть имеется динамическая система, движение которой $y(\cdot)=\big\{y(\tau)\in\mathbb{R}^n,\,t_*\le\tau\le T\big\}$ описывается функционально-дифференциальным уравнением вида

$$\dot y(\tau)=f\big(\tau,y(\cdot),u(\tau)\big),\quad u(\tau)\in\mathbb{P},\quad t_*\le t\le\tau\le T, \tag{1.7}$$

и начальным условием (1.3), определяемым заданной начальной позицией $\big(t,x(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times C$.

Здесь τ — текущее время, $y(\tau)$ и $\dot y(\tau)=\mathrm{d}y(\tau)/\mathrm{d}\tau$ — соответственно значение фазового вектора и скорость его изменения в момент τ, $u(\tau)$ — текущее воздействие управления, $\mathbb{P}$ — компакт конечномерного пространства. Допустимой программой управления считается любая измеримая функция $u(\cdot)=\big\{u(\tau)\in\mathbb{P},\,t_*\le\tau\le T\big\}$. Через $\mathcal{U}$ обозначим множество всех таких программ. Кроме того, полагаем, что для любого фиксированного $u\in\mathbb{P}$ отображение $[t_*,T]\times C\ni\big(\tau,y(\cdot)\big)\mapsto f\big(\tau,y(\cdot),u\big)\in\mathbb{R}^n$ является неупреждающим. Это свойство неупреждаемости определяет наследственный характер системы (1.7). Полагаем также, что выполняются известные (см., например, [8, 9]) условия, при которых для любых $\big(t,x(\cdot)\big)\in[t_*,T)\times C$ и $u(\cdot)\in\mathcal{U}$ в задаче (1.3), (1.7) существует единственное продолжимое вплоть до терминального момента времени T решение — функция $y(\cdot)\in\mathrm{Lip}\big(t,x(\cdot)\big)$, которая при почти всех $\tau\in[t,T]$ удовлетворяет уравнению (1.7).

Пусть качество процесса управления оценивается показателем

$$\gamma=\sigma\big(y(\cdot)\big)-\int\limits_t^T h\big(\tau,y(\cdot),u(\tau)\big)\mathrm{d}\tau, \tag{1.8}$$

где отображение $[t_*,T]\times C\ni\big(\tau,y(\cdot)\big)\mapsto h\big(\tau,y(\cdot),u\big)\in\mathbb{R}$ также является неупреждающим. Цель управления — минимизировать γ. Тогда величина оптимального результата (функционал цены) определяется равенством (см. пояснения после (1.7))

$$\varphi\big(t,x(\cdot)\big)=\inf\big\{\gamma\,|\,u(\cdot)\in\mathcal{U}\big\},\quad \big(t,x(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times C. \tag{1.9}$$

При $t=T$ этот функционал удовлетворяет условию (1.2). При $t\in[t_*,T)$ он характеризуется следующим нелокальным соотношением, выражающим принцип оптимальности динамического программирования в задаче (1.3), (1.7), (1.8):

$$\varphi\big(t,x(\cdot)\big)=\inf\left\{\varphi\big(\tau,y(\cdot)\big)-\int\limits_t^\tau h\big(\xi,y(\cdot),u(\xi)\big)\mathrm{d}\xi\,\middle|\,u(\cdot)\in\mathcal{U}\right\},\quad \tau\in(t,T].$$

Переходя в данном соотношении к пределу при $\tau \to t+0$, предполагая при этом ci-гладкость функционала (1.9), приходим к уравнению (1.1) с гамильтонианом

$$H\big(t, x(\cdot), s\big) = \inf\Big\{\Big\langle s, f\big(t, x(\cdot), u\big)\Big\rangle - h\big(t, x(\cdot), u\big)\Big| u \in \mathbb{P}\Big\}.$$

Известно, что функционал цены, как правило, не является гладким и соответствующие уравнения Гамильтона — Якоби не имеют подходящего классического решения. Поэтому рассматриваются обобщенные решения. В теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби и более общих уравнений с частными производными первого и второго порядка можно выделить два подхода — минимаксный [12, 13] и вязкостный [14, 15].

Истоки минимаксного решения уравнений Гамильтона — Якоби лежат в конструкциях из теории позиционных дифференциальных игр (см., например, [1,5,6,16]), базирующейся на минимаксных оценках и операциях. Минимаксные решения уравнений вида (1.1) исследовались в работах [17,18]. В работах [8,9] было показано, что при естественных предположениях минимаксное решение соответствующей задачи вида (1.1), (1.2) однозначно определяет функционал цены в задачах управления и дифференциальных играх с наследственной информацией.

Понятие вязкостного решения восходит к методу "исчезающей вязкости" из математической физики, последовательно применявшемуся для изучения уравнений Гамильтона — Якоби, например, в [19]. После работ [14, 15] теория вязкостных решений приобрела самостоятельный характер.

Настоящая статья посвящена развитию вязкостного подхода к обобщенному решению задачи (1.1), (1.2). Предлагаемое определение вязкостного решения этой задачи наиболее близко к конструкциям из [20–23].

2. Основные предположения

В добавление к свойству (1.4) неупреждаемости гамильтониана H будем предполагать выполненными следующие условия:

(A1) отображения $H : [t_*, T] \times C \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ и $\sigma : C \mapsto \mathbb{R}$ непрерывны;

(A2) имеют место оценки

$$\begin{aligned} \big|H\big(t, x(\cdot), 0\big)\big| &\leq \rho\big(t, x(\cdot)\big), \qquad && \big(t, x(\cdot)\big) \in [t_*, T] \times C, \\ \big|H\big(t, x(\cdot), r\big) - H\big(t, x(\cdot), s\big)\big| &\leq \rho\big(t, x(\cdot)\big)\|r - s\|, && r, s \in \mathbb{R}^n,\ \big(t, x(\cdot)\big) \in [t_*, T] \times C, \end{aligned}$$

где

$$\rho\big(t, x(\cdot)\big) = a\Big(1 + \max_{t_* \leq \xi \leq t} \|x(\xi)\|\Big), \quad a = \mathrm{const} > 1\,.$$

Здесь и ниже символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму.

Кроме того, для существования вязкостного решения задачи (1.1), (1.2) потребуется условие локальной липшицевости гамильтониана H по функциональной переменной $x(\cdot)$:

(A3) для любого компакта $D \subset C$ существует такое число $\Lambda = \Lambda(D) > 0$, что

$$\big|H\big(t, x(\cdot), s\big) - H\big(t, y(\cdot), s\big)\big| \leq \Lambda\left(1 + \|s\|\right) \max_{t_* \leq \xi \leq t} \|x(\xi) - y(\xi)\|, \quad x(\cdot), y(\cdot) \in D,\ t \in [t_*, T],\ s \in \mathbb{R}^n;$$

а для единственности — следующее более сильное условие:

(A4) для любого компакта $D \subset C$ существует такое число $\lambda = \lambda(D) > 0$, что

$$\big|H\big(t, x(\cdot), s\big) - H\big(t, y(\cdot), s\big)\big| \leq \lambda\left(1 + \|s\|\right)\sqrt{\mu\big(t, x(\cdot), y(\cdot)\big)}, \quad x(\cdot), y(\cdot) \in D,\ t \in [t_*, T],\ s \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$\mu\big(t, x(\cdot), y(\cdot)\big) = \big\|x(t) - y(t)\big\|^2 + \int_{t_*}^{t} \big\|x(\xi) - y(\xi)\big\|^2 \mathrm{d}\xi\,. \tag{2.1}$$

С учетом особенностей уравнения (1.1) приведенные условия являются естественным функциональным аналогом стандартных условий, при которых обычно (см., например, [12–15]) рассматриваются классические уравнения типа Гамильтона — Якоби. Отметим также, что условия (A1)–(A4) характерны для уравнений, возникающих в задачах управления и дифференциальных играх для систем с распределенным последействием.

3. Определение вязкостного решения

Пусть AC — множество абсолютно непрерывных функций $x(\cdot) = \big\{x(t) \in \mathbb{R}^n,\, t_* \le t \le T\big\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Обозначим

$$D_k = \Big\{x(\cdot) \in AC :\ \|x(t_*)\| \le k,\ \ \|\dot{x}(t)\| \le k\rho\big(t, x(\cdot)\big)\ \text{ для почти всех } t \in [t_*, T]\Big\}. \tag{3.1}$$

Отметим следующие свойства множеств D_k:

(i) для любого $k = 1, 2, \ldots$ множество D_k компактно в C (см. [4, 18]);

(ii) множество $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$ всюду плотно в C.

О п р е д е л е н и е 1. *Вязкостным решением* уравнения (1.1) называется неупреждающий непрерывный функционал $\varphi : [t_*, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$, который удовлетворяет следующим двум условиям:

(V*) для любого неупреждающего ci-гладкого функционала $\psi : [t_*, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$ всякий раз, когда при некотором $k = 1, 2, \ldots$ в точке $\big(t, x(\cdot)\big) \in [t_*, T) \times D_k$ разность $\varphi - \psi$ достигает своего минимума на $[t_*, T] \times D_k$, имеет место неравенство

$$\partial_t \psi\big(t, x(\cdot)\big) + H\Big(t, x(\cdot), \nabla_{x(\cdot)} \psi\big(t, x(\cdot)\big)\Big) \le 0; \tag{3.2}$$

(V$_*$) для любого неупреждающего ci-гладкого функционала $\psi : [t_*, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$ всякий раз, когда при некотором $k = 1, 2, \ldots$ в точке $\big(t, x(\cdot)\big) \in [t_*, T) \times D_k$ разность $\varphi - \psi$ достигает своего максимума на $[t_*, T] \times D_k$, имеет место неравенство

$$\partial_t \psi\big(t, x(\cdot)\big) + H\Big(t, x(\cdot), \nabla_{x(\cdot)} \psi\big(t, x(\cdot)\big)\Big) \ge 0. \tag{3.3}$$

Если при этом функционал φ удовлетворяет условию (1.2), то он называется *вязкостным решением задачи* (1.1), (1.2).

Следующее утверждение обосновывает согласованность данного определения обобщенного решения с понятием решения в классическом смысле.

Утверждение 1. *Неупреждающий ci-гладкий функционал $\varphi : [t_*, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению* (1.1) *в том и только том случае, когда он удовлетворяет паре условий* (V*), (V$_*$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $\psi = \varphi$ в условиях (V*), (V$_*$) и учитывая затем свойство (ii) множеств D_k вместе с непрерывностью гамильтониана H и отображений (1.6), приходим к импликации $\big(($V*),(V$_*$)$\big) \Rightarrow$ (1.1). Осталось проверить импликации (1.1) $\Rightarrow$ (V*) и (1.1) $\Rightarrow$ (V$_*$). Доказательства этих импликаций не различаются по существу. Проведем рассуждения для импликации (1.1) $\Rightarrow$ (V*).

Пусть в точке $\big(t, x(\cdot)\big) \in [t_*, T) \times D_k$ разность $\varphi - \psi$ достигает минимума на $[t_*, T] \times D_k$. Следовательно,

$$\psi\big(\tau, y(\cdot)\big) - \psi\big(t, x(\cdot)\big) \le \varphi\big(\tau, y(\cdot)\big) - \varphi\big(t, x(\cdot)\big), \quad \big(\tau, y(\cdot)\big) \in [t_*, T] \times D_k. \tag{3.4}$$

Обозначим

$$r_0 = \partial_t \varphi\big(t, x(\cdot)\big), \quad r = \nabla_{x(\cdot)} \varphi\big(t, x(\cdot)\big), \quad s_0 = \partial_t \psi\big(t, x(\cdot)\big), \quad s = \nabla_{x(\cdot)} \psi\big(t, x(\cdot)\big).$$

Положим

$$f = \begin{cases} 0, & \text{если } r = s, \\ \|s-r\|^{-2}\Big(H\big(t,x(\cdot),s\big) - H\big(t,x(\cdot),r\big)\Big)(s-r), & \text{если } r \neq s. \end{cases}$$

Тогда

$$\langle s, f\rangle - H\big(t,x(\cdot),s\big) = \langle r, f\rangle - H\big(t,x(\cdot),r\big) \tag{3.5}$$

и в силу условия (A2)

$$\|f\| \leq \rho\big(t,x(\cdot)\big). \tag{3.6}$$

Определим функцию $y_f(\cdot)$:

$$y_f(\tau) = \begin{cases} x(\tau) & \text{при } \tau \in [t_*, t], \\ x(t) + (\tau - t)f & \text{при } \tau \in (t, T]. \end{cases}$$

Тогда $y_f(\cdot) \in \mathrm{Lip}\big(t,x(\cdot)\big)$ и в силу (3.1), (3.6) $y_f(\cdot) \in D_k$. Подставляя $y_f(\cdot)$ в (3.4) при $\tau \in (t,T]$, с учетом ci-дифференцируемости функционалов φ и ψ (см. (1.5)) приходим к неравенству

$$s_0 + \langle s, f\rangle \leq r_0 + \langle r, f\rangle.$$

Так как функционал φ удовлетворяет уравнению (1.1), отсюда и из (3.5) получаем требуемое неравенство (3.2). Доказательство завершено. □

4. Существование

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *При условиях* (A1)–(A3) *задача* (1.1), (1.2) *имеет по крайней мере одно вязкостное решение.*

Доказательство. Из результатов [17, 18] следует, что при условиях (A1)–(A3) существует минимаксное решение задачи (1.1), (1.2) — неупреждающий непрерывный функционал $\varphi : [t_*, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$, который удовлетворяет условию (1.2) и обладает следующим свойством: для любых $\big(t,x(\cdot)\big) \in [t_*, T) \times C$ и $s \in \mathbb{R}^n$ существует такая функция $w(\cdot) \in \mathrm{Lip}\big(t,x(\cdot)\big)$, что

$$\|\dot{w}(\tau)\| \leq \rho\big(\tau, w(\cdot)\big) \quad \text{для почти всех } \tau \in [t,T], \tag{4.1}$$

$$\varphi\big(\tau, w(\cdot)\big) - \varphi\big(t,x(\cdot)\big) = \big\langle w(\tau) - x(t), s\big\rangle - \int\limits_t^\tau H\big(\xi, w(\cdot), s\big)\mathrm{d}\xi, \quad \tau \in [t,T]. \tag{4.2}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что этот функционал φ удовлетворяет условиям (V*) и (V$_*$).

Проверим выполнение условия (V*). Пусть для неупреждающего ci-гладкого функционала $\psi : [t_*, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$ при некотором $k = 1, 2, \ldots$ в точке $\big(t,x(\cdot)\big) \in [t_*, T) \times D_k$ разность $\varphi - \psi$ достигает своего минимума на $[t_*, T] \times D_k$. Положим $s = \nabla_{x(\cdot)}\psi\big(t,x(\cdot)\big)$ и рассмотрим соответствующую функцию $w(\cdot) \in \mathrm{Lip}\big(t,x(\cdot)\big)$, для которой имеют место соотношения (4.1), (4.2). В силу (3.1), (4.1) справедливо включение $w(\cdot) \in D_k$. Следовательно,

$$\psi\big(\tau, w(\cdot)\big) - \psi\big(t,x(\cdot)\big) \leq \varphi\big(\tau, w(\cdot)\big) - \varphi\big(t,x(\cdot)\big), \quad \tau \in [t,T]. \tag{4.3}$$

Функционал ψ является ci-дифференцируемым. Поэтому (см. (1.5))

$$\psi\big(\tau, w(\cdot)\big) - \psi\big(t,x(\cdot)\big) = \partial_t\psi\big(t,x(\cdot)\big)(\tau - t) + \Big\langle \nabla_{x(\cdot)}\psi\big(t,x(\cdot)\big), w(\tau) - x(t)\Big\rangle + o_w(\tau - t). \tag{4.4}$$

Из (4.2)–(4.4) вытекает неравенство

$$\partial_t\psi\big(t,x(\cdot)\big)+\frac{1}{\tau-t}\int\limits_t^{\tau}H\Big(\xi,w(\cdot),\nabla_{x(\cdot)}\psi\big(t,x(\cdot)\big)\Big)\mathrm{d}\xi\le-\frac{o_w(\tau-t)}{\tau-t}. \tag{4.5}$$

По условию (A1) гамильтониан H непрерывен. Так как $w(\cdot)\in\mathrm{Lip}\big(t,x(\cdot)\big)$, функции $x(\cdot)$ и $w(\cdot)$ совпадают на $[t_*,t]$. Таким образом, переходя в (4.5) к пределу при $\tau\to t+0$ и учитывая свойство (1.4) неупреждаемости гамильтониана H, приходим к неравенству (3.2), откуда заключаем, что условие (V*) действительно выполняется. Проверка выполнения условия (V$_*$) проводится аналогично с понятными изменениями.

Теорема доказана. □

5. Единственность

Следующее утверждение дает достаточные условия единственности вязкостного решения.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (A1), (A2) *и условие* (A4). *Тогда задача* (1.1), (1.2) *имеет только одно вязкостное решение.*

Доказательство. Пусть φ_1 и φ_2 — два вязкостных решения уравнения (1.1), удовлетворяющих на правом конце одному и тому же условию (1.2). Поскольку множества D_k обладают свойством (ii), а вязкостное решение непрерывно, то для доказательства теоремы достаточно показать справедливость равенства

$$\varphi_1\big(t,x(\cdot)\big)=\varphi_2\big(t,x(\cdot)\big),\quad \big(t,x(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times D_k,\ k=1,2,\ldots \tag{5.1}$$

Предположим противное, т. е. что при некоторых $k=1,2,\ldots$ и $\big(t,x(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times D_k$ равенство (5.1) нарушается. Тогда, поскольку множество $[t_*,T]\times D_k$ компактно в $[t_*,T]\times C$, без ограничения общности можно считать, что

$$\max\Big\{\varphi_1\big(t,x(\cdot)\big)-\varphi_2\big(t,x(\cdot)\big)\;\big|\;\big(t,x(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times D_k\Big\}=b>0. \tag{5.2}$$

В дальнейших рассуждениях будем следовать методу "удвоения переменных" (см., например, [24, с. 547, 608], а также [25, с. 56] и [21]), учитывая при этом особенности рассматриваемой задачи. Обозначим

$$\vartheta\big[t,x(\cdot)\big](\xi)=\begin{cases}x(\xi), & \text{если } \xi\in[t_*,t),\\ x(t), & \text{если } \xi\in[t,T],\end{cases} \tag{5.3}$$

$$\nu\big(t,x(\cdot);\tau,y(\cdot)\big)=(t-\tau)^2+\big\|x(t)-y(\tau)\big\|^2+\int\limits_{t_*}^{T}\big\|\vartheta\big[t,x(\cdot)\big](\xi)-\vartheta\big[\tau,y(\cdot)\big](\xi)\big\|^2\mathrm{d}\xi. \tag{5.4}$$

Зафиксируем число α:

$$0<\alpha\le\frac{b}{4(T-t_*)}\,. \tag{5.5}$$

Пусть далее $\delta,\varepsilon>0$. Рассмотрим величину

$$\Phi\big(t,x(\cdot);\tau,y(\cdot)\big)=\varphi_1\big(t,x(\cdot)\big)-\varphi_2\big(\tau,y(\cdot)\big)-\alpha\,(2T-t-\tau)-\frac{(t-\tau)^2}{\delta}-\frac{\nu\big(t,x(\cdot);\tau,y(\cdot)\big)}{\varepsilon}\,.$$

Существуют такие $\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big),\big(\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times D_k$, что

$$\Phi\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot);\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)=\max\Big\{\Phi\big(t,x(\cdot);\tau,y(\cdot)\big)\;\big|\;\big(t,x(\cdot)\big),\big(\tau,y(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times D_k\Big\}.$$

Тогда для любой функции $x(\cdot) \in D_k$ имеем

$$\Phi\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot); \tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) \geq \Phi\big(T, x(\cdot); T, x(\cdot)\big) = 0.$$

Отсюда получаем оценки

$$\nu\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot); \tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) \leq c_1\varepsilon, \tag{5.6}$$

$$\big(t^\delta_\varepsilon - \tau^\delta_\varepsilon\big)^2 \leq c_1\delta, \tag{5.7}$$

где

$$c_1 = \max\Big\{\varphi_1\big(t, x(\cdot)\big) - \varphi_2\big(\tau, y(\cdot)\big) \mid \big(t, x(\cdot)\big), \big(\tau, y(\cdot)\big) \in [t_*, T] \times D_k\Big\}.$$

Опираясь на неравенство $\Phi\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot); \tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) \geq \Phi\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot); t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)$, выводим

$$\frac{\nu\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot); \tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)}{\varepsilon} \leq \big|\varphi_2\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) - \varphi_2\big(\tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\big| + \alpha\big|\tau^\delta_\varepsilon - t^\delta_\varepsilon\big|. \tag{5.8}$$

Функции $x^\delta_\varepsilon(\cdot)$ и $y^\delta_\varepsilon(\cdot)$, следовательно (см. (5.3)) функции $\vartheta\big[t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big](\cdot)$ и $\vartheta\big[\tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big](\cdot)$, содержатся в D_k. Поэтому из оценки (5.6) в согласии с определением (3.1) множества D_k и определением (5.4) величины ν вытекают следующие предельные соотношения:

$$\max_{t_* \leq t \leq T} \big\|\vartheta\big[t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big](t) - \vartheta\big[\tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big](t)\big\| \to 0, \quad \big|\tau^\delta_\varepsilon - t^\delta_\varepsilon\big| \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{5.9}$$

Функционал φ_2 равномерно непрерывен на множестве $[t_*, T] \times D_k$. Таким образом, из (5.9), если учесть (5.3) и неупреждаемость функционала φ_2, выводим

$$\big|\varphi_2\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) - \varphi_2\big(\tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\big| = \Big|\varphi_2\Big(t^\delta_\varepsilon, \vartheta\big[t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big](\cdot)\Big) - \varphi_2\Big(\tau^\delta_\varepsilon, \vartheta\big[\tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big](\cdot)\Big)\Big| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{5.10}$$

Из (5.8)–(5.10) заключаем

$$\frac{\nu\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot); \tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)}{\varepsilon} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{5.11}$$

Далее, для любой точки $\big(t, x(\cdot)\big) \in [t_*, T] \times D_k$ имеем

$$\Phi\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot); \tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) \geq \Phi\big(t, x(\cdot); t, x(\cdot)\big) = \varphi_1\big(t, x(\cdot)\big) - \varphi_2\big(t, x(\cdot)\big) - 2\alpha(T - t).$$

Отсюда, учитывая (5.2) и (5.5), выводим неравенство

$$\frac{b}{2} \leq \Phi\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot); \tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) \leq \varphi_1\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) - \varphi_2\big(\tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big).$$

Так как $\varphi_1\big(T, x(\cdot)\big) = \varphi_2\big(T, x(\cdot)\big) = \sigma\big(x(\cdot)\big)$, это неравенство можно переписать следующим образом:

$$\frac{b}{2} \leq \big|\varphi_1\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) - \varphi_1\big(T, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\big| + \big|\varphi_2\big(T, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) - \varphi_2\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\big| + \big|\varphi_2\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) - \varphi_2\big(\tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\big|,$$

откуда в силу (5.10) заключаем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет справедливо неравенство

$$\frac{b}{4} \leq \big|\varphi_1\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) - \varphi_1\big(T, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\big| + \big|\varphi_2\big(T, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) - \varphi_2\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\big|,$$

из которого следует, что $t^\delta_\varepsilon < T$. Аналогичным образом обосновывается, что при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\tau^\delta_\varepsilon < T$. Итак, в дальнейших рассуждениях считаем

$$\big(t^\delta_\varepsilon, x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) \in [t_*, T) \times D_k, \quad \big(\tau^\delta_\varepsilon, y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big) \in [t_*, T) \times D_k.$$

Рассмотрим теперь функционал

$$\psi_1\big(t,x(\cdot)\big)=\varphi_2\big(\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)+\alpha\left(2T-t-\tau^\delta_\varepsilon\right)+\frac{\big(t-\tau^\delta_\varepsilon\big)^2}{\delta}+\frac{\nu\big(t,x(\cdot);\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)}{\varepsilon},\quad \big(t,x(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times C.$$

В согласии с (5.3), (5.4) он является неупреждающим. Он также является ci-гладким, причем

$$\partial_t\psi_1\big(t,x(\cdot)\big) = -\alpha+\frac{2\big(t-\tau^\delta_\varepsilon\big)}{\delta}+\frac{2\big(t-\tau^\delta_\varepsilon\big)}{\varepsilon}, \tag{5.12}$$

$$\nabla_{x(\cdot)}\psi_1\big(t,x(\cdot)\big) = \frac{2}{\varepsilon}\left((1+T-t)\,x(t)-y^\delta_\varepsilon\big(\tau^\delta_\varepsilon\big)-\int\limits_t^T\vartheta\big[\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big](\xi)\,\mathrm{d}\xi\right). \tag{5.13}$$

Кроме того, так как для всех $\big(t,x(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times D_k$ имеет место неравенство

$$\Phi\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot);\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\geq\Phi\big(t,x(\cdot);\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big),$$

разность $\varphi_1-\psi_1$ достигает в точке $\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)$ своего максимума на $[t_*,T]\times D_k$. Следовательно, по условию (V$_*$) определения 3.1 должно выполняться неравенство

$$\partial_t\psi_1\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)+H\Big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot),\nabla_{x(\cdot)}\psi_1\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\Big)\geq 0. \tag{5.14}$$

С другой стороны, рассмотрим неупреждающий ci-гладкий функционал

$$\psi_2\big(\tau,y(\cdot)\big)=\varphi_1\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)-\alpha\left(2T-t^\delta_\varepsilon-\tau\right)-\frac{\big(t^\delta_\varepsilon-\tau\big)^2}{\delta}-\frac{\nu\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot);\tau,y(\cdot)\big)}{\varepsilon},\quad \big(\tau,y(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times C.$$

Его ci-производные определяются равенствами

$$\partial_\tau\psi_2\big(\tau,y(\cdot)\big) = \alpha+\frac{2\big(t^\delta_\varepsilon-\tau\big)}{\delta}+\frac{2\big(t^\delta_\varepsilon-\tau\big)}{\varepsilon}, \tag{5.15}$$

$$\nabla_{y(\cdot)}\psi_2\big(\tau,y(\cdot)\big) = \frac{2}{\varepsilon}\left(x^\delta_\varepsilon\big(t^\delta_\varepsilon\big)-(1+T-\tau)\,y(\tau)+\int\limits_\tau^T\vartheta\big[t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big](\xi)\,\mathrm{d}\xi\right). \tag{5.16}$$

Так как для всех $\big(\tau,y(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times D_k$ справедливо неравенство

$$\Phi\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot);\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\geq\Phi\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot);\tau,y(\cdot)\big),$$

то разность $\varphi_2-\psi_2$ достигает в точке $\big(\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)$ минимума на $[t_*,T]\times D_k$. Стало быть, по условию (V*) должно выполняться неравенство

$$\partial_\tau\psi_2\big(\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)+H\Big(\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot),\nabla_{y(\cdot)}\psi_2\big(\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\Big)\leq 0. \tag{5.17}$$

Обозначим

$$r^\delta_\varepsilon=\nabla_{x(\cdot)}\psi_1\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot)\big),\quad s^\delta_\varepsilon=\nabla_{y(\cdot)}\psi_2\big(\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\,, \tag{5.18}$$

$$c_2=\max\Big\{\rho\big(\tau,y(\cdot)\big)\;\Big|\;\big(\tau,y(\cdot)\big)\in[t_*,T]\times D_k\Big\}\,. \tag{5.19}$$

Опираясь на равенства (5.13), (5.16), включения $x^\delta_\varepsilon(\cdot),y^\delta_\varepsilon(\cdot)\in D_k$, определение (3.1) множества D_k и соотношения (5.3), (5.4), выводим следующие оценки:

$$\begin{aligned}\big\|r^\delta_\varepsilon-s^\delta_\varepsilon\big\| &\leq \frac{2}{\varepsilon}\big|t^\delta_\varepsilon-\tau^\delta_\varepsilon\big|\,\big\|x^\delta_\varepsilon\big(t^\delta_\varepsilon\big)-y^\delta_\varepsilon\big(\tau^\delta_\varepsilon\big)\big\|+\frac{kc_2}{\varepsilon}\left(t^\delta_\varepsilon-\tau^\delta_\varepsilon\right)^2\\ &\leq \frac{2+kc_2}{\varepsilon}\,\nu\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot);\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\,,\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}\big\|r^\delta_\varepsilon\big\| &\leq \frac{2}{\varepsilon}\,(1+T-t_*)\big\|x^\delta_\varepsilon\big(t^\delta_\varepsilon\big)-y^\delta_\varepsilon\big(\tau^\delta_\varepsilon\big)\big\|+\frac{kc_2}{\varepsilon}\left(t^\delta_\varepsilon-\tau^\delta_\varepsilon\right)^2\\ &\leq \frac{2}{\varepsilon}\,(1+T-t_*)\sqrt{\nu\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot);\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)}+\frac{kc_2}{\varepsilon}\,\nu\big(t^\delta_\varepsilon,x^\delta_\varepsilon(\cdot);\tau^\delta_\varepsilon,y^\delta_\varepsilon(\cdot)\big)\,.\end{aligned} \tag{5.21}$$

Из (5.14), (5.17), принимая во внимание (5.12), (5.15) и обозначения (5.18), получаем

$$2\alpha \le H\big(t_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big) - H\big(\tau_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta(\cdot), s_\varepsilon^\delta\big). \tag{5.22}$$

Оценим правую часть неравенства (5.22). В силу условия (A2), если учесть (5.19), имеем

$$H\big(t_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big) - H\big(\tau_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta(\cdot), s_\varepsilon^\delta\big) \le \big|H\big(t_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big) - H\big(\tau_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big)\big| + c_2\,\big\|r_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta\big\|. \tag{5.23}$$

При этом, как следует из (5.11), (5.20), число $\varepsilon > 0$ можно взять настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$c_2\,\big\|r_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta\big\| \le \frac{\alpha}{3}\,. \tag{5.24}$$

Далее, в силу условия (A4) (при $D = D_k$) имеем

$$\big|H\big(\tau_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big) - H\big(\tau_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big)\big| \le \lambda\left(1 + \|r_\varepsilon^\delta\|\right)\sqrt{\mu\big(\tau_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta(\cdot), y_\varepsilon^\delta(\cdot)\big)}.$$

При этом в согласии с соотношениями (2.1), (3.1) и (5.4) справедлива оценка

$$\mu\big(\tau_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta(\cdot), y_\varepsilon^\delta(\cdot)\big) \le c_3\,\nu\big(t_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta(\cdot); \tau_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta(\cdot)\big), \qquad c_3 = 2(kc_2)^2(1 + T - t_*).$$

Отсюда, опираясь на (5.11), (5.21), заключаем, что

$$\big|H\big(\tau_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big) - H\big(\tau_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big)\big| \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, можно взять такое $\varepsilon > 0$, для которого будет выполняться неравенство

$$\big|H\big(t_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big) - H\big(\tau_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big)\big| \le \big|H\big(t_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big) - H\big(\tau_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta(\cdot), r_\varepsilon^\delta\big)\big| + \frac{\alpha}{3}\,. \tag{5.25}$$

Наконец, в силу оценки (5.21) имеем

$$\big\|r_\varepsilon^\delta\big\| \le \frac{c_4}{\varepsilon}, \tag{5.26}$$

где

$$c_4 = \max\Big\{2(1 + T - t_*)\sqrt{\nu\big(t, x(\cdot); \tau, y(\cdot)\big)} + kc_2\nu\big(t, x(\cdot); \tau, y(\cdot)\big) \;\big|\; \big(t, x(\cdot)\big), \big(\tau, y(\cdot)\big) \in [t_*, T] \times D_k\Big\}.$$

Подчеркнем, что оценка (5.26) не зависит от выбора $\delta > 0$. Положим $\mathbb{B} = \big\{r \in \mathbb{R}^n : \|r\| \le c_4/\varepsilon\big\}$. Тогда согласно условию (A1) гамильтониан H будет равномерно непрерывен на множестве $[t_*, T] \times D_k \times \mathbb{B}$. Таким образом, благодаря оценке (5.7), за счет выбора величины $\delta > 0$ первое слагаемое в правой части неравенства (5.25) можно сделать сколь угодно малым. Учитывая это и неравенства (5.22)–(5.25), получаем, что при достаточно малых значениях $\delta, \varepsilon > 0$ должно выполняться неравенство

$$2\alpha \le \alpha\,,$$

которое противоречит начальному выбору (5.5) числа $\alpha > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

В заключение отметим, что согласно доказательству теоремы 1 минимаксное решение задачи (1.1), (1.2) является вязкостным решением этой задачи. При условиях теоремы 2 вязкостное решение единственно, следовательно, оно совпадает с минимаксным. Как уже отмечалось во введении, применительно к задачам управления и дифференциальным играм в наследственных динамических системах минимаксное решение соответствующих функциональных уравнений вида (1.1) позволяет однозначно определить функционал цены. Таким образом, условия (V^*) и (V_*) (дополненные естественным краевым условием (1.2)) представляют собой еще один способ определения функционала цены в задачах управления с наследственной информацией.

Поступила 04.05.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. **Осипов Ю. С.** Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.
3. **Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.** Линейные дифференциально-разностные игры // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 4. С. 777–780.
4. **Куржанский А. Б.** О существовании решений уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 10. С. 1800–1809.
5. **Красовский Н. Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
6. **Красовский Н. Н.** Игровое управление в дифференциальных эволюционных системах // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 5. С. 1049–1052.
7. **Красовский Н. Н., Лукоянов Н. Ю.** Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 885–900.
8. **Лукоянов Н. Ю.** Об уравнении типа Гамильтона — Якоби в задачах управления с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 2. С. 252–263.
9. **Lukoyanov N.** Functional Hamilton–Jacobi type equations with ci-derivatives in control problems with hereditary information // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2003. Vol. 8, no. 4. P. 535–555.
10. **Kim A. V.** Functional differential equations. Application of i-smooth calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999.
11. **Aubin J. P., Haddad G.** History path dependent optimal control and portfolio valuation and management // Positivity. 2002. Vol. 6. P. 331–358.
12. **Субботин А. И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991.
13. **Subbotin A. I.** Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.
14. **Crandall M. G., Lions P.-L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. P. 1–42.
15. **Crandall M. G., Evans L. C., Lions P.-L.** Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 282. P. 487–502.
16. **Субботин А. И.** Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 293–297.
17. **Красовский Н. Н., Лукоянов Н. Ю.** Уравнения типа Гамильтона — Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1. С. 110–130.
18. **Lukoyanov N.** Functional Hamilton–Jacobi type equations in ci-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2003. Vol. 8, no. 3. P. 365–397.
19. **Кружков С. Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала // Мат. сб. 1975. Т. 98, № 3. С. 450–493.
20. **Crandall M. G., Lions P.-L.** Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions. Part I: Uniqueness of viscosity solutions // J. Funct. Anal. 1985. Vol. 62. P. 379–396.
21. **Soner H. M.** On the Hamilton–Jacobi–Bellman equations in Banach spaces // J. Optim. Theory Appl. 1988. Vol. 57, no. 3. P. 429–437.
22. **Crandall M. G., Lions P.-L.** Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions. Part IV: Hamiltonians with unbounded linear terms // J. Funct. Anal. 1990. Vol. 90. P. 237–283.
23. **Barron E. N.** Application of viscosity solutions of infinite-dimensional Hamilton–Jacobi–Bellman equations to some problems in distributed optimal control // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64, no. 2. P. 245–268.
24. **Evans L. C.** Partial differential equations. Graduate studies in mathematics. Vol. 19. Providence: Amer. Math. Soc., 1998.
25. **Bardi M., Dolcetta I. C.** Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 1996.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 519.6

МНОГОШАГОВЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

В. Г. Пименов

В работе конструируются многошаговые численные методы решения дифференциальных уравнений с эффектом запаздывания при наличии дополнительных алгебраических связей. Доказаны теоремы о порядках сходимости этих методов как для функционально-дифференциальных уравнений с алгебраическими связями, так и для сингулярных функционально-дифференциальных уравнений.

Введение

Изучение численных методов решения дифференциальных уравнений при наличии алгебраических связей началось в семидесятые годы прошлого столетия, и исследования продолжались все последующие годы. Следует отметить два основных побудительных мотива этих исследований. Первый — возможность создания эффективных численных алгоритмов решения жестких задач и связанных с ними сингулярных дифференциальных уравнений. Второй — появление новых объектов в приложениях, в частности в теории управления, которые описываются как дифференциальными, так и алгебраическими связями. Полученные результаты для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) были подытожены в монографии [1].

Приведем простейший вариант понятия ОДУ с алгебраическими связями. Пусть вектор x размерности $l+m$ имеет составляющие y и z, где $y \in \mathbb{R}^l$, $z \in \mathbb{R}^m$. Системой (автономной) *дифференциально-алгебраических уравнений* (ДАУ) назовем систему вида

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y,z) \\ 0 = g(y,z). \end{cases}$$

Этот объект тесно связан с сингулярными ОДУ вида

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y,z) \\ \varepsilon\dot{z} = g(y,z), \end{cases}$$

где ε — малое число.

Введем аналогичные понятия для систем дифференциальных уравнений с наличием запаздывания общего вида, называемых в дальнейшем *функционально-дифференциальными уравнениями* (ФДУ). Под (автономным) ФДУ будем понимать систему вида

$$\dot{x}(t) = F\big(x(t), x_t(\cdot)\big),$$

где $x(t)$ — положение фазового вектора в момент t, $x_t(\cdot) = \{x(t+s), -\tau \le s < 0\}$ — функция-предыстория фазового вектора к моменту t. Для ФДУ с начальными условиями $x(t_0) = x^0$, $x_{t_0}(\cdot) = x^0(\cdot)$ ранее [2] были разработаны численные методы решения, основанные на трех главных идеях:

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 05-01-00732).

(1) Разделение конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих в фазовой структуре (эта идея восходит к функциональному подходу Н.Н.Красовского [3] и методу разделения С.Н.Шиманова [4]) позволяет строить по конечномерной составляющей полные аналоги всех известных для ОДУ численных методов.

(2) Для учета воздействия бесконечномерной составляющей применима интерполяция с заданными свойствами.

(3) Для определения порядка локальной погрешности имеется специальный аппарат — i-гладкий анализ.

Разработанные численные алгоритмы были протестированы и положены в основу пакета прикладных задач общего назначения TIME-DELAY SYSTEM TOOLBOX и (чуть позже созданного) специализированного пакета BIOMEDICAL SOFTWARE PACKAGE.

Как и в случае ОДУ, основной проблемой при применении численных методов решения ФДУ остается проблема жестких задач, а одна из методик решения этой проблемы (введение пограничного слоя) предполагает наличие аппарата решения ФДУ с алгебраическими связями.

Назовем *функционально-дифференциально-алгебраическим уравнением* (ФДАУ) систему вида

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), y_t(\cdot), z(t), z_t(\cdot)), \\ 0 = g(y(t), y_t(\cdot), z(t), z_t(\cdot)), \end{cases} \tag{0.1}$$

где $y \in \mathbb{R}^l$, $z \in \mathbb{R}^m$ — конечномерные составляющие фазового вектора, $y(t)$, $z(t)$ —положение этих составляющих в момент t, $y_t(\cdot) = \{y(t+s), -\tau \le s < 0\}$, $z_t(\cdot) = \{z(t+s), -\tau \le s < 0\}$ — их предыстории к моменту t.

Сингулярным ФДУ назовем систему вида

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), y_t(\cdot), z(t), z_t(\cdot)), \\ \varepsilon\dot{z}(t) = g(y(t), y_t(\cdot), z(t), z_t(\cdot)), \end{cases} \tag{0.2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Пусть для системы (0.2) заданы начальные условия

$$y(t_0) = y_0,\ y_{t_0}(\cdot) = y^0(\cdot),\ z(t_0) = z_0,\ z_{t_0}(\cdot) = z^0(\cdot). \tag{0.3}$$

Для системы (0.1) третье из начальных условий (0.3) можно опустить.

Будем говорить, что начальные условия согласованы, если

$$g(y_0, y^0(\cdot), z_0, z^0(\cdot)) = 0.$$

Основной целью данной работы является разработка неявных многошаговых численных методов решения задач (0.1), (0.3) и (0.2), (0.3), а также получение соответствующих утверждений о порядках сходимости алгоритмов. Отметим, что алгоритмы одношаговых многоэтапных методов (типа Рунге — Кутты) для решения подобных задач были предложены в [5].

1. Основные предположения

Обозначим через $Q^n[-\tau, 0)$ пространство n-мерных функций, непрерывных на $[-\tau, 0)$, исключая, возможно, конечное число точек разрыва первого рода, в которых функции непрерывны справа, с нормой $\|q(\cdot)\|_Q = \sup\limits_{-\tau \le s < 0} \|q(s)\|$.

В дальнейшем будем предполагать выполненными следующие условия.

Предположение 1. *Начальные функции $y^0(\cdot)$ и $z^0(\cdot)$ берутся из пространств $Q^l[-\tau, 0)$ и $Q^m[-\tau, 0)$ соответственно.*

Предположение 2. *Функционалы* $f(y(t), y_t(\cdot), z(t), z_t(\cdot))$ *и* $g(y(t), y_t(\cdot), z(t), z_t(\cdot))$ *определены и непрерывны по сдвигу* [2] *на* $\mathbb{R}^l \times Q^l[-\tau, 0) \times \mathbb{R}^m \times Q^m[-\tau, 0)$ *и липшицевы по всем аргументам.*

(Константы Липшица для функции f по соответствующим аргументам будем обозначать через L_1, L_2, L_3 и L_4, а для функции g — соответственно через L_5, L_6, L_7 и L_8.)

Эти предположения обеспечивают существование и единственность решения ФДУ задачи (0.2), (0.3) на некотором промежутке $[t_0, \theta]$ [2].

Предположение 3. *В системе* ФДАУ (0.1) *функция* g *не зависит от последнего аргумента.*

(В дальнейшем вместо $g(y(t), y_t(\cdot), z(t), z_t(\cdot))$ мы будем писать $g(y(t), y_t(\cdot), z(t))$.)

Предположение 4. *Функция* $g(y(t), y_t(\cdot), z(t))$ *непрерывна, а матрица Якоби* $g_z(y, y(\cdot), z)$ *непрерывна и невырождена в своей области определения.*

Эти предположения в силу теоремы о неявной функции (см., например, [6, теорема II.3.8]) гарантируют существование, единственность и непрерывность решения уравнения

$$g(y, y(\cdot), z) = 0$$

относительно z; это решение будем обозначать

$$z = \varphi(y, y(\cdot)), \quad y \in \mathbb{R}^l, \ y(\cdot) \in Q^l[-\tau, 0). \tag{1.1}$$

З а м е ч а н и е 1. В нижеприведенных алгоритмах решения поставленных задач находить функцию $z = \varphi(y, y(\cdot))$ приходится численно за исключением простых случаев, например, линейных, когда возможно нахождение аналитического решения. Свойства функции $z = \varphi(y, y(\cdot))$ вместе с теоремой существования и единственности решения ФДУ гарантируют существование и единственность решения задачи (0.1), (0.3) для ФДАУ на некотором промежутке $[t_0, \theta]$.

З а м е ч а н и е 2. Наличие запаздывания в компоненте z во втором уравнении системы (0.1) создает трудности в разрешимости функционального уравнения $g\big(y(t), y_t(\cdot), z(t), z_t(\cdot)\big) = 0$ относительно $z(t)$, в остальном же изложенные ниже алгоритмы решения поставленных задач остаются без изменения.

2. Метод ε-вложений

Разобьем отрезок $[t_0, \theta]$ на N частей с шагом $h = (\theta - t_0)/N$ точками $t_i = t_0 + ih$, $i = 0, \ldots, N$. Без ограничения общности будем считать, что $\tau/h = M$ — целое число. Если $y(t)$, $z(t)$ — компоненты точного решения задачи (0.1), (0.3), то будем обозначать $y_i = y(t_i)$, $z_i = z(t_i)$.

Будем обозначать через $u_i \in \mathbb{R}^l$ и $v_i \in \mathbb{R}^m$ компоненты дискретной модели в узлах t_i, т.е. приближения точного решения системы (0.1), (0.3): $u_i \approx y(t_i)$, $v_i \approx z(t_i)$.

Предысторией дискретной модели к моменту t_n будем называть множества $\{u_i\}_n = \{u_i, \ i = n - M, \ldots, n\}$, $\{v_i\}_n = \{v_i, \ i = n - M, \ldots, n\}$.

Операторами интерполяции (с экстраполяцией) назовем отображения $I_u: \ \{u_i\}_{n-1} \to u(\cdot) \in Q^l[t_{n-1} - \tau, t_n)$, $I_v: \ \{v_i\}_{n-1} \to v(\cdot) \in Q^m[t_{n-1} - \tau, t_n)$.

Применим неявный ($\beta_0 \neq 0$) k-шаговый метод [2, раздел 3.1.6] к системе (0.2) и, положив $\varepsilon = 0$, получим при $n = k, \ldots, N$

$$\sum_{i=-k}^{0} \alpha_i u_{n+i} = h \sum_{i=-k}^{0} \beta_i f\big(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot), v_{n+i}, v_{t_{n+i}}(\cdot)\big), \tag{2.1}$$

$$0 = \sum_{i=-k}^{0} \alpha_i v_{n+i} = h \sum_{i=-k}^{0} \beta_i g\big(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot), v_{n+i}\big), \tag{2.2}$$

здесь $u_{t_{n+i}}(\cdot)$, $v_{t_{n+i}}(\cdot)$ — результаты действия операторов интерполяции I_u и I_v соответственно.

В силу предположения 4 из последнего уравнения можно найти

$$v_n = \varphi(u_n, u_{t_n}(\cdot)) + \frac{1}{\beta_0} \sum_{i=-k}^{-1} \beta_i g\big(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot), v_{n+i}\big). \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.1), получим уравнение

$$\sum_{i=-k}^{0} \alpha_i u_{n+i} = h \sum_{i=-k}^{-1} \beta_i f\big(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot), v_{n+i}, v_{t_{n+i}}(\cdot)\big) + h\beta_0 f\big(u_n, u_{t_n}(\cdot), \varphi(u_n, u_{t_n}(\cdot))$$

$$+ \frac{h}{\beta_0} \sum_{i=-k}^{-1} \beta_i g(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot), v_{n+i}), v_{t_n}(\cdot)\big),$$

разрешимое относительно u_n при достаточно малых h. Вычислив u_n, затем из (2.3) получаем v_n.

Такой вариант численного решения получил в случае ДАУ название *метода ε-вложений* [1]. Впервые эту идею в частном случае формул дифференцирования назад предложил для ОДУ Гир [7].

Имеется вариант алгоритма, который называется *методом пространства состояний*. Он заключается в том, что вместо уравнения (2.2) решается относительно v_n уравнение

$$g(u_n, u_{t_n}(\cdot), v_n) = 0, \quad n = k, \dots, N.$$

Метод пространства состояний проще, он может применяться и для явных методов и не требует новых исследований в плане изучения условий сходимости по сравнению с дифференциальными системами без алгебраических связей.

С другой стороны, метод ε-вложений имеет ряд преимуществ перед методом пространства состояний. Прежде всего, с помощью исследований погрешности этого метода можно получать оценки для погрешности решения сингулярных задач, что очень важно при организации численного решения жестких задач. Кроме того, метод ε-вложений легко распространяется на ФДАУ в форме (алгебраические соотношения не отделены от дифференциальных)

$$K\dot{x}(t) = F(t, x(t), x_t(\cdot)),$$

где K — квадратная вырожденная матрица.

3. Сходимость метода ε-вложений для ФДАУ

Рассмотрим условия, обеспечивающие порядок сходимости для метода ε-вложений.

Будем говорить, что метод сходится для ФДАУ с порядком $p > 0$, если существуют константы C_1 и C_2 такие, что $\|y(t_n) - u_n\| \le C_1 h^p$, $\|z(t_n) - v_n\| \le C_2 h^p$ для всех $n = 0, \dots, N$.

Невязкой многошагового метода для ФДАУ будем называть функции

$$\psi_n = \frac{1}{h} \sum_{i=-k}^{0} \alpha_i y(t_{n+i}) - \sum_{i=-k}^{0} \beta_i f\big(y(t_{n+i}), y_{t_{n+i}}(\cdot), z(t_{n+i}), z_{t_{n+i}}(\cdot)\big), \quad n = k, \dots, N.$$

Будем говорить, что невязка метода для ФДАУ имеет порядок p_1, если существует константа C_3 такая, что $\|\psi_n\| \le C_3 h^{p_1}$ для всех $n = k, \dots, N$.

Стартовыми значениями модели назовем величины u_i и v_i, $i = 0, \dots, k-1$.

Будем говорить, что стартовые значения имеют порядок p_2, если существуют константы C_4 и C_5 такие, что $\|u_i - y_i\| \le C_4 h^{p_2}$, $\|v_i - z_i\| \le C_5 h^{p_2}$ для всех $i = 0, \dots, k-1$.

Будем говорить, что операторы интерполяции I_u и I_v имеют порядок p_3, если существуют константы C_6, C_7, C_8 и C_9 такие, что для всех $n = 1, \dots, N$ и $t \in [t_{n-1} - \tau, t_n)$

$$\|y(t) - u(t)\| \le C_6 \max_{i \ge 0, n-1-M \le i \le n-1} \|y(t_i) - u_i\| + C_7 h^{p_3},$$

$$\|z(t) - v(t)\| \le C_8 \max_{i \ge 0, n-1-M \le i \le n-1} \|z(t_i) - v_i\| + C_9 h^{p_3}.$$

Для формулировки понятия устойчивости метода рассмотрим одномерное тестовое уравнение (λ — комплексное число)

$$\dot{x} = \lambda x$$

и, применив к нему многошаговый метод, получим разностное уравнение

$$\sum_{i=-k}^{0} \alpha_i x_{n+i} - h\lambda \sum_{i=-k}^{0} \beta_i x_{n+i} = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\sum_{i=0}^{k} (\alpha_{k-i} - \mu\beta_{k-i})\zeta^i = 0, \ \ \mu = h\lambda, \tag{3.1}$$

или

$$\rho(\zeta) - \mu\sigma(\zeta) = 0,$$

где

$$\rho(\zeta) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i}\zeta^i, \qquad \sigma(\zeta) = \sum_{i=0}^{k} \beta_{k-i}\zeta^i.$$

Будем говорить, что метод устойчив в нуле, если все корни многочлена $\rho(\zeta)$ удовлетворяют соотношению $|\zeta| \le 1$, причем, если $|\zeta| = 1$, то корень некратный.

Будем говорить, что метод устойчив на бесконечности, если все корни многочлена $\sigma(\zeta)$ удовлетворяют соотношению $|\zeta| \le 1$, причем, если $|\zeta| = 1$, то корень некратный. Будем говорить, что метод строго устойчив на бесконечности, если все корни многочлена $\sigma(\zeta)$ удовлетворяют соотношению $|\zeta| < 1$.

Теорема 1. *Пусть многошаговый метод ε-вложений устойчив в нуле и на бесконечности, имеет порядок невязки p_1, порядок стартовых значений p_2 и порядок интерполяции p_3. Тогда он сходится для* ФДАУ *с порядком $p = \min\{p_1, p_2, p_3\}$.*

Доказательство. Обозначим

$$\delta_n = g(u_n, u_{t_n}(\cdot), v_n), \quad n = 0, \dots, N \tag{3.2}$$

и оценим норму этой величины.

Пусть сначала $0 \le n \le k-1$. Так как на точном решении $g(y_n, y_{t_n}(\cdot), z_n) = 0$, то, используя липшицевость функции g, данные о порядке интерполяции и порядке стартовых значений, получаем

$$\begin{aligned}\|\delta_n\| &= \|g(u_n, u_{t_n}(\cdot), v_n) - g(y_n, y_{t_n}(\cdot), z_n)\| \\ &\le L_5\|u_n - y_n\| + L_6 C_6 \max_{i \le n} \|u_i - y_i\| + L_6 C_7 h^{p_3} + L_7\|v_n - z_n\| \\ &\le L_5 C_4 h^{p_2} + L_6 C_6 C_4 h^{p_2} + L_6 C_7 h^{p_3} + L_7 C_5 h^{p_2} \le C_{10} h^{\min\{p_2, p_3\}}.\end{aligned}$$

При $n \geq k$ величина δ_n удовлетворяет разностному уравнению

$$\sum_{i=-k}^{0} \beta_i \delta_{n+i} = 0;$$

это уравнение устойчиво, так как метод устойчив на бесконечности. Поэтому имеем при всех неотрицательных n оценку

$$\|\delta_n\| \leq C_{11} h^{\min\{p_2,p_3\}}.$$

Разрешим уравнение (3.2) относительно v_n. Согласно теореме о неявной функции получим

$$v_n = \varphi(u_n, u_{t_n}(\cdot)) + \delta_n^*, \tag{3.3}$$

где

$$\|\delta_n^*\| \leq C_{12} h^{\min\{p_2,p_3\}}, \quad n = 0, \ldots, N.$$

Подставим (3.3) в (2.1), получим уравнение

$$\sum_{i=-k}^{0} \alpha_i u_{n+i} = h \sum_{i=-k}^{0} \beta_i f\big(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot), \varphi(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot)) + \delta_{n+i}^*, v_{n+i}^*(\cdot)\big), \quad n = k, \ldots, N, \tag{3.4}$$

где $v_{n+i}^*(\cdot) = I_v(\{\varphi(u_j, u_{t_j}(\cdot)) + \delta_j^*\}_{n+i-1}$ — результат действия оператора интерполяции (с экстраполяцией) по компоненте v.

Формулу (3.4) можно рассматривать как неявный многошаговый метод решения ФДУ для компоненты y. Учитывая, что на точном решении выполняется соотношение (1.1), невязку этого метода определяем как

$$\psi_n^* = \frac{1}{h} \sum_{i=-k}^{0} \alpha_i y(t_{n+i}) - \sum_{i=-k}^{0} \beta_i f\big(y(t_{n+i}), y_{t_{n+i}}(\cdot), \varphi(y_{n+i}, y_{t_{n+i}}(\cdot)) + \delta_{n+i}^*, z_{t_{n+i}}^*(\cdot)\big), \quad n = k, \ldots, N,$$

где $z_{n+i}^*(\cdot) = I_v(\{\varphi(y_j, y_{t_j}(\cdot)) + \delta_j^*\}_{n+i-1}$.

Проводя соответствующие оценки, получаем

$$\|\psi_n^*\| \leq C_{12} h^{\min\{p_1,p_2,p_3\}}, \quad n = k, \ldots, N.$$

Так как метод (3.4) устойчив в нуле, то утверждение доказываемой теоремы следует из соответствующего утверждения для ФДУ [2, 8].

4. Порядок сходимости для сингулярных ФДУ

Применим к решению задачи (0.2) для сингулярных ФДУ k-шаговый метод при $n = k, \ldots, N:$

$$\sum_{i=-k}^{0} \alpha_i u_{n+i} = h \sum_{i=-k}^{0} \beta_i f\big(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot), v_{n+i}, v_{t_{n+i}}(\cdot)\big), \tag{4.1}$$

$$\varepsilon \sum_{i=-k}^{0} \alpha_i v_{n+i} = h \sum_{i=-k}^{0} \beta_i g\big(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot), v_{n+i}\big). \tag{4.2}$$

Невязка этого метода состоит из двух компонент ($n \geq k$):

$$\psi_n^1 = \frac{1}{h} \sum_{i=-k}^{0} \alpha_i y(t_{n+i}) - \sum_{i=-k}^{0} \beta_i f\big(y(t_{n+i}), y_{t_{n+i}}(\cdot), z(t_{n+i}), z_{t_{n+i}}(\cdot)\big),$$

$$\psi_n^2 = \frac{1}{h}\sum_{i=-k}^{0}\alpha_i z(t_{n+i}) - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=-k}^{0}\beta_i g(y(t_{n+i}), y_{t_{n+i}}(\cdot), z(t_{n+i})).$$

Здесь и в дальнейшем в этом разделе будем обозначать через $y(t)$, $z(t)$ компоненты точного решения задачи (0.2), (0.3) (в отличие от обозначений в предыдущих разделах, где $y(t)$, $z(t)$ были компонентами точного решения задачи (0.1), (0.3)). Будем также обозначать $y_i = y(t_i)$, $z_i = z(t_i)$.

Будем говорить, что невязка метода для сингулярного ФДУ имеет порядок p_1, если существуют константы C_{13} и C_{14} такие, что $\|\psi_n^1\| \le C_{13}h^{p_1}$ и $\|\psi_n^2\| \le C_{14}h^{p_1}$ для всех $n = k, \dots, N$.

Как и для всякого ФДУ, для многошагового метода решения задачи (0.2), (0.3) справедливо следующее утверждение [2, 8].

Теорема 2. *Пусть многошаговый метод устойчив в нуле, имеет порядок невязки p_1, порядок стартовых значений p_2 и порядок интерполяции p_3. Тогда он сходится к решению задачи* (0.2), (0.3) *с порядком $p = \min\{p_1, p_2, p_3\}$.*

Однако наличие малого ε во втором уравнении системы (0.2) приводит к большим константам Липшица, а также делает зависимой от ε константу C_{14} в определении порядка невязки. Например, если компоненты $y(t)$, $z(t)$ решения задачи (0.2), (0.3) $p_1 + 1$ раз непрерывно дифференцируемы, а функция g ограничена вдоль решения, то из разложения Тейлора невязки получаем

$$\|\psi_n^2\| \le \frac{1}{\varepsilon}C_{15}h^{p_1}, \tag{4.3}$$

где константа C_{15} не зависит от ε.

Этот эффект наличия ε в знаменателе оценки невязки, а следовательно, и оценки глобальной погрешности, известный как одно из проявлений жесткости системы, может привести к малым шагам h и к эффекту накопления вычислительной погрешности. Ниже будет показано, что при дополнительных условиях на коэффициенты многошагового метода, главным из которых является свойство $A(\alpha)$-устойчивости, оценка глобальной погрешности может быть уточнена по сравнению с заключением теоремы.

Множество S комплексных чисел μ таких, что все корни $\zeta = \zeta(\mu)$ характеристического уравнения (3.1) удовлетворяют условию $|\zeta| \le 1$ (причем, если $|\zeta| = 1$, то корень некратный), будем называть областью абсолютной устойчивости многошагового метода.

Многошаговый метод назовем $A(\alpha)$-устойчивым при некотором α, $0 < \alpha < \pi/2$, если область абсолютной устойчивости S целиком содержит множество S_α таких ненулевых комплексных чисел μ, что $|arg(-\mu)| < \alpha$. Свойство $A(\alpha)$-устойчивости метода ослабляет довольно жесткое свойство A-устойчивости метода, согласно которому область S должна целиком содержать левую комплексную полуплоскость. Согласно второму барьеру Далквиста [1, гл. 5], не существует A-устойчивого метода порядка выше второго. Примеры $A(\alpha)$-устойчивых методов высокого порядка приведены в [1, гл. 5].

Будем предполагать также выполненным следующее условие устойчивости матрицы Якоби $g_z(y, y(\cdot), z)$:

Предположение 5. *Собственные значения λ матрицы Якоби $g_z(y, y(\cdot), z)$ лежат в области $|arg\lambda - \pi| < \alpha$ для всех y, z из окрестности рассматриваемого решения задачи* (0.2), (0.3).

Справедливо следующее утверждение, аналогичное утверждениям из [1, 9] для ОДУ.

Теорема 3. *Пусть многошаговый метод $A(\alpha)$-устойчив и строго устойчив на бесконечности. Если задача* (0.2), (0.3) *удовлетворяет предположению* 5, *метод имеет порядок невязки p_1, порядок стартовых значений p_2 и порядок интерполяции p_3, то для всех n имеет место следующая оценка глобальной погрешности:*

$$\|u_n - y_n\| + \|v_n - z_n\| \le C(h^{p_1}(1 + \varepsilon C_{14}(\varepsilon)) + h^{p_2} + h^{p_3}). \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим при $n \ge 0$ компоненты глобальной погрешности через

$$\Delta u_n = u_n - y_n,\ \Delta v_n = v_n - z_n,$$

а при $n \ge k$ введем разности

$$\Delta f_n = \sum_{i=-k}^{0} \beta_i \Big(f\big(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot), v_{n+i}, v_{t_{n+i}}(\cdot)\big) - f\big(y_{n+i}, y_{t_{n+i}}(\cdot), z_{n+i}, z_{t_{n+i}}(\cdot)\big)\Big).$$

Положим $\Delta f_n = 0$ при $n < k$.

Из определения метода (4.1) и определения первой компоненты Δu_n невязки получаем при $n \ge k$

$$\sum_{i=-k}^{0} \alpha_i \Delta u_{n+i} = h\Delta f_n - h\psi_n^1. \tag{4.5}$$

Определим функции ψ_n^1 при $0 \le n < k$ так, чтобы соотношение (4.5) выполнялось и при $0 \le n < k$.

Разрешив равенство (4.5) относительно Δu_n, получим

$$\Delta u_n = h\sum_{j=0}^{n} r_{n-j}(0)\Delta f_j - h\sum_{j=0}^{n} r_{n-j}(0)\psi_j^1, \tag{4.6}$$

где $r_j(0)$ — коэффициенты дискретной резольвенты [1, раздел V.7] при $\mu = 0$. Эти числа являются коэффициентами разложения в ряд функции $r(\zeta, 0) = \zeta^{-k}/\rho(\zeta^{-1})$. Вследствие нуль-устойчивости метода последовательность $\{r_j(0)\}$ является ограниченной.

В силу липшицевости функции f по всем аргументам и определения порядка интерполяции получаем оценку

$$\|f(u_i, u_{t_i}(\cdot), v_i, v_{t_i}(\cdot)) - f(y_i, y_{t_i}(\cdot), z_i, z_{t_i}(\cdot))\| \le L_1\|\Delta u_i\|$$

$$+ L_2 \max_{-\tau \le s < 0} \|u(t_i + s) - y(t_i + s)\| + L_3\|\Delta v_i\| + L_4 \max_{-\tau \le s < 0} \|v(t_i + s) - z(t_i + s)\|$$

$$\le L_1\|\Delta u_i\| + L_2(C_6 \max_{i-M \le j < i} \|u_j - y_j\| + C_7 h^{p_3}) + L_3\| + \Delta v_i\|$$

$$+ L_4(C_8 \max_{i-M \le j < i} \|v_j - z_j\| + C_9 h^{p_3}), \quad i = 0, \dots, N.$$

Отсюда, из определения величин Δf_n и из равенства (4.6) получаем оценку

$$\|\Delta u_n\| \le h\sum_{j=0}^{n}(C_{16}\|\Delta u_j\| + C_{17}\|\Delta v_j\|) + h\sum_{j=0}^{n}(C_{18}\|\psi_j^1\| + C_{19}h^{p_3}), \quad n = k, \dots, N. \tag{4.7}$$

Для z-компоненты нужна более точная оценка. Из (4.2) и определения второй компоненты невязки получаем при $n \ge k$

$$\sum_{i=-k}^{0} \alpha_i \Delta v_{n+i} = \frac{h}{\varepsilon}\sum_{i=-k}^{0} \beta_i \Big(g\big(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot), v_{n+i}\big) - g\big(y_{n+i}, y_{t_{n+i}}(\cdot), z_{n+i}\big)\Big) - h\psi_n^2.$$

Вычтем из обеих частей полученного равенства величину

$$\frac{h}{\varepsilon}\sum_{i=-k}^{0} \beta_i J\Delta v_{n+i},$$

где $J = g_z(y_0, y^0(\cdot), z_0)$. Это дает соотношение

$$\sum_{i=-k}^{0}\Big(\alpha_i J - \beta_i \frac{h}{\varepsilon} J\Big)\Delta v_{n+i} = \frac{h}{\varepsilon} g_n - h\psi_n^2, \tag{4.8}$$

где

$$\Delta g_n = \sum_{i=-k}^{0} \beta_i \Big(g\big(u_{n+i}, u_{t_{n+i}}(\cdot), v_{n+i}\big) - g\big(y_{n+i}, y_{t_{n+i}}(\cdot), z_{n+i}\big) - J\Delta v_{n+i}\Big)$$

и $\Delta g_n = 0$ при $n < k$.

Определим функции ψ_n^2 при $0 \le n < k$ так, чтобы соотношение (4.8) выполнялось и при $0 \le n < k$.

Разрешив равенство (4.8) относительно Δv_n, получим

$$\Delta v_n = \frac{h}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{n} r_{n-j}\Big(\frac{h}{\varepsilon}J\Big)\Delta g_j - h\sum_{j=0}^{n} r_{n-j}\Big(\frac{h}{\varepsilon}J\Big)\psi_j^2, \tag{4.9}$$

где матрицы $r_j(\frac{h}{\varepsilon}J)$ определены равенством [1, разд. V.7]

$$\frac{h}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{n} r_{n-j}\Big(\frac{h}{\varepsilon}J\Big)\zeta^j = \Big(\frac{h}{\varepsilon}\delta(\zeta)I - J\Big)^{-1}\frac{\zeta^{-k}}{\sigma(\zeta^{-1})},$$

$$\delta(\zeta) = \frac{\rho(\zeta^{-1})}{\sigma(\zeta^{-1})} = \frac{\alpha_0\zeta^k + \dots + \alpha_{k-1} + \alpha_k}{\beta_0\zeta^k + \dots + \beta_{k-1} + \beta_k},$$

I — единичная матрица.

Из условий теоремы следует [1, разд. VI.2] оценка

$$\frac{h}{\varepsilon}\left\|r_j\left(\frac{h}{\varepsilon}J\right)\right\| \le C_{20}\varkappa^j, \quad 0 < \varkappa < 1. \tag{4.10}$$

В силу липшицевости функции g, определения порядка интерполяции и предположения 4 получаем оценку

$$\begin{aligned}\|g(u_i, u_{t_i}(\cdot), v_i) - g(y_i, y_{t_i}(\cdot), z_i) - J\Delta v_i\| &\le L_5\|\Delta u_i\| \\ + L_6 \max_{-\tau\le s<0}\|u(t_i+s) - y(t_i+s)\| &+ \lambda\|\Delta v_i\| \\ \le L_5\|\Delta u_i\| + L_6(C_6 \max_{i-M\le j<i}\|\Delta u_j\| + C_7 h^{p_3}) + \lambda(\|\Delta v_i\|)\|\Delta v_i\|, &\qquad i = 0, \dots, N,\end{aligned}$$

где величина $\lambda(s) \to 0$ при $s \to 0$.

Отсюда, из определения величин Δg_n и из соотношений (4.9) и (4.10) получаем

$$\|\Delta v_n\| \le \sum_{j=0}^{n}\varkappa^{n-j}(C_{21}\|\Delta u_j\| + C_{22}\lambda\|\Delta v_j\|) + \sum_{j=0}^{n}\varkappa^{n-j}(C_{23}\varepsilon\|\psi_j^2\| + C_{24}h^{p_3}), \quad n = k, \dots, N. \tag{4.11}$$

Чтобы разрешить неравенства (4.7) и (4.11), определим числовые последовательности

$$U_n = h\sum_{j=0}^{n}(C_{16}U_j + C_{17}V_j) + h\sum_{j=0}^{n}(C_{18}\|\psi_j^1\| + C_{19}h^{p_3}), \tag{4.12}$$

$$V_n = \sum_{j=0}^{n}\varkappa^{n-j}(C_{21}U_j + C_{22}\lambda V_j) + \sum_{j=0}^{n}\varkappa^{n-j}(C_{23}\varepsilon\|\psi_j^2\| + C_{24}h^{p_3}) \tag{4.13}$$

при $n \ge k$ и $U_n = \|\Delta u_n\|$, $V_n = \|\Delta v_n\|$ при $n < k$.

По индукции проверяется, что

$$\|\Delta u_n\| \le U_n, \quad \|\Delta v_n\| \le V_n \tag{4.14}$$

для всех $n \ge 0$.

Перепишем (4.12) и (4.13) в виде

$$U_n = U_{n-1} + hC_{16}U_n + hC_{17}V_n + hC_{18}\|\psi_n^1\| + hC_{19}h^{p_3},$$

$$V_n = \varkappa V_{n-1} + C_{21}U_n + C_{22}\lambda V_n + C_{23}\varepsilon\|\psi_n^2\| + C_{24}h^{p_3}.$$

Разрешив эту систему относительно U_n, V_n, получим

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = A(h)\begin{pmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat\psi_n^1 \\ \hat\psi_n^2 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

где

$$A(h) = \begin{pmatrix} 1+O(h) & O(h) \\ O(1) & \rho + O(h) \end{pmatrix}, \qquad \rho = \frac{\varkappa}{1 - C_{22}\lambda},$$

$$|\hat\psi_n^1| \le hC_{25}(\|\psi_n^1\| + \varepsilon\|\psi_n^2\| + h^{p_3}), \quad |\hat\psi_n^2| \le C_{26}(h\|\psi_n^1\| + \varepsilon\|\psi_n^2\| + h^{p_3}), \quad n = 1, \dots, N. \tag{4.16}$$

Итерируя (4.15), получаем равенство

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} A(h)^{n-j}\begin{pmatrix} \hat\psi_j^1 \\ \hat\psi_j^2 \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

В силу теоремы 2 можно считать, что величина $\lambda = \lambda(\|\Delta v_i\|)$ столь мала, что

$$0 < \rho = \frac{\varkappa}{(1 - C_{22}\lambda)} < 1. \tag{4.18}$$

Если, кроме того, шаг h достаточно мал, то собственные значения матрицы $A(h)$ различны, и $A(h)$ может быть приведена к диагональному виду

$$A(h) = T^{-1}(h)\begin{pmatrix} 1+O(h) & 0) \\ 0 & \rho + O(h) \end{pmatrix} T(h), \qquad T(h) = \begin{pmatrix} 1 & O(h) \\ O(1) & 1 \end{pmatrix}.$$

С учетом этого из (4.17) получаем

$$U_n + V_n \le C_{27}\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\hat\psi_j^1 + \sum_{j=1}^{n}(h + \rho^{n-j})\hat\psi_j^2\Bigr). \tag{4.19}$$

Из (4.19) и (4.16) получаем

$$U_n + V_n \le C_{27}\Bigl(\sum_{j=1}^{n} hC_{25}(\|\psi_j^1\| + \varepsilon\|\psi_j^2\| + h^{p_3}\Bigr)$$

$$+ C_{27}\sum_{j=1}^{n} C_{26}(h\|\psi_j^1\| + \varepsilon\|\psi_j^2\| + h^{p_3})(h + \rho^{n-j}), \quad n = 1, \dots, N. \tag{4.20}$$

Величина $\sum\limits_{j=1}^{n} h$ ограничена длиной отрезка $[t_0, \theta]$, величина $\sum\limits_{j=1}^{n} \rho^{n-j}$ также ограничена константой в силу условия (4.18). Таким образом, учитывая определения порядков невязки и стартовых значений, из (4.20) получаем оценку

$$U_n + V_n \le C_{28}\Bigl(\bigl(C_{13} + \varepsilon C_{14}(\varepsilon)\bigr)h^{p_1} + h^{p_2} + h^{p_3}\Bigr), \quad n = 1, \dots, N.$$

Из этой оценки и (4.14) следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Теорема 3 показывает возможность применения для сингулярных ФДУ многошаговых $A(\alpha)$-устойчивых методов, так как если для второй компоненты невязки выполняется (4.3), т.е. $C_{14}(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}C_{15}$, то константа в оценке глобальной погрешности не зависит от ε.

Поступила 15.08.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хайрер Э., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
2. **Ким А.В., Пименов В.Г.** i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004.
3. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1959.
4. **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1. С. 102–116.
5. **Пименов В.Г.** Численные методы решения ФДАУ и асимптотическое разложение решений сингулярных уравнений с запаздыванием // Математика. Механика. Информатика: Мат-лы всерос. науч. конф., 2006. Челябинск: Челяб. гос. ун-т., 2007. С. 143–151.
6. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
7. **Gear C.T.** Simultaneous numerical solution of diifferential-algebraic equations // IEEE Trans. Circuit Theory. 1971. Vol. CT-18. P. 89–95.
8. **Kim A.V., Pimenov V.G.** Multistep numerical methods for functional differential equations // Math. Computers in Simulation. 1998. Vol. 45. P. 377–384.
9. **Lubich Ch.** On the convergence of multistep methods for nonlinear stiff differential equations applied to differential-algebraic systems // Numer. Math. 1991. Vol. 58. P. 839–853.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 519.65

АППРОКСИМАЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, СОХРАНЯЮЩИЕ НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА АППРОКСИМИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Ю. Н. Субботин

В работе с помощью параболических сплайнов строится линейный метод приближенного восстановления функций по их значениям на произвольной сетке. Метод обеспечивает наследование сплайном свойства монотонности и выпуклости аппроксимируемой функции, обладает сглаживающими свойствами. При этом норма построенного линейного оператора как оператора из пространства непрерывных функций в то же пространство равна единице. Подобные результаты получены и для тригонометрических сплайнов третьего порядка.

Введение

Работа посвящена так называемым формосохраняющим аппроксимациям (см., например, [1–6] и имеющуюся там библиографию). Так же, как в [3, 4, 6], в основе данной статьи лежит работа [2], однако здесь осуществляется не формальный перенос [2] на новую ситуацию, а внесены некоторые изменения и использованы новые параметры, влияющие на характеристику сглаживания. Это, в частности, позволило усилить некоторые ранее полученные результаты.

1. Параболические сплайны

Через $C(\mathbb{R})$, $C[0,1]$ и $\widetilde{C}[0,1]$ обозначаются, соответственно, равномерно непрерывные на $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, непрерывные на $[0,1]$ и непрерывные 1-периодические функции. Пусть имеется произвольная сетка узлов $\{x_i\}$, $x_i<x_{i+1}$, где $i\in\mathbb{Z}$ для $C(\mathbb{R})$ и $i=0,1,\dots,n$ $(n\geq 2)$, $x_0=0$, $x_n=1$ для $C[0,1]$ и $\widetilde{C}[0,1]$. Причем в последнем случае сетка предполагается периодически продолженной на $(-\infty,\infty)$.

Пусть функция $f(x)$ из $C[0,1]$ известна в узлах сетки, $y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,\dots,n)$. Положим $h_i=x_{i+1}-x_i$ $(i=0,1,\dots,n-1)$. Введем параметры t_i, $0<t_i\leq\dfrac{1}{2}\min(h_i,h_{i+1})$.

Построим линейный метод приближенного восстановления функции $f(x)$. Сначала построим ломаную $S_{1,n}(x)$ с узлами x_i, интерполирующую y_i в этих узлах

$$S_{1,n}(x)=\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}y_i+\frac{x_i-x}{h_{i-1}}y_{i-1},\qquad x_{i-1}\leq x\leq x_i,\qquad i=0,1,\dots,n-1. \tag{1.1}$$

Сгладим эту функцию на отрезках $[x_i-t_i,x_i+t_i]$, заменив на этих отрезках $S_{1,n}(x)$ на параболу $P_{2,i}(x)$, удовлетворяющую условиям

$$P_{2,i}(x_i-t_i)=S_{1,n}(x_i-t_i),\qquad P_{2,i}(x_i+t_i)=S_{1,n}(x_i+t_i), \tag{1.2}$$

$$P'_{2,i}(x_i-t_i)=S'_{1,n}(x_i-t_i),\qquad P'_{2,i}(x_i+t_i)=S'_{1,n}(x_i+t_i). \tag{1.3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05–01–00949) и программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–5120.2006.1).

Параболу $P_{2,i}(x),\ x \in [x_i - t_i, x_i + t_i]$, можно представить в виде

$$P_{2,i}(x) = y_{i-1}\frac{t_i}{h_{i-1}} + y_i\frac{h_{i-1} - t_i}{h_{i-1}} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}(x - x_i + t_i) + a_i(x - x_i + t_i)^2, \tag{1.4}$$

где

$$a_i = \frac{1}{4t_i}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{y-1}}{h_{i-1}}\right). \tag{1.5}$$

При этом справедливость равенств (1.2), (1.3) проверяется непосредственно (см., также [5]).

Положим

$$S_{2,n}(f,x) = \begin{cases} S_{1,n}(x), & x_{i-1} + t_{i-1} \le x \le x_i - t_i, \\ P_{2,i}(x), & x_i - t_i \le x \le x_i + t_i, \\ S_{1,n}(x), & x_i + t_i \le x \le x_{i+1} - t_{i+1}, \end{cases} \tag{1.6}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n-1$, а $t_0 = t_n = 0$ в случае $C[0,1]$; $i \in \mathbb{Z}$ в случаях $\widetilde{C}[0,1]$ и $C(\mathbb{R})$. Пусть

$$\delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}.$$

Теорема 1. *Функция $S_{2,n}(f,x)$ непрерывно дифференцируема. Если $y_i \le y_{i+1}$ ($y_i \ge y_{i+1}$), $i = \overline{0, n-1}$, то $S'_{2,n}(f,x) \ge 0$ ($S'_{2,n}(f,x) \le 0$). Если $\delta_i \ge 0$ ($\delta_i \le 0$), $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то $S''_{2,n}(f,x) \ge 0$ ($S''_{2,n}(f,x) \le 0$) для $x \in [0,1]$. Кроме того, $\|S_{2,n}\|_C^C = 1$.*

Доказательство. Первое свойство следует из построения $S_{2,n}(f,x)$. Свойства монотонности на участках линейности функции $S_{2,n}(f,x)$ следуют из (1.1) и свойств монотонности $\{y_i\}$. Так как производная $S'_{2,n}(f,x)$ линейна на $[x_i - t_i, x_i + t_i]$ и на левом (правом) конце этого отрезка неотрицательна (неположительна), то она сохраняет знак для всех $x \in [x_i - t_i, x_i + t_i]$ и, следовательно, свойство монотонности $S_{2,n}(f,x)$ имеет место на отрезке $[x_{i-1} + t_{i-1}, x_{i+1} + t_{i+1}]$. Заметим, что этот факт справедлив в предположении $y_{i-1} \le y_i \le y_{i+1}$ ($y_{i-1} \ge y_i \ge y_{i+1}$). Так как по условию теоремы последние неравенства имеют место для любых i ($0 \le i \le n-1$), то монотонность имеет место на всем отрезке $[0,1]$.

Покажем, что функция $S_{2,n}(f,x)$ выпукла (вогнута) на $[0,1]$ при $\delta_i \ge 0$ ($\delta_i \le 0$), $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Действительно, на участках линейности $S''_{2,n}(f,x) \equiv 0$, а при $x \in [x_i - t_i, x_i + t_i]$ из (1.4), (1.5) имеем $S''_{2,n}(f,x) = 2a_i = \dfrac{1}{t_i}\delta_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$).

Осталось доказать последнее утверждение теоремы. Пусть $f^*(x) \equiv 1$ на $[0,1]$. Так как $S_{2,n}(f^*,x) \equiv 1$, то $\|S_{2,n}\|_C^C \ge 1$. Далее, пусть $x \in [x_{i-1} + t_{i-1}, x_{i+1} - t_{i+1}]$, где $1 \le i \le n-1$. Напомним, что в случае $C[0,1]$ имеем $t_0 = t_n = 0$, т.е. $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}[x_{i-1} + t_{i-1}, x_{i+1} - t_{i+1}] = [0,1]$.

Возможны три случая:

(1) $y_{i-1} \le y_i \le y_{i+1}$ $(y_{i-1} \ge y_i \ge y_{i+1})$,

(2) $y_i - y_{i-1} > 0, \quad y_i - y_{i+1} > 0$,

(3) $y_i - y_{i-1} < 0, \quad y_i - y_{i+1} < 0$.

Случай (1). Выше при рассмотрении свойств монотонности было доказано, что на $\Delta_i = [x_{i-1} + t_{i-1}, x_{i+1} - t_{i+1}]$ функция $S_{2,n}(f,x)$ ведет себя монотонно. Таким образом,

$$\max_{x \in \Delta_i}|S_{2,n}(f,x)| \le \max_{x \in \Delta_i}\max\Big\{|S_{1,n}(x_{i-1} + t_{i-1})|, |S_{1,n}(x_{i+1} - t_{i+1})|\Big\}$$

$$\le \max\Big\{|y_{i-1}|, |y_i|, |y_{i+1}|\Big\} \le \|f\|. \tag{1.7}$$

Рассмотрим случай (2). Ясно, что на участках из Δ_i, где $S_{2,n}(f,x)$ совпадает с $S_{1,n}(f,x)$, неравенство (1.7) имеет место. Пусть $x \in [x_i - t_i, x_i + t_i]$. На этом отрезке $S_{2,n}(f,x) \equiv P_{2,i}(x)$, и в рассматриваемом случае в силу условий (1.2), (1.3) вершина параболы $P_{2,i}(x)$ лежит внутри отрезка. Следовательно, для достаточно малого положительного числа ε_i имеем $P'_{2,i}(x) < S'_{1,n}(x)$ для $x \in (x_i - t_i, x_i - t_i + \varepsilon_i)$ и $P'_{2,i}(x) > S'_{1,n}(x)$ для $x \in (x_i + t_i - \varepsilon_i, x_i + t_i)$ в силу (1.3). Тогда в силу (1.2) для тех же x будут выполняться неравенства $S_{1,n}(x) > P_{2,i}(x)$ и, следовательно, $S_{1,n}(x) > P_{2,i}(x)$ для $x \in (x_i - t_i, x_i + t_i)$. Ибо в противном случае на одном из полуинтервалов $(x_i - t_i, x_i]$, $[x_i, x_i + t_i)$ нашлась бы точка $\bar{x}$, в которой $S_{1,n}(\bar{x}) = P_{2,i}(\bar{x})$. Тогда на этом полуинтервале $P_{2,i}(x) \equiv S_{1,n}(x)$, так как их разность, будучи полиномом второй степени, имела бы с учетом кратности (см. (1.2), (1.3)) три нуля, но это невозможно, так как $P'_{2,i}(x)$ в двух точках имеет значения противоположных знаков.

Таким образом, $\min\bigl\{S_{1,n}(x_i - t_i), S_{1,n}(x_i + t_i)\bigr\} \le P_{2,i}(x) \le y_i$. Отсюда для $x \in [x_i - t_i, x_i + t_i]$ имеем

$$|S_{2,n}(f,x)| = |P_{2,i}(x)| \le \max\bigl\{|y_{i-1}|, |y_i|, |y_{i+1}|\bigr\} \le \|f\|,$$

т.е. и в этом случае справедливо (1.7).

Аналогично доказывается, что в случае (3)

$$y_i \le P_{2,i}(x) \le \min\bigl\{S_{1,n}(x_i - t_i), S_{1,n}(x_i + t_i)\bigr\}.$$

Отсюда вновь получаем (1.7), и теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и почти всюду на $[0,1]$ имеет ограниченную вторую производную, тогда*

$$|f(x) - S_{2,n}(f,x)| \le \frac{1}{8} M H^2, \qquad x \in [0,1], \tag{1.8}$$

где

$$H = \max_{0 \le i \le n-1} h_i, \qquad M = \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|,$$

и

$$|S''_{2,n}(f,x)| \le \max_{1 \le i \le n-1} M_i \frac{h_{i-1} + h_i}{4t_i}, \qquad x \in \bigl[x_{i-1} + t_{i-1}, x_{i+1} - t_{i+1}\bigr], \tag{1.9}$$

где

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} |f''(x)| \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

В частности, при $t_i = \dfrac{1}{2}\min\{h_{i-1}, h_i\}$ справедлива оценка

$$|S''_{2,n}(f,x)| \le \frac{1}{2} M_i \left[1 + \max\left\{\frac{h_i}{h_{i-1}}, \frac{h_{i-1}}{h_i}\right\}\right]. \tag{1.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с неравенства (1.9). Для участков линейности оно выполняется. Пусть $x \in [x_i - t_i, x_i + t_i]$ $(i = 1, \dots, n-1)$, тогда в силу (1.4)–(1.6) имеем

$$|S''_{2,n}(f,x)| = \frac{1}{2t_i}\left|\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right|$$

$$= \frac{1}{2t_i}\left|\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{x_i}^{t} f''(u)\,du dt + \frac{1}{h_{i-1}}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\int\limits_{t}^{x_i} f''(u)\,du dt\right| \le \frac{M_i}{2t_i} \cdot \frac{h_{i-1} + h_i}{2}, \tag{1.11}$$

где $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} |f''(x)|$.

Оценка (1.10) при $t_i = \dfrac{1}{2}\min\{h_{i-1}, h_i\}$ лучше, чем оценка для метода аппроксимации, предложенного в [3].

Проведем оценку погрешности аппроксимации. На участках линейности $\bigl(x_{i-1}+t_{i-1}, x_i-t_i\bigr)$ $(i=1,\dots,n)$ оценки хорошо известны и легко получаются с помощью формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши:

$$|e(x)| = |f(x)-S_{2,n}(f,x)| = |f(x)-S_{1,n}(x)| \le \frac{1}{2}M_i(x_i-x)(x-x_{i-1}) \le \frac{1}{8}M_i h_{i-1}^2, \tag{1.12}$$

где

$$x_{i-1}+t_{i-1} \le x \le x_i - t_i, \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1}+t_{i-1},x_i-t_i]} |f''(x)|.$$

Таким образом, для рассмотренных x оценка (1.8) имеет место.

Пусть $x\in[x_i-t_i, x_i+t_i]$ $(i=1,\dots,n-1)$, тогда, вновь используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши и представления (1.4)–(1.6), получим

$$|e(x)| = |f(x)-S_{2,n}(f,x)| = |f(x)-P_{2,i}(x)|$$

$$= \Bigg| \int\limits_0^{x-x_{i-1}} (x-x_{i-1}-u)f''(x_{i-1}+u)\,du - \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}} \int\limits_0^{h_{i-1}} (h_{i-1}-u)f''(x_{i-1}+u)\,du$$

$$- \frac{(x-x_i+t_i)^2}{4t_ih_i} \int\limits_{h_{i-1}}^{h_{i-1}+h_i} (h_{i-1}+h_i-u)f''(x_{i-1}+u)\,du - \frac{(x-x_i+t_i)^2}{4t_ih_{i-1}} \int\limits_0^{h_{i-1}} uf''(x_{i-1}+u)\,du \Bigg|.$$

Далее рассмотрим два случая: (a) $x_i-t_i\le x\le x_i$ и (b) $x_i\le x\le x_i+t_i$.

Случай (a). Имеем

$$|e(x)| \le \Bigg| \int\limits_0^{x-x_{i-1}} \left[(x-x_{i-1}-u) - x + x_{i-1} + \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}u - \frac{(x-x_i+t_i)^2}{4t_ih_{i-1}}u\right] f''(x_{i-1}+u)\,du$$

$$+ \int\limits_{x-x_{i-1}}^{h_{i-1}} \left[-\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}(h_{i-1}-u) - \frac{(x-x_i+t_i)^2}{4t_ih_{i-1}}u\right] f''(x_{i-1}+u)\,du$$

$$+ \int\limits_{h_{i-1}}^{h_{i-1}+h_i} \left[-\frac{(x-x_i+t_i)^2}{4t_ih_i}(h_{i-1}+h_i-u)\right] f''(x_{i-1}+u)\,du \Bigg|.$$

Так как при при $x_i-t_i\le x\le x_i$ функции в квадратных скобках неположительны, то

$$|e(x)| \le M_i\left[\frac{1}{2}(x-x_{i-1})(x_i-x) + \frac{(x-x_i+t_i)^2}{8t_i}(h_{i-1}+h_i)\right], \qquad x_i-t_i\le x\le x_i.$$

Отсюда следует, что

$$|e(x)| \le M_i \max\left\{\frac{1}{2}t_i(h_{i-1}-t_i), \frac{t_i}{8}(h_{i-1}+h_i)\right\}, \qquad x_i-t_i\le x\le x_i. \tag{1.13}$$

В случае (b) имеем

$$|e(x)| \le \Bigg| \int\limits_0^{h_{i-1}} \left[(x-x_{i-1}-u) - \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}(h_{i-1}-u) - \frac{(x-x_i+t_i)^2}{4t_ih_{i-1}}u\right] f''(x_{i-1}+u)\,du$$

$$+\int\limits_{h_{i-1}}^{x-x_{i-1}}\left[(x-x_{i-1}-u)-\frac{(x-x_i+t_i)^2}{4t_ih_i}(h_{i-1}+h_i-u)\right]f''(x_{i-1}+u)\,du$$

$$+\int\limits_{x-x_{i-1}}^{h_{i-1}+h_i}\left[-\frac{(x-x_i+t_i)^2}{4t_ih_i}(h_{i-1}+h_i-u)\right]f''(x_{i-1}+u)\,du\Bigg|,\qquad x_i\le x\le x_i+t_i.$$

При рассматриваемых x функции в квадратных скобках неположительны. Поэтому

$$|e(x)|\le\left[\frac{(x-x_i+t_i)^2(h_{i-1}+h_i)}{8t_i}-\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2}\right]M_i,\qquad x_i\le x\le x_i+t_i.\tag{1.14}$$

В силу ограничений на t_i $\left(t_i\le\dfrac{1}{2}\min\{h_{i-1},h_i\}\right)$ коэффициент при x^2 в (1.14) неотрицательный и, следовательно, наибольшее значение правой части (1.14) достигается на концах отрезка $[x_i,x_i+t_i]$, т.е.

$$|e(x)|\le M_i\max\left\{\frac{1}{2}t_i(h_i-t_i),\ \frac{t_i(h_{i-1}+h_i)}{8}\right\},\qquad x_i\le x\le x_i+t_i.\tag{1.15}$$

Легко проверяется, что из оценок (1.12), (1.13), (1.15) и ограничений на t_i следует оценка

$$|e(x)|\le\frac{1}{8}M_i\max\{h_{i-1}^2,h_i^2\}\qquad\Big(x_i-\frac{1}{2}h_{i-1}\le x\le x_i+\frac{1}{2}h_i,\ i=1,\dots,n\Big),$$

а из нее — оценка (1.8).

Очевидно, что полученные результаты распространяются на $\widetilde{C}[0,1],\ C(\mathbb{R})$.

2. Гладкие тригонометрические сплайны третьего порядка

В этом разделе сохраняются обозначения из предыдущего раздела. При этом некоторые из обозначений наполняются новым смыслом. Так, вместо базисных функций $1,\ x,\ x^2$ рассматривается система функций $1,\ \sin\beta x,\ \cos\beta x$, представляющая собой фундаментальную систему решений однородного уравнения $y'''(x)+\beta^2y'(x)=0,\ \beta>0$. При этом для разрешимости возникающих интерполяционных задач налагается следующее ограничение на сетку узлов: $H=\max\limits_i h_i<\dfrac{\pi}{\beta}$.

Пусть $f(x)\in C[0,1]$, $y_i=f(x_i)$ и

$$\widetilde{S}_{1,n}(x)=y_{i-1}\frac{\sin\beta(x_i-x)}{\sin\beta h_{i-1}}+y_i\frac{\sin\beta(x-x_{i-1})}{\sin\beta h_{i-1}},\qquad x_{i-1}\le x\le x_i\qquad(i=1,2,\dots,n).\tag{2.1}$$

Функция $\widetilde{S}_{1,n}(x)$ интерполирует $f(x)$ в узлах x_i $(i=0,1,\dots,n)$. Положим

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}\left[1-\dfrac{\cos\beta(x-x_i)}{\cos\beta t_i}\right]\beta^{-2}, & x_i-t_i\le x\le x_i+t_i,\\ 0, & \text{для других значений } x.\end{cases}\tag{2.2}$$

Функция $\lambda_i(x)$ непрерывна и на отрезке $[x_i-t_i,x_i+t_i]$ четна относительно точки x_i. Эта функция будет использована для сглаживания строящейся далее "тригонометрической ломаной".

Положим

$$y_{i,1}=\widetilde{S}_{1,n}(x_i-t_i)=\frac{\sin\beta t_i}{\sin\beta h_{i-1}}y_{i-1}+\frac{\sin\beta(h_{i-1}-t_i)}{\sin\beta h_{i-1}}y_i,\tag{2.3}$$

$$y_{i,2}=\widetilde{S}_{1,n}(x_i+t_i)=\frac{\sin\beta(h_i-t_i)}{\sin\beta h_i}y_i+\frac{\sin\beta t_i}{\sin\beta h_i}y_{i+1}.\tag{2.4}$$

Построим вспомогательную “тригонометрическую ломаную”, интерполирующую значения $y_{i,1}$ и $y_{i,2}$ в узлах $x_i - t_i,\ x_i + t_i$. Имеем

$$\theta_i(x) = \frac{1}{\sin 2\beta t_i}\big[y_{i,1}\sin\beta(x_i + t_i - x) + y_{i,2}\sin\beta(x - x_i + t_i)\big], \tag{2.5}$$

$i = 0, 1, \ldots, n$. При этом, как и раньше, в случае $C[0,1]$ полагаем $t_0 = t_n = 0$. Подставляя в (2.5) представления (2.3) и (2.4), получим

$$\theta_i(x) = \frac{1}{\sin 2\beta t_i}\bigg[y_{i-1}\frac{\sin\beta t_i}{\sin\beta h_{i-1}}\sin\beta(x_i + t_i - x) + y_i\frac{\sin\beta(h_{i-1} - t_i)}{\sin\beta h_{i-1}}\sin\beta(x_i + t_i - x)$$
$$+ y_i\frac{\sin\beta(h_i - t_i)}{\sin\beta h_i}\sin\beta(x - x_i + t_i) + y_{i+1}\frac{\sin\beta t_i}{\sin\beta h_i}\sin\beta(x - x_i + t_i)\bigg]. \tag{2.6}$$

З а м е ч а н и е 1. Разность $\widetilde{S}_{1,n}(x) - \theta_i(x)$ на отрезке $[x_i - t_i, x_i + t_i]$ является “тригонометрической ломаной”, обращающейся в нуль в точках $x_i \pm t_i$, а ее внутренним узлом непрерывной склейки является точка x_i. Эта “ломаная” имеет вид $C\dfrac{\sin\beta(x - x_i + t_i)}{\sin\beta t_i}$ при $x_i - t_i \le x \le x_i$ и $C\dfrac{\sin\beta(x_i + t_i - x)}{\sin\beta t_i}$ при $x_i \le x \le x_i + t_i$, где C — определенная константа. Легко заметить, что “ломаная” четна на отрезке $[x_i - t_i, x_i + t_i)$ относительно точки x_i. Следовательно, ее производные в точках $x_i \pm t_i$ равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Как отмечалось выше, то же самое справедливо и по отношению к функции $\lambda_i(x)$.

Далее мы заменяем функцию $\widetilde{S}_{1,n}(x)$ на отрезках $[x_i - t_i,\ x_i + t_i]$ на функцию

$$\widetilde{P}_{2,n}(x) = \theta_i(x) + C_i\lambda_i(x), \qquad x \in [x_i - t_i, x_i + t_i], \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{2.7}$$

где C_i находится, исходя из условия $P'_{2,n}(x_i - t_i) = \widetilde{S}'_{1,n}(x_i - t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Тогда в силу определения функций $\theta_i(x),\ \lambda_i(x)$ и замечания 1 будут выполняться условия

$$\widetilde{S}^{(k)}_{1,n}(x_i \pm t_i) = P^{(k)}_{2,n}(x_i \pm t_i) \qquad (k = 0, 1) \tag{2.8}$$

и новая функция $S_{2,n}(x)$ будет принадлежать классу $C^{(1)}[0,1]$.

Из (2.1) имеем

$$\widetilde{S}'_{1,n}(x_i - t_i) = \frac{\beta}{\sin\beta h_{i-1}}[y_i\cos\beta(h_{i-1} - t_i) - y_{i-1}\cos\beta t_i], \tag{2.9}$$

$$\theta'_i(x_i - t_i) = \frac{\beta}{\sin 2\beta t_i}\bigg[-y_{i-1}\frac{\sin\beta t_i}{\sin\beta h_{i-1}}\cos 2\beta t_i - y_i\frac{\sin\beta(h_{i-1} - t_i)}{\sin\beta h_{i-1}}\cos 2\beta t_i$$
$$+ y_i\frac{\sin\beta(h_i - t_i)}{\sin\beta h_i} + y_{i+1}\frac{\sin\beta t_i}{\sin\beta h_i}\bigg]. \tag{2.10}$$

Из (2.9), (2.10) следует, что

$$\widetilde{S}'_{1,n}(x_i - t_i) - \theta'_i(x_i - t_i) = -y_{i-1}\left(\frac{\beta\cos\beta t_i}{\sin\beta h_{i-1}} - \frac{\beta\cos 2\beta t_i\sin\beta t_i}{\sin 2\beta t_i\sin\beta h_{i-1}}\right)$$
$$+ \frac{\beta}{\sin\beta h_{i-1}}\left[\cos\beta(h_{i-1} - t_i) + \frac{\cos 2\beta t_i}{\sin 2\beta t_i}\sin\beta(h_{i-1} - t_i)\right]y_i$$
$$- y_i\frac{\beta}{\sin\beta h_i}\frac{\sin\beta(h_i - t_i)}{\sin 2\beta t_i} - y_{i+1}\frac{\beta}{\sin\beta h_i}\frac{\sin\beta t_i}{\sin 2\beta t_i}$$
$$= -\frac{\beta}{2\sin\beta h_{i-1}\cos\beta t_i}y_{i-1} + \frac{\beta\sin\beta(h_{i-1} + t_i)}{\sin\beta h_{i-1}\sin 2\beta t_i}y_i - \frac{\beta\sin\beta(h_i - t_i)}{\sin\beta h_i\sin 2\beta t_i}y_i - \frac{\beta}{2\sin\beta h_i\cos\beta t_i}y_{i+1}$$

$$= -\frac{\beta}{2\sin\beta h_{i-1}\cos\beta t_i}y_{i-1} + \frac{\beta\cos\beta h_{i-1}}{2\sin\beta h_{i-1}\cos\beta t_i}y_i + \frac{\beta\cos\beta h_i}{2\sin\beta h_i\cos\beta t_i}y_i$$

$$-\frac{\beta}{2\sin\beta h_i\cos\beta t_i}y_{i+1} = -\frac{\beta}{2\cos\beta t_i}\left[\frac{y_{i+1}-y_i\cos\beta h_i}{\sin\beta h_i} - \frac{y_i\cos\beta h_{i-1}-y_{i-1}}{\sin\beta h_{i-1}}\right]. \qquad (2.11)$$

Далее, $\lambda_i'(x_i-t_i) = -\dfrac{\sin\beta t_i}{\beta\cos\beta t_i}$. Из (2.7), условий на C_i, (2.8) и (2.11) имеем

$$-C_i\frac{\sin\beta t_i}{\beta\cos\beta t_i} = -\frac{\beta}{2\cos\beta t_i}\left[\frac{y_{i+1}-y_i\cos\beta h_i}{\sin\beta h_i} - \frac{y_i\cos\beta h_{i-1}-y_{i-1}}{\sin\beta h_{i-1}}\right].$$

Из последнего равенства находим

$$C_i = \frac{\beta^2}{2\sin\beta t_i}\left[\frac{y_{i+1}-y_i\cos\beta h_i}{\sin\beta h_i} - \frac{y_i\cos\beta h_{i-1}-y_{i-1}}{\sin\beta h_{i-1}}\right]. \qquad (2.12)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае аналог функции $S_{2,n}(f,x)$ имеет вид

$$\widetilde{S}_{2,n}(f,x) = \begin{cases} \widetilde{P}_{2,n}(x), & x\in[x_i-t_i, x_i+t_i], \quad i=1,2,\dots,n-1 \\ \widetilde{S}_{1,n}(x), & \text{для других } x \text{ из } [0,1], \quad t_0=t_n=0 \end{cases}, \qquad (2.13)$$

где $\widetilde{S}_{1,n}(x)$, $\widetilde{P}_{2,n}(x)$ определяются формулами (2.1), (2.7), а C_i и $\theta_i(x)$ — формулами (2.12) и (2.6), соответственно.

Далее будем рассматривать класс функций $f(x)$, которые абсолютно непрерывны (локально абсолютно непрерывны в случае $\mathbb{R}$), и для которых функция $u(x) = f''(x)+\beta^2 f(x)$ имеет ограниченную L_∞ норму. В частности, положим $M_i = \operatorname*{ess\,sup}_{x_{i-1}\le x\le x_{i+1}} |u(x)|$, $\widetilde{M}_{i-1} = \operatorname*{ess\,sup}_{x_{i-1}\le x\le x_i} |u(x)|$, $M = \max_i |\widetilde{M}_{i-1}|$ $(i=1,\dots,n)$.

Теорема 3. *Для указанного класса функций справедливы следующие оценки:*

$$\big|f(x)-\widetilde{S}_{2,n}(f,x)\big| \le \frac{2}{\beta^2}\sin\beta\frac{x_i-x}{2}\sin\beta\frac{x-x_{i-1}}{2}\Big(\cos\beta\frac{h_{i-1}}{2}\Big)^{-1}M_{i-1},$$

$$(x_{i-1}+t_{i-1}\le x\le x_i-t_i), \qquad (2.14)$$

$$\|f(x)-\widetilde{S}_{2,n}(f,x)\| \le 2M\beta^{-2}\Big(\cos\frac{\beta H}{4}\Big)^{-1}\sin^2\frac{\beta H}{4}, \qquad H=\max h_i. \qquad (2.15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Получим оценки погрешности на отрезке $[x_{i-1}+t_{i-1}, x_i-t_i]$. Будем использовать представление

$$f(x) = C_1\cos\beta(x-x_i) + C_2\sin\beta(x-x_i) + \frac{1}{\beta}\int_{x_i}^{x}\sin\beta(x-t)u(t)\,dt.$$

Так как предложенный метод аппроксимации линеен и является проектором на ядро оператора $y''+\beta^2 y$, то в оценках погрешности мы можем считать $C_1=C_2=0$. Пусть $x\in[x_{i-1}+t_{i-1}, x_i+t_i]$, тогда из (2.7) и (2.1) имеем

$$\Big|f(x)-\widetilde{S}_{2,n}(f,x)\Big| = \Big|f(x)-\widetilde{S}_{1,n}(f,x)\Big|$$

$$= \frac{1}{\beta}\left|\int_{x}^{x_i}\sin\beta(t-x)u(t)\,dt - \int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\sin\beta(x_i-x)}{\sin\beta h_{i-1}}\sin\beta(t-x_{i-1})u(t)\,dt\right|$$

$$= \frac{1}{\beta}\left| \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \left\{ -\frac{\sin\beta(x_i - x)}{\sin\beta h_{i-1}} \sin\beta(t - x_{i-1}) \right\} u(t)\ dt \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x}^{x_i} \left[-\frac{\sin\beta(x_i - x)}{\sin\beta h_{i-1}} \sin\beta(t - x_{i-1}) + \sin\beta(t - x) \right] u(t)\ dt \right|.$$

Выражение в фигурных скобках отрицательно. Покажем, что выражение в квадратных скобках неположительно. Действительно, при $t = x$ оно меньше нуля, а при $t = x_i$ оно равно нулю. Но функция вида $C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t$ (где $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$) на полуинтервале длины, меньшей $\dfrac{\pi}{\beta}$, не может иметь двух нулей, и требуемое доказано. Отсюда следует, что

$$\left| f(x) - \widetilde{S}_{1,n}(f, x) \right| \leq \frac{1}{\beta^2} \widetilde{M}_i \left[\frac{\sin\beta(x_i - x)}{\sin\beta h_{i-1}} (1 - \cos\beta h_{i-1}) - 1 + \cos\beta(x_i - x) \right]$$

$$= \frac{1}{\beta^2} \widetilde{M}_i \left[\cos\beta\frac{x_i - x}{2} \sin\beta\frac{h_{i-1}}{2} - \sin\beta\frac{x_i - x}{2} \cos\beta\frac{h_{i-1}}{2} \right] 2\sin\beta\frac{x_i - x}{2} \Big(\cos\beta\frac{h_{i-1}}{2} \Big)^{-1}$$

$$= \frac{2}{\beta^2} \sin\beta\frac{x_i - x}{2} \sin\beta\frac{x - x_{i-1}}{2} \Big(\cos\beta\frac{h_{i-1}}{2} \Big)^{-1}. \tag{2.16}$$

Для $x \in [x_i - t_i,\ x_i + t_i]$ при $y_j = f(x_j)$ $\left(f(x) = \dfrac{1}{\beta} \displaystyle\int\limits_{x_i}^{x} \sin\beta(x - t) u(t)\ dt \right)$ имеем

$$\left| f(x) - \widetilde{S}_{2,n}(f, x) \right| = |f(x) - \theta_i(x) - C_i \lambda_i(x)|$$

$$= \left| f(x) - \frac{1}{\sin 2\beta t_i} \left[y_{i-1} \frac{\sin\beta t_i}{\sin\beta h_{i-1}} \sin\beta(x_i + t_i - x) + y_{i+1} \frac{\sin\beta t_i}{\sin\beta h_i} \sin\beta(x - x_i + t_i) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\beta(x - x_i) - \cos\beta t_i}{\cos\beta t_i} \cdot \frac{1}{2\sin\beta t_i} \left[\frac{y_{i-1}}{\sin\beta h_{i-1}} + \frac{y_{i+1}}{\sin\beta h_i} \right] \right|.$$

Пусть $x \in [x_i - t_i, x_i]$, тогда

$$\left| f(x) - \widetilde{S}_{2,n}(f, x) \right|$$

$$= \frac{1}{\beta} \left| \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \left[-\frac{1}{2\cos\beta t_i} \left(\frac{\sin\beta(y_i + t_i - x)}{\sin\beta h_{i-1}} - \frac{\cos\beta(x - x_i) - \cos\beta t_i}{\sin\beta t_i \cdot \sin\beta h_{i-1}} \right) \sin\beta(t - x_{i-1}) \right] u(t)\ dt \right.$$

$$+ \int\limits_{x}^{x_i} \left[\sin\beta(t - x) - \frac{1}{2\cos\beta t_i} \left(\frac{\sin\beta(x_i + t_i - x)}{\sin\beta h_{i-1}} - \frac{\cos\beta(x - x_i) - \cos\beta t_i}{\sin\beta t_i \sin\beta h_{i-1}} \right) \sin\beta(t - x_{i-1}) \right] u(t)\ dt$$

$$\left. + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left[-\frac{1}{2\cos\beta t_i} \left(\frac{\sin\beta(x - x_i + t_i)}{\sin\beta h_i} - \frac{\cos\beta(x - x_i) - \cos\beta t_i}{\sin\beta t_i \sin\beta h_i} \right) \sin\beta(x_{i+1} - t) \right] u(t)\ dt \right|. \tag{2.17}$$

Покажем, что при $x \in [x_i - t_i, x_i]$ выражение в квадратных скобках в первом интеграле неположительно. Для этого достаточно показать, что неотрицательна функция

$$\varphi(x) = \sin\beta(x_i + t_i - x) - \frac{\cos\beta(x - x_i) - \cos\beta t_i}{\sin\beta t_i}.$$

Имеем

$$\frac{1}{\beta}\varphi'(x) = -\cos\beta(x_i + t_i - x) + \frac{\sin\beta(x - x_i)}{\sin\beta t_i},$$

$$\frac{1}{\beta}\varphi'(x_i-t_i)=-\cos 2\beta t_i-\frac{\sin\beta(t_i)}{\sin\beta t_i}=-1-\cos 2\beta t_i<0,\quad \text{так как}\ \ 0<2\beta t_i<\pi,$$

$$\frac{1}{\beta}\varphi'(x_i)=-\cos\beta t_i<0,\ \text{так как}\ \beta t_i<\frac{\pi}{2},$$

и функция $\varphi'(x)$ на (x_i-t_i,x_i) не может иметь положительных значений, так как иначе она будет иметь два нуля на интервале длины, меньшей $\dfrac{\pi}{\beta}$. Следовательно, $\varphi(x)$ убывает. Но $\varphi(x_i)=\dfrac{\sin^2\beta t_i-1+\cos\beta t_i}{\sin\beta t_i}>0$. Требуемое доказано. То же самое верно и для третьего интеграла.

Пусть $\psi(t,x)$ — функция в квадратных скобках во втором интеграле и $x_i-t_i\le x\le t\le x_i$, тогда из утверждения, доказанного для первого интеграла, следует, что $\psi(x,x)<0$. Далее,

$$\psi(x_i,x)=\sin\beta(x_i-x)-\frac{1}{2\cos\beta t_i}\left[\sin\beta(x_i+t_i-x)-\frac{\cos\beta(x-x_i)-\cos\beta t_i}{\sin\beta t_i}\right]$$

и

$$\frac{1}{\beta}\cdot\frac{d\psi(x_i,x)}{dx}=-\cos\beta(x_i-x)+\frac{\cos\beta(x_i+t_i-x)}{2\cos\beta t_i}-\frac{\sin\beta(x-x_i)}{2\cos\beta t_i\sin\beta t_i}.$$

Из последнего равенства имеем

$$\frac{1}{\beta}\cdot\frac{d\psi(x_i,x_i)}{dx}=-1+\frac{1}{2}<0,$$

$$\frac{1}{\beta}\cdot\frac{d\psi(x_i,x_i-t_i)}{dx}=-\cos\beta(t_i)+\frac{\cos 2\beta t_i}{2\cos\beta t_i}+\frac{1}{2\cos\beta t_i}=\frac{1}{2\cos\beta t_i}\big(-\cos^2\beta t_i-\sin^2\beta t_i+1\big)=0.$$

Отсюда, как и ранее, следует, что $\dfrac{d\psi(x_i,x)}{dx}\le 0$ при $x\in[x_i-t_i,x_i]$, т.е. $\psi(x_i,x)$ по x убывает. Но $\psi(x_i,x_i-t_i)=0$ и, следовательно, $\psi(x_i,x)\le 0$. Возвращаясь к переменной t, из условий $\psi(x_i,x)\le 0$, $\psi(x,x)\le 0$, как и раньше, получаем, что $\psi(x,t)\le 0$, $x_i-t_i\le x\le t\le x_i$. Таким образом, максимум правой части (2.17) при $|u(t)|\le M_i$ достигается, когда $u(t)\equiv -M_i$.

В итоге имеем оценку

$$|f(x)-\widetilde{S}_{2,n}(f,x)|\le\frac{M_i\varphi(x)}{\beta^2},\tag{2.18}$$

где

$$\varphi(x)=-1+\cos\beta(x_i-x)+\frac{1}{2\cos\beta t_i}\left[\frac{\sin\beta(x_i+t_i-x)}{\sin\beta h_{i-1}}-\frac{\cos\beta(x-x_i)-\cos\beta t_i}{\sin\beta t_i\sin\beta h_{i-1}}\right][1-\cos\beta h_{i-1}]$$
$$+\frac{1}{2\cos\beta t_i}\left[\frac{\sin\beta(x-x_i+t_i)}{\sin\beta h_i}-\frac{\cos\beta(x-x_i)-\cos\beta t_i}{\sin\beta t_i\sin\beta h_i}\right][1-\cos\beta h_i].$$

Покажем, что функция φ принимает наибольшее значение в концевых точках отрезка $[x_i-t_i,x_i]$. Имеем

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\beta}\Bigg\{\sin\beta(x_i-x)+\frac{1-\cos\beta h_{i-1}}{2\cos\beta t_i\sin\beta h_{i-1}}\left[-\cos\beta(x_i-x+t_i)+\frac{\sin\beta(x-x_i)}{\sin\beta t_i}\right]$$
$$+\frac{1-\cos\beta h_i}{2\cos\beta t_i\sin\beta h_i}\left[\cos\beta(x-x_i+t_i)+\frac{\sin\beta(x-x_i)}{\sin\beta t_i}\right]\Bigg\}.$$

Далее,

$$\varphi'(x_i-t_i)<0,\qquad \varphi'(x_i)=\frac{\cos\beta t_i}{2\sin\beta t_i}\left[\frac{1-\cos\beta h_i}{\sin\beta h_i}-\frac{1-\cos\beta h_{i-1}}{\sin\beta h_{i-1}}\right].$$

Возможны два случая: (a) $\varphi'(x_i) \le 0$, (b) $\varphi'(x_i) > 0$. В случае (a) функция $\varphi'(x)$ на рассматриваемом отрезке не может принимать положительных значений, так как иначе функция типа $a\cos x + b\sin x$ (где $a^2+b^2 \ne 0$) на отрезке длины, меньшей π, имела бы два различных нуля, что невозможно. Следовательно, в этом случае $\varphi(x)$ убывает на $[x_i - t_i, x_i]$ и не превосходит $\varphi(x_i - t_i)$. По тем же причинам в случае (b) $\varphi'(x)$ не может на $[x_i - t_i, x_i]$ иметь более одной перемены знака и, следовательно, $\varphi(x)$ сначала убывает, а затем возрастает. Таким образом,

$$\varphi(x) \le \max\{\varphi(x_i - t_i), \varphi(x_i)\}.$$

В точке $x_i - t_i$ функции $\widetilde{S}_{1,n}(x)$ и $\widetilde{S}_{2,n}(x)$ совпадают. Поэтому из (2.17) следует, что

$$\varphi(x_i - t_i) \le \frac{2}{\cos\frac{\beta h_{i-1}}{2}} \sin\frac{\beta t_i}{2} \sin\frac{\beta(h_{i-1}-t_i)}{2}. \tag{2.19}$$

При $x = x_i$ имеем

$$\varphi(x_i) = \frac{K\sin\frac{\beta t_i}{2}}{2\cos\frac{\beta t_i}{2}}, \tag{2.20}$$

где

$$K = \sin\frac{\beta h_{i-1}}{2}\Big(\cos\frac{\beta h_{i-1}}{2}\Big)^{-1} + \sin\frac{\beta h_i}{2}\Big(\cos\frac{\beta h_i}{2}\Big)^{-1}.$$

Аналогично доказывается, что при $x_i \le x \le x_i + t_i$ справедливо неравенство

$$|f(x) - \widetilde{S}_{2,n}(f,x)| \le \sin\frac{\beta t_i}{2} \max\left\{L, \frac{K}{2\beta^2}\Big(\cos\frac{\beta t_i}{2}\Big)^{-1}\right\}, \tag{2.21}$$

где

$$L = \frac{2}{\beta^2}\sin\frac{\beta(h_{i-1}-t_i)}{2}\Big(\cos\frac{\beta h_{i-1}}{2}\Big)^{-1}.$$

Учитывая, что $t_i \le \dfrac{1}{2}\min\{h_{i-1}, h_i\}$, из (2.18)–(2.21) получаем оценку

$$|f(x) - \widetilde{S}_{2,n}(f,x)| \le 2\beta^{-2}\Big(\cos\frac{\beta H_i}{4}\Big)^{-1}\sin^2\frac{\beta H_i}{4} M_i,$$

где $x_{i-1} + t_{i-1} \le x \le x_i + t_i$ и $H_i = \max\{h_{i-1}, h_i\}$, из которой следует оценка (2.16).

Справедлив следующий аналог неравенства (1.9).

Теорема 4. *Если* $\|f'' + \beta^2 f\|_{L_\infty} \le M$, *то*

$$\big\|\widetilde{S}''_{2,n}(f,x) + \beta^2\widetilde{S}_{2,n}(f,x)\big\|_{L_\infty} \le \max_i \frac{M}{2}\left[\frac{1}{\cos\frac{\beta\delta_i}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta H_i}{2}}{\cos\frac{\beta H}{2}\sin\frac{\beta h}{2}}\right],$$

где $\delta = \min\{h_{i-1}, h_i\}$, $H_i = \max\{h_{i-1}, h_i\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения $\widetilde{S}_{2,n}(f,x)$ следует, что при $x_{i-1} + t_{i-1} \le x \le x_i - t_i$ $\widetilde{S}''_{2,n}(f,x) + \beta^2\widetilde{S}_{2,n}(f,x) \equiv 0$, а при $x_i - t_i \le x \le x_i + t_i$ из (2.2), (2.7) и (2.12) получаем

$$\big|\widetilde{S}''_{2,n}(f,x) + \beta^2\widetilde{S}''_{2,n}(f,x)\big| = |C_i|$$

$$= \frac{\beta}{2\sin\beta t_i}\left|\frac{1}{\sin\beta h_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\sin\beta(x_{i+1}-t)u(t)\,dt + \frac{1}{\sin\beta h_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin\beta(t-x_{i-1})u(t)\,dt\right|,$$

$$u(t) = f''(t) + \beta^2 f(t). \tag{2.22}$$

Из (2.22) получаем

$$|C_i| \le \frac{M}{2\sin\beta t_i}\left[\frac{1-\cos\beta h_i}{\sin\beta h_i}+\frac{1-\cos\beta h_{i-1}}{\sin\beta h_{i-1}}\right]=\frac{M}{2\sin\beta t_i}\left[\frac{\sin\frac{\beta h_i}{2}}{\cos\frac{\beta h_i}{2}}+\frac{\sin\frac{\beta h_{i-1}}{2}}{\cos\frac{\beta h_{i-1}}{2}}\right]. \qquad (2.23)$$

В частности, при $t_i=\dfrac{1}{2}\min\{h_{i-1},h_i\}$ имеем

$$\left|\widetilde{S}''_{2,n}(f,x)+\beta^2\widetilde{S}''_{2,n}(f,x)\right| \le \frac{M}{2}\left[\frac{1}{\cos\frac{\beta\delta_i}{2}}+\frac{\sin\frac{\beta H_i}{2}}{\cos\frac{\beta H_i}{2}\sin\frac{\beta\delta_i}{2}}\right] \qquad (x_i-t_i\le x\le x_i+t_i),$$

где $\delta_i=\min\{h_{i-1},h_i\}$, $H_i=\max\{h_{i-1},h_i\}$. Из последнего неравенства и из (2.22), (2.23) следует теорема 4.

З а м е ч а н и е 2. Последнее утверждение в теореме 1 в тригонометрическом случае не имеет места.

Поступила 12.04.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
3. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 77–88.
4. **Костоусов К.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 3. С. 354–363.
5. **Lyche T., Schumaker L.L.** Local spline approximation methods // J. Approx. Theory, 1975. Vol. 15, no. 4. P. 294–325.
6. **Шевалдина Е.В.** Аппроксимация локальными экспоненциальными сплайнами с произвольными узлами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 391–402.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 517.928.1+517.929.8

ЛОМАНЫЕ ЭЙЛЕРА В СИСТЕМАХ С УСЛОВИЯМИ КАРАТЕОДОРИ[1]

Д. В. Хлопин

В работе рассматриваются ломаные Эйлера в системах с измеримой по времени правой частью. Исследуется сходимость ломаных Эйлера к траекториям системы. Приведенные контрпримеры показывают, что малая мелкость разбиения не гарантирует близости к пучку траекторий. Для всякой функции Каратеодори множество замкнутых подмножеств промежутка времени предлагается оснастить метрикой. Показывается, что в условиях, близких к условиям Каратеодори, сходимость по метрике гарантирует сходимость ломаных Эйлера к пучку решений системы. В качестве следствия показано, что в случае непрерывной правой части и при условии подлинейного роста малая мелкость разбиения гарантирует близость ломаной Эйлера к пучку решений системы.

Введение

Хорошо известно, что в системах с достаточно гладкой (непрерывной по времени, непрерывно дифференцируемой по фазовой переменной) правой частью в случае выполнения условия подлинейного роста и при стремлении мелкости разбиений к нулю ломаные Эйлера, соответствующие этим разбиениям, сходятся к траектории системы. Этот же результат имеет место в случае непрерывной правой части при достаточно общем условии единственности траектории системы (см., например, [5]). Для измеримой правой части было найдено дифференциальное включение, правая часть которого содержит всевозможные пределы последовательностей ломаных Эйлера (см., например, [15]); тот же результат можно получить из [6, теорема 1.1.3].

В данной работе исследуются условия, при которых ломаные Эйлера сходятся к пучку решений системы. Показывается, что в случае измеримой правой части существует такой класс борелевских функций, для которого при любой правой части из этого класса эквивалентности близость мелкости разбиения к нулю не гарантирует близости ломаной Эйлера к пучку решений системы.

Вместо мелкости разбиения по функции Каратеодори и компакту, содержащему все траектории системы, на множестве замкнутых подмножеств отрезка времени I_0 вводится метрика (топология на множестве разбиений также вводилась, например, в [4]). Конструируется последовательность конечных разбиений, сходящаяся к I_0. При этом для непрерывной правой части сходимость разбиений в предложенной метрике к I_0 эквивалентна сходимости мелкости разбиений к нулю.

Показывается, что в условиях, близких к условиям Каратеодори (дополнительно от правой части системы требуется или локальная ограниченность, или равностепенная непрерывность по фазовой переменной), всякая последовательность, сходящаяся (по соответствующей метрике) к I_0, генерирует последовательность ломаных Эйлера, предельные точки которой суть решения исходной системы. При этом также предполагается, что все локальные решения системы продолжимы на весь рассматриваемый промежуток времени. Несколько более слабый результат ранее был анонсирован автором в [9].

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 06-01-00414, 07-01-96088).

1. Общие определения и обозначения

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство, где $m \in \mathbb{N}$. Евклидову норму в $\mathbb{R}^m$ обозначим через $||\cdot||_m$. Кроме того, для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset \mathbb{R}$ через $\lambda(A)$ обозначим меру Лебега этого множества.

Для всякого топологического пространства X и метрического пространства Y под $B(X,Y)$ будем понимать множество всех ограниченных, борелевских (измеримых по Борелю) функций, действующих из топологического пространства X в Y; оснастим это множество топологией равномерной сходимости при помощи нормы $||f||_{B(X,Y)} \triangleq \sup_{x\in X} ||f(x)||_Y$; соответствующее подпространство всех непрерывных функций из $B(X,Y)$ будем обозначать через $C(X,Y)$. Полагаем $C_k(X) \triangleq C(X,\mathbb{R}^k)$, $B_k(X) \triangleq B(X,\mathbb{R}^k)$ для всякого $k \in \mathbb{N}$. Пусть для краткости $C(X) \triangleq C_1(X)$, $B(X) \triangleq B_1(X)$. Далее, всякому метрическому пространству X, точке $x \in X$ и числу $r \in]0,\infty[$ сопоставим замкнутый шар $\mathbb{O}_r(x;X)$ в X радиуса r с центром в x.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

функционирующую в m-мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) на конечном промежутке $I_0 \triangleq [t_0,T]$ ($t_0 < T$) при заданном начальном условии. Здесь t — время ($t \in I_0$), $x \in \mathbb{R}^m$.

На правую часть $f : I_0 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ налагаем следующие условия:

($K1$) для любого $x \in \mathbb{R}^m$ функция $(f(t,x)|t \in I_0)\colon I_0 \mapsto \mathbb{R}^m$ является борелевской на I_0;

($K2$) для каждого $t \in I_0$ функция $(f(t,x)|x \in \mathbb{R}^m)\colon \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ непрерывна;

($K3$) для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ существует суммируемая функция $M_K \in B(I_0,]0,\infty[)$ такая, что

$$||f(t,x)||_m \leq M_K(t) \quad \forall (t,x) \in I_0 \times K;$$

(C) все локальные правосторонние решения системы (1.1) продолжимы до момента T и равномерно ограничены.

В силу этих условий множество Φ всех решений системы, определенных на I_0, непусто; кроме того, $\Phi \subset C(I_0,\mathbb{K}_0)$ для некоторого компакта $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{R}^m$. Заметим, что в условиях ($K1$)–($K3$), которые фактически совпадают с условиями Каратеодори [8], для выполнения (C) достаточно на правую часть системы (1.1) дополнительно наложить условие подлинейного роста [1, теорема 1.4.1].

Пусть $\mathcal{B}(I_0)$ — семейство всех борелевских множеств из I_0. Для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ рассмотрим меру μ_K на $\mathcal{B}(I_0)$, определенную по правилу

$$\mu_K(A) = \int\limits_A M_K(t)dt \quad \forall A \in \mathcal{B}(I_0).$$

Заметим, что эта мера будет счетно-аддитивной [3, лемма 3.6.18]. Введем также для компакта K функцию $\Omega_K \in B([0,\infty[)$, определенную по правилу: для всех $\varepsilon \in [0,\infty[$

$$\Omega_K(\varepsilon) \triangleq \sup_{A\in\mathcal{B}(I_0),\ \lambda(A)\leq\varepsilon} \mu_K(A).$$

Заметим также, что $\Omega_K(0) = 0$, тогда из [3, лемма 3.4.13]

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \Omega_K(\varepsilon) = \Omega_K(0) = 0. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\mathbb{D}$ совокупность всех конечных множеств из I_0, содержащих точки t_0, T. Для всякого $\Delta \in \mathbb{D}$ через $\mathbf{k}(\Delta)$ обозначим мощность множества $\Delta \setminus \{T\}$.

Каждое множество $\Delta \in \mathbb{D}$ можно единственным образом представить в виде кортежа $(t_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{k}(\Delta)}}$, $t_i < t_{i+1}$, а такой кортеж однозначно определяет представление промежутка $[t_0, T[$ в виде объединения непересекающихся промежутков $\{[t_i, t_{i+1}[\mid i \in \overline{0, \mathbf{k}(\Delta) - 1}\}$. В дальнейшем для удобства под *разбиением* понимается как то, так и другое представление. Наибольшую из длин промежутков $[t_i, t_{i+1}[$ назовем *мелкостью разбиения* и обозначим через $\mathbf{d}(\Delta)$.

По заданному разбиению *ломаная Эйлера* строится следующим образом: принимается $y(t_0) = x_0$, далее, $y(t) = y(t_0) + (t - t_0) f(t_0, y(t_0))$ для всякого $t \in]t_0, t_1]$. Пусть построена ломаная вплоть до момента $t_k < T$. Построим ее до момента t_{k+1} для всех $t \in]t_k, t_{k+1}]$ по правилу $y(t) = y(t_k) + (t - t_k) f(t_k, y(t_k))$. В силу конечности $\mathbf{k}(\Delta)$ ломаную можно продолжить до момента $t_{\mathbf{k}(\Delta)+1} = T$ включительно. Итак, для всякого $\Delta \in \mathbb{D}$ построена ломаная Эйлера $\xi_\Delta = y \in C_m(I_0)$.

Каждому конечному разбиению $\Delta \in \mathbb{D}$ сопоставим функцию $\tau^*_\Delta : I_0 \mapsto \Delta$; $\tau^*_\Delta(t)$ есть ближайший к t слева момент из Δ, т.е.

$$\tau^*_\Delta(t) = \max \{\tau \mid \tau \in \Delta, \tau \leq t\} \quad \forall t \in I_0.$$

Тогда $\mathbf{d}(\Delta) = ||\mathbf{t} - \tau^*_\Delta||_{B(I_0)}$ для любого $\Delta \in \mathbb{D}$, где $\mathbf{t}$ — тождественное отображение I_0 на I_0.

Введем для всякого $t \in I_0$ функцию $\bar{f}_t \colon C_m(I_0) \to \mathbb{R}^m$ по правилу

$$\bar{f}_t(x) = f(t, x(t)) \quad \forall (t, x) \in I_0 \times C_m(I_0). \tag{1.3}$$

Теперь ясно, что ломаная Эйлера ξ_Δ и только она есть решение (на I_0) уравнения

$$\dot{y} = \bar{f}_{\tau^*_\Delta(t)}(y), \qquad y(t_0) = x_0. \tag{1.4}$$

2. Примеры

Заметим, что определяющее ломаную Эйлера выражение зависит лишь от значений правой части исходной управляемой системы на множестве меры нуль. С другой стороны, решение системы (1.1) зависит только от класса эквивалентности, содержащего правую часть системы. Возьмем в качестве правой части "плохую" функцию из класса эквивалентности, определяемого "хорошей" функцией $x(t) \equiv 1$.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \chi_I(t), \quad x_0 = 0, \quad t \in [0, 1], \tag{2.1}$$

где χ_I — характеристическая функция множества иррациональных чисел. Легко видеть, что существует точно одна траектория этой системы — траектория $x = (x(t) = t | t \in I_0)$. С другой стороны, если взять последовательность разбиений $(\Delta_i = \{0/i, 1/i, \ldots, i/i\})_{i \in \mathbb{N}}$, то каждая ломаная Эйлера ξ_{Δ_i} будет тождественно равна нулю. Таким образом, их предел существует, но не совпадает с единственной траекторией системы.

Безусловно, такое несоответствие стало возможным за счет специфического выбора функции правой части. Верно ли, что для всякого класса эквивалентных борелевских функций имеется такой представитель, при подстановке которого в правую часть всякая последовательность разбиений со стремящейся к нулю мелкостью генерирует сходящуюся к пучку решений последовательность ломаных Эйлера (т. е. для произвольного $\varepsilon \in]0, \infty[$ найдется такое $\delta \in]0, \infty[$, что для всякого $\Delta \in \mathbb{D}$, $d(\Delta) < \delta$, существует решение $x \in \Phi$ со свойством $||x - \xi_\Delta||_{C_m(I_0)} < \varepsilon$)?

Вообще говоря, нет. Приведенный ниже соответствующий пример создан на основе множества [2, §8.4] ненулевой меры, имеющего структуру, близкую к канторовскому множеству; схожим образом в [7] построено дифференциальное включение, решения которого не всюду плотны в множестве соответствующей релаксационной задачи. Подобный пример был рассмотрен в [10].

Пример 2. Возьмем [2, 9, 10] близкое по структуре к канторовскому замкнутое множество I' ненулевой меры на $[0,1]$ со свойством: $I \not\subset I'$ для всякого отрезка $I \subset I_0$ (нигде не плотное). Зафиксируем теперь произвольную функцию $g \in B([0,1])$ из класса эквивалентности функции $\chi_{I'}$ (характеристической функции множества I'), тогда существует такое множество нулевой меры $N \subset I_0$, что $g(t) = \chi_{I'}(t)$ для всех $t \in I_0 \setminus N$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = g(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Поскольку $I \not\subset I'$ для всякого отрезка $I \subset I_0$, то для любого $j \in \mathbb{N}$ строится (см. [9]) разбиение $\tilde{\Delta}_j \in \mathbb{D}$ со свойствами

$$\tilde{\Delta}_j \cap (I' \cup N) \subset \{t_0, T\}, \quad \mathbf{d}(\tilde{\Delta}_j) < 1/j.$$

Тогда для всех моментов времени t из $\tilde{\Delta}_j \setminus \{t_0, T\}$ имеем $t \notin I' \cup N$, а следовательно, $g(t) = 0$. Таким образом, ломаная Эйлера $(\xi_{\tilde{\Delta}_j})_{j\in\mathbb{N}}$ может иметь отличную от нуля производную лишь на начальном отрезке, вложенном в $[0, 2/j]$. Следовательно, $||\xi_{\tilde{\Delta}_j}||_{C_m(I_0)} \leq g(0)/j$, т. е. ломаные Эйлера сходятся к функции, тождественно равной нулю. Однако система (2.2) имеет единственное решение $x \in C_m(I_0)$, определенное по правилу: $x(t) = \lambda(I' \cap [t_0, t[)\ \forall t \in I_0$. Поскольку $x(T) = \lambda(I') > 0$, то это решение не есть тождественный нуль, следовательно, такие ломаные Эйлера при стремлении мелкости разбиений к нулю не сходятся к единственной траектории системы.

Таким образом, для любой функции, эквивалентной $\chi_{I'}$, найдется последовательность разбиений, генерирующая сходящуюся последовательность ломаных Эйлера, предел которой не совпадает с единственной траекторией системы. Более того, заметим, что $I_0 \setminus I'$ открыто в I_0, следовательно, для всех $k \in \mathbb{N}$ во все моменты из $\tilde{\Delta}_k \setminus \{t_0, T\}$ отображение $\chi_{I'}$ непрерывно во все моменты времени из $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{\Delta}_k \setminus \{t_0, T\}$ правая часть непрерывна по времени. Таким образом, при выборе последовательности разбиений недостаточно выбирать моменты времени только среди точек Лебега (или даже точек непрерывности) правой части.

Приведенные примеры показывают существование систем, в которых сколь угодно малой мелкости разбиений $\mathbf{d}(\Delta)$ недостаточно для приближения ломаных Эйлера к какому-либо решению системы при любой правой части, эквивалентной правой части исходной системы. Следовательно, в системах с измеримой правой частью вместо $\mathbf{d}(\Delta)$ имеет смысл рассматривать иную меру регулярности разбиения.

3. Введение топологии

Пусть $\mathcal{D}$ — семейство всех замкнутых подмножеств множества I_0, содержащих точки t_0, T. В частности, в $\mathcal{D}$ входят само множество I_0 и все конечные разбиения — множества из $\mathbb{D}$. Будем называть множества из $\mathcal{D}$ множествами переключений.

Каждому множеству переключений $\Delta \in \mathcal{D}$ сопоставим функцию $\tau^*_\Delta : I_0 \mapsto I_0$ по правилу

$$\tau^*_\Delta(t) = \max\{\tau \mid \tau \in \Delta, \tau \leq t\} \quad \forall t \in I_0.$$

Тогда для любого $\Delta \in \mathcal{D}$ можно определить

$$\mathbf{d}(\Delta) = ||\tau^*_{I_0} - \tau^*_\Delta||_{B(I_0)} = ||\mathbf{t} - \tau^*_\Delta||_{B(I_0)}.$$

Заметим, что эти определения совпадают для $\Delta \in \mathbb{D}$ с введенными ранее.

Зафиксируем теперь некоторое компактное в $C(I_0, \mathbb{R}^m)$ множество Ψ. Отметим, что в силу условий $(K1)$, $(K2)$ для всякого $x \in \Psi$ функция $\bar{f}_t(x)$ борелевская, а отображение $\bar{f}_t = (\bar{f}_t(x)| \, x \in \Psi)$ непрерывно, т. е. $\bar{f}_t \in C_m(\Psi)$ для всякого $t \in I_0$.

Для компакта Ψ и функции Каратеодори f определим на $\mathcal{D}$ метрику $\varrho_\Psi(\Delta_1, \Delta_2)$ по правилу: для любых множеств переключений $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}$

$$\varrho_\Psi(\Delta_1, \Delta_2) \stackrel{\triangle}{=} \max\big\{||\tau^*_{\Delta_1} - \tau^*_{\Delta_2}||_{B(I_0)}, \varrho^*_\Psi(\Delta_1, \Delta_2)\big\}, \tag{3.1}$$

где

$$\varrho^*_\Psi(\Delta_1, \Delta_2) \stackrel{\triangle}{=} \int\limits_{I_0} ||\bar{f}_{\tau^*_{\Delta_1}(t)} - \bar{f}_{\tau^*_{\Delta_2}(t)}||_{C_m(\Psi)} dt. \tag{3.2}$$

Непосредственная проверка показывает, что для ϱ_Ψ действительно выполнены все свойства метрики.

Обозначим для любого $r \in]0, \infty[$ через $\mathcal{D}_r$ замкнутый шар в $\mathcal{D}$ с радиусом r и центром I_0. Аналогично, пусть $\mathbb{D}_r \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{D}_r \cap \mathbb{D}$.

Теорема 1. *В условиях $(K1)$–$(K3)$ для всякого компакта $\Psi \in C_m(I_0)$ множество $\mathbb{D}_r$ непусто для любого $r \in]0, \infty[$.*

Доказательство. Из равномерной ограниченности Ψ следует, что можно найти компакт $\mathbb{K}$ такой, что $x(t) \in \mathbb{K}$ для любых $(t, x) \in I_0 \times \Psi$. Зафиксируем соответствующую этому компакту в силу свойства $(K3)$ функцию $M_\mathbb{K} \in B(I_0)$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in]0, \infty[$. Поскольку I_0 — компакт, а Ψ (как подмножество $C_m(I_0)$) — пространство со счетной базой, то по свойству Скорца Драгони [11–13] для функции Каратеодори $\bar{f} : I_0 \times \Psi \to \mathbb{R}^m$ для любого $\varepsilon \in]0, \infty[$ существует такое замкнутое множество $\bar{F} \subset I_0$, что

$$\lambda(I_0 \setminus \bar{F}) < \varepsilon, \quad \bar{f}|_{\bar{F} \times \Psi} \in C_m(\bar{F} \times \Psi). \tag{3.3}$$

Зафиксируем замкнутое множество $\bar{F}$. Теперь определим множество $F \stackrel{\triangle}{=} \{t_0, T\} \cup \bar{F}$. Заметим, что $F \in \mathcal{D}$. Отметим далее, что в силу (3.3) функция $\bar{f}_{\bar{F} \times \Psi}$ непрерывна. Кроме того, непрерывны $\bar{f}_{\{t_0\} \times \Psi}$ и $\bar{f}_{\{T\} \times \Psi}$ как функции Каратеодори. Если функция непрерывна на конечном числе замкнутых множеств, то она непрерывна и на их объединении, в частности на $F \times \Psi = (\{t_0, T\} \cup \bar{F}) \times \Psi$. При этом

$$\lambda(I_0 \setminus F) = \lambda(I_0 \setminus \bar{F}) < \varepsilon, \quad (\bar{f}_t(x) | (t, x) \in F \times \Psi) \in C_m(F \times \Psi). \tag{3.4}$$

Введем модуль непрерывности $\bar{f}$ на $F \times \Psi$:

$$\bar{\omega}_F(\delta) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{t', t'' \in F, \, |t' - t''| \leq \delta} \; \sup_{z_1, z_2 \in \Psi, \, ||z_1 - z_2||_{C_m(I_0)} \leq \delta} ||\bar{f}_{t'}(z_1) - \bar{f}_{t''}(z_2)||_{C_m(\Psi)} \quad \forall \delta \in]0, \infty[. \tag{3.5}$$

Определим $R_0 = \max\{||\bar{f}_{t_0}||_{C_m(\Psi)}, ||\bar{f}_T||_{C_m(\Psi)}\}$. Зафиксируем число $R \in]R_0, \infty[$. Определим

$$I \stackrel{\triangle}{=} \Big\{t \in I_0 \mid ||\bar{f}_t||_{C_m(\Psi)} > R\Big\}.$$

По выбору R_0 имеем $t_0, T \notin I$.

Зафиксируем $\delta \in]0, \infty[$. Отметим, что поскольку $\bar{f}$ непрерывна на $F \times \Psi$, множество $F \setminus I$ замкнуто. Определим функцию $\theta^* \in B(I_0, F \setminus I)$ по правилу

$$\theta^*(t) = \min\{T, \min\{\eta \in F \setminus I \mid \eta \geq t + \delta\}\}.$$

Функция определена корректно, поскольку пересечение замкнутых множеств также является замкнутым, следовательно, содержит свою нижнюю грань.

Примем $\eta_0 = t_0 \in F \setminus I$, а далее для всякого $l \in \mathbb{N}$ рекуррентно определим

$$\eta_l = \theta^*(\eta_{l-1}) \in F \setminus I.$$

Получим последовательность $(\eta_l)_{l\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Заметим, что $\theta^*(t) \geq t+\delta$ для всякого $t \in [t_0, T[$. Отсюда, если $\eta_l < T$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, то $\eta_k < T$ для всех $k \in \overline{0,l}$, следовательно, $t_0 + l\delta \leq \eta_l < T$, откуда $l < (t-t_0)/\delta$. Таким образом, при $l > (t-t_0)/\delta$ имеет место $\eta_l \geq T$, т. е. $\eta_l = T$. Пусть $k = \min\{l \in \mathbb{N} | \eta_l = T\}$. Определим, наконец,

$$\Delta \stackrel{\triangle}{=} \{\eta_l \in I_0 \,|\, l \in \overline{0,k}\} \subset F \setminus I.$$

Отметим, что по построению это множество конечно и содержит моменты $t_0 = \eta_0$, $T = \eta_k$. Отсюда $\Delta \in \mathbb{D}$. Далее, точки из Δ по построению делят I_0 на k полуинтервалов вида $[\eta_l, \eta_{l+1}[$. В частности,

$$[t_0, T[= \bigcup_{l\in\overline{0,k-1}} [\eta_l, \eta_{l+1}[= \bigcup_{l\in\overline{0,k-1}} [\eta_l, \theta^*(\eta_l)[.$$

Более того, из определения θ^* следует, что для всех $l \in \overline{0,k-1}$

$$[\eta_l, \eta_{l+1}[\cap (F \setminus I) \subset [\eta_l, \eta_l + \delta[. \tag{3.6}$$

Тогда если $t \in F \setminus (I \cup \{T\})$, то найдется $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ со свойством

$$t \in [\eta_l, \eta_{l+1}[\cap (F \setminus I) = [\tau^*_\Delta(t), \theta^*(\tau^*_\Delta(t))[\cap (F \setminus I).$$

Теперь из (3.6) заключаем, что

$$|t - \tau^*_\Delta(t)| < \delta \qquad \forall t \in F \setminus I.$$

Поскольку $\tau^*(t) \in \Delta \subset F \setminus I$ для любого $t \in I_0$, то

$$\int\limits_{F\setminus I} ||\bar f_{\tau^*_\Delta(t)} - \bar f_t||_{C_m(\Psi)} dt \stackrel{(3.5)}{\leq} \int\limits_{F\setminus I} \bar\omega_F\big(|\tau^*_\Delta(t) - t|\big) dt \leq \int\limits_{I_0} \bar\omega_F(\delta) dt = (T-t_0)\bar\omega_F(\delta).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{F\setminus I} ||\bar f_{\tau^*_\Delta(t)} - \bar f_t||_{C_m(\Psi)} dt \leq (T-t_0)\bar\omega_F(\delta). \tag{3.7}$$

Далее, для всех $l \in \overline{0,k-1}$ из (3.6) имеем $\eta_{l+1} - \eta_l \leq \delta + \lambda\big([\eta_l, \eta_{l+1}[\setminus (F \setminus I)\big) \leq \delta + \lambda(I_0 \setminus F) + \lambda(I)$. Отсюда и из (3.4)

$$\mathbf{d}(\Delta) = ||\mathbf{t} - \tau^*_\Delta||_{B(I_0)} < \delta + \varepsilon + \lambda(I). \tag{3.8}$$

В силу $\Delta \cap I = \varnothing$ имеем следующую оценку:

$$\int\limits_{I_0\setminus F} ||\bar f_{\tau^*_\Delta(t)} - \bar f_t||_{C_m(\Psi)} dt \leq \int\limits_{I_0\setminus F} (||\bar f_{\tau^*_\Delta(t)}||_{C_m(\Psi)} + ||\bar f_t||_{C_m(\Psi)}) dt \leq \int\limits_{I_0\setminus F} (R + M_{\mathbb{K}}(t)) dt.$$

Теперь из (3.4) получим

$$\int\limits_{I_0\setminus F} ||\bar f_{\tau^*_\Delta(t)} - \bar f_t||_{C_m(\Psi)} dt \leq R\varepsilon + \Omega_{\mathbb{K}}(\varepsilon). \tag{3.9}$$

Далее,

$$\int\limits_{F\cap I} ||\bar{f}_{\tau^*_\Delta(t)} - \bar{f}_t||_{C_m(\Psi)}dt \le \int\limits_{I} (||\bar{f}_{\tau^*_\Delta(t)}||_{C_m(\Psi)} + ||\bar{f}_t||_{C_m(\Psi)})dt$$

$$\le \int\limits_{I} (R + M_{\mathbb{K}}(t))dt \le \int\limits_{I} (||\bar{f}_t||_{C_m(\Psi)} + M_{\mathbb{K}}(t))dt \le 2\int\limits_{I} M_{\mathbb{K}}(t)dt = 2\mu_{\mathbb{K}}(I).$$

Таким образом, получаем последнюю оценку

$$\int\limits_{F\cap I} ||\bar{f}_{\tau^*_\Delta(t)} - \bar{f}_t||_{C_m(\Psi)}dt \le 2\Omega_{\mathbb{K}}(\lambda(I)). \tag{3.10}$$

Складывая (3.7), (3.9) и (3.10), имеем

$$\int\limits_{I_0} ||\bar{f}_{\tau^*_\Delta(t)} - \bar{f}_t||_{C_m(\Psi)}dt \le 2\Omega_{\mathbb{K}}(\lambda(I)) + R\varepsilon + \Omega_{\mathbb{K}}(\varepsilon) + (T - t_0)\bar{\omega}_F(\delta).$$

Теперь для всякого $N \in \mathbb{N},\ N > R_0$, рассмотрим $R_N = N,\ \varepsilon_N = \dfrac{1}{N^2}$. Зафиксируем соответствующее множество $F_N = F$. Тогда в силу равномерной непрерывности $\bar{f}$ на $F_N \times \Psi$ найдется такое число $\delta_N \in]0, \varepsilon_N]$, что $\bar{\omega}_{F_N}(\delta_N) < \varepsilon_N$. Зафиксируем такое δ_N и построим соответствующее этим $F = F_N$, $\varepsilon = \varepsilon_N$, $\delta = \delta_N$ разбиение $\Delta = \Delta_N \in \mathbb{D}$. Тогда

$$\int\limits_{I_0} ||\bar{f}_{\tau^*_{\Delta_N}(t)} - \bar{f}_t||_{C_m(\Psi)}dt \le 2\Omega_{\mathbb{K}}(\lambda(I_N)) + \frac{1}{N} + \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{1}{N^2}\right) + \frac{T - t_0}{N^2}. \tag{3.11}$$

Теперь в силу (1.2) для того, чтобы показать, что правая часть (3.11) стремится к нулю при $N \to \infty$, достаточно установить, что $\lim_{N\to\infty} \lambda(I_N) = 0$. Но в силу счетной аддитивности λ, а также монотонности всего семейства $(I_N)_{N\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{N\to\infty} \lambda(I_N) \le \lim_{N\to\infty} \lambda\Big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \{t \mid M_K(t) > N\}\Big) = \lambda\Big(\{t \mid M_K(t) = \infty\}\Big) = 0.$$

Итак, правая часть (3.11) стремится к нулю при $N \to \infty$, но это же имеет место и для правой части (3.8) в силу свойства $\delta_N \le \varepsilon_N = \dfrac{1}{N^2}$, следовательно, для всякого $r \in]0, \infty[$ найдется такое $N > R_0$, что правые части (3.8) и (3.11) не превосходят r, а следовательно, и построенное для такого N разбиение $\Delta_N \in \mathbb{D}$ обладает свойством $\rho_\Psi(\Delta_N, I_0) \le r$, т. е. $\Delta_N \in \mathbb{D}_r$. □

Следствие 1. *Если функция f непрерывна на $I_0 \times \mathbb{R}^m$, тогда для любого компакта $\Psi \subset C_m(I_0)$, для любой последовательности $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_i) = 0 \Leftrightarrow \lim_{i\to\infty} \varrho_\Psi(\Delta_i, I_0) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что поскольку отображение $\bar{f}$ непрерывно на $I_0 \times C_m(I_0)$, то для любого $\varepsilon \in]0, \infty[$ в качестве F можно взять I_0. Возьмем произвольное $\Delta \in \mathcal{D}$. Тогда для любого компакта Ψ

$$\varrho^*_\Psi(\Delta, I_0) = \int\limits_{I_0} ||\bar{f}_{\tau^*_\Delta(t)} - \bar{f}_{\tau^*_{I_0}(t)}||_{C_m(\Psi)}dt \le \int\limits_{I_0} \bar{\omega}_{I_0}(\mathbf{d}(\Delta))dt.$$

Следовательно, в силу равномерной непрерывности $\bar{f}$ на компакте $I_0 \times \Psi$ для любой последовательности $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_i) = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{i\to\infty} \varrho^*_\Psi(\Delta_i, I_0) = 0.$$

Остальное непосредственно следует из определения $\varrho_\Psi(\Delta, I_0)$ как максимального из чисел $\varrho^*_\Psi(\Delta, I_0)$ и $\mathbf{d}(\Delta)$ (см. (3.1)). □

4. Основные теоремы

4.1. Случай ограниченной правой части

Докажем сходимость ломаных Эйлера ξ_{Δ_i} к решению системы при условии $\varrho_\Psi(\Delta_i, I_0) \to 0$. Сначала проведем доказательство для систем с ограниченной правой частью, т. е. при условии

$(K3')$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ существует такое число $M_K \in]0,\infty[$, что

$$||f(t,x)||_m \leq M_K \quad \forall (t,x) \in I_0 \times K.$$

Ход доказательства: построение компактов $\mathbb{K} \supset \mathbb{K}_0$ и $\Psi \subset C(I_0, \mathbb{K})$; оценка (лемма 1 ниже) момента $\theta(\Delta)$, в который график ломаной ξ_Δ покидает компакт $I_0 \times \mathbb{K}$; доказательство соотношения (4.2) (сходимость графиков ломаных Эйлера к графику решения внутри этого компакта); вывод сходимости $\theta(\Delta)$ к T и, наконец, доказательство того, что $\theta(\Delta) = T$ при достаточно малых $\varrho^*_\Psi(\Delta)$.

Теорема 2. *При выполнении условий $(K1), (K2), (K3'), (C)$ можно подобрать такой компакт $\Psi \subset C_m(I_0)$, что для любого $\varepsilon \in]0,\infty[$ найдется такое $d \in]0,\infty[$, что для всякого $\Delta \in \mathbb{D}$, $\varrho_\Psi(\Delta, I_0) \leq d$, существует некоторое решение $x \in \Phi$ со свойством*

$$||x - \xi_\Delta||_{C_m(I_0)} < \varepsilon.$$

При этом существует такое число $\delta_0 \in]0,\infty[$, что если $\varrho_\Psi(\Delta, I_0) \leq \delta_0$ для $\Delta \in \mathbb{D}$, то ломаная Эйлера $\xi_\Delta \in C_m(I_0)$ принадлежит Ψ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем некоторое $\varkappa \in]0,\infty[$ и компакт $\mathbb{K}_0$ из условия (C). Теперь определим компакт

$$\mathbb{K} \triangleq \bigcup_{x \in \mathbb{K}_0} \mathbb{O}_\varkappa(x; \mathbb{R}^m).$$

Тогда для всякой траектории $x \in \Phi$ и всякого момента времени $t \in I_0$ имеем $\mathbb{O}_\varkappa(x(t); \mathbb{R}^m) \subset \mathbb{K}$. Обозначим через $\partial\mathbb{K}$ границу множества $\mathbb{K}$. По условию $(K3')$ функция f ограничена на $I_0 \times \mathbb{K}$ некоторой константой $M = M_\mathbb{K}$; можно считать, что $M \in]\varkappa(T - t_0), \infty[$.

Введем также для всех $\theta \in [t_0, T]$

$$\Phi|_\theta \triangleq \Big\{ x|_{[t_0,\theta]} \in C_m\big([t_0,\theta]\big) \,\Big|\, x \in \Phi \Big\},$$

$$\Psi_\theta \triangleq \Big\{ z \in C\big([t_0,\theta], \mathbb{K}\big) \,\Big|\, \exists \dot z \in B_m\big([t_0,\theta]\big), ||\dot z||_{B_m([t_0,\theta])} \leq M \Big\}.$$

Определим, наконец, компакт Ψ равенством $\Psi = \Psi_T$. Построим метрику ϱ_Ψ по компакту Ψ и правой части системы (1.1).

Рассмотрим произвольное $\Delta \in \mathbb{D}$. Пусть

$$\theta(\Delta) \triangleq \min(\{T\} \cup \{t \in I_0 | \xi_\Delta(t) \in \partial\mathbb{K}\}).$$

Заметим, что $\theta(\Delta) > t_0$. Далее всюду для упрощения обозначений под ξ_Δ будем понимать как собственно $\xi_\Delta \in C_m(I_0)$, так и сужение $\xi_\Delta|_{[t_0,\theta(\Delta)]} \in C([t_0, \theta(\Delta)])$. Отметим, что в силу определения или $\theta(\Delta) = T$, или $\xi_\Delta(\theta(\Delta)) \in \partial\mathbb{K}$; кроме того, $\xi_\Delta(t) \in \mathbb{K}$ для любого $t \in [t_0, \theta(\Delta)]$. Тогда $\|f(\tau^*_\Delta(t), \xi_\Delta(\tau^*_\Delta(t)))\| \leq M$ и в силу (1.4) $\xi_\Delta \in \Psi_{\theta(\Delta)}$.

Лемма 1. *Пусть $x^0 \in \mathbb{K}_0$, $\Delta \in \mathbb{D}$, $\eta \in [t_0, \theta(\Delta)]$. Тогда*

$$\theta(\Delta) \geq \min\Big\{ T, \eta + \frac{\varkappa - ||\xi_\Delta(\eta) - x^0||_m}{M} \Big\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если $\theta(\Delta) = T$, то все доказано, в противном случае $\xi_\Delta(\theta(\Delta)) \in \partial\mathbb{K}$, следовательно, $||\xi_\Delta(\theta(\Delta)) - x^0||_m \geq \varkappa$, т. е.

$$||\xi_\Delta(\theta(\Delta)) - \xi_\Delta(\eta)||_m + ||\xi_\Delta(\eta) - x^0||_m \geq \varkappa.$$

Но поскольку $\xi_\Delta \in \Psi_{\theta(\Delta)}$, то

$$||\xi_\Delta(\theta(\Delta)) - \xi_\Delta(\eta)||_m \leq (\theta(\Delta) - \eta)||f||_{I_0 \times \mathbb{K}} \leq M(\theta(\Delta) - \eta).$$

Тогда $M(\theta(\Delta) - \eta) \geq ||\xi_\Delta(\theta(\Delta)) - \xi_\Delta(\eta)||_m \geq \varkappa - ||\xi_\Delta(\eta) - x^0||_m$. □

Продолжим доказательство теоремы. Определим

$$\theta_0 \overset{\triangle}{=} \lim_{\delta \to +0} \inf_{\Delta \in \mathbb{D}_\delta} \theta(\Delta).$$

Для каждого $\Delta \in \mathbb{D}$ при $\eta = t_0$, $x^0 = x_0 = \xi_\Delta(\eta)$ имеем в силу леммы 1

$$\theta(\Delta) \geq \min\left\{t_0 + \frac{\varkappa}{M}, T\right\} \qquad \forall \Delta \in \mathbb{D}.$$

Тогда из определения θ_0 и $M \in]\varkappa(T - t_0), \infty[$ следует

$$T \geq \theta_0 \geq \theta(\Delta) \geq t_0 + \frac{\varkappa}{M}.$$

Наряду с θ_0 введем теперь

$$\Theta \overset{\triangle}{=} \left\{\eta \in]t_0, \theta_0] \;\middle|\; \exists \delta(\eta) \in]0, \infty[\ \forall \Delta \in \mathbb{D}_{\delta(\eta)}\ \theta(\Delta) \geq \eta\right\}.$$

Заметим, что в силу определения θ_0 имеет место вложение $]t_0, \theta_0[\subset \Theta$.

Теперь для всех $\eta \in \Theta,\ d \in]0, \delta(\eta)]$ определим

$$r_\eta(d) \overset{\triangle}{=} \sup_{\Delta \in \mathbb{D}_d} \inf_{x \in \Phi|_\eta} ||\xi_\Delta|_{[t_0,\eta]} - x||_{C_m([t_0,\eta])}. \tag{4.1}$$

Покажем, что

$$\lim_{d \to 0} r_\eta(d) = 0 \quad \forall \eta \in \Theta. \tag{4.2}$$

Допустим противное. Тогда найдутся число $r_0 > 0$ и последовательность $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{D}_{1/i}$ такие, что $\theta(\Delta_i) \geq \eta$ для всех $x \in \Phi|_\eta,\ i \in \mathbb{N}$ и $||\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta]} - x||_{C_m([t_0,\eta])} > r_0$. Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $(\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta]})_{i\in\mathbb{N}} \in \Psi_\eta^{\mathbb{N}}$ сходится к некоторому $y \in \Psi_\eta$. Тогда

$$||y - x||_{C_m([t_0,\eta])} \geq r_0 > 0 \ \ \forall x \in \Phi|_\eta. \tag{4.3}$$

Введем $z \in C_m([t_0, \eta])$ по правилу

$$z(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0,t[} f(t, y(t))dt \qquad \forall t \in [t_0, \eta].$$

Почти всюду на $[t_0, \eta]$ выполняется равенство $\dot{\xi}_{\Delta_i}(t) = \bar{f}_{\tau^*_{\Delta_i}(t)}(\xi_{\Delta_i})$, тогда для всех $t \in [t_0, \eta]$

$$||z(t) - \xi_{\Delta_i}(t)||_m \leq \int\limits_{[t_0,t[} ||\bar{f}_{\tau^*_{\Delta_i}(t)}(\xi_{\Delta_i}) - \bar{f}_t(y)||_m dt$$

$$\leq \int\limits_{[t_0,t[} ||\bar{f}_{\tau^*_{\Delta_i}(t)}(\xi_{\Delta_i}) - \bar{f}_t(\xi_{\Delta_i})||_m dt + \int\limits_{[t_0,t[} ||\bar{f}_t(\xi_{\Delta_i}) - \bar{f}_t(y)||_m dt$$

$$\leq \varrho^*_\Psi(\Delta_i, I_0) + \int\limits_{[t_0,t[} ||\bar{f}_t(\xi_{\Delta_i}) - \bar{f}_t(y)||_m dt. \tag{4.4}$$

Теперь, как и в начале доказательства теоремы 1, заметим, что по свойству Скорца Драгони [13] для всякого $\varepsilon \in]0,\infty[$ найдется такое замкнутое множество $F_\varepsilon \subset I_0$, что $\bar{f}|_{F_\varepsilon\times\Psi} \in C_m(F_\varepsilon \times \Psi)$ и $\lambda(I_0 \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Зафиксируем такое число ε и соответствующее ему множество F_ε. Введем по правилу (3.5) для всех $\delta \in]0,\infty[$ модуль непрерывности $\bar{\omega}_{F_\varepsilon}(\delta)$.

Продолжим оценку (4.4):

$$||z(t) - \xi_{\Delta_i}(t)||_m \leq \varrho^*_\Psi(\Delta_i, I_0) + \int\limits_{[t_0,t[} ||\bar{f}_t(\xi_{\Delta_i}) - \bar{f}_t(y)||_m dt$$

$$\leq \varrho^*_\Psi(\Delta_i, I_0) + \int\limits_{[t_0,t[\cap F_\varepsilon} ||\bar{f}_t(\xi_{\Delta_i}) - \bar{f}_t(y)||_m dt + \int\limits_{[t_0,t[\setminus F_\varepsilon} ||\bar{f}_t(\xi_{\Delta_i}) - \bar{f}_t(y)||_m dt$$

$$\leq \varrho^*_\Psi(\Delta_i, I_0) + \int\limits_{F_\varepsilon} \bar{\omega}_{F_\varepsilon}\big(||\xi_{\Delta_i} - y||_{C_m(\Psi)}\big)dt + \int\limits_{I_0\setminus F_\varepsilon} 2M dt$$

$$\leq \varrho^*_\Psi(\Delta_i, I_0) + (T - t_0)\bar{\omega}_{F_\varepsilon}\big(||\xi_{\Delta_i} - y||_{C_m(\Psi)}\big) + 2M\varepsilon. \tag{4.5}$$

Отметим, что в силу равномерной непрерывности $\bar{f}$ на компакте $F_\varepsilon \times \Psi$ имеем $\lim_{\delta\to+0} \bar{\omega}_{F_\varepsilon}(\delta) = 0$ для всякого $\varepsilon \in]0,\infty[$. Кроме того, $\Delta_i \in \mathbb{D}_{1/i}$ и $(\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta]})_{i\in\mathbb{N}} \to y$, тогда, переходя в (4.5) к пределу при $i \to \infty$, имеем

$$\lim_{i\to\infty} ||\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta]} - z||_{C_m([t_0,\eta])} \leq \lim_{i\to\infty} \Big(1/i + (T - t_0)\bar{\omega}_{F_\varepsilon}\big(||\xi_{\Delta_i} - y||_m\big) + 2M\varepsilon\Big) = 2M\varepsilon.$$

Поскольку эта оценка верна для всех $\varepsilon \in]0,\infty[$, окончательно получаем, что предел равен нулю. Следовательно, $(\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta]})_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к z, отсюда $z = y$, т. е. y является решением (1.1) на отрезке $[t_0,\eta]$. Но тогда оно продолжимо (в силу (C)) до некоторого решения $x \in \Phi$, т. е. $y = x|_{[t_0,\eta]} \in \Phi|_\eta$. Это противоречит (4.3) и завершает доказательство (4.2).

Определим $\eta_1 \overset{\triangle}{=} \theta_0 - \dfrac{\varkappa}{2M} \in]t_0, \theta_0[\subset \Theta$. В силу определения θ_0 найдется такая последовательность $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{D}_{1/i}$, что $\lim_{i\to\infty} \theta(\Delta_i) = \theta_0$, и для любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\theta(\Delta_i) > \eta_1$. Кроме того (при необходимости выбирая подпоследовательность), можно считать, что последовательность $(\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta_1]})_{i\in\mathbb{N}} \in \Psi^{\mathbb{N}}_{\eta_1}$ сходится к $x \in \Psi_{\eta_1}$. В силу замкнутости $\Phi|_{\eta_1}$ [8, теорема 1.1.5] из (4.2) следует, что $x \in \Phi|_{\eta_1}$.

Тогда $\lim_{i\to\infty} \xi_{\Delta_i}(\eta_1) = x(\eta_1) \in \mathbb{K}_0$. По лемме 1 имеем

$$\theta(\Delta_i) \geq \min\Big\{T, \eta_1 + \frac{\varkappa - ||\xi_{\Delta_i}(\eta_1) - x(\eta_1)||_m}{M}\Big\}.$$

Переходя к пределу, получим

$$\theta_0 = \lim_{i\to\infty} \theta(\Delta_i) \geq \min\Big\{\eta_1 + \frac{\varkappa}{M}, T\Big\} = \min\Big\{\theta_0 + \frac{\varkappa}{2M}, T\Big\},$$

откуда

$$\theta_0 = T.$$

Покажем, что $T \in \Theta$, т. е. найдется такое достаточно малое число $\delta_0 = \delta(T) \in]0,\infty[$, что $\theta(\Delta) = \theta_0 = T$ для всех $\Delta \in \mathbb{D}_{\delta_0}$. В противном случае найдется такая последовательность $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{D}_{1/i}$, что последовательность $(\theta(\Delta_i))_{i\in\mathbb{N}}$ строго возрастает и сходится к $\theta_0 = T$.

Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\theta(\Delta_k) < \theta(\Delta_{k+1}) = \inf_{i \in \overline{k+1,\infty}} \theta(\Delta_i) < T$, т. е. $\theta(\Delta_k) \in [t_0, T[\subset \Theta$, а следовательно, для любых $i \in \overline{k+1,\infty}$ существует такое $x_{i,k} \in \Phi$, что

$$||x_{i,k}(\theta(\Delta_k)) - \xi_{\Delta_i}(\theta(\Delta_k))||_m \overset{(4.1)}{\leq} r_{\theta(\Delta_k)}(\varrho_\Psi(\Delta_i, I_0)) \leq r_{\theta(\Delta_k)}(1/i).$$

Для всякого $i \in \overline{k+1,\infty}$ из леммы 1 при $x^0 = x_{i,k}(\theta(\Delta_k)) \in \mathbb{K}_0$, $\eta = \theta(\Delta_k)$, $\Delta = \Delta_i$ ввиду $\theta(\Delta_i) < T$ имеем

$$\theta(\Delta_i) \geq \theta(\Delta_k) + \frac{\varkappa - r_{\theta(\Delta_k)}(1/i)}{M}.$$

При всяком фиксированном $k \in \mathbb{N}$ в силу (4.2) $r_{\theta(\Delta_k)}(1/i) \to 0$ при $i \to \infty$, тогда, переходя к пределу при $i \to \infty$, из $\theta(\Delta_k) < T$ получаем

$$T \geq \theta(\Delta_k) + \frac{\varkappa}{M}.$$

Отсюда, переходя к пределу уже при $k \to \infty$, имеем $T \geq T + \dfrac{\varkappa}{M}$. Полученное противоречие показывает, что искомое δ_0 существует, а для всех $\Delta \in \mathbb{D}_{\delta_0}$ выполняются соотношения $\theta(\Delta) = \theta_0 = T$ и $\xi_\Delta \in \Psi_T = \Psi$.

Таким образом, $T \in \Theta$, тогда, подставляя $\eta = T$ в (4.2), находим для всех $\varepsilon \in]0, \infty[$ такое $d \in]0, \infty[$, что для любых $\Delta \in \mathbb{D}_d$ существует $x \in \Phi$ со свойством $||x - \xi_\Delta||_{C_m(I_0)} < \varepsilon$, что и доказывает теорему. □

Следствие 2. *Если для системы* (1.1) *правая часть непрерывна во всей области определения и удовлетворяет условию подлинейного роста, то существует такое* $\delta_0 \in]0, \infty[$*, что для любого* $\varepsilon \in]0, \infty[$ *при некотором* $d \in]0, \delta_0[$ *для всякого* $\Delta \in \mathbb{D}$ *со свойством* $\mathbf{d}(\Delta) \leq d$ *найдется такое* $x \in \Phi$*, что*

$$||x - \xi_\Delta||_{C_m(I_0)} < \varepsilon.$$

Для доказательства достаточно применить следствие 1 и теорему 2.

4.2. Случай неограниченной правой части

Рассмотрим теперь случай, когда правая часть уравнения динамики не является ограниченной. Основное отличие этого случая от случая ограниченной правой части состоит в том, что последовательность ломаных Эйлера, вообще говоря, нельзя погрузить в компакт из $C_m(I_0)$. В силу этого необходимо дополнительно гарантировать (лемма 3) существование предельных точек у последовательности ломаных Эйлера, приходится также иным способом получать оценки типа (4.4), (4.5). Для решения первой трудности при построении метрики ϱ_Ψ исходная система (1.1) дополняется еще двумя скалярными функциями, соответственно компакт Ψ конструируется не в $C_m(I_0)$, а в $C_{m+2}(I_0)$. Для обхода второй трудности условия Каратеодори дополняются еще одним условием:

$(K4)$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ существуют функция $\omega_K \in B([0, \infty[, [0, \infty[)$ и суммируемая функция $L_K \in B(I_0,]0, \infty[)$ такие, что $\lim_{r \to +0} \omega_K(r) = 0$ и для любых $t \in I_0$, $r \in [0, \infty[$

$$||f(t,x) - f(t,y)||_m \leq L_K(t)\omega_K(r) \qquad \forall x, y \in K,\ ||x - y||_m \leq r.$$

Отметим, что условия типа $(K4)$ вводят для непрерывной зависимости решений системы от правой части [8, теорема 1.1.7], они необходимы даже в случае ограниченной правой части.

Теорема 3. *При условиях* $(K1),(K2),(K3),(K4),(C)$ *для некоторого компакта* $\Psi \subset C_{m+2}(I_0)$ *и для любого* $\varepsilon \in]0,\infty[$ *существует такое* $d \in]0,\infty[$, *что для всякого* $\Delta \in \mathbb{D}$, $\varrho_\Psi(\Delta, I_0) \le d$, *найдется* $x \in \Phi$ *со свойством*

$$||x - \xi_\Delta||_{C_m(I_0)} < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем некоторое $\varkappa \in]0,\infty[$ и компакт $\mathbb{K}_0$ из условия (C). Теперь определим

$$\mathbb{K} \overset{\triangle}{=} \bigcup_{x \in \mathbb{K}_0} \mathbb{O}_\varkappa(x; \mathbb{R}^m).$$

Тогда для всякой траектории $x \in \Phi$ и всякого момента времени $t \in I_0$ имеем $\mathbb{O}_\varkappa(x(t); \mathbb{R}^m) \subset \mathbb{K}$. Обозначим через $\partial\mathbb{K}$ границу множества $\mathbb{K}$. Зафиксируем также суммируемую функцию $M_\mathbb{K} \in B(I_0,]0,\infty[)$ из условия $(K3)$, а с ней счетно-аддитивную меру $\mu_\mathbb{K}$ и функцию $\Omega_\mathbb{K} \in B([0,\infty[)$. Тогда $\lim_{r\to+0} \Omega_\mathbb{K}(r) = 0$. Заметим также, что по условию $(K4)$ найдутся суммируемая функция $L_K \in B(I_0,]0,\infty[)$ и функция $\omega_\mathbb{K} \in B([0,\infty[, [0,\infty[)$ со свойством $\lim_{r\to+0} \omega_\mathbb{K}(r) = 0$. Зафиксируем эти функции.

Введем также для всех $\theta \in [t_0, T]$

$$\Phi|_\theta \overset{\triangle}{=} \{x|_{[t_0,\theta]} \in C_m\big([t_0,\theta]\big) \,\Big|\, x \in \Phi\},$$

$$\tilde{\Psi}_\theta \overset{\triangle}{=} \Big\{z \in C\big([t_0,\theta], \mathbb{K}\big) \,\Big|\, \forall t', t'' \in [t_0,\theta] \ ||z(t') - z(t'')||_m \le \Omega_\mathbb{K}\big(|t' - t''|\big)\Big\}.$$

Теперь введем компакт $\Psi \in C_{m+2}(I_0)$. Для этого сначала определим функции $R_1, R_2 \in C(I_0)$ по правилу

$$R_1(t) = \int\limits_{[t_0,t]} M_\mathbb{K}(t)dt, \qquad R_2(t) = \int\limits_{[t_0,t]} L_\mathbb{K}(t)dt \qquad \forall t \in I_0.$$

Теперь определим

$$\Psi \overset{\triangle}{=} \tilde{\Psi}_T \times \{R_1\} \times \{R_2\} \in C\big(I_0, \mathbb{K} \times [0, R_1(T)] \times [0, R_2(T)]\big).$$

Далее построим вспомогательную (для (1.1)) дифференциальную систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{R}_1 \\ \dot{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t,x) \\ M_\mathbb{K}(t) \\ L_\mathbb{K}(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(t_0) \\ R_1(t_0) \\ R_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для правой части этой системы (как функции Каратеодори) и компакта Ψ строим на $\mathcal{D}$ метрику ϱ_Ψ. Тогда

$$\int\limits_{I_0} ||f(\tau^*_\Delta(t), x(\tau^*_\Delta(t))) - f(t, x(t))||_m dt \le \varrho^*_\Psi(\Delta, I_0) \quad \forall x \in \tilde{\Psi}_T, \Delta \in \mathcal{D},$$

а кроме того,

$$\int\limits_{I_0} |M_\mathbb{K}(\tau^*_\Delta(t)) - M_\mathbb{K}(t)|dt \le \varrho^*_\Psi(\Delta, I_0) \quad \forall \Delta \in \mathcal{D}, \tag{4.6}$$

$$\int\limits_{I_0} |L_\mathbb{K}(\tau^*_\Delta(t)) - L_\mathbb{K}(t)|dt \le \varrho^*_\Psi(\Delta, I_0) \quad \forall \Delta \in \mathcal{D}. \tag{4.7}$$

Введем в некотором смысле обратную к $\Omega_{\mathbb{K}}$ функцию $\Omega_{\mathbb{K}}^{-1}$ из $B([0, \mu_{\mathbb{K}}(I_0)])$ по правилу

$$\Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\delta) \stackrel{\triangle}{=} \inf\{\varepsilon \in [0, \infty[\mid \delta \leq \Omega_{\mathbb{K}}(\varepsilon)\} \quad \forall \delta \in [0, \mu_{\mathbb{K}}(I_0)].$$

Отметим, что поскольку функция $M_{\mathbb{K}}$ положительна, то $0 < R_1(t_0 + s) = \int\limits_{[t_0, t_0+s[} M_{\mathbb{K}}(t)dt \leq \Omega_K(s)$ для всех $s \in]0, T - t_0]$, откуда

$$\Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(R_1(t_0 + s)) = \inf\{\varepsilon \in [0, \infty[\mid R_1(t_0 + s) \leq \Omega_K(\varepsilon)\} \leq s.$$

Поскольку $R_1 \in C(I_0)$ и $R_1(t_0) = 0$, то, переходя в неравенстве к пределу, имеем

$$\lim_{\delta \to +0} \Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\delta) = \Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(0) = 0. \tag{4.8}$$

Для всех $r \in] - \infty, 0[$ положим $\Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(r) \stackrel{\triangle}{=} 0$, $\Omega_{\mathbb{K}}(r) \stackrel{\triangle}{=} 0$.

Заметим, что если для некоторого $\delta \in \mathbb{R}$ имеет место $\Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\delta) = 0$, то $\delta \leq \Omega_{\mathbb{K}}(\varepsilon_i)$ для некоторой сходящейся к нулю последовательности $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0, \infty[^{\mathbb{N}}$ и для всех $i \in \mathbb{N}$. Однако в силу (1.2) $\lim_{i \to \infty} \Omega_{\mathbb{K}}(\varepsilon_i) = 0$, откуда $\delta \leq 0$. Таким образом, $\Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\varkappa) \geq \Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\varkappa/2) > 0$.

Отметим также, что в силу монотонности Ω^{-1} существует $\lim_{\varepsilon \to +0} \Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\varkappa - \varepsilon)$, обозначим это число через $\Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\varkappa - 0)$. Заметим, что тогда в силу той же монотонности $\Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\varkappa - 0) \geq \Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\varkappa/2) > 0$.

Рассмотрим произвольное $\Delta \in \mathbb{D}$. Пусть

$$\theta(\Delta) \stackrel{\triangle}{=} \min(\{T\} \cup \{t \in I_0 \mid \xi_\Delta(t) \in \partial\mathbb{K}\}).$$

Заметим, что $\theta(\Delta) > t_0$. Далее всюду для упрощения обозначений под ξ_Δ будем понимать как собственно $\xi_\Delta \in C_m(I_0)$, так и сужение $\xi_\Delta|_{[t_0, \theta(\Delta)]} \in C([t_0, \theta(\Delta)], \mathbb{K})$.

Отметим, что в силу определения или $\theta(\Delta) = T$, или $\xi_\Delta(\theta(\Delta)) \in \partial\mathbb{K}$; кроме того, для любого $t \in [t_0, \theta(\Delta)]$ выполнено $\xi_\Delta(t) \in \mathbb{K}$.

Заметим также, что для всякого $\Delta \in \mathcal{D}$ и для любых $t' \in [t_0, \theta(\Delta)]$, $t'' \in [t', \theta(\Delta)]$

$$||\xi_\Delta(t') - \xi_\Delta(t'')||_m \leq \int\limits_{[t', t''[} ||f(\tau_\Delta^*(t), \xi_\Delta(\tau_\Delta^*(t)))||_m dt \leq \int\limits_{[t', t''[} M_{\mathbb{K}}(\tau_\Delta^*(t))dt$$

$$\leq \int\limits_{[t', t''[} \left(|M_{\mathbb{K}}(\tau_\Delta^*(t)) - M_{\mathbb{K}}(t)| + M_{\mathbb{K}}(t)\right) dt \stackrel{(4.6)}{\leq} \Omega_{\mathbb{K}}(t'' - t') + \varrho_\Psi^*(\Delta, I_0).$$

Таким образом,

$$||\xi_\Delta(t') - \xi_\Delta(t'')||_m \leq \Omega_{\mathbb{K}}(|t'' - t'|) + \varrho_\Psi^*(\Delta, I_0) \quad \forall \Delta \in \mathcal{D},\ t', t'' \in [t_0, \theta(\Delta)]. \tag{4.9}$$

Лемма 2. *Пусть* $x^0 \in \mathbb{K}_0$, $\Delta \in \mathbb{D}$, $\eta \in [t_0, \theta(\Delta)]$. *Тогда*

$$\theta(\Delta) \geq \min\{T, \eta + \Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\varkappa - ||\xi_\Delta(\eta) - x^0||_m - \varrho_\Psi^*(\Delta, I_0))\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если $\theta(\Delta) = T$, то все доказано, в противном случае $\xi_\Delta(\theta(\Delta)) \in \partial\mathbb{K}$, следовательно, расстояние от точки $x^0 \in \mathbb{K}_0$ до точки $\xi_\Delta(\theta(\Delta)) \in \partial\mathbb{K}$ не меньше $\varkappa$. Тогда

$$\varkappa \leq ||\xi_\Delta(\theta(\Delta)) - x^0||_m \leq ||\xi_\Delta(\theta(\Delta)) - \xi_\Delta(\eta)||_m + ||\xi_\Delta(\eta) - x^0||_m$$

$$\stackrel{(4.9)}{\leq} \varrho_\Psi^*(\Delta, I_0) + \Omega_{\mathbb{K}}(\theta(\Delta) - \eta) + ||\xi_\Delta(\eta) - x^0||_m,$$

т. е.

$$\varkappa - ||\xi_\Delta(\eta) - x^0||_m - \varrho^*_\Psi(\Delta, I_0) \leq \Omega_{\mathbb{K}}(\theta(\Delta) - \eta)$$

и в силу определения $\Omega^{-1}_{\mathbb{K}}$, имеет место неравенство

$$\Omega^{-1}_{\mathbb{K}}\big(\varkappa - ||\xi_\Delta(\eta) - x^0||_m - \varrho^*_\Psi(\Delta, I_0)\big) \leq \theta(\Delta) - \eta,$$

откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 3. *Пусть последовательность $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ такова, что $\lim_{i\to\infty} \varrho^*_\Psi(\Delta_i, I_0) = 0$. Пусть также $\eta \leq \theta(\Delta_n)$ для некоторого $\eta \in]t_0, T]$ и для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из последовательности $(\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta]})_{i\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $x \in \tilde{\Psi}_\eta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ определим

$$\Xi_k \overset{\triangle}{=} \big\{\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta]} \,\big|\, i \in \overline{k,\infty}\big\} \subset C_m([t_0,\eta]), \quad \varepsilon_k \overset{\triangle}{=} \max_{i\in\overline{k,\infty}} \varrho^*(\Delta_i, I_0) + \frac{1}{k}.$$

Заметим, что последовательность $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ монотонно убывает к нулю. Введем для всякого $\Xi \subset \Xi_1$ обобщенную меру некомпактности [16]

$$\beta(\Xi) \overset{\triangle}{=} \lim_{\varepsilon\to+0} \sup_{y\in\Xi} \sup_{t',t''\in[t_0,\eta],|t'-t''|<\varepsilon} ||y(t') - y(t'')||_m.$$

Теперь из (4.9) следует, что $\beta(\{\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta]}\}) \leq \varrho^*_\Psi(\Delta_i, I_0) < \varepsilon_i$ для всякого $i \in \mathbb{N}$, а в силу монотонности $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ имеем $\beta(\Xi_i) < \varepsilon_i$. Но тогда в силу [16, theorem 1] для всех $i \in \mathbb{N}$

$$\alpha(\Xi_i) \leq \beta(\Xi_i) < \varepsilon_i,$$

где $\alpha(\Xi_i)$ — мера некомпактности Куратовского [14] для множества Ξ_i.

Отметим, что $\alpha(\Xi_i)$ есть по определению точная нижняя грань чисел r таких, что Ξ_i можно разбить на конечное число множеств, диаметры которых не превосходят r, в частности Ξ_i можно разбить на конечное число множеств, диаметры которых не превосходят ε_i. Тогда и Ξ_1 можно разбить на конечное число множеств, диаметры которых не превосходят ε_1. Поскольку число этих множеств конечно, то как минимум в одном из них находится бесконечное число элементов из Ξ_1. Выберем одно из таких множеств и обозначим его через S_1, теперь определим $\mathbb{S}_1 \overset{\triangle}{=} \Xi_1 \cap S_1$. Это множество счетно, а его диаметр не превосходит диаметра S_1, т. е. ε_1.

Пусть для некоторого числа $k \in \mathbb{N}$ построена такая монотонно убывающая последовательность счетных множеств $(\mathbb{S}_n)_{n\in\overline{1,k}}$, что для всякого $n \in \overline{1,k}$ диаметр множества $\mathbb{S}_n \subset \Xi_n$ не превосходит ε_n.

Найдем счетное множество $\mathbb{S}_{k+1} \subset \mathbb{S}_k \cap \Xi_{k+1}$ с диаметром не более ε_{k+1}.

Действительно, множество $\mathbb{S}_k = \mathbb{S}_k \cap \Xi_k$ счетно, а множество $\Xi_k \setminus \Xi_{k+1}$ одноэлементно, следовательно, счетно и множество $\mathbb{S}_k \cap \Xi_{k+1}$. Заметим, что Ξ_{k+1} можно покрыть конечным числом множеств, диаметры которых не превосходят ε_{k+1}. Поскольку число этих множеств конечно, то как минимум в одном из них содержится бесконечное число элементов из $\mathbb{S}_k \cap \Xi_{k+1}$. Выберем одно из таких множеств и обозначим его через S_{k+1}. Определим $\mathbb{S}_{k+1} \overset{\triangle}{=} S_{k+1} \cap \mathbb{S}_k \cap \Xi_{k+1}$. Множество $\mathbb{S}_{k+1}$ счетно, а его диаметр не превосходит диаметра S_{k+1}, т. е. ε_{k+1}.

Итак, по индукции построена такая монотонно убывающая последовательность счетных множеств $(\mathbb{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ диаметр множества $\mathbb{S}_n \subset \Xi_n$ не превосходит ε_n. Выберем произвольную монотонную последовательность

$$(i(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \{l \in \overline{n,\infty} \mid \xi_{\Delta_l} \in \mathbb{S}_n\}.$$

Тогда последовательность $(\xi_{\Delta_{i(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ является подпоследовательностью последовательности $(\xi_{\Delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Заметим, что $\xi_{\Delta_{i(n')}} \in \mathbb{S}_{n'} \subset \mathbb{S}_k$, $\xi_{\Delta_{i(n'')}} \in \mathbb{S}_{n''} \subset \mathbb{S}_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $n', n'' \in \overline{k,\infty}$. Однако диаметр множества $\mathbb{S}_k$ не превосходит ε_k, откуда для всех $n', n'' \in \overline{k,\infty}$

$$||\xi_{\Delta_{i(n'')}} - \xi_{\Delta_{i(n')}}||_{C_m([t_0,\eta])} < \varepsilon_k.$$

Но последовательность $(i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ стремится к $+\infty$, а последовательность $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно убывает к нулю. Следовательно, последовательность $(\xi_{i(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ фундаментальна, а поскольку $C([t_0,\eta],\mathbb{K})$ полно, фундаментальная последовательность $(\xi_{\Delta_{i(k)}})_{k\in\mathbb{N}}$ имеет предел $x \in C([t_0,\eta],\mathbb{K})$. Осталось оценить модуль непрерывности функции x.

Для всех $k \in \mathbb{N}$, для всех $t', t'' \in [t_0,\theta]$, $t' < t''$, получим

$$||x(t') - x(t'')||_m \le ||\xi_{\Delta_{i(k)}}(t') - \xi_{\Delta_{i(k)}}(t'')||_m + 2||x - \xi_{\Delta_{i(k)}}||_{C_m([t_0,\eta])}$$

$$\overset{(4.9)}{\le} \Omega_{\mathbb{K}}(t''-t') + \varrho^*_{\Psi}(\Delta_{i(k)}, I_0) + 2||x - \xi_{\Delta_{i(k)}}||_{C_m([t_0,\eta])}.$$

Переходя в последней оценке к пределу при $k \to \infty$, имеем

$$||x(t') - x(t'')||_m \le \Omega_{\mathbb{K}}(|t'-t''|) \quad \forall t', t'' \in [t_0,\theta],$$

т. е. $x \in \tilde{\Psi}_\eta$, что завершает доказательство леммы. □

Закончим доказательство теоремы. Определим

$$\theta_0 \overset{\triangle}{=} \lim_{\delta\to+0} \inf_{\Delta\in\mathbb{D}_\delta} \theta(\Delta).$$

Для каждого $\Delta \in \mathbb{D}_{\varkappa/2}$ при $\eta = t_0, x^0 = x_0 = \xi_\Delta(\eta)$ в силу леммы 2 имеем $\theta(\Delta) \ge \min\{T, t_0 + \Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\varkappa/2)\}$, т. е. $T \ge \theta_0 \ge \theta(\Delta) > t_0$.

Наряду с θ_0 введем теперь

$$\Theta \overset{\triangle}{=} \Big\{\eta \in]t_0,\theta_0] \;\Big|\; \exists \delta(\eta) \in]0,\infty[\; \forall \Delta \in \mathbb{D}_{\delta(\eta)}\ \theta(\Delta) \ge \eta\Big\}.$$

Заметим, что в силу определения θ_0 имеет место вложение $]t_0,\theta_0[\, \subset \Theta$.

Теперь для всех $\eta \in \Theta$, $d \in]0,\delta(\eta)]$ определим

$$r_\eta(d) \overset{\triangle}{=} \sup_{\Delta\in\mathbb{D}_d} \inf_{x\in\Phi|_\eta} ||\xi_\Delta|_{[t_0,\eta]} - x||_{C_m([t_0,\eta])}. \tag{4.10}$$

Покажем, что

$$\lim_{d\to 0} r_\eta(d) = 0 \quad \forall \eta \in \Theta. \tag{4.11}$$

Допустим противное, тогда найдутся $\eta \in \Theta$, $r_0 \in]0,\infty[$ и $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{D}_{1/i}$ такие, что $||\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta]} - x||_{C_m([t_0,\eta])} > r_0$ для всех $x \in \Phi|_\eta$, $i \in \mathbb{N}$; кроме того в силу определения Θ можно добиться, что $\theta(\Delta_i) > \eta$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда в силу леммы 3, переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $(\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta]})_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторому $y \in \tilde{\Psi}_\eta$. Имеем

$$||y - x||_{C_m([t_0,\eta])} \ge r_0 > 0 \quad \forall x \in \Phi|_\eta. \tag{4.12}$$

Введем $z \in C_m([t_0,\eta])$ по правилу

$$z(t) = x_0 + \int\limits_{[t_0,t[} f(t, y(t))dt \quad \forall t \in [t_0,\eta].$$

Почти всюду на $[t_0,\eta]$ имеем $\dot{\xi}_{\Delta_i}(t)=\bar{f}_{\tau^*_{\Delta_i}(t)}(\xi_{\Delta_i})$, тогда для всех $t\in[t_0,\eta]$

$$||z(t)-\xi_{\Delta_i}(t)||_m\le\int\limits_{[t_0,t[}||f(\tau^*_{\Delta_i}(t),\xi_{\Delta_i}(\tau^*_{\Delta_i}(t)))-f(t,y(t))||_m dt$$

$$\le\int\limits_{[t_0,t[}(||f(\tau^*_{\Delta_i}(t),\xi_{\Delta_i}(\tau^*_{\Delta_i}(t)))-f(\tau^*_{\Delta_i}(t),y(\tau^*_{\Delta_i}(t)))||_m+||f(\tau^*_{\Delta_i}(t),y(\tau^*_{\Delta_i}(t)))-f(t,y(t))||_m)\,dt$$

$$\le\omega_{\mathbb{K}}\big(||\xi_{\Delta_i}-y||_{C_m(I_0)}\big)\int\limits_{I_0}L_{\mathbb{K}}\big(\tau^*_{\Delta_i}(t)\big)dt+\varrho^*_{\Psi}(\Delta_i,I_0)$$

$$\le\omega_{\mathbb{K}}\big(||\xi_{\Delta_i}-y||_{C_m(I_0)}\big)\int\limits_{I_0}(\big|L_{\mathbb{K}}(\tau^*_{\Delta_i}(t))-L_{\mathbb{K}}(t)\big|+L_{\mathbb{K}}(t))\,dt+\varrho^*_{\Psi}(\Delta_i,I_0)$$

$$\overset{(4.7)}{\le}\omega_{\mathbb{K}}\big(||\xi_{\Delta_i}-y||_{C_m(I_0)}\big)\big(\varrho^*_{\Psi}(\Delta_i,I_0)+R_2(T)\big)+\varrho^*_{\Psi}(\Delta_i,I_0).$$

Переходя к пределу при $i\to\infty$, находим, что $(\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta]})_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к z, отсюда $z=y$, т. е. y является решением (1.1) на отрезке $[t_0,\eta]$. Но тогда оно продолжимо (в силу (C)) до некоторого решения $x\in\Phi$, т. е. $y=x|_{[t_0,\eta]}\in\Phi|_\eta$. Это противоречит (4.12), что и завершает доказательство (4.11).

Покажем, что $\theta_0=T$. Возьмем какое-либо $\eta_1\in]\theta_0-\Omega^{-1}_{\mathbb{K}}(\varkappa/2),\theta_0[\,\cap\,]t_0,T[\subset\Theta$. По определению θ_0 найдется такая последовательность $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{D}_{1/i}$, что $\lim_{i\to\infty}\theta(\Delta_i)=\theta_0$, и (в силу $\eta_1\in\Theta$) для любого $i\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $\theta(\Delta_i)>\eta_1$. Кроме того (при необходимости выбирая подпоследовательность), мы можем считать в силу леммы 3, что последовательность $(\xi_{\Delta_i}|_{[t_0,\eta_1]})_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к $x\in\tilde{\Psi}_{\eta_1}$. Поскольку $\Phi|_{\eta_1}$ замкнуто [8, теорема 1.1.5], из (4.11) следует, что $x\in\Phi|_{\eta_1}$.

Тогда $\lim_{i\to\infty}\xi_{\Delta_i}(\eta_1)=x(\eta_1)\in\mathbb{K}_0$. По лемме 2

$$\theta(\Delta_i)\ge\min\{T,\eta_1+\Omega^{-1}_{\mathbb{K}}\big(\varkappa-||\xi_{\Delta_i}(\eta_1)-x(\eta_1)||_m-\varrho^*_{\Psi}(\Delta_i,I_0)\big)\}.$$

Переходя к пределу, имеем

$$\theta_0=\lim_{i\to\infty}\theta(\Delta_i)\ge\min\big\{T,\eta_1+\Omega^{-1}_{\mathbb{K}}(\varkappa-0)\big\}\ge\min\big\{T,\eta_1+\Omega^{-1}_{\mathbb{K}}(\varkappa/2)\big\}.$$

Но $\eta_1+\Omega^{-1}_{\mathbb{K}}(\varkappa/2)>T$ по выбору η_1, откуда $\theta_0=T$.

Покажем, что $\theta_0=T\in\Theta$, т. е. найдется такое достаточно малое число $\delta_0=\delta(T)\in]0,\infty[$, что $\theta(\Delta)=\theta_0=T$ для всех $\Delta\in\mathbb{D}_{\delta_0}$. В противном случае найдется такая последовательность $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{D}_{1/i}$, что последовательность $(\theta(\Delta_i))_{i\in\mathbb{N}}$ строго возрастает и сходится к $\theta_0=T$. Зафиксируем произвольное $k\in\mathbb{N}$. Тогда $\theta(\Delta_k)<\theta(\Delta_{k+1})=\inf_{i\in\overline{k+1,\infty}}\theta(\Delta_i)<T$, т. е. $\theta(\Delta_k)\in\,]t_0,T[\subset\Theta$, а следовательно, для любых $i\in\overline{k+1,\infty}$ существует такое $x_{i,k}\in\Phi$, что

$$||x_{i,k}(\theta(\Delta_k))-\xi_{\Delta_i}(\theta(\Delta_k))||_m\overset{(4.10)}{\le}r_{\theta(\Delta_k)}(\varrho_{\Psi}(\Delta_i,I_0))\le r_{\theta(\Delta_k)}(1/i).\qquad(4.13)$$

Для всякого $i\in\overline{k+1,\infty}$ из леммы 2 при $x^0=x_{i,k}(\theta(\Delta_k))\in\mathbb{K}_0$, $\eta=\theta(\Delta_k)$, $\Delta=\Delta_i$ ввиду (4.13) и $\theta(\Delta_i)<T$ имеем

$$\theta(\Delta_i)\ge\theta(\Delta_k)+\Omega^{-1}_{\mathbb{K}}\Big(\varkappa-r_{\theta(\Delta_k)}(1/i)-\varrho^*_{\Psi}(\Delta_i,I_0)\Big).$$

При всяком фиксированном $k\in\mathbb{N}$ в силу (4.11) $r_{\theta(\Delta_k)}(1/i)\to0$ и $\varrho^*_{\Psi}(\Delta_i,I_0)\to0$ при $i\to\infty$, тогда, переходя к пределу при $i\to\infty$, находим

$$T\ge\theta(\Delta_k)+\Omega^{-1}_{\mathbb{K}}(\varkappa-0)\ge\theta(\Delta_k)+\Omega^{-1}_{\mathbb{K}}(\varkappa/2).$$

Отсюда, переходя к пределу уже при $k \to \infty$, имеем $T \geq T + \Omega_{\mathbb{K}}^{-1}(\varkappa/2) > T$. Полученное противоречие показывает, что $\theta_0 = T \in \Theta$, тогда, подставляя в (4.11) $\eta = T$, для всякого $\varepsilon \in]0,\infty[$ найдем такое $d \in]0,\infty[$, что для любых $\Delta \in \mathbb{D}_d$ существует $x \in \Phi$ со свойством $||x - \xi_\Delta||_{C_m(I_0)} < \varepsilon$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 3. *Если для системы* (1.1) *выполнены условия* $(K1),(K2),(K3')$ *(соответственно,* $(K1),(K2),(K3),(K4)$*) и для некоторого* $x \in C_m(I_0)$ *всякое локальное решение задачи Коши* (1.1) *продолжимо до* x, *то для некоторого компакта* $\Psi \subset C_m(I_0)$ *(соответственно,* $\Psi \subset C_{m+2}(I_0)$*)*

$$\lim_{\varrho_\Psi(\Delta,I_0)\to+0} ||\xi_\Delta - x||_{C_m(I_0)} = 0.$$

Относительно доказательства заметим, что множество Φ одноэлементно, а следовательно, условие (C) выполнено при предположениях следствия.

Заметим, что при доказательстве двух последних теорем собственно метрика ρ_Ψ не использовалась, использовалась лишь псевдометрика ϱ^*_Ψ, соответственно в формулировках метрику ϱ_Ψ всюду можно заменить на ϱ^*_Ψ.

Поступила 11.04.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями М. : Наука, 1977. 623 с.
2. **Гелбаум Б., Олмстед Дж.** Контрпримеры в анализе М.: Мир, 1967. 252 с.
3. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы : Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 855 с.
4. **Дружинин Э. И.** Обусловленность прямых алгоритмов расчета программных управлений в нелинейных системах // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби (CGS'2005): Мат-лы конф. Екатеринбург, 2005. С.59–61.
5. **Казиев Э.А.** Односторонние оценки при решении дифференциальных уравнений методом ломаных Эйлера // Изв. АН Азерб. ССР. Серия физ.-тех. и мат. наук. 1966. № 1. С.112–119.
6. **Толстоногов А. А.** Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986. 296 с.
7. **Толстоногов А. А.** Теорема Боголюбова при ограничениях, порожденных полунепрерывным снизу дифференциальным включением // Мат. сб. 2005. Т. 196, № 2. С. 117–138.
8. **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
9. **Хлопин Д. В.** Ломаные Эйлера в системах с измеримой по времени правой частью // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тр. 38-й регион. молодеж. конф. Екатеринбург, 2007. С. 394–399.
10. **Хлопин Д. В.** Отслеживание предельных траекторий в разрывных по времени управляемых системах // Математика, информатика, управление: Тр. 4-й всерос. конф. (CD-ROM). Иркутск, 2005.
11. **Averna D., Fiacca A.** On the Scorza Dragoni property // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1984. Vol. 33, no. 2. P. 313–318.
12. **Averna D., Fiacca A.** Some results on theorems of G. Scorza Dragoni and L. Tibaldo in abstract spaces // Riv. Mat. Univ. Parma. 1986. Vol. 12, no. 4. P. 217–225.
13. **Gaĭdukevich O., Maslyuchenko V. K.** Нові узагальнення теореми Скорца Драгоні // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52, № 7. С. 881–888.
14. **Kuratowski C.** Sur les espaces complets // Fund. Math. 1930. Vol.15. P. 300–309.
15. **Miriča S.** Feedback differential systems: approximate and limiting trajectories // Studia Univ. Babeş–Bolyai Math. 2004. Vol. 49, no. 3. P. 83–96.
16. **Nussbaum R.D.** A generalisation of the Ascoli theorem and an application to functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1971. Vol.35, no. 3. P. 600–610.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 517.972.8

РАСШИРЕНИЯ АБСТРАКТНЫХ ЗАДАЧ О ДОСТИЖИМОСТИ: НЕСЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ[1]

А. Г. Ченцов

Исследуются конструкции расширений задачи о достижимости в топологическом пространстве, в основе которых — компактификации всего пространства решений или некоторых его фрагментов.

1. Содержательное обсуждение задачи

Рассматриваем проблему выбора решения из заданного непустого множества E (пространство решений) в условиях ограничений асимптотического характера. Эти ограничения определяются тем или иным непустым семейством $\mathcal{E}$ подмножеств (п/м) множества E. Сами же решения-точки (обычные решения) заменяются при этом асимптотическими аналогами, в простейшем случае — последовательностями (см. в этой связи конструкции [1, гл. III, IV]). В этом последнем случае естественным образом выделяется множество всех допустимых последовательностей $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ в E посредством условия: при всяком выборе множества $U \in \mathcal{E}$ должны выполняться включения $e_j \in U$ с некоторого момента (места).

Выбор решения (обычного или "асимптотического") осуществляется для достижения той или иной цели. Последнюю связываем далее с достижимостью точек некоторого другого, вообще говоря, множества $\mathbf{H}$ на значениях заданного по условиям задачи оператора

$$\mathbf{h}: \ E \longrightarrow \mathbf{H}. \tag{1.1}$$

Прототипом данной постановки является известная задача о построении области достижимости, рассматриваемая в теории управления; см. [1–4] и др. Упомянутая конкретная задача представляет большой практический интерес, поскольку в ней определяются реальные возможности систем управления в части решения различных практических задач (см., например, [5]).

Заметим, кстати, что вышеупомянутое семейство $\mathcal{E}$ может, в частности, возникать следующим естественным образом.

Пусть наряду с множеством $\mathbf{H}$, называемым далее пространством оценок, задано множество $\mathbf{X}$, оператор

$$\mathbf{s}: \ E \longrightarrow \mathbf{X} \tag{1.2}$$

и множество Y, $Y \subset \mathbf{X}$. В терминах (1.2) определяется ограничение $\mathbf{s}(e) \in Y$ на выбор $e \in E$, именуемое далее Y-ограничением. Тогда множество $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y))$ (образ множества $\mathbf{s}^{-1}(Y)$) определяет аналог области достижимости в задачах управления. Упомянутое множество является, конечно, решением задачи о достижимости на значениях $\mathbf{h}$ в условиях Y-ограничения. Представляется логичным исследование возможностей, связанных с ослаблением Y-ограничения. Один из подходов состоит в следующем.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06–01–00414, 07–01–96088).

Полагаем, что X и $\mathbf{H}$ оснащены топологиями θ и τ соответственно. Мы можем выделить для специального рассмотрения непустое семейство $\mathcal{Y}$ окрестностей Y в топологическом пространстве (ТП) (X, θ) и вместо "жесткого" Y-ограничения рассматривать следующие условия на выбор решения-точки $e \in E$: $e \in \mathbf{\Gamma}$, где $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{Y}$. Каждому такому ослабленному ограничению отвечает достижимое множество $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{\Gamma}))$. Мы можем рассматривать предел этих множеств в топологии τ. Можно, однако, поступить (при оценке собственных возможностей) и несколько иначе.

Именно, ограничиваясь сейчас рассмотрением секвенциальных приближенных решений в духе [1, гл. III], введем семейство $\mathcal{E}$ п/м E, составленное из прообразов всевозможных множеств $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{Y}$, и будем рассматривать допустимые в смысле $\mathcal{E}$, или $\mathcal{E}$-допустимые, последовательности $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ в множестве E, а также их "образы" $(\mathbf{h}(e_i))_{i=1}^{\infty}$. Среди последних выделяем сходящиеся в ТП $(\mathbf{H}, \tau)$; соответствующие пределы называем элементами притяжения (ЭП), а множество всех таких элементов — множеством притяжения (МП). Заметим, что и в более общих случаях применения фильтров и направленностей (вместо последовательностей) логика построения ЭП и МП аналогична. Так или иначе МП является естественной характеристикой наших возможностей в части ослабления Y-ограничения. Правда, использование только последовательностей в качестве асимптотических версий решения может ограничивать вышеупомянутые возможности. Сейчас рассмотрим только простейший пример, показывающий, что использование направленностей (обобщенных последовательностей) и, в другой версии, фильтров может существенно расширять эти возможности.

П р и м е р. Рассмотрим следующие несовместные условия на выбор U — борелевской функции (см. [1,6,7]) на отрезке $\mathbb{I} \triangleq [0,1]$ (здесь и ниже $\triangleq$ означает равенство по определению):

$$\int\limits_{\mathbb{I}} U d\lambda = 1 \qquad \text{и} \qquad U(t) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{I}, \tag{1.3}$$

где λ есть мера Лебега — Бореля на $\mathbb{I}$, т. е. сужение меры Лебега на σ-алгебру $\mathcal{B}$ борелевских п/м $\mathbb{I}$.

Пусть $\mathfrak{N} \triangleq \{B \in \mathcal{B} \mid \lambda(B) = 0\}$; если $N \in \mathfrak{N}$, то полагаем

$$\Theta[N] \triangleq \left\{ U \in E \mid \left(\int\limits_{\mathbb{I}} U d\lambda = 1 \right) \& \ (U(t) = 0 \ \ \forall t \in N) \right\}, \tag{1.4}$$

где (в данном примере) E — множество всех борелевских функций, действующих в $\mathbb{I}$. Через $\mathcal{E}$ обозначаем в рассматриваемом примере семейство всех множеств $\Theta[N]$ (1.4) при переборе $N \in \mathfrak{N}$. Ввиду счетной аддитивности меры λ семейство $\mathfrak{N}$ замкнуто относительно конечных и счетных объединений. Семейство $\mathcal{E}$ непусто и, более того, является базой фильтра в E; см. [8, гл. I]. Кроме того, с учетом вышеупомянутого свойства легко проверяется, что при всяком выборе последовательности в $\mathcal{E}$ существует множество из $\mathcal{E}$, лежащее в пересечении всех множеств данной последовательности.

Оснащаем $\mathfrak{N}$ направлением [9] $\sqsubseteq$, полагая, что для $N_1 \in \mathfrak{N}$ и $N_2 \in \mathfrak{N}$ по определению

$$(N_1 \sqsubseteq N_2) \Longleftrightarrow (N_1 \subset N_2).$$

Итак, $\sqsubseteq$ — обычная упорядоченность $\mathfrak{N}$ по вложению. Далее, при $N \in \mathfrak{N}$ определяем $U_N^0 \in \Theta[N]$ посредством условий

$$U_N^0(t) \triangleq 0 \ \ \forall t \in N \qquad \text{и} \qquad U_N^0(t) \triangleq 1 \ \ \forall t \in \mathbb{I} \setminus N.$$

Тогда $\mathbf{u} \triangleq (U_N^0)_{N \in \mathfrak{N}}$ — оператор, действующий из $\mathfrak{N}$ в множество E, а триплет $(\mathfrak{N}, \sqsubseteq, \mathbf{u})$ — направленность в E со свойством: $\forall V \in \mathcal{E} \ \exists N_V \in \mathfrak{N} \ \forall N \in \mathfrak{N}$

$$(N_V \sqsubseteq N) \Longrightarrow \big(\mathbf{u}(N) = U_N^0 \in V\big). \tag{1.5}$$

С учетом (1.4), (1.5) можно рассматривать $(\mathfrak{N}, \sqsubseteq, \mathbf{u})$ как путь к “соблюдению” несовместных условий (1.3). Разумеется, пересечение всех множеств из $\mathcal{E}$ пусто, как и множество элементов, допустимых в смысле (1.3). Семейство $\mathcal{E}$ является, стало быть, свободным в смысле [10]. Во всяком случае направленность $(\mathfrak{N}, \sqsubseteq, \mathbf{u})$ допустима по отношению к $\mathcal{E}$ в смысле, подобном обсуждавшемуся выше для случая последовательностей (см. (1.5)).

В то же время не существует последовательности в множестве E, допустимой в смысле $\mathcal{E}$. Более того, при всяком выборе последовательности $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ в множестве E, т. е. при всяком выборе отображения

$$(U_j)_{j\in\mathbb{N}}: \ \mathbb{N} \longrightarrow E, \tag{1.6}$$

где (здесь и ниже) $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; ...\}$, непременно

$$\exists \mathbb{V} \in \mathcal{E}: \ U_j \notin \mathbb{V} \ \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

(Условие (1.7) является более сильным в сравнении с невозможностью соблюдать $\mathcal{E}$-ограничение в классе последовательностей.)

В самом деле, фиксируем (1.6) и рассмотрим множество

$$\Psi \stackrel{\triangle}{=} \left\{ j \in \mathbb{N} \mid \int\limits_{\mathbb{I}} U_j d\lambda = 1 \right\}. \tag{1.8}$$

Если $\Psi = \varnothing$, то для одноэлементного множества $\{t_0\} \in \mathfrak{N}$, $t_0 \in \mathbb{I}$, имеем (см. (1.4))

$$U_j \notin \Theta[\{t_0\}] \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

при этом $\Theta[\{t_0\}] \in \mathcal{E}$. Осталось рассмотреть случай $\Psi \neq \varnothing$.

Итак, пусть $\Psi \neq \varnothing$; в итоге Ψ есть непустое и не более, чем счетное п/м $\mathbb{N}$. Существует последовательность $\psi: \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, для которой $\Psi = \{\psi(i): \ i \in \mathbb{N}\}$ (допускается нумерация точек Ψ с повторениями). При этом (см. (1.8)) имеем очевидное свойство: при $j \in \Psi$

$$B_j \stackrel{\triangle}{=} \{t \in \mathbb{I} \mid U_j(t) < 1\} \in \mathfrak{N} \tag{1.9}$$

(используется счетная аддитивность меры λ и (1.8)). Как следствие,

$$\mathbf{B} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{j\in\Psi} B_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{\psi(k)} \in \mathfrak{N},$$

а потому $\mathbf{B} \neq \mathbb{I}$, так как $\mathbb{I} \notin \mathfrak{N}$. Поскольку $\mathbf{B} \subset \mathbb{I}$, то $\mathbb{I} \setminus \mathbf{B} \neq \varnothing$ и можно указать $t_* \in \mathbb{I} \setminus \mathbf{B}$. При этом $\Theta[\{t_*\}] \in \mathcal{E}$, так как $\{t_*\} \in \mathfrak{N}$. Разумеется, при $j \in \Psi$ имеем $t_* \notin B_j$. Из (1.6), (1.9) следует, что

$$U_j(t_*) = 1 \ \ \forall j \in \Psi. \tag{1.10}$$

Из (1.10) вытекает, что (см. (1.4)) $U_j \notin \Theta[\{t_*\}]$ при всяком выборе $j \in \mathbb{N}$ (если $j \in \mathbb{N}\setminus\Psi$, то нарушено первое условие в (1.3), а если $j \in \Psi$, то используем комбинацию (1.4), (1.10)). Итак, если $\Psi \neq \varnothing$, то (1.7) также справедливо, чем и завершается обоснование (1.7) в целом. Стало быть, при всяком выборе последовательности (1.6) имеем свойство (1.7). С учетом (1.5) получаем требуемое свойство существенности класса несеквенциальных асимптотических версий решения: в нашем примере имеются допустимые направленности, но нет допустимых последовательностей (достраивание $(\mathbf{H}, \tau)$ и оператора (1.1), для которых реализуется “несеквенциальный” элемент притяжения, не составляет труда). □

Возвращаясь к рассматриваемому случаю асимптотической версии постановки, связанной с ослаблением Y-ограничения, и к более общему случаю, когда семейство $\mathcal{E}$ п/м E изначально задается произвольным образом, отметим, что естественный способ построения нужного варианта МП связан с построением специальных обобщенных задач, в основе которых — расширение исходного пространства решений. Это расширение чаще всего отождествляется с компактификацией, допускающей естественные аналогии с расширениями ТП. Имеются, однако, и несколько иные возможности, связанные уже на идейном уровне с локальными компактификациями нужных фрагментов E.

Что касается формализации асимптотической версии решения, то (по некоторым соображениям теоретико-множественного характера) удобнее использовать фильтры, хотя направленности вполне пригодны для строгого определения МП. Это связано с трудностями в представлении в виде множества "совокупности" всех направленностей со значениями в заданном множестве (в этой связи см. [11, гл. II]). Конструкции, связанные с построением МП "в классе направленностей", см. в [12–16]. Мы их также используем в дальнейшем (см. вышеупомянутый пример), имея при этом в виду естественную связь фильтров и направленностей (см. [17, § 1.6]).

2. Общие сведения

Используем стандартную теоретико-множественную символику, применяя для сокращения формулировок кванторы и связки; $\exists!$ заменяет фразу "существует и единственно", $\triangleq$ означает равенство по определению (см. разд. 1). Принимаем аксиому выбора; называем семейством всякое множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x — объект, то через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество (синглетон), содержащее данный объект x.

Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X; $\mathrm{Fin}(X)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Через B^A обозначаем [11, гл. 2, §6] множество всех операторов, действующих из множества A в множество B; при $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$

$$f^1(C) \triangleq \{f(x) :\ x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$$

есть образ C при действии f (мы уже использовали это обозначение в разд. 1), а $(f|C) \in B^C$ есть по определению сужение f на C, для которого $(f|C)(u) = f(u)$ при $u \in C$. Если A и B — множества, а $f \in B^A$, то

$$f^1[\mathcal{U}] \triangleq \{f^1(U) :\ U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B)) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)),$$

$$f^{-1}[\mathcal{V}] \triangleq \{f^{-1}(V) :\ V \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \ \ \forall \mathcal{V} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B)).$$

Для всяких множеств A и B полагаем $B^A_{(*)} \triangleq \{f \in B^A \mid f^1(A) = B\}$ (множество всех сюръекций A на B). Наконец, если $\mathcal{X}$ — семейство, а Y — множество, то через $\mathcal{X}|_Y$ обозначаем семейство всех множеств $X \cap Y,\ X \in \mathcal{X}$. Кроме того, для произвольных множества U и семейства $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(U))$ полагаем

$$\mathbf{C}_U[\mathcal{U}] \triangleq \{U \setminus V :\ V \in \mathcal{U}\}.$$

Сведения из топологии. Если (X, τ) — ТП и $A \in \mathcal{P}(X)$, то

(a) через $\mathrm{cl}\,(A, \tau)$ обозначаем замыкание множества A в ТП (X, τ);

(b) в виде $\tau|_A$ имеем топологию A, индуцированную из (X, τ), получая в виде $(A, \tau|_A)$ подпространство (X, τ) (см. [8, 9] и др.);

(c) при $\mathfrak{N}^0_\tau[A] \triangleq \{G \in \tau \mid A \subset G\}$ полагаем, что

$$\mathfrak{N}_\tau[A] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists G \in \mathfrak{N}^0_\tau[A] :\ G \subset H\}$$

(семейство всех окрестностей множества A в ТП (X, τ)).

Если (X,τ) — ТП и $x \in X$, то $\mathcal{N}^0_\tau(x) \overset{\triangle}{=} \mathbb{N}^0_\tau[\{x\}]$ и $\mathcal{N}_\tau(x) \overset{\triangle}{=} \mathbb{N}_\tau[\{x\}]$ (семейство всех окрестностей точки x в ТП (X,τ)). Кроме того, для всякого ТП (X,τ) через $(\tau\text{-comp})[X]$ обозначаем семейство всех компактных [17, с. 196] п/м X; наконец, пусть

$$(\tau\text{-comp})^0[X] \overset{\triangle}{=} \{S \in \mathcal{P}(X) \mid \exists K \in (\tau\text{-comp})[X]:\ S \subset K\}$$

(если (X,τ) — хаусдорфово ТП, то $(\tau\text{-comp})^0[X]$ — семейство всех множеств $S \in \mathcal{P}(X)$ таких, что $\mathrm{cl}\,(S,\tau) \in (\tau\text{-comp})[X]$).

Если (U,τ_1) и (V,τ_2) — два ТП, то:

(1) $C(U,\tau_1,V,\tau_2) \overset{\triangle}{=} \{f \in V^U \mid f^{-1}[\tau_2] \subset \tau_1\}$ (множество непрерывных операторов);

(2) $C_{\mathrm{cl}}(U,\tau_1,V,\tau_2) \overset{\triangle}{=} \{f \in C(U,\tau_1,V,\tau_2) \mid f^1(F) \in \mathbf{C}_V[\tau_2]\quad \forall F \in \mathbf{C}_U[\tau_1]\} = \{f \in V^U \mid f^1(\mathrm{cl}\,(A,\tau_1)) = \mathrm{cl}\,(f^1(A),\tau_2)\ \ \forall A \in \mathcal{P}(X)\}$;

(3) $C_{\mathbf{ap}}(U,\tau_1,V,\tau_2) \overset{\triangle}{=} \{f \in C_{\mathrm{cl}}(U,\tau_1,V,\tau_2) \mid f^{-1}(\{y\}) \in (\tau_1\text{-comp})[U]\ \ \forall y \in V\}$.

Здесь определены (1) непрерывные, (2) замкнутые и (3) почти совершенные [17, с. 287] операторы. Как обычно [18, с. 8], компактом называем всякое компактное хаусдорфово ТП. В дальнейшем используется сходимость по Муру — Смиту и сходимость баз фильтров (а также фильтров) в произвольном ТП.

Базы фильтров, фильтры, ультрафильтры. Если X — множество, то через $\beta[X]$ (через $\beta_0[X]$) обозначаем множество всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ (всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X))$), для каждого из которых

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}:\ B_3 \subset B_1 \cap B_2;$$

элементы $\beta_0[X]$ суть базы фильтров X. Через $\mathfrak{F}[X]$ обозначаем множество всех фильтров [8, гл. I] множества X; следовательно, $\mathfrak{F}[X]$ — множество всех семейств $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X))$, для каждого из которых:

$$A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}, \qquad \forall F \in \mathcal{F}\ \forall G \in \mathcal{P}(X)\ \ ((F \subset G) \Longrightarrow (G \in \mathcal{F})).$$

В терминах $\mathfrak{F}[X]$ вводим соответствующее множество ультрафильтров (у/ф) множества X:

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X] \overset{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X] \mid \forall \mathcal{G} \in \mathfrak{F}[X]\quad ((\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Longrightarrow (\mathcal{F} = \mathcal{G}))\big\}. \tag{2.1}$$

Само X погружается в множество (2.1) посредством построения так называемых тривиальных у/ф

$$(X\text{-ult})[x] \overset{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(X) \mid x \in F\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]\ \ \forall x \in X.$$

Именно, для каждого непустого множества S определяем отображение $(S\text{-ult})[\cdot]$ (правило погружения) в виде

$$x \longmapsto (S\text{-ult})[x]:\ S \longrightarrow \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S].$$

Погружение $\mathcal{P}(S)$ в $\mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S])$ реализуется посредством отображения

$$A \longmapsto \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S] \mid A \in \mathcal{F}\}:\ \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S]),$$

обозначаемого через $\varphi[S]$; семейство

$$\varphi[S]^1(\mathcal{P}(S)) = \{\varphi[S](H):\ H \in \mathcal{P}(S)\}$$

является базой стандартной топологии множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S]$, обозначаемой далее через $\tau_{\mathbf{fi}}[S]$, причем

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S], \tau_{\mathbf{fi}}[S])$$

есть нульмерный [17, § 6.2] компакт. В связи с этими построениями см. [17, § 3.6], [18]. Если S — множество, а $\mathcal{S} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$, то через $\mathfrak{F}^0[S|\mathcal{S}]$ (через $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[S|\mathcal{S}]$) обозначаем множество всех фильтров $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[S]$ (всех у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S]$) таких, что $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$.

Как обычно [8, гл. I], для множества X и базы фильтра $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ определяем фильтр $(X\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}[X]$ (порожденный базой $\mathcal{B}$) в виде семейства всех множеств $L \in \mathcal{P}(X)$ таких, что $\exists B \in \mathcal{B}:\ B \subset L$. Имеем очевидное вложение $\mathfrak{F}[X] \subset \beta_0[X]$.

Если U и V — множества, $\mathcal{B} \in \beta_0[U]$ и $f \in V^U$, то $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[V]$, причем

$$\big((U\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[U]\big) \Longrightarrow \big((V\text{-}\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{B}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[V]\big)$$

(образ базы у/ф есть база у/ф).

Сходимость. Если (X,τ) — ТП, $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ и $x \in X$, то, как обычно [8, гл. I],

$$(\mathcal{B} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x) \Longleftrightarrow \big(\mathcal{N}_\tau(x) \subset (X\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}]\big).$$

В качестве $\mathcal{B}$ можно использовать фильтр и, в частности, у/ф, а также образ базы фильтра. Например, для множества U, ТП (V,τ), фильтра $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[U]$, отображения $f \in V^U$ и точки $v \in V$

$$\big(f^1[\mathcal{F}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} v\big) \Longleftrightarrow \big(f^{-1}[\mathcal{N}_\tau(v)] \subset \mathcal{F}\big).$$

Сходимость направленностей можно определить через сходимость фильтров. При этом направленностью в множестве $\mathbf{S}$ называем всякий триплет $(D,\preceq,f)$, где $(D,\preceq)$ есть непустое направленное множество [17, гл. 1], а $f \in \mathbf{S}^D$. Если $(D,\preceq,f)$ — направленность в $\mathbf{S}$, то

$$(\mathbf{S}\text{-ass})[D;\preceq;f] \overset{\triangle}{=} \{U \in \mathcal{P}(\mathbf{S}) \mid \exists d_1 \in D\ \forall d_2 \in D\ ((d_1 \preceq d_2) \Longrightarrow (f(d_2) \in U))\} \in \mathfrak{F}[\mathbf{S}] \tag{2.2}$$

есть фильтр множества $\mathbf{S}$, ассоциированный с $(D,\preceq,f)$ (см. [9]). Если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbf{S}]$, то существует направленность $(\mathbb{D},\sqsubseteq,g)$ в $\mathbf{S}$, для которой $\mathcal{F} = (\mathbf{S}\text{-ass})[\mathbb{D};\sqsubseteq;g]$. Традиционную сходимость по Муру — Смиту удобно ввести сейчас в терминах сходимости фильтра (см. (2.2)): если (X,τ) — ТП, $(D,\preceq,f)$ — направленность в X и $x \in X$, то полагаем по определению, что

$$\big((D,\preceq,f) \overset{\tau}{\longrightarrow} x\big) \Longleftrightarrow \big((X\text{-ass})[D;\preceq;f] \overset{\tau}{\Longrightarrow} x\big).$$

Натуральный ряд $\mathbb{N} = \{1;2;...\}$ с обычной упорядоченностью $\leq$ есть направленное множество. При $k \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\overline{1,k} \overset{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq k\}, \qquad \overrightarrow{k,\infty} \overset{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid k \leq i\}.$$

Если к тому же X — множество, а $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, то $(\mathbb{N},\leq,(x_i)_{i\in\mathbb{N}})$ — направленность в X; при оснащении X топологией τ используем соглашение: при $x \in X$

$$\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\tau}{\longrightarrow} x\big) \Longleftrightarrow \big((\mathbb{N},\leq,(x_i)_{i\in\mathbb{N}}) \overset{\tau}{\longrightarrow} x\big), \tag{2.3}$$

а поэтому в подобных случаях используем более традиционное выражение в левой части (2.3), где символ τ будем опускать, если (X,τ) есть вещественная прямая $\mathbb{R}$ с обычной $|\cdot|$-топологией $\tau_{\mathbb{R}}$.

3. Множества притяжения: общие сведения

Рассматриваем отображения пространства решений E в произвольные ТП, полагая заданным непустое семейство п/м E, используемое для формирования ограничений асимптотического характера. Если (X,τ) — ТП, $r \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то через $(\mathbf{as})[X;\tau;r;\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех $x \in X$, для каждого из которых существует такая направленность $(D,\preceq,f)$ в множестве E, что

$$(\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[D;\preceq;f])\ \&\ \big((D,\preceq,r\circ f) \overset{\tau}{\longrightarrow} x\big) \tag{3.1}$$

(здесь и ниже символ $\circ$ используется при обозначении суперпозиций). Разумеется, МП $(\mathbf{as})[X;\tau;r;\mathcal{E}]$ можно определить не только в терминах (3.1), но и в терминах сходимости образов баз фильтров и сходимости образов баз у/ф; см., например, [14]. Мы, однако, ограничиваемся сейчас использованием (3.1) и сходимости по Муру — Смиту.

Если в условиях, определяющих (3.1), $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то (см. [12–14])

$$(\mathbf{as})[X;\tau;r;\mathcal{E}] = \bigcap_{U\in\mathcal{E}} \mathrm{cl}(r^1(U),\tau). \tag{3.2}$$

Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то через $\mathcal{E}_{\mathbf{f}}$ условимся обозначать семейство всех множеств

$$\bigcap_{U\in\mathcal{K}} U, \qquad \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E});$$

тогда $\mathcal{E}_{\mathbf{f}} \in \beta[E]$ и для всяких ТП (X,τ) и оператора $r \in X^E$

$$(\mathbf{as})[X;\tau;r;\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[X;\tau;r;\mathcal{E}_{\mathbf{f}}]. \tag{3.3}$$

Свойство (3.3) позволяет использовать (3.2) для возникающего МП при несущественной коррекции "асимптотических ограничений".

Предложение 3.1. *Если (X,τ) и $(K,\mathbf{t})$ — два ТП, $m \in K^E$ и $g \in C_{\mathbf{ap}}(K,\mathbf{t},X,\tau)$, то*

$$(\mathbf{as})[X;\tau;g\circ m;\mathcal{E}] = g^1((\mathbf{as})[K;\mathbf{t};m;\mathcal{E}]) \;\; \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{3.4}$$

Доказательство сводится к очевидной комбинации (3.3) и положений [15,16]. Однако в целях полноты изложения мы его приведем, фиксируя $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и вводя $\mathcal{E}_{\mathbf{f}} \in \beta[E]$. При этом справедливо (3.3) и равенство

$$(\mathbf{as})[K;\mathbf{t};m;\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[K;\mathbf{t};m;\mathcal{E}_{\mathbf{f}}]. \tag{3.5}$$

Мы учитываем, что отображение g является, в частности, непрерывным, а тогда, как известно [17, § I.4],

$$g^1(\mathrm{cl}(A,\mathbf{t})) \subset \mathrm{cl}(g^1(A),\tau) \;\; \forall A \in \mathcal{P}(K). \tag{3.6}$$

Как следствие получаем, что (см. (3.2))

$$g^1((\mathbf{as})[K;\mathbf{t};m;\mathcal{E}_{\mathbf{f}}]) \subset \bigcap_{U\in\mathcal{E}_{\mathbf{f}}} g^1(\mathrm{cl}(m^1(U),\mathbf{t})) \subset \bigcap_{U\in\mathcal{E}_{\mathbf{f}}} \mathrm{cl}(g^1(m^1(U)),\tau)$$

$$= \bigcap_{U\in\mathcal{E}_{\mathbf{f}}} \mathrm{cl}((g\circ m)^1(U),\tau) = (\mathbf{as})[X;\tau;g\circ m;\mathcal{E}_{\mathbf{f}}]. \tag{3.7}$$

Отметим теперь, что $g \in C_{\mathrm{cl}}(K,\mathbf{t},X,\tau)$, а потому свойство (3.6) можно [17, § I.4] усилить:

$$g^1(\mathrm{cl}(A,\mathbf{t})) = \mathrm{cl}(g^1(A),\tau) \;\; \forall A \in \mathcal{P}(K).$$

Из (3.2) вытекает представление

$$(\mathbf{as})[X;\tau;g\circ m;\mathcal{E}_{\mathbf{f}}] = \bigcap_{U\in\mathcal{E}_{\mathbf{f}}} \mathrm{cl}((g\circ m)^1(U),\tau) = \bigcap_{U\in\mathcal{E}_{\mathbf{f}}} \mathrm{cl}(g^1(m^1(U)),\tau)$$

$$= \bigcap_{U\in\mathcal{E}_{\mathbf{f}}} g^1(\mathrm{cl}(m^1(U),\mathbf{t})). \tag{3.8}$$

Выберем произвольную точку z множества (3.8). Тогда $z \in g^1(\mathrm{cl}(m^1(U),\mathbf{t})) \;\; \forall U \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}$. Как следствие, для $U \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}$

$$\mathbb{F}[U] \overset{\triangle}{=} g^{-1}(\{z\}) \cap \mathrm{cl}(m^1(U),\mathbf{t}) \neq \varnothing. \tag{3.9}$$

Из того, что $\mathcal{E}_{\mathbf{f}} \neq \varnothing$, и из (3.9) следует, в частности, что $g^{-1}(\{z\}) \in \mathcal{P}'(K)$. Более того, поскольку $z \in X$, то (по выбору g)

$$g^{-1}(\{z\}) \in (\mathbf{t}\text{-comp})[K];$$

см. [17, § 3.7]. Иными словами, топология

$$\theta \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{t}|_{g^{-1}(\{z\})} = \{g^{-1}(\{z\}) \cap G: \ G \in \mathbf{t}\} \tag{3.10}$$

превращает $g^{-1}(\{z\})$ в компактное ТП:

$$(g^{-1}(\{z\}), \theta) \tag{3.11}$$

есть компактное ТП. Из (3.9), (3.10) выводим, что при $U \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}$ множество $\mathbb{F}[U]$ замкнуто в ТП (3.11); см. [17, § 2.1]. Тогда

$$\mathcal{F} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{F}[U]: \ U \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}\}$$

есть непустое семейство непустых множеств, замкнутых в компактном ТП (3.11). Отметим одно полезное свойство $\mathcal{E}_{\mathbf{f}}$, вытекающее из определения $\beta[E]$. Именно [20, с. 85], при всяком выборе $k \in \mathbb{N}$ и

$$(U_j)_{j \in \overline{1,k}}: \ \overline{1,k} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{f}}$$

непременно найдется множество $U \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}$, для которого

$$U \subset \bigcap_{j=1}^{k} U_j. \tag{3.12}$$

С учетом (3.9) получаем также свойство изотонности: $\forall U_1 \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}} \ \forall U_2 \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}$

$$(U_1 \subset U_2) \Longrightarrow (\mathbb{F}[U_1] \subset \mathbb{F}[U_2]). \tag{3.13}$$

Покажем, что $\mathcal{F}$ — центрированное семейство. В самом деле, пусть $\mathcal{Q} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{F})$. Тогда можно указать $n \in \mathbb{N}$ и кортеж

$$(F_j)_{j \in \overline{1,n}}: \ \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{F}$$

такие, что $\mathcal{Q} = \{F_j: \ j \in \overline{1,n}\}$. С учетом определения $\mathcal{F}$ подберем кортеж

$$(V_j)_{j \in \overline{1,n}}: \ \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{f}},$$

для которого $F_k = \mathbb{F}[V_k] \ \ \forall k \in \overline{1,n}$. В этом случае

$$\bigcap_{\Phi \in \mathcal{Q}} \Phi = \bigcap_{j=1}^{n} F_j = \bigcap_{j=1}^{n} \mathbb{F}[V_j]. \tag{3.14}$$

Используя (3.12), подбираем $W \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}$ так, что

$$W \subset \bigcap_{j=1}^{n} V_j.$$

Из (3.13) заключаем теперь, что непременно

$$\mathbb{F}[W] \subset \mathbb{F}[V_j] \ \ \forall j \in \overline{1,n}.$$

Как следствие, $\mathbb{F}[W]$ есть (см. (3.9), (3.14)) непустое п/м пересечения всех множеств $F_i, \ i \in \overline{1,n}$, и, следовательно (см. (3.14)),

$$\varnothing \neq \mathbb{F}[W] \subset \bigcap_{\Phi \in \mathcal{Q}} \Phi.$$

Поскольку выбор $\mathcal{Q}$ был произвольным, установлено, что $\mathcal{F}$ есть центрированное семейство множеств, замкнутых в компактном ТП (3.11). Поэтому [17, гл. 3] пересечение всех множеств из $\mathcal{F}$ непусто. Пусть
$$y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F.$$
Тогда в силу (3.9), определения $\mathcal{F}$ и непустоты семейства $\mathcal{E}_{\mathbf{f}}$ имеем включение $y \in g^{-1}(\{z\})$ и, кроме того, y есть точка пересечения всех множеств $\mathrm{cl}(m^1(U), \mathbf{t})$, $U \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}$. Учитывая (3.2), получаем, что $y \in (\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; m; \mathcal{E}_{\mathbf{f}}]$, причем $z = g(y)$. В результате
$$z \in g^1((\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; m; \mathcal{E}_{\mathbf{f}}]). \tag{3.15}$$
Поскольку выбор z был произвольным, имеем (см. (3.15)) вложение
$$(\mathbf{as})[X; \tau; g \circ m; \mathcal{E}_{\mathbf{f}}] \subset g^1((\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; m; \mathcal{E}_{\mathbf{f}}]), \tag{3.16}$$
что с учетом (3.7) означает совпадение множеств, участвующих в (3.16). С учетом (3.3) и (3.5) имеем теперь равенство
$$(\mathbf{as})[X; \tau; g \circ m; \mathcal{E}] = g^1((\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; m; \mathcal{E}]).$$
Коль скоро выбор семейства $\mathcal{E}$ был произвольным, (3.4), а стало быть, и предложение в целом установлены. □

Следствие 3.1. *Если (X, τ) — хаусдорфово, а $(K, \mathbf{t})$ — компактное ТП, то при всяком выборе $m \in K^E$ и $g \in C(K, \mathbf{t}, X, \tau)$ справедливо* (3.4).

Доказательство очевидно; см. [17, § 3.7], а также сводку свойств в [20, § 2.8].

Случай, обсуждаемый в следствии 3.1, будем называть компактифицируемым и уделять ему основное внимание. В этой связи напомним понятие компактификатора [21].

Определение 3.1. Если (X, τ) — ТП и $r \in X^E$, то называем (X, τ, r)-*компактификатором* всякий кортеж $(K, \mathbf{t}, p, q)$, для которого $(K, \mathbf{t})$ — компактное ТП, $p \in K^E$, $q \in C(K, \mathbf{t}, X, \tau)$ и при этом $r = q \circ p$.

Предложение 3.2. *Если (X, τ) — хаусдорфово ТП, $r \in X^E$, $(K, \mathbf{t}, p, q)$ есть (X, τ, r)-компактификатор и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то*
$$(\mathbf{as})[X; \tau; r; \mathcal{E}] = q^1((\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; p; \mathcal{E}]).$$

Доказательство — непосредственная комбинация следствия 3.1 и определения 3.1.

Определение 3.2. Триплет (X, τ, r), где (X, τ) — ТП и $r \in X^E$, называем *компактифицируемым*, если существует хотя бы один (X, τ, r)-компактификатор.

Замечание 3.1. Как показано в [21, с. 190, 191], при всяком выборе ТП (X, τ) и оператора $r \in X^E$ триплет (X, τ, r) компактифицируем тогда и только тогда, когда $r^1(E) \in (\tau\text{-comp})^0[X]$. Данное положение ранее было отмечено Е.Г. Пыткеевым в устной форме.

Предложение 3.3. *Если (X, τ) — компактное ТП и $r \in X^E$, то триплет (X, τ, r) непременно компактифицируем.*

Доказательство. Пусть ТП (X, τ) компактно и $r \in X^E$. Тогда $X \in (\tau\text{-comp})[X]$ и $r^1(E) \subset X$. Поэтому множество $r^1(E) \in \mathcal{P}(X)$ таково, что
$$\exists K \in (\tau\text{-comp})[X]: \ r^1(E) \subset K.$$
В итоге $r^1(E) \in (\tau\text{-comp})^0[X]$ и (см. замечание 3.1) триплет (X, τ, r) компактифицируем. □

4. Стоун-чеховский (уолменовский) компактификатор

В настоящем разделе совсем кратко напомним построения [14, 22, 23]. Напомним, что E — фиксированное непустое множество, играющее роль пространства обычных решений. При этом

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E]) \tag{4.1}$$

есть непустой нульмерный компакт, отвечающий расширению Уолмена дискретного пространства $(E, \mathcal{P}(E))$ и соответствующий в упомянутом случае варианту компактификации Стоуна — Чеха. При этом

$$\mathbf{m} \stackrel{\triangle}{=} (E\text{-ult})[\cdot] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^E \tag{4.2}$$

реализует погружение множества E в компакт (4.1) в виде всюду плотного множества:

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(E), \tau_{\mathbf{fi}}[E]). \tag{4.3}$$

Отметим (см. [14, 22, 23]), что при всяком выборе $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{F}\} \in (\tau_{\mathbf{fi}}[E]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]. \tag{4.4}$$

Рассматриваем далее компактифицируемые в смысле определения 3.2 триплеты (X, τ, r) с дополнительным свойством отделимости ТП (X, τ).

О п р е д е л е н и е 4.1. Триплет (X, τ, r), для которого (X, τ) — хаусдорфово ТП, $r \in X^E$ и существует хотя бы один (X, τ, r)-компактификатор, называем далее *отделимым компактифицируемым триплетом* (ОКТ).

С учетом замечания 3.1 имеем, что при всяком выборе хаусдорфова ТП (X, τ) и оператора $r \in X^E$, (X, τ, r) есть ОКТ тогда и только тогда, когда $r^1(E) \in (\tau\text{-comp})^0[X]$.

Из положений [14,22,23] следует важное свойство, для формулировки которого потребуется ввести ряд новых понятий и обозначений. Если (X, τ) — ТП, $r \in X^E$ и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то полагаем

$$(r\text{-LIM})[\mathcal{F}|\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{x \in X \mid r^1[\mathcal{F}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\},$$

что согласуется с обозначениями [14, 22, 23]. Тогда для всякого ОКТ (X, τ, r) и любого у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ непременно

$$\exists! x \in X : \ (r\text{-LIM})[\mathcal{F}|\tau] = \{x\}.$$

С учетом данного свойства полагаем, что при всяком выборе ОКТ (X, τ, r) оператор

$$\mathfrak{H}[\tau|r] : \ \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \longrightarrow X \tag{4.5}$$

определяется по следующему правилу: если $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то $\mathfrak{H}[\tau|r](\mathcal{U}) \in X$ обладает свойством

$$(r\text{-LIM})[\mathcal{U}|\tau] = \{\mathfrak{H}[\tau|r](\mathcal{U})\}. \tag{4.6}$$

Если (X, τ, r) — ОКТ, то (см. [14, 22, 23]) для оператора (4.5), (4.6) имеем

$$\mathfrak{H}[\tau|r] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], X, \tau), \qquad r = \mathfrak{H}[\tau|r] \circ \mathbf{m}, \qquad \mathfrak{H}[\tau|r] \in \mathrm{cl}(r^1(E), \tau)^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}_{(*)}. \tag{4.7}$$

Теперь уже вполне очевидно следующее

Предложение 4.1. *Если (X, τ, r) есть отделимый компактифицируемый триплет, то кортеж*

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{m}, \mathfrak{H}[\tau|r])$$

есть (X, τ, r)-компактификатор со свойством (4.3).

Из предложений 3.2 и 4.1 вытекает нужное нам и используемое в [14, 22, 23] основное свойство: если (X, τ, r) есть ОКТ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то (см. [14, разд. 8]) с учетом (4.4)

$$(\mathbf{as})[X; \tau; r; \mathcal{E}] = \mathfrak{H}[\tau|r]^1((\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]; \tau_{\mathbf{fi}}[E]; \mathbf{m}; \mathcal{E}]) = \mathfrak{H}[\tau|r]^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]). \tag{4.8}$$

5. Абстрактная задача о достижимости в условиях ограничений

В настоящем разделе мы возвращаемся к задаче, намеченной во введении. Напомним, что E — непустое пространство решений, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{X}$ — непустые множества, $Y \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$; заданы два оператора
$$\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E \ \text{ и } \ \mathbf{s} \in \mathbf{X}^E. \tag{5.1}$$
Полагаем, что Y задает ограничение на выбор решения в виде условия $\mathbf{s}(e) \in Y$, которое будем называть *Y-ограничением.* Тогда множество всех достижимых на значениях $\mathbf{h}$ при данном Y-ограничении элементов $\mathbf{H}$ есть
$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \in \mathcal{P}(\mathbf{H}). \tag{5.2}$$
Множество (5.2) можно рассматривать в качестве решения невозмущенной задачи о достижимости. Возмущения будем отождествлять с ослаблением Y-ограничения. Как и в [24], будем рассматривать асимптотическую версию.

Всюду в дальнейшем τ есть фиксированная топология множества $\mathbf{H}$, превращающая его в ТП $(\mathbf{H}, \tau)$. Кроме того, фиксируем ТП $(\mathbf{X}, \theta)$. Наличие топологии τ позволяет конструировать МП в $\mathbf{H}$, а наличие топологии θ дает возможность ввести ограничения асимптотического характера в множестве E. Последнее реализуется следующим образом.

Введем непустое семейство
$$\mathcal{Y} \in \mathcal{P}'(\mathcal{N}_\theta[Y]) \tag{5.3}$$
окрестностей множества Y в ТП $(\mathbf{X}, \theta)$. Всюду в настоящем разделе предполагается (см. [24]), что выполнено следующее условие $\mathcal{Y}$-регулярности:
$$\forall x \in \mathbf{X} \setminus Y \ \exists H_1 \in \mathcal{N}_\theta(x) \ \exists H_2 \in \mathcal{Y}: \quad H_1 \cap H_2 = \varnothing. \tag{5.4}$$

З а м е ч а н и е 5.1. Условие (5.4) всегда выполняется, если $(\mathbf{X}, \theta)$ — регулярное [25, гл. 4] ТП, Y — замкнутое множество в этом ТП и $\mathcal{Y} = \mathcal{N}_\theta[Y]$. Последнее равенство в некоторых случаях, однако, неестественно как условие. Так, например, если топология θ порождена метрикой множества $\mathbf{X}$ (т. е. ТП $(\mathbf{X}, \theta)$ метризуемо), а Y — непустое замкнутое множество, то в качестве $\mathcal{Y}$ имеет смысл выбрать семейство всех ε-окрестностей Y, $\varepsilon > 0$; условие (5.4) будет при этом выполняться. Легко видеть, что в общем случае условия (5.4) множество $\mathbf{X} \setminus Y$ является окрестностью (в смысле [8]) каждой своей точки и как следствие открыто, т. е. $\mathbf{X} \setminus Y \in \theta$; стало быть, Y замкнуто (при условии (5.4)). Заметим, что в [24, § 4] налагалось дополнительное условие, что семейство $\mathcal{Y}$ является направленным двойственно к вложению. Здесь мы отказываемся от этого предположения.

О п р е д е л е н и е 5.1. Кортеж $(K, \mathbf{t}, p, q, r)$ называем *моделью расширения для триплетов* $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ *и* $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$, если $(K, \mathbf{t})$ — ТП,
$$p \in K^E, \qquad q \in C_{\mathbf{ap}}(K, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau), \qquad r \in C(K, \mathbf{t}, \mathbf{X}, \theta) \tag{5.5}$$
и при этом выполнены условия
$$K = \mathrm{cl}(p^1(E), \mathbf{t}), \qquad \mathbf{h} = q \circ p, \qquad \mathbf{s} = r \circ p. \tag{5.6}$$

В терминах семейства (5.3) определяется следующее непустое семейство $\mathcal{E}$ п/м E :
$$\mathcal{E} \overset{\triangle}{=} \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]. \tag{5.7}$$
Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, полагаем (5.7) выполненным.

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие $\mathcal{Y}$-регулярности* (5.4) *и* $(K, \mathbf{t}, p, q, r)$ *— модель расширения для триплетов* $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ *и* $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$. *Тогда*
$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = q^1(r^{-1}(Y)). \tag{5.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о может быть извлечено из теоремы 4.1 работы [24] при несущественном изменении способа рассуждения, ориентированного в [24] на обеспечение универсальности МП в диапазоне топологий множества $\mathbf{X}$; здесь же данная топология фиксирована. Кроме того, как уже отмечалось, мы опускаем одно из условий [24], касающееся применения направленных систем множеств (см. (3.2)). В этой связи мы приведем доказательство, выделяя для отдельного рассмотрения обоснование равенства

$$r^{-1}(Y) = (\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; p; \mathcal{E}]. \tag{5.9}$$

В связи с (5.9) используем (3.3). Пусть $y_* \in r^{-1}(Y)$, т. е. $y_* \in K$ и при этом $r(y_*) \in Y$. Выберем $U \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}$, после чего подберем (см. (5.7)) $V \in \mathbb{N}_\theta[Y]$ так, что при этом

$$U = \mathbf{s}^{-1}(V).$$

В этой связи напомним, что $\mathcal{Y} \subset \mathbb{N}_\theta[Y]$ (см. (5.3)), причем семейство $\mathbb{N}_\theta[Y]$ замкнуто относительно конечных пересечений. Сопоставляя множеству U семейство $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$, для которого

$$U = \bigcap_{L \in \mathcal{K}} L,$$

мы для каждого $M \in \mathcal{K}$ подбираем затем $N_M \in \mathcal{Y}$ так, что при этом $M = \mathbf{s}^{-1}(N_M)$. Стало быть, можно указать семейство $\mathcal{K}_1 \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Y})$ такое, что $\mathcal{K} = \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{K}_1]$. Тогда

$$U = \bigcap_{H \in \mathcal{K}_1} \mathbf{s}^{-1}(H) = \mathbf{s}^{-1}\Big(\bigcap_{H \in \mathcal{K}_1} H\Big),$$

где $\bigcap\limits_{H \in \mathcal{K}_1} H \in \mathbb{N}_\theta[Y]$. Последнее множество мы и используем в качестве V. Подберем $V_0 \in \mathbb{N}_\theta^0[Y]$ так, что $V_0 \subset V$, а тогда $r^{-1}(V_0) \in \mathbf{t}$ (см. (5.5)) и, кроме того,

$$r^{-1}(Y) \subset r^{-1}(V_0) \subset r^{-1}(V).$$

Получаем, что $r^{-1}(V_0) \in \mathcal{N}_{\mathbf{t}}^0(y_*)$. Пусть $G_* \in \mathcal{N}_{\mathbf{t}}^0(y_*)$. Тогда

$$\mathbb{G}_0 \stackrel{\triangle}{=} G_* \cap r^{-1}(V_0) \in \mathcal{N}_{\mathbf{t}}^0(y_*). \tag{5.10}$$

В силу (5.5) и (5.10) имеем очевидное свойство $\mathbb{G}_0 \cap p^1(E) \neq \varnothing$. С учетом данного свойства подберем $e_0 \in E$ так, что при этом $p(e_0) \in \mathbb{G}_0$. Тогда (см. (5.10)), в частности, $p(e_0) \in r^{-1}(V_0)$, а потому $\mathbf{s}(e_0) = r(p(e_0)) \in V_0$ и тем более $\mathbf{s}(e_0) \in V$, что означает $e_0 \in U$. Поэтому $p(e_0) \in p^1(U)$. Но (см. (5.10)) $p(e_0) \in G_*$. Стало быть,

$$p^1(U) \cap G_* \neq \varnothing.$$

Поскольку выбор G_* был произвольным, установлено, что $y_* \in \mathrm{cl}(p^1(U), \mathbf{t})$. Коль скоро выбор U был произвольным, имеем из (3.2), (3.3) включение $y_* \in (\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; p; \mathcal{E}]$, чем и завершается обоснование вложения

$$r^{-1}(Y) \subset (\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; p; \mathcal{E}]. \tag{5.11}$$

Пусть $y^* \in (\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; p; \mathcal{E}]$. Тогда, в частности, $y^* \in K$ и $z^* \stackrel{\triangle}{=} r(y^*) \in \mathbf{X}$. Покажем, что $z^* \in Y$. В самом деле, допустим противное: $z^* \in \mathbf{X} \setminus Y$. С учетом условия $\mathcal{Y}$-регулярности (см. (5.4)) подберем окрестности $\mathbb{H}_1 \in \mathcal{N}_\theta(z^*)$ и $\mathbb{H}_2 \in \mathcal{Y}$ так, что при этом

$$\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 = \varnothing. \tag{5.12}$$

При этом $W \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{s}^{-1}(\mathbb{H}_2) \in \mathcal{E}$ в силу (5.7); в частности, $W \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}$, а тогда в силу (3.2)

$$(\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; p; \mathcal{E}] = (\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; p; \mathcal{E}_{\mathbf{f}}] \subset \mathrm{cl}(p^1(W), \mathbf{t}). \tag{5.13}$$

Имеем с учетом (5.5), что $p^1(W) = p^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{H}_2)) = p^1(p^{-1}(r^{-1}(\mathbb{H}_2))) \subset r^{-1}(\mathbb{H}_2)$. С учетом (5.13)

$$(\mathbf{as})[K;\mathbf{t};p;\mathcal{E}] \subset \mathrm{cl}(r^{-1}(\mathbb{H}_2),\mathbf{t}).$$

По выбору y^* имеем, стало быть, включение

$$y^* \in \mathrm{cl}(r^{-1}(\mathbb{H}_2),\mathbf{t}). \tag{5.14}$$

Подберем $\mathbb{H}_1^0 \in \mathcal{N}_\theta^0(z^*)$ так, что $\mathbb{H}_1^0 \subset \mathbb{H}_1$; тогда $r^{-1}(\mathbb{H}_1^0) \in \mathbf{t}$ в силу непрерывности r. Поскольку $z^* = r(y^*) \in \mathbb{H}_1^0$, то $y^* \in r^{-1}(\mathbb{H}_1^0)$, что означает свойство

$$r^{-1}(\mathbb{H}_1^0) \in \mathcal{N}_{\mathbf{t}}^0(y^*),$$

а потому в силу (5.14) непременно имеет место

$$r^{-1}(\mathbb{H}_1^0) \cap r^{-1}(\mathbb{H}_2) = r^{-1}(\mathbb{H}_1^0 \cap \mathbb{H}_2) \neq \varnothing,$$

что, однако, невозможно, так как $\mathbb{H}_1^0 \cap \mathbb{H}_2 = \varnothing$ по выбору $\mathbb{H}_1^0$ и в силу (5.12). Полученное противоречие показывает, что на самом деле $z^* \in Y$ и, стало быть, $y^* \in r^{-1}(Y)$. Вложение, противоположное (5.11), установлено, чем и завершается доказательство равенства (5.9).

Из (5.5), (5.6) и предложения 3.1 следует, что

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}] = q^1((\mathbf{as})[K;\mathbf{t};p;\mathcal{E}]).$$

В силу (5.9) множества $(\mathbf{as})[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}]$ и $q^1(r^{-1}(Y))$ совпадают, что и требовалось. □

Сравнивая (5.2) и теорему 5.1, получаем, что при всяком выборе модели расширения (для триплетов $(\mathbf{H},\tau,\mathbf{h})$ и $(\mathbf{X},\theta,\mathbf{s})$) и при выполнении условия $\mathcal{Y}$-регулярности (см. (5.4)), эффект расширения (связанный с применением асимптотической версии исходной задачи) сводится к замене

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \longrightarrow q^1(r^{-1}(Y)). \tag{5.15}$$

Уместно, по-видимому, говорить в связи с (5.15) об “улучшении” функциональных элементов q, r в сравнении с $\mathbf{h}$, $\mathbf{s}$.

З а м е ч а н и е 5.2. Рассмотрим одно простое следствие, связанное с (5.15) и возможностью изменения множества Y. В пределах данного замечания полагаем по-прежнему заданными триплеты $(\mathbf{H},\tau,\mathbf{h})$ и $(\mathbf{X},\theta,\mathbf{s})$; множество Y сейчас (в данном замечании) фиксировать не будем. Каждому множеству $Z \in \mathcal{P}(X)$ сопоставляется семейство $\mathfrak{N}_\theta[Z]$ всех окрестностей Z в ТП $(\mathbf{X},\theta)$. Пусть

$$\mathfrak{X} \triangleq \{Z \in \mathcal{P}(\mathbf{X}) \mid \forall x \in \mathbf{X} \setminus Z\ \exists H_1 \in \mathcal{N}_\theta(x)\ \exists H_2 \in \mathfrak{N}_\theta[Z]:\ H_1 \cap H_2 = \varnothing\}. \tag{5.16}$$

Если $Z \in \mathfrak{X}$, то можно полагать в наших предыдущих построениях $Y = Z$ и $\mathcal{Y} = \mathfrak{N}_\theta[Z]$; при этом реализуется (см. (5.16)) вариант условия $\mathcal{Y}$-регулярности. Ясно, что

$$\mathcal{E}_{\mathbf{s}}[Z] \triangleq \mathbf{s}^{-1}[\mathfrak{N}_\theta[Z]] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))\ \ \forall Z \in \mathcal{P}(\mathbf{X}). \tag{5.17}$$

Отметим одно простое свойство, фиксируя $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ и используя $\overline{1,\mathbf{n}} = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq \mathbf{n}\}$. Кроме того, пусть

$$(Z_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}}:\ \overline{1,\mathbf{n}} \longrightarrow \mathfrak{X}. \tag{5.18}$$

Тогда имеем следующее очевидное равенство

$$\mathbf{h}^1\biggl(\mathbf{s}^{-1}\biggl(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} Z_i\biggr)\biggr) = \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Z_i)), \tag{5.19}$$

характеризующее структуру системы невозмущенных задач о достижимости на значениях $\mathbf{h}$. Представляет интерес обеспечение равенства

$$(\mathbf{as})\left[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}_{\mathbf{s}}\left[\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} Z_i\right]\right] = \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}}(\mathbf{as})\big[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}_{\mathbf{s}}[Z_i]\big]. \tag{5.20}$$

В самом деле, (5.20) можно рассматривать как асимптотический аналог (5.19). Не обсуждая сейчас вопрос о справедливости (5.20) в общем случае, отметим только случай, касающийся следующего условия:

(A) для триплетов $(\mathbf{H},\tau,\mathbf{h})$ и $(\mathbf{X},\theta,\mathbf{s})$ существует модель расширения.

Утверждение 1. *При условии* (A) *справедливо равенство* (5.20).

Д о к а з а т е л ь с т в о начнем с замечания, что

$$\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} Z_i \in \mathfrak{X} \tag{5.21}$$

(свойство (5.21) справедливо в общем случае, а не только при условии (A)). В самом деле, пусть

$$x_* \in \mathbf{X} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} Z_i\right).$$

Тогда $x_* \in \mathbf{X}\setminus Z_i \ \ \forall i \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Поэтому (см. (5.16)) можно указать такие два кортежа

$$\left(H_1^{(i)}\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}}:\ \overline{1,\mathbf{n}} \longrightarrow \mathcal{N}_\theta(x_*),$$

$$\left(H_2^{(i)}\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}} \in \prod_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{N}_\theta[Z_i],$$

что $H_1^{(j)}\cap H_2^{(j)} = \varnothing \ \ \forall j \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Тогда, как легко видеть,

$$\left(\mathbb{H}_1 \triangleq \bigcap_{i=1}^{\mathbf{n}} H_1^{(i)} \in \mathcal{N}_\theta(x_*)\right)\ \&\ \left(\mathbb{H}_2 \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} H_2^{(i)} \in \mathcal{N}_\theta[\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} Z_i]\right). \tag{5.22}$$

Имеем $\mathbb{H}_1\cap\mathbb{H}_2 = \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}}\left(\mathbb{H}_1\cap H_2^{(i)}\right)$. При этом, однако,

$$\mathbb{H}_1\cap H_2^{(j)} \subset H_1^{(j)}\cap H_2^{(j)} \quad \forall j\in\overline{1,\mathbf{n}}.$$

В итоге $\mathbb{H}_1\cap\mathbb{H}_2=\varnothing$. Поскольку выбор x_* был произвольным, из (5.16) и (5.22) следует, что

$$\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} Z_i \in \mathfrak{X} \tag{5.23}$$

(свойство (5.23) справедливо в общем случае, а не только при условии (A)). Пусть теперь $(K,\mathbf{t},p,q,r)$ — модель расширения для триплетов $(\mathbf{H},\tau,\mathbf{h})$ и $(\mathbf{X},\theta,\mathbf{s})$. Учитывая (5.16) и теорему 5.1, имеем при $j\in\overline{1,n}$ равенство

$$(\mathbf{as})\big[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}_{\mathbf{s}}[Z_j]\big] = q^1(r^{-1}(Z_j)). \tag{5.24}$$

Кроме того, из теоремы 5.1, (5.16), (5.17) и (5.23) мы получаем равенство

$$(\mathbf{as})\left[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}_{\mathbf{s}}\left[\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} Z_i\right]\right] = q^1\left(r^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} Z_i\right)\right). \tag{5.25}$$

С другой стороны, по свойствам операций взятия образа и прообраза

$$q^1\left(r^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} Z_i\right)\right) = \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} q^1\big(r^{-1}(Z_i)\big). \tag{5.26}$$

Из (5.24)–(5.26) следует (в случае (A)) равенство (5.20). □

6. Компактифицируемая модель расширения

Возвращаясь к (5.5), (5.6) и сохраняя в настоящем разделе фиксированными триплеты $(\mathbf{H},\tau,\mathbf{h})$ и $(\mathbf{X},\theta,\mathbf{s})$, отметим одну весьма очевидную возможность в части построения модели расширения. Всюду в пределах настоящего раздела полагаем выполненным следующее

Условие 6.1. *Каждое из ТП $(\mathbf{H},\tau)$ и $(\mathbf{X},\theta)$ является хаусдорфовым.*

Предложение 6.1. *Пусть $(K,\mathbf{t})$ — компактное ТП, $p \in K^E$, $q \in C(K,\mathbf{t},\mathbf{H},\tau)$, $r \in C(K,\mathbf{t},\mathbf{X},\theta)$ и при этом*

$$K = \mathrm{cl}(p^1(E),\mathbf{t}), \qquad \mathbf{h} = q \circ p, \qquad \mathbf{s} = r \circ p. \tag{6.1}$$

Тогда $(K,\mathbf{t},p,q,r)$ есть модель расширения для триплетов $(\mathbf{H},\tau,\mathbf{h})$ и $(\mathbf{X},\theta,\mathbf{s})$.

Доказательство сводится к использованию хорошо известных свойств непрерывного отображения из компактного ТП в хаусдорфово (см. [17, § 3.7]); отметим в этой связи построения [20, с. 77].

О п р е д е л е н и е 6.1. Если $(K,\mathbf{t})$ — компактное ТП, а триплет (p,q,r), где

$$p \in K^E, \qquad q \in C(K,\mathbf{t},\mathbf{H},\tau), \qquad r \in C(K,\mathbf{t},\mathbf{X},\theta),$$

удовлетворяет условиям (6.1), то кортеж $(K,\mathbf{t},p,q,r)$ называем *компактифицируемой моделью расширения* (КМР) для триплетов $(\mathbf{H},\tau,\mathbf{h})$ и $(\mathbf{X},\theta,\mathbf{s})$.

Из теоремы 5.1 и предложения 6.1 вытекает следующая очевидная теперь

Теорема 6.1. *Пусть выполнено условие $\mathcal{Y}$-регулярности* (5.4), *а $(K,\mathbf{t},p,q,r)$ — компактифицируемая модель расширения для триплетов $(\mathbf{H},\tau,\mathbf{h})$ и $(\mathbf{X},\theta,\mathbf{s})$. Тогда справедливо* (5.8).

З а м е ч а н и е 6.1. Полезно отметить тот факт, что (см. [24, § 6]) при наличии КМР появляется своеобразная возможность реализации МП с точностью до любой наперед выбранной окрестности. В [24, § 6] упомянутое свойство названо *окрестностной реализацией* МП.

Напомним (см. разд. 4), что в случае, когда множества $\mathbf{h}^1(E)$ и $\mathbf{s}^1(E)$ предкомпактны в ТП $(\mathbf{H},\tau)$ и $(\mathbf{X},\theta)$ соответственно, у нас определены операторы $\mathfrak{H}[\tau|\mathbf{h}]$ и $\mathfrak{H}[\theta|\mathbf{s}]$; их свойства указаны в (4.7). Более того, справедливо следующее

Предложение 6.2. *Пусть $\mathbf{h}^1(E) \in (\tau\text{-comp})^0[\mathbf{H}]$ и $\mathbf{s}^1(E) \in (\theta\text{-comp})^0[\mathbf{X}]$. Тогда кортеж*

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E],\tau_{\mathbf{fi}}[E],\mathbf{m},\mathfrak{H}[\tau|\mathbf{h}],\mathfrak{H}[\theta|\mathbf{s}]) \tag{6.2}$$

является компактифицируемой моделью расширения для триплетов $(\mathbf{H},\tau,\mathbf{h})$ и $(\mathbf{X},\theta,\mathbf{s})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что согласно свойству, упомянутому после определения 4.1, $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ и $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$ суть отделимые компактифицируемые триплеты. Поэтому (см. предложение 4.1) имеем свойства:

1) $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{m}, \mathfrak{H}[\tau|\mathbf{h}])$ есть $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$-компактификатор со свойством (4.3);

2) $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{m}, \mathfrak{H}[\theta|\mathbf{s}])$ есть $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$-компактификатор со свойством (4.3).

С учетом свойств (4.2), (4.3) и (4.7) получаем, что

$$\mathbf{m} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^E, \qquad \mathfrak{H}[\tau|\mathbf{h}] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{H}, \tau), \qquad \mathfrak{H}[\theta|\mathbf{s}] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{X}, \theta),$$

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(E), \tau_{\mathbf{fi}}[E]), \qquad \mathbf{h} = \mathfrak{H}[\tau|\mathbf{h}] \circ \mathbf{m}, \qquad \mathbf{s} = \mathfrak{H}[\theta|\mathbf{s}] \circ \mathbf{m}.$$

В силу компактности ТП (4.1) и определения 6.1 мы получаем требуемое положение: (6.2) есть КМР. □

С учетом предложения 6.2 можно использовать теорему 6.1 следующим образом.

Предложение 6.3. *Пусть* $\mathbf{h}^1(E) \in (\tau\text{-comp})^0[\mathbf{H}]$ *и* $\mathbf{s}^1(E) \in (\theta\text{-comp})^0[\mathbf{X}]$. *Тогда при условии* (5.4)

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = \mathfrak{H}[\tau|\mathbf{h}]^1(\mathfrak{H}[\theta|\mathbf{s}]^{-1}(Y)).$$

Доказательство очевидно и сводится к непосредственной комбинации теорем 5.1 и 6.1.

Теорема 6.2. *Эквивалентны следующие два утверждения:* (1) *существует компактифицируемая модель расширения;* (2) $\mathbf{h}^1(E) \in (\tau\text{-comp})^0[\mathbf{H}]$ *и* $\mathbf{s}^1(E) \in (\theta\text{-comp})^0[\mathbf{X}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 6.2 следует, что (2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть истинно (1). Выберем и зафиксируем произвольную КМР $(K, \mathbf{t}, p, q, r)$. Стало быть, $(K, \mathbf{t})$ есть компактное ТП и выполнено (6.1), где p, q и r соответствуют определению 6.1. В силу непрерывности q и r получаем

$$q^1(K) \in (\tau\text{-comp})[\mathbf{H}] \qquad \text{и} \qquad r^1(K) \in (\theta\text{-comp})[\mathbf{X}]. \tag{6.3}$$

При этом $\mathbf{h}^1(E) = (q \circ p)^1(E) = q^1(p^1(E)) \subset q^1(K)$, так как $p^1(E) \subset K$. Аналогично, $\mathbf{s}^1(E) = (r \circ p)^1(E) = r^1(p^1(E)) \subset r^1(K)$. С учетом (6.3) имеем

$$\mathbf{h}^1(E) \in (\tau\text{-comp})^0[\mathbf{H}] \qquad \text{и} \qquad \mathbf{s}^1(E) \in (\theta\text{-comp})^0[\mathbf{X}],$$

т. е. истинно (2). Итак, (1) $\Longrightarrow$ (2). □

7. Компактифицируемый триплет, ассоциированный с пространством оценок

Используем $(E, \mathbf{H}, \mathbf{h})$, а также множество-образ

$$\mathbb{H} \overset{\triangle}{=} \mathbf{h}^1(E) \in \mathcal{P}'(\mathbf{H}) \tag{7.1}$$

(оснащение $\mathbf{H}$ какой-либо топологией здесь не предполагается). Ясно, что $\mathbf{h} \in \mathbb{H}^E_{(*)}$; данное свойство называем *собственной сюръективностью* $\mathbf{h}$. Отметим, что [8, гл. I] в силу (7.1)

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{7.2}$$

С учетом (7.2) определяем оператор $\mathfrak{U}$, действующий из $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ в $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ по правилу

$$\mathfrak{U}(\mathcal{F}) \overset{\triangle}{=} \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{7.3}$$

В виде $\mathfrak{U}$ (7.3) получили частный случай известного оператора [10, с. 213]; в этой связи именуем $\mathfrak{U}$ оператором Чеха. Отметим (см. символику разд. 3), что в нашем случае

$$\mathfrak{U} \in C\Big(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]\Big) \cap \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}_{(*)}, \tag{7.4}$$

т. е. $\mathfrak{U}$ — непрерывная сюръекция непустых нульмерных компактов

$$\big(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E]\big), \qquad \big(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]\big). \tag{7.5}$$

В связи с (7.4) отметим общие положения [18, п. 6.9]. Компакты (7.5) рассматриваем в качестве обобщенных версий множеств E и $\mathbb{H}$ соответственно. Если $\mathbf{h}$ инъективно как отображение из E в $\mathbf{H}$, то $\mathfrak{U}$ — гомеоморфизм компактов (7.5). Используем далее (см. разд. 3, 4)

$$\mathbf{m} = (E\text{-ult})[\cdot], \qquad \mathbf{n} \triangleq (\mathbb{H}\text{-ult})[\cdot]. \tag{7.6}$$

Имеем в (7.6) операторы погружения множеств E и $\mathbb{H}$ в первый и второй компакты (7.5) соответственно. Наряду с (4.3) имеем равенство

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] = \mathrm{cl}(\mathbf{n}^1(\mathbb{H}), \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]);$$

стало быть, погружение посредством (7.6) реализует всюду плотные множества в компактах (7.5) (см., например, [18]). Из определений следует равенство

$$\mathfrak{U} \circ \mathbf{m} = \mathbf{n} \circ \mathbf{h}, \tag{7.7}$$

с которым далее будет связываться замена (а точнее, расширение)

$$(\mathbf{H}, \mathbf{h}) \longrightarrow (\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \mathbf{n} \circ \mathbf{h}) \tag{7.8}$$

пространства оценок; отметим по поводу (7.8), что $\mathbf{n}$ — биекция $\mathbb{H}$ на множество $\mathbf{n}^1(\mathbb{H})$. Итак, у/ф из $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ играют роль обобщенных оценок. Из (7.4), (7.7) и определения 3.1 следует

Предложение 7.1. *Кортеж* $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{m}, \mathfrak{U})$ *является* $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}], \mathbf{n} \circ \mathbf{h})$*-компактификатором.*

Предложение 7.2. *Кортеж* $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}], \mathbf{n} \circ \mathbf{h})$ *является отделимым компактифицируемым триплетом.*

Для доказательства достаточно учесть предложение 3.3. Теперь используем предложение 4.1. В этой связи отметим следующее

Предложение 7.3. $\mathfrak{H}[\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]|\mathbf{n} \circ \mathbf{h}] = \mathfrak{U}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложениям 4.1 и 7.2

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{m}, \mathfrak{H}[\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]|\mathbf{n} \circ \mathbf{h}])$$

есть $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}], \mathbf{n} \circ \mathbf{h})$-компактификатор. Это означает (см. определение 3.1), в частности, что

$$\mathbf{n} \circ \mathbf{h} = \mathfrak{H}[\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]|\mathbf{n} \circ \mathbf{h}] \circ \mathbf{m}. \tag{7.9}$$

С другой стороны, имеем (7.7), а тогда (см. (7.9))

$$\mathfrak{U} \circ \mathbf{m} = \mathfrak{H}[\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]|\mathbf{n} \circ \mathbf{h}] \circ \mathbf{m}. \tag{7.10}$$

Из (7.10) вытекает система равенств

$$\mathfrak{U}(\mathbf{m}(e)) = \mathfrak{H}[\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]|\mathbf{n} \circ \mathbf{h}](\mathbf{m}(e)) \;\; \forall e \in E.$$

Последнее означает справедливость равенства

$$(\mathfrak{U}|\mathbf{m}^1(E)) = (\mathfrak{H}[\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]|\mathbf{n} \circ \mathbf{h}]|\mathbf{m}^1(E)).$$

Но тогда [9, с.193] в силу непрерывности операторов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{H}[\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}|\mathbf{n}\circ\mathbf{h}]$, а также в силу (4.3) имеем требуемое совпадение $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{H}[\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]|\mathbf{n}\circ\mathbf{h}]$ (следует учесть еще свойство отделимости второго в (7.5) ТП). $\square$

Итак, оператор Чеха совпадает в рассматриваемом случае с обобщенным оператором предельного перехода в составе стоун-чеховского компактификатора. Стало быть, компактификатор в предложении 7.1 является частным случаем (вариантом) стоун-чеховского компактификатора, используемого в предложении 4.1. Из предложений 3.2 и 7.1 легко следует

Предложение 7.4. *Если $\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то справедливо равенство*

$$(\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}];\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}];\mathbf{n}\circ\mathbf{h};\mathcal{E}]=\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]).$$

Отметим, что при доказательстве учитывается установленное в [14, § 8] свойство, представляющее и самостоятельный интерес: если $\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]=(\mathbf{as})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E];\tau_{\mathbf{fi}}[E];\mathbf{m};\mathcal{E}]$.

8. Об одном классе задач, допускающих компактификацию фрагментов пространства решений

В настоящем разделе мы рассматриваем некоторые следствия положений [26, § 7], имея в виду применение последних в теореме 5.1. Речь идет о "конечно-аддитивном" варианте модели расширения, которая не сводится, вообще говоря, к процедуре компактификации всего пространства решений.

Фиксируем непустое множество I, а также полуалгебру $\mathcal{L}$ п/м I, получая измеримое пространство $(I,\mathcal{L})$ с полуалгеброй множеств. Через $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех неотрицательных вещественнозначных конечно-аддитивных мер на $\mathcal{L}$, получая конус в $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ (здесь и ниже $\mathbb{R}$ — вещественная прямая). Тогда множество $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ всех вещественнозначных конечно-аддитивных мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную вариацию, при оснащении поточечно определяемыми линейными операциями (а также "поточечными" умножением и порядком) порождено как линейное пространство конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. В $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ определяется сильная норма; ее значением для каждой меры $\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$ является полная вариация μ на множестве I. Если $\mu\in(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то сильная норма μ совпадает с $\mu(I)$.

Если $L\in\mathcal{P}(I)$, то через χ_L, $\chi_L\in\mathbb{R}^I$, обозначаем индикатор (характеристическую функцию) множества L; см. [27, с. 56]. Линейную оболочку множества $\{\chi_L:\ L\in\mathcal{L}\}$ обозначаем через $B_0(I,\mathcal{L})$, следуя [12, 13, 21, 24, 26]. Тогда $B_0(I,\mathcal{L})$ — линейное многообразие в банаховом пространстве $\mathbb{B}(I)$ всех ограниченных вещественнозначных функций на I, оснащаемом традиционной sup-нормой $\|\cdot\|$. В согласии с [28, гл. IV] обозначаем через $B(I,\mathcal{L})$ замыкание $B_0(I,\mathcal{L})$ в банаховом пространстве $(\mathbb{B}(I),\|\cdot\|)$; тогда $B(I,\mathcal{L})$ с нормой, индуцированной из $(\mathbb{B}(I),\|\cdot\|)$, само является банаховым пространством, а пространство $B^*(I,\mathcal{L})$, топологически сопряженное к $B(I,\mathcal{L})$, изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме. Оснащая $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$ [12, с. 70], получаем локально выпуклый σ-компакт

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}),\tau_*(\mathcal{L}));\tag{8.1}$$

используем известную теорему Алаоглу (см. [28, гл. V]) об условиях компактности в ТП (8.1).

Далее через $B^+(I,\mathcal{L})$ (через $B^+_0(I,\mathcal{L})$) обозначаем множество всех неотрицательных функций из $B(I,\mathcal{L})$ (из $B_0(I,\mathcal{L})$). Интегрирование функций из $B(I,\mathcal{L})$ относительно мер из $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ осуществляем, используя простейшую схему [12, § 3.4]; эта схема достаточна для построения конкретного изометрического изоморфизма $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(I,\mathcal{L})$ посредством сопоставления каждой мере $\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$ функционала

$$f\longmapsto\int\limits_I f\,d\mu:\ B(I,\mathcal{L})\longrightarrow\mathbb{R}.$$

Фиксируем $\eta \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и полагаем, что

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ ((\eta(L) = 0) \Longrightarrow (\mu(L) = 0))\big\},$$

получая (замкнутый в ТП (8.1)) конус всех неотрицательных слабо абсолютно непрерывных [29] относительно η конечно-аддитивных мер на $\mathcal{L}$. Мы ограничиваемся главным образом работой с неотрицательными функциями и мерами, отсылая к [24, 26] за более общими постановками. Если $f \in B^+(I,\mathcal{L})$, то, следуя построениям [12–16, 20, 24, 26], через $f * \eta$ обозначаем неопределенный η-интеграл функции f (см. [12, § 3.4]), $f*\eta \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$. Через $\mathbf{p}$ обозначаем оператор

$$f \longmapsto f * \eta :\ B_0^+(I,\mathcal{L}) \longrightarrow (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta].$$

Из монографии [12] (§ 4.2 и теорема 4.3.1) имеем для топологии $\tau_\eta^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \tau_*(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]}$ цепочку равенств

$$\mathrm{cl}(\mathbf{p}^1(B_0^+(I,\mathcal{L})), \tau_\eta^*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\mathbf{p}^1(B_0^+(I,\mathcal{L})), \tau_*(\mathcal{L})) \cap (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] = (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]. \tag{8.2}$$

Далее используем соглашение: если $k \in \mathbb{N}$, то вместо обозначения $\mathbb{R}^{\overline{1,k}}$ используем более традиционное $\mathbb{R}_k$ (k-мерное арифметическое пространство, понимаемое как множество всех кортежей $(x_i)_{i\in\overline{1,k}} :\ \overline{1,k} \longrightarrow \mathbb{R}$); через $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}$ обозначаем обычную топологию покоординатной сходимости в $\mathbb{R}_k$.

В настоящем разделе полагаем, что $E = B_0^+(I,\mathcal{L})$; таким образом, обычные решения у нас — ступенчатые в смысле измеримого пространства $(I,\mathcal{L})$ неотрицательные функции на I.

Наконец, приступаем к обсуждению самой задачи, фиксируя $n \in \mathbb{N}$ и кортеж

$$(\pi_i)_{i\in\overline{1,n}} :\ \overline{1,n} \longrightarrow B(I,\mathcal{L}). \tag{8.3}$$

Кроме того, пусть в этом разделе $m \in \mathbb{N}$ и $W \in C_{\mathbf{ap}}\big(\mathbb{R}_n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}, \mathbb{R}_m, \tau_{\mathbb{R}}^{(m)}\big)$; стало быть, W почти совершенно в смысле [17]. Полагаем далее, что $\mathbf{H} = \mathbb{R}_m$ и $\tau = \tau_{\mathbb{R}}^{(m)}$. Наконец, определяем $\mathbf{h}$ как оператор

$$f \longmapsto W\left(\left(\int\limits_I \pi_i f\, d\eta\right)_{i\in\overline{1,n}}\right) :\ E \longrightarrow \mathbf{H}; \tag{8.4}$$

учитываем в (8.4), что $B(I,\mathcal{L})$ содержит (определяемое поточечно) произведение каждой пары своих элементов; см. [12, § 3.4]. Итак, целевой оператор $\mathbf{h}$ (8.4) конструируется в терминах $\pi_1 \in B(I,\mathcal{L}), ..., \pi_n \in B(I,\mathcal{L})$. Кортеж $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ полностью определен.

Фиксируем число $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$, кортеж

$$(g_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{k}}} :\ \overline{1,\mathbf{k}} \longrightarrow B(I,\mathcal{L}), \tag{8.5}$$

а также множество $\mathbb{Y} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_{\mathbf{k}})$, замкнутое в ТП $\big(\mathbb{R}_{\mathbf{k}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}\big)$. В $\mathbb{R}_{\mathbf{k}}$ введем норму, порождающую топологию $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}$, полагая для определенности при $x \stackrel{\triangle}{=} (x_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{k}}} \in \mathbb{R}_{\mathbf{k}}$, что

$$\|x\|_{\mathbf{k}} \stackrel{\triangle}{=} \sup\big(\{|x_i| :\ i \in \overline{1,\mathbf{k}}\}\big).$$

Разумеется, выбор именно такой нормы $\mathbb{R}_{\mathbf{k}}$ необязателен.

Полагаем далее, что $\mathbf{X} = \mathbb{R}_{\mathbf{k}}$ и $\theta = \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}$. Если $\varepsilon \in]0,\infty[$, то через $\mathbb{Y}_\varepsilon$ условимся обозначать открытую ε-окрестность множества $\mathbb{Y}$:

$$\mathbb{Y}_\varepsilon \stackrel{\triangle}{=} \big\{z \in \mathbb{R}_{\mathbf{k}} \mid \exists y \in \mathbb{Y} :\ \|y - z\|_{\mathbf{k}} < \varepsilon\big\}.$$

Всюду в настоящем разделе полагаем $Y = \mathbb{Y}$; кроме того, полагаем, что

$$\mathcal{Y} \overset{\triangle}{=} \{\mathbb{Y}_\varepsilon : \varepsilon \in]0, \infty[\}. \tag{8.6}$$

Ясно, что в данном случае мы имеем частный случай (5.3), причем в силу замкнутости $\mathbb{Y}$ для непустого семейства (8.6) открытых окрестностей множества $\mathbb{Y}$ выполняется и условие (5.4), т. е. условие $\mathcal{Y}$-регулярности, что легко следует из неравенства треугольника для нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{k}}$, порождающей топологию $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}$.

Кортеж (8.5) используем для определения нужного варианта отображения $\mathbf{s}$ (см. разд. 5). Именно, полагаем, что $\mathbf{s}$ есть отображение

$$f \longmapsto \left(\int_I g_i f \, d\eta\right)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}}} : \ E \longrightarrow \mathbf{X}. \tag{8.7}$$

Итак, триплет $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$ построен. Теперь, используя наш конкретный вариант семейства (5.7), мы приходим к задаче о построении МП

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = (\mathbf{as})\big[\mathbb{R}_m; \tau_{\mathbb{R}}^{(m)}; \mathbf{h}; \mathcal{E}\big];$$

напомним, что $\mathbf{h}$ определено в (8.4).

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее условие из [26, разд. 7].

Условие 8.1. $\exists j \in \overline{1, n}\ \exists \varepsilon \in]0, \infty[: \ \ \varepsilon \leq \pi_j(x) \ \ \forall x \in I.$

Построим вариант задачи о достижимости, определяемой триплетами $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ и $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$. Речь идет о постановке, рассматриваемой в разд. 5. Напомним, что (5.2) определяет решение невозмущенной задачи о достижимости в классе точных решений. Нас интересует МП $(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}]$, играющее роль регуляризированной версии достижимого множества (5.2).

Естественный подход намечен в теореме 5.1; он связан с использованием модели расширения. Такую модель нам еще предстоит построить, не сводя ее к процедуре компактификации; здесь мы продолжаем исследования [24, 26, 30]. Для построения нужной модели расширения используем понятные (в свете конструкций [12, 13, 24, 26, 30]) обобщенные версии операторов (8.4), (8.7).

Итак, используя соглашение $\mathbf{K} \overset{\triangle}{=} (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$, получаем, что

$$\mathbf{p} : \ E \longrightarrow \mathbf{K} \tag{8.8}$$

(напомним в связи с (8.8), что $E = B_0^+(I, \mathcal{L})$). Мы определяем далее следующий оператор $\mathbf{q} \in \mathbf{H}^{\mathbf{K}}$:

$$\mathbf{q}(\mu) \overset{\triangle}{=} W\left(\left(\int_I \pi_i \, d\mu\right)_{i \in \overline{1, n}}\right). \tag{8.9}$$

Разумеется, $\mathbf{q}$ можно рассматривать как сужение на $\mathbf{K}$ отображения

$$\mu \longmapsto W\left(\left(\int_I \pi_i \, d\mu\right)_{i \in \overline{1, n}}\right) : \ \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbf{H}, \tag{8.10}$$

которое непрерывно как m-вектор-функция на ТП (8.1) по определению $\tau_*(\mathcal{L})$ и в силу непрерывности W. Но тогда, коль скоро

$$\tau_\eta^*(\mathcal{L}) = \tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}, \tag{8.11}$$

имеем следующее свойство непрерывности:

$$\mathbf{q} \in C(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau). \tag{8.12}$$

На самом же деле (8.12) можно существенно усилить, действуя по аналогии с предложением 7.1 работы [26]. Именно, справедливо следующее

Предложение 8.1. $\mathbf{q} \in C_{\mathbf{ap}}(\mathbf{K}, \tau^*_\eta(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что $\mathbf{q}$ — замкнутое отображение; фиксируем замкнутое в топологии (8.11) множество $F \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$. С учетом теоремы 4.3.1 монографии [12] мы получаем, что множество F, $F \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$, замкнуто и в ТП (8.1). При этом в силу (8.10) для множества

$$\Omega \triangleq \left\{ \left(\int\limits_I \pi_i d\mu \right)_{i \in \overline{1,n}} : \ \mu \in F \right\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_n) \tag{8.13}$$

имеем очевидное равенство

$$\mathbf{q}^1(F) = W^1(\Omega). \tag{8.14}$$

По свойствам W получаем из (8.14), что в случае, когда множество Ω замкнуто в $\left(\mathbb{R}_n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\right)$, непременно $\mathbf{q}^1(F)$ замкнуто в $(\mathbf{H}, \tau)$ (напомним, что

$$W \in C_{\mathbf{ap}}\left(\mathbb{R}_n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}, \mathbf{H}, \tau\right)$$

при используемой здесь конкретизации $(\mathbf{H}, \tau)$). Итак, покажем, что (8.13) — замкнутое множество. Разумеется, речь идет о замкнутости в $\left(\mathbb{R}_n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\right)$, а потому замыкание и секвенциальное замыкание п/м из $\mathbb{R}_n$ совпадают. С учетом этого выберем произвольную точку z из (секвенциального) замыкания множества Ω в смысле $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$, для которой можно подобрать последовательность

$$(z^{(i)})_{i \in \mathbb{N}} : \ \mathbb{N} \longrightarrow \Omega$$

такую, что имеет место обычная покоординатная сходимость

$$(z^{(i)})_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}} z. \tag{8.15}$$

Подберем с использованием (счетной) аксиомы выбора последовательность $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ в F такую, что

$$z^{(j)} = \left(\int\limits_I \pi_l \, d\mu_j \right)_{l \in \overline{1,n}} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{8.16}$$

Тогда из (8.15), (8.16) имеем, в частности, свойство сходимости для соответствующих координатных последовательностей. В этой связи, используя условие 8.1, выберем и зафиксируем

$$r \in \overline{1,n} \quad \text{и} \quad \varkappa \in]0, \infty[\tag{8.17}$$

такие, что $\varkappa \leq \pi_r(x) \ \ \forall x \in I$. Из (8.15)–(8.17) мы получаем, что

$$\left(\int\limits_I \pi_r \, d\mu_i \right)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow z_r, \tag{8.18}$$

где число $z_r \in \mathbb{R}$ есть r-я компонента вектора z. Из (8.18) получаем при некотором $N \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_I \pi_r \, d\mu_i < z_r + 1 \ \ \forall i \in \overrightarrow{N, \infty}. \tag{8.19}$$

С другой стороны, по выбору r и $\varkappa$ имеем неравенства

$$\varkappa \mu_i(I) \leq \int\limits_I \pi_r \, d\mu_i \ \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Из (8.19) следует теперь очевидная система неравенств

$$\varkappa\mu_i(I) < z_r + 1 \;\; \forall i \in \overrightarrow{N, \infty}. \tag{8.20}$$

Учитывая (8.17) и (8.20), получаем следующую систему неравенств

$$\mu_i(I) < \frac{|z_r| + 1}{\varkappa} \;\; \forall i \in \overrightarrow{N, \infty}.$$

Последнее означает, в частности, что последовательность $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ограничена в сильной норме $\mathbb{A}(\mathcal{L})$; в нашем случае это означает, что ограничена последовательность $(\mu_i(I))_{i\in\mathbb{N}}$. Подберем число $\mathbf{b} \in [0, \infty[$ так, что

$$\mu_i(I) \in [0, \mathbf{b}] \;\; \forall i \in \mathbb{N}.$$

Иными словами, для множества

$$\mathfrak{B} \overset{\triangle}{=} \{\nu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \mid \nu(I) \leq \mathbf{b}\} = \{\nu \in \mathbf{K} \mid \nu(I) \leq \mathbf{b}\} \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \tag{8.21}$$

(см. [12, с. 82]) имеем свойство $\mu_i \in \mathfrak{B} \;\; \forall i \in \mathbb{N}$. С учетом (8.21) можно указать $\mu^0 \in \mathbf{K}$, непустое направленное множество $(\mathbb{D}, \preceq)$ и отображение $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{D}}$ такие, что

$$\big(\forall k \in \mathbb{N} \; \exists d \in \mathbb{D} : \; \varphi(d) \in \overrightarrow{k, \infty}\big) \;\&\; \big(\forall d_1 \in \mathbb{D} \; \forall d_2 \in \mathbb{D} \; ((d_1 \preceq d_2) \Longrightarrow (\varphi(d_1) \leq \varphi(d_2)))\big)$$

$$\& \; \Big((\mathbb{D}, \preceq, (\mu_{\varphi(\delta)})_{\delta\in\mathbb{D}}) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu^0\Big). \tag{8.22}$$

В связи с (8.22) см. [13, § 3.3], [25, гл. 2], [20, 26]; речь идет о стандартном изотонном прореживании последовательности до сходящейся поднаправленности. С учетом (8.3) и (8.22) получаем из определения $*$-слабой топологии, что

$$\left(\mathbb{D}, \preceq, \left(\int\limits_I \pi_i \, d\mu_{\varphi(\delta)}\right)_{\delta\in\mathbb{D}}\right) \overset{\tau_{\mathbb{R}}}{\longrightarrow} \int\limits_I \pi_i \, d\mu^0 \;\; \forall i \in \overline{1, n} \tag{8.23}$$

(напомним, что $\tau_{\mathbb{R}}$ — обычная $|\cdot|$-топология вещественной прямой $\mathbb{R}$). В силу (8.16) имеем, однако, систему равенств

$$\left(\int\limits_I \pi_i \, d\mu_{\varphi(\delta)}\right)_{i\in\overline{1,n}} = z^{(\varphi(\delta))} \;\; \forall \delta \in \mathbb{D}. \tag{8.24}$$

С другой стороны, из (8.23), (8.24) вытекает, что

$$\Big(\mathbb{D}, \preceq, \big(z^{(\varphi(\delta))}\big)_{\delta\in\mathbb{D}}\Big) \overset{\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}}{\longrightarrow} \left(\int\limits_I \pi_i \, d\mu^0\right)_{i\in\overline{1,n}}. \tag{8.25}$$

Наконец, из (8.15) и (8.22) вытекает, что имеет место сходимость

$$\Big(\mathbb{D}, \preceq, \big(z^{(\varphi(\delta))}\big)_{\delta\in\mathbb{D}}\Big) \overset{\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}}{\longrightarrow} z. \tag{8.26}$$

Из (8.25) и (8.26) следует, что справедливо равенство

$$z = \left(\int\limits_I \pi_i \, d\mu^0\right)_{i\in\overline{1,n}} \tag{8.27}$$

$((\mathbb{R}_n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ — хаусдорфово ТП). Однако $\mu_{\varphi(\delta)} \in F \quad \forall \delta \in \mathbb{D}$. Это следует из самого способа выбора последовательности $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$. С учетом замкнутости F в ТП (8.1) и свойства сходимости, отмеченного в (8.22), получаем включение $\mu^0 \in F$ (коль скоро

$$\big(\mathbb{D}, \preceq, (\mu_{\varphi(\delta)})_{\delta\in\mathbb{D}}\big)$$

есть направленность в F), а тогда из (8.13) и (8.27) мы получаем включение $z \in \Omega$. Тем самым установлено, что замыкание Ω в топологии $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ содержится в Ω, а тогда Ω и упомянутое замыкание совпадают, что, в частности, означает замкнутость Ω в $(\mathbb{R}_n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. Ввиду (8.14) и замкнутости оператора W множество $\mathbf{q}^1(F)$ замкнуто в $(\mathbf{H}, \tau)$. Поскольку выбор F был произвольным, в силу (8.12) имеем

$$\mathbf{q} \in C_{\mathrm{cl}}(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau) \tag{8.28}$$

(см. разд. 2). Выберем произвольно $z^* \in \mathbf{H}$. Тогда (см. (8.10))

$$\mathbf{q}^{-1}(\{z^*\}) = \left\{\mu \in \mathbf{K} \mid \left(\int\limits_I \pi_i \, d\mu\right)_{i\in\overline{1,n}} \in W^{-1}(\{z^*\})\right\}, \tag{8.29}$$

где $W^{-1}(\{z^*\}) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\text{-comp})[\mathbb{R}_n]$; см. разд. 2. Тогда можно указать число $a \in]0, \infty[$, для которого

$$|x_j| \le a \ \ \forall (x_i)_{i\in\overline{1,n}} \in W^{-1}(\{z^*\}) \ \forall j \in \overline{1,n}. \tag{8.30}$$

Вновь выберем и зафиксируем r и $\varkappa$, удовлетворяющие (8.17) и условию $\varkappa \le \pi_r(x) \ \ \forall x \in I$. Тогда из (8.30) мы, в частности, имеем

$$|x_r| \le a \ \ \forall (x_i)_{i\in\overline{1,n}} \in W^{-1}(\{z^*\}).$$

С учетом (8.29) заключаем теперь, что

$$\varkappa\mu(I) \le \int\limits_I \pi_r \, d\mu = \left|\int\limits_I \pi_r \, d\mu\right| \le a \ \ \forall \mu \in \mathbf{q}^{-1}(\{z^*\}).$$

Стало быть, установлена справедливость вложения

$$\mathbf{q}^{-1}(\{z^*\}) \subset \left\{\mu \in \mathbf{K} \mid \mu(I) \le \frac{a}{\varkappa}\right\}. \tag{8.31}$$

В силу (8.31) и неотрицательности мер из $\mathbf{K}$ множество $\mathbf{q}^{-1}(\{z^*\})$ сильно ограничено в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. С другой стороны, $\{z^*\}$ — замкнутое в $(\mathbf{H}, \tau)$ подмножество $\mathbf{H} = \mathbb{R}_m$. В силу (8.12) множество $\mathbf{q}^{-1}(\{z^*\})$ замкнуто в топологии (8.11) и с учетом замкнутости $\mathbf{K}$ в ТП (8.1) замкнуто в этом ТП как пересечение $\mathbf{K}$ и некоторого замкнутого в смысле (8.1) подмножества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$; см. также в этой связи [31, § 2.3]. Итак, с учетом (8.31) и теоремы Алаоглу

$$\mathbf{q}^{-1}(\{z^*\}) \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})].$$

Поскольку $\mathbf{q}^{-1}(\{z^*\}) \subset \mathbf{K}$, то (см. (8.11)) по свойству транзитивности операции перехода к подпространству ТП топология

$$\tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{q}^{-1}(\{z^*\})} = \tau_\eta^*(\mathcal{L})|_{\mathbf{q}^{-1}(\{z^*\})}$$

превращает $\mathbf{q}^{-1}(\{z^*\})$ в компакт, т. е.

$$\mathbf{q}^{-1}(\{z^*\}) \in (\tau_\eta^*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbf{K}]. \tag{8.32}$$

Коль скоро выбор z^* был произвольным, мы с учетом (8.28) имеем требуемое утверждение: $\mathbf{q} \in C_{\mathbf{ap}}(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau)$. □

Теперь с учетом(8.5) введем отображение

$$\mathbf{r} : \ \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{X} \tag{8.33}$$

по следующему правилу: если $\mu \in \mathbf{K}$, то

$$\mathbf{r}(\mu) \overset{\triangle}{=} \Big(\int\limits_I g_i \, d\mu \Big)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}}}. \tag{8.34}$$

Тогда, как легко видеть, $\mathbf{r}$ является сужением на $\mathbf{K}$ отображения

$$\mu \longmapsto \Big(\int\limits_I g_i \, d\mu \Big)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}}} : \ \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbf{X}; \tag{8.35}$$

по определению $\tau_*(\mathcal{L})$ оператор (8.35) является элементом множества $C(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \theta)$. Но в этом случае для оператора (8.33), (8.34) имеем в силу (8.11) свойство непрерывности:

$$\mathbf{r} \in C(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \theta). \tag{8.36}$$

Предложение 8.2. *Кортеж* $(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}), \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ *есть модель расширения для триплетов* $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ *и* $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учтем (5.5), (8.2), (8.36) и предложение 8.1. Тогда

$$\mathbf{K} = \mathrm{cl}(\mathbf{p}^1(E), \tau_\eta^*(\mathcal{L})), \tag{8.37}$$

где $(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}))$ есть ТП. Из (8.8) имеем $\mathbf{p} \in \mathbf{K}^E$. В силу предложения 8.1 и (8.36)

$$\mathbf{q} \in C_{\mathbf{ap}}(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau), \qquad \mathbf{r} \in C(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \theta). \tag{8.38}$$

Эти свойства дополняем равенством (8.37). С учетом (8.9) отметим, что (по определению $\mathbf{p}$ и по свойствам неопределенного интеграла) для оператора $\mathbf{q} \circ \mathbf{p} \in \mathbf{H}^E$ имеем представление (см. (8.4))

$$\begin{aligned}(\mathbf{q} \circ \mathbf{p})(f) = \mathbf{q}(\mathbf{p}(f)) = \mathbf{q}(f * \eta) &= W\bigg(\Big(\int\limits_I \pi_i \, d(f * \eta) \Big)_{i \in \overline{1, n}}\bigg) \\ &= W\bigg(\Big(\int\limits_I \pi_i f \, d\eta \Big)_{i \in \overline{1, n}}\bigg) = \mathbf{h}(f) \ \ \forall f \in E. \end{aligned} \tag{8.39}$$

В этой связи см. [12, с. 69]. Итак, $\mathbf{h} = \mathbf{q} \circ \mathbf{p}$. Аналогично для оператора $\mathbf{r} \circ \mathbf{p} \in \mathbf{X}^E$ (см. (8.7), (8.8), (8.33)) имеем

$$\begin{aligned}(\mathbf{r} \circ \mathbf{p})(f) &= \mathbf{r}(\mathbf{p}(f)) = \mathbf{r}(f * \eta) \\ &= \Big(\int\limits_I g_i d\,(f * \eta) \Big)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}}} = \Big(\int\limits_I g_i f \, d\eta \Big)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}}} = \mathbf{s}(f) \ \ \forall f \in E. \end{aligned} \tag{8.40}$$

Иными словами, $\mathbf{s} = \mathbf{r} \circ \mathbf{p}$. С учетом (5.6), (8.37)–(8.40) получаем требуемое утверждение. □

Следствие 8.1. *В рассматриваемой задаче о достижимости в пространстве* $(\mathbf{H}, \tau) = (\mathbb{R}_m, \tau_{\mathbb{R}}^{(m)})$ *имеем* (*при условии* 8.1) *следующее представление МП:*

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbb{Y})).$$

9. Добавление 1: секвенциальные конструкции и стоун-чеховский компактификатор

Мы возвращаемся к общей постановке задачи (см. разд. 1), отказываясь от предположения (5.7). В настоящем разделе фиксируется только кортеж $(E, \mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$, где (как и ранее) E — непустое множество, $(\mathbf{H}, \tau)$ — ТП и $\mathbf{h}$ удовлетворяет (1.1). Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то полагаем для краткости, что

$$(\tau\text{-}\mathbf{AS})[\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}]; \tag{9.1}$$

это согласуется с [31, 32]; кроме того, напомним, что $\mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}] = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{F}\}$. Для МП (9.1) имеем (см. [14, 31, 32]) представления

$$(\tau\text{-}\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \big\{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] : \ \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} z\big\}$$

$$= \big\{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}] : \ \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} z\big\} \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{9.2}$$

В (9.2) имеем, в частности, представление МП в терминах решений-фильтров. В вопросах, связанных с построением элемента притяжения в пространстве оценок, фильтры и направленности по сути дела эквивалентны; см. в этой связи (2.2). Разумеется, (2.2) вполне применимо в случае построения фильтра, порожденного последовательностью. Ясно, что последовательности могут использоваться и в (3.1). Пример, рассмотренный во введении (см. (1.3)–(1.10)), показывает, что, ограничиваясь при построении элемента притяжения (см. (3.1)) только последовательностями (в множестве E), мы, вообще говоря, можем не построить все элементы притяжения и, следовательно, не построить МП. Условия, достаточные для исчерпывающей секвенциальной реализации МП, приведены в [13, с. 38] и в [14, § 4] (имеется в виду случай, когда $(\mathbf{H}, \tau)$ — ТП с первой аксиомой счетности, $\mathcal{E} \in \beta[E]$ и, кроме того, $\mathcal{E}$ обладает счетной базой). Мы уже знаем свойство: если $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ есть отделимый компактифицируемый триплет, то компактификатор задачи, обеспечивающий построение МП (на основе решения некоторой обобщенной задачи с компактным пространством решений), всегда можно реализовать как стоун-чеховский (уолменовский). Иными словами, для случая хаусдорфова ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ (а этим случаем, с практической точки зрения, можно было бы и ограничиться) из того, что существует какой-либо компактификатор, вытекает, что таковым является и кортеж

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{fi}}[E], \mathbf{m}, \mathfrak{H}[\tau|\mathbf{h}]) \tag{9.3}$$

(см. в этой связи (4.8)). Поэтому можно говорить о (9.3) как об универсальном компактификаторе. Сам же эффект расширения при использовании (9.3) в своей существенной части реализуется посредством так называемых свободных у/ф множества E (подробнее см. в [32, § 4]). Оказывается, однако, что свободные у/ф E не могут быть порождены последовательностями; см. в этой связи [8, гл. I]. Мы ограничимся сейчас краткой сводкой известных свойств на этот счет. Если $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E^N$, то

$$(\mathrm{el})[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists m \in \mathbb{N} : \ x_j \in H \ \ \forall j \in \overrightarrow{m, \infty}\big\} \in \mathfrak{F}[E] \tag{9.4}$$

есть так называемый элементарный фильтр, ассоциированный с последовательностью $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ в множестве E. Далее через $\leq$ обозначаем обычную упорядоченность натурального ряда $\mathbb{N}$. В терминах непустого направленного множества $(\mathbb{N}, \leq)$ имеем очевидное равенство фильтров

$$(\mathrm{el})[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}] = (E\text{-ass})[\mathbb{N}; \leq; (x_i)_{i\in\mathbb{N}}]. \tag{9.5}$$

В (9.4), (9.5) имеем, конечно, простейший вариант направленности в множестве E и соответствующий (этой направленности) ассоциированный фильтр.

Пусть $\beta^0_\omega[E]$ есть по определению множество всех не более чем счетных семейств из $\beta_0[E]$. Введено множество всех не более чем счетных баз фильтров (в E). Разумеется, в (9.4), (9.5) имеем фильтр с базой из $\beta^0_\omega[E]$.

Введем в рассмотрение множество всех элементарных фильтров множества E:

$$\mathfrak{F}_e[E] \triangleq \{(\mathrm{el})[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}] : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}\};$$

$\mathfrak{F}_e[E] \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}[E])$. Для всякого семейства $\mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ через $\mathfrak{F}_e[E|\mathcal{H}]$ обозначаем множество всех элементарных фильтров $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_e[E]$, для каждого из которых $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Если $\mathcal{B} \in \beta^0_\omega[E]$, то (см. [8, гл. I])

$$\mathfrak{F}_e[E|(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}]] = \mathfrak{F}_e[E|\mathcal{B}] \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}_e[E])$$

и, более того, справедливо следующее равенство

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}] = \bigcap_{\mathcal{F}\in\mathfrak{F}_e[E|\mathcal{B}]} \mathcal{F}. \tag{9.6}$$

Введем теперь в рассмотрение множество всех свободных у/ф E:

$$\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E] \triangleq \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \setminus \mathbf{m}^1(E) \in (\tau_{\mathbf{fi}}[E]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]].$$

Если для последовательности $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ множество $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ конечно, то элементарный фильтр, с ней ассоциированный, не является свободным у/ф: легко проверяется, что

$$(\mathrm{el})[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}] \notin \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{9.7}$$

Если $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, то с использованием свойств [8, гл. I] проверяется, что элементарный фильтр, ассоциированный с последовательностью $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, вообще не является у/ф:

$$(\mathrm{el})[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}] \notin \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{9.8}$$

С учетом (9.8) мы получаем, что (9.7) верно во всех возможных случаях, поэтому

$$\mathfrak{F}_e[E] \bigcap \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E] = \varnothing. \tag{9.9}$$

Из (9.9) вытекает, что элементарные фильтры не могут быть свободными у/ф. Используя (9.6), (9.9), нетрудно проверить, что

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}] \notin \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E] \quad \forall \mathcal{B} \in \beta^0_\omega[E].$$

Стало быть, и фильтры со счетной базой не могут порождать свободных у/ф и, в частности, свободных ультрарешений (см. разд. 4), существенных для построения расширений задачи о достижимости с ограничениями асимптотического характера. Из вышеупомянутых рассуждений мы получаем свойство: $\mathcal{E}$-допустимые последовательности, где $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, порождают в виде своих элементарных фильтров только такие "асимптотические варианты" решений, которые либо вообще не содержатся среди обобщенных элементов разд. 4, либо сводятся к действию допустимых тривиальных у/ф, т. е. к действию точек E, соблюдающих точные ограничения, определяемые пересечением всех множеств семейства $\mathcal{E}$. В последнем случае мы получаем только эффекты, не представляющие особого интереса с точки зрения конструкций асимптотического анализа. Итак, применяя стоун-чеховские (уолменовские) конструкции расширений (в наших построениях их можно не различать; общие свойства стоун-чеховской компактификации и расширения Уолмена см. в [18, § 6]), мы должны иметь в виду, что даже в тех случаях, когда МП исчерпывающим образом представимо в классе секвенциальных решений-последовательностей (подобных приближенным решениям [1, гл. III]), для описания нароста упомянутого МП по отношению к множеству точных оценок нам непременно потребуются у/ф, которые не воспроизводятся посредством последовательностей (в виде соответствующих элементарных фильтров). Используя другие конструкции расширений (в частности, конструкции на основе известной теоремы Алаоглу), мы, напротив, можем в целом ряде случаев определить обобщенные элементы так, что все они будут допускать секвенциальную аппроксимативную реализацию. Уже упоминавшиеся конструкции [1] доставляют пример такого рода.

З а м е ч а н и е 9.1. Введем в рассмотрение $(\mathrm{FIN})[E] \overset{\triangle}{=} \mathrm{Fin}(E) \cup \{\varnothing\}$ (семейство всех конечных п/м E). Всюду в пределах настоящего замечания предполагается, что E — бесконечное множество. Тогда имеем фильтр

$$\mathcal{F}_{\lozenge} \overset{\triangle}{=} \{E \setminus K : \ K \in (\mathrm{FIN})[E]\} \in \mathfrak{F}[E],$$

у которого пересечение всех множеств (из $\mathcal{F}_{\lozenge}$) совпадает с $\varnothing$. По аналогии со случаем у/ф можно говорить, что $\mathcal{F}_{\lozenge}$ — свободный фильтр E (полезно отметить, что в [10, гл. II] рассматривались свободные фильтры, а не только свободные у/ф). Кроме того, (см. [8, гл. I]) можно проверить, что построенный фильтр дополнений конечных п/м E мажорируется элементарным фильтром, точнее $\exists (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$

$$(x_k \neq x_l \ \ \forall k \in \mathbb{N} \, \forall l \in \mathbb{N} \setminus \{k\}) \ \& \ (\mathcal{F}_{\lozenge} \subset (\mathrm{el})[(x_i)_{i \in \mathbb{N}}]).$$

В силу (9.8) $\mathcal{F}_{\lozenge} \notin \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Следовательно, $\mathcal{F}_{\lozenge}$ есть свободный фильтр, но не у/ф. Вместе с тем согласно [8, гл. I] имеем следующее свойство нижней оценки для всех свободных у/ф:

$$\mathcal{F}_{\lozenge} \subset \mathcal{F} \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E].$$

Более того, $\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E] = \mathfrak{F}^{0}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{F}_{\lozenge}]$. Из этого свойства следует, кстати (см. [8, § 6.4]), тот хорошо известный факт [10], что $\mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E] \neq \varnothing$; при этом, конечно,

$$\mathcal{F}_{\lozenge} = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E]} \mathcal{F}.$$

10. Добавление 2: преобразования фильтров и направленностей

Во всех конструкциях решения задач асимптотического анализа, рассматриваемых ранее, мы ориентировались на построение МП, полагая, что элементы притяжения достаточны для представления всех интересующих нас асимптотических эффектов. Сейчас уместно обсудить несколько иную постановку. Именно, ограничиваясь для простоты секвенциальными решениями, можно при заданном семействе $\mathcal{E}$ п/м E полагать, что каждой допустимой (см. разд. 1) последовательности $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ в множестве E сопоставляется в качестве результата, соответствующего выбранной последовательности в множестве E, последовательность $(\mathbf{h}(e_i))_{i=1}^{\infty}$. Множество всех таких последовательностей в $\mathbb{H}$ при переборе всех допустимых (в смысле $\mathcal{E}$) последовательностей в E можно рассматривать в качестве своеобразной “области достижимости” в пространстве $\mathbb{H}^{\mathbb{N}}$. Данное множество можно принять в качестве оценки наших возможностей при решении исходной задачи асимптотического анализа. Разумеется (см. пример в разд. 1), имеет смысл, наряду с последовательностями, использовать и более общие варианты асимптотического поведения. Вероятно, проще всего в логическом отношении “разрешить” применение направленностей, допустимых в смысле $\mathcal{E}$. Известная двойственность фильтров и направленностей (см. [17, § 1.6]) позволяет, однако, использовать фильтры вместо направленностей. Мы следуем данному подходу подобно [14, 22, 23, 31, 32]. Заметим, кстати, что в вопросах построения элемента притяжения без потери общности можно ограничиться использованием у/ф (см. (9.2), [14, §§ 4,5]).

В пределах данного раздела мы фиксируем только кортеж $(E, \mathbf{H}, \mathbf{h})$ (его компоненты были определены ранее) и для формирования ограничений асимптотического характера используем произвольные непустые семейства п/м E; от соглашения (5.7) мы, стало быть, отказываемся. Используем определения и положения разд. 7.

Отметим следующее известное [8] свойство: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbb{H}]$, то $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}|\mathcal{F}] \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}])$ и, более того,

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}|\mathcal{F}]} \mathcal{U}. \tag{10.1}$$

Если иметь в виду то, что роль оценок из $\mathbb{H}$ играют теперь фильтры $\mathbb{H}$ (аналоги направленностей), то в (10.1) мы имеем, очевидно, способ представления этих новых "оценок" в терминах конструкций разд. 7 (см., в частности, (7.8)). Теперь мы рассмотрим некоторые свойства, связанные с преобразованием фильтров и направленностей в множестве E при действии $\mathbf{h}$.

Итак, мы возвращаемся к проблеме, обозначенной в начале данного раздела и связанной с преобразованием направленности решений в направленность оценок (мы ограничились тогда обсуждением секвенциальной версии этой проблемы). Первую из упомянутых направленностей можно трактовать как "асимптотическое решение", а вторую — как результат, доставляемый таким "решением". Кроме того, была отмечена возможность "перевода" данной интерпретации на язык фильтров. Напомним известное [8, гл. I] положение: если X, Y — непустые множества и $g \in Y^X$, то

$$\beta_0[Y|g] \overset{\triangle}{=} \big\{\mathcal{B} \in \beta_0[Y] \mid g^{-1}[\mathcal{B}] \in \beta_0[X]\big\} = \big\{\mathcal{B} \in \beta_0[Y] \mid g^1(X) \cap B \neq \varnothing \ \ \forall B \in \mathcal{B}\big\}. \tag{10.2}$$

В (10.2) указано представление множества всех баз фильтров Y, прообраз каждой из которых есть база фильтра X (можем использовать (10.2) при $X = E$, $Y = \mathbb{H}$ и $g = \mathbf{h}$). При условиях, определяющих (10.2),

$$\mathfrak{F}_0[Y|g] \overset{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[Y] \mid g^{-1}[\mathcal{F}] \in \beta_0[X]\big\} = \big\{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[Y] \mid g^1(X) \cap F \neq \varnothing \ \ \forall F \in \mathcal{F}\big\}. \tag{10.3}$$

Предложение 10.1. *Если* $(D, \preceq, f)$ *является направленностью в множестве* E, *то* $(\mathbb{H}\text{-ass})[D; \preceq; \mathbf{h} \circ f] \in \mathfrak{F}_0[\mathbb{H}|\mathbf{h}]$.

Доказательство непосредственно следует из определения фильтра, ассоциированного с направленностью; см. разд. 2. Из (10.3) и предложения 10.1 мы в частности получаем для каждой направленности $(D, \preceq, f)$ в множестве E, что $\mathbf{h}^{-1}\big[(\mathbb{H}\text{-ass})[D; \preceq; \mathbf{h} \circ f]\big] \in \beta_0[E]$ и

$$\mathbf{h}^1[\mathbf{h}^{-1}\big[(\mathbb{H}\text{-ass})[D; \preceq; \mathbf{h} \circ f]]\big] \in \beta_0[\mathbb{H}].$$

Учитывая собственную сюръективность $\mathbf{h}$ (см. разд. 7), для всякой направленности $(D, \preceq, f)$ в множестве E получаем равенство

$$(\mathbb{H}\text{-ass})[D; \preceq; \mathbf{h} \circ f] = \mathbf{h}^1\big[\mathbf{h}^{-1}[(\mathbb{H}\text{-ass})[D; \preceq; \mathbf{h} \circ f]]\big]. \tag{10.4}$$

Кроме того, упомянутое свойство $\mathbf{h}$ означает [8, гл. I], что (см. (7.2))

$$\big(\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \in \mathfrak{F}[\mathbb{H}] \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]\big) \ \& \ \big(\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\big). \tag{10.5}$$

Предложение 10.2. *Если* $(D, \preceq, f)$ *— направленность в множестве* E, *то справедливо следующее равенство:*

$$\mathbf{h}^1\big[(E\text{-ass})[D; \preceq; f]\big] = (\mathbb{H}\text{-ass})[D; \preceq; \mathbf{h} \circ f]. \tag{10.6}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — фильтры (в множестве $\mathbb{H}$) в левой и правой частях (6.3) соответственно; см. (10.5). Вложение $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ получаем из определения фильтра, ассоциированного с направленностью. В силу (10.5) $\mathcal{X} \in \mathfrak{F}[\mathbb{H}]$. Пусть $[d; \to) \overset{\triangle}{=} \{\delta \in D \mid d \preceq \delta\}$ $\forall d \in D$. Тогда

$$\mathfrak{B}_E \overset{\triangle}{=} \{f^1([d; \to)) : \ d \in D\} \in \beta_0[E], \qquad \mathfrak{B}_{\mathbb{H}} \overset{\triangle}{=} \{(\mathbf{h} \circ f)^1([d; \to)) : \ d \in D\} \in \beta_0[\mathbb{H}],$$

причем $(E\text{-ass})[D;\preceq;f] = (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathfrak{B}_E]$ и $\mathcal{Y} = (\mathbb{H}\text{-ass})[D;\preceq;\mathbf{h}\circ f] = (\mathbb{H}\text{-}\mathbf{fi})[\mathfrak{B}_{\mathbb{H}}]$. Кроме того, база фильтра $\mathfrak{D} \overset{\triangle}{=} \{[d;\to) :\ d \in D\} \in \beta_0[D]$ реализует $\mathfrak{B}_E$ и $\mathfrak{B}_{\mathbb{H}}$ в виде своих образов:

$$\mathfrak{B}_E = f^1[\mathfrak{D}], \qquad \mathfrak{B}_{\mathbb{H}} = (\mathbf{h}\circ f)^1[\mathfrak{D}]. \tag{10.7}$$

Выберем произвольное множество $\Gamma \in \mathcal{Y}$ и подберем $V \in \mathfrak{B}_{\mathbb{H}}$ так, что $V \subset \Gamma$. Используя (10.7), подберем такое множество $W \in \mathfrak{D}$, что

$$V = (\mathbf{h}\circ f)^1(W) = \mathbf{h}^1(f^1(W)).$$

Тогда (см. (10.7)) $f^1(W) \in \mathfrak{B}_E$ и, в частности, $f^1(W) \in (E\text{-ass})[D;\preceq;f]$. Поэтому $V \in \mathcal{X}$ и, по определению фильтра, $\Gamma \in \mathcal{X}$. Требуемое вложение $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ установлено. □

Предложение 10.2 позволяет говорить, что в определенном смысле процедура получения результата, соответствующего асимптотическому варианту решения, сводится к операции построения сюръективного образа фильтра. Конечно, использование в упомянутом предложении направленностей имеет своей целью соображения мотивирующего характера (направленности, с практической точки зрения, наиболее "близки" последовательностям и могут исполнять поэтому роль промежуточного звена при переходе к конструированию асимптотических версий решения в виде фильтров множества E). Напомним, что в разд. 7 мы применяли аналогичную операцию к у/ф, имея в виду представление результатов посредством элементов притяжения. В этой связи вышеупомянутую процедуру можно рассматривать как некоторое продолжение оператора Чеха (учитываем при этом (10.5)). Итак, с учетом (10.5) определяем оператор

$$\mathfrak{V} :\ \mathfrak{F}[E] \longrightarrow \mathfrak{F}[\mathbb{H}]$$

посредством правила: $\mathfrak{V}(\mathcal{F}) \overset{\triangle}{=} \mathbf{h}^1[\mathcal{F}]\ \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$. В силу (7.3) имеем равенство

$$\mathfrak{U} = (\mathfrak{V}|\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]). \tag{10.8}$$

Требуемое продолжение оператора Чеха определено. Кроме того, отметим, что для всякого семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, определяющего ограничения асимптотического характера, $\mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}]$ можно рассматривать как множество всех допустимых в смысле $\mathcal{E}$ решений (точнее, решений-фильтров), а $\mathfrak{V}^1(\mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}])$ — как своеобразное множество достижимости при упомянутых ограничениях. Последнее множество является по смыслу множеством всех результатов, порождаемых решениями-фильтрами (мы ориентируемся здесь на аналогию с предложением 10.2). В силу предложения 7.4 и (10.8) данное множество достижимости (множество-образ) содержит МП $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}])$. Это МП соответствует действию допустимых в смысле семейства $\mathcal{E}$ у/ф, т. е. (по смыслу) ультрарешений (см. [31, 32]). Оказывается, что упомянутые ультрарешения могут при одном дополнительном условии на $\mathbf{h}$ исчерпывающим образом характеризовать все множество $\mathfrak{V}^1(\mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}])$. В этой связи мы напомним (10.1) и то, что $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$\Big(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \subset \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}]\Big)\ \&\ \Big(\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}]\ \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] :\ \mathcal{F} \subset \mathcal{U}\Big).$$

Итак, наше обсуждение можно сейчас ограничить фильтрами множества E и их образами (а эти образы — фильтры множества $\mathbb{H}$). Конструкции с использованием у/ф, приведенные ранее, также представляются применимыми в силу (10.1): при выборе фильтра $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}[E]$ (рассматриваемого как эквивалент направленности) получаемый при этом результат действия фильтра $\mathcal{G}$, т. е. фильтр $\mathcal{F} = \mathbf{h}^1[\mathcal{G}]$ множества $\mathbb{H}$ (см. предложение 10.2) мы стремимся представить со всей возможной степенью полноты в терминах ультрарешений, применяя (10.1). Именно, у/ф множества $\mathbb{H}$, участвующие в представлении (10.1), имеет смысл определять в рамках подхода, используемого в разд. 7, включая применение обобщенных оценок; здесь мы возвращаемся к вопросу о соблюдении "асимптотических ограничений". При этом, конечно, $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))\ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}]$

$$\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{F}] \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]). \tag{10.9}$$

Итак, мажорируя допустимые решения-фильтры произвольными у/ф, мы всякий раз получаем ультрарешения, т. е. допустимые у/ф.

Предложение 10.3. *Если $\mathcal{E}_1 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $\mathcal{E}_2 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то эквивалентны следующие два утверждения:*

$$(1)\;\; \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_1] \subset \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_2], \qquad (2)\;\; \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}_1] \subset \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}_2].$$

Доказательство. Пусть истинно (1) и $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}_1]$. Тогда в силу (10.9)

$$\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{F}_1] \subset \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_1] \subset \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_2].$$

Учитывая (10.9), выбираем произвольно $\mathcal{U}_1 \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{F}_1]$. Из вышеупомянутой цепочки вложений имеем $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{U}_1$. Поскольку выбор $\mathcal{U}_1$ был произвольным, имеем свойство

$$\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{U} \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{F}_1].$$

С учетом свойства, подобного(10.1), мы получаем вложение $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{F}_1$, что означает $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}_2]$. Поскольку выбор $\mathcal{F}_1$ был произвольным, установлено вложение (2). Итак, (1) $\Longrightarrow$ (2).

Пусть истинно (2) и $\mathcal{V}_1 \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_1]$. В силу (2) имеем цепочку вложений

$$\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_1] \subset \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}_1] \subset \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}_2],$$

а потому $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{V}_1$. Но $\mathcal{V}_1 \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, и потому $\mathcal{V}_1 \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_2]$. Поскольку выбор $\mathcal{V}_1$ был произвольным, установлено (1). Итак, (2) $\Longrightarrow$ (1). □

Следствие 10.1. *Если $\mathcal{E}_1 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $\mathcal{E}_2 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и при этом $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_1] \subset \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_2]$, то $\mathfrak{V}^1(\mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}_1]) \subset \mathfrak{V}^1(\mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}_2])$.*

Доказательство сводится к непосредственной комбинации предложения 10.3 и хорошо известных свойств операции взятия образа. Вполне очевидно

Следствие 10.2. *Если $\mathcal{E}_1 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $\mathcal{E}_2 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и при этом $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_1] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}_2]$, то $\mathfrak{V}^1(\mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}_1]) = \mathfrak{V}^1(\mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}_2])$.*

Итак, подход, развиваемый в разд. 7 для целей построения МП, оказывается полезным и для качественного исследования множеств достижимости в классе решений-фильтров. Напомним, что в силу (10.5) мы при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}]$ имеем фильтр $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] = \mathfrak{V}(\mathcal{F}) \in \mathfrak{F}[\mathbb{H}]$, который можно, как уже отмечалось, рассматривать в виде результата действия фильтра $\mathcal{F}$, трактуемого как "асимптотическое решение" (учитываем, в частности, связь фильтров и направленностей, отмеченную в разд. 2). Отметим также, что при $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{S}]) \subset \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}|\mathbf{h}^1[\mathcal{S}]]; \tag{10.10}$$

в качестве $\mathcal{S}$ в (10.10) можно, конечно, использовать фильтр множества E и, в частности, фильтр, допустимый с точки зрения тех или иных ограничений асимптотического характера.

Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}]$, то имеем с очевидностью

$$\mathfrak{U}^1\big(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]\big) \cap \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}\big[\mathbb{H}|\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]\big] \neq \varnothing \tag{10.11}$$

(мы учитываем здесь (10.1), (10.9) и (10.10)). Напомним о сюръективности оператора Чеха (4.3). Как следствие, при $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}[\mathbb{H}]$ мы (см. (7.3)) имеем вложение

$$\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}|\mathcal{H}] \subset \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]). \tag{10.12}$$

По понятным причинам нас интересует случай, когда фильтр $\mathcal{H}$ определяется действием некоторого фильтра множества E. Итак, полагаем заданным фильтр $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, для которого $\mathcal{H} = \mathbf{h}^1[\mathcal{F}]$; тогда (см. (10.12)) при всяком выборе

$$\mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}|\mathcal{H}]$$

имеем для некоторого у/ф $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ цепочку равенств $\mathfrak{U}(\mathcal{V}) = \mathbf{h}^1[\mathcal{V}] = \mathcal{U}$. При $H \in \mathcal{H}$ имеем, стало быть, для некоторого множества $V \in \mathcal{V}$ равенство $H = \mathbf{h}^1(V)$ (в самом деле, $H \in \mathcal{U}$ по выбору $\mathcal{U}$). Тогда

$$\mathbf{h}^{-1}(H) = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{h}^1(V))$$

и, следовательно, $V \subset \mathbf{h}^{-1}(H)$; по определению фильтра $\mathbf{h}^{-1}(H) \in \mathcal{V}$. Поскольку выбор H был произвольным, $\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{H}] = \mathbf{h}^{-1}[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]] \subset \mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{H}]]$. Итак, мы получили, что

$$\forall \mathcal{U}_1 \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}|\mathcal{H}]\ \exists \mathcal{U}_2 \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{H}]] :\ \mathcal{U}_1 = \mathfrak{U}(\mathcal{U}_2).$$

Далее до конца настоящего раздела предполагается выполненным следующее

Условие 10.1. *Оператор* $\mathbf{h}$ *инъективен как отображение из* E *в* $\mathbf{H}$.

Напомним (см. разд. 7), что $\mathbf{h}$ есть собственная сюръекция, т. е. собственная биекция ($\mathbf{h}$ есть биекция E на $\mathbb{H}$), и что в рассматриваемом сейчас случае $\mathfrak{U}$ (оператор Чеха) есть гомеоморфизм компактов (7.5), а тогда при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ компакты $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$ и $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}])$ вообще можно не различать, интерпретируя обобщенные оценки как ультрарешения. С другой стороны, используя свойства биекций, получаем, что

$$\mathbf{h}^{-1}[\mathbf{h}^1[\mathcal{H}]] = \mathcal{H}\ \ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{10.13}$$

Предложение 10.4. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ *и* $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}]$, *то*

$$\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}|\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]] \subset \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]). \tag{10.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (10.13) следует, в частности, очевидное равенство

$$\mathcal{E} = \mathbf{h}^{-1}[\mathbf{h}^1[\mathcal{E}]]. \tag{10.15}$$

Пусть $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}|\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]]$. В силу собственной биективности $\mathbf{h}$ имеем свойство $\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{U}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ (см. в этой связи [8, гл. I]), причем

$$\mathbf{h}^1[\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{U}]] = \mathcal{U}. \tag{10.16}$$

При этом $\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{U}] \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$ (учитываем (10.13), (10.15) и предположение относительно $\mathcal{U}$). В силу (10.16) имеем равенство $\mathfrak{U}(\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{U}]) = \mathcal{U}$, а тогда $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}])$. Поскольку выбор $\mathcal{U}$ был произвольным, установлено вложение (10.14). □

Из последнего предложения вытекает (при условии 10.1), что для восстановления фильтра $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]$, характеризующего эффект применения решения $\mathcal{F}$, вполне достаточно обобщенных оценок, конструируемых в разд. 7. В этой связи отметим одно уточнение (см (10.13)).

Предложение 10.5. *Если* $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, *то* $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{S}]) = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}|\mathbf{h}^1[\mathcal{S}]]$.

Следствие 10.3. *Если* $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, *то* $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{F}]) = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}|\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]]$.

Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то следствие 10.3 можно применять в случае $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}^0[E|\mathcal{E}]$. С учетом (10.1) мы получаем возможность исчерпывающей реализации фильтра $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] = \mathfrak{V}(\mathcal{F})$ в классе ультрарешений разд. 7 (см. (10.9)), т. е. в классе обобщенных оценок (имеется в виду случай, когда семейство $\mathcal{E}$ определяет ограничения асимптотического характера в основной задаче о достижимости).

11. Добавление 3: одно представление конечного объединения множеств притяжения

Ранее уже отмечалось (см. (9.2)), что МП можно эквивалентным образом определить, используя формализацию асимптотических версий решения в классе у/ф множества E; в этой связи см. [14], [31, § 4] и [32, § 5]. В [31,32] из упомянутого представления были извлечены некоторые полезные следствия (см., например, [32, с. 233]). Мы рассмотрим одно из применений упомянутых следствий для исследования структуры МП в некоторых специальных случаях.

В данном разделе полагаем заданным семейство $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, для которого

$$E \in \mathcal{M}, \quad M_1 \cap M_2 \in \mathcal{M} \ \ \forall M_1 \in \mathcal{M}\ \forall M_2 \in \mathcal{M}, \quad M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M} \ \ \forall M_1 \in \mathcal{M}\ \forall M_2 \in \mathcal{M}. \tag{11.1}$$

Итак, $\mathcal{M}$ есть семейство п/м E, содержащее само E как “единицу” и замкнутое относительно конечных пересечений и конечных объединений. Конечно, в качестве $\mathcal{M}$ может использоваться алгебра множеств, топология, σ-топология (последнее понятие восходит к работам А.Д. Александрова: см., например, [33]).

Если $A \in \mathcal{P}(E)$, то через $\mathfrak{M}_0[A]$ обозначаем семейство всех множеств $M \in \mathcal{M}$ таких, что $A \subset M$. Тем самым введены аналоги открытых окрестностей множеств в ТП. Легко видеть, что

$$\mathfrak{M}_0[A] \in \beta_0[E] \ \ \forall A \in \mathcal{P}'(E). \tag{11.2}$$

С учетом (11.2) определяем фильтры, аналогичные фильтрам окрестностей в смысле [8]: если $A \in \mathcal{P}'(E)$, то

$$\mathfrak{M}[A] \stackrel{\triangle}{=} (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathfrak{M}_0[A]] = \{S \in \mathcal{P}(E) | \exists B \in \mathfrak{M}_0[A] : B \subset S\} \in \mathfrak{F}[E]. \tag{11.3}$$

Множества из $\mathfrak{M}[A]$ называем $\mathcal{M}$-окрестностями множества A (если $\mathcal{M}$ — топология E, то $\mathfrak{M}[A]$ есть фильтр всех окрестностей [8] в соответствующем ТП; подобную интерпретацию можно использовать и в случае σ-топологических пространств). Фильтры (11.3) можно использовать для формирования ограничений асимптотического характера.

Как и ранее, фиксируем триплет $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$: $(\mathbf{H}, \tau)$ — ТП, $\mathbf{h}$ — оператор (1.1). Кроме того, пусть $n \in \mathbb{N}$ и

$$(W_i)_{i \in \overline{1,n}} : \ \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{P}'(E). \tag{11.4}$$

Следуя (9.1), мы рассматриваем следующие МП

$$\Big((\tau\text{-}\mathbf{AS})\big[\mathfrak{M}[W_i]\big] = (\mathbf{as})\big[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathfrak{M}[W_i]\big] \in \mathcal{P}(\mathbf{H}) \ \ \forall i \in \overline{1,n}\Big)$$
$$\& \ \left((\tau\text{-}\mathbf{AS})\left[\mathfrak{M}\left[\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right]\right] = (\mathbf{as})\left[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathfrak{M}\left[\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right]\right] \in \mathcal{P}(\mathbf{H})\right).$$

Предложение 11.1. *Справедливо равенство* $\mathfrak{M}_0\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i\right] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_0[W_i]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения легко следует, что

$$\mathfrak{M}_0\left[\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right] \subset \mathfrak{M}_0[W_j] \ \ \forall j \in \overline{1,n}.$$

Как следствие получаем очевидное вложение

$$\mathfrak{M}_0\left[\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right] \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_0[W_i]. \tag{11.5}$$

Пусть теперь U — множество из семейства в правой части (11.5); тогда $U \in \mathcal{M}$ и при этом $W_i \subset U \ \ \forall i \in \overline{1,n}$. Тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i \subset U$ и как следствие $U \in \mathfrak{M}_0\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i\right]$. Вложение, противоположное (11.5), установлено. □

Следствие 11.1. *Справедливо равенство* $\mathfrak{M}\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i\right] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{M}[W_i]$.

Доказательство. Если $U \in \mathfrak{M}\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i\right]$, то в силу предложения 11.1 для некоторого множества

$$V \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_0[W_i]$$

имеем вложение $V \subset U$; в итоге $U \in \mathfrak{M}[W_j] \ \ \forall j \in \overline{1,n}$. Вложение

$$\mathfrak{M}\left[\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right] \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{M}[W_i] \tag{11.6}$$

установлено. Пусть Ω — множество из семейства в правой части (11.6). Тогда $\Omega \in \mathcal{P}(E)$ и для некоторого кортежа

$$(\Omega_i^0)_{i \in \overline{1,n}} \in \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_0[W_i]$$

имеем следующую систему вложений: $\Omega_j^0 \subset \Omega \ \ \forall j \in \overline{1,n}$. При этом $\Omega_j^0 \in \mathcal{M}$ и $W_j \subset \Omega_j^0$ для каждого $j \in \overline{1,n}$. В силу (11.1) имеем

$$\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i^0 \in \mathcal{M} : \bigcup_{i=1}^{n} W_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i^0 \subset \Omega.$$

Это означает, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i^0 \in \mathfrak{M}_0\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i\right]$ и $\Omega \in \mathfrak{M}\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i\right]$. Вложение, противоположное (11.6), установлено. □

Предложение 11.2. *Справедливо следующее представление МП в виде объединения*

$$(\tau\text{-}\mathbf{AS})\left[\mathfrak{M}\left[\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right]\right] = \bigcup_{i=1}^{n} (\tau\text{-}\mathbf{AS})[\mathfrak{M}[W_i]].$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (11.3), следствия 11.1 и предложения 5.3 работы [32] (см., в частности, соотношение (5.27) в [32]); см. также предложение 4.2 работы [31]. В предложении 11.3 мы имеем асимптотический аналог свойства: образ объединения множеств $W_1, ..., W_n$ при действии $\mathbf{h}$ совпадает с объединением образов этих множеств.

Поступила 11.11.2006

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
4. **Панасюк А.И., Панасюк В.И.** Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986.

5. **Эльясберг П.Е.** Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.
6. **Богачев В.И.** Основы теории меры. Т. 1. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003.
7. **Богачев В.И.** Основы теории меры. Т. 2. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003.
8. **Бурбаки Н.** Общая топология. М.: Наука, 1968.
9. **Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А.** Общая топология. М.: Высшая школа, 1979.
10. **Čech E.** Topological spaces. Prague: Academia, 1966.
11. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970.
12. **Chentsov A.G.** Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York; London; Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996.
13. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1997.
14. **Ченцов А.Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна-Чеха // Современная математика и ее приложения. Тбилиси: АН Грузии. Ин-т кибернетики, 2005. Т. 26. С. 119–150.
15. **Ченцов А.Г.** К вопросу о корректном расширении одной задачи о выборе плотности вероятности при ограничениях на систему математических ожиданий // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, вып. 5(305). С. 223–242.
16. **Ченцов А.Г.** К вопросу о корректном расширении некоторых неустойчивых задач управления с интегральными ограничениями // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. С. 185–223.
17. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986.
18. **Архангельский А.В.** Компактность // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 50.
19. **Ченцов А.Г.** Топологические конструкции расширений и представления множеств притяжения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6. С. 269–301.
20. **Chentsov A.G. and Morina S.I.** Extensions and Relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
21. **Ченцов А.Г.** Обобщенные множества притяжения и приближенные решения, их формирующие // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. Т. 10, № 2. С. 178–196.
22. **Chentsov A.G.** Some questions of asymptotic analysis: approximate solutions and extension constructions // Functional Differential Equations. 2005. Vol. 12, no. 1–2. P. 119–148.
23. **Chentsov A.G.** Some properties of generalized attraction sets // Functional Differential Equations. 2006. Vol. 13, no. 3–4. P. 381–415.
24. **Ченцов А.Г.** К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер // Изв. вузов. Математика. 2002. № 2. С. 58–80.
25. **Келли Дж.Л.** Общая топология. М.: Наука. 1981.
26. **Chentsov A.G.** Extensions in the class of finitely additive measures // Soochow J. Math. 2004. Vol. 30, no. 1. P. 27–54.
27. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
28. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
29. **Bhaskara Rao K.P.S., Bhaskara Rao M.** Theory of charges. A study of finitely additive measures. N.-Y.: Acad. Press, 1983.
30. **Chentsov A.G.** Finitely additive measures and extension constructions // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 2001. V. 49. C. 531–545.
31. **Ченцов А.Г.** Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах управления // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби: Тр. междунар. семинара. Екатеринбург: Уральск. ун-т, 2006. Т. 1. С. 48–60.
32. **Ченцов А.Г.** Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2006. Т. 12, № 1. С. 216–241.
33. **Alexandroff A.D.** Additive set-functions in abstract spaces // Мат. сб. 1940. Т. 8 (50), № 2. С. 307–348.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 2 2007

УДК 519.633

СЕТОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

Г. И. Шишкин

Рассматривается задача Дирихле для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии с кусочно-непрерывными начально-краевыми условиями в прямоугольной области. Старшая производная уравнения содержит параметр ε^2; $\varepsilon \in (0, 1]$. При малых значениях параметра ε в окрестности боковой части границы и в окрестности характеристики предельного уравнения, проходящей через точку разрыва начальной функции, возникают соответственно пограничный и внутренний слои (с характерной шириной ε), имеющие ограниченную гладкость при фиксированных значениях параметра ε. С использованием метода аддитивного выделения особенностей (порождаемых разрывами граничной функции и ее производных низкого порядка), а также метода сгущающихся сеток (кусочно-равномерных сеток, сгущающихся в окрестности пограничных слоев) строятся и исследуются специальные разностные схемы, сходящиеся ε-равномерно со вторым порядком точности по x и с первым по t с точностью до логарифмических сомножителей.

Введение

Трудности, связанные с решением краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений (уравнений с малым параметром при старшей производной), хорошо известны (построения сеточных аппроксимаций в случае достаточно гладких данных приводятся, например, в [1–6]; см. библиографию там же). Ошибки решений численных методов, разработанных для регулярных задач, зависят от величины возмущающего параметра ε, определяющего характерную ширину пограничного слоя, и при малых значениях параметра ε становятся большими, нередко во много раз превышая решение задачи [4]. Для такого типа сингулярно возмущенных задач требуются специальные численные методы, позволяющие аппроксимировать решения с ошибкой, не зависящей от параметра ε, — методы, сходящиеся ε-равномерно. Обычно при построении и исследовании ε-равномерно сходящихся разностных схем данные краевых задач предполагаются достаточно гладкими и удовлетворяющими дополнительным условиям согласования в точках негладкости границы, обеспечивающим гладкость решения исследуемой задачи при фиксированных значениях параметра ε. Снижение гладкости решения, например, в том случае, когда начальное либо граничное условия являются кусочно-гладкими либо терпят разрыв, приводит к появлению дополнительных особенностей (при малых значениях ε), что осложняет построение ε-равномерно сходящихся численных методов и их исследование. Сингулярно возмущенные задачи с негладкими данными либо недостаточно гладкими данными возникают, например, при моделировании диффузионных процессов в обработке металлов [7], в финансовой математике [8].

Специальные схемы для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии с одной слабой особенностью — кусочно-гладким начальным условием — рассматривались в [8, 9]. Схемы для параболических уравнений реакции-диффузии с несколькими

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07–01–00729), Булевского центра исследований по информатике при Национальном университете Ирландии, г. Корк, а также Mathematics Applications Consortium for Science and Industry in Ireland (MACSI).

слабыми особенностями, такими, как кусочно-гладкие начальные и граничные условия и/или отсутствие условий согласования, рассматриваются в [10]. В этих работах при построении ε-равномерно сходящихся схем использовался метод сгущающихся сеток (для сингулярно возмущенных задач метод впервые рассмотрен в [1]) — классические сеточные аппроксимации задачи на кусочно-равномерных сетках, сгущающихся в окрестности пограничного слоя.

Задачи для сингулярно возмущенных параболических уравнений реакции-диффузии с сильной особенностью — разрывным начальным условием — рассмотрены в [7, 11]. В этих задачах при построении специальных схем кроме метода сгущающихся сеток (сгущающихся в окрестности пограничных слоев) использовалась специфическая техника, такая как метод подгонки в [11] либо метод аддитивного выделения особенности в [7] (в окрестности точек разрыва начальной функции). В методах подгонки сингулярные компоненты решения (либо некоторые из них) являются решением разностной схемы (для сингулярно возмущенных задач метод впервые обоснован в [2]), а в методах аддитивного выделения особенности эти компоненты входят в приближенное решение аддитивно (в случае регулярной задачи с негладкими данными описание метода см., например, в [12] и библиографию там же).

Специальные схемы для сингулярно возмущенных параболических уравнений при одновременном наличии как слабых, так и сильных дополнительных особенностей в литературе не известны. Таким образом, разработка и исследование ε-равномерно сходящихся схем для класса сингулярно возмущенных задач с отмеченными выше дополнительными особенностями является актуальной проблемой.

1. Постановка задачи. Цель работы

1.1. В области $\overline{G}$ с границей S, где

$$\overline{G} = G \cup S, \quad G = D \times (0, T], \quad D = \{x: \ x \in (-d,\, d)\}, \tag{1.1}$$

рассмотрим задачу Дирихле для сингулярно возмущенного параболического уравнения с постоянными коэффициентами[2]

$$\begin{aligned} L_{(1.2)}\, u(x,t) \ &\equiv\ \Big\{\varepsilon^2\, a\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c - p\,\frac{\partial}{\partial t}\Big\}\, u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G, \\ u(x,t) \ &=\ \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S \setminus S^d. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $a,\ p > 0,\ c \geq 0$, правая часть $f(x,t)$ является достаточно гладкой на множестве $\overline{G}$; параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,\, 1]$.

Начально-краевая функция $\varphi(x,t)$ является непрерывной на $S \setminus S^d$ и терпит разрывы I рода на множестве S^d; $S^d = S_0^d \bigcup S^{cd} \bigcup S^{Ld}$, где $S_0^d = \{(0,\,0)\}$, $S^{cd} = \{(-d,\,0)\}$, $S^{Ld} = \{(-d,\,t_0)\}$, $t_0 \in (0,\,T]$; $S_0^d \subset S_0$, $S^{cd} \subset S^c$, $S^{Ld} \subset S^{Ll}$. Здесь $S = S_0 \bigcup S^L$, $S_0 = \overline{S}_0$ и S^L — нижняя и боковая части границы S, $S^L = \Gamma \times (0,\,T]$, $\Gamma = \overline{D} \setminus D$; $S^c = S_0 \bigcap \overline{S}^L$ — множество угловых точек; $S^L = S^{Ll} \bigcup S^{Lr}$, $\Gamma = \Gamma^l \bigcup \Gamma^r$, S^{Ll}, Γ^l и S^{Lr}, Γ^r — соответственно левые и правые части границ S^L и Γ. Функция $\varphi(x,t)$ предполагается достаточно гладкой на замыкании тех участков границы S, на которых она непрерывна; продолжения $\varphi(x,t)$ на замыкания обозначаем также через $\varphi(x,t)$. Выполнение условий согласования на множестве S^c не предполагается.

Под решением задачи (1.2) понимается функция $u \in C(\overline{G}^*) \cap C^{2,1}(G)$, ограниченная на $\overline{G}$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению на G и граничному условию на S^*, где $\overline{G}^* = \overline{G} \setminus S^d$, $S^* = S \setminus S^d$.

1.2. При фиксированных значениях параметра ε функция $u(x,t)$ терпит разрывы на S^d; производные функции $u(x,t)$ неограниченно возрастают при $(x,t) \to S^d$.

[2]Запись $L_{(j.k)}$ ($m_{(j.k)}$, $M_{(j.k)}$, $G_{h(j.k)}$)) означает, что эти операторы (постоянные, сетки) введены в формуле $(j.k)$.

Уточним поведение решения при малых значениях параметра ε. Пусть $S^{\gamma} = \{(x,t): \ x = \gamma(t) \equiv 0, \ t \in [0,T]\}$ — характеристика предельного уравнения, проходящая через S_0^d. При стремлении параметра ε к нулю в окрестности множеств S^L и S^{γ} появляются параболические пограничные и внутренний слои с характерным масштабом ε (см. оценки в разделах 2, 3).

Известно, что уже в случае сингулярно возмущенных задач с достаточно гладкими данными решения классических разностных схем не сходятся ε-равномерно (см., например, [4,7]). Для сингулярно возмущенных уравнений с параболическим пограничным слоем не существует схем метода подгонки, сходящихся ε-равномерно (см., например, [3,5]). В том случае, когда функция $\varphi(x,t)$ терпит разрывы, разностные схемы на основе классических аппроксимаций краевой задачи не сходятся в равномерной норме уже при фиксированных значениях ε.

Наша цель — для задачи (1.2), (1.1) построить разностные схемы метода аддитивного выделения особенностей, сходящиеся ε-равномерно, и исследовать их скорость сходимости.

Будем также рассматривать краевую задачу, в которой функция $\varphi(x,t)$ либо ее производные (низкого порядка) терпят разрывы на множестве S^d. В этом случае функция $u(x,t)$ непрерывна на $\overline{G}$, исключая лишь множество точек, на которых $\varphi(x,t)$ терпит разрывы.

2. Априорные оценки решения краевой задачи при $S^d = S_0^d$

Для решения краевой задачи (1.2) и его производных получим ряд оценок. При выводе оценок применяется техника из [3, 9, 13] — используется декомпозиция решения задачи на регулярную (достаточно гладкую) и сингулярную компоненты решения. Предполагаем, что функции $f(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ — достаточно гладкие на множествах $\overline{G}$ и $\overline{S}^{\,L}$, S_0^+, S_0^- соответственно; $\varphi(x,t) \in C(S^*)$. Здесь $S_0 = S_0^- \bigcup S_0^+$, $S_0^- = S_0 \bigcap \{x \le 0\}$, $S_0^+ = S_0 \bigcap \{x \ge 0\}$.

2.1. Множество $\overline{G}$ представим в виде суммы пересекающихся подмножеств

$$\overline{G} = \bigcup\nolimits_j \overline{G}^{\,j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \overline{G}^{\,2} = \overline{G}^{\,2l} \bigcup \overline{G}^{\,2r}, \tag{2.1}$$

где[3] $G^1 = G^1(m^1) = \{(x,t): \ |x| < m^1, \ t \in (0,T]\}$, $G^2 = G^2(m^2) = \{(x,t): \ r(x,\Gamma) < m^2, \ (x,t) \in G\}$, $G^3 = G^3(m^3) = G \setminus \{G^1(m^3) \bigcup G^2(m^3)\}$, $G^{2l} = G^2 \bigcap \{x < 0\}$, $G^{2r} = G^2 \bigcap \{x > 0\}$; $m^3 < m^1, m^2$; $r(x,\Gamma)$ — расстояние от точки x до множества Γ, G^1 и G^2 — окрестности внутреннего и пограничного слоев соответственно; пусть $\overline{G}^{\,1} \bigcap \overline{G}^{\,2} = \varnothing$. Иногда для удобства, решение задачи (1.2), (1.1), рассматриваемое на множестве $\overline{G}^{\,j}$, будем также обозначать через $u^j(x,t)$, $j = 1, 2, 3$. С использованием результатов из [3,13] устанавливается оценка

$$\left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} \, u(x,t) \right| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}^{\,3}, \quad k + 2k_0 \le K. \tag{2.2}$$

Величина K определяется данными задачи; $K \ge 4$.

2.2. Исследуем решение задачи на множестве $\overline{G}^{\,1}$.

На множестве $\overline{G}^{\,1*}$ введем функцию

$$\widehat{u}(x,\,t) = u\big(x,\,t\big)\,\exp(\alpha\,t), \quad (x,\,t) \in \overline{G}^{\,1*}, \tag{2.3}$$

где $\overline{G}^{\,1*} = \overline{G}^{\,1} \setminus S_0^d$, $\alpha = c\,p^{-1}$. В случае функции $\widehat{u}(x,\,t)$ задача (1.2), рассматриваемая на множестве $\overline{G}^{\,1*}$, преобразуется в задачу для сингулярно возмущенного уравнения теплопроводности

$$L_{(2.4)} \widehat{u}(x,\,t) \equiv \left\{ \varepsilon^2\, a\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} - p\, \frac{\partial}{\partial t} \right\} \widehat{u}(x,\,t) = \widehat{f}(x,\,t), \quad (x,\,t) \in G^1, \tag{2.4a}$$

[3] Через m, m^i, m_i (через M, M^i, M_i) обозначаем достаточно малые (большие) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε и от шаблонов разностных схем.

$$\widehat{u}(x,\,t) = \begin{cases} \widehat{u}^{\,3}(x,\,t), & (x,\,t) \in S^{\,1} \setminus S, \\ \widehat{\varphi}(x,\,t), & (x,\,t) \in S^{\,1*} \bigcap S. \end{cases}$$

Здесь $S^{\,1}$ — граница множества $G^{\,1}$, $\overline{G}^{\,1} = G^{\,1} \bigcup S^{\,1}$,

$$\widehat{v}(x,\,t) = v\big(x,\,t\big)\,\exp(\alpha\,t), \tag{2.4b}$$

где $v(x,t)$ — одна из функций $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^{\,1*}$, $f(x,t)$, $(x,\,t) \in \overline{G}^{\,1}$, $\varphi(x,\,t)$, $(x,\,t) \in S^{\,1*} \bigcap \{t = 0\}$, $u^{\,3}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^{\,1} \bigcap \overline{G}^{\,3}$; $u^{\,3}(x,t) = u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^{\,3}$.

Решение краевой задачи (2.4) представим в виде суммы функций

$$\widehat{u}(x,\,t) = \widehat{U}(x,\,t) + \widehat{W}(x,\,t), \quad (x,\,t) \in \overline{G}^{\,1*}, \tag{2.5a}$$

соответствующей формальной декомпозиции $u(x,\,t) = U(x,\,t) + W(x,\,t)$, $(x,\,t) \in \overline{G}^{\,1*}$, где $U(x,t)$ и $W(x,t)$ — регулярная (достаточно гладкая) и сингулярная части решения; $W(x,t)$ есть функция внутреннего слоя, порождаемая разрывом функции $\varphi(x,\,t)$ и ее младших производных. Функция $\widehat{U}(x,t)$ имеет ε-равномерно ограниченные производные по x до K-го порядка и по t до $K/2$ порядка. Функция $\widehat{W}(x,t)$ — решение задачи Коши

$$L_{(2.4)}\widehat{W}(x,t) = 0,\ (x,t) \in G^{\infty}, \quad \widehat{W}(x,\,t) = \widehat{\Phi}_W(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ t = 0,\ G^{\infty} = \mathbb{R} \times (0,T]. \tag{2.6}$$

Здесь $\widehat{\Phi}_W(x) = 2^{-1}\,[\widehat{\varphi}(0,\,0)]\,\operatorname{sign} x + 2^{-1}\sum\limits_{k=1}^{K-1}(k!)^{-1}\left[\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\,\widehat{\varphi}(0,\,0)\right]|x|\,x^{k-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\left[\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\,\widehat{\varphi}(0,\,0)\right] = \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\,\widehat{\varphi}(+0,\,0) - \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\,\widehat{\varphi}(-0,\,0)$ — скачок производной $\dfrac{\partial^{\,k}}{\partial x^k}\,\widehat{\varphi}(x,\,t)$ в точке $(0,\,0)$, $k = 0, 1, \ldots, K-1$. Функцию $\widehat{\Phi}_W(x)$, продолженную на замыкания множеств, где она непрерывна, обозначаем также через $\widehat{\Phi}_W(x)$.

Функция $\widehat{U}(x,\,t)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} L_{(2.4)}\widehat{U}(x,\,t) &= \widehat{f}(x,\,t), \quad (x,\,t) \in G^{\,1}, \\ \widehat{U}(x,\,t) &= \begin{cases} \widehat{u}^{\,3}(x,\,t) - \widehat{W}(x,\,t), & (x,\,t) \in S^{\,1}, \quad t > 0, \\ \widehat{\varphi}(x,\,t) - \widehat{\Phi}_W(x), & (x,\,t) \in S^{\,1*}, \quad t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Для функции $\widehat{U}(x,\,t)$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}}\,\widehat{U}(x,\,t)\right| \le M, \quad (x,\,t) \in \overline{G}^{\,1}, \quad k + 2k_0 \le K, \tag{2.7}$$

устанавливаемая с учетом гладкости данных задачи [14].

Функцию $\widehat{W}(x,\,t)$ удобно представить в таком виде

$$\widehat{W}(x,\,t) = \sum_{k=0}^{K-1}\widehat{W}_k(x,\,t), \quad (x,\,t) \in \overline{G}^{\,\infty}, \quad (x,\,t) \notin S_0^d; \tag{2.5b}$$

здесь $\widehat{W}_k(x,\,t)$ — решение задачи (2.6), где $\widehat{\Phi}_W(x)$ есть

$$\widehat{\Phi}_0(x) = 2^{-1}\,[\widehat{\varphi}(0,\,0)]\,\operatorname{sign} x, \quad \widehat{\Phi}_k(x) = 2^{-1}\,(k!)^{-1}\,\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}\,\widehat{\varphi}(0,\,0)\right]\,|x|\,x^{k-1}, \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

где $k = 1, 2, ..., K-1$. Функции $\widehat{W}_k(x,\,t)$ выписываются в явном виде.

Функцию $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^{\,1*}$ представим в виде суммы функций

$$u(x,t) = U^{\,1}(x,t) + W^{\,1}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}^{\,1*}, \tag{2.8a}$$

где $U^{\,1}(x,t)$ и $W^{\,1}(x,t)$ — регулярная и сингулярная части решения,

$$\begin{aligned} U^{\,1}(x,t) &= U^{\,1}(x,t;\, i) \equiv U(x,t) + \sum_{k=i+1}^{K-1} W_k(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}^{\,1}; \\ W^{\,1}(x,t) &= W^{\,1}(x,t;\, i) \equiv \sum_{k=0}^{i} W_k(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}^{\,*}, \quad i \geq 1. \end{aligned} \tag{2.8b}$$

Здесь $U(x,t), W_k(x,t)$ — функции, соответствующие компонентам из представлений (2.5a), (2.5b).

Для компонент из представления (2.8) с учетом оценки (2.7) и явного вида функций $W_k(x,t)$ в случае условия

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}\,\varphi(0,0)\right] \neq 0, \quad k = j, \qquad \text{и} \qquad \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}\,\varphi(0,0)\right] = 0, \quad k \leq j-1, \quad \text{при} \ \ j \neq 0, \tag{2.9}$$

где $j \geq 0$, находим оценки

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}}\, U^1(x,t)\right| &\leq M\left[1 + \varepsilon^{\,i+1-k}\,\rho^{\,i+1-k-2k_0}\,\exp(-m\,\varepsilon^{-1}\,|x|)\right], \quad (x,t) \in \overline{G}^{\,1}, \\ \left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}}\, W^1(x,t)\right| &\leq M\left[1 + \varepsilon^{\,j-k}\,\rho^{\,j-k-2k_0}\,\exp(-m\,\varepsilon^{-1}\,|x|)\right], \quad (x,t) \in \overline{G}^{\,*}, \quad k + 2k_0 \leq\, K, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\rho = \rho(t) = t^{1/2}$, m — произвольная постоянная, $i = i_{(2.8b)}$, $j = j_{(2.9)}$, $i \geq j$, $j \geq 0$.

Заметим, что в случае условия (2.9) при $i \geq j > 0$ функция $W^1_{(2.8b)}(x,t;\, i) = W^1(x,t;\, i,\, j)$, $(x,t) \in \overline{G}$, является непрерывной; при $i < j$ компонента $W^1(x,t)$ в представлении (2.8a) отсутствует, т.е. $S_0^d = \varnothing$.

2.3. Рассмотрим задачу (1.2), (1.1) на множестве $\overline{G}^{\,2}$, предполагая, что решение задачи на $\overline{G}^{\,2}$ является достаточно гладким. Решение задачи представим в виде суммы функций

$$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}^{\,2}, \tag{2.11}$$

где $U(x,t)$ и $V(x,t)$ — регулярная и сингулярная части решения. Функция $U(x,t)$ есть сужение функции $U^{\,e}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^{\,2e}$, на множество $\overline{G}^{\,2}$. Здесь $U^e(x,t)$ — решение задачи

$$L_{(1.2)}\, U^e(x,t) = f^e(x,t), \quad (x,t) \in\, G^{2e}, \qquad U^e(x,t) = \varphi^e(x,t), \quad (x,t) \in\, S^{2e}, \tag{2.12}$$

где $\overline{G}^{\,2e} = G^{2e} \cup S^{2e}$. Область G^{2e} есть расширение области G^2 за границу S^L. Правая часть уравнения из (2.12) есть гладкое продолжение функции $f(x,t)$. Функция $\varphi^{\,e}(x,t)$ — гладкая на каждой кусочно-гладкой части множества S^{2e} и на множествах $S^2 \cap S_0$ и $S^2 \cap G^3$ совпадает с функциями $\varphi(x,t)$ и $u^3(x,t)$ соответственно; $\overline{G}^{\,2} = G^2 \cup S^2$. Функция $V(x,t)$ — решение задачи

$$L_{(1.2)}\, V(x,t) = 0, \quad (x,t) \in\, G^2, \qquad V(x,t) = \begin{cases} \varphi(x,t) - U(x,t), & (x,t) \in S^L, \\ \qquad 0, & (x,t) \in S^2 \setminus S^L. \end{cases}$$

Предположим, что на множестве $\overline{G}^{\,2}$ выполняется включение

$$u \in C^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\overline{G}^{\,2}), \quad l \geq 2, \quad \alpha \in (0,\, 1). \tag{2.13}$$

Таким образом, $\{S^{cd} \bigcup S^{Ld}\} = \varnothing$; компонента $W(x,t)$ (порождаемая разрывом функции $\varphi(x,\, t)$ на S^{cd} и S^{Ld}) в декомпозиции решения на $\overline{G}^{\,2}$ в представлении (2.11) не появляется. В этом случае для функций $U(x,t)$, $V(x,t)$ справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}}\, U(x,t) \right| \le\, M, \tag{2.14a}$$

$$\left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}}\, V(x,t) \right| \le\, M\,\varepsilon^{-k}\, \exp\Big(-m\,\varepsilon^{-1}\, r\big(x,\, \Gamma\big)\Big), \quad (x,t) \in \overline{G}^{\,2}, \quad k + 2k_0 \le K. \tag{2.14b}$$

Здесь $K \le l$, $m = m_{(2.10)}$.

Чтобы обеспечить включение (2.13) при $l = 4$ в окрестности множества S^c, достаточно потребовать выполнения следующего условия согласования (условия согласования до второго порядка производных по t [14])

$$\begin{gathered} \varphi(x^{\pm}, t) = \varphi(x, t+0), \quad \left\{ \varepsilon^2\, a\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c \right\} \varphi(x^{\pm}, t) - p\, \frac{\partial}{\partial t}\, \varphi(x, t+0) = f(x,t), \\ \left\{ \varepsilon^4\, a^2\, \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\,\varepsilon^2\, a\, c\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 \right\} \varphi(x^{\pm}, t) - p^2\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, \varphi(x, t+0) = \left\{ \varepsilon^2\, a\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c + p\, \frac{\partial}{\partial t} \right\} f(x,t), \\ (x,t) \in S^c, \end{gathered} \tag{2.15}$$

где $x^{\pm} = x^{\pm}(x)$, $x^{\pm}(x) = -d + 0$ при $x = -d$, $x^{\pm}(x) = d - 0$ при $x = d$.

В том случае, когда в окрестности множества S^c функции $f(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ являются достаточно гладкими соответственно на $\overline{G}$ и S_0, $\overline{S}^{\,L}$, функция $\varphi(x,t)$ непрерывна на S^c и выполняются условия согласования для производной по t лишь до k_0 порядка, будем также говорить, что производная по t k_0 порядка ($k_0 + 1$ порядка) функции $\varphi(x,t)$ непрерывна (терпит разрыв) на S^c.

Справедлива

Теорема 2.1. *Пусть* $S^d = S^d_0$, *и пусть для данных краевой задачи* (1.2), (1.1) *выполняется условие* $f \in C^{\,l_1, l_1/2}(\overline{G})$, $\varphi \in C(S^*) \cap \{C^{\,l_1}(S_0^-) \cap C^{\,l_1}(S_0^+) \cap C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,L})\}$, $l_1 = l + \alpha$, $l = K$, $\alpha \in (0,1)$, *и пусть для решения задачи выполняется условие* (2.13). *Тогда для решения краевой задачи и компонент из представлений* (2.8), (2.11) *в случае условия* (2.9) *выполняются оценки* (2.2), (2.10), (2.14).

З а м е ч а н и е 1. В случае условия $S^d = S^d_0$ при малых значениях параметра ε производные по x решения задачи (1.2), (1.1) резко изменяются в окрестности характеристики S^γ, причем в ближайшей окрестности S^γ (при $|x| = o(1)$) производные по x неограниченно растут при $|x| = \mathcal{O}\big(\varepsilon\, t^{1/2}\big)$, $\varepsilon\, t^{1/2} \to 0$ и становятся ограниченными при $\varepsilon^{-1}\, t^{-1/2}\, |x| \gg \ln(\varepsilon^{-1}\, t^{-1/2} + M)$, $\varepsilon\, t^{1/2} = \mathcal{O}\big(1\big)$. Внутренний слой, являющийся *переходным параболическим слоем*, есть решение краевой задачи в окрестности S^γ, вне которой производные по x ограничены. Переходный слой, порождаемый разрывной начальной функцией, является сильным. При условии

$$[\varphi(0,0)] = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x}\, \varphi(0,0) \right] \ne 0 \tag{2.16}$$

внутренний слой является слабым; его первая производная по x в ближайшей окрестности S^γ ε-равномерно ограничена. Для производной по t выполняется оценка

$$\left| \frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) \right| \le M\,\varepsilon\, t^{-1/2} \quad \text{при} \;\; \varepsilon^{-1}\, |x|\, t^{-1/2} \le m,$$

т.е. производная $\dfrac{\partial}{\partial t}\, u(x,t)$ не является ограниченной в окрестности точки $(0,0)$. Таким образом, особенность решения, порождаемая разрывом первой производной по x функции $\varphi\,(x,t)$ на

S_0^d, оказывается существенно сильнее особенности решения, порождаемой разрывом первой производной по t функции $\varphi(x,t)$ на $S^{cd} \bigcup S^{Ld}$.

З а м е ч а н и е 2. В том случае, когда в теореме 2.1 условие (2.13) нарушается, однако $u \in C(\overline{G}^{\,2})$, для компоненты $V(x,\,t)$, $(x,\,t) \in \overline{G}^{\,2}$, выполняется оценка

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}}\, V(x,t)\right| \le M\,\varepsilon^{-k}\left[1+\rho^{2-k-2\,k_0}+\rho_{t_0}^{2-k-2\,k_0}\right]\,\exp\left(-m\,\varepsilon^{-1}\,r(x,\,\Gamma)\right), \quad (x,\,t) \in \overline{G}^{\,2}, \tag{2.17}$$

где $\rho_{t_0} = \rho_{t_0}(t) = (t-t_0)^{1/2}$ при $t \ge t_0$, $\rho_{t_0}(t) = 0$ при $t < t_0$, $\rho = \rho_{(2.10)}(t)$, $m = m_{(2.10)}$.

3. Априорные оценки решения краевой задачи при $\{S^{cd} \bigcup S^{Ld}\} \subset S^d$

3.1. Исследуем решение задачи на множестве $\overline{G}^{\,2}$ в том случае, когда $S^{cd} \bigcup S^{Ld} \neq \varnothing$, т.е. $\varphi(x,t)$ либо ее производные терпят разрывы на S^{cd} и/или S^{Ld}.

Для простоты будем предполагать, что на множестве $\overline{G}^{\,2r}$ выполняется условие

$$u \in C^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\overline{G}^{\,2r}), \quad l \ge 2, \quad \alpha \in (0,\,1). \tag{3.1}$$

В этом случае для функций $U(x,t)$, $V(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^{\,2r}$, из представления (2.11) справедливы оценки (2.14),

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}}\, U(x,t)\right| \le\ M, \tag{3.2a}$$

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}}\, V(x,t)\right| \le\ M\,\varepsilon^{-k}\,\exp\Big(-m\,\varepsilon^{-1}\,r\big(x,\,\Gamma^r\big)\Big), \quad (x,t) \in \overline{G}^{\,2r}, \quad k+2k_0 \le K, \tag{3.2b}$$

где $m = m_{(2.10)}$.

Рассмотрим функцию $u(x,t)$ на множестве $\overline{G}^{\,2l}$. Функция $\widehat{u}^2(x,t) = \widehat{u}^2_{(2.4b)}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^{\,2l}$, — решение краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения теплопроводности

$$L_{(2.4)}\widehat{u}(x,\,t) = \widehat{f}(x,\,t), \quad (x,\,t) \in G^{2l}, \qquad \widehat{u}(x,\,t) = \begin{cases} \widehat{u}^{\,3}(x,\,t), & (x,\,t) \in S^{\,2l} \setminus S, \\ \widehat{\varphi}(x,\,t), & (x,\,t) \in S^{\,2l} \bigcap S. \end{cases} \tag{3.3}$$

Решение краевой задачи (3.3) представим в виде суммы функций

$$\widehat{u}(x,\,t) = \widehat{U}(x,\,t) + \widehat{V}(x,\,t) + \widehat{W}(x,\,t), \quad \widehat{W}(x,\,t) = \widehat{W}^c(x,\,t) + \widehat{W}^L(x,\,t), \quad (x,\,t) \in \overline{G}^{\,2l}, \tag{3.4a}$$

соответствующей формальной декомпозиции

$$u(x,\,t) = U(x,\,t) + V(x,\,t) + W(x,\,t), \quad W(x,\,t) = W^c(x,\,t) + W^L(x,\,t), \quad (x,\,t) \in \overline{G}^{\,2l}, \tag{3.4b}$$

где $U(x,t)$ и $V(x,t)$, $W(x,t)$ — регулярная (достаточно гладкая) и сингулярные (достаточно гладкая и негладкая) части решения; компоненты $W(x,t)$ и $V(x,t)$ порождаются разрывами функции $\varphi(x,t)$ и ее производных на $S^{cd} \bigcup S^{Ld}$ и достаточно гладкой функцией на $S^{2l} \bigcap S$. Функции $W(x,t)^c$ и $W^L(x,\,t)$ порождаются разрывами функции $\varphi(x,t)$ на S^{cd} и S^{Ld} соответственно. Функция $\widehat{U}(x,t)$ имеет ε-равномерно ограниченные производные по x до K-го порядка и по t до $K/2$ порядка. Функции $W(x,t)^c$ и $W^L(x,\,t)$ — ограниченные решения задач

$$\begin{aligned} &L_{(2.4)}\widehat{W}^c(x,\,t) = 0, \quad (x,t) \in G^{\,\infty+}, \quad \widehat{W}^c(x,\,t) = \widehat{\Phi}^c_W(t), \quad (x,t) \in S^{\,\infty+}; \\ &L_{(2.4)}\widehat{W}^L(x,\,t) = 0, \quad (x,t) \in G^{\,\infty+}, \quad \widehat{W}^L(x,\,t) = \widehat{\Phi}^L_W(t), \quad (x,t) \in S^{\,\infty+}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь

$$G^{\infty+} = \{(x,t):\ x \in (0,\,\infty),\ t \in (-\infty,\,T]\}, \quad S^{\infty+} = \overline{G}^{\infty+} \setminus G^{\infty+},$$

$$\widehat{\Phi}^c_W(t) = [\widehat{\varphi}(-d,\,0)]^c + \sum_{k_0=1}^{K_0} (k_0!)^{-1} \left[\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(-d,\,0)\right]^c t^{k_0}, \quad t > 0,$$

$$\widehat{\Phi}^L_W(t) = [\widehat{\varphi}(-d,\,t_0)] + \sum_{k_0=1}^{K_0} (k_0!)^{-1} \left[\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(-d,\,t_0)\right] (t-t_0)^{k_0}, \quad t > t_0,$$

причем $\widehat{\Phi}^c_W(t) = 0$, $t < 0$; $\widehat{\Phi}^L_W(t) = 0$, $t < t_0$; $K_0 = [(K+1)/2]_i$, $[a]_i$ — целая часть числа a, $a \ge 0$; $\left[\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(-d,\,t_0)\right] = \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(-d,\,t_0+0) - \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(-d,\,t_0-0)$ — скачок производной $\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(x,\,t)$ в точке $(-d,\,t_0)$, $k = 0,1,\ldots,K_0$. Скачок производной $\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(x,\,t)$ в угловой точке $(-d,\,0)$ определяется соотношением

$$\left[\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(-d,\,0)\right]^c = \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(-d,\,+0) - \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(-d+0,\,0),$$

где производные $\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(-d+0,\,0)$, $k_0 \ge 1$, определяются в силу уравнения (3.3).

Функция $U(x,t)$ есть сужение функции $U^e(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^{2le}$, на множество $\overline{G}^{2l}$. Здесь $U^e(x,t)$ — решение задачи (2.12), где функция $\varphi^e(x,\,t) = \varphi^e_U(x,\,t)$, $(x,t) \in S^{2le}$, — гладкая на каждой кусочно-гладкой части множества S^{2le} и на множествах $S^{2l} \bigcap S_0$ и $S^{2l} \bigcap G^3$ совпадает с функциями $\varphi(x,t) - W(x,t) = \varphi(x,t)$ и $u^3(x,t) - W(x,t)$ соответственно. Функция $V(x,t)$ — решение задачи

$$L_{(1.2)}\,V(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G^{2l}, \quad V(x,t) = \begin{cases} \varphi(x,t) - U(x,t) - W(x,t), & (x,t) \in S^{2l} \bigcap S^L, \\ 0, & (x,t) \in S^{2l} \setminus S^L. \end{cases}$$

Для функций $U(x,t)$ и $V(x,t)$ из (3.4b) справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}}\,U(x,t)\right| \le M, \quad \left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}}\,V(x,t)\right| \le M\,\varepsilon^{-k} \exp\Big(-m\,\varepsilon^{-1}\,r\big(x,\,\Gamma^l\big)\Big),$$
$$(x,t) \in \overline{G}^{2l}, \quad k + 2k_0 \le K, \quad m = m_{(2.14)}. \tag{3.6}$$

Функцию $\widehat{W}(x,\,t)$ удобно представить в таком виде

$$\widehat{W}(x,\,t) = \sum_{k_0=0}^{K_0} \widehat{W}_{k_0}(x,\,t), \tag{3.4c}$$

$$\widehat{W}_{k_0}(x,\,t) = \widehat{W}^c_{k_0}(x,\,t) + \widehat{W}^L_{k_0}(x,\,t) \quad (x,\,t) \in \overline{G}^{\infty+}, \quad (x,\,t) \notin \{S^{cd} \bigcup S^{Ld}\};$$

здесь $\widehat{W}^c_{k_0}(x,\,t)$ и $\widehat{W}^L_{k_0}(x,\,t)$ — решения задач (3.5), где $\widehat{\Phi}^c_W(t)$ и $\widehat{\Phi}^L_W(t)$ есть

$$\widehat{\Phi}^c_{k_0}(t) = [\widehat{\varphi}(-d,\,0)]^c, \quad k_0 = 0, \quad \widehat{\Phi}^c_{k_0}(t) = (k_0!)^{-1} \left[\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(-d,\,0)\right]^c t^{k_0}, \quad k_0 \ge 1, \quad t \ge 0;$$

$$\widehat{\Phi}^L_{k_0}(t) = [\widehat{\varphi}(-d,\,t_0)], \quad k_0 = 0, \quad \widehat{\Phi}^L_{k_0}(t) = (k_0!)^{-1} \left[\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\widehat{\varphi}(-d,\,t_0)\right] (t-t_0)^{k_0}, \quad k_0 \ge 1, \quad t \ge t_0,$$

причем $\widehat{\Phi}^c_{k_0}(t) = 0$, $t < 0$, $\widehat{\Phi}^L_{k_0}(t) = 0$, $t < t_0$, $k_0 = 0,1,\ldots,K_0$. Функции $\widehat{W}^c_{k_0}(x,\,t)$ и $\widehat{W}^L_{k_0}(x,\,t)$ выписываются в явном виде.

Теперь функцию $u(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}^{\,2l}$, представим в виде суммы функций

$$u(x,t)=U(x,t)+V^{\,2}(x,t)+W^{\,2}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{G}^{\,2l*}, \tag{3.7a}$$

где $\overline{G}^{\,2l*}=\overline{G}^{\,2l}\setminus\{S^{cd}\bigcup S^{Ld}\}$, $U(x,t)=U_{(3.4\text{b})}(x,t)$ и $V^{\,2}(x,t)$, $W^{\,2}(x,t)$ — регулярная и сингулярные части решения,

$$\begin{aligned}
V^{\,2}(x,t) &= V^{\,2}(x,t;\,i_0)\equiv V(x,t)+\sum_{k_0=i_0+1}^{K_0}W_{k_0}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{G}^{\,2l},\\
W^{\,2}(x,t) &= W^{\,2}(x,t;\,i_0)\equiv\sum_{k_0=0}^{i_0}W_{k_0}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{G}^{\,*},\quad i_0\ge 1, \qquad\qquad (3.7\text{b})\\
V(x,t) &= V_{(3.4\text{b})}(x,t),\quad W_{k_0}(x,t)=\widehat{W}_{k_0(3.4\text{c})}(x,t)\,\exp(-\alpha\,t),\quad \alpha=\alpha_{(2.3)}.
\end{aligned}$$

Здесь $W_{k_0}(x,t)$ — функции, соответствующие компонентам из представления (3.4c).

Пусть для функции $\varphi(x,t)$ на множествах S^{cd} и S^{Ld} выполняется условие

$$\left[\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\varphi(-d,\,0)\right]^c\ne 0\ \text{ и/или }\ \left[\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\varphi(-d,\,t_0)\right]\ne 0,\quad k_0=j_0, \tag{3.8}$$

а также

$$\left[\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\varphi(-d,\,0)\right]^c=0,\quad \left[\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\varphi(-d,\,t_0)\right]=0,\quad k_0\le j_0-1,\ \text{ при } j_0\ne 0,$$

где $j_0\ge 0$. В случае условия (3.8) при $j_0>0$ функция $W^{\,2}_{(3.7\text{b})}(x,t;\,i_0)=W^{\,2}(x,t;\,i_0,j_0)$, $(x,t)\in\overline{G}$, при $i_0\ge j_0$ является непрерывной; при $i_0<j_0$ компонента $W^{\,2}(x,t)$ в представлении (3.7a) отсутствует, т.е. $\{S^{cd}\bigcup S^{Ld}\}=\varnothing$.

Для компоненты $U(x,t)$ из представления (3.7a) выполняется оценка из (3.6)

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k\partial t^{k_0}}\,U(x,t)\right|\le M,\quad (x,t)\in\overline{G}^{\,2l},\quad k+2k_0\le K. \tag{3.9a}$$

При условии (3.8) для компонент $V^{\,2}(x,t)$, $W^{\,2}(x,t)$ из представления (3.7a) с учетом оценки из (3.6) и явного вида функций $W_{k_0}(x,t)$ находим оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k\partial t^{k_0}}\,V^2(x,t)\right|\le M\,\varepsilon^{-k}\left[1+\rho^{-k+2(i_0-k_0+1)}+\rho_{t_0}^{-k+2(i_0-k_0+1)}\right]\exp\big(-m\,\varepsilon^{-1}\,r(x,\,\Gamma^l)\big),$$
$$(x,t)\in\overline{G}^{\,2l}, \tag{3.9b}$$

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k\partial t^{k_0}}\,W^2(x,t)\right|\le M\,\varepsilon^{-k}\left[\rho^{-k+2(j_0-k_0)}+\rho_{t_0}^{-k+2(j_0-k_0)}\right]\exp\big(-m\,\varepsilon^{-1}\,r(x,\,\Gamma^l)\big),$$
$$(x,t)\in\overline{G}^{\,*},\quad k+2k_0\le K, \tag{3.9c}$$

где $\rho=\rho_{(2.10)}(t)$, $\rho_{t_0}=\rho_{t_0(2.17)}(t)$, $i_0=i_{0(3.7\text{b})}$, $j_0=j_{0(3.8)}$, $i_0\ge j_0$, $j_0\ge 0$; $m=m_{(2.10)}$.

Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть для данных краевой задачи* (1.2), (1.1) *выполняется условие* $f\in C^{\,l_1,l_1/2}(\overline{G})$, $\varphi\in C(S^*)\cap\{C^{\,l_1}(S_0^-)\cap C^{\,l_1}(S_0^+)\cap C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,Ll},\,t\le t_0)\cap C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,Ll},\,t\ge t_0)\cap C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,Lr})\}$, $l_1=l+\alpha$, $l=K$, $\alpha\in(0,1)$, *и пусть для решения задачи выполняется условие* (3.1). *Тогда для решения краевой задачи и компонент из представлений* (2.8), (2.11), (3.7) *в случае условий* (2.9), (3.8) *выполняются оценки* (2.2), (2.10), (3.2), (3.9).

4. Классические аппроксимации задачи (1.2), (1.1) на равномерных сетках при $u \in C(\overline{G})$

Известно, что в случае разрывной начальной функции классические разностные схемы не сходятся в равномерной сеточной норме уже при фиксированных значениях ε. В этом разделе рассмотрим классическую разностную схему для задачи (1.2), (1.1) в случае условия

$$u \in C(\overline{G}). \tag{4.1}$$

4.1. На основе классических аппроксимаций краевой задачи (1.2), (1.1) в случае кусочно-гладкой начальной и достаточно гладкой граничной функций, являющихся только непрерывными на S^c (в этом случае имеют место оценки (2.2), (2.14a), (2.17) и оценка (2.10), где $j > 0$) построим разностную схему и исследуем ее сходимость при не слишком малых значениях параметра ε по сравнению с шагом равномерной сетки по x. Техника построения и исследования схем подобна использованной в [9, 10] для параболических уравнений конвекции-диффузии и реакции-диффузии (см. также работы [3–5, 13, 15]).

На множестве $\overline{G}_{(1.1)}$ введем прямоугольную сетку

$$\overline{G}_h = \overline{D}_h \times \overline{\omega}_0 = \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0, \tag{4.2}$$

где $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$ — сетки на отрезках $[-d,\, d]$ и $[0,\, T]$ соответственно, сетка $\overline{\omega}$ — сетка с произвольным распределением узлов, удовлетворяющим лишь условию $h \le MN^{-1}$, где $h = \max_i h^i$, $h^i = x^{i+1} - x^i$, x^i, $x^{i+1} \in \overline{\omega}$, сетка $\overline{\omega}_0$ — равномерная с шагом $h_0 = TN_0^{-1}$. Здесь $N+1$ и N_0+1 — числа узлов сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$ соответственно.

Краевую задачу (1.2), (1.1), (4.1) аппроксимируем разностной схемой [15]

$$\begin{aligned} \Lambda_{(4.3)}\, z(x,t) \ &\equiv\ \left\{\varepsilon^2\, a\, \delta_{\overline{x}\,\widehat{x}} - c - p\, \delta_{\overline{t}}\right\} z(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G_h, \\ z(x,t) \ &=\ \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S_h. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь $\delta_{\overline{x}\,\widehat{x}}\, z(x,t) = z_{\overline{x}\,\widehat{x}}(x,t) = 2(h^i + h^{i-1})^{-1}[\delta_x\, z(x,t) - \delta_{\overline{x}}\, z(x,t)]$, $(x,t) = (x^i,t) \in G_h$, — вторая разностная производная на неравномерной сетке, $\delta_x z(x,t)$ и $\delta_{\overline{x}} z(x,t)$, $\delta_{\overline{t}}\, z(x,t)$ — первые (вперед и назад) разностные производные, $\delta_x z(x,t) = \left(h^i\right)^{-1} \left(z(x^{i+1},t) - z(x^i,t)\right)$, $\delta_{\overline{x}} z(x,t) = \left(h^{i-1}\right)^{-1} \left(z(x^i,t) - z(x^{i-1},t)\right)$, $\delta_{\overline{t}}\, z(x,t) = h_0^{-1} \left(z(x^i,t) - z(x^i,t-h_0)\right)$.

Разностная схема (4.3), (4.2) монотонна [15] ε-равномерно. Справедлив следующий вариант теоремы сравнения.

Теорема 4.1. *Пусть для функций $z^1(x,t)$, $z^2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, выполняются условия*

$$\Lambda\, z^1(x,t) < \Lambda\, z^2(x,t), \quad (x,t) \in G_h, \quad z^1(x,t) > z^2(x,t), \quad (x,t) \in S_h.$$

Тогда $z^1(x,t) > z^2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$.

Пусть выполняется условие (4.1). Рассмотрим разностную схему (4.3) на равномерной сетке

$$\overline{G}_h = \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0. \tag{4.4}$$

Пусть для функции $\varphi(x,t)$ выполняется условие (2.16), и пусть для решения краевой задачи и его компонент из представлений (2.8), (2.11) выполняются включение (2.13) и априорные оценки (2.2), (2.10) при $i = j = 1$ и (2.14), $K = 4$. С использованием априорных оценок, применяя технику мажорантных функций [15], подобно построениям в [3, 9, 13] находим

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M\left[(\varepsilon + N^{-1})^{-2}\, N^{-2} + N^{-1} + N_0^{-1} + \varepsilon\, N_0^{-1/2}\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{4.5}$$

Здесь мы воспользовались мажорантной функцией $w(x,t)$, удовлетворяющей условию

$$\Lambda\, w(x,t) \le -M \left\{ \varepsilon^2 \min \left[\max_{x\in\overline{D}} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) \right|,\ N^{-2} \max_{x\in\overline{D}} \left| \frac{\partial^4}{\partial x^4}\, u(x,t) \right| \right] \right.$$
$$\left. + \min \left[\max_{x\in\overline{D}} \left| \frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) \right|,\ N_0^{-1} \max_{x\in\overline{D}} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u(x,t) \right| \right] \right\}, \quad (x,t)\in\overline{G}, \quad t>0.$$

Таким образом, в случае условия (2.16) разностная схема (4.3), (4.4) сходится при условии $N^{-1} = o(\varepsilon)$; при фиксированных значениях ε схема сходится со скоростью $\mathcal{O}\bigl(N^{-1} + N_0^{-1/2}\bigr)$.

В случае условия (2.16) представление (2.8) не содержит компоненту $W_0(x,t)$. Пусть в представлении (2.8) отсутствуют компоненты $W_0(x,t)$, $W_1(x,t)$, т.е.

$$W_0(x,t) = W_1(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\overline{G}^{\,1}; \tag{4.6}$$

в этом случае выполняются соотношения

$$[\varphi(0,0)] = \left[\frac{\partial}{\partial x}\, \varphi(0,0) \right] = 0, \tag{4.7}$$

т.е. $\varphi(x,t)$ и производная $(\partial/\partial x)\,\varphi(x,t)$ непрерывны на S_0. При использовании схемы (4.3), (4.4) с учетом априорных оценок (в оценке (2.10) $i=j=2$) получается оценка

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M \left[(\varepsilon + N^{-1})^{-2}\, N^{-2} + N^{-2}\, \ln(M_1 + \varepsilon\, N) + N_0^{-1} + \varepsilon^2\, N_0^{-1}\, \ln N_0 \right],$$
$$(x,t)\in\overline{G}_h. \tag{4.8}$$

Разностная схема в случае условия (4.7) сходится при фиксированных значениях параметра ε со скоростью $\mathcal{O}\bigl(N^{-2}\ln N + N_0^{-1}\ln N_0\bigr)$.

Теорема 4.2. *Пусть выполняется условие* (4.1), *и пусть для решения задачи* (1.2), (1.1) *и его компонент из представлений* (2.8), (2.11) *выполняются включение* (2.13) *и априорные оценки* (2.2), (2.10) *при* $i=j$ (2.14), *где* $K=4$, *а также условие* (2.16) *при* $i=1$ (*условие* (4.7) *при* $i=2$). *Тогда разностная схема* (4.3), (4.4) *сходится при условии* $N^{-1} = o(\varepsilon)$. *В случае условия* (2.16) (*условия* (4.7)) *для сеточных решений справедлива оценка* (4.5) (*оценка* (4.8)).

З а м е ч а н и е 3. Из оценок (4.5), (4.8) следует, что наличие разрыва производной первого порядка по x начальной функции приводит к снижению скорости сходимости схемы (4.3), (4.4) при фиксированных значениях параметра ε. При этом порядок скорости сходимости снижается в два раза с точностью до логарифмических сомножителей.

4.2. Приведем оценки решений разностной схемы (4.3), (4.4) в случае, когда первая производная по t функции $\varphi(x,t)$ терпит разрыв на множестве S^{Ld}, и заданы *ослабленные условия согласования* на множестве S^c по сравнению с обычно требуемым условием (2.15), обеспечивающим включение $u\in C^{4,2}(\overline{G})$.

Пусть правая часть $f(x,t)$ и граничная функция $\varphi(x,t)$ являются достаточно гладкими на множествах $\overline{G}$ и S_0, $\overline{S}^L$ соответственно ($f\in C^{\,l_1,\,l_1/2}(\overline{G})$, $\varphi\in C(S)\cap\{C^{\,l_1}(S_0)\cap C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,L})\}$, $l_1 = l+\alpha$, $l=4$), и пусть на множестве S^c для данных $\varphi(x,t)$, $(x,t)\in S$, и $f(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$, выполняется условие согласования, обеспечивающее лишь непрерывность производной $(\partial/\partial t)\,u(x,t)$ на S^c (т.е. выполняется условие согласования для производной первого порядка по t; см. [14])

$$\varphi(x^{\pm},t) = \varphi(x,t+0),$$
$$\left\{ \varepsilon^2\, a\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c \right\} \varphi(x^{\pm},t) - p\, \frac{\partial}{\partial t}\, \varphi(x,t+0) = f(x,t), \quad (x,t)\in S^c, \quad x^{\pm} = x^{\pm}_{(2.15)}. \tag{4.9}$$

Задачу (1.2), (1.1) с такими данными назовем *эталонной задачей.*

Производная $(\partial^2/\partial t^2)\, u(x,t)$ на S^c в случае эталонной задачи, вообще говоря, не является непрерывной; $u \notin C^{4,2}(\overline{G})$. В этом случае для решения разностной схемы (4.3), (4.4) получается оценка, подобная оценке (4.8),

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M\left[(\varepsilon + N^{-1})^{-2}\, N^{-2} + N_0^{-1}\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_h, \tag{4.10}$$

т.е. такая же оценка, как и в случае условия (2.15), обеспечивающего включение $u \in C^{4,2}(\overline{G})$. Таким образом, даже при ослабленном условии (4.9) оценка скорости сходимости остается такой же, как и при условии (2.15).

Пусть теперь граничная функция является достаточно гладкой на множестве S_0, кусочно-гладкой на множестве $\overline{S}^{Ll}$, и производная по t функции $\varphi(x,\, t)$ терпит разрыв в точке $(x_0,\, t_0) \in S^{Ld}$, $t_0 \in (0,\, T]$, т.е.

$$[\varphi(x_0,\, t_0)] = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi(x_0,\, t_0)\right] \ne 0, \quad (x_0,\, t_0) \in S^{Ld}, \tag{4.11}$$

и пусть на функцию $\varphi(x,\, t)$ на множестве S^c налагается лишь условие непрерывности

$$\varphi(x^{\pm}, t) = \varphi(x, t+0), \quad (x,t) \in S^c, \quad x^{\pm} = x^{\pm}_{(2.15)}(x) \tag{4.12}$$

(условие согласования для первой производной по t не предполагается; в этом случае производная $(\partial/\partial t)\, u(x,t)$ на множестве S^c, вообще говоря, не является непрерывной [14]). При указанных условиях $u \notin C^{\,2,1}(\overline{G})$. В этом случае для сеточного решения получается оценка

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M\left[(\varepsilon + N^{-1})^{-2}\, N^{-2}\, \ln(M_1 + \varepsilon\, N) + N_0^{-1}\, \ln N_0\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_h, \tag{4.13}$$

т.е. такая же оценка, как и оценка (4.10) с точностью до логарифмических сомножителей. Схема (4.3), (4.4) сходится при фиксированных значениях ε со скоростью $\mathcal{O}\big(N^{-2}\, \ln N + N_0^{-1}\, \ln N_0\big)$.

Теорема 4.3. *Пусть для данных краевой задачи* (1.2), (1.1) *выполняется условие* $f \in C^{\,l_1, l_1/2}(\overline{G})$, $\varphi \in C(S) \cap \{C^{\,l_1}(S_0) \cap C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,Lr})\}$, $l_1 = l + \alpha$, $l = K$, $K = 4$, $\alpha \in (0,1)$, *а также условие* $\varphi \in C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,Ll})$ $\big($*условие* $\varphi \in C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,Ll}, t \le t_0) \cap C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,Ll}, t \ge t_0)\big)$ *при дополнительном условии* (4.9) (*условиях* (4.11), (4.12)). *Тогда разностная схема* (4.3), (4.4) *сходится при условии* $N^{-1} = o(\varepsilon)$; *для решения разностной схемы выполняются оценки* (4.10) *и* (4.13) *в случае условий* (4.9) *и* $\{(4.11),\ (4.12)\}$ *соответственно.*

З а м е ч а н и е 4. Пусть $z(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, — решение некоторой разностной схемы в случае краевой задачи (1.2), (1.1), (4.1). По функции $z(x,t)$ построим ее продолжение $\overline{z}(x,t)$ на $\overline{G}$; $\overline{z}(x,t)$ есть билинейный интерполянт на элементарных прямоугольниках разбиения $\overline{G}$, порождаемого прямыми, проходящими через узлы сетки $\overline{G}_h$ параллельно осям координат. Для интерполянтов $\overline{z}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, строящихся на основе решений разностной схемы (4.3), (4.4), при выполнении условий теорем 4.2, 4.3 сохраняются оценки скорости сходимости сеточных решений.

5. Разностная схема для задачи (1.2), (1.1), (4.1) на кусочно-равномерных сетках

В случае краевой задачи (1.2), (1.1) при условии (4.1) рассмотрим поведение сеточных решений разностной схемы (4.3), (4.2) при использовании кусочно-равномерных сеток, при различных типах негладкости начально-краевой функции $\varphi(x,t)$.

5.1. На множестве $\overline{G}$ строим сетку, сгущающуюся в окрестности пограничного слоя, подобную сетке, используемой в [3–5, 9, 13],

$$\overline{G}_h = \overline{D}_h \times \overline{\omega}_0 = \overline{\omega}^* \times \overline{\omega}_0, \tag{5.1a}$$

где $\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_{0(4.2)}$, $\overline{\omega}^* = \overline{\omega}^*(\sigma)$ — кусочно-равномерная сетка на $[-d,\, d]$, σ — параметр, зависящий от ε и N. Величину σ выбираем удовлетворяющей условию

$$\sigma = \sigma(N,\, \varepsilon) = \min\,[\,\beta,\, 2\,m^{-1}\,\varepsilon\,\ln N\,], \tag{5.1b}$$

где β — произвольное число из интервала $(0,\, d)$, $m = m_{(2.10)}$. Отрезок $[-d,\, d]$ разбивается на три части: $[-d,\, -d+\sigma]$, $[-d+\sigma,\, d-\sigma]$ и $[d-\sigma,\, d]$; на каждой части шаг сетки постоянен и равен $h^{(1)} = 2\,d\,\sigma\,\beta^{-1}\,N^{-1}$ на отрезках $[-d, -d+\sigma]$, $[d-\sigma,\, d]$ и $h^{(2)} = 2\,d\,(\,d-\sigma)\,(\,d-\beta)^{-1}\,N^{-1}$ на отрезке $[-d+\sigma,\, d-\sigma]$, $\sigma = \sigma_{(5.1)}$.

Разностную схему (4.3) на кусочно-равномерной сетке (5.1) назовем *базовой схемой* для задачи (1.2), (1.1), (4.1).

5.2. Пусть для решения краевой задачи выполняется условие (2.13). В том случае, когда функция $\varphi(x,t)$ удовлетворяет условию (2.16) с учетом априорных оценок решения краевой задачи (1.2) для решения базовой схемы получаем оценку

$$|\; u(x,t) - z(x,t)\;| \le M\;\left[\,N^{-1} + N_0^{-1} + \varepsilon\,N_0^{-1/2}\,\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_h; \tag{5.2a}$$

справедлива также ε-равномерная оценка

$$|\; u(x,t) - z(x,t)\;| \le M\;\left[\,N^{-1} + N_0^{-1/2}\,\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{5.2b}$$

В случае, когда функция $\varphi(x,t)$ удовлетворяет условию (4.7), получаем ε-равномерную оценку

$$|\; u(x,t) - z(x,t)\;| \le M\;\left[\,N^{-2}\,\ln N + N_0^{-1}\,\ln N_0\,\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{5.3}$$

Справедлива следующая

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 4.2. *Тогда базовая разностная схема* (4.3), (5.1) *сходится ε-равномерно. Для сеточного решения справедливы оценки* (5.2) *и* (5.3) *при условиях* (2.16) *и* (4.7) *соответственно.*

З а м е ч а н и е 5. Из сравнения оценок (5.2) и (5.3) вытекает, что наличие разрывов производной первого порядка по x начальной функции на S_0 приводит к существенному снижению ε-равномерной скорости сходимости базовой схемы (4.3), (5.1). При условии (2.16) порядок ε-равномерной скорости сходимости схемы снижается в два раза с точностью до логарифмических сомножителей по N и N_0 по сравнению со схемой при условии (4.7).

5.3. Приведем оценки сеточных решений в случае разрыва первой производной по t функции $\varphi(x,t)$, $(x,t) \in S^L$, и при ослабленных условиях согласования на S^c.

Для эталонной задачи (см. п. 4.2) имеем оценку

$$|\; u(x,t) - z(x,t)\;| \le M\;\left[\,N^{-2}\,\ln^2 N + N_0^{-1}\,\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{5.4}$$

Включение $u \in C^{4,2}(\overline{G})$ не приводит к улучшению ε-равномерной оценки (5.4).

Если же начально-краевая функция $\varphi(x,t)$ является достаточно гладкой на S_0 и кусочно-гладкой на $\overline{S}^L$ (для функции $\varphi(x,\, t)$ выполняется условие (4.11)), причем функция $\varphi(x,\, t)$ лишь непрерывна на S^c (выполняется условие (4.12)), для сеточного решения получаем оценку

$$|\; u(x,t) - z(x,t)\;| \le M\;\left[\,N^{-2}\,\ln^3 N + N_0^{-1}\,\ln N_0\,\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{5.5}$$

Таким образом, отсутствие условий согласования на S^c (помимо непрерывности $\varphi(x,\, t)$ на S^c), а также разрывы производных $(\partial/\partial t)\,\varphi(x,t)$ на S^L лишь несущественно ухудшают оценку (5.4); оценки (5.3) и (5.4) отличаются лишь логарифмическими сомножителями при N^{-2} и N_0^{-1}.

Теорема 5.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 4.3. *Тогда разностная схема* (4.3), (5.1) *сходится ε-равномерно*; *для сеточного решения справедливы оценки* (5.4) *и* (5.5) *в случае условий* (4.9) *и* {(4.11), (4.12)} *соответственно.*

6. Разностная схема для задачи (1.2), (1.1)

При построении ε-равномерно сходящейся разностной схемы для задачи (1.2), (1.1) с разрывной начально-краевой функцией применим метод аддитивного выделения особенностей.

6.1. Рассмотрим задачу (1.2), (1.1) при условии S_0^d, S^{cd}, $S^{Ld} \neq \varnothing$.

Решение задачи представим в виде суммы функций

$$u(x,\,t) = u_1(x,\,t) + u_2(x,\,t), \quad (x,\,t) \in \overline{G}, \tag{6.1a}$$

где

$$u_2(x,\,t) = W(x,t) \equiv W^{\,1}(x,t) + W^{\,2}(x,t), \quad (x,\,t) \in \overline{G}^{\,*},$$
$$W^{\,1}(x,t) = W^{\,1}_{(2.8)}(x,t;\,i), \quad (x,\,t) \in \overline{G} \setminus S_0^d,$$
$$W^{\,2}(x,t) = W^{\,2}_{(3.7)}(x,t;\,i_0), \quad (x,\,t) \in \overline{G} \setminus \{S^{cd} \cup S^{Ld}\}, \quad i,\,i_0 \geq 0.$$

Функция $u_1(x,\,t)$ — решение задачи

$$L_{(1.2)}\,u_1(x,\,t) = f(x,\,t), \quad (x,\,t) \in G, \quad u_1(x,\,t) = \varphi_1(x,\,t), \quad (x,\,t) \in S, \tag{6.1b}$$

где $\varphi_1(x,\,t) = \varphi(x,\,t) - W(x,t)$, $(x,\,t) \in S$; функция $\varphi_1(x,\,t)$ непрерывна на S.

Задаче (6.1b) на сетке (4.2) сопоставим разностную схему

$$\Lambda_{(4.3)}\,z_1(x,\,t) = f(x,\,t), \quad (x,\,t) \in G_h, \quad z_1(x,\,t) = \varphi_1(x,\,t), \quad (x,\,t) \in S_h. \tag{6.2a}$$

По функции $z_1(x,\,t)$, $(x,\,t) \in \overline{G}_h$, строим интерполянт $\overline{z}_1(x,\,t)$, $(x,\,t) \in \overline{G}$, и далее функцию

$$u_0^h(x,\,t) = \overline{z}_1(x,\,t) + W(x,\,t), \quad (x,\,t) \in \overline{G}^{\,*}. \tag{6.2b}$$

Функцию $u_0^h(x,\,t)$, $(x,\,t) \in \overline{G}^{\,*}$ назовем решением разностной схемы (6.2), (4.2) — схемы метода аддитивного выделения особенностей, порождаемых разрывами начально-краевой функции и ее производных низкого порядка, определяемых величинами $i_{(6.1)}$, $i_{0(6.1)}$.

6.2. Рассмотрим разностную схему (6.2) на равномерной сетке (4.4).

Пусть для величин i, i_0, определяющих $W(x,t)$ в (6.2b), выполняется условие

$$i_{(6.1)} = i_{0(6.1)} = 0. \tag{6.3}$$

В этом случае производные первого порядка функции $\varphi_1(x,\,t)$ терпят разрывы на множествах S_0^d (по x) и $S^c \cup S^{Ld}$ (по t).

С учетом априорных оценок функции $u_1(x,\,t)$ — решения задачи (6.1b) — получаем оценку

$$|u_1(x,\,t) - z_1(x,\,t)| \leq M\left[(\varepsilon + N^{-1})^{-2}\,N^{-2}\,\ln(M_1 + \varepsilon\,N) + N^{-1} + N_0^{-1}\,\ln N_0 + \varepsilon\,N_0^{-1/2}\right],$$
$$(x,t) \in \overline{G}_h.$$

Для функции $u_0^h(x,\,t)$, $(x,\,t) \in \overline{G}$, получается оценка

$$|u(x,\,t) - u_0^h(x,\,t)| \leq M\left[(\varepsilon + N^{-1})^{-2}\,N^{-2}\,\ln(M_1 + \varepsilon\,N) + N^{-1} + N_0^{-1}\,\ln N_0 + \varepsilon\,N_0^{-1/2}\right],$$
$$(x,t) \in \overline{G}. \tag{6.4}$$

Разностная схема (6.2), (6.3), (4.4) сходится при условии $N^{-1} = o(\varepsilon)$. При фиксированных значениях параметра ε разностная схема сходится со скоростью $\mathcal{O}\big(N^{-1} + N_0^{-1/2}\big)$.

Пусть выполняется условие

$$i_{(6.1)} = 1, \quad i_{0(6.1)} = 0. \tag{6.5}$$

В этом случае функция $\varphi_1(x,\,t)$ терпит разрыв второй производной по x на S_0^d и разрывы первых производных по t на $S^c \cup S^{Ld}$.

С учетом априорных оценок функции $u_1(x,\,t)$ оцениваем $u_1(x,\,t) - z_1(x,\,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$. Таким образом, для решения разностной схемы (6.2), (6.5), (4.4) получается оценка

$$|u_1(x,\,t) - u_0^h(x,\,t)| \le M\,\big[(\varepsilon + N^{-1})^{-2}\,N^{-2}\,\ln(M_1 + \varepsilon\,N) + N_0^{-1}\,\ln N_0\big], \qquad (x,t) \in \overline{G}. \tag{6.6}$$

Разностная схема сходится при условии $N^{-1} = o(\varepsilon)$; при фиксированных значениях параметра ε схема сходится со скоростью $\mathcal{O}\big(N^{-2}\,\ln N + N_0^{-1}\,\ln N_0\big)$.

В случае условия

$$i_{(6.1)} = i_{0(6.1)} = 1 \tag{6.7}$$

функция $\varphi_1(x,\,t)$ терпит разрывы производных второго порядка на множествах S_0^d (по x) и $S^c \cup S^{Ld}$ (по t). Для решения схемы (6.2), (6.7), (4.4) имеем оценку

$$\begin{gathered}|u_1(x,\,t) - u_0^h(x,\,t)| \le M\,\big[N^{-2}\,\ln(M_1 + \varepsilon\,N) + (\varepsilon + N^{-1})^{-2}\,N^{-2} + N_0^{-1} + \varepsilon^2\,N_0^{-1}\,\ln N_0\big],\\ (x,t) \in \overline{G};\end{gathered} \tag{6.8}$$

при фиксированных значениях ε схема сходится со скоростью $\mathcal{O}\big(N^{-2}\,\ln N + N_0^{-1}\,\ln N_0\big)$.

Теорема 6.1. *Пусть для данных краевой задачи* (1.2), (1.1) *выполняется условие* $f \in C^{\,l_1,l_1/2}(\overline{G})$, $\varphi \in C(S^*) \cap \{C^{\,l_1}(S_0^-) \cap C^{\,l_1}(S_0^+) \cap C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,Ll},\, t \le t_0) \cap C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,Ll},\, t \ge t_0) \cap C^{\,l_1/2}(\overline{S}^{\,Lr})\}$, $l_1 = l + \alpha$, $l = K$, $K = 4$, $\alpha \in (0,1)$. *Тогда разностные схемы* $\{(6.2),\,(6.3)\}$, $\{(6.2),\,(6.5)\}$, $\{(6.2),\,(6.7)\}$ *на сетке* (4.4) *сходятся при условии* $N^{-1} = o(\varepsilon)$; *для решений разностных схем справедливы оценки* (6.4), (6.6), (6.8).

6.3. Рассмотрим разностную схему (6.2) на кусочно-равномерной сетке (5.1), предполагая выполненными оценки теоремы 6.1.

С учетом априорных оценок функции $u_1(x,\,t)$ находим оценку для $z_1(x,\,t)$ — решения разностной схемы (6.2а) при условии (6.3). Для решения разностной схемы (6.2), (6.3), (5.1) получаем оценку

$$|u(x,\,t) - u_0^h(x,\,t)| \le M\,[N^{-1} + N_0^{-1/2}], \quad (x,\,t) \in \overline{G}. \tag{6.9}$$

Подобным образом для решения разностной схемы (6.2), (6.5), (5.1) находим оценку

$$|u(x,\,t) - u_0^h(x,\,t)| \le M\,[N^{-2}\,\ln^3 N + N_0^{-1}\,\ln N_0], \quad (x,\,t) \in \overline{G}. \tag{6.10}$$

В случае разностной схемы (6.2), (6.7), (5.1) имеем оценку

$$|u(x,\,t) - u_0^h(x,\,t)| \le M\,[N^{-2}\,\ln^2 N + N_0^{-1}\,\ln N_0], \quad (x,\,t) \in \overline{G}. \tag{6.11}$$

И лишь в случае схемы (6.2), (5.1) при условии

$$i_{(6.1)} = 2, \quad i_{0(6.1)} = 1 \tag{6.12}$$

получается оценка

$$|u(x,\,t) - u_0^h(x,\,t)| \le M\,[N^{-2}\,\ln^2 N + N_0^{-1}], \quad (x,\,t) \in \overline{G}. \tag{6.13}$$

Скорость сходимости схемы (6.2), (6.12), (5.1) — схемы метода аддитивного выделения особенности — такая же, как и скорость сходимости базовой схемы (4.3), (5.1) для краевой задачи (1.2), (1.1), (4.1), данные которой являются достаточно гладкими, удовлетворяющими на множестве S^c условиям согласования (2.15), обеспечивающим включение $u \in C^{4,2}(\overline{G})$.

Теорема 6.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 6.1. *Тогда разностная схема* (6.2) *на сетке* (5.1) *в случае условий* (6.3), (6.5), (6.7) *или* (6.12) *сходится ε-равномерно; для решений разностных схем справедливы оценки* (6.9)–(6.11), (6.13).

З а м е ч а н и е 6. При аппроксимации краевой задачи (6.1b) для решения разностной схемы (6.2a) было бы естественно воспользоваться кусочно-равномерной сеткой из [10], сгущающейся в окрестности множеств S^L и S^γ (пограничных и внутренних слоев). Такая разностная схема улучшает скорость сходимости схемы (6.2) при малых значениях параметра ε, однако не улучшает скорость ε-равномерной сходимости (см. обсуждения схемы (4.3) в случае задачи (1.2), (1.1), (4.1) в [10]).

Поступила 19.03.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–859.
2. **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Т. 6, вып. 2. С. 237–248.
3. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
4. **Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O'Riordan E. and Shishkin G.I.** Robust Computational Techniques for Boundary Layers. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2000.
5. **Miller J.J.H., O'Riordan E. and Shishkin G.I.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. Singapore: World Scientific, 1996.
6. **Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.** Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Convection–Diffusion and Flow Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
7. **Kolmogorov V.L., Shishkin G.I.** Numerical methods for singularly perturbed boundary value problems modelling diffusion processes // Singular Perturbation Problems in Chemical Physics. Ser.: Advances in Chemical Physics / Ed. by J.J.H. Miller. 1997. Vol. 97. P. 181–362.
8. **S. Li, Shishkin G. and Shishkina L.** Approximation of the solution and its derivative for the singularly perturbed Black-Scholes equation with nonsmooth initial data // Comp. Math. Math. Phys. 2007. Vol. 47, no. 3. P. 442–462.
9. **Шишкин Г.И.** Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных параболических уравнений конвекции-диффузии с кусочно-гладким начальным условием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 46, № 1. С. 52–76.
10. **Shishkin G.I.** Grid approximation of singularly perturbed parabolic reaction-diffusion equations with piecewise smooth initial-boundary conditions // Math. Modelling and Analysis. 2007. Vol. 12, no. 2. P. 235–254.
11. **Hemker P.W., Shishkin G.I.** Discrete approximation of singularly perturbed parabolic PDEs with a discontinuous initial condition // Comput. Fluid Dynamics J. 1994. Vol. 2, no. 4. P. 375–392.
12. **Марчук Г.И., Шайдуров В.В.** Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.
13. **Шишкин Г.И.** Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенной краевой задачи для квазилинейного эллиптического уравнения в случае полного вырождения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31, № 12. С. 1808–1825.
14. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
15. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

R. R. Akopyan. **Optimal Recovery of Functions Analytical in a Half-Plane.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 3–12.

On the class of functions analytical and bounded in a half-plane with bounded derivative of order $n \geq 0$, we solve problems of optimal recovery of values of a function and its derivatives of order $m \geq 0$, using the restriction of the spectral function. We obtain appropriate exact inequalities for functions analytical in a half-plane.

V. A. Belonogov. **Certain Pairs of Irreducible Characters of the Group S_n.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 13–42.

The investigation of the pairs of irreducible characters of the symmetric group S_n that have the same set of roots in one of the sets A_n and $S_n \setminus A_n$ is continued. All such pairs of irreducible characters of the group S_n are found in the case when the least of the main diagonal's lengths of the Young diagrams corresponding to these characters does not exceed 2. Some arguments are obtained for the conjecture that alternating groups A_n have no pairs of semiproportional irreducible characters.

D. I. Borisov. **Asymptotics of the Eigenvalues of Elliptic Systems with Fast Oscillating Coefficients.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 33–43.

A singularly perturbed second-order elliptic operator with fast oscillating coefficients is considered in the whole space. Complete asymptotic expansions of the eigenvalues are constructed, which converge to the isolated eigenvalues of the homogenized operator; complete asymptotic expansions for the corresponding eigenfunctions are constructed as well.

A. G. Chentsov. **Extensions of Abstract Problems of Attainability: Nonsequential Version.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 184–217.

Extension constructions of the problem of attainability in a topological space are studied. The constructions are based on compactification of the whole space of solutions or some of its fragments.

A. R. Danilin and Yu. V. Parysheva. **The Asymptotics of the Optimal Value of the Performance Functional in a Linear Optimal Control Problem in the Regular Case.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 55–65.

An optimal control problem is investigated for a linear system with fast and slow variables, a convex terminal performance functional depending on the slow variables, and smooth geometric constraints on the control. Sufficient regularity conditions are presented for the asymptotics of a solution of this problem, and a complete asymptotic expansion of the optimal value of the performance functional in powers of a small parameter is constructed.

Yu. F. Dolgii and E. V. Ul'yanov. **Singular Numbers of the Monodromy Operator and Sufficient Conditions of the Asymptotic Stability of Periodic System of Differential Equations with Fixed Delay.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 66–79.

To obtain sufficient conditions for the asymptotic stability of linear periodic systems with fixed delay commensurable with the period of coefficients, singular numbers of the monodromy operator are used. To find these numbers, a self-adjoint boundary value problem for ordinary differential equations is applied. We study the motion of eigenvalues of this boundary value problem under a variation of a parameter. Obtaining sufficient conditions for the asymptotic stability is reduced to finding the bifurcation value of the parameter for the boundary value problem.

S. G. Glebov, O. M. Kiselev, and V. A. Lazarev. **The Autoresonance Threshold in a System of Weakly Coupled Oscillators.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 43–54.

A system of two weakly coupled oscillators is investigated. It is shown that under an external periodic perturbation a capture into resonance may occur. A description of this effect by the methods of asymptotic analysis, as well as a numerical simulation, is presented. An explicit formula for the threshold value of the perturbation amplitude at which the resonance occurs is obtained.

L. A. Kalyakin and M. A. Shamsutdinov. **Adiabatic Approximations for Landau–Lifshitz Equations.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 104–119.

The asymptotics with respect to a small parameter for solutions of a system of Landau–Lifshitz equations with slowly varying coefficients and small dissipative terms is investigated. These equations are a mathematical model of a uniaxial ferromagnet in a time-dependent magnetic field. The asymptotics constructed make it possible to describe the magnetization reversal effect and to reveal the influence of the parameters of the external magnetic field and dissipation on the stability of this process.

D. V. Khlopin. **Euler's Broken Lines in Systems with Carathéodory Conditions.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 167–183.

We consider Euler's broken lines in a system with its right-hand side measurable in time and investigate their convergence to trajectories of the system. Counterexamples are given that show that partitions with a small diameter do not guarantee the proximity to the funnel of trajectories. For any Carathéodory function, it is suggested to equip the set of closed subsets of the time interval with a metric. We prove that, under conditions close to Carathéodory ones, the convergence with respect to the metric guarantees the convergence of Euler's broken lines to the funnel of solutions of the system. As a consequence, it is shown that if the right-hand side is continuous and the sublinear growth condition is satisfied, then a sufficiently small diameter of the partition guarantees the proximity of Euler's broken line to the funnel of solutions of the system.

A. V. Kim. **On the Degree of Smoothness of Solutions of Functional Differential Equations.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 120–123.

The paper is devoted to the investigation of smoothness of solutions of functional differential equations depending on the properties of their right-hand sides.

A. S. Kondrat'ev, V. M. Levchuk, and V. I. Zenkov. **Finite Groups in Which the Normalizers of Pairwise Intersections of Sylow 2-Subgroups Have Odd Indices.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 90–103.

All finite semisimple groups are described in which the normalizers of pairwise intersections of Sylow 2-subgroups have odd indices; thereby, Problem 5.14(v) from the *Kourovka Notebook* is solved in the main.

O. O. Kovrizhnykh. **On an Asymptotic Solution of a Singularly Perturbed System with Two Small Parameters.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 124–134.

An initial value problem for a singularly perturbed system of two nonlinear ordinary differential equations with two small parameters is considered. An asymptotic expansion of a solution of this problem is constructed under the assumption that the parameters tend to zero independently of each other.

N. Yu. Lukoyanov. **On Viscosity Solution of Functional Hamilton–Jacobi Type Equations for Hereditary Systems.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 135–144.

The paper is devoted to the development of the viscosity approach to the generalized solution of functional Hamilton–Jacobi type equations with coinvariant derivatives and a nonanticipatory Hamiltonian. These equations are naturally connected to problems of dynamical optimization of hereditary systems and, as compared with classical Hamilton–Jacobi equations, possess a number of additional peculiarities stipulated by the aftereffect. The definition of a viscosity solution that takes the above peculiarities into account is given. The consistency of this definition with the notion of a classical solution and with the minimax approach to the generalized solution is substantiated. The existence and uniqueness theorems are proved.

V. G. Pimenov. **Multistep Numerical Methods for Solving Functional-Differential-Algebraic Equations.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 145–155.

This paper deals with constructing multistep numerical methods for differential delay equations under additional algebraic constraints. Theorems on the orders of convergence of these methods are proved both for functional-differential equations with algebraic constraints and for singular functional-differential equations.

G. I. Shishkin. **Grid Approximation of Singularly Perturbed Parabolic Equations with Piecewise Continuous Initial–Boundary Conditions.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 218–233.

The Dirichlet problem is considered for a singularly perturbed parabolic reaction–diffusion equation with piecewise continuous initial–boundary conditions in a rectangular domain. The highest derivative in the equation is multiplied by a parameter ε^2, $\varepsilon \in (0,1]$. For small values of the parameter ε, in a neighborhood of the lateral part of the boundary and in a neighborhood of the characteristic of the limit equation passing through the point of discontinuity of the initial function, there arise a boundary layer and an interior layer (of characteristic width ε), respectively, which have bounded smoothness for fixed values of the parameter ε. Using the method of additive splitting of singularities (generated by discontinuities of the boundary function and its low-order derivatives), as well as the method of condensing grids (piecewise uniform grids condensing in a neighborhood of boundary layers), we construct and investigate special difference schemes that converge ε-uniformly with the second order of accuracy in x and the first order of accuracy in t, up to logarithmic factors.

Yu. N. Subbotin. **Approximations by Polynomial and Trigonometric Splines of Third Order Preserving Some Properties of Approximated Functions.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 156–166.

In this paper with the help of parabolic splines we construct a linear method of approximate recovery of functions by their values on an arbitrary grid. In the method, a spline inherits the properties of monotonicity and convexity from the approximated function, and is sufficiently smooth. In addition, the constructed linear operator as an operator acting from the space of continuous functions to the same space has the norm equal to one. We also obtain similar results for trigonometric splines of third order.

S. V. Zakharov. **A Construction of a Solution to the Burgers Equation with a Specified Asymptotics.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 80–85.

A construction of solutions to the Burgers equation and the heat equation on the plane of independent variables by specified asymptotics at minus-infinity in time is described. Application of the construction is demonstrated on examples of asymptotic series in half-integer powers of time.

V. I. Zenkov. **On Intersections of Solvable Hall Subgroups in Finite Nonsolvable Groups.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 2. P. 86–89.

The author continues the investigation of intersections of Hall subgroups in finite groups. Previously, the author proved that in the case when a Hall subgroup is Sylow there are three subgroups conjugate to it such that their intersection coincides with the maximal normal primary subgroup. A similar assertion holds for Hall subgroups in solvable groups. The aim of this paper is to construct examples of a (nonsolvable) group in which the intersection of any four subgroups conjugate to some Hall subgroup is nontrivial.

Научное издание

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Сборник научных трудов

Рекомендовано к изданию Ученым советом
Института математики и механики
и НИСО Уральского отделения Российской академии наук

ЛР № 020764 от 24.04.98

Ответственные за выпуск: А. Р. Данилин, С. И. Тарасова.
Литературный редактор: Е. Г. Понизовкина.
Технический редактор: Н. Н. Моргунова.

Оригинал-макет подготовлен в ИММ УрО РАН.

НИСО УрО РАН № 63(07).
Подписано в печать 01.11.2007. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25,5. Уч.-изд. л. 19,25. Тираж 200 экз. Заказ 2352.

Институт математики и механики УрО РАН
620219 г. Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО "Издательство Учебно-Методический центр — УПИ"
620002 г. Екатеринбург, ул. Мира, д.17, офис 226.