

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

Том 12, № 1

2006

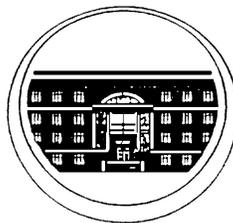
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ
УрО РАН

Том 12
№ 1

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ:
МОДЕЛИРОВАНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

*К 70-летию со дня рождения президента РАН
академика Юрия Сергеевича ОСИПОВА*



Екатеринбург
2006

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 12, № 1. Динамические системы: моделирование, оптимизация и управление. Сб. науч. трудов. К 70-летию со дня рождения президента РАН академика Юрия Сергеевича Осипова. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. 248 с.
ISBN 5-7691-1727-3.

Настоящий выпуск посвящается 70-летию со дня рождения президента Российской академии наук Юрия Сергеевича Осипова. Тематика статей данного выпуска в основном относится к теоретической механике, теории динамических систем, теории оптимального управления, методам решения некорректных и обратных задач, а также математическому программированию. Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в указанных областях.

Редакционная коллегия

акад. РАН **Ю. С. Осипов** (главный редактор),
член-корр. РАН **В. И. Бердышев** (зам. гл. редактора),
член-корр. РАН **В. В. Васин**, **Л. П. Власов**, **М. И. Гусев**, акад. РАН **И. И. Еремин**,
акад. РАН **А. М. Ильин**, **В. В. Кабанов**, **А. Ф. Клейменов**,
акад. РАН **Н. Н. Красовский**, **В. И. Максимов** (отв. редактор выпуска),
член-корр. РАН **А. А. Махнев**, **А. В. Маринов**,
член-корр. РАН **Ю. Н. Субботин**, **С. И. Тарасова** (редактор выпуска).

ISBN 5-7691-1727-3

Т $\frac{34(06)}{8П6(03) - 1998}$ ПВ-2006

© УрО РАН, Институт
математики и механики, 2006 г.



СОДЕРЖАНИЕ

В.И. Бердышев, Н.Н. Красовский, А.Б. Куржанский, Е.Ф. Мищенко. ЮРИЙ СЕРГЕЕВИЧ ОСИПОВ (<i>К семидесятилетию со дня рождения</i>).....	3
А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе. Принцип максимума Понтрягина 50 лет спустя	6
В. И. Арнольд. Статистика и классификация топологий периодических функций и тригонометрических многочленов	15
А. В. Борисов, В. В. Козлов, И. С. Мамаев. О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости.....	25
Ф. П. Васильев, А. С. Антипин. Методы решения неустойчивых задач равновесного программирования со связанными переменными	48
В. В. Васин. Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач	64
Н. Л. Григоренко. К теории дифференциальных игр трех лиц	78
И. И. Еремин. Прямо-двойственные фейеровские методы для задач квадратичного программирования.....	86
А. М. Ильин, С. Ф. Долбеева. Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром в случае двух решений предельного уравнения.....	98
А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым	109
Н. Н. Красовский, А. Н. Котельникова. Одна задача об устойчивом отслеживании движения	142
А. В. Кряжимский, В. И. Максимов. Динамическая реконструкция состояний и гарантирующее управление системой параболических уравнений.....	157
А. Б. Куржанский. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона — Якоби в теории управления.....	173
Г. И. Марчук. Сопряженные уравнения и их применения	184
L. A. Petrosyan, D. W. K. Yeung. Dynamically Stable Cooperative Solutions in Randomly Furcating Differential Games.....	196
Н. Н. Субботина, Т. Б. Токманцев. Алгоритм построения минимаксного решения уравнения Беллмана в задаче Коши с дополнительными ограничениями.....	208
А. Г. Ченцов. Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах о достижимости.....	216
Ф. Л. Черноусько. Оптимизация движения в сопротивляющейся среде тела с подвижной внутренней массой.....	242

ЮРИЙ СЕРГЕЕВИЧ ОСИПОВ*(К семидесятилетию со дня рождения)*

7 июля 2006 г. исполняется 70 лет со дня рождения академика РАН Юрия Сергеевича Осипова.

Ю.С. Осипов — выдающийся ученый с мировым именем, крупный организатор науки. Он родился в 1936 г. в г. Тобольске, в семье служащих. Интерес к точным наукам определил выбор профессии: Юрий Сергеевич поступил на физико-математический факультет Уральского государственного университета и в 1959 г. успешно его окончил. После окончания университета работал инженером на одном из оборонных предприятий г. Свердловска. В 1961–1970 гг. Юрий Сергеевич был аспирантом, ассистентом, доцентом УрГУ. В 1965 г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 1971 г. — докторскую. В 1975 г. ему присвоено ученое звание профессора. В 1969 г. Ю.С. Осипов был избран старшим научным сотрудником Свердловского отделения Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. После реорганизации СОМИ в Институт математики и механики УНЦ АН СССР (позднее — ИММ УрО РАН) работал старшим научным сотрудником, затем (с 1972 г.) зав. лабораторией, зав. отделом (с 1978 г.) дифференциальных уравнений. В 1986–1993 гг. он являлся директором этого института. Научный авторитет Юрия Сергеевича и его организаторская деятельность способствовали динамичному развитию института как ведущего научного центра в области математики и механики на Урале. В 1984 г. Ю.С. Осипов избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1987 г. — действительным членом Академии наук СССР. С 1991 г. Юрий Сергеевич — президент Академии наук России. Деятельность Ю.С. Осипова на посту Президента РАН в переломные для России годы позволила отвести реальную опасность развала Академии наук, сохранить российскую академическую науку. Работая в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова с 1989 г., Ю.С. Осипов является заведующим кафедрой оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики. С 1993 по 2005 гг. являлся директором Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

В Российской Академии Наук Ю.С. Осипов является членом бюро Отделения математических наук, председателем Совета РАН по космосу, председателем Комитета по системному анализу, председателем Комиссии по вычислительной технике. Юрий Сергеевич — главный редактор Большой Российской Энциклопедии, главный редактор “Журнала вычислительной математики и математической физики”, председатель редколлегии ежегодника “Наука и человечество”, член редакционных коллегий ряда журналов математического профиля. Ю.С. Осипов — член Президиума Правительства РФ, член Совета Безопасности РФ, председатель Комиссии по Государственным премиям в области науки и техники при Президенте РФ, заместитель председателя Совета при Президенте РФ по науке и высоким технологиям.

Основные научные исследования Ю.С. Осипова посвящены теории управления, дифференциальным уравнениям и их приложениям. Можно отметить несколько циклов работ. Так, в первом цикле, практически завершено к концу шестидесятых годов, Ю.С. Осипов создал законченную теорию стабилизации стационарных и периодических динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Теория включает необходимые и достаточные условия стабилизации по первому приближению, в том числе в ряде основных критических случаев, и содержит новый принцип редукции систем с запаздыванием.

Во втором цикле работ, относящемся к семидесятым годам, Ю.С. Осипов разработал теорию дифференциальных игр для динамических систем с запаздывающим аргументом. В основу теории была положена новая позиционная формализация динамических игровых задач. Ключевой результат теории — утверждение об альтернативе в антагонистической дифференциальной игре для систем с запаздыванием. Согласно этому утверждению, в классе позиционных законов управления (законов управления с обратной связью) всегда разрешается одна и только одна из двух взаимно противоположных задач о гарантированном управлении, стоящих перед контролирующими систему игроками—антагонистами. Важным достижением стал открытый Ю.С. Осиповым конструктивный локальный принцип управления системами с запаздыванием, обобщающий принцип экстремального сдвига, предложенный ранее для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках этого же исследовательского цикла Ю.С. Осипов построил теорию антагонистических позиционных дифференциальных игр для другого класса конфликтно управляемых систем с бесконечномерными пространствами фазовых состояний — систем, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, в первую очередь, параболическими. Теория объединяет строгие постановки игровых задач, утверждения об их альтернативной разрешимости, результаты об общей структуре разрешающих законов управления и конструктивные достаточные условия разрешимости.

Третий цикл работ, выполненный Ю.С. Осиповым в восьмидесятые и девяностые годы, посвящен созданию теории устойчивого динамического обращения управляемых систем. Основу этой новой теории составили методы позиционных дифференциальных игр и принципы регуляризации из теории некорректно поставленных задач. Юрием Сергеевичем создана серия конструктивных алгоритмов для устойчивого восстановления в реальном времени ненаблюдаемых входов динамических систем по результатам неточных измерений их текущих состояний. Проведены многосторонние исследования погрешностей приближения, в ряде типичных случаев описаны оптимальные по точности алгоритмы. Начальные результаты этого периода касаются, в основном, динамических систем, описываемых обыкновенными конечномерными дифференциальными уравнениями. Затем Ю.С. Осипов существенно расширил спектр исследования и распространил основные результаты по устойчивому динамическому обращению на системы, описываемые стандартными начально-краевыми задачами для классов дифференциальных уравнений с частными производными, системы, описываемые абстрактными дифференциальными уравнениями в бесконечномерных пространствах, и системы, описываемые вариационными неравенствами. Результаты этих исследований вошли в монографию Osipov Yu. S., Kryazhinskiy A. V. "Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions" (Gordon and Breach, 1995).

Помимо этих цельных циклов, Ю.С. Осипов в разные периоды получил серию оригинальных результатов в смежных направлениях. С начала восьмидесятых годов им выполнен ряд работ по оптимизации форм, в одной из которых был, в частности, дан ответ на вопрос о существовании оптимума, поставленный известным французским математиком Ж.-Л. Лионсом. В период создания теории динамического обращения Ю.С. Осипов активно использовал элементы теории приближения функций и, в частности, построил оптимальный неупреждающий оператор численного дифференцирования.

Во второй половине девяностых годов в поле его научных интересов были задачи классической теории дифференциальных игр, эволюционные игры, обратные задачи динамики для нелинейных систем с распределенными параметрами, задачи оптимизации форм. Ю.С. Осиповым построена теория управления многомерными системами по принципу обратной связи в условиях неопределенности, охватывающая объекты, описываемые неоднородными граничными задачами для уравнений математической физики, дифференциально-функциональными уравнениями, абстрактными уравнениями с неограниченными операторами, а также объекты, обладающие эффектом последствия в управляющих силах и др.

Будучи талантливым ученым-теоретиком, Ю.С. Осипов реализовал свои научные достижения и в прикладной тематике, связанной с созданием образцов новой техники. В шестидесятые

годы им выполнен цикл исследований по плавности и устойчивости движения транспортных средств специального назначения, на основании которых при его участии были сконструированы и внедрены в серийное производство регулируемая пневматическая подвеска и опорно-цепные устройства принципиально нового типа, обеспечившие требуемые характеристики движений. В семидесятые–восьмидесятые годы, возглавляя отдел в Институте математики и механики УНЦ АН СССР, Юрий Сергеевич являлся руководителем широкого круга опытно-конструкторских работ, связанных с созданием летательных аппаратов. Проведенные под его руководством и при личном участии фундаментальные и прикладные исследования доведены до реализации в конкретных изделиях. В этих работах на базе ЭВМ созданы математические модели функционирования изделий, разработаны и реализованы алгоритмы управления в рамках конкретных аппаратурных ограничений, даны оценки качества и эффективности процессов управления, проведено численное моделирование. Результаты исследований позволили улучшить ряд важнейших технических характеристик комплексов новой техники, сданных в эксплуатацию.

Академик Ю.С. Осипов возглавляет известную научную школу, включающую коллективы исследователей Математического института РАН им. В.А. Стеклова, Института математики и механики УрО РАН и факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, работающих в области качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и стабилизации динамических систем, теории оптимального управления и дифференциальных игр, математического моделирования, теории обратных задач. Среди его учеников член-корреспондент РАН, 8 докторов наук, свыше 30 кандидатов наук.

В 1976 г. за работы в области математической теории управления Ю.С. Осипову присуждена Ленинская премия в составе авторского коллектива. В 1993 г. за работы по прикладной тематике Юрий Сергеевич удостоен Государственной премии России в области науки и техники. Он награжден орденами Трудового Красного Знамени (1981 г.), “За заслуги перед Отечеством” III степени (1996 г.) и II степени (1999 г.) и др. Среди его наград — Золотая медаль им. Л. Эйлера за выдающиеся результаты в области математики и физики (РАН, 1997 г.), Золотая медаль им. А. Эйнштейна (ЮНЕСКО, 1999 г.) за выдающийся вклад в теорию управления. Ю.С. Осипов избран почетным членом и доктором многих зарубежных академий, научных и образовательных центров. Юрий Сергеевич уделяет большое внимание не только сугубо научным, но и организационным и общественным проблемам. Его вклад в их решение отмечен орденом Благоверного князя Даниила Московского I степени, медалью лауреата премии Кирилла и Мефодия. Академик Ю.С. Осипов произведен в рыцари Ордена Белого Креста Всемирной конфедерации рыцарей (Австралия).

Сотрудники Института математики и механики УрО РАН, редакционная коллегия Трудов ИММ УрО РАН, ученики, коллеги и друзья сердечно поздравляют Юрия Сергеевича с его славным юбилеем и желают ему и его семье доброго здоровья, успехов и благополучия.

В.И. Бердышев, Н.Н. Красовский, А.Б. Куржанский, Е.Ф. Мищенко

УДК 517.977.52

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА 50 ЛЕТ СПУСТЯ**А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе****1. Вводные замечания**

Прошло ровно 50 лет, как был сформулирован принцип максимума Понтрягина в заметке [1], возвестившей о появлении математической теории оптимального управления. За прошедшие полвека новая теория успешно развивалась многими исследователями, в ряду которых почетное место безусловно принадлежит и ученому, которому посвящен настоящий сборник. Поэтому мы сочли уместным описать здесь наш взгляд на принцип максимума и некоторые его следствия так, как они представляются нам сегодня.

Сформулированная в середине пятидесятых годов прошлого века задача управления на быстродействие с замкнутым множеством допустимых значений для управляющего параметра была экстремальной задачей нового типа, недоступной для существовавших методов. С самого начала было ясно, что адекватная математическая обработка проблемы потребует “условий экстремальности” нового типа. Не вызывало сомнений также и то обстоятельство, что реальная причина трудностей — не в общности проблемы, а скорее в ее специфическом характере, заключавшемся в том, что в типических проблемах допустимое множество значений управляющего параметра было замкнутым. В то время как простейшие задачи быстродействия для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с замкнутым интервалом действительной оси в качестве допустимого множества значений управления представлялись совершенно неприступными, самая общая задача управления с открытым множеством допустимых значений управляющего параметра очевидным образом сводилась к классической задаче Лагранжа, следовательно, дифференциальные уравнения для экстремалей можно было автоматически выписывать.

Принцип максимума явился математическим ответом на вызов, выдвинутый новыми технологиями, и был полностью воспринят в инженерных кругах сразу же после его публикации как адекватное решение проблемы, хотя в смежных математических кругах, за немногими исключениями, еще долго отказывались видеть в полученном результате нечто радикально новое.

В связи с этим в середине шестидесятых вполне интенсивно, хотя и не очень продуктивно, обсуждалась проблема о возможности вывода принципа максимума из классических результатов вариационного исчисления. По нашему мнению, существуют два действительно независимых метода доказательства принципа максимума в его естественной общности — первоначальное доказательство В.Г. Болтянского [2], который изобрел для этой цели игольчатые вариации, и доказательство, основанное на обобщенных управлениях (скользящих режимах), см. [3]. Решающим моментом в обоих доказательствах является возможность особым “выпуклым” образом комбинировать рассматриваемые вариации управления, независимо от структуры множества допустимых значений, и при этом получить достаточно богатое достижимое в первом приближении множество. В то же самое время комбинирование классических вариаций

существенно зависит от структуры допустимого множества, как только управление выходит на границу множества.

Невозможность доказательства принципа максимума с помощью классических конструкций, конечно, не может рассматриваться как его особое достоинство. По нашему мнению, растущую научную востребованность принципа максимума с момента его появления можно объяснить двумя действительно исключительными чертами, которыми он обладает.

Начнем с того, что принцип максимума, формулируемый предельно просто и с универсальной общностью, без всяких исключений, тем не менее полностью работоспособен в удивительно многочисленных нетривиальных ситуациях, часто генерируя целые семейства минималей (так называемый оптимальный синтез), давая тем самым полное решение проблем, иначе не решаемых. Такая эффективность принципа максимума может служить частичным объяснением того факта, что, несмотря на простоту и общность формулировки, его доказательство не просто.

В качестве второго замечательного свойства принципа максимума мы отметим его “симплектически-инвариантную” форму, в которой он был фактически сформулирован с самого начала, проясняя тем самым действительный внутренний смысл условий экстремальности.

Принцип максимума канонически сопоставляет оптимальной проблеме на конфигурационном многообразии гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении многообразия, сводя решение оптимальной задачи в первом приближении к нахождению траекторий гамильтонова поля, удовлетворяющих некоторому дополнительному “условию максимума”. Процедуры, сводящие решение некоторой первоначальной проблемы, заданной на многообразии, к изучению канонически построенных инфинитезимальных объектов на кокасательном расслоении исходного многообразия, часто встречаются в современном анализе под общим названием канонической микролокализации. Они полезны для обнаружения инвариантов начальной проблемы, а также инвариантов самого многообразия, на котором формулируется проблема. Исторически, принцип максимума был одной из ранних процедур, где такой переход явно указан.

Благодаря общности формулировки и полностью инвариантной форме уже в первоначальной формулировке, принцип максимума никогда не подвергался в дальнейшем сколько-нибудь существенным обобщениям. Все успехи последующего развития необходимых условий экстремальности в первом порядке были в основном связаны с обобщениями самой оптимальной проблемы, преимущественно в направлении негладкого анализа, и в получении для них необходимых условий первого порядка по образу и подобию принципа максимума.

В § 2 мы даем краткий обзор необходимого материала о гамильтоновом лифте векторных полей на гладких многообразиях, после чего, в § 3, дана инвариантная формулировка принципа максимума. Заключительный § 4 посвящен обсуждению условий второго порядка, объединенных понятием якобиевой кривой.

Мы ограничиваемся изложением задачи быстрого действия, которая полностью содержит все трудности, присущие общей задаче оптимального управления (с произвольным минимизируемым функционалом интегрального типа), и в то же время формулируется очень просто и геометрически наглядно. К тому же общая задача оптимизации легко сводится к задаче быстрого действия простым преобразованием временного параметра. Наконец, задача быстрого действия имеет еще одно дополнительное преимущество — она канонически связана с данной динамической системой, а следовательно, и с исходным конфигурационным многообразием.

2. Гамильтонов лифт векторных полей

Начнем с краткого обзора обозначений и замечаний терминологического характера, относящихся к геометрии касательного и кокасательного расслоений гладкого n -мерного многообразия M .

Произвольное (гладкое) векторное поле X на M будем рассматривать без дополнительных замечаний одновременно и как дифференцирование действительной алгебры $C^\infty(M)$ гладких

функций на M , и как гладкое сечение касательного расслоения TM ,

$$X : z \mapsto X_z \in T_z M \subset TM, \quad z \in M.$$

Таким образом, семейство всех (гладких) векторных полей $\text{Vect } M$ на M будет рассматриваться одновременно, в зависимости от контекста, как действительная алгебра Ли или как $C^\infty(M)$ -модуль.

Здесь, однако, уместно заметить, что векторные поля имеют еще и третье лицо, важное для наших рассуждений. Именно, каждое векторное поле X на M канонически отождествляется, согласно своему определению, со скалярной функцией H_X на кокасательном расслоении T^*M , которая линейна на слоях $T_z^*M \subset T^*M$, $z \in M$. Обратно, каждая функция H на T^*M , линейная на слоях, однозначно представима в виде $H = H_X$. В самом деле, действие X на функции $a \in C^\infty(M)$ задано формулой

$$(Xa)_z = (\langle X, da \rangle)_z \stackrel{\text{def}}{=} H((da)_z), \quad z \in M,$$

где $(da)_z$ — значение дифференциала da в точке z и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — обычные “скобки двойственности”. Поэтому мы не будем различать H_X и X и будем в подходящих местах заменять H_X на X .

Произвольную точку кокасательного многообразия T^*M обозначим ξ , а если она лежит в слое T_z^*M , мы будем также писать $\xi = \xi_z$. Каноническая проекция расслоения T^*M обозначается через $\pi : T^*M \rightarrow M$, а ее дифференциал через $d\pi : T(T^*M) \rightarrow TM$.

\mathbb{R} -алгебра $C^\infty(T^*M)$ будет также рассматриваться, в зависимости от контекста, как $C^\infty(M)$ -модуль, с умножением на “скаляры”, определенным формулой

$$aH \stackrel{\text{def}}{=} \pi^* a \cdot H \quad \forall a \in C^\infty(M), \quad H \in C^\infty(T^*M),$$

где $\pi^* a = a \circ \pi$ — обратный образ функции a при подстановке проекции π .

Наравне с гладкими функциями на T^*M , линейными на слоях, т.е. векторными полями на M , особую роль в геометрии многообразия M играют гладкие функции на T^*M , которые постоянны на слоях, ибо вместе с первыми они составляют достаточно обширный класс функций для того, чтобы с их помощью покрыть все пространство T^*M “каноническими” координатными окрестностями.

Действительно, гладкие постоянные на слоях функции очевидным образом идентифицируются как обратные образы $\pi^* a \stackrel{\text{def}}{=} a \circ \pi$, $a \in C^\infty(M)$. Далее, с помощью каждой координатной окрестности (O, x) многообразия M , $x = (x^1, \dots, x^n) : O \rightarrow \mathbb{R}^n$, мы канонически строим *расслоенную или каноническую окрестность расслоения T^*M над (O, x)* , состоящую из пары

$$(\pi^{-1}O, (q, p)), \quad q = (q^1, \dots, q^n), \quad p = (p_1, \dots, p_n),$$

с координатным отображением

$$(q, p) : \pi^{-1}O \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad q^i = \pi^* x^i, \quad p_j = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Координатные функции q^i , $i = 1, \dots, n$, являются обратными образами соответствующих координат x^i , следовательно, они постоянны на слоях. “Сопряженные” к ним координаты p_i равны соответственно частным производным по x^i , следовательно, они линейны на слоях. Таким образом, всякая гладкая функция H на T^*M локально представляется как $H = F(q, p)$, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. В частности, введенные выше функции H_X представляются в координатных окрестностях $\pi^{-1}O$ в виде

$$H_X = \sum_{\alpha=1}^n \pi^* X^\alpha \cdot p_\alpha = \sum_{\alpha} X^\alpha p_\alpha,$$

где $X = \sum_{\alpha=1}^n X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ — векторное поле на O .

Обозначим $C^\infty(M)$ -подмодуль модуля $C^\infty(T^*M)$, порожденный постоянными или линейными на слоях функциями, через

$$\mathfrak{M} = \{a + bH_X \mid a, b \in C^\infty(M), X \in \text{Vect } M\}.$$

\mathbb{R} -линейный оператор $D_X : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ называется *дифференцированием модуля \mathfrak{M} над заданным векторным полем $X \in \text{Vect } M$* , если

$$D_X(a + bH_Y) = Xa + Xb \cdot H_Y + bD_X H_Y \quad \forall a, b \in C^\infty(M), Y \in \text{Vect } M.$$

Векторное поле \mathcal{W} на кокасательном расслоении T^*M будем называть *проектируемым*, если ограничение композиции $d\pi \circ \mathcal{W}$ на произвольный слой T_z^*M , $z \in M$, постоянно и, следовательно, равно некоторому касательному вектору X_z к M в точке z ,

$$d\pi \cdot \mathcal{W}_{\xi_z} = X_z \quad \forall \xi_z \in T_z^*M, z \in M.$$

Однозначно определенное векторное поле X на M , $z \mapsto X_z$, $z \in M$, будем называть *проецией \mathcal{W} на M* , поле \mathcal{W} — *подъемом над X в кокасательном расслоении T^*M* . Если поле \mathcal{W} гамильтоново, мы называем его *гамильтоновым подъемом над X* .

Например, частная производная $\frac{\partial}{\partial q^i}$ является подъемом в $\pi^{-1}O$ над векторным полем $\frac{\partial}{\partial x^i}$, заданным на O ,

$$\left(d\pi \circ \frac{\partial}{\partial q^i}\right)_{\xi_z} x^j = \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_{\xi_z} \cdot \pi^* x^j = \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_{\xi_z} q^j = \delta_i^j \quad \forall \xi_z \in T_z^*M, z \in M.$$

Очевидно, подъем \mathcal{W} над данным векторным полем $X \in \text{Vect } M$ определен неоднозначно, ибо вместе с \mathcal{W} подъемом над X является всякое векторное поле $\mathcal{W} + \mathcal{W}'$, где \mathcal{W}' — вертикальное векторное поле на T^*M (т.е. принадлежит ядру дифференциала $d\pi$ — подрасслоению в $T(T^*M)$ ранга n). Например, частные производные $\frac{\partial}{\partial p_i}$ на $\pi^{-1}O$, $i = 1, \dots, n$, являются вертикальными векторными полями. Однако если мы ограничимся только гамильтоновыми полями, то результат окажется более определенным. Обозначив через \vec{H} гамильтоново векторное поле с гамильтоновой функцией H , легко видеть, что произвольный гамильтонов подъем над векторным полем $X \in \text{Vect } M$ имеет вид $\vec{H}_X + \vec{K}$, где функция H_X (линейная на слоях) введена выше и канонически определена векторным полем X , в то время как K — произвольная гладкая функция на $C^\infty(T^*M)$, постоянная на слоях.

Действительно, представляя векторное поле \vec{H} локально, в канонических координатах, в виде

$$\vec{H} = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right),$$

получим соотношения

$$d\pi \left(\vec{H}_{\xi_z} \right) = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right)_{\xi_z} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_z = \sum_{\alpha=1}^n X_z^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_z \\ \forall \xi_z \in T_z^*M, z \in M.$$

Из них следует, что функции $\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$, $i = 1, \dots, n$, постоянны на слоях и равны соответственно $\pi^* X^i$, следовательно, H имеет вид $H = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha X^\alpha + K$, где функция K постоянна на слоях.

Процедуру можно канонизировать, положив $K = 0$. Тем самым мы получаем канонический метод построения на кокасательном расслоении T^*M гамильтонова подъема над векторным

полем $X \in \text{Vect } M$: *следует взять канонически определенную скалярную функцию H_X на T^*M и перейти к соответствующему гамильтонову векторному полю \overrightarrow{H}_X* . Это в точности совпадает с процедурой, с помощью которой принцип максимума вводит гамильтонову систему для нахождения экстремалей в задаче быстрогодействия, хотя и с помощью произвольных координат.

В дифференциальной геометрии практикуется универсальная каноническая процедура, описываемая общепринятым символом $\text{ad } X$, $X \in \text{Vect } M$, и приводящая к описанному выше гамильтонову подъему. В самом деле, по определению, $\text{ad } X$ действует на векторные поля $Y \in \text{Vect } M$ по формуле

$$\text{ad } X \cdot Y = [X, Y] \text{ — скобки Ли полей } X, Y,$$

и является дифференцированием модуля \mathfrak{M} над полем X , ибо

$$\text{ad } X(a + bY) \stackrel{\text{def}}{=} Xa + [X, bY] = Xa + Xb \cdot Y + b[X, Y] = Xa + Xb \cdot H_Y + bH_{[X, Y]}.$$

Очевидно, это действие однозначно расширяется до дифференцирования на всей алгебре $C^\infty(T^*M)$, т.е. $\text{ad } X$ однозначно расширяется до векторного поля на T^*M , которое обозначим тем же символом $\text{ad } X$. Прямое вычисление в произвольных канонических координатах на T^*M показывает, что векторные поля $\text{ad } X$ и \overrightarrow{H}_X совпадают на подмодуле \mathfrak{M} , следовательно, они идентичны. Тем самым мы доказали, что *построенное векторное поле $\text{ad } X$ в кокасательном расслоении T^*M есть гамильтонов подъем над $X \in \text{Vect } M$* .

З а м е ч а н и е. Двойственная конструкция, проведенная на касательном расслоении TM , приводит к векторному полю \mathcal{L}_X над $X \in \text{Vect } M$ в касательном расслоении TM . Оно называется *производной Ли над X* и, будучи ограниченным на дифференциальных 1-формах (т.е. на функциях из $C^\infty(TM)$ линейных на слоях), совпадает с дифференцированием $i_X \circ d + d \circ i_X$, где d — внешний дифференциал, i_X — внутреннее умножение на X . Двойственность между $\text{ad } X$ и \mathcal{L}_X принимает форму

$$\langle \text{ad } X \cdot Y, \omega \rangle + \langle Y, \mathcal{L}_X \omega \rangle = X \langle Y, \omega \rangle,$$

где $Y \in \text{Vect } M$ и ω — дифференциальная 1-форма на M . Соответствующие потоки в TM и T^*M над потоком e^{tX} , $e^{t\mathcal{L}_X}$ и $e^{t\text{ad } X}$ совпадают соответственно с дифференциалом de^{tX} потока e^{tX} и с обратным потоком к потоку, сопряженному к дифференциалу de^{tX} .

3. Инвариантная формулировка принципа максимума

Теперь мы в состоянии инвариантно сформулировать принцип максимума, пользуясь введенными выше геометрическими образами. Начнем с определения задачи быстрогодействия.

Управляемой системой на гладком n -мерном многообразии M , с произвольным подмножеством $U \subset \mathbb{R}^r$ в качестве множества допустимых значений для управляющего параметра u , называется семейство векторных полей $\{X(u), u \in U'\}$ на гладком многообразии M , для которого замыкание $\overline{U} \subset U'$ и отображение $(z, u) \mapsto X_z(u) \in TM$ непрерывно из $M \times U'$ в TM . Допустимые управляющие функции — это, по определению, измеримые существенно ограниченные отображения $t \mapsto u(t) \in U, t \geq 0$.

Каждой допустимой управляющей функции $u(t)$ мы ставим в соответствие неавтономное дифференциальное уравнение на M

$$\frac{dz}{dt} = X_z(u(t)).$$

Тогда для любых $z_1 \in M$, $t_1 \geq 0$ и достаточно малого сегмента $[t_1, t_2]$ существует единственное (абсолютно непрерывное) решение $z(t)$ написанного уравнения, определенное на $[t_1, t_2]$ и удовлетворяющее начальному условию $z(t_1) = z_1$. Мы называем пару $u(t), z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, *решением задачи быстрогодействия для управляемой системы, заданной семейством $X(u), u \in U$,*

если для произвольной допустимой управляющей функции $v(t)$ и соответствующего решения $y(t)$, $t_1 \leq t \leq t'_2$, задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = X_y(v(t)), \quad y(t_1) = z_1$$

произвольное равенство $y(t'_2) = z(t_2)$ влечет неравенство $t'_2 \geq t_2$.

Обозначим семейство гамильтонианов на T^*M , соответствующее семейству $X(u)$, через $H_u = H_{X(u)}$. Мы будем говорить, что для данного значения \hat{u} параметра и заданной точки $\xi \in T^*M$ выполняется *условие максимума Понтрягина*, если

$$H_{\hat{u}}(\xi) = \sup_{u \in U} H_u(\xi).$$

Для упрощения формулировки принципа максимума мы предположим еще, что многообразию M естественно вложено в кокасательное расслоение как гладкое n -мерное подмногообразие, $M \subset T^*M$. Следовательно, каждая точка $z \in M$ отождествляется с нулем слоя T_z^*M и для произвольной управляющей функции $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, соответствующие функции $H_{X(u(t))} \in C^\infty(T^*M)$ обращаются в тождественный нуль на M , а условие максимума вырождается на M в тождество

$$H_{\hat{u}}(\xi) \equiv \sup_{u \in U} H_u(\xi) \equiv 0 \quad \forall \hat{u}, \xi \in M.$$

Далее, ограничение гамильтонова подъема $\vec{H}_{X(u(t))}$ на M совпадает с неавтономным векторным полем $X(u(t))$, и из теоремы единственности для решений непосредственно следует, что всякая траектория $\xi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, гамильтонова подъема $\vec{H}_{X(u(t))}$, пересекающаяся с M , является траекторией векторного поля $X(u(t))$ и, следовательно, полностью содержится в M . Поэтому мы рассматриваем этот случай как вырожденный и называем траектории неавтономного векторного поля $X(u(t))$ *тривиальными траекториями гамильтонова подъема $\vec{H}_{X(u(t))}$* . Очевидно, траектория $\xi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, гамильтонова подъема $\vec{H}_{X(u(t))}$ *нетривиальна* в том и только том случае, когда $\xi(t_1) \neq \pi\xi(t_1)$.

Теорема 3.1 (Принцип максимума Понтрягина). Пусть управляющая функция $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, и соответствующая траектория $z(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $z(t_1) = z_1$, неавтономного векторного поля $X(u(t))$ задают решение задачи быстрого действия, определенной семейством $X(u)$. Тогда существует такая нетривиальная траектория $\xi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, гамильтонова подъема $\vec{H}_{X(u(t))}$ над траекторией $z(t)$,

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \vec{H}_{X(u(t))}(\xi(t)), \quad \pi\xi(t_1) = z_1, \quad (3.1)$$

что для почти всех $t \in [t_1, t_2]$ выполняется условие максимума Понтрягина

$$H_{u(t)}(\xi(t)) = \sup_{u \in U} H_u(\xi(t)) \quad \text{н.в. на } [t_1, t_2]. \quad (3.2)$$

Если векторные поля $X(u)$ семейства автономны, то функция $t \mapsto \sup_{u \in U} H_u(\xi(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$, постоянна и неотрицательна:

$$\sup_{u \in U} H_u(\xi(t)) \equiv \text{const} \geq 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (3.3)$$

Каждое нетривиальное решение $\xi(t)$ системы (3.1)–(3.2) называется *экстремалью* задачи быстрого действия, заданной семейством $X(u)$. Условие максимума можно рассматривать здесь как некоторый обобщенный “динамический” алгоритм исключения параметра u в процессе его

изменения, пригодный для *почти всех* моментов времени t и вычисляющий траекторию $\xi(t)$. Однако следует здесь же оговориться, что, вообще говоря, достаточно богатые семейства рассматриваемых экстремалей не включаются в потоки на кокасательном расслоении, как это имеет место для регулярной задачи классического вариационного исчисления. Например, для семейства экстремалей $\xi(t)$ с начальным условием $\pi\xi(t_1) = z_1$, где $z_1 \in M$ фиксировано, даже в простейших задачах быстрогодействия не удовлетворяется условие единственности для траекторий потока — две экстремали семейства с одинаковыми начальными условиями не обязательно совпадают.

В рассматриваемом контексте условие максимума можно также рассматривать как обобщение преобразования Лежандра для “представления решения задачи в канонических координатах.”

4. Якобиевы кривые

Принцип максимума — условие оптимальности первого порядка. Его можно рассматривать как обобщение классического метода множителей Лагранжа, где роль множителя Лагранжа играет траектория $\xi(t)$. Вообще говоря, это не достаточное условие для оптимальности и требуется дополнительная информация второго порядка для выделения оптимальных управляющих функций из тех, что удовлетворяют принципу максимума.

В данном параграфе мы покажем, как можно сформулировать условия оптимальности второго порядка по аналогии с принципом максимума, используя инвариантный симплектический язык и соответствующим образом расширяя универсальный принцип исключения. Мы предполагаем, что $(z, u) \mapsto X_z(u)$ — гладкое отображение из $M \times U'$ в TM (а не только непрерывное, как выше).

Вся важная информация второго порядка содержится в так называемых якобиевых кривых. Для заданной экстремали $\xi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, якобиева кривая — это некоторое семейство $J_\xi(t)$, $t_1 \leq t < t_2$, лагранжевых подпространств симплектического пространства $T_{\xi(t_1)}(T^*M)$. Мы дадим здесь общую абстрактную конструкцию якобиевых кривых; конкретные случаи, а также методы их эффективного вычисления для регулярных, особых и релейных экстремалей можно найти в [4–6]. Построение якобиевой кривой основано на “хороших вариациях” исходной управляющей функции.

Пусть $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — допустимая управляющая функция. *Хорошей вариацией* управляющей функции u называется росток в 0 такого дважды дифференцируемого в 0 отображения

$$F = (f, \phi) : \mathbb{R}^k \rightarrow L^\infty([t_0, t_1]; U \times \mathbb{R}),$$

что

$$f(0)(t) = u(t), \quad \phi(0)(t) = 1, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad \int_{t_1}^{t_2} \phi(x)(t) dt = t_2 - t_1, \quad x \in \mathbb{R}^k.$$

Если заданы хорошие вариации $F_i : \mathbb{R}^{k_i} \rightarrow L^\infty([t_0, t_1]; U \times \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, $k_1 \leq k_2$, то мы пишем $F_1 \prec F_2$, если F_1 является ограничением F_2 на некоторое k_1 -мерное координатное подпространство пространства \mathbb{R}^{k_2} . Очевидно, для каждой пары хороших вариаций F_1, F_2 существует такая хорошая вариация F , что $F_1 \prec F$ и $F_2 \prec F$. Другими словами, частичный порядок \prec превращает множество хороших вариаций в направленное множество. Обозначим направленное множество хороших вариаций через \mathcal{V} и воспользуемся символом $\mathcal{V}\text{-lim}$ для обозначения пределов обобщенных последовательностей, индексированных элементами направленного множества \mathcal{V} .

Каждой хорошей вариации $F = (f, \phi)$ и каждому моменту $t \in [t_1, t_2)$ мы ставим в соответствие росток отображения $\mathcal{F}_t : \mathbb{R}^k \rightarrow M$, определенного условием: $\mathcal{F}_t(x)$ равен значению $y(t_1)$

решения задачи Коши

$$\dot{y}(\tau) = X_{y(\tau)} \left(f(x) \left(\int_{t_1}^{\tau} \phi(\theta) d\theta \right) \right), \quad t_1 \leq \tau \leq t, \quad y(t) = z(t),$$

где $\dot{z}(t) = X_{z(t)}(u(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $z(t_1) = z_1$. В частности, $\mathcal{F}_t(0) = z_1$, $t_1 \leq t < t_2$.

Предположим, что $u(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума и $\xi(t) \in T_{z(t)}^*M$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — соответствующая экстремаль. Тогда $\xi(t_1)D_0\mathcal{F}_t = 0$, $t_1 \leq t < t_2$, где произведение $\xi(t_1)D_0\mathcal{F}_t$ есть композиция линейных отображений $D_0\mathcal{F}_t : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{z_1}M$ и $\xi(t_1) : T_{z_1}M \rightarrow \mathbb{R}$. Другими словами, 0 является критической точкой отображения \mathcal{F}_t и $\xi(t_1)$ — соответствующий множитель Лагранжа. Важным числовым инвариантом исходной управляющей функции $u(\cdot)$ является ее коранг:

$$\text{corank}(u) = \min\{\text{codim im}D_0\mathcal{F}_t : F \in \mathcal{V}, t \in [t_0, t_1]\}.$$

Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$ — \mathcal{L} -производная отображения \mathcal{F}_t в $(\xi(t_1), 0)$. Вспомним, что \mathcal{L} -производная $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$ есть лагранжево подпространство симплектического пространства $T_{z(t_1)}(T^*M)$, полученное линеаризацией уравнения $\lambda D_x\mathcal{F}_t = 0$ (с неизвестной $\lambda \in T^*M$ и параметром $x \in \mathbb{R}^k$) в точке $\lambda = \xi(t_1)$, $x = 0$; точное определение см. в [5]. Все лагранжевы подпространства симплектического пространства Σ образуют *лагранжево-грассманиан* $L(\Sigma)$, компактное $\dim \Sigma(\dim \Sigma + 1)/8$ -мерное многообразие. В частности, $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t) \in L(T_{\xi(t_1)}(T^*M))$.

Мы говорим, что экстремаль $\zeta(\cdot)$ допускает якобиеву кривую, если для любого $t \in [t_1, t_2)$ существует предел

$$J_{\xi}(t) = \mathcal{V}\text{-}\lim_{F \in \mathcal{V}} \mathcal{L}(\mathcal{F}_t).$$

Кривая $t \mapsto J_{\xi}(t)$ в лагранжевом грассманиане $L(T_{\xi(t_1)}(T^*M))$ называется *якобиевой кривой, отвечающей экстремали* $\xi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Симплектическое пространство $T_{\xi(t_1)}(T^*M)$ содержит также фиксированное “вертикальное” лагранжево подпространство $\Pi_{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} T_{\xi(t_1)}(T_{z_1}^*M)$.

Наша ближайшая цель — определение индекса (не обязательно непрерывной) кривой $\Lambda(t)$, $t_0 \leq t < t_2$, в лагранжевом грассманиане $L(\Sigma)$ по отношению к фиксированному лагранжево подпространству $\Pi \in L(\Sigma)$. Сначала определим индекс $\text{ind}_{\Pi}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ пары $\Lambda_0, \Lambda_1 \in L(\Sigma)$ по отношению к Π .

Пусть $\eta \in (\Lambda_0 + \Lambda_1) \cap \Pi$, так что $\eta = \eta_0 + \eta_1$, где $\eta_i \in \Lambda_i$, $i = 0, 1$. Положим $\mathfrak{q}(\eta) = \sigma(\eta_0, \eta_1)$, где σ — симплектическая форма в Σ . Если $\Lambda_0 \cap \Lambda_1 = 0$, то $\Lambda_0 + \Lambda_1 = \Sigma$, η — произвольный элемент в Π и η_0, η_1 однозначно определены элементом η . Это неверно, если $\Lambda_0 \cap \Lambda_1 \neq 0$, тем не менее, число $\mathfrak{q}(x)$ корректно определено: $\sigma(\eta_1, \eta_2)$ зависит только от $\eta_0 + \eta_1$, ибо σ обращается в нуль на Λ_i , $i = 0, 1$.

Таким образом, \mathfrak{q} — действительная квадратичная форма на $(\Lambda_0 + \Lambda_1) \cap \Pi$; обозначим через $\text{ind } \mathfrak{q}$ ее отрицательный индекс инерции (число отрицательных членов в произвольной диагонализации квадратичной формы \mathfrak{q}). Мы положим

$$\text{ind}_{\Pi}(\Lambda_0, \Lambda_1) = \text{ind } \mathfrak{q} + \frac{1}{2}(\dim(\Pi \cap \Lambda_0) + \dim(\Pi \cap \Lambda_1)) - \dim(\Pi \cap \Lambda_0 \cap \Lambda_1).$$

Важным свойством введенного индекса является неравенство треугольника:

$$\text{ind}_{\Pi}(\Lambda_0, \Lambda_2) \leq \text{ind}_{\Pi}(\Lambda_0, \Lambda_1) + \text{ind}_{\Pi}(\Lambda_1, \Lambda_2).$$

Рассмотрим теперь кривую $\Lambda(\cdot)$ (произвольное отображение из $[t_0, t_1]$ в $L(\Sigma)$). Для всякого конечного подмножества $\mathcal{T} = \{\tau_1, \dots, \tau_k\} \subset [t_0, t_1]$, где $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l < t_1$, мы вычисляем сумму

$$I_{\Pi}^{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^l \text{ind}_{\Pi}(\Lambda(\tau_{i-1}), \Lambda(\tau_i))$$

и полагаем $I_{\Pi}(\Lambda(\cdot)) = \sup_{\mathcal{T}} I_{\Pi}^{\mathcal{T}}$, где супремум берется по всем конечным множествам \mathcal{T} . Величина $I_{\Pi}(\Lambda(\cdot))$ называется индексом кривой $\Lambda(\cdot)$ по отношению к Π и является неотрицательным полуцелым числом или $+\infty$.

Можно показать, что кривые с конечным I_{Π} обладают аналитическими свойствами, аналогичными свойствам действительных монотонных функций: множества их точек разрыва не более чем счетны, они имеют правые и левые пределы в каждой точке и почти всюду дифференцируемы. Индекс I_{Π} тесно связан с индексом Маслова непрерывных кривых в лагранжевом грассманиане, см. [4, 7] по этому поводу и по поводу аналогии между кривыми с конечным индексом и монотонными функциями.

Теорема 4.1. *Предположим, что пара $u(t), z(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $z(t_1) = z_1$, является решением задачи быстрого действия, определенной управляемой системой $X(u)$, $u \in U$. Тогда существует экстремаль $\xi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, удовлетворяющая условиям (3.1)–(3.3), допускающая якобиеву кривую $J_{\xi}(t)$, $t_1 \leq t < t_2$, и, более того, выполняется неравенство*

$$I_{\Pi_{\xi}}(J_{\xi}(\cdot)) + \dim \bigcap_{t_1 \leq t < t_2} J_{\xi}(t) - \frac{1}{2} \dim(J_{\xi}(t_2 - 0) \cap \Pi_{\xi}) < \frac{n}{2} + \text{corank}(u). \quad (4.1)$$

Следует отметить, что уже одно существование кривой Якоби конечного индекса влечет все известные поточечные условия оптимальности для особых экстремалей, а неравенство (4.1) влечет условия, содержащие сопряженные точки (для экстремалей всех типов).

Поступила 12.01.06

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Понтрягин Л.С. К теории оптимальных процессов// Докл. АН СССР. 1956. Т. 110, № 1. С. 7–10.
2. Болтянский В.Г. Принцип максимума в теории оптимальных процессов// Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 6. С. 1070–1073.
3. Gamkrelidze R.V. Principles of Optimal Control Theory. Plenum Press, 1978.
4. Аграчев А.А., Гамкредидзе Р.В. Симплектическая геометрия и необходимые условия оптимальности// Матем. сборник. 1991. Т. 182, № 1. С. 36–54.
5. Agrachev A.A., Gamkrelidze R.V. Feedback-invariant optimal control theory and differential geometry, I. Regular extremals// J. Dynamical and Control Systems. 1997. Vol. 3. P. 343–389.
6. Agrachev A.A. Feedback-invariant optimal control theory and differential geometry, II. Jacobi curves for singular extremals// J. Dynamical and Control Systems. 1998. Vol. 4. P. 583–604.
7. Agrachev A.A. Geometry of optimal control problems and Hamiltonian systems// Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, to appear.

СТАТИСТИКА И КЛАССИФИКАЦИЯ ТОПОЛОГИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ¹

В. И. Арнольд

Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на многообразии M . Для описания топологических свойств этой функции рассмотрим *пространство, точками которого являются компоненты связности многообразий уровня функции* (с естественной топологией).

Для невырожденной функции Морса на компактном многообразии это пространство является конечным одномерным комплексом (графом). Поэтому мы будем называть описанное пространство *графом функции f* . Значения функции в точках графа — это ее значения вдоль соответствующих многообразий уровня.

Если $M = S^n$ — сфера (размерности больше 1), то этот граф — дерево; много исследований этих деревьев было опубликовано Кронродом и Витушкиным.

Ниже рассматривается в основном случай, когда $M = \mathbb{T}^2$ — двумерный тор. В этом случае граф не дерево, а имеет один цикл (для поверхности рода g число циклов равно g).

Пусть f — функция общего положения (“очень хорошая функция Морса”, у которой все критические точки невырождены и все критические значения различны). В этом случае граф функции f имеет концевыми вершинами точки, соответствующие локальным максимумам и локальным минимумам функции, а точками разветвления — соответствующие седловым критическим точкам T -образные перекрестки, где граф гомеоморфен локально букве T .

Для тора число концевых точек K связано с числом точек ветвления T соотношением $K = T$, а число ребер графа, P , равно $2T$ (для сферы $K = T + 2$, $P = 2T + 1$).

Возникает вопрос, *какие графы реализуются гладкими функциями на данном многообразии, а какие нет*. При классификации графов (общего положения) мы будем учитывать порядок критических значений, считая вершины графа занумерованными числами $1 < 2 < \dots < B$ (для тора $B = K + T = 3K$).

П р и м е р. Число занумерованных деревьев с $T = 2$ (для которых $K = 4$, $B = 6$, $P = 5$) равно 19, и все они реализуются гладкими функциями Морса на сфере S^2 .

При $T = 4$ ($K = 6$, $B = 10$, $P = 9$) число $N(4)$ занумерованных деревьев оказывается равным 17746. По-видимому, число $N(T)$ растет при $T \rightarrow \infty$ по порядку величины, как T^a , где $1 \leq a \leq 2$ (скорее a похоже на 2, чем на 1; множителями порядка const^T мы здесь пренебрегаем, как относительно малыми поправками).

Среди функций на сфере S^n можно выделить те, которые топологически ведут себя как стремящиеся к бесконечности на бесконечности пространства \mathbb{R}^n многочлены (например, с главной однородной частью $\sum_{i=1}^n x_i^{2m}$).

Исследование топологического строения этих многочленов близко к 16-й проблеме Гильберта и является фундаментальным вопросом математики. К сожалению, Гильберт не включил в свою формулировку проблемы вопрос об описании топологического типа вещественного многочлена, ограничиваясь лишь вопросом о его многообразиях уровня.

¹Работа частично поддержана РФФИ (грант 05-01-00104).

Я предполагаю, что из 17746 топологических типов графов гладких функций Морса на S^2 с десятью критическими точками многочленами степени 4 (что и соответствует значению $B = 10$) реализуется лишь малая доля (порядка сотни). Но, к сожалению, занимавшиеся этой проблемой Гильберта математики (Ньютон, Декарт, Клейн, Петровский, Олейник, Милнор, Гудков, Виро, Харламов, Полотовский, Шустин и другие) не опубликовали топологической классификации задающих свои кривые многочленов (даже небольших степеней).

Наряду с многочленами, в проблеме Гильберта естественно рассматривать и другие специальные функции, например — тригонометрические многочлены.

Целью настоящей работы является исследование самого простого примера этого рода (полученного из аффинных групп отражений так же, как получаются многочлены из обычных евклидовых групп отражений). Начнем со случая A_2 в обозначениях теории групп отражений.

А именно, рассмотрим четырехпараметрическое вещественное семейство тригонометрических многочленов

$$f_{A,B,C,D}(x, y) = A \sin x + B \sin y + C \sin(x + y) + D \cos(x + y). \quad (1)$$

Мы будем считать их гладкими функциями на торе

$$\mathbb{T}^2 = \{x(\bmod 2\pi), y(\bmod 2\pi)\}.$$

Мы покажем, что максимальные числа их критических точек при отсутствии вырождений равны

$$K = T = 4, \quad B = 9, \quad P = 8,$$

что число занумерованных графов с $T = 4$ точками ветвления и одним циклом равно 550 и что графы тригонометрических многочленов (1) реализуют не более 12 таких специальных графов из 550.

Гипотетически при повышении степеней тригонометрических многочленов реализуемая ими часть графов будет составлять все меньшую долю множества всех занумерованных графов с таким же числом вершин, но я не доказываю такой асимптотики.

Наряду с топологической классификацией многочленов и тригонометрических многочленов было бы интересно найти число компонент связности пространства коэффициентов невырожденных многочленов данной степени: ведь один и тот же занумерованный граф может соответствовать двум многочленам (или тригонометрическим многочленам), которые нельзя соединить непрерывным путем в пространстве многочленов с тем же графом.

Но я не знаю, как растет число компонент связности пространства реализаций данного графа (ни для случая многочленов, ни для случая аффинных групп Вейля, ни для пространств тригонометрических многочленов фиксированных степеней).

1. Классификация графов функций Морса на торе

Занумерованные графы функций Морса выделяются тем, что все их точки ветвления — как у буквы Т, и при этом значение (номер) в точке ветвления не может быть ни меньше, ни больше значений во всех трех соседних вершинах одновременно:

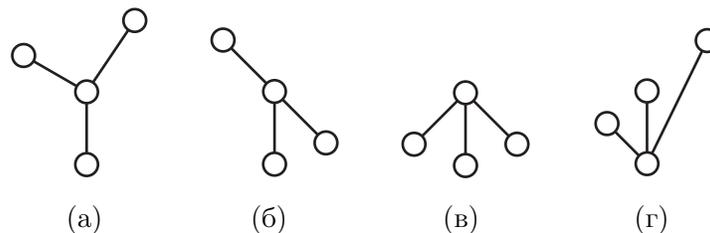


Рис. 1. (а) реализуется (горой Эльбрус); (б) реализуется (Везувием); (в) и (г) — не реализуются.

Теорема 1. Число занумерованных графов с одним циклом, $T = 4$ точками ветвления, $K = 4$ концевыми точками и $P = 8$ ребрами равно 550 (считая графы с точностью до сохраняющих порядок вершин гомеоморфизмов).

Доказательство. Такой граф имеет один цикл, состоящий из 2, 3 или 4 ребер. Точки ветвления могут образовывать следующие 11 конфигураций:

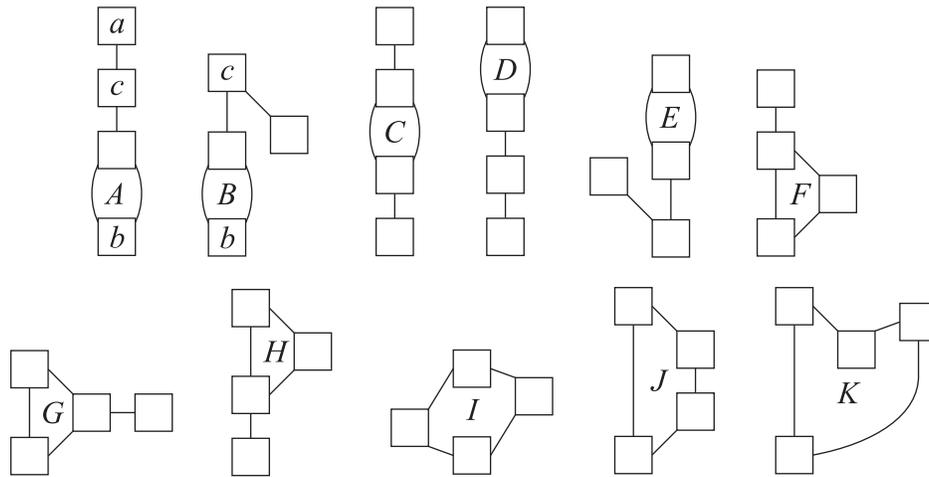


Рис. 2

Здесь для каждой пары соседних точек ветвления мы считаем, что расположенная выше точка ветвления имеет больший номер, исключая случай G (где расположение на одной горизонтали двух соседей означает, что номера этих двух точек могут соотноситься произвольным образом).

Мы сосчитаем теперь числа графов каждого из этих типов. Из симметрии ясно, что эти числа удовлетворяют соотношениям

$$|A| = |D|, \quad |B| = |E|, \quad |F| = |H|,$$

так что придется рассмотреть всего 8 случаев: A, B, C, F, G, I, J, K .

С л у ч а й A. Из верхней точки ветвления, уровня a , обязано выходить максимальное ребро вверх (aa'), а из нижней, b , — вниз, (bb').

Остаются еще два ребра: ($a\alpha$), выходящее из a , и выходящее из нижнего соседа c точки a ребро ($c\beta$). Граф определяется номерами вершин α и β . Четыре значения в точках ветвления и значение b' делят полуось значений, меньших значения a' , на 6 частей, так что для выбора значения α есть 6 возможностей.

После того, как значение α выбрано, для выбора значения β ось значений разделена четырьмя значениями в точках ветвления и значениями (a', b', α) на 8 частей. Итого получаем 48 случаев (48 неэквивалентных занумерованных графов типа A).

З а м е ч а н и е. Для дальнейшего нам будет полезно выделять те случаи, когда число точек графа на каждой горизонтали не превосходит 2. На рисунке 3 — это только 3 случая: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. При выборе α_1 для β имеется 2 возможности (обе ниже a), при выборе α_2 имеется 2 возможности (обе ниже α_2), при выборе α_3 возможностей нет. Итого — всего 4 случая из 48.

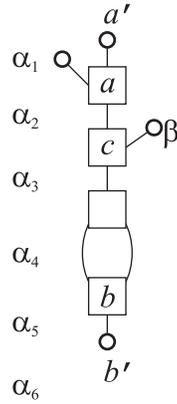


Рис. 3

С л у ч а й В. Значение α в точке ветвления может занимать место в четырех интервалах $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, на которые делят область $\alpha < c$ значения (a, b, c, b') .

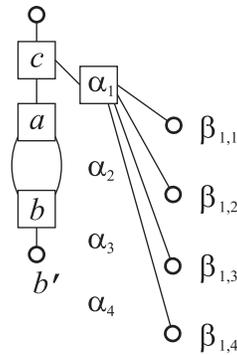


Рис. 4

Если значение α выбрано, то для определения нумерованного графа остается назначить значения в двух соседях точки ветвления α .

Обозначим меньшее из них через β (оно меньше выбранного α_k). Для выбора второго соседнего значения, γ , остается столько интервалов, на сколько делят интервал $\gamma > \beta$ уже выбранные значения. В случае выбора α в интервале α_1 получим

выбор k в $\beta_{1,k}$	1	2	3	4
число интервалов $\gamma > \beta$	4	5	6	7

Совершенно таким же образом выбор значения α в интервале α_2 приводит к интервалам $\beta_{2,k}$ ($k = 1, 2, 3$) с числами 5, 6 и 7 интервалов для значения γ .

При выборе значения α в интервале α_3 получаем два интервала $\beta_{3,k}$ ($k = 1, 2$) с числами 6 и 7 интервалов для значения γ . Наконец, для значения α из интервала α_4 имеется единственный интервал $\beta_{4,1}$ (ниже α_4), поделенный на 7 частей.

Итого, суммируя четыре перечисленных подслучая, мы находим

$$(4 + 5 + 6 + 7) + (5 + 6 + 7) + (6 + 7) + (7) = 22 + 18 + 13 + 7 = 60$$

занумерованных графов типа В.

З а м е ч а н и е. Ни в одном из них не отсутствуют горизонтали более чем с двумя точками графа. Дело в том, что из вершины со значением α_k либо вверх, либо вниз выходят два ребра, пересекающие одну горизонталь, а часть (bc) графа доставляет третью точку на той же горизонтали.

С л у ч а й *C*. Обозначим через a и c значения в верхней и в нижней точках ветвления. Выше a заведомо есть концевые точки ребер, выходящих из a ; обозначим через a' максимальное из значений в них, и аналогично, через c' , минимальное из значений в концах ребер, выходящих из вершины со значением c .

Нумерованный граф определяется расположением значений α (во втором соседе вершины c).

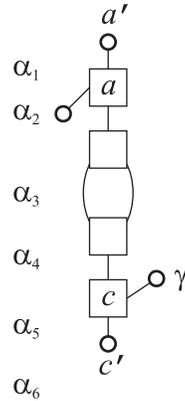


Рис. 5

При выборе значения α ось значений, меньших a' , разделена четырьмя значениями в точках ветвления и значением c' на 6 частей (α_k). При выборе значения γ ось значений, больших c' , разделена на 7 интервалов (четырьмя значениями ветвления и значениями a' , α_k), если $k \leq 5$. В случае же $k = 6$ интервалов только 6, так как $\alpha_6 < c'$.

Окончательно, *общее число занумерованных графов типа C* есть $5 \cdot 7 + 6 = 41$.

З а м е ч а н и е. Отсутствие горизонтальных слоев более чем с двумя точками встречается только при $k = 1$ и 2 (иначе ребро $(\alpha_k a)$ и цикл пересекают одну горизонталь три раза). При этом для выбора значения γ тоже имеются только по два варианта (чтобы ребро (γc) было ниже цикла). Итого из 41 занумерованного графа условию отсутствия трех точек по горизонтали удовлетворяют только 4 графа.

С л у ч а й *F*. Обозначим уровни точек ветвления через (a, b, c, d) с циклом $c > d > b < c$ и верхней точкой ветвления $a > c$.

Из вершины a выходит вверх по меньшей мере одно ребро; обозначим через a' максимальный из уровней соседей вдоль этих ребер и через α — уровень второй вершины. Пусть $b' < b$ — уровень нижнего соседа точки ветвления b .

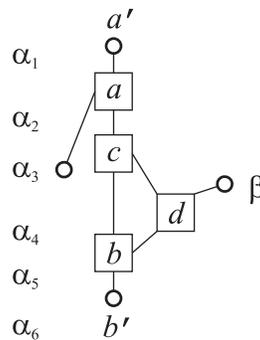


Рис. 6

Уровни четырех точек ветвления и точки b' делят интервал значений α ниже a' на 6 частей ($\alpha_1, \dots, \alpha_6$), и уровень второго соседа вершины a может принадлежать любому из этих 6 интервалов. Остается, для определения занумерованного графа, выбрать еще уровень β концевого соседа точки ветвления d . Уже выбранные 7 уровней $(a, b, c, d, a', b', \alpha)$ делят ось значений на 8 интервалов, и β может принадлежать любому из них (как бы ни было выбрано α_k).

Всего получается $6 \cdot 8 = 48$ разных занумерованных графов типа F .

З а м е ч а н и е. Ни один из этих графов не удовлетворяет условию отсутствия горизонталей с тремя или более точками графа. Это следует из того, что из точки ветвления уровня d либо вверх, либо вниз выходят два ребра, пересекаемые одной горизонталью, встречающей в другом месте ребро (bc) .

С л у ч а й G . Обозначим уровни вершин треугольника точек ветвления через $(c > d > b < c)$, и обозначим через a уровень точки ветвления ребра (ad) , примыкающего к d . Обозначим через c' и b' уровни концевых вершин ребер $(c'c)$ и $(b'b)$, так что $c' > c$, $b' < b$.

Уровень a четвертой точки ветвления может попасть в любой из 6 интервалов, на которые 5 точек $(c' > c > d > b > b')$ делят ось значений.

Ввиду симметрии, достаточно рассмотреть верхние три интервала, a_1 , a_2 и a_3 (расположенные выше уровня d).

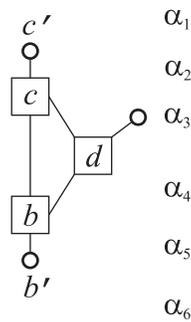


Рис. 7

Из точки ветвления уровня a в этих случаях обязательно выходит вверх ребро $(a'\alpha_k)$, причем число интервалов выбора уровня максимальной вершины, a' , есть k :

k	1	2	3
число интервалов	1	2	3

Если уровень $a' = a'_l$ выбран, то для выбора уровня α второй соседней с a_k концевой вершины остается набор интервалов, на которые делят область $\alpha < a'$ уровни (c', c, d, b, b', a_2) . Число этих интервалов, в зависимости от k и l , есть

(k, l)	(1,1)	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
число интервалов для α	7	7	6	7	6	5

Итак, число занумерованных графов типа G с $a > d$ есть $(7) + (7 + 6) + (7 + 6 + 5) = 38$, поэтому, по симметрии, общее число занумерованных графов типа G есть $38 \cdot 2 = 76$.

З а м е ч а н и е. Ни один из этих графов не удовлетворяет условию отсутствия горизонталей с тремя и более точками графа. Действительно, из вершины уровня d либо вверх, либо вниз выходят два ребра, и пересекающая их в двух точках горизонталь пересекает в третьей точке графа ребро bc .

С л у ч а й I . Из верхней точки ветвления, уровня a , выходит вверх ребро $(a'a)$. Из нижней точки ветвления, уровня b , выходит вниз ребро (bb') .

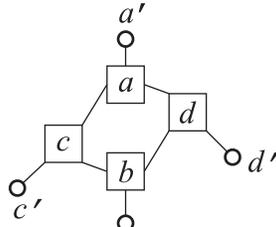


Рис. 8

Из средних точек ветвления, уровней $c < d$ (между a и b) выходят ребра $(c'c)$ (c 6 точками деления и потому 7 интервалами для выбора уровня c') и $(d'd)$ (для d' , с учетом уже сделанного выбора уровня c' , получается 7 точек деления оси значений и 8 интервалов).

Итого мы получаем $7 \cdot 8 = 56$ занумерованных графов типа I .

З а м е ч а н и е. Ни один из них не удовлетворяет условию отсутствия горизонталей с тремя или более точками графа. Например, из точки ветвления уровня d выходит 2 ребра либо вверх, либо вниз. Пересекающая их горизонталь пересекает дугу (acb) графа в третьей точке.

С л у ч а й J . Рассуждение (и ответ) такие же, когда цикл $(adcba)$ образован точками ветвления уровней $a > d > c > b$: для выбора уровня c' имеем 7 вариантов, а для уровня d' , после выбора уровня c' , получаем 8 интервалов.

Число занумерованных графов типа J равно 56.

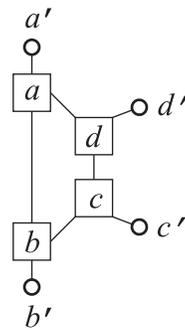


Рис. 9

З а м е ч а н и е. Из полученных 56 занумерованных графов ни один не удовлетворяет условию отсутствия горизонталей с тремя или более точками графа: рассуждение такое же, как в случае I , но вместо дуги (acb) в его конце нужно использовать дугу (ab) .

С л у ч а й K . При цикле точек ветвления $(abdca)$ уровней $a > b < d > c < a$ мы введем обозначения так, что $a > d$.

Теперь уровень $d' > d$ имеет 3 варианта (точки деления — это a и $a' > a$), а уровень $c' < c$ — тоже три варианта (точки деления — уровни b и b').

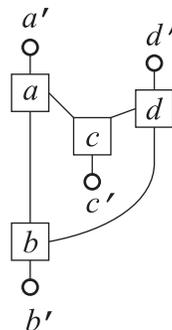


Рис. 10

Выборы уровней d' и c' независимы (поскольку $c' < c < d < d'$.)

Поэтому всего получается $3 \cdot 3 = 9$ занумерованных графов типа K .

З а м е ч а н и е. Ни один из этих 9 графов не удовлетворяет условию отсутствия трех или более точек графа на одной горизонтали. Например, четыре точки доставляют ребра (ab, bd, dc, ca) в пересечении с горизонталью уровня, среднего между уровнями c и d .

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы: числа нумерованных графов типов $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$ равны, как мы сосчитали выше,

$$48, 60, 41, 48, 60, 48, 76, 48, 56, 56, 9,$$

что и дает общую сумму

$$2(48 + 60) + 41 + 2(48 + 56) + 76 + 9 = 216 + 41 + 208 + 85 = 257 + 293 = 550.$$

З а м е ч а н и е 1. Я перепроверил эти длинные элементарные вычисления, после ряда ошибочных подсчетов, достаточное число раз, чтобы быть уверенным в их правильности.

З а м е ч а н и е 2. Число графов, удовлетворяющих условию отсутствия трех или более точек на одной горизонтали, получается

$$4(A) + 0(B) + 4(C) + 4(D) + 0(E) + 0(F) + 0(G) + 0(H) + 0(I) + 0(J) + 0(K) = 12.$$

З а м е ч а н и е 3. Я предполагаю, что каждый из занумерованных графов реализуется ровно одной гладкой функцией (с точностью до гомеоморфизма многообразия M), но формально не доказывал этой единственности даже для случаев $M = S^2$ или \mathbb{T}^2 , обсуждавшихся выше. Граф функции на торе не учитывает, например, классов гомологий компонент линий уровня, являющихся его точками, и вопрос об их реализации в графах также интересен.

2. Алгебраическая геометрия тригонометрических многочленов

Для сравнения графов специальных функций (1) с графами общих гладких функций на торе ниже доказано следующее.

Теорема 2. *Функция Морса (1) имеет на торе не более восьми критических точек. Кривая (некритического) уровня этой функции — эллиптическая кривая (рода 1), ее вещественные точки образуют не более двух компонент связности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся рациональностью окружности, т.е. используем обычные координаты $t \in \mathbb{R}P^1$, $\tau \in \mathbb{R}P^1$ на окружностях $\{x(\bmod 2\pi)\}$ и $\{y(\bmod 2\pi)\}$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos y = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \quad \sin y = \frac{2\tau}{1+\tau^2}.$$

Уравнения критических точек

$$\begin{cases} A \cos x + C \cos(x+y) - D \sin(x+y) = 0, \\ B \cos y + C \cos(x+y) - D \sin(x+y) = 0 \end{cases}$$

приводят к выводу

$$A \frac{1-t^2}{1+t^2} = B \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \tag{2}$$

откуда

$$\tau^2 = \frac{A(t^2-1) + B(t^2+1)}{-A(t^2-1) + B(t^2+1)} = \frac{P_2(t)}{Q_2(t)},$$

где $Q_2(t) = (A + B) + t^2(B - A)$.

Полезно заметить, что

$$1 + \tau^2 = 2B(1 + t^2)/Q_2, \quad 1 - \tau^2 = 2A(1 - t^2)/Q_2.$$

В частности, если $t^2 = -1$, то $\tau^2 = -1$, $1 - \tau^2 = -2$. Второе из уравнений критической точки (дополнительное к (2)),

$$A \cos x + C \cos(x + y) - D \sin(x + y) = 0,$$

имеет в переменных (t, τ) вид

$$A(1 - t^2)(1 + \tau^2) + C[(1 - \tau^2)(1 - t^2) - 4t\tau] - 2D[t(1 - \tau^2) + \tau(1 - t^2)].$$

Иными словами, выполняется соотношение

$$\tau^2 U + \tau V + W = 0, \tag{3}$$

где

$$U = (A - C)(1 - t^2) + 2Dt, \quad V = -4tC + 2D(t^2 - 1), \quad W = (A + C)(1 - t^2) - 2Dt.$$

Подставляя вместо τ^2 указанную выше дробь P_2/Q_2 , мы получаем из уравнения (3) решение

$$\tau = p_4(t)/q_4(t), \tag{4}$$

где $p_4 = UP_2 + WQ_2$, $q_4 = -VQ_2$. Теперь уравнение $\tau^2 = P_2/Q_2$ принимает вид

$$p_4^2 Q_2 = q_4^2 P_2,$$

то есть вид

$$Q_2(p_4^2 - V^2 P_2 Q_2) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет степень 10, так что мы получаем из него 10 комплексных критических точек (t, τ) . Однако две из них заведомо не вещественны: $(i, -i)$ и $(-i, i)$, где

$$t^2 = -1, \quad \tau^2 = -1, \quad t\tau = 1, \quad t + \tau = 0. \tag{6}$$

Действительно, при $t^2 + 1 = 0$ мы получаем

$$P_2 = -2A, \quad Q_2 = 2A, \quad V = -4(tC + D), \quad U = 2(A - C + tD), \quad W = 2(A + C - tD),$$

так что левая часть соотношения (5) приобретает сомножитель

$$\begin{aligned} & [-4A(A - C + tD) + 4A(A + C - tD)]^2 + 16(tC + d)^2 4A^2 \\ &= 16A^2(2C - 2tD)^2 + 64(tC + d)^2 A^2 \\ &= 64A^2(C^2 + t^2 D^2 - 2tCD + t^2 C^2 + D^2 + 2tCD) \\ &= 64A^2(C^2 + D^2)(1 + t^2), \end{aligned}$$

обращающийся в нуль при $1 + t^2 = 0$.

Итак, уравнение (5) имеет не более 8 вещественных корней t , доставляющих, ввиду соотношения (4), не более 8 вещественных критических точек функции $(1 + t^2)$.

Случай, когда все эти 8 критических точек вещественны, встречается (при подходящих значениях коэффициентов A, B, C, D), в чем нетрудно убедиться, например, при помощи малых возмущений случая $(1, 1, -1, 0)$. Но я не знаю, как топологически устроена соответствующая

бифуркационная диаграмма в $\mathbb{R}^4 = \{(A, B, C, D)\}$, разделяющая области тригонометрических многочленов (1) с разными графами (хотя эта задача теории особенностей и интересна).

Для исследования комплексного множества уровня, $\{(x, y), \text{ где } f(x, y) = c\}$, используем аффинные координаты t и τ в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Уравнение множества уровня принимает в этих координатах вид

$$A \frac{2t}{1+t^2} + B \frac{2\tau}{1+\tau^2} + C \left(\frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} + \frac{2\tau}{1+\tau^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) + D \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} - \frac{4t\tau}{(1+t^2)(1+\tau^2)} \right) = c,$$

т.е. вид

$$A2t(1+\tau^2) + B2\tau(1+t^2) + c(2t(1-\tau^2) + 2\tau(1-t^2)) + D((1-t^2)(1-\tau^2) - 4t\tau) = c(1+t^2)(1+\tau^2). \quad (7)$$

При фиксированном значении t это уравнение относительно τ квадратное, поэтому комплексное множество уровня $\{f(x, y) = c\}$ при проекции $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$, заданной формулой $(t, \tau) \mapsto t$, двулистно (разветвленно) покрывает сферу Римана $\mathbb{C}P^1$ с аффинной координатой t .

Точки ветвления, t , определяются условием $\Delta(t) = 0$, где Δ — дискриминант квадратного уравнения (7) относительно τ . Из формулы (7) мы видим, что

$$\Delta = (2B^2(1+t^2) + 2C(1-t^2) - 4Dt)^2 - 4[2At - 2Ct - D(1-t^2) - c(1+t^2)][2At + 2Ct + D(1-t^2) - c(1+t^2)].$$

Этот многочлен четвертой степени относительно t имеет (для типичного многообразия уровня типичной функции) степень 4 и 4 различных корня (и никогда не имеет больше).

Следовательно, наше разветвленное двулистное покрытие имеет, в типичной ситуации, 4 точки ветвления над S^2 . Поэтому такое комплексное многообразие уровня — эллиптическая кривая (рода $g = 1$): это утверждает классическая формула Римана — Гурвица. Эллиптическая кривая может вырождаться в рациональную, но все равно число вещественных компонент связности эллиптической (или вырожденной эллиптической) кривой не может превосходить $g + 1 = 2$ (по теореме Харнака или Смита, сумма чисел Бетти вещественного алгебраического многообразия с коэффициентами \mathbb{Z}_2 не превосходит суммы чисел Бетти с коэффициентами \mathbb{Z}_2 многообразия его комплексных точек).

Теорема 2, таким образом, доказана.

Следствие 1. *Число занумерованных графов, реализуемых тригонометрическими многочленами (1) с восемью вещественными критическими точками, не превосходит 12.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2 следует, что число точек графа функции (1), лежащих на одной горизонтали, не может превосходить 2. Из замечаний при доказательстве теоремы 1 следует, что из 550 занумерованных графов с 8 вершинами ($T = 4, K = 4$) ровно 12 удовлетворяют условию отсутствия трех или более точек на одной горизонтали.

Следовательно, только эти 12 графов (перечисленные в п. 1) и могут реализовываться тригонометрическими многочленами (1).

З а м е ч а н и е. По-видимому, все они реализуются, но я не выписал эти реализации и не знаю даже, из скольких компонент связности состоит многообразие тригонометрических многочленов (1) с 8 вещественными критическими точками.

УДК 531.3, 532.5

О ПАДЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ¹

А. В. Борисов, В. В. Козлов, И. С. Мамаев

В работе рассматривается задача о движении тяжелого твердого тела в бесконечном объеме идеальной безвихревой несжимаемой жидкости. Данная задача обобщает классическую задачу Кирхгофа, описывающую движение твердого тела в жидкости по инерции. Исследованы различные частные постановки задачи: плоское движение и движение осесимметричного тела. В общем случае движения твердого тела исследована устойчивость частных решений и указаны предельные режимы движения при бесконечном возрастании времени. С помощью численных расчетов на плоскости начальных условий построены области, отвечающие различным типам асимптотического поведения. Установлен фрактальный характер границы, разделяющей эти области.

1. Уравнения движения и частные случаи

Рассмотрим движение твердого тела в однородном поле тяжести в бесконечном объеме безвихревой идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Приведем сначала восходящие к Кирхгофу общие уравнения движения тела в жидкости под действием внешнего силового поля:

$$\dot{M} = M \times \frac{\partial H}{\partial M} + p \times \frac{\partial H}{\partial p} + K, \quad \dot{p} = p \times \frac{\partial H}{\partial M} + F, \quad (1.1)$$

где F и K — суммарные сила и момент, приложенные к телу. Если внешние силы имеют потенциальный характер, то уравнения (1.1), дополненные уравнениями для направляющих косинусов и координат фиксированной точки в теле, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times \frac{\partial H}{\partial M} + p \times \frac{\partial H}{\partial p} + \alpha \times \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \beta \times \frac{\partial H}{\partial \beta} + \gamma \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \\ \dot{p} &= p \times \frac{\partial H}{\partial M} - \frac{\partial H}{\partial x_1} \alpha - \frac{\partial H}{\partial x_2} \beta - \frac{\partial H}{\partial x_3} \gamma, \\ \dot{\alpha} &= \alpha \times \frac{\partial H}{\partial M}, \quad \dot{\beta} = \beta \times \frac{\partial H}{\partial M}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \frac{\partial H}{\partial M}, \\ \dot{x}_1 &= \left(\alpha, \frac{\partial H}{\partial p} \right), \quad \dot{x}_2 = \left(\beta, \frac{\partial H}{\partial p} \right), \quad \dot{x}_3 = \left(\gamma, \frac{\partial H}{\partial p} \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где векторы p , M , α , β , γ представляют собой проекции импульса, момента импульса и неподвижных ортов на связанные с телом оси, а x_1 , x_2 , x_3 — проекции на неподвижные оси радиуса-вектора начала подвижной системы координат. Гамильтониан системы имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}M, M) + (\mathbf{B}M, p) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}p, p) + U, \\ U &= \mu(x_3 + (r, \gamma)), \quad \mu = \mu_T - \mu_J, \quad r = \frac{\mu_T \mathbf{r}_T - \mu_J \mathbf{r}_J}{\mu_T - \mu_J}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

¹Работа выполнена в рамках Программы государственной поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1312.2006.1), при финансовой поддержке CRDF (грант RU-M1-2583-MO-04) и РФФИ (грант 05-01-01058). Работа А. В. Борисова и И. С. Мамаева выполнена также при поддержке РФФИ (грант 04-05-64367) и INTAS (грант 04-80-7297).

здесь \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} — симметричные матрицы, определяемые геометрией тела и его инерционными свойствами, $\mu_{\text{т}}$, $\mu_{\text{ж}}$ — вес тела и вес вытесненной жидкости, а $\mathbf{r}_{\text{т}}$, $\mathbf{r}_{\text{ж}}$ — радиус-векторы центра масс и центра давления в подвижных осях. Случай $\mu_{\text{т}} = \mu_{\text{ж}}$ (взвешенное тело) будет также разобран далее.

Непосредственно проверяется, что имеются три интеграла движения (один из которых явно содержит время):

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = P_1, \quad (\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = P_2, \quad (\mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma}) + \mu t = P_3.$$

Это означает, что импульс системы тело+жидкость представляется в форме

$$\mathbf{p} = P_1 \boldsymbol{\alpha} + P_2 \boldsymbol{\beta} + (P_3 - \mu t) \boldsymbol{\gamma}, \quad (1.4)$$

т. е. вектор $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ представляет собой проекции начального импульса (по Чаплыгину — толчка) на неподвижные оси.

Выбором начала отсчета времени (при $\mu_{\text{т}} \neq \mu_{\text{ж}}$) и поворотом неподвижных осей можно добиться, чтобы $P_2 = P_3 = 0$, что в дальнейшем мы полагаем выполненным.

Подставив (1.4) в уравнения движения (1.2), получим замкнутую относительно \mathbf{M} , $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ систему, которая записывается в гамильтоновой форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

с гамильтонианом, явно зависящим от времени:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{B}\mathbf{M}, P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}(P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}), P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}) + \mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (1.6)$$

З а м е ч а н и е. Уравнения (1.2) в различных, но эквивалентных формах встречаются в работах В.А. Стеклова [17], Д.Н. Горячева [5], С.А. Чаплыгина [20]. Приведение их к изящной неавтономной форме, использующей представление (1.4), впервые, видимо, выполнено В.В. Козловым [11] (в форме уравнений Пуанкаре).

Укажем некоторые частные случаи, для которых уравнения (1.5) допускают упрощения. Они указаны в работах [11, 19].

1.1. Движения без начального толчка [11]

Пусть начальный толчок равен нулю: $P_1 = 0$. Уравнения движения для \mathbf{M} , $\boldsymbol{\gamma}$ в замкнутой форме представляют собой (неавтономную) гамильтонову систему на $e(3)$ с гамильтонианом

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) - \mu t(\mathbf{B}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}\mu^2 t^2(\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + \mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Если к тому же тело имеет три плоскости симметрии, пересекающиеся в центре масс, то этот гамильтониан еще больше упрощается: $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{r} = 0$.

1.2. Взвешенное тело [19]

В работе [19] С. А. Чаплыгин указал также случай, когда сила тяжести уравновешена силой Архимеда (средняя плотность тела равна плотности жидкости, и, следовательно, $\mu_{\text{т}} = \mu_{\text{ж}}$), но центр масс тела не совпадает с центром масс вытесненного объема жидкости. При этом тело находится под действием пары сил, и его полный импульс в неподвижной системе координат сохраняется, т. е.

$$\mathbf{p} = P_1 \boldsymbol{\alpha} + P_2 \boldsymbol{\beta} + P_3 \boldsymbol{\gamma},$$

где $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3) = \text{const}$. Как и выше, выбором неподвижных осей можно достичь равенства $P_2 = 0$. Таким образом, в этом случае эволюция векторов \mathbf{M} , $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ описывается автономной гамильтоновой системой с функцией Гамильтона

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{B}\mathbf{M}, P_1\boldsymbol{\alpha} + P_3\boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}(P_1\boldsymbol{\alpha} + P_3\boldsymbol{\gamma}), P_1\boldsymbol{\alpha} + P_3\boldsymbol{\gamma}) + \mu_{\text{T}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}),$$

где \mathbf{r} — вектор, соединяющий центр масс тела с центром давления.

Если начальный импульс направлен вдоль вертикальной оси: $\mathbf{p} = P\boldsymbol{\gamma}$, то эволюция векторов \mathbf{M} , $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{\gamma}$ направлен вдоль поля тяжести) описывается системой со скобкой Пуассона, определяемой алгеброй $e(3)$ (т.е. $\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k$, $\{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k$, $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 0$), и функцией Гамильтона

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + P(\mathbf{B}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}P^2(\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + \mu_{\text{T}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (1.7)$$

В явном виде имеем уравнения движения

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \times \mathbf{M} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}.$$

В работе [19] С.А. Чаплыгин указал случай интегрируемости уравнений (1.7), имеющий дополнительный интеграл четвертой степени по компонентам импульсивного момента, вид которого напоминает интеграл Ковалевской.

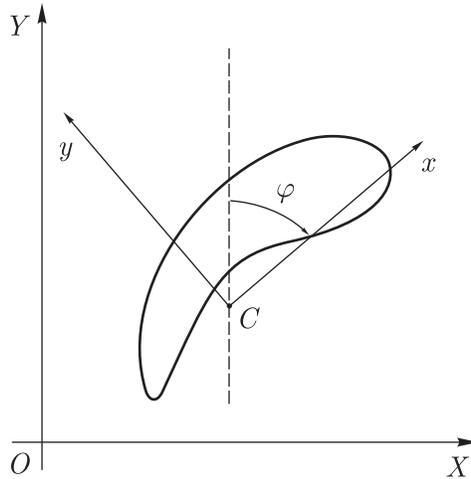


Рис. 1

1.3. Плоскопараллельное движение [5, 9, 17, 20]

Плоскопараллельное движение твердого тела задается инвариантными соотношениями $M_1 = M_2 = 0$, $\alpha_3 = \gamma_3 = 0$. Как несложно показать, необходимым условием существования подобных движений является динамическая симметрия тела относительно рассматриваемой (инвариантной) плоскости, что приводит к соотношениям

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{12} = 0, \quad c_{13} = c_{23} = 0.$$

Кроме того, можно показать, что сдвигом и поворотом осей, связанных с телом, в этом случае можно добиться равенства $\mathbf{B} = 0$, а матрицу \mathbf{C} сделать диагональной. Пусть угол поворота подвижных осей относительно неподвижных отсчитывается по часовой стрелке, как показано на рис. 1, тогда для неподвижных ортов имеем

$$\alpha_1 = \sin \varphi, \quad \alpha_2 = -\cos \varphi, \quad \gamma_1 = \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \varphi.$$

Для угла поворота получим неавтономное уравнение второго порядка

$$a_3\ddot{\varphi} = (c_1 - c_3) (\mu^2 t^2 \sin \varphi \cos \varphi + P_1 \mu t \cos 2\varphi - P_1^2 \sin \varphi \cos \varphi) + \mu(x \sin \varphi - y \cos \varphi), \quad (1.8)$$

где c_1, c_3, a_3 — соответствующие элементы диагональных матриц, а $\mathbf{r} = (x, y, 0)$.

Для уравновешенного тела ($x = y = 0$) без начального толчка ($P_1 = 0$) получим замечательное по своей простоте уравнение

$$\ddot{\varphi} = kt^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad k = \frac{\mu^2(c_1 - c_3)}{a_3}. \quad (1.9)$$

З а м е ч а н и е. Это уравнение называется в работах [9, 10, 15] уравнением Чаплыгина, но будем иметь в виду, что, хотя оно (вместе с другими интересными результатами) и было получено С.А. Чаплыгиным в 1890 г. в студенческом сочинении, он воздержался от его публикации. Это было связано, видимо, с тем, что он не смог явно проинтегрировать это уравнение. Тем не менее С.А. Чаплыгин опубликовал эту работу в первом прижизненном собрании своих сочинений (1933 г., [20]).

Уравнения (1.9) были также получены независимо Д.Н. Горячевым (1893) [5] и В. А. Стекловым (1894) [16, 17]. Последний отметил также простейшие свойства решений этих уравнений. В частности, В.А. Стеклов показал, что при падении тела амплитуда его колебаний относительно горизонтальной оси убывает, а частота колебаний растет. Этот вывод В.А. Стеклов сделал в дополнении к своей книге [17], в которой при анализе асимптотического поведения тела им был допущен ряд погрешностей. Задача Стеклова об асимптотическом описании поведения решений уравнения [16, 17] была решена В.В. Козловым [9], который показал, что движение тела при почти всех начальных условиях приближается к равноускоренному падению широкой стороной вверх и колеблется вокруг горизонтальной оси с возрастающей частотой порядка t и уменьшающейся амплитудой порядка $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Численный анализ асимптотических движений с различным числом полуоборотов имеется в [23]. Аналитические выражения для асимптотики падения в различной форме получены в работах [15, 23].

В работе [7] описан и изучен эффект выныривания. В условиях безвихревого обтекания предполагается, что в начальный момент широкая сторона тела горизонтальна и телу сообщается скорость в горизонтальном направлении. В последующие моменты тело начинает опускаться вниз. Однако если его присоединенная масса в поперечном направлении достаточно велика, то тело затем резко всплывает узкой стороной вперед, поднимаясь на бóльшую высоту, чем в начальный момент.

1.4. Движение осесимметричного тела (круглого диска)

Имеется важный частный случай, когда система (1.6) имеет дополнительный (автономный) линейный интеграл Лагранжа

$$M_3 = \text{const.}$$

Условием его существования является осевая симметрия тела, при этом можно выбрать подвижные оси таким образом, что

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_1, a_3), \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_1, b_3), \quad \mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_1, c_3), \quad \mathbf{r} = (0, 0, z).$$

В этом случае эволюция проекций момента на неподвижные оси $\mathbf{N} = ((\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}), (\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}))$ и вектора оси симметрии $\mathbf{n} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ описывается гамильтоновой системой на $e(3)$

$$\dot{\mathbf{N}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{N}} \times \mathbf{N} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{n}} \times \mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{N}} \times \mathbf{n}. \quad (1.10)$$

Гамильтониан (1.6) после исключения несущественных слагаемых может быть записан в форме

$$\bar{H} = \frac{1}{2}a_1\mathbf{N}^2 + b_1(P_1N_1 - \mu tN_3) + M_3(b_3 - b_1)(P_1n_1 - \mu tn_3) + \frac{1}{2}(c_3 - c_1)(P_1n_1 - \mu tn_3)^2 + \mu zn_3. \quad (1.11)$$

Траектория начала подвижной системы координат C может быть получена из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b_1N_1 + (b_3 - b_1)M_3n_1 + P_1(c_1 + (c_3 - c_1)n_1^2) - \mu t(c_3 - c_1)n_1n_3, \\ \dot{x}_2 &= b_1N_2 + (b_3 - b_1)M_3n_2 + P_1(c_3 - c_1)n_1n_2 - \mu t(c_3 - c_1)n_2n_3, \\ \dot{x}_3 &= b_1N_3 + (b_3 - b_1)M_3n_3 + P_1(c_3 - c_1)n_1n_3 - \mu t(c_1 + (c_3 - c_1)n_3^2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Если сила тяжести уравновешивается силой Архимеда, то гамильтониан не зависит от времени:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}a_1\mathbf{N}^2 + b_1P_1N_1 + M_3(b_3 - b_1)P_1n_1 + \frac{1}{2}(c_3 - c_1)P_1^2n_1^2 + \mu_\tau zn_3. \quad (1.13)$$

В случае отсутствия начального (горизонтального) толчка, т. е. если $P_1 = 0$, имеется еще один дополнительный интеграл

$$N_3 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = \text{const.}$$

При этом для угла нутации θ ($\gamma_3 = \cos \theta$) получим (по аналогии с плоскопараллельным движением) неавтономное уравнение второго порядка [20]

$$a_1^{-1}\ddot{\theta} = \frac{(M_3 \cos \theta - N_3)(M_3 - N_3 \cos \theta)}{\sin^3 \theta} + (c_3 - c_1)\mu^2 t^2 \sin \theta \cos \theta - M_3(b_3 - b_1)\mu t \sin \theta + \mu z \sin \theta. \quad (1.14)$$

Если тело начинает движение из состояния покоя, то $M_3 = N_3 = 0$, и мы получим

$$a_1^{-1}\ddot{\theta} = (c_3 - c_1)\mu^2 t^2 \sin \theta \cos \theta + \mu z \sin \theta.$$

1.5. Аналог случая Гесса

Кроме рассмотренных выше имеется еще одна ситуация, когда система (1.5), (1.6) допускает инвариантное соотношение, аналогичное случаю Гесса в уравнениях Эйлера — Пуассона. Для его существования необходимо, чтобы поверхность, ограничивающая тело, была осесимметричная, а ось симметрии перпендикулярна круговому сечению гирационного эллипсоида (т. е. поверхности, определяемой уравнением $(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}) = 1$). Направим одну из осей, связанных с телом, вдоль оси симметрии поверхности тела, а две другие таким образом, что $a_{23} = 0$; тогда в гамильтониане (1.6)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_1 & 0 \\ a_{13} & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_1, b_3), \quad \mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_1, c_3), \quad \mathbf{r} = (0, 0, z).$$

При таком выборе (подвижной) системы координат инвариантное соотношение имеет наиболее простой вид

$$M_3 = 0. \quad (1.15)$$

Уравнение, определяющее угол нутации, совпадает с (1.14) при условии $M_3 = 0$, т. е.

$$a_1^{-1}\ddot{\theta} = \frac{N_3^2 \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} + (c_3 - c_1)\mu^2 t^2 \sin \theta \cos \theta + \mu z \sin \theta. \quad (1.16)$$

Отличие от случая Лагранжа, разобранный выше, появляется в уравнениях, определяющих эволюцию углов прецессии и собственного вращения. Аналог случая Гесса для уравнений (1.5), (1.6) был впервые указан в [3].

2. Движение изотропного тела

Рассмотрим простейший частный случай, указанный Стекловым [17, 18], когда уравнения интегрируются в квадратурах. При этом

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{B} = b\mathbf{E}, \quad \mathbf{C} = c\mathbf{E}, \quad \mathbf{r} = 0,$$

т. е. тензор присоединенных масс шаровой, однако тело не имеет трех плоскостей симметрии, так как $\mathbf{B} \neq 0$. (Если $\mathbf{B} = 0$, то движение тривиально — центр масс движется по параболе, а движение апексов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ такое же, как в случае Эйлера — Пуансо.)

Уравнения, описывающие эволюцию момента в подвижных осях, отделяются и тождественны случаю Эйлера — Пуансо:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M}.$$

Тем не менее, для определения траектории центра масс тела удобнее переписать уравнения движения в неподвижных осях:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= b\mu t N_2, & \dot{N}_2 &= -b\mu t N_1 - bP_1 N_3, & \dot{N}_3 &= bP_1 N_2, \\ \dot{x}_1 &= bN_1 + cP_1, & \dot{x}_2 &= bN_2, & \dot{x}_3 &= bN_3 - c\mu t, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{N} = ((\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{M}), (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{M}), (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{M}))$ — кинетический момент в неподвижных осях. Очевидно, что квадрат кинетического момента дает интеграл движения: $\mathbf{M}^2 = \mathbf{N}^2 = \text{const}$.

Если начальный толчок равен нулю: $P_1 = 0$, то первые три уравнения в (2.1) интегрируются в элементарных функциях:

$$N_1 = A \sin(b\mu t^2/2 + \varphi_0), \quad N_2 = A \cos(b\mu t^2/2 + \varphi_0), \quad N_3 = \text{const},$$

где A , φ_0 — произвольные постоянные. Вдоль вертикальной оси тело движется равноускоренно: $x_3 = -\frac{c\mu t^2}{2}$, а проекция траектории на плоскость x_1, x_2 представляет собой спираль, описываемую интегралами Френеля, сходящуюся к некоторой фиксированной точке на плоскости.

При больших временах справедливо асимптотическое представление вида

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 - \frac{A \cos(b\mu t^2/2 + \varphi_0)}{\mu t} + O(t^{-3}), \\ x_2 &= x_2^0 + \frac{A \sin(b\mu t^2/2 + \varphi_0)}{\mu t} + O(t^{-3}). \end{aligned}$$

Если $P_1 \neq 0$, то уравнения для \mathbf{N} не интегрируются в элементарных функциях, кроме того на плоскости x_1, x_2 появляется дрейф со скоростью cP_1 вдоль оси Ox_1 .

3. Качественный анализ плоскопараллельного движения

Выше было показано, что при специальном выборе подвижных осей (при котором кинетическая энергия диагональна) угол поворота тела относительно вертикали (рис. 1) описывается уравнением (1.8), а движение начала подвижной системы C (рис. 1) описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{C}\mathbf{p}) = P_1(c_1 \sin^2 \varphi + c_2 \cos^2 \varphi) - \mu t(c_1 - c_2) \sin \varphi \cos \varphi, \\ \dot{Y} &= (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\mathbf{p}) = P_1(c_1 - c_2) \sin \varphi \cos \varphi - \mu t(c_1 \cos^2 \varphi + c_2 \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

З а м е ч а н и е. Уравнение (1.8) соответствует *неавтономной* гамильтоновой системе с одной степенью свободы. Более детально подобные системы изучены в случае, когда гамильтониан является периодической функцией времени. В общем случае они демонстрируют

хаотическое поведение. В то же время, как будет показано ниже, в данной системе зависимость угла φ от времени t носит асимптотический характер.

Рассмотрим сначала “простейший” случай, когда уравновешенное тело ($x = y = 0$) падает без начального толчка ($P_1 = 0$). Тогда после замены $2\varphi = \theta$ уравнение (1.8) принимает вид

$$\ddot{\theta} = kt^2 \sin \theta, \quad k = \frac{\mu^2(c_1 - c_2)}{a_3}. \quad (3.2)$$

В дальнейшем будем полагать, что $c_1 > c_2$, т. е. $k > 0$, а $0 \leq \theta < 2\pi$.

3.1. Стационарные (равновесные) решения. Малые колебания. Двойкоасимптотические решения

Уравнение (3.2) имеет простейшие “равновесные” решения типа $\theta(t) = \text{const}$:

$$1) \quad \theta = 0, \quad 2) \quad \theta = \pi. \quad (3.3)$$

Первое решение соответствует падению вниз узкой стороной ($X = X_0, Y = Y_0 - \frac{\mu c_1 t^2}{2}$), а второе — широкой ($X = X_0, Y = Y_0 - \frac{\mu c_2 t^2}{2}$). Действительно, поскольку присоединенная масса $c_1^{-1} < c_2^{-1}$, то угол $\varphi = \pi n$, когда ось Ox вертикальна, и $\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n$, когда вертикальна ось Oy .

Линеаризуя уравнение (3.2) вблизи неподвижных точек (3.3), получим

$$\begin{aligned} 1) \quad \ddot{\xi} &= kt^2 \xi, & \theta &= \xi, \\ 2) \quad \ddot{\xi} &= -kt^2 \xi, & \theta &= \pi - \xi. \end{aligned}$$

Общее решение этих уравнений выражается через функции Бесселя

$$\begin{aligned} 1) \quad \xi(t) &= \sqrt{t} \left(C_1 I_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) + C_2 K_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) \right), \\ 2) \quad \xi(t) &= \sqrt{t} \left(C_1 J_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) + C_2 Y_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $I_\nu(x), K_\nu(x)$ — функции Бесселя второго рода, а $J_\nu(x), Y_\nu(x)$ — функции Бесселя первого рода. Таким образом, в линейном приближении первое решение является неустойчивым, а второе (асимптотически) устойчивым по отношению к ξ , но не к $\dot{\xi}$. Действительно, используя асимптотики функций Бесселя J_ν, Y_ν , при больших значениях аргумента находим

$$\xi(t) = \frac{A \sin \left(\sqrt{kt^2/2} + \alpha_0 \right)}{\sqrt{t}} + O(t^{-5/2}), \quad A = \text{const}.$$

Следовательно, амплитуда колебаний убывает как $t^{-1/2}$, а их частота неограниченно растет как t . Как уже было сказано, этот факт отмечен в [9].

Как показано в [9], вариационными методами можно доказать, что существуют два решения $\theta(t), \theta(t_0) = \theta_0$, асимптотические к неустойчивому положению равновесия ($\theta = 0$), приближающиеся к нему с разных сторон. Кроме того, вследствие инвариантности уравнения (3.2) относительно замены $t \rightarrow -t$, имеется решение $\theta_*(t)$ с начальными данными $\theta_*(0) = \pi$, для которого [9]

$$\theta_*(t) + \theta_*(-t) = 2\pi, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta_*(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_*(t) = 2\pi.$$

Таким образом, решение $\theta_*(t)$ — двойкоасимптотическое (имеется также аналогичное двойкоасимптотическое решение, обходящее окружность $\theta [0, 2\pi]$ в другом направлении). При этом

тело совершает один полуоборот. Его траектория, описываемая уравнениями (3.1), изображена на рис. 2а. Заметим, что верхняя точка траектории является точкой возврата: вблизи нее уравнение кривой имеет вид $Y = \lambda X^{2/3}$, $\lambda = \text{const}$. На рис. 2б показано изменение угла φ для данного двоякоасимптотического решения.

Существование двоякоасимптотических траекторий с произвольным количеством полуоборотов доказано в работе [22].

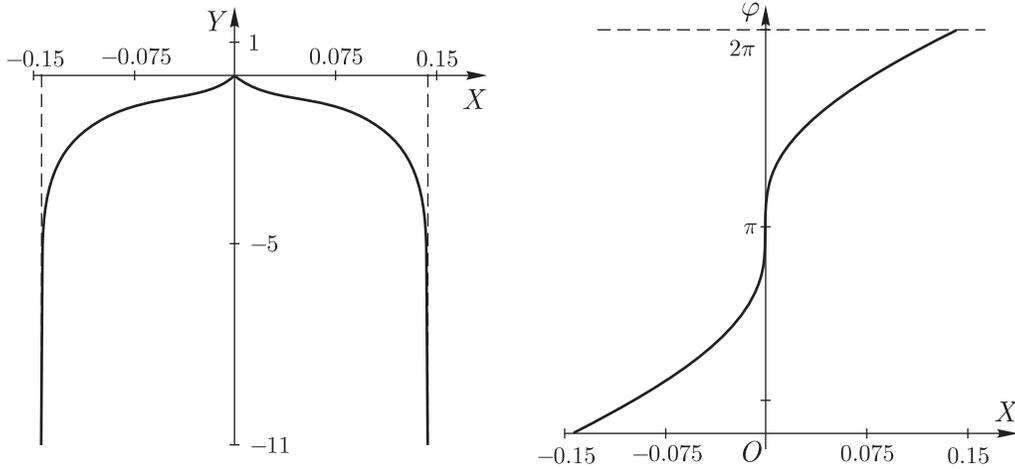


Рис. 2. Траектория тела и угол φ в зависимости от координаты X для двоякоасимптотического решения при $k = 1$, $\frac{a_3}{\mu} = 0.1$ ($P_1 = 0$); имеется особенность в верхней точке траектории (см. текст).

3.2. Асимптотическое поведение решений уравнения Чаплыгина

Как показано в [9] (см. доказательство для более общей ситуации ниже), для всех решений уравнения при $t \rightarrow \pm\infty$ либо $\theta \rightarrow 0$, либо $\theta \rightarrow \pi$ (т.е. асимптотическое движение тела — это падение широкой или узкой стороной вперед).

Существует гипотеза, высказанная В. В. Козловым [9], что мера траекторий, которые при $t \rightarrow \pm\infty$ стремятся к неустойчивому равновесному состоянию $\theta = 0(\text{mod } 2\pi)$, равна нулю, и почти все траектории стремятся к $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \pi(\text{mod } 2\pi)$ (т.е. к падению широкой стороной вперед).

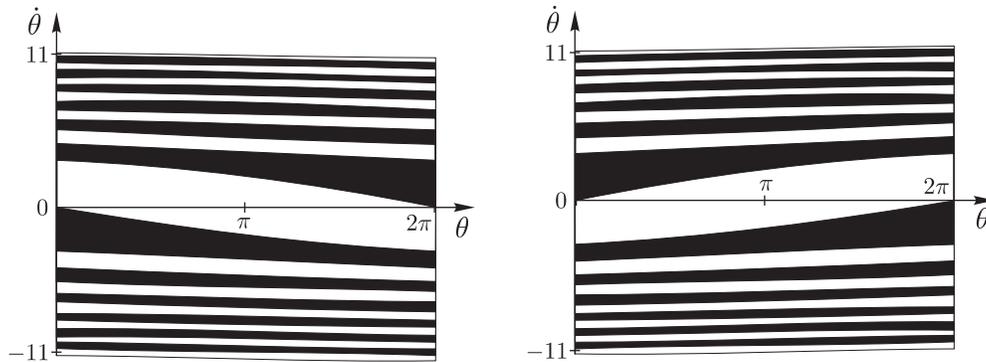


Рис. 3. Области на фазовой плоскости, соответствующие начальным условиям при $t_0 = 0$, при которых тело совершает одно и тоже количество полуоборотов при изменении t от 0 до $+\infty$ в случае а) и при изменении t от $-\infty$ до 0 в случае б) ($k = 1$, белый цвет соответствует четному числу полуоборотов, черный — нечетному).

3.3. Численный анализ

Опираясь на утверждение об асимптотическом поведении, можно выполнить численный анализ уравнения (3.2) [23]. Для этого на фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ (точнее, цилиндре $\theta \times \dot{\theta} \in [0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty)$) в начальный момент времени $t = t_0$ построим области, в пределах которых тело совершает одно и то же количество полуоборотов при $t \rightarrow +\infty$ (либо при $t \rightarrow -\infty$), прежде чем “притянется” к решению $\theta = \pi$. Как видно на рис. 3а, эти области располагаются регулярно, причем их ширина уменьшается при увеличении $|\dot{\theta}|$, так что при больших начальных $|\dot{\theta}|$ можно говорить лишь о вероятности того, что тело при $t \rightarrow +\infty$ будет падать “верхней” или “нижней” стороной. Границы областей заполнены начальными условиями, соответствующими движениям, асимптотически приближающимся к неустойчивым положениям равновесия $\theta = 0, 2\pi$. Аналогично можно построить области, соответствующие одинаковому количеству полуоборотов для $t \rightarrow -\infty$ (рис. 3б), причем области для $t \rightarrow +\infty$ и для $t \rightarrow -\infty$ оказываются зеркальным отражением относительно прямой $\theta = \pi$. При наложении этих областей их границы пересекаются в точках, расположенных на прямой $\theta = \pi$. Им соответствуют двоякоасимптотические решения уравнения (3.2) с различным количеством полуоборотов тела.

З а м е ч а н и е. На цилиндре $\theta \times \dot{\theta} \in [0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty)$ все границы областей склеиваются в одну гладкую кривую, аналогичную винтовой линии, шаг которой уменьшается при увеличении $|\dot{\theta}|$. По одну сторону от этой линии лежат области с четным числом полуоборотов, а по другую — с нечетным.

Таким образом, численные расчеты подтверждают гипотезу о том, что почти для всех решений $\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \pi$, причем в трехмерном пространстве $t, \theta, \dot{\theta}$ решения, асимптотически приближающиеся к неустойчивому равновесию $\theta = \pi$, заполняют двумерные поверхности. Кроме того, имеется также счетное множество двоякоасимптотических решений, отличающихся количеством полуоборотов, совершаемых при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$.

На рис. 4 приведены траектории тела, совершающего двоякоасимптотическое движение с одним и тремя полуоборотами.

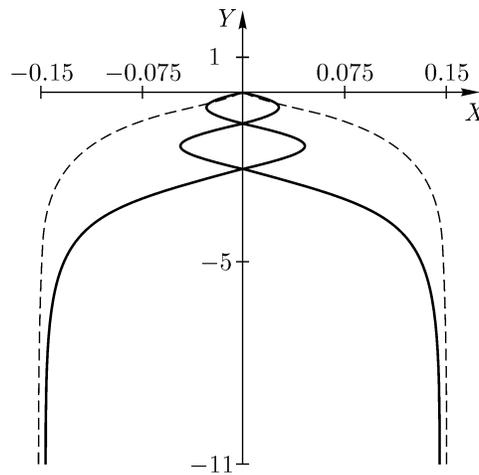


Рис. 4. Траектория тела в случае двоякоасимптотических решений с одним (пунктир) и тремя (сплошная линия) полуоборотами при $k > 0$, $a_3/\mu = 0.1$, в верхней точке траектории имеется особенность.

3.4. Траектория тела

Подставляя в уравнения (3.1) асимптотическое разложение для малых колебаний (3.4), после интегрирования получим асимптотическое представление для траектории движения в

форме

$$X(t) = A \frac{\cos(\sqrt{k}t^2/2 + \theta_0)}{\sqrt{t}} + O(t^{-3/2}), \quad Y(t) = -\mu c_2 t^2 + O(t^{-1/2}),$$

где A, θ_0 — некоторые постоянные. Следовательно, траектория движения при больших временах близка к синусоиде с постоянным шагом $\Delta y = \frac{\pi \mu c_2}{\sqrt{k}}$ и убывающей амплитудой [9]. (Шаг ΔY вычисляется между двумя последовательными нулями функции $X(t)$.) Характерная траектория показана на рис. 5.

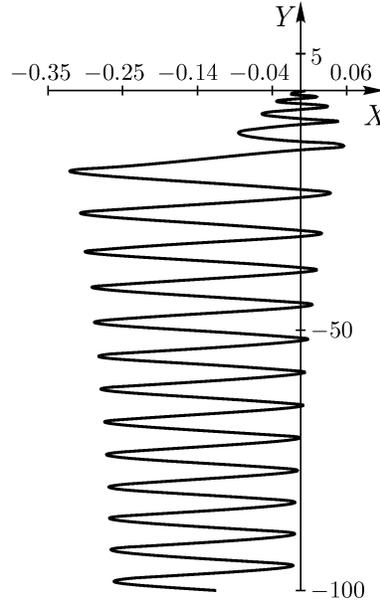


Рис. 5. Характерный вид траектории тела, падающего без начального толчка.

3.5. Общий случай ($P_1 \neq 0$)

Укажем теперь основные качественные особенности поведения системы (1.8), (3.1) в общем случае. Если $P_1 \neq 0$, то стационарных решений, аналогичных (3.3), уже не существует. В этом случае также справедливо утверждение об асимптотическом поведении, согласно которому для любого решения $\varphi(t)$ уравнения (1.8) выполняется

$$1. \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pi n \quad \text{либо} \quad 2. \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

По-видимому, также почти все решения уравнения стремятся к одному из решений $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (т.е. тело стремится к падению широкой стороной вниз) [9]. Это подтверждается численными экспериментами.

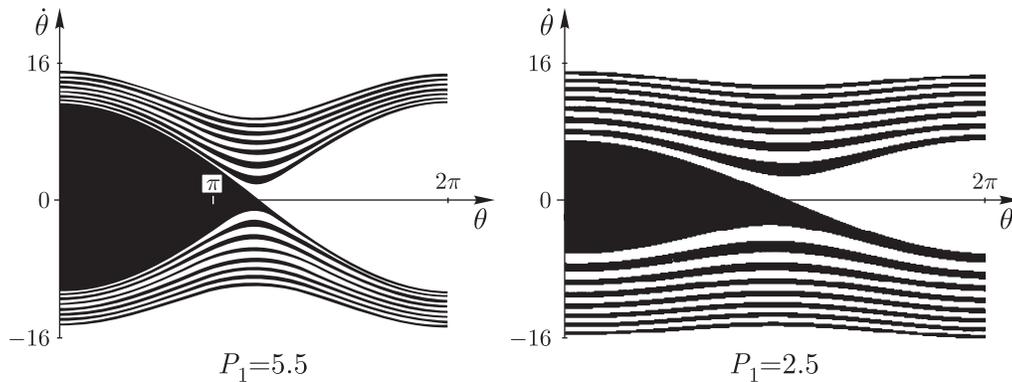


Рис. 6

Аналогично можно выполнить компьютерный анализ, рассматривая в начальный момент времени $t = t_0$ на фазовой плоскости области, которым соответствуют одинаковые количества полуоборотов, прежде чем траектория притянется к решению $\varphi = \frac{\pi}{2}$ при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 6). Границы этих областей заполнены асимптотическими решениями. Как и в случае $P_1 = 0$, области, соответствующие различному количеству полуоборотов при $t_0 = 0$ и $t \rightarrow -\infty$, оказываются симметричным отражением областей для $t_0 = 0$ и $t \rightarrow +\infty$ относительно прямой $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Точки пересечения границ областей при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ соответствуют двоякоасимптотическим решениям.

Характерный вид общей траектории тела, брошенного под углом к горизонту, приведен на рис. 7. На рис. 8 приведены траектории в случае двоякоасимптотических движений с одним и тремя полуоборотами тела.

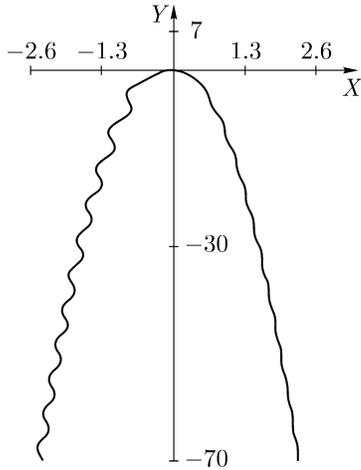


Рис. 7. Характерный вид траектории твердого тела, брошенного под углом к горизонту.

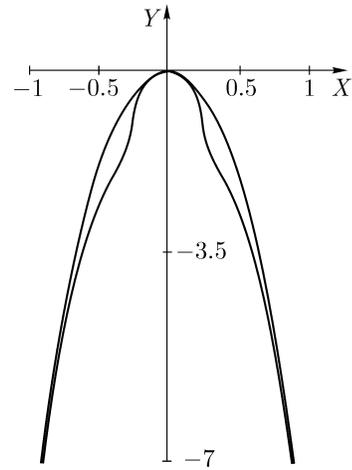


Рис. 8. Траектории тела для двоякоасимптотических движений с одним (верхняя кривая) и тремя полуоборотами.

Как показано в [9], в общем случае асимптотически траектория тела представляет собой параболу:

$$X(t) = -P_1 t + o(t), \quad Y(t) = -\frac{\mu t^2}{2c_3} + o(t^2).$$

4. Тело, обладающее тремя плоскостями симметрии

Как и выше (для плоскопараллельного движения), прежде чем изучать общую систему (1.6), рассмотрим подробно частный случай движения без начального толчка ($P_1 = 0$) при дополнительных ограничениях

$$\mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{r} = 0. \tag{4.1}$$

При этом получается неавтономная гамильтонова система (на $e(3)$) для \mathbf{M} , γ с гамильтонианом

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + \frac{1}{2}\mu^2 t^2 (\mathbf{C}\gamma, \gamma). \tag{4.2}$$

(В общем случае можно считать матрицу \mathbf{A} диагональной, а \mathbf{C} — произвольной симметричной.)

4.1. Стационарные (равновесные) решения и нормальные колебания

Уравнения движения системы (4.2) имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M} + \mu^2 t^2 \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{A}\mathbf{M} \quad (4.3)$$

и допускают простейшие решения вида

$$\mathbf{M} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma} = \pm \boldsymbol{\xi}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.4)$$

где $\boldsymbol{\xi}_i$ — собственные векторы матрицы \mathbf{C} (для вырожденной \mathbf{C} собственных векторов $\boldsymbol{\xi}_i$ бесконечно много).

Линеаризуя систему (4.3) вблизи решения (4.4), линейными преобразованиями координат можно привести уравнения движения к виду “нормальных колебаний”

$$\ddot{x}_k + t^2 \omega_k x_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad (4.5)$$

где x_k — подходящие локальные координаты вблизи неподвижных точек $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\xi}_i$. Решения системы (4.5) выражаются через функции Бесселя (см. (3.4)). Несложно показать, что если у \mathbf{C} все собственные числа различны, то локальному минимуму функции $V(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma})$ соответствует (асимптотически) устойчивое решение системы (4.5), асимптотика которого при больших t имеет вид (3.4). Локальный минимум определяется некоторым собственным вектором системы. Двум остальным собственным векторам соответствуют неустойчивые (уже в линейном приближении) решения.

4.2. Асимптотическое поведение решений

Оказывается, что, аналогично плоскопараллельному случаю, при произвольных начальных условиях вектор $\boldsymbol{\gamma}$ стремится к одному из собственных векторов матрицы \mathbf{C} . Действительно, в работе [11] показано, что для любого решения $\boldsymbol{\gamma}(t)$ уравнений (4.3)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \mathcal{E}_c,$$

где $V(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma})$, \mathcal{E}_c — критическое значение функции $V(\boldsymbol{\gamma})$.

Доказательство этого утверждения основано на представлении уравнений (4.3) в новом времени и в новых переменных. Выполним замену времени и переменных по формулам

$$\frac{1}{2}t^2 = \tau, \quad t\mathbf{M} = \mathbf{m},$$

в которых уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\tau} = -\frac{1}{2\tau}\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{A}\mathbf{m} + \mu^2 \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\tau} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{A}\mathbf{m}. \quad (4.6)$$

Несложно показать, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{2\tau}$, т. е. фактически система (4.6) описывает уравнения Кирхгофа с диссипацией, убывающей со временем. Рассмотрим энергию “невозмущенной” системы

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m}) + \frac{1}{2}\mu^2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}). \quad (4.7)$$

Вычисляя производную \mathcal{E} вдоль решений (4.6), находим

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = -\frac{(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m})}{2\tau}.$$

Из этого равенства легко следует, что

- 1) $\mathcal{E} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_* = \text{const}$;
- 2) интеграл $I = \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{(\mathbf{m}(\tau), \mathbf{A}\mathbf{m}(\tau))}{2\tau} d\tau$ сходится.

С физической точки зрения дальнейшее доказательство сводится к тому, чтобы показать, что $\mathcal{E}_* = \mathcal{E}_c$ — критическое значение формулы (4.7), а следовательно, и $V(\gamma)$. Оказывается, что предположение $\mathcal{E}_* \neq \mathcal{E}_c$ противоречит сходимости интеграла I .

Для падения произвольного тела, обладающего тремя плоскостями симметрии, также существует гипотеза [11], что для почти всех решений γ уравнений (4.3) $\mathcal{E}_* = \mathcal{E}_c^{\min}$. Таким образом, тело при $t \rightarrow \infty$ почти всегда стремится занять в пространстве такое положение, что ось, соответствующая максимальной присоединенной массе, становится вертикальной.

4.3. Компьютерный анализ

Сформулированное выше утверждение об асимптотическом поведении приводит к естественному вопросу: как в пространстве начальных условий устроены области, соответствующие различным асимптотическим режимам при $t \rightarrow \pm\infty$ (т. е. бассейны притяжения)? Выберем $t_0 = 0$, параметризуем совместный четырехмерный уровень интегралов

$$(\mathbf{M}, \gamma) = c = \text{const}, \quad \gamma^2 = 1 \quad (4.8)$$

переменными Андуайе (L, G, l, g) и зафиксируем поверхность начальных условий при $t_0 = 0$ уравнениями

$$g = g_0, \quad E = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) = \text{const}. \quad (4.9)$$

В зависимости от того, какой стороной падает при $t \rightarrow \infty$ тело, будем окрашивать точку на этой поверхности в соответствующий цвет. Типичная картина приведена на рисунках 9, 10.

Мы видим, что тело падает таким образом, что ось, соответствующая наибольшей присоединенной массе, вертикальна, т. е. либо одной широкой стороной вниз, либо другой, что подтверждает сформулированную выше гипотезу. При этом граница этих областей в общем случае устроена фрактально, т. е. при увеличении разрешения рисунок поверхности повторяется на все более мелких масштабах.

Таким образом, если использовать аналогию с интегрируемыми и неинтегрируемыми (регулярными и хаотическими) системами, можно плоскопараллельный случай назвать интегрируемым, а общий случай системы (4.2), (4.3) неинтегрируемым. Действительно, в плоскопараллельном случае границы областей, соответствующих различным расположениям тела, регулярны, а в системе (4.2), (4.3) — фрактальны. Мы покажем ниже, что если система (4.3) имеет еще один дополнительный интеграл (интеграл Лагранжа), границы областей также становятся регулярными.

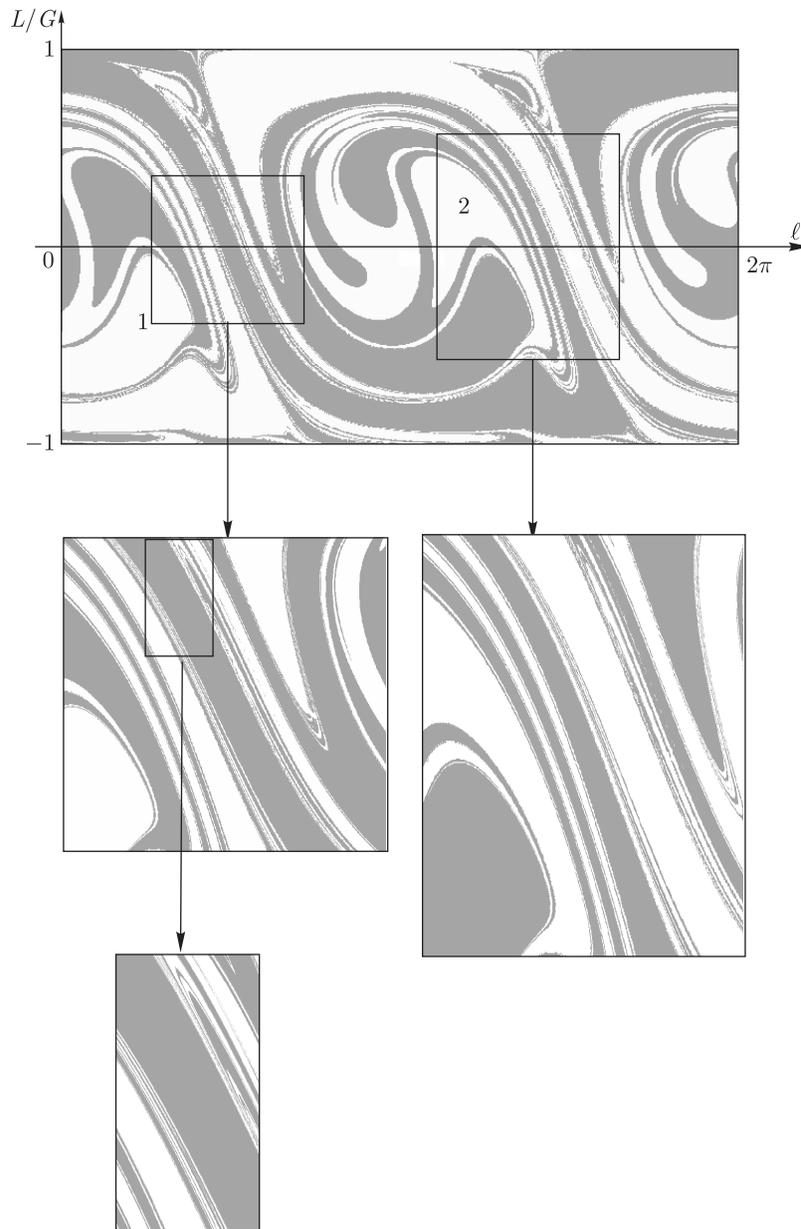


Рис. 9. Типичная картина областей, соответствующих двум различным предельным при $t \rightarrow +\infty$ положениям тела (в которых собственный вектор, отвечающий наибольшей присоединенной массе, вертикален — два цвета соответствуют двум его возможным направлениям). На четырехмерном уровне первых интегралов приведенная двумерная поверхность определяется уравнениями (4.8), (4.9). Значения параметров системы: $\mathbf{A} = \text{diag}(1.8, 1.5, 2)$, $\mathbf{C} = \text{diag}(0.5, 2.9, 1.4)$, $\mu = 1$, $(\mathbf{M}, \gamma) = 1$, $E_0 = 7$.

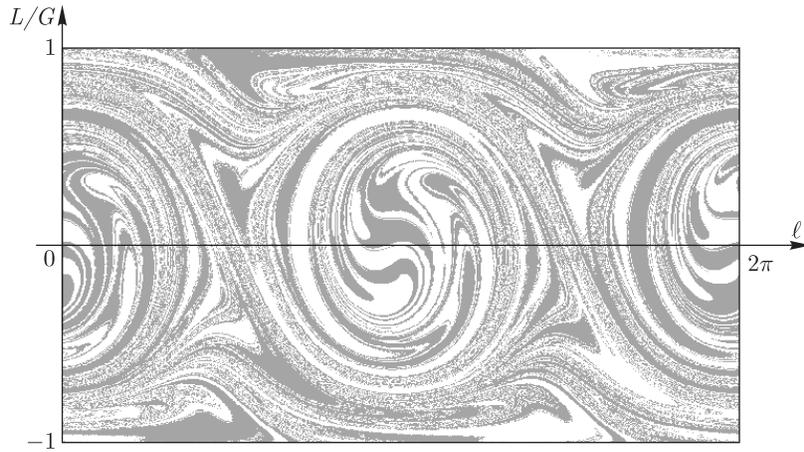
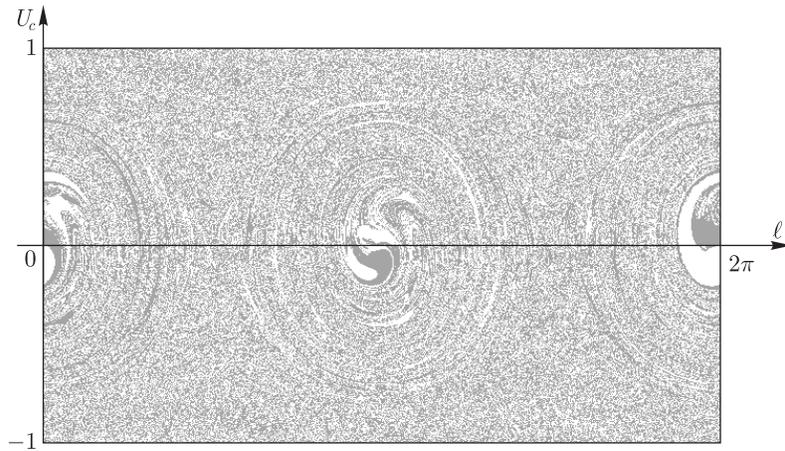
(a) $E_0 = 20, t_0 = 0.6$ (b) $E_0 = 70, t_0 = 0.3$

Рис. 10. Характерный вид разбиения поверхности начальных условий в соответствии с поведением системы при $t \rightarrow \infty$ при увеличении начальной энергии и начального момента t_0 . Значения параметров системы: $\mathbf{A} = \text{diag}(1.8, 1.5, 2)$, $\mathbf{C} = \text{diag}(0.5, 2.9, 1.4)$, $\mu = 1$, $(\mathbf{M}, \gamma) = 1$.

Фрактальная структура границ, разделяющих различные типы поведений при $t \rightarrow \infty$, тесно связана с вероятностными эффектами, возникающими при описании асимптотических движений. Действительно, при сложном распределении начальных условий, соответствующих различным типам асимптотического поведения, при конкретных (заданных) начальных условиях асимптотическое поведение становится непредсказуемым, и можно говорить лишь о вероятностном описании. Это своего рода вероятностный хаос, порожденный структурой начальных условий. Вероятностное описание было предложено А.И. Нейштадтом при изучении движения вокруг неподвижной точки твердого тела, находящегося под действием постоянного и линейного (по угловым скоростям) диссипативных моментов [14]. Оказалось, что при малых величинах этих моментов динамика системы имеет вероятностный характер, в работе [14] получены явные формулы для вероятностей, осуществляющих эволюцию системы к одному из равномерных вращений. Непосредственное перенесение аналитических результатов [14] на систему (4.3), (4.6) связано с существенными трудностями, обусловленными большей размерностью этой системы и зависимостью “параметра диссипации” ε от времени: $\varepsilon \sim \frac{1}{\tau}$.

З а м е ч а н и е. Поведение тяжелого тела в жидкости существенно отличается от его движения по инерции, описываемого уравнениями Кирхгофа. Последняя система в общем случае является неинтегрируемой [1, 12] и демонстрирует типичное хаотическое поведение (гамильтонов хаос) [2, 21].

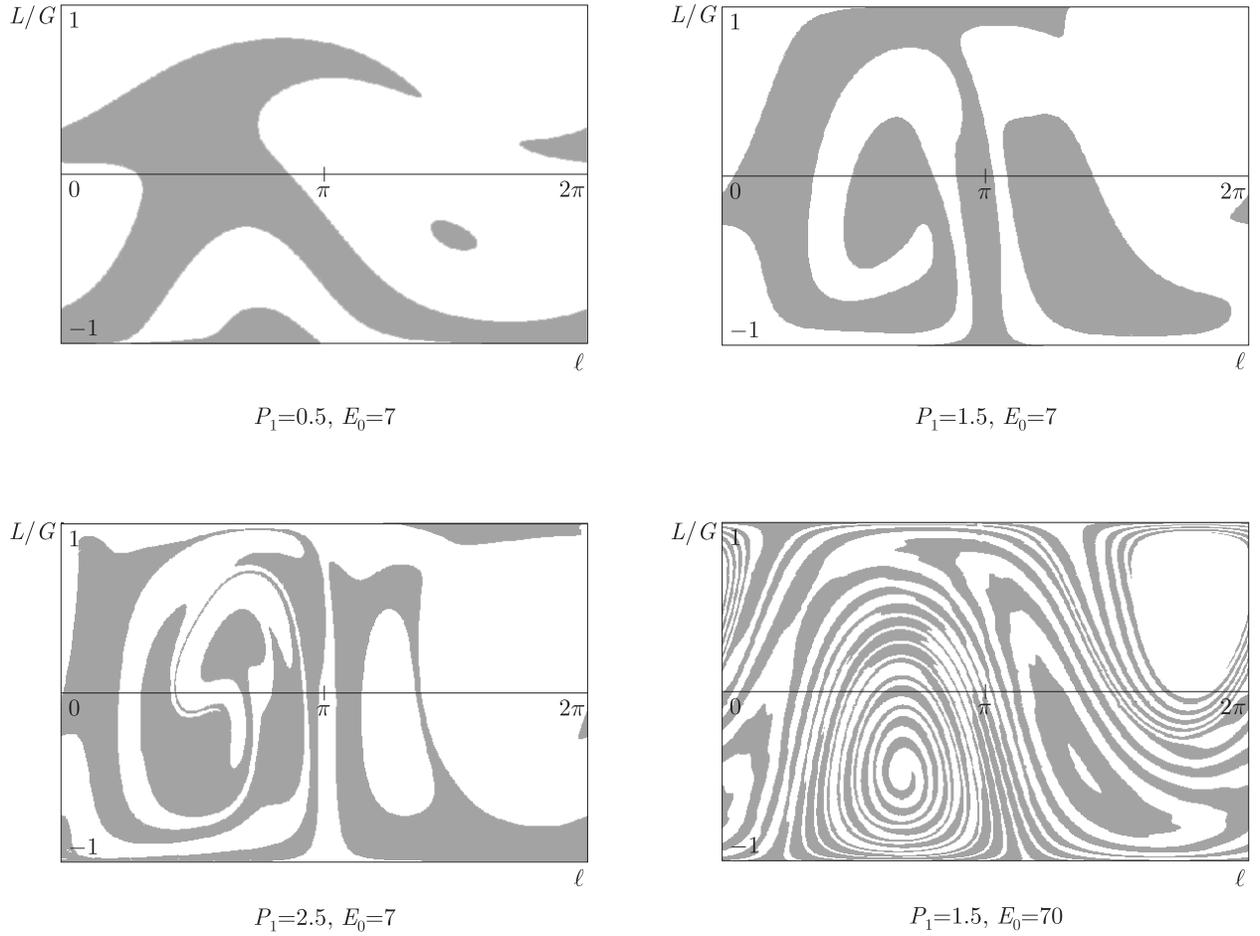


Рис. 11. Аналог случая Лагранжа, т. е. случай существования интеграла $M_3 = \text{const}$. Регулярная структура бассейна притяжения ($b_1 = 0.3$, $b_3 = 1.7$, $c_1 = 2.9$, $c_3 = 1.4$, $\mu = 1$).

5. Падение тела с винтовой симметрией. Решения Стеклова и их устойчивость

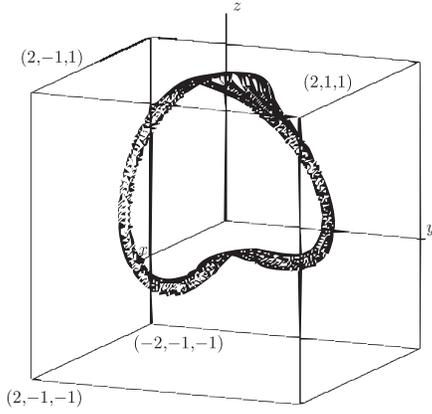
Для общего случая $P_1 \neq 0$, $\mathbf{V} \neq 0$ системы (1.6) после замен

$$\frac{1}{2}t^2 = \tau, \quad M = tm$$

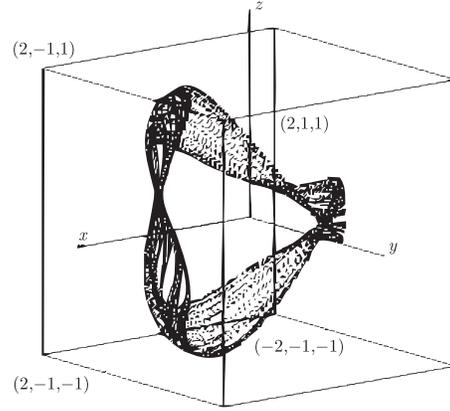
получим уравнения движения в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}}{d\tau} &= -\frac{1}{2\tau}\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{d\tau} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\tau} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}}, \\ H &= H_0 + \frac{1}{\sqrt{2\tau}}H_1 + \frac{1}{2\tau}H_2, \\ H_0 &= \frac{1}{2}(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m}) - \mu(\mathbf{B}\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{\mu^2}{2}(\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}), \\ H_1 &= P_1(\mathbf{B}\mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}) - P_1\mu(\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}), \quad H_2 = \frac{P_1}{2}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}) + \mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$B_{11}=8, B_{22}=0$$

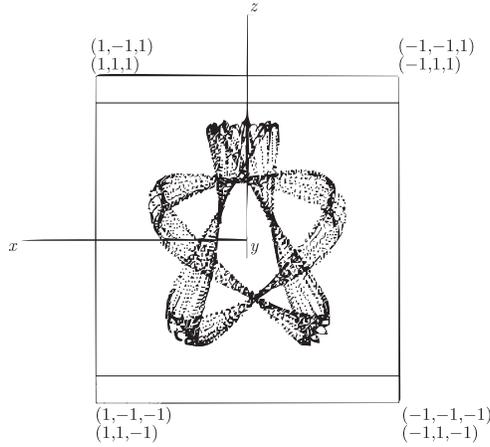


Начальная точка $g \approx 3.04$, $L/G \approx 0.62$



Начальная точка $g \approx 3.04$, $L/G \approx 0.62$

$$B_{11}=8, B_{22}=1$$



Начальная точка $g \approx 3.04$, $L/G \approx 0.62$

Рис. 12. Характерный вид предельных множеств в случае падения тела с винтовой симметрией ($A_{11} = 1$, $A_{22} = 1.2$, $A_{33} = 2$, $C_{11} = 1.6$, $C_{22} = 0.1$, $C_{33} = 0$, $P_1 = 0$, $\mu = 1$, $x = y = z = 0$, $E_0 = 3$, $g_0 = \frac{\pi}{2}$).

Теперь дифференцирование энергии вдоль системы дает

$$\frac{dH}{d\tau} = -\frac{(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m})}{2\tau} + \frac{1}{2\tau} \left(\mathbf{B}\mathbf{m}, \mu\boldsymbol{\gamma} - \frac{2P_1}{\sqrt{2\tau}}\boldsymbol{\alpha} \right) + \frac{W_1}{(2\tau)^{3/2}} + \frac{W_2}{(2\tau)^2}, \quad (5.2)$$

$$W_1 = -P_1\mu(\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}), \quad W_2 = P_1^2(\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + 2\mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Для этой системы уже не справедливы асимптотические закономерности движения, сформулированные в предыдущих разделах. Более того, существуют сложные притягивающие при $t \rightarrow \infty$ режимы движения, отличные от поступательных движений. Прежде всего рассмотрим условия устойчивости (при $\mathbf{B} \neq 0$) для частных решений уравнений (5.1), соответствующих равноускоренным вращениям, и найдем области значений параметров, при которых все они теряют устойчивость (и устойчивыми становятся более сложные режимы). В дальнейшем мы рассмотрим также случай нулевого начального толчка: $P_1 = 0$.

5.1. Линейная устойчивость решений Стеклова

При $P_1 = 0$ уравнения для \mathbf{m} , γ отделяются, а интеграл площадей представляется в форме

$$(\mathbf{m}, \gamma) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\tau}}, \quad \sigma = \text{const}, \quad (5.3)$$

т. е. $(\mathbf{M}, \gamma) = \sigma$.

Если, кроме того, $\mathbf{r} = 0$ и \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} одновременно диагонализуются, то уравнения (5.1) допускают частные решения, аналогичные стационарным решениям (4.4). В базисе собственных векторов матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} имеем

$$\gamma_k = \pm 1, \quad \gamma_i = \gamma_j = 0, \quad m_k = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2\tau}}, \quad m_i = m_j = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (5.4)$$

тогда всего имеется шесть частных решений. При этом тело падает таким образом, что его ось Oe_k остается вертикальной, а угловая скорость вращения вокруг нее определяется соотношением

$$\Omega^{(k)} = -\mu b_k t + \sigma a_k,$$

т. е. тело вращается равноускоренно. Скорость начала подвижной системы координат в подвижных осях определяется выражением $\mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = (\sigma \mathbf{B} - \mu t \mathbf{C}) \gamma$, откуда с помощью (1.2) находим

$$x_i = \text{const}, \quad x_j = \text{const}, \quad x_k = -\mu c_k \frac{t^2}{2} + \sigma b_k t + \text{const},$$

т. е. начало координат движется равномерно ускоренно вдоль вертикальной оси, как и при свободном падении тела. Эти равноускоренные движения были указаны В.А. Стекловым [18] (1895) и С.А. Чаплыгиным [20] (1900). В дальнейшем мы будем называть их решениями Стеклова.

По аналогии с решениями (4.4) решения (5.4) всегда неустойчивы во всем фазовом пространстве (по отношению к переменным \mathbf{M} , γ). Эта неустойчивость была указана В.А. Стекловым [18]. В то же время устойчивость по отношению к позиционным переменным γ зависит от параметров системы и требует отдельного рассмотрения.

Для исследования устойчивости решений (5.4) выберем новые переменные

$$v_i = \frac{d\gamma_i}{d\tau}, \quad v_j = \frac{d\gamma_j}{d\tau}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (5.5)$$

дополняя эти уравнения интегралом площадей (5.3), выразим переменные m_i , m_j , m_k через v_i , v_j , σ . Воспользовавшись соотношением $\gamma_k = \pm 1 \mp \frac{1}{2}(\gamma_i^2 + \gamma_j^2)$ вблизи решений (5.4), получим линеаризованные уравнения для новых переменных в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_i}{d\tau} &= v_i, \quad \frac{d\gamma_j}{d\tau} = v_j, \\ \frac{dv_i}{d\tau} &= -a_i^{-1} a_j \varkappa_i^{(k)} \gamma_i + a_i^{-1} a_j \mu (b_i - b_k + a_i (b_j - b_k)) v_j \\ &\quad + \frac{\sigma}{\sqrt{2\tau}} a_i^{-1} (\mu a_j a_k (b_i - b_k) \gamma_i + (a_i a_k + a_j a_k - a_i a_j) v_j) \\ &\quad - \frac{1}{2\tau} (v_i - \sigma^2 a_i^{-1} a_j a_k (a_k - a_i) \gamma_j + \mu (b_j - b_k) \gamma_j), \\ \frac{dv_j}{d\tau} &= \dots, \\ \varkappa_i^{(k)} &= \mu^2 (a_i (c_i - c_k) - (b_i - b_k)^2), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где выражение для $\frac{dv_j}{d\tau}$ получается сменой индексов $i \leftrightarrow j$.

Применяя теоремы из [4] о поведении решений линейных систем вида $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = (\mathbf{A} + \mathbf{V}(\tau)) \mathbf{x}$, где $\int_{\tau_0}^{\infty} |V'(\tau)| d\tau < \infty$ и $V(\tau) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, получим, что характеристические числа линейной системы (5.6) разлагаются по степеням $\tau^{-1/2}$

$$\lambda_k(\tau) = \lambda_k^{(0)} + \frac{\lambda_k^{(1)}}{\sqrt{\tau}} + \frac{\lambda_k^{(2)}}{\tau} + \dots,$$

и необходимыми условиями устойчивости системы (5.6) являются $\text{Re}\lambda_k^{(0)} \leq 0$ (аналогично, достаточными условиями неустойчивости являются $\text{Re}\lambda_k^{(0)} > 0$), где $\lambda_k^{(0)}$ — характеристические числа системы при $\tau = \infty$. Для их определения можно получить (биквадратный) характеристический полином

$$\lambda^4 - \lambda^2(\varkappa_i^{(k)} + \varkappa_j^{(k)} - \varkappa_k^{(k)}) + \varkappa_i^{(k)} \varkappa_k^{(k)} = 0. \quad (5.7)$$

Таким образом, необходимым условием устойчивости решений (5.4) является наличие у полинома (5.7) чисто мнимых корней (точнее, это условие отсутствия экспоненциальной по τ неустойчивости). Отсюда находим соответствующие ограничения на параметры

$$\begin{aligned} \varkappa_i^{(k)} \cdot \varkappa_j^{(k)} > 0, \quad \varkappa_i^{(k)} + \varkappa_j^{(k)} - \varkappa_k^{(k)} < 0, \\ D = (\varkappa_i^{(k)})^2 + (\varkappa_j^{(k)})^2 + (\varkappa_k^{(k)})^2 - 2\varkappa_i^{(k)} \varkappa_j^{(k)} - 2\varkappa_i^{(k)} \varkappa_k^{(k)} - 2\varkappa_j^{(k)} \varkappa_k^{(k)} > 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Исследуем теперь подробно устойчивость каждого из решений в зависимости от параметров. Без ограничения общности положим $k = 3$ и $\mu = 1$, $c_3 = 0$, $b_3 = 0$ (выполнения последних двух условий можно достичь с помощью интегралов $\gamma^2 = 1$ и $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = \text{const}$). Зафиксируем a_1, a_2, a_3, c_1, c_2 и построим на плоскости параметров b_1, b_2 области, в которых выполнены неравенства (5.8). В этом случае соотношения (5.8) принимают вид

$$\begin{aligned} (a_1 c_1 - b_1^2)(a_2 c_2 - b_2^2) > 0, \quad \Phi = a_1 c_2 + a_2 c_1 + 2b_1 b_2 > 0, \\ D = (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 + 4(a_1 b_2 + a_2 b_1)(c_2 b_1 + c_1 b_2) > 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Несложно показать, что имеются три качественно различных случая:

1. $c_3 = 0 > c_1 > c_2$ (т.е. $c_1 < 0$ и $c_2 < 0$); в этом случае на плоскости b_1, b_2 нет областей, в которых выполнены неравенства (5.8). Можно показать, что решения уравнения (5.7) разбиваются либо на две пары вещественных, либо на четверку комплексных.
2. $c_1 > c_3 = 0 > c_2$ (т.е. $c_1 > 0$ и $c_2 < 0$); в этом случае область, определяемая соотношениями (5.9), располагается между прямыми $b_1 = \pm\sqrt{a_1 c_1}$ и ветвями гиперболы, определяемой соотношением $D = 0$ (см. рис. 13a).
3. $c_1 > c_2 > c_3 = 0$ (т.е. $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$); в этом случае области, определяемые соотношениями (5.9), располагаются между прямыми $b_1 = \pm\sqrt{a_1 c_1}$, $b_2 = \pm\sqrt{a_2 c_2}$ и ветвями гиперболы $D = 0$ (см. рис. 13b).

З а м е ч а н и е. Несложно показать, что кривые $\Phi = 0$ и $D = 0$ пересекаются между собой в тех же точках, в которых они пересекают какую-либо из прямых $b_i = \pm\sqrt{a_i c_i}$.

Если $b_1 = b_2 = 0$, то условия (5.9) приводят к указанным выше [11], а именно: устойчивым оказывается лишь случай 3, когда ось, соответствующая максимально присоединенной массе, вертикальна. Таким образом, добавление матрицы \mathbf{V} позволяет стабилизировать (по крайней мере в линейном смысле) движение, при котором “средняя” ось является вертикальной, и не позволяет стабилизировать движение, при котором вертикальна “малая” ось.

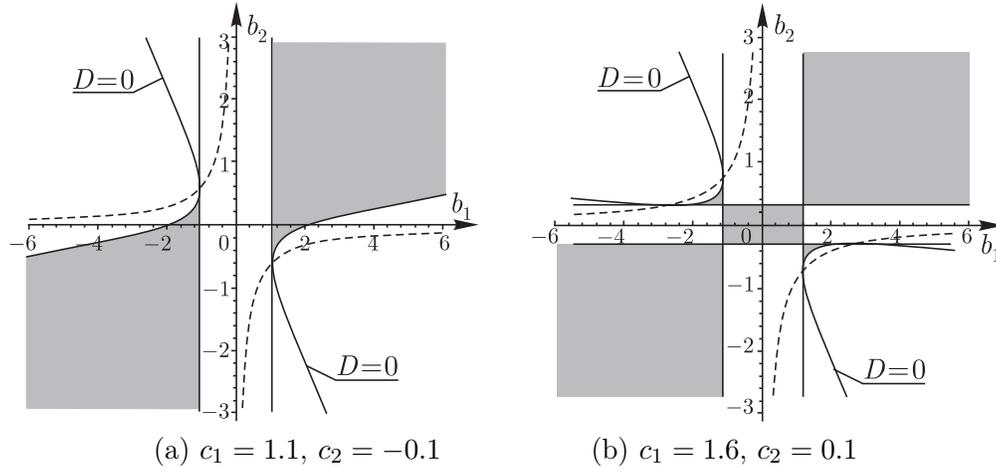


Рис. 13. Характерный вид областей на плоскости параметров b_1, b_2 (отмечены серым цветом), для которых выполнены необходимые условия устойчивости (5.9) решений Стеклова при различных соотношениях параметров матрицы \mathbf{C} , при этом $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 1.2, 2)$.

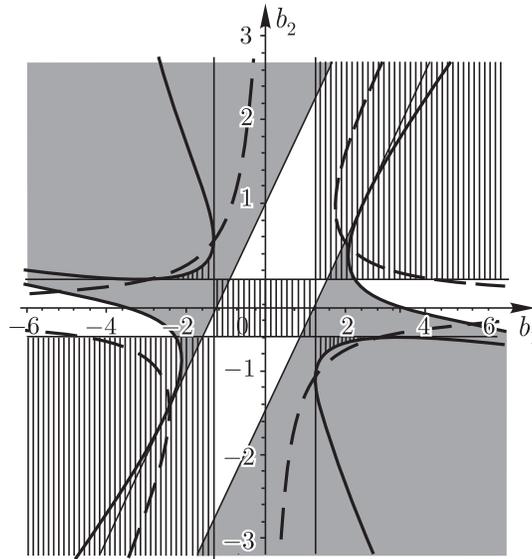


Рис. 14. Характерный вид областей устойчивости на плоскости параметров b_1, b_2 решений Стеклова, соответствующих падению “широкой” (т. е. собственный вектор в направлении максимальной присоединенной массы вертикален) и “средней” стороной вниз. $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 1.2, 2)$, $\mathbf{C} = \text{diag}(1.6, 0.1, 0)$.

Положим теперь для определенности $c_1 > c_2 > c_3 = 0$ и нанесем на плоскости параметров b_1, b_2 области (линейной) устойчивости решений Стеклова, соответствующих падению “широкой” и “средней” сторонами; см. рис. 14 (падению “узкой” стороной всегда неустойчиво). На рисунке хорошо видно, что имеются области, в которых все три решения Стеклова неустойчивы (отмечены белым цветом).

5.2. Об устойчивости по Ляпунову

Для одного из решений Стеклова (5.4), а именно, для случая, когда тело падает “широкой” стороной вниз, можно доказать асимптотическую устойчивость (по Ляпунову).

Согласно сказанному выше, без ограничения общности в (5.4) можно положить $i = 1, j = 2, k = 3$ и $b_3 = 0, c_1 > c_2 > c_3 = 0$. Функцию Ляпунова построим в виде

$$V = H_2 + \frac{1}{\tau} W,$$

где H_2 — квадратичная часть гамильтониана вблизи этого решения в переменных $\gamma_1, \gamma_2, v_1, v_2$, имеющая вид

$$H_2 = \frac{1}{2}(a_2^{-1}v_1^2 + a_1^{-1}v_2^2) + \frac{1}{2a_1}\left(a_1c_1 - b_1^2 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\tau}}a_3b_1 + \frac{\sigma^2}{4\tau^2}a_3(a_1 - a_3)\right)\gamma_1^2 + \frac{1}{2a_2}\left(a_2c_2 - b_2^2 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\tau}}a_3b_2 + \frac{\sigma^2}{4\tau^2}a_3(a_2 - a_3)\right)\gamma_2^2, \quad (5.10)$$

а функцию W будем искать в виде однородной квадратичной формы по $\gamma_1, \gamma_2, v_1, v_2$ с постоянными коэффициентами.

Легко видеть, что при больших τ функция H_2 , и, следовательно, Vh , положительно определена вблизи начала координат при условиях

$$a_1c_1 - b_1^2 > 0, \quad a_2c_2 - b_2^2 > 0. \quad (5.11)$$

Как было показано выше, эти неравенства задают одну из областей устойчивости рассматриваемого решения в линейном приближении (см. рис. 13b). Таким образом, для тех значений параметров, при которых удастся подобрать функцию V , производная которой вдоль решений линейной системы строго отрицательна (при достаточно больших τ), мы можем показать асимптотическую устойчивость в области, ограниченной неравенствами (5.11).

Производная функции V вдоль системы (5.6) имеет вид

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{1}{\tau}G_1 + \frac{1}{\tau^{3/2}}G_2 + \frac{1}{\tau^2}G_3,$$

где G_1, G_2, G_3 — однородные квадратичные формы по переменным $\gamma_1, \gamma_2, v_1, v_2$. Таким образом, при больших τ знак производной $\frac{dV}{d\tau}$ определяется квадратичной формой G_1 , которая в случае асимптотической устойчивости должна быть положительно определенной.

Прямым вычислением можно показать, что W необходимо выбрать в форме

$$W = k_1v_1\gamma_1 + k_2v_2\gamma_2,$$

тогда G_2 и G_3 не зависят от v_1, v_2 и

$$G_1 = 2k_1a_1^{-1}a_2(a_1c_1 - b_1^2)v_1^2 + 2k_2a_2^{-1}a_1(a_2c_2 - b_2^2)v_2^2 + a_2^{-1}(1 - 2a_2k_1)\gamma_1^2 + a_1^{-1}(1 - 2a_1k_2)\gamma_2^2 + \frac{1}{2}a_1^{-1}(b_1 - 2k_1(a_1b_2 + a_2b_1))\gamma_1v_2 - \frac{1}{2}a_2^{-1}(b_2 - 2k_2(a_1b_2 + a_2b_1))\gamma_2v_1. \quad (5.12)$$

Несложно получить условия положительной определенности формы G_1 :

$$0 < k_1 < \frac{1}{2a_2}, \quad 0 < k_2 < \frac{1}{2a_1},$$

$$-4(a_1b_2 + a_2b_1)^2k_1^2 - 16a_1a_2(c_1a_1 - b_1^2)k_1k_2 - b_1^2 + 4(2a_1a_2c_1 - a_2b_1^2 + a_1b_1b_2)k_1 > 0, \quad (5.13)$$

$$-4(a_1b_2 + a_2b_1)^2k_2^2 - 16a_1a_2(c_2a_2 - b_2^2)k_1k_2 - b_2^2 + 4(2a_1a_2c_2 - a_1b_2^2 + a_2b_1b_2)k_2 > 0.$$

Выделяются два случая:

1. $b_1 \cdot b_2 > 0$; тогда, выбирая $k_1 = \frac{1}{2}b_1(a_1b_2 + a_2b_1)^{-1}$, $k_2 = \frac{1}{2}b_2(a_1b_2 + a_2b_1)^{-1}$, мы получаем диагональную заведомо положительно определенную квадратичную форму (5.12).

2. $b_1 \cdot b_2 < 0$; в этом случае достаточные условия разрешимости неравенств (5.13) определяются решениями уравнения четвертой степени (и имеют достаточно громоздкий вид). В то же время, поскольку в двух последних соотношениях (5.13) лишь одно слагаемое положительно, можно получить необходимые условия разрешимости (5.13) в форме:

$$\Phi_1 = 2a_1a_2c_1 - a_2b_1^2 + a_1b_1b_2 > 0, \quad \Phi_2 = 2a_1a_2c_2 - a_1b_2^2 + a_2b_1b_2 > 0, \quad (5.14)$$

$$b_1b_2 > \max(-a_1c_2, -a_2c_1).$$

На рис. 15 серым цветом показана область, где выполнены необходимые условия (5.14). Как видно из рисунка, при $b_1 b_2 < 0$ область асимптотической устойчивости не совпадает со всей областью знакоопределенности квадратичной формы (5.10).

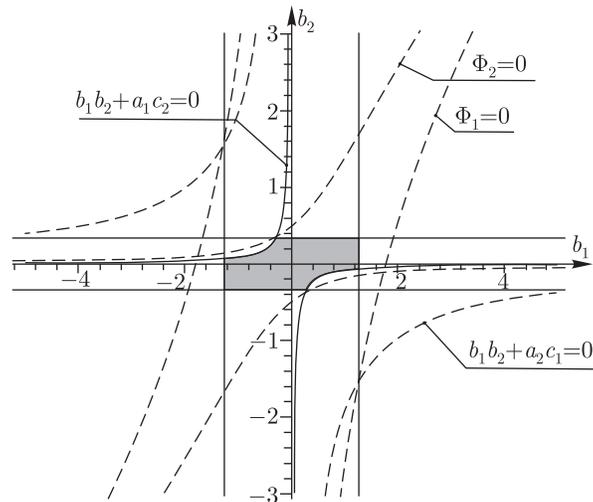


Рис. 15. Область асимптотической устойчивости решения Стеклова, соответствующего падению “широкой” стороной вниз при $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 1.2, 2)$, $\mathbf{C} = \text{diag}(1.6, 0.1, 0)$.

З а м е ч а н и е. Анализ устойчивости для решений Стеклова был выполнен в работах [6, 24] (в линейной и нелинейной постановках). В частности, получены условия (5.13) в виде общих неравенств на коэффициенты, без учета тех типов решений Стеклова, о которых сказано выше и соотношение устойчивости и неустойчивости между которыми может быть различным. Мы провели здесь геометрический анализ значений возможных параметров, при которых выполнены условия устойчивости (5.13), и сделали заключение о существовании области значений параметров, при которых все решения Стеклова являются неустойчивыми. В этом случае в фазовом пространстве существует более сложное инвариантное притягивающее множество типа двумерного тора (см. рис. 12), к которому стремятся траектории системы (5.1) при $t \rightarrow +\infty$. Аналитически существование этого инвариантного множества до сих пор не доказано, так как пока вообще не развита теория бифуркаций и качественные методы для систем типа (5.1), для которых линейная “диссипация” убывает во времени от значений параметра $\varepsilon \sim \frac{1}{\tau}$. В нашем анализе получены также более простые условия линейной устойчивости и устойчивости по Ляпунову вследствие систематического использования гамильтоновой формы уравнений движения.

Авторы благодарны К. Г. Тронину за проведенные компьютерные вычисления.

Поступила 25.11.05

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Борисов А.В.** Необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений Кирхгофа // Регулярная и хаотическая динамика. 1996. Т. 1, № 2. С. 61–73.
2. **Борисов А.В., Кирьянов А.И.** Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа. М.: МГУ. 1990. Сб. “Математические методы в механике”. С. 16–21.
3. **Борисов А.В., Мамаев И.С.** Случай Гесса в динамике твердого тела // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, № 2. С. 256–265.
4. **Борисов А.В., Мамаев И.С., Холмская А.Г.** Случай С.В.Ковалевской и новые интегрируемые системы динамики // Вестн. молодых ученых. Прикл. Мат. Мех., СПб. 2000. № 4. С. 13–25.
5. **Горячев Д.Н.** К вопросу о движении тяжелого тела в жидкости // Изв. Импер. об-ва любителей естествознания при Моск. Императ. Унив. 1893. Т. 78, № 2. С. 59–61.
6. **Дерябин М.В.** Об устойчивости равноускоренных вращений тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 30–34.
7. **Дерябин М.В., Козлов В.В.** Об эффекте “выныривания” тяжелого твердого тела в жидкости // Изв. РАН. МТТ. 2002, № 1. С. 68–74.
8. **Коддингтон Э.А., Левинсон Н.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ. 1958, 475 с. Пер. с англ.: **Coddington E.A., Levinson N.** Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill: New York-Toronto-London, 1955.
9. **Козлов В.В.** О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. Сер. Мех. тв. тела. 1989. № 5. С. 10–16.
10. **Козлов В.В.** О полиномиальных интегралах динамических систем с полутора степенями свободы // Мат. заметки. 1989. Т. 45, № 4. С. 46–52.
11. **Козлов В.В.** Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55, № 1. С. 12–19.
12. **Козлов В.В., Онищенко Д.А.** Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 6. С. 1298–1300.
13. **Ламб Г.** Гидродинамика. ОГИЗ, Гостехиздат. 1947, 928 с. Пер. с англ.: **Lamb H.** Hydrodynamics, ed. 6-th. N. Y. Dover publ., 1945.
14. **Нейштадт А.И.** Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // Изв. АН СССР. Сер. Мех. тв. тела. 1980. № 6. С. 30–36.
15. **Рамоданов С.М.** Асимптотика решений уравнений Чаплыгина // Вестн. МГУ. Сер. Мат. Мех. 1995. № 3. С. 93–97.
16. **Стеклов В.А.** Дополнения к сочинению “О движении твердого тела в жидкости”. Харьков, 1895.
17. **Стеклов В.А.** О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893. 234 с.
18. **Стеклов В.А.** О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости // Труды отд. физ. наук об-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1895. Т. 7. С. 1–40.
19. **Чаплыгин С.А.** Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости. Собр. соч. // М.-Л.: ГИТТЛ. 1948. Т. 1. С. 337–346. (Изд. 1-е: Труды отд. физ. наук об-ва любителей естествознания. 1903. Т. 11, вып. 2. С. 7–10.)
20. **Чаплыгин С.А.** О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости. Полн. собр. соч. // Л.: Изд-во АН СССР. 1933. Т. 1. С. 133–150.
21. **Aref H., Jones S.W.** Chaotic motion of a solid through ideal fluid // Phys. Fluids A. 1993. V. 5, no. 12. P. 3026–3028.
22. **Bertolli M.L., Bolotin S.V.** Doubly asymptotic trajectories of Lagrangian systems in homogeneous force fields // Ann. di Matem. pura ed. applicata. 1998 (IV). V. CLXXIV. P. 253–275.
23. **Deryabin M.V.** On asymptotics of Chaplygin equation // Reg. & Chaot. Dyn. 1998. V. 3, no. 1. P. 93–97.
24. **Deryabin M.V.** On stability of uniformly-accelerated motions of an axially-symmetric rigid body in an ideal fluid // Z. Angew. Math. Mech. 2003. V. 83, no. 3. P. 197–203.

УДК 517.988.68

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ РАВНОВЕСНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СО СВЯЗАННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ¹

Ф. П. Васильев, А. С. Антипин

Для решения неустойчивой задачи равновесного программирования, когда неточно заданы не только целевая функция, но и множество, определяемое связанными ограничениями типа неравенств, предлагаются методы регуляризации (стабилизации, невязки, квазиразрешений). Исследуется сходимость методов. Строится регуляризирующий оператор.

1. Постановка проблемы

Пусть W_0 — заданное множество из евклидова пространства E^n , функции $\Phi(v, w)$, $g_i(v, w)$, $i \in \overline{1, m}$, определены на прямом произведении $W_0 \times W_0$. Для каждого $v \in W_0$ введем множество

$$V(v) = \{w \in W_0 : g_i(v, w) \leq 0, i \in \overline{1, m}\}. \quad (1.1)$$

Рассмотрим следующую задачу равновесного программирования: найти точку v_* , удовлетворяющую условиям

$$v_* \in V(v_*), \Phi(v_*, v_*) \leq \Phi(v_*, w) \quad \forall w \in V(v_*). \quad (1.2)$$

Такую точку v_* будем называть *точкой равновесия* задачи (1.1), (1.2). Множество точек равновесия этой задачи будем обозначать через V_* .

Точку равновесия задачи (1.1), (1.2) можно определить несколько иначе. А именно, введем точечно-множественное отображение, которое каждой точке $v \in W_0$ ставит в соответствие множество

$$\underset{w \in V(v)}{\text{Argmin}} \Phi(v, w)$$

точек минимума целевой функции $\Phi(v, w)$ по переменной w на множестве $V(v)$. Такое отображение $v \rightarrow \underset{w \in V(v)}{\text{Argmin}} \Phi(v, w)$ называют *экстремальным отображением* задачи (1.1), (1.2).

Нетрудно видеть, что $v_* \in V_*$ тогда и только тогда, когда $v_* \in V(v_*)$ и является неподвижной точкой экстремального отображения, т.е. $v_* \in \underset{w \in V(v_*)}{\text{Argmin}} \Phi(v_*, w)$.

Если множество W_0 выпукло, функция $\Phi(v, w)$ дифференцируема и выпукла по переменной $w \in W_0$ при каждом фиксированном $v \in W_0$, $V(v)$ — выпуклое множество при каждом $v \in W_0$, то включение $v_* \in V_*$ равносильно условиям:

$$v_* \in V(v_*), \langle \nabla_w \Phi(v_*, v_*), w - v_* \rangle \geq 0 \quad \forall w \in V(v_*). \quad (1.3)$$

В [1–6] показано, что многие важные проблемы исследования операций, вычислительной математики, математической экономики сводятся к задаче (1.1), (1.2) или (1.3), предложены и исследованы методы их решения в предположении, что исходные данные $\Phi(v, w)$, $g_i(v, w)$ известны точно.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00242).

В настоящей работе будем предполагать, что вместо точных функций $\Phi(v, w)$, $g_i(v, w)$ известны их приближения $\Phi_\delta(v, w)$, $g_{i\delta}(v, w)$, зависящие от параметра погрешности $\delta > 0$. Множество W_0 будем считать известным точно.

Допустим, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} |\Phi_\delta(v, w) - \Phi(v, w)| &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} |g_{i\delta}(v, w) - g_i(v, w)| &= 0, \quad i \in \overline{1, m}, \quad \forall (v, w) \in W_0 \times W_0. \end{aligned}$$

Может показаться, что в качестве приближенного решения задачи (1.1), (1.2) при каждом $\delta > 0$ можно взять точку v_δ , определяемую условиями

$$\begin{aligned} v_\delta \in V_\delta(v_\delta) &= \{w \in W_0 : g_{i\delta}(v_\delta, w) \leq 0, \quad i \in \overline{1, m}\}, \\ \Phi_\delta(v_\delta, v_\delta) &\leq \Phi_\delta(v_\delta, w) \quad \forall w \in V_\delta(v_\delta), \end{aligned} \tag{1.4}$$

аналогичными с (1.1), (1.2), надеясь на то, что такие точки v_δ при $\delta \rightarrow 0$ будут приближаться к множеству V_* . Однако такой наивный подход лишь в редких случаях приводит к успеху. Нетрудно привести примеры задач, в которых задача (1.4) не имеет решения при любых сколь угодно малых $\delta > 0$; один из таких примеров см. в [7]. Это говорит о том, что задача (1.1), (1.2) неустойчива к возмущениям функций $\Phi(v, w)$, $g_i(v, w)$, $i \in \overline{1, m}$, и для надежного определения приближенного решения этой задачи нужно строить другие методы, использующие те же приближения $\Phi_\delta(v, w)$, $g_{i\delta}(v, w)$, $i \in \overline{1, m}$, и отличные от казалось бы естественного метода (1.4).

2. Методы регуляризации

Здесь возможно использование модификаций идей и методов регуляризации, применяемых для решения неустойчивых задач математического программирования [8–10]. В [7] были исследованы такие методы для задач равновесного программирования с точно заданным множеством, в [11–17] — с неточно заданным множеством, которое определено несвязанными ограничениями вида $g_i(w) \leq 0$, $i \in \overline{1, m}$, $g_i(w) = 0$, $i \in \overline{m+1, s}$; в [18, 19] были предложены и использованы модификации методов регуляризации для задачи равновесного программирования (1.1), (1.2) со связанными переменными при довольно сильных ограничениях на входные данные этой задачи. В настоящей статье эти методы обосновываются при существенно более слабых требованиях на задачу (1.1), (1.2).

Будем использовать простейшую штрафную функцию [9]

$$P(v, w) = \sum_{i=1}^m (g_i^+(v, w))^p, \quad (v, w) \in W_0 \times W_0, \quad p \geq 1; \quad g_i^+ = \max\{g_i; 0\}. \tag{2.1}$$

Пусть $\Omega(w)$ — какая-либо функция со следующими свойствами: $\Omega(w) \geq 0 \quad \forall w \in W_0$, множество $\Omega_C = \{w \in W_0 : \Omega(w) \leq C\}$ ограничено при всех C , при которых это множество непусто. Такую функцию $\Omega(w)$ будем называть *стабилизатором* задачи (1.1), (1.2). Например, возможно $\Omega(w) = |w|^2$. Предположим, что приближения $\Phi_\delta(v, w)$, $P_\delta(v, w)$, $\delta > 0$, для функций $\Phi(v, w)$, $P(v, w)$ таковы, что

$$\begin{aligned} &\max\{|\Phi_\delta(v, w) - \Phi(v, w)|; |P_\delta(v, w) - P(v, w)|\} \\ &\leq \delta(1 + \Omega(v)\Omega(w)) \quad \forall (v, w) \in W_0 \times W_0, \quad \delta > 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Перейдем к описанию методов регуляризации.

Метод стабилизации. Введем функцию

$$\begin{aligned} t_\delta(v, w) &= \Phi_\delta(v, w) + AP_\delta(v, w) + \alpha\Omega(v)\Omega(w), \\ (v, w) &\in W_0 \times W_0; \quad \alpha = \alpha(\delta) > 0, \quad A = A(\delta) > 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Будем искать точку v_δ , удовлетворяющую условиям:

$$v_\delta \in W_0, \quad t_\delta(v_\delta, v_\delta) \leq t_\delta(v_\delta, w) + \varepsilon \quad \forall w \in W_0; \quad \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0. \quad (2.4)$$

Метод невязки. Введем множество

$$V_\delta = \{v \in W_0 : \Phi_\delta(v, v) + AP_\delta(v, v) \leq \inf_{w \in W_0} [\Phi_\delta(v, w) + AP_\delta(v, w) + (\delta + \delta A)\Omega(v)\Omega(w)] + \sigma, \sigma = \sigma(\delta) > 0, A = A(\delta) > 0\}, \quad (2.5)$$

которое по аналогии с [7, 12, 14] можем назвать множеством невязок задачи (1.1), (1.2). Будем искать точку v_δ , удовлетворяющую условиям:

$$v_\delta \in V_\delta, \quad \Omega(v_\delta) \leq \inf_{w \in V_\delta} \Omega(w) + \mu, \quad \mu = \mu(\delta) > 0. \quad (2.6)$$

Метод квазирешений. Пусть известно число $r > 0$ такое, что

$$V_* \cap Q(r) \neq \emptyset, \quad (2.7)$$

где $Q(r) = \{w \in W_0 : \Omega(w) \leq r\}$. Будем искать точку v_δ , удовлетворяющую условиям

$$V_\delta \in Q(r), \quad \Phi_\delta(v_\delta, v_\delta) + AP_\delta(v_\delta, v_\delta) \leq \inf_{w \in W_0} [\Phi_\delta(v_\delta, w) + AP_\delta(v_\delta, w) + (\delta + \delta A)\Omega(v_\delta)\Omega(w)] + \xi, \quad \xi = \xi(\delta) > 0, \quad A = A(\delta) > 0. \quad (2.8)$$

Формальное описание методов регуляризации, которые будут исследованы ниже, закончено. Осталось указать требования на задачу (1.1), (1.2), условия согласования параметров этих методов с параметром погрешности δ , гарантирующих непустоту множеств $V_{*\delta}$ точек v_δ , удовлетворяющих условиям (2.4), (2.6), (2.8) соответственно, их близость ко множеству V_* решений задачи (1.1), (1.2) при малых $\delta > 0$.

3. Вспомогательные утверждения

Начнем с того, что сформулируем и кратко обсудим некоторые требования на задачу (1.1), (1.2), докажем несколько вспомогательных утверждений. Будем предполагать, что выполнено неравенство

$$g_i(w, w) - g_i(w, v) - g_i(v, w) + g_i(v, v) \geq 0 \quad \forall (v, w) \in W_0 \times W_0, \quad i \in \overline{1, m}, \quad (3.1)$$

которое, следуя [20], будем называть условием *положительной полуопределенности (кососимметричности)* функции $g_i(v, w)$ на множестве $W_0 \times W_0$. Кроме того, пусть функции $g_i(v, w)$ *симметричны*, т.е.

$$g_i(v, w) = g_i(w, v) \quad \forall (v, w) \in W_0 \times W_0, \quad i \in \overline{1, m}. \quad (3.2)$$

В [1, 21] показано, что широкие классы задач равновесного программирования после несложных преобразований могут быть сведены к задаче, в которой условия (3.1), (3.2) автоматически выполняются. Примеры функций, являющихся одновременно симметричными и положительно полуопределенными: $g(v, w) = |v|^q |w|^q$, $g(v, w) = -(v - w)^2 - 1$, $g(v, w) = v^T A w$, где A — $(n \times n)$ -матрица, $A = A^T$, $A \geq 0$; в [21] указан более общий класс таких функций.

Лемма 1. Пусть функции $g_i(v, w)$ симметричны и положительно полуопределены на $W_0 \times W_0$. Тогда штрафная функция $P(v, w)$, определенная формулой (2.1), также симметрична и положительно полуопределена на $W_0 \times W_0$ при всех $p \geq 1$.

Доказательство. Симметричность функции $P(v, w)$ очевидна. Покажем, что

$$P(v, v) - P(v, w) - P(w, v) + P(w, w) = P(v, v) - 2P(v, w) + P(w, w) \geq 0 \quad \forall (v, w) \in W_0 \times W_0,$$

или

$$P(v, w) \leq \frac{1}{2}(P(v, v) + P(w, w)) \quad \forall (v, w) \in W_0 \times W_0. \quad (3.3)$$

Для краткости обозначим $a = g_i(v, v)$, $b = g_i(v, w)$, $c = g_i(w, w)$, $G = a - 2b + c$, $G^+ = (a^+)^p - 2(b^+)^p + (c^+)^p$, где $z^+ = \max\{z, 0\}$. Покажем, что если $G \geq 0$, то $G^+ \geq 0$.

Воспользуемся неравенством

$$(a + c)^p \leq 2^{p-1}(a^p + c^p) \quad \forall a \geq 0, b \geq 0, p \geq 1, \quad (3.4)$$

которое может быть записано в виде $((a + c)/2)^p \leq (a^p + c^p)/2$ и вытекает из выпуклости функции $\varphi(x) = x^p$, $x \geq 0$, при $p \geq 1$. Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $G \geq 0$, то $a + c \geq 2b$. Отсюда и из (3.4) имеем: $a^p + c^p \geq (a + c)^p 2^{-(p-1)} \geq (2b)^p 2^{-(p-1)} = 2b^p$, что равносильно неравенству $G^+ \geq 0$ в случае, если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Пусть теперь $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \leq 0$. Тогда из $G \geq 0$ следует $a \geq 2b - c \geq 2b \geq 0$, $c^+ = 0$, поэтому $G^+ = a^p - 2b^p \geq (2b)^p - 2b^p = (2^p - 2)b^p \geq 0 \quad \forall p \geq 1$. Аналогично убеждаемся, что и при других возможных комбинациях знаков величин a , b , c из $G \geq 0$ следует $G^+ \geq 0$. Это значит, что если $g_i(v, v) - 2g_i(v, w) + g_i(w, w) \geq 0$, то $(g_i^+(v, v))^p - 2(g_i^+(v, w))^p + g_i^+(w, w))^p \geq 0 \quad \forall v \in W_0, w \in W_0$ при всех $p \geq 1$, $i \in \overline{1, m}$. Суммируя эти неравенства по i , приходим к (3.3). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть W_0 — выпуклое множество, функции $\Phi(v, w)$, $g_i(v, w)$, $i \in \overline{1, m}$, выпуклы по переменной $w \in W_0$ при каждом фиксированном $v \in W_0$, ограничения в (1.1) при каждом $v \in W_0$ удовлетворяют условию Слейтера [9], т.е. существует точка $\bar{w} = \bar{w}(v) \in V(v)$, для которой $g_i(v, \bar{w}) < 0$, $i \in \overline{1, m}$. Пусть множество V_* решений задачи (1.1), (1.2) непусто. Тогда для каждой точки $v_* \in V_*$ найдутся числа $c_i = c_i(v_*)$, $i \in \overline{1, m}$, такие, что

$$\Phi(v_*, v_*) \leq \Phi(v_*, w) + \sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v_*, w) \quad \forall w \in W_0. \quad (3.5)$$

Доказательство. Зафиксируем какую-либо точку $v_* \in V_*$ и рассмотрим задачу математического программирования

$$\Phi(v_*, w) \rightarrow \inf, \quad w \in V(v_*) = \{w \in W_0 : g_i(v_*, w) \leq 0, i \in \overline{1, m}\}.$$

В силу (1.2) v_* — решение этой задачи, а ее функция Лагранжа

$$L(v_*, w, \lambda) = \Phi(v_*, w) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(v_*, w), \quad w \in W_0, \quad \lambda \in E_+^m = \{\lambda \in E^m : \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0\}, \quad (3.6)$$

при сделанных предположениях имеет седловую точку $(v_*, \lambda^*) \in W_0 \times E_+^m$ [9], т.е.

$$L(v_*, v_*, \lambda) \leq L(v_*, v_*, \lambda^*) = \Phi(v_*, v_*) \leq L(v_*, w, \lambda^*) \quad \forall w \in W_0, \lambda \in E_+^m. \quad (3.7)$$

Отсюда и из неравенств

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad g_i \leq g_i^+, \quad i \in \overline{1, m}, \quad (3.8)$$

следует

$$\Phi(v_*, v_*) \leq \Phi(v_*, w) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(v_*, w) \leq \Phi(v_*, w) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i^+(v_*, w) \quad \forall w \in W_0.$$

Как видим, неравенство (3.5) справедливо при $c_i = \lambda_i^* = \lambda_i^*(v_*)$, $i \in \overline{1, m}$. Лемма доказана.

Наряду с функцией (3.6), введем еще одну функцию

$$L_0(v, w, \lambda) = \Phi(v, w) - \Phi(v, v) + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{2} [g_i(w, w) - g_i(v, v)], \quad v \in W_0, w \in W_0, \lambda \in E_+^m, \quad (3.9)$$

и будем предполагать, что эта функция имеет седловую точку в следующем смысле:

$$L_0(v, v_*, \lambda^*) \leq L_0(v_*, v_*, \lambda^*) = 0 \leq L_0(v_*, w, \lambda^*) \quad \forall v \in W_0, \forall w \in W_0; \quad (3.10)$$

в (3.10) подразумевается, что точки $v_* \in W_0$ и $\lambda^* \in E_+^m$ взяты из (3.7).

О п р е д е л е н и е. Скажем, что точка $(v_*, v_*, \lambda^*) \in W_0 \times W_0 \times E_+^m$ образует *двойное седло*, если она является седловой точкой двух функций (3.6) и (3.9) в смысле неравенств (3.7), (3.10).

Понятие двойного седла ранее было введено в [6] и использовалось при исследовании сходимости экстрапроксимального метода.

Приведем достаточные условия существования двойного седла. Предположим, что наряду с условиями (3.1), (3.2) выполнено условие положительной полуопределенности функции $\Phi(v, w)$:

$$\Phi(w, w) - \Phi(w, v) - \Phi(v, w) + \Phi(v, v) \geq 0, \quad \forall (v, w) \in W_0 \times W_0. \quad (3.11)$$

Покажем, что тогда точка (v_*, v_*, λ^*) , являющаяся седловой точкой функции (3.6) в смысле неравенств (3.7), будет седловой точкой функции (3.9) в смысле (3.10). С этой целью предварительно запишем правое и левое неравенства (3.10) в развернутой форме:

$$0 \leq \Phi(v_*, w) - \Phi(v_*, v_*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* (g_i(w, w) - g_i(v_*, v_*)) \quad \forall w \in W_0, \quad (3.12)$$

$$\Phi(v, v_*) - \Phi(v, v) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* (g_i(v_*, v_*) - g_i(v, v)) \leq 0 \quad \forall v \in W_0. \quad (3.13)$$

Из условий (3.1), (3.2) следует:

$$g_i(w, v) = g_i(v, w) \leq \frac{1}{2} (g_i(w, w) + g_i(v, v)) \quad \forall v \in W_0 \quad \forall w \in W_0, i \in \overline{1, m}. \quad (3.14)$$

В (3.11) и (3.14) положим $v = v_*$. Получим

$$\Phi(v_*, w) - \Phi(v_*, v_*) \leq \Phi(w, w) - \Phi(w, v_*) \quad \forall w \in W_0, \quad (3.15)$$

$$g_i(v_*, w) \leq \frac{1}{2} (g_i(w, w) + g_i(v_*, v_*)) \quad \forall w \in W_0, i \in \overline{1, m}. \quad (3.16)$$

Из правого неравенства (3.7) имеем

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^* (g_i(v_*, v_*) - g_i(v_*, w)) \leq \Phi(v_*, w) - \Phi(v_*, v_*) \quad \forall w \in W_0. \quad (3.17)$$

Из (3.16) и (3.17) следует

$$\begin{aligned} \Phi(v_*, w) - \Phi(v_*, v_*) &\geq \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \left(g_i(v_*, v_*) - \frac{1}{2} (g_i(w, w) + g_i(v_*, v_*)) \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* (g_i(v_*, v_*) - g_i(w, w)) \quad \forall w \in W_0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

что равносильно (3.12). Правое неравенство (3.10) доказано. Далее, из (3.15),(3.18) получаем

$$\Phi(w, w) - \Phi(w, v_*) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* (g_i(v_*, v_*) - g_i(w, w)) \quad \forall w \in W_0.$$

Поменяв в этом неравенстве w на v , придем к неравенству (3.13). Левое неравенство (3.10) также установлено. С учетом соотношений (3.8) и условия дополняющей нежесткости [9]

$$\lambda_i^* g_i(v_*, v_*) = 0, \quad i \in \overline{1, m},$$

преобразуем неравенства (3.12), (3.13) к удобному для дальнейших ссылок виду:

$$\Phi(v_*, v_*) - \Phi(v_*, w) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(w, w) \leq \sum_{i=1}^m c_i g_i^+(w, w) \quad \forall w \in W_0, \quad (3.19)$$

$$\Phi(v, v_*) - \Phi(v, v) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(v, v) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v, v) \quad \forall v \in W_0; \quad (3.20)$$

здесь, как и в (3.5), принято $c_i = \lambda_i^*$, $i \in \overline{1, m}$.

Таким образом, мы установили, что если выполнены условия (3.1),(3.2),(3.11) и (v_*, v_*, λ^*) — седловая точка функции (3.6), то она также является седлом функции (3.9), то есть образует двойное седло. Однако сразу заметим, что двойное седло может существовать и тогда, когда условие (3.11) не выполнено. Это можно показать на простейшем примере задачи (1.1),(1.2), когда

$$\Phi(v, w) = (w - v)(2w + v), \quad g(v, w) \equiv 0, \quad W = W_0 = [0, 1], \quad m = 1.$$

Здесь $v_* = 0$ — точка равновесия, в качестве λ^* можно взять любое число, например, $\lambda^* = 0$, $L(v, w, \lambda) = \Phi(v, w)$, $L_0(v, w, \lambda) = \Phi(v, w) - \Phi(v, v)$. Нетрудно проверить, что $(v_* = 0, v_* = 0, \lambda^* = 0)$ образует двойное седло. Между тем условие (3.11) положительной полуопределенности функции $\Phi(v, w)$ здесь не выполнено:

$$\Phi(w, w) - \Phi(w, v) - \Phi(v, w) + \Phi(v, v) = -(v - w)^2 < 0 \quad \forall v, w, \quad v \neq w.$$

Отметим, что условие (3.11) ранее широко использовалось при разработке и исследовании методов решения задач равновесного программирования [11–23]. Из вышесказанного следует, что, если в задаче (1.1), (1.2) вместо условия (3.11) будем требовать существование двойного седла, мы значительно расширим круг рассматриваемых задач. Проиллюстрируем это на примере методов регуляризации для задачи (1.1), (1.2). С этой целью приведем еще несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3. Пусть функция $P(v, w)$ определена согласно (2.1), $p \geq 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v, w) \leq AP(v, w) + BA^{-1/(p-1)} \quad \forall (v, w) \in W_0 \times W_0, \quad A \geq 0, \quad c = (c_1, \dots, c_m) \geq 0, \quad (3.21)$$

где $B = (p-1)p^{-p/(p-1)}|c|^{p/(p-1)}$, $|c| = \left(\sum_{i=1}^m (c_i^{p/(p-1)})\right)^{(p-1)/p}$ при $p > 1$, а при $p = 1$ в (3.21) считается, что $A^{-1/(p-1)} = 0$ по определению, $B = 0$, $A > |c|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} c_i$.

Доказательство. Если $p = 1$, $A > |c|_\infty$, то сразу имеем

$$\sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v, w) \leq |c|_\infty \sum_{i=1}^m g_i^+(v, w) \leq |c|_\infty P(v, w) \leq AP(v, w) \quad \forall (v, w) \in W_0 \times W_0.$$

Пусть $p > 1$. Тогда из известного неравенства

$$ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^r}{r} \quad \forall a \geq 0, b \geq 0, q > 1, r > 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

при $q = p, r = p/(p-1), a = (g_i^+(v, w))(pA)^{1/p}, b = c_i(pA)^{-1/p}$ имеем

$$ab = c_i g_i^+(v, w) \leq A(g_i^+(v, w))^p + c_i^{p/(p-1)}(pA)^{-1/(p-1)}(p-1)/p, \quad i \in \overline{1, m}.$$

Суммируя эти неравенства по i , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v, w) &\leq A \sum_{i=1}^m (g_i^+(v, w))^p + \sum_{i=1}^m c_i^{p/(p-1)} p^{-1/(p-1)-1} (p-1) A^{-1/(p-1)} \\ &= AP(v, w) + |c|^{p/(p-1)} (p-1) p^{-p/(p-1)} A^{-1/(p-1)} \quad \forall (v, w) \in W_0 \times W_0. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 2 и точки $v \in W_0, w \in W_0$ таковы, что

$$AP(v, w) \leq \sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v, w) + \beta, \quad \beta > 0, \quad A > 0, \quad (3.22)$$

где величины $c = (c_1, \dots, c_m)$ взяты из (3.5). Тогда при $p > 1$ справедлива оценка

$$0 \leq AP(v, w) \leq |c|^{p/(p-1)} A^{-1/(p-1)} + \frac{p}{p-1} \beta, \quad (3.23)$$

при $p = 1$ — оценка

$$0 \leq AP(v, w) \leq \frac{A\beta}{A - |c|_\infty}, \quad (3.24)$$

причем в (3.24) предполагается, что $A > |c|_\infty$.

Доказательство. Пусть сначала $p > 1$. Воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^q \right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{i=1}^m b_i^r \right)^{1/r}, \quad a \geq 0, b \geq 0, q > 1, r > 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

При $q = p, r = p/(p-1), a_i = g_i^+(v, w), b_i = c_i$ получим

$$\sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v, w) \leq \left(\sum_{i=1}^m [(g_i^+(v, w))^p] \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^m c_i^{p/(p-1)} \right)^{(p-1)/p} = (P(v, w))^{1/p} |c|.$$

Отсюда и из (3.22) имеем

$$AP(v, w) \leq |c|(P(v, w))^{1/p} + \beta.$$

Обозначим $z = (AP(v, w))^{1/p}$. Тогда последнее неравенство запишется в виде

$$z^p \leq |c|A^{-1/p}z + \beta.$$

Отсюда с помощью леммы 11 из [9, стр. 92] получаем оценку

$$0 \leq z \leq ((|c|A^{-1/p})^{p/(p-1)} + p/(p-1)\beta)^{1/p},$$

что равносильно (3.23).

Пусть теперь $p = 1, A > |c|_\infty$. Тогда из (3.23) имеем $AP(v, w) \leq |c|_\infty P(v, w) + \beta$. Отсюда следует, что

$$P(v, w) \leq \beta/(A - |c|_\infty),$$

что равносильно (3.24). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть множество W_0 , функции $g_i(v, w)$, $i \in \overline{1, m}$, удовлетворяют условиям леммы 2, W_0 — замкнутое множество, функции $g_i(v, w)$, $i \in \overline{1, m}$, непрерывны по совокупности переменных $(v, w) \in W_0 \times W_0$. Пусть последовательность $\{v_k\} \in W_0$, $\{v_k\} \rightarrow v_0$. Тогда $V(v_k) \neq \emptyset \forall k = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(v_k) = V(v_0), \quad (3.25)$$

где через $\lim_{k \rightarrow \infty} V(v_k)$ обозначено множество всех точек w , являющихся пределом какой-либо последовательности $\{w_k\}$, $w_k \in V(v_k)$, $\forall k \geq k_0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что при сделанных предположениях множество $V(v)$, определенное согласно (1.1), непусто при всех $v \in W_0$, так как оно удовлетворяет условию Слейтера.

Пусть $w_k \in V(v_k)$, $k = 1, 2, \dots$, и $\{w_k\} \rightarrow w_0$. Тогда $w_0 \in W_0$ в силу замкнутости W_0 . Из $g_i(v_k, w_k) \leq 0$ и непрерывности $g_i(v, w)$ следует, что $g_i(v_0, w_0) \leq 0$, $i \in \overline{1, m}$. Это означает, что $w_0 \in V(v_0)$. Тем самым показано, что $\lim_{k \rightarrow \infty} V(v_k) \subset V(v_0)$.

Докажем противоположное включение. Возьмем $\forall w_0 \in V(v_0)$ и положим $w_k = \alpha_k \bar{w} + (1 - \alpha_k)w_0$, где $\{\alpha_k\}$ какая-либо последовательность, $0 < \alpha_k \leq 1$, $\{\alpha_k\} \rightarrow 0$ (например, $\alpha_k = 1/k$, $k = 1, 2, \dots$), $\bar{w} = \bar{w}(v_0)$ — точка Слейтера множества $V(v_0)$, т.е. $\bar{w} \in W_0$, $g_i(v_0, \bar{w}) \leq -b_0 < 0$, $i \in \overline{1, m}$. Тогда $w_k \in W_0$ в силу выпуклости W_0 , а из выпуклости $g_i(v_0, w)$ по переменной w и из $w_0 \in V(v_0)$ следует, что

$$g_i(v_0, w_k) \leq \alpha_k g_i(v_0, \bar{w}) + (1 - \alpha_k)g_i(v_0, w_0) \leq -\alpha_k b_0, \quad i \in \overline{1, m}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

Убедимся, что

$$g_i(v_k, w_k) - g_i(v_0, w_k) \leq \frac{1}{2} \alpha_k b_0 \quad \forall k \geq k_0, \quad i \in \overline{1, m}, \quad (3.27)$$

где k_0 — достаточно большое число. Возьмем множество $X_0 = \{(v, w) \in W_0 \times W_0 : |v - v_0| \leq 1, |w - w_0| \leq |\bar{w} - w_0|\}$. Это множество замкнуто и ограничено, функция $g_i(v, w)$ непрерывна на X_0 . Следовательно, функция $g_i(v, w)$ равномерно непрерывна на X_0 . Тогда найдется номер k_0 такой, что $|v_k - v_0| \leq 1$ и $|g_i(v_k, w) - g_i(v_0, w)| \leq \frac{1}{2} \alpha_k b_0$ для всех $k \geq k_0$ и всех w , $|w - w_0| \leq |\bar{w} - w_0|$, $i \in \overline{1, m}$. В частности, это верно для $w = w_k$, откуда следует неравенство (3.27). Сложив (3.26), (3.27), получим

$$g_i(v_k, w_k) \leq -\frac{1}{2} \alpha_k b_0 \quad \forall k \geq k_0, \quad i \in \overline{1, m}.$$

Это означает, что $w_k \in V(v_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, для $\forall w_0 \in V(v_0)$ мы построили последовательность $\{w_k\} \rightarrow w_0$, $w_k \in V(v_k) \forall k \geq k_0$; при $1 \leq k \leq k_0$ в качестве w_k можно взять любую точку из $V(v_k)$. Это означает, что $V(v_0) \subset \lim_{k \rightarrow \infty} V(v_k)$. Равенство (3.25) доказано.

Лемма 6. Пусть выполнены условия леммы 2, W_0 — замкнутое множество, функции $\Phi(v, w)$, $g_i(v, w)$, $i \in \overline{1, m}$, непрерывны по совокупности переменных (v, w) на $W_0 \times W_0$. Тогда множество V_* решений задачи (1.1), (1.2) замкнуто.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $\{v_k\} \in V_*$, $\{v_k\} \rightarrow v_0$. Надо показать, что $v_0 \in V_*$. В силу (1.1), (1.2)

$$\Phi(v_k, v_k) \leq \Phi(v_k, w) \quad \forall w \in V(v_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

Для любой точки $w \in V(v_0)$ согласно лемме 5 существует последовательность $\{w_k\} \rightarrow w$, $w_k \in V(v_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Положим в (3.28) $w = w_k$. Получим $\Phi(v_k, v_k) \leq \Phi(v_k, w_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Отсюда при $k \rightarrow \infty$ имеем $\Phi(v_0, v_0) \leq \Phi(v_0, w) \forall w \in V(v_0)$, т.е. $v_0 \in V_*$. Лемма 6 доказана.

4. Сходимость метода стабилизации

Перейдем к исследованию сходимости методов (2.4), (2.6), (2.8). Сначала докажем сходимость метода стабилизации (2.4). Справедлива

Теорема 1. Пусть

(1) множество $W_0 \subset E^n$ выпукло и замкнуто, функции $\Phi(v, w)$, $g_i(v, w)$, $i \in \overline{1, m}$, непрерывны по совокупности переменных $(v, w) \in W_0 \times W_0$ и выпуклы по переменной $w \in W_0$ при каждом фиксированном $v \in W_0$, выполнено условие Слейтера (см. лемму 2); множество V_* решений задачи (1.1), (1.2) непусто; выполнены условия (3.1), (3.2); в задаче (1.1), (1.2) существует двойное седло;

(2) функция $\Omega(w)$, $w \in W_0$, является стабилизатором задачи (1.1), (1.2) и полунепрерывна сверху на W_0 ; штрафная функция $P(v, w)$ определена формулой (2.1);

(3) приближения $\Phi_\delta(v, w)$, $P_\delta(v, w)$ функций $\Phi(v, w)$, $P(v, w)$ удовлетворяют условиям (2.2);

(4) параметры $\alpha = \alpha(\delta) > 0$, $A = A(\delta) > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, $\delta > 0$, метода (2.4) таковы, что

$$\delta + \delta A(\delta) + (\alpha(\delta) + \delta + \delta A(\delta))(\Omega(v_*))^2 + B(A(\delta))^{-1/(p-1)} \leq \varepsilon(\delta), \quad (4.1)$$

где постоянная B взята из (3.21), а $v_* \in V_*$, $c = (c_1, \dots, c_m) = c(v_*)$ — из (3.5), и

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta A(\delta) = 0, \\ \sup_{\delta > 0} \frac{\delta + \delta A(\delta)}{\alpha(\delta)} < \frac{1}{3}, \quad \sup_{\delta > 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} < \infty, \quad \inf_{\delta > 0} \alpha(\delta)(A(\delta))^{\frac{1}{p-1}} > 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

(при $p = 1$ последнее условие не нужно, при этом требование $\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty$ можно заменить условием $A(\delta) = A > |c|_\infty$).

Тогда $V_{*\delta} \neq \emptyset \forall \delta > 0$, и при любом выборе $v_\delta \in V_{*\delta}$ справедливы равенства

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(v_\delta, V_*) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\Phi(v_\delta, v_\delta), \Phi_*) = 0, \quad (4.3)$$

где $\rho(x, X) = \inf_{y \in X} |x - y|$ — расстояние от точки x до множества X , $\Phi_* = \{\Phi = \Phi(v, v) : v \in V_*\}$, причем сходимость в (4.3) равномерна относительно выбора $\Phi_\delta(v, w)$, $P_\delta(v, w)$ из (2.2) и v_δ из $V_{*\delta}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что при сделанных предположениях множество $V_{*\delta} \neq \emptyset \forall \delta > 0$. Возьмем произвольную точку $v_* \in V_*$. Из (2.2), (2.3), (3.5), (3.21), (4.1), (4.2), равенства $P(v_*, v_*) = 0$ и условия $\Omega(w) \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} t_\delta(v_*, v_*) &= \Phi_\delta(v_*, v_*) + AP_\delta(v_*, v_*) + \alpha(\Omega(v_*))^2 \\ &\leq \Phi(v_*, v_*) + AP(v_*, v_*) + \alpha(\Omega(v_*))^2 + (\delta + \delta A)(1 + (\Omega(v_*))^2) \\ &\leq \Phi(v_*, w) + \sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v_*, w) + (\alpha + \delta + \delta A)(\Omega(v_*))^2 + \delta + \delta A \\ &\leq \Phi(v_*, w) + \delta(1 + \Omega(v_*)\Omega(w)) + AP(v_*, w) + BA^{-1/(p-1)} + (\alpha + \delta + \delta A)(\Omega(v_*))^2 + \delta + \delta A \\ &\leq \Phi_\delta(v_*, w) + AP_\delta(v_*, w) + \alpha\Omega(v_*)\Omega(w) + ((-\alpha + \delta + \delta A)\Omega(v_*)\Omega(w) \\ &\quad + BA^{-1/(p-1)} + (\alpha + \delta + \delta A)(\Omega(v_*))^2 + (\delta + \delta A)) \leq t_\delta(v_*, w) + \varepsilon \quad \forall w \in W_0. \end{aligned}$$

Это означает, что $v_* \in V_{*\delta}$, т.е. $V_* \subseteq V_{*\delta} \neq \emptyset \forall \delta > 0$.

Возьмем произвольные точки $v_* \in V_*$, $v_\delta \in V_{*\delta}$. С учетом (2.2), (2.4) имеем

$$\Phi(v_\delta, v_\delta) \leq \Phi(v_\delta, v_\delta) + AP(v_\delta, v_\delta) \leq \Phi(v_\delta, v_\delta) + AP(v_\delta, v_\delta) + \alpha\Omega^2(v_\delta)$$

$$\begin{aligned} &\leq \Phi_\delta(v_\delta, v_\delta) + AP_\delta(v_\delta, v_\delta) + \alpha\Omega^2(v_\delta) + (\delta + \delta A)(1 + \Omega^2(v_\delta)) \leq t_\delta(v_\delta, w) + \varepsilon + (\delta + \delta A)(1 + \Omega^2(v_\delta)) \\ &\leq \Phi(v_\delta, w) + AP(v_\delta, w) + \alpha\Omega(v_\delta)\Omega(w) + (\delta + \delta A)(1 + \Omega(v_\delta)\Omega(w)) + \varepsilon + (\delta + \delta A)(1 + \Omega^2(v_\delta)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

для всех $w \in W_0$. Положим в (4.4) $w = v_*$. С учетом неравенства $\Omega(v_\delta)\Omega(w) \leq \frac{1}{2}(\Omega^2(v_\delta) + \Omega^2(w))$ получим

$$\begin{aligned} &\Phi(v_\delta, v_\delta) + AP(v_\delta, v_\delta) + \alpha\Omega^2(v_\delta) \leq \Phi(v_\delta, v_*) + AP(v_\delta, v_*) \\ &+ ((\alpha + \delta + \delta A)/2)(\Omega^2(v_\delta) + \Omega^2(v_*)) + \delta + \delta A + \varepsilon + (\delta + \delta A)(1 + \Omega^2(v_\delta)). \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (3.3) при $v = v_\delta$, $w = v_*$, (3.20) при $v = v_\delta$, (3.21) при $v = w = v_\delta$ и равенства $P(v_*, v_*) = 0$ следует

$$\begin{aligned} &\Omega^2(v_\delta) \left[\alpha - \frac{1}{2}(\alpha + \delta + \delta A) - (\delta + \delta A) \right] = \Omega^2(v_\delta) \frac{1}{2} \left[\alpha - 3(\delta + \delta A) \right] \\ &\leq \Phi(v_\delta, v_*) - \Phi(v_\delta, v_\delta) + A(P(v_\delta, v_*) - P(v_\delta, v_\delta)) + \frac{1}{2}(\alpha + \delta + \delta A)\Omega^2(v_*) + 2(\delta + \delta A) + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v_\delta, v_\delta) + A \left[\frac{1}{2}(P(v_\delta, v_\delta) + P(v_*, v_*)) - P(v_\delta, v_\delta) \right] + \frac{1}{2}(\alpha + \delta + \delta A)\Omega^2(v_*) \\ &+ 2(\delta + \delta A) + \varepsilon = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v_\delta, v_\delta) - AP(v_\delta, v_\delta) \right] + \frac{1}{2}(\alpha + \delta + \delta A)\Omega^2(v_*) + 2(\delta + \delta A) + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{2} B A^{-\frac{1}{p-1}} + \frac{1}{2}(\alpha + \delta + \delta A)\Omega^2(v_*) + 2(\delta + \delta A) + \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.5)$$

или

$$\Omega^2(v_\delta) \leq \Omega^2(v_*) \frac{1 + \frac{\delta + \delta A}{\alpha}}{1 - 3\frac{\delta + \delta A}{\alpha}} + \frac{2\frac{\delta + \delta A + \varepsilon}{\alpha} + \frac{B}{\alpha A^{1/(p-1)}}}{1 - 3\frac{\delta + \delta A}{\alpha}} \quad \forall v_\delta \in V_{*\delta}, \quad \delta > 0. \quad (4.6)$$

Из (4.6) и условий (4.2) следует, что

$$\Omega^2(v_\delta) \leq R^2 = \text{const} \quad \forall v_\delta \in V_{*\delta} \quad \forall \delta > 0. \quad (4.7)$$

Далее, из неравенства (4.5) с учетом неотрицательности его левой части имеем

$$AP(v_\delta, v_\delta) \leq \sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v_\delta, v_\delta) + (\alpha + \delta + \delta A)\Omega^2(v_*) + 4(\delta + \delta A) + 2\varepsilon.$$

Это означает, что справедливо неравенство (3.23), где

$$v = w = v_\delta, \quad \beta = \beta(\delta) = (\alpha + \delta + \delta A)\Omega^2(v_*) + 4(\delta + \delta A) + 2\varepsilon,$$

причем $\lim_{\delta \rightarrow 0} \beta(\delta) = 0$ в силу (4.2). Отсюда и из оценок (3.22), (3.24) следует

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta)P(v_\delta, v_\delta) = 0. \quad (4.8)$$

Поскольку $\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty$, то это возможно лишь тогда, когда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} P(v_\delta, v_\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} g_i^+(v_\delta, v_\delta) = 0, \quad i \in \overline{1, m}. \quad (4.9)$$

Так как множество $\Omega_R = \{w \in W_0 : \Omega(w) \leq R\}$ ограничено в силу определения стабилизатора, то из оценки (4.7) следует, что семейство точек $\{v_\delta, \delta > 0\}$ при $\delta \rightarrow 0$ имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть v_0 — произвольная предельная точка этого семейства, пусть $v_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{\delta_k}$, где $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$. Покажем, что v_0 — решение задачи (1.1), (1.2).

Поскольку $v_\delta \in W_0$, множество W_0 замкнуто, то $v_0 \in W_0$. Из (4.9) следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} P(v_{\delta_k}, v_{\delta_k}) = P(v_0, v_0) = 0$. Это значит, что $g_i(v_0, v_0) \leq 0$, $i \in \overline{1, m}$, т.е. $v_0 \in V(v_0)$. Возьмем произвольную точку $w \in V(v_0)$. В силу леммы 5 существуют точки $w_k \in V(v_{\delta_k})$, $\{w_k\} \rightarrow w$. Тогда $g_i(v_{\delta_k}, w_k) \leq 0$, $i \in \overline{1, m}$, поэтому $P(v_{\delta_k}, w_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Отсюда и из неравенства (4.4) при $\delta = \delta_k$, $w = w_k$ с учетом оценки (4.7) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(v_{\delta_k}, v_{\delta_k}) &\leq \Phi(v_{\delta_k}, w_k) + \alpha(\delta_k)\Omega(w_k)R + (\delta_k + \delta_k A(\delta_k))(1 + R\Omega(w_k)) \\ &\quad + \varepsilon(\delta_k) + (\delta_k + \delta_k A(\delta_k))(1 + R^2), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$. Учитывая соотношения $\{v_{\delta_k}\} \rightarrow v_0$, $\{w_k\} \rightarrow w$, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Omega(w_k) \leq \Omega(w) < \infty$, условия (4.2) и непрерывность функции $\Phi(v, w)$, имеем: $\Phi(v_0, v_0) \leq \Phi(v_0, w) \quad \forall w \in V(v_0)$.

Таким образом, установлено, что произвольная предельная точка v_0 семейства $\{v_\delta, \delta > 0\}$ при $\delta \rightarrow 0$ такова, что $v_0 \in V_*$, $\Phi(v_0, v_0) \in \Phi_*$. Убедимся, что отсюда следуют равенства (4.3). В самом деле, пусть

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \rho(v_\delta, V_*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(v_{\delta_k}, V_*).$$

Поскольку $v_\delta \in \Omega_R$, множество Ω_R ограничено, то можем считать, что $\{v_{\delta_k}\} \rightarrow v_0$ при $k \rightarrow \infty$.

По доказанному, $v_0 \in V_*$. Тогда $\rho(v_{\delta_k}, V_*) \leq |v_{\delta_k} - v_0| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$0 \leq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \rho(v_\delta, V_*) \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \rho(v_\delta, V_*) \leq 0,$$

откуда следует первое из равенств (4.3). Второе равенство (4.3) доказывается аналогично.

Покажем, что пределы (4.3) равномерны относительно выбора $\Phi_\delta(v, w)$, $P_\delta(v, w)$ из (2.2), $v_\delta \in V_{*\delta}$, т.е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{(\Phi_\delta, P_\delta) \in A_\delta} \sup_{v \in V_{*\delta}} \rho(v, V_*) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{(\Phi_\delta, P_\delta) \in A_\delta} \sup_{v \in V_{*\delta}} \rho(\Phi(v, v), \Phi_*) = 0, \quad (4.10)$$

где через A_δ обозначено множество всех функций $\Phi_\delta(v, w)$, $P_\delta(v, w)$, удовлетворяющих условию (2.2). Пусть $\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \sup_{A_\delta} \sup_{V_{*\delta}} \rho(v, V_*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{A_{\delta_k}} \sup_{V_{*\delta_k}} \rho(v, V_*)$. По определению верхней грани для каждого номера k найдется точка $v_{\delta_k} \in V_{*\delta_k}$, соответствующая какой-либо реализации $(\Phi_{\delta_k}(v, w), P_{\delta_k}(v, w)) \in A_{\delta_k}$, такая, что

$$\sup_{A_{\delta_k}} \sup_{V_{*\delta_k}} \rho(v, V_*) \leq \rho(v_{\delta_k}, V_*) + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Из (4.3) при $\delta = \delta_k$ имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(v_{\delta_k}, V_*) = 0$. Отсюда и из (4.11) следует

$$0 \leq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \sup_{A_\delta} \sup_{V_{*\delta}} \rho(v, V_*) \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \sup_{A_\delta} \sup_{V_{*\delta}} \rho(v, V_*) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(v_{\delta_k}, V_*) = 0,$$

что доказывает первое из равенств (4.10). Второе равенство (4.10) устанавливается аналогично. Теорема 1 доказана.

При несколько более жестких требованиях можно уточнить характер сходимости метода (2.4). А именно, справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1)–(3) теоремы 1, стабилизатор $\Omega(w)$ непрерывен на W_0 , параметры $\alpha = \alpha(\delta)$, $A = A(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ метода (2.4), наряду с (4.2), удовлетворяют условиям

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta + \delta A(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} (A(\delta))^{\frac{1}{p-1}} \alpha(\delta) = +\infty \quad (4.12)$$

(при $p = 1$ последнее равенство не нужно) и множество $V_{*\delta} \neq \emptyset \forall \delta > 0$. Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(v_\delta, V_{**}) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\Phi(v_\delta, v_\delta), \Phi_{**}) = 0, \quad (4.13)$$

где $V_{**} = \{v \in V_* : \Omega(v) = \inf_{v \in V_*} \Omega(v)\}$, $\Phi_{**} = \{\Phi = \Phi(v, v) : v \in V_{**}\}$, причем сходимость в (4.13) равномерна относительно выбора Φ_δ, P_δ из (2.2), $v_\delta \in V_{*\delta}$.

Доказательство. При сделанных предположениях оценки (4.6), (4.7), равенства (4.3) сохраняют силу, и, как видно из доказательства теоремы 1, множество $V_* \cap \Omega_R \neq \emptyset$, где число R взято из (4.7). Поскольку множество V_* замкнуто в силу леммы 6, а множество Ω_R замкнуто и ограничено в силу перечисленных выше свойств стабилизатора $\Omega(w)$, то множество $V_* \cap \Omega_R$ также замкнуто и ограничено, и непрерывная функция $\Omega(w)$ на нем достигает своей нижней грани. Кроме того, нетрудно видеть, что $\inf_{w \in V_* \cap \Omega_R} \Omega(w) = \inf_{w \in V_*} \Omega(w)$. Отсюда следует, что $V_{**} \neq \emptyset$, $\Phi_{**} \neq \emptyset$.

Повторим доказательство теоремы 1, взяв в качестве v_* какую-либо точку из V_{**} . Тогда, пользуясь условиями (4.12) и оценкой (4.6), можем заключить, что каждая предельная точка v_0 семейства $\{v_\delta, \delta > 0\}$ при $\delta \rightarrow 0$ не только принадлежит множеству V_* , но и удовлетворяет неравенству $\Omega(v_0) \leq \Omega(v_*) = \inf_{v \in V_*} \Omega(v)$. Отсюда следует, что $\Omega(v_0) = \Omega(v_*)$, т.е. $v_0 \in V_{**}$. Тем самым показано, что все предельные точки семейства $\{v_\delta, \delta > 0\}$ при $\delta \rightarrow 0$ принадлежат множеству V_{**} . Отсюда вытекают равенства (4.13). Равномерная сходимость в (4.13) относительно выбора $(\Phi_\delta, P_\delta) \in A_\delta$, $v_\delta \in V_{*\delta}$ устанавливается так же, как в (4.10).

Заметим, что условие (4.1) в теореме 1 было использовано для обеспечения непустоты множества $V_{*\delta}$, но при доказательстве теоремы 1 оно нигде больше не использовалось. В теореме 2 выполнение условия (4.1) не предполагается. Дело в том, что неравенство (4.1) несовместимо со вторым равенством (4.12). Поэтому в формулировке теоремы 2 нам пришлось отказаться от условия (4.1) и заменить его явным требованием непустоты множества $V_{*\delta} \forall \delta > 0$.

5. Сходимость метода невязки

Докажем сходимость метода невязки (2.6).

Теорема 3. Пусть выполнены условия (1)–(3) теоремы 1 и параметры $\mu = \mu(\delta) > 0$, $\sigma = \sigma(\delta) > 0$, $A = A(\delta) > 0$ метода (2.6) таковы, что

$$\sup_{\delta > 0} \mu(\delta) < +\infty, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta A(\delta) = 0, \quad (5.1)$$

$$(\delta + \delta A(\delta))(2 + \Omega^2(v_*)) + B(A(\delta))^{-1/(p-1)} \leq \sigma(\delta) \quad \forall \delta > 0, \quad (5.2)$$

где постоянная B взята из (3.21), $v_* \in V_*$, $c = c(v_*)$ — из (3.5) (как и в (3.21), при $p = 1$ последнее слагаемое в левой части (5.2) отсутствует, и предполагается, что $A(\delta) = A > |c|_\infty$). Тогда множество $V_{*\delta}$ точек v_δ из (2.6) непусто при всех $\delta > 0$ и при любом выборе v_δ из $V_{*\delta}$ справедливы равенства (4.3):

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(v_\delta, V_*) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\Phi(v_\delta, v_\delta), \Phi_*) = 0, \quad (5.3)$$

причем сходимость в (5.3) равномерна относительно выбора $\Phi_\delta(v, w)$, $P_\delta(v, w)$ из (2.2) и v_δ из $V_{*\delta}$.

Доказательство. Сначала убедимся, что при сделанных предположениях множество $V_{*\delta} \neq \emptyset \forall \delta > 0$. Возьмем произвольную точку $v_* \in V_*$. Из (2.2), (3.5), (3.21), равенства $P(v_*, v_*) = 0$ и условия $\Omega(w) \geq 0$ имеем

$$\Phi_\delta(v_*, v_*) + AP_\delta(v_*, v_*) \leq \Phi(v_*, v_*) + AP(v_*, v_*) + (\delta + \delta A)(1 + \Omega^2(v_*))$$

$$\begin{aligned}
&\leq \Phi(v_*, w) + \sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v_*, w) + (\delta + \delta A)(1 + \Omega^2(v_*)) \\
&\leq \Phi(v_*, w) + AP(v_*, w) + BA^{-1/(p-1)} + (\delta + \delta A)(1 + \Omega^2(v_*)) \\
&\leq \Phi_\delta(v_*, w) + AP_\delta(v_*, w) + (\delta + \delta A)\Omega(v_*)\Omega(w) \\
&\quad + BA^{-1/(p-1)} + (\delta + \delta A)(2 + \Omega^2(v_*)) \quad \forall w \in W_0.
\end{aligned}$$

Отсюда, переходя к нижней грани по $w \in W_0$, с учетом условия (5.2) получаем, что $v_* \in V_\delta$. Это означает, что множество (2.5) непусто при всех $\delta > 0$. Существование точки v_δ , удовлетворяющей условиям (2.6), следует из определения нижней грани функции $\Omega(w) \geq 0$ на непустом множестве. Таким образом, $V_{*\delta} \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$.

Из $v_* \in V_{*\delta}$ и из (2.6) имеем

$$\Omega(v_\delta) \leq \Omega(v_*) + \mu(\delta) \leq \Omega(v_*) + \sup_{\delta > 0} \mu(\delta) = R \quad \forall v_\delta \in V_{*\delta} \quad \forall \delta > 0. \quad (5.4)$$

Возьмем произвольные точки $v_* \in V_*$, $v_\delta \in V_{*\delta}$. Из (2.2), (2.5) следует, что

$$\begin{aligned}
\Phi(v_\delta, v_\delta) + A(\delta)P(v_\delta, v_\delta) &\leq \Phi_\delta(v_\delta, v_\delta) + A(\delta)P_\delta(v_\delta, v_\delta) + (\delta + \delta A)(1 + \Omega^2(v_\delta)) \\
&\leq \Phi_\delta(v_\delta, w) + AP_\delta(v_\delta, w) + (\delta + \delta A)\Omega(v_\delta)\Omega(w) + \sigma(\delta) + (\delta + \delta A)(1 + R^2) \\
&\leq \Phi(v_\delta, w) + AP(v_\delta, w) + 2(\delta + \delta A)R\Omega(w) + \sigma(\delta) + (\delta + \delta A)(2 + R^2),
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\Phi(v_\delta, v_\delta) + A(\delta)P(v_\delta, v_\delta) &\leq \Phi(v_\delta, w) + AP(v_\delta, w) \\
&\quad + 2(\delta + \delta A)R\Omega(w) + \sigma(\delta) + (\delta + \delta A)(2 + R^2) \quad \forall w \in W_0, \quad \forall v_\delta \in V_{*\delta}, \quad \delta > 0. \quad (5.5)
\end{aligned}$$

Положим здесь $w = v_* \in V_* \subseteq V_{*\delta}$. Получим

$$\Phi(v_\delta, v_\delta) + A(\delta)P(v_\delta, v_\delta) \leq \Phi(v_\delta, v_*) + AP(v_\delta, v_*) + (\delta + \delta A)(2 + 3R^2) + \sigma(\delta),$$

или

$$A(\delta) [P(v_\delta, v_\delta) - P(v_\delta, v_*)] \leq [\Phi(v_\delta, v_*) - \Phi(v_\delta, v_\delta)] + (\delta + \delta A)(2 + 3R^2) + \sigma(\delta). \quad (5.6)$$

Далее, левую часть (5.6) оценим снизу, пользуясь неравенством (3.3) при $v = v_\delta$, $w = v_*$, правую часть (5.6) оценим сверху с помощью неравенства (3.20) при $v = v_\delta$. С учетом равенства $P(v_*, v_*) = 0$ будем иметь

$$A(\delta)P(v_\delta, v_\delta) \leq \sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v_\delta, v_\delta) + 2(\delta + \delta A)(2 + 3R^2) + 2\sigma(\delta).$$

Это означает, что выполнено условие (3.22) леммы 4 при $\beta = 2[\delta + \delta A(\delta)](2 + 3R^2) + 2\sigma(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Отсюда и из (3.23), (3.24) получим

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta)P(v_\delta, v_\delta) = 0. \quad (5.7)$$

Пользуясь оценкой (5.4), равенством (5.7), неравенством (5.5), аналогичным (4.7), (4.8), (4.4) соответственно, рассуждая также, как при доказательстве теоремы 1, убеждаемся в справедливости всех утверждений теоремы 3.

Несколько усилив условия (5.1), (5.2) согласования параметров, можно уточнить характер сходимости метода (2.6).

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 с заменой первого неравенства (5.1) и неравенства (5.2) соответственно на равенства

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta + \delta A(\delta)}{\sigma(\delta)} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} (A(\delta))^{1/(p-1)} \sigma(\delta) = +\infty \quad (5.8)$$

(при $p = 1$ последнее равенство не нужно). Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(v_\delta, V_{**}) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\Phi(v_\delta, v_\delta), \Phi_{**}) = 0$$

(обозначения V_{**} , Φ_{**} см. в (4.13)).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

6. Сходимость метода квазирешений

Наконец, исследуем сходимость метода квазирешений (2.8).

Теорема 5. Пусть выполнены условия (1)–(3) теоремы 1 и условие (2.7), пусть параметры $\xi = \xi(\delta) > 0$, $A = A(\delta) > 0$ метода (2.8) таковы, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \xi(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = +\infty, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta A(\delta) = 0, \\ (\delta + \delta A(\delta))(2 + r^2) + B(A(\delta))^{-1/(p-1)} \leq \xi(\delta) \quad \forall \delta > 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где постоянная B взята из (3.21) (как и в (3.21), при $p = 1$ последнее слагаемое в левой части (6.1) отсутствует, и предполагается, что $A(\delta) = A > |c|_\infty$), $c = c(v_*)$ — из (3.5) при $v_* \in V_* \cap Q(r)$. Тогда множество $V_{*\delta}$ точек v_δ из (2.8) непусто при всех $\delta > 0$ и при любом выборе $v_\delta \in V_{*\delta}$ справедливы равенства

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(v_\delta, V_* \cap Q(r)) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\Phi(v_\delta, v_\delta), \Phi_{*r}) = 0, \quad (6.2)$$

где Φ_{*r} — множество значений $\Phi(v, v)$, когда v пробегает множество $V_* \cap Q(r)$, причем сходимость в (6.2) равномерна относительно выбора $\Phi_\delta(v, w)$, $P_\delta(v, w)$ из (2.2) и точки v_δ из $V_{*\delta}$.

Доказательство. Покажем, что $V_{*\delta} \neq \emptyset \forall \delta > 0$. Возьмем произвольную точку $v_* \in V_* \cap Q(r)$. Из (2.2), (3.5), (3.21), (6.1) с учетом равенства $P(v_*, v_*) = 0$ и условия $\Omega(w) \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \Phi_\delta(v_*, v_*) + AP_\delta(v_*, v_*) \leq \Phi(v_*, v_*) + AP(v_*, v_*) + (\delta + \delta A)(1 + \Omega^2(v_*)) \\ & \leq \Phi(v_*, w) + \sum_{i=1}^m c_i g_i^+(v_*, w) + (\delta + \delta A)(1 + r^2) \leq \Phi(v_*, w) + AP(v_*, w) + BA^{-1/(p-1)} + (\delta + \delta A)(1 + r^2) \\ & \leq \Phi_\delta(v_*, w) + AP_\delta(v_*, w) + (\delta + \delta A)(1 + \Omega(v_*)\Omega(w)) + BA^{-1/(p-1)} + (\delta + \delta A)(1 + r^2) \\ & \leq \Phi_\delta(v_*, w) + AP_\delta(v_*, w) + (\delta + \delta A)\Omega(v_*)\Omega(w) + \xi(\delta) \quad \forall w \in W_0. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к нижней грани по $w \in W_0$, убеждаемся, что $v_* \in V_{*\delta}$. Следовательно, $V_{*\delta} \neq \emptyset \forall \delta > 0$.

Далее, возьмем произвольные точки $v_* \in V_*$, $v_\delta \in V_{*\delta}$. С учетом (2.2), (2.8) имеем

$$\begin{aligned} & \Phi(v_\delta, v_\delta) + AP(v_\delta, v_\delta) \leq \Phi_\delta(v_\delta, v_\delta) + AP(v_\delta, v_\delta) + (\delta + \delta A)[1 + \Omega^2(v_\delta)] \\ & \leq \Phi_\delta(v_\delta, w) + AP_\delta(v_\delta, w) + (\delta + \delta A)\Omega(v_\delta)\Omega(w) + \xi(\delta) + (\delta + \delta A)(1 + r^2) \end{aligned}$$

$$\leq \Phi(v_\delta, w) + AP(v_\delta, w) + 2(\delta + \delta A)\Omega(v_\delta)\Omega(w) + \xi(\delta) + (\delta + \delta A)(2 + r^2),$$

или

$$\Phi(v_\delta, v_\delta) + AP(v_\delta, v_\delta) \leq \Phi(v_\delta, w) + AP(v_\delta, w) + (\delta + \delta A)(2 + 2r\Omega(w) + r^2) + \xi(\delta) \quad \forall w \in W_0. \quad (6.3)$$

Положим здесь $w = v_*$. Получим

$$A(\delta)[P(v_\delta, v_\delta) - P(v_\delta, v_*)] \leq [\Phi(v_\delta, v_*) - \Phi(v_\delta, v_\delta)] + (\delta + \delta A)(2 + 3r^2) + \xi(\delta). \quad (6.4)$$

Заметим, что неравенства (6.3), (6.4) аналогичны (5.5), (5.6) соответственно, вместо оценки (5.4) здесь мы имеем неравенство $\Omega(v_\delta) \leq r$. Дальнейшее доказательство проводится так же, как в теоремах 1 и 3.

7. Заключение.

В заключение сделаем несколько общих замечаний:

1) Рассмотренные выше методы регуляризации определяют оператор R_δ , который каждому набору входных данных $\{\Phi_\delta(v, w), P_\delta(v, w), \delta\}$ из (2.2) и набору параметров этих методов $((\alpha(\delta), \varepsilon(\delta), A(\delta))$ — в методе (2.4), $(\mu(\delta), \sigma(\delta), A(\delta))$ — в методе (2.6), $(\xi(\delta), A(\delta))$ — в методе (2.8)) ставит в соответствие точку v_δ . Из теорем 1–5 вытекает, что такой оператор R_δ можно назвать, следуя [8], *регуляризирующим оператором* задачи (1.1), (1.2).

2) В качестве параметров методов (2.4), (2.6), (2.8) можно взять, например, степенные функции относительно $\delta > 0$. Так, например, в методе (2.4) можно взять

$$\alpha(\delta) = a_1\delta^{b_1}, \quad A(\delta) = a_2\delta^{-b_2}, \quad \varepsilon(\delta) = a_3\delta^{b_3}, \quad \delta > 0,$$

где a_i, b_i — положительные постоянные, которые выбираются так, чтобы выполнялись условия (4.1), (4.2) или (4.12).

3) Как известно [9], для широких классов задач оптимизации функция (2.1) при $p = 1$ является точной штрафной функцией. Теоремы 1–5 показывают, что и в задачах равновесного программирования это свойство штрафов (2.1) сохраняется: для получения близких к решению задачи (1.1), (1.2) приближений v_δ необязательно устремлять штрафной коэффициент $A(\delta)$ к бесконечности, а можно его взять достаточно большим и зафиксировать (например, так, чтобы $A(\delta) \equiv A > |c|_\infty$, где параметр $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ взят из (3.5)).

4) В теоремах 1–5 утверждения не зависят от способа определения точек v_δ , являющихся приближениями ко множеству V_* решений задачи (1.1), (1.2), и поэтому выше мы не касались конкретных методов определения точек v_δ . Заметим, что для поиска точек v_δ могут быть использованы любые подходящие методы в зависимости от свойств функций $\Phi(v, w)$, $g_i(v, w)$, $P(v, w)$ и их приближений, от структуры множеств $W_0, W, V(\delta), Q(r)$ [1–6], [20–23]. Метод невязки (2.6) удобно применять, когда известна величина $\Phi(v_*, v_*)$ для какой-либо точки $v_* \in V_*$ или оценка $\Phi(v_*, v_*) + \sigma(\delta)$ этой величины, и тогда вместо (2.5) можно взять множество $V_\delta = \{v \in W_0 : \Phi_\delta(v, v) + A(\delta)P_\delta(v, v) \leq \Phi(v_*, v_*) + \sigma(\delta)\}$. Если величина $\Phi(v_*, v_*)$ или ее оценка заранее не известны, то для формирования множества (2.5) предварительно придется определить какую-либо точку равновесия функции $\Phi_\delta(v, w) + A(\delta)P_\delta(v, w) + (\delta + \delta A)\Omega(v)\Omega(w)$ на множестве W_0 .

5) В основе изложенных выше методов регуляризации лежит характерная для каждого из них априорная информация. В методе (2.4) предполагается, что $V(v) \neq \emptyset \forall v \in W_0, V_* \neq \emptyset$ и существует стабилизатор $\Omega(w)$, удовлетворяющий условиям (2.2); в методе невязки и квазирешений наряду с этой информацией дополнительно требуется знание величины $\Phi(v_*, v_*) + \sigma(\delta)$ для метода невязки и величины r со свойством $\Omega(v_*) \leq r$ для метода квазирешений, где v_* — какая-либо точка $v_* \in V_*$. При отсутствии указанной априорной информации формальное применение изложенных методов может привести к результатам, не имеющим отношения к задаче (1.1), (1.2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Антипин А.С.** Методы решения вариационных неравенств со связанными ограничениями // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 2000. Т. 40, № 9. С. 1291–1307.
2. **Antipin A.S.** A gradient-type method for the equilibrium programming problem with coupled constraints // Yugoslav Journal of Operations Research. 2000. Vol. 10. P. 163–184.
3. **Antipin A.S.** Extragradient approach to the solution of two person nonzero-sum games // Optimization and Optimal Control/ P.M. Pardalos, I. Tsevendorij and R. Enkhbat (Eds.). World Scientific Publishing Co. 2003. P. 1–28.
4. **Antipin A.S.** Controlled differential equations for solving two-person nonzero-sum games with coupled constraints // Proceedings of Dynamic Systems and Applications. 2004. Vol. 4. P. 39–46.
5. **Антипин А.С.** Экстрапроксимальный метод решения равновесных и игровых задач // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 2005. Т. 45, № 11. С. 1974–1995.
6. **Антипин А.С.** Экстрапроксимальный метод решения равновесных и игровых задач со связанными переменными // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 2005. Т. 45, № 12. С. 2102–2111.
7. **Васильев Ф.П., Антипин А.С.** Методы регуляризации поиска неподвижной точки экстремальных отображений // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15: Вычисл. матем. и киберн. 1998. № 1. С. 11–24.
8. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
9. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
10. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
11. **Антипин А.С., Васильев Ф.П.** Методы стабилизации для решения задач равновесного программирования с неточно заданным множеством // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 1999. Т. 39, № 11, С. 1779–1786.
12. **Антипин А.С., Васильев Ф.П.** Методы невязки для решения равновесных задач с неточно заданным множеством // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 2001. Т. 41, № 1. С. 3–8.
13. **Антипин А.С., Васильев Ф.П.** Метод квазирешений для решения равновесных задач с неточно заданным множеством // Вестн. Российского ун-та Дружбы народов. Сер. математика. 2001. № 8(2). С. 10–16.
14. **Антипин А.С., Васильев Ф.П.** Методы регуляризации для решения задач равновесного программирования с неточными входными данными, основанные на расширении множества // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 2002. Т. 42, № 8. С. 1158–1165.
15. **Антипин А.С., Васильев Ф.П.** Регуляризованный метод с прогнозом для решения вариационных неравенств с неточно заданным множеством // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 2004. Т. 44, № 5. С. 796–804.
16. **Антипин А.С., Васильев Ф.П., Шпирко С.В.** Регуляризованный экстраградиентный метод решения задач равновесного программирования с неточно заданным множеством // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 2005. Т. 45, № 4. С. 650–660.
17. **Антипин А.С., Васильев Ф.П., Делавархалафи А.** Методы регуляризации со штрафными функциями для поиска точек равновесия Нэша в билинейной игре двух лиц с ненулевой суммой // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 2005. Т.45. № 5. С.813–823.
18. **Antipin A.S., Vasil'ev F.P.** Stabilization method for unstable equilibrium programming problems with coupled constraints // Journal of Mathematical Sciences. Kluwer. 2003. Vol. 116, No. 6. P. 3673–3682
19. **Антипин А.С., Васильев Ф.П.** Методы регуляризации для решения неустойчивых задач равновесного программирования со связанными ограничениями // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 2005. Т. 45, № 1. С. 27–40.
20. **Антипин А.С.** О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 1995. Т. 35, № 5. С. 688–704.
21. **Антипин А.С.** Расщепление градиентного подхода для решения экстремальных включений // Журн. вычисл. математики и матем. физ. 1998. Т. 38, № 7. С. 1118–1132.
22. **Антипин А.С.** Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании. М.: ВЦ РАН, 2002.
23. **Антипин А.С.** Метод Ньютона для решения равновесных и игровых задач// Нелинейная динамика и управление. Выпуск 3. М.: Физматлит, 2003. С. 123–138.

УДК 517.983.54

**АППРОКСИМАЦИЯ НЕГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ
ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ¹****В. В. Васин**

В многомерном случае для тихоновской регуляризации предложены два новых семейства стабилизаторов, которые содержат нормы пространств Липшица и нормы пространств Соболева с дробными производными. Установлены теоремы сходимости регуляризованных по Тихонову приближенных решений и их дискретных аппроксимаций. На примере интегрального уравнения Фредгольма первого рода дано детальное исследование всех этапов разрешающего алгоритма.

1. Введение

В качестве основной модели некорректно поставленной задачи рассматривается линейное операторное уравнение

$$Au = f \quad (1)$$

на паре линейных нормированных пространств U, F с разрывным, в общем случае, многозначным оператором A^{-1} и приближенными данными f_δ , $\|f - f_\delta\| \leq \delta$. Хотя наиболее полные результаты, представленные в статье, получены для линейного оператора, некоторые утверждения справедливы также для нелинейного оператора A , что особо оговаривается при формулировке соответствующих теорем.

Таким образом, речь идет о типичной некорректно поставленной задаче, следовательно, при построении устойчивых аппроксимаций для искомого решения необходимо привлечение аппарата регуляризации. Поскольку мы не предполагаем определенной гладкости решения и даже допускаем наличие разрывов и других особенностей, то использование вариационных методов регуляризации с традиционными квадратичными стабилизаторами (регуляризаторами) может оказаться малоэффективным.

Как известно, классическая тихоновская регуляризация n -го порядка [1] не позволяет качественно восстановить негладкое, т.е. недифференцируемое решение, которое, в частности, может содержать изломы, близкие пики, разрывы и другие особенности.

Это обусловлено тем, что стабилизирующие функционалы, содержащие норму пространства Соболева $W_p^n(D)$, обладают сильным регуляризующим эффектом, что приводит к заглаживанию тонкой структуры решения. Поэтому возникла необходимость конструирования стабилизаторов, свободных от этих недостатков и специально приспособленных для восстановления негладких решений. Хорошо зарекомендовали себя в этом качестве стабилизаторы с вариациями различных типов как в одномерном, так и многомерном случаях (см. обзор в [2,3]). Вычислительные эксперименты показали, что методика особенно эффективна при решении двумерных интегральных уравнений типа свертки, возникающих при восстановлении зашумленных изображений (см. [3–6]).

В данной статье, во-первых, для устойчивой аппроксимации непрерывных, но недифференцируемых в общем случае решений, предлагается новый тип стабилизирующего функционала в виде нормы пространства Липшица. Формулируется и доказывается теорема о равномерной

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00116).

сходимости регуляризованных решений и их конечномерных аппроксимаций, обосновывается возможность применения субградиентных методов для решения конечномерной регуляризованной задачи.

Во-вторых, чтобы охватить случай разрывного решения, привлекается стабилизатор с нормой пространства Соболева $W_p^\alpha(\Pi)$ с дробными производными (многомерный случай), устанавливается сходимость приближенных решений в сильной топологии этого пространства и дискретная сходимость конечномерных аппроксимаций.

Результаты, связанные с исследованием тихоновской регуляризации со стабилизаторами двух типов, упомянутых выше, были анонсированы в работе автора [7].

Заметим, что некорректные задачи с негладкими решениями естественным образом возникают не только при восстановлении зашумленных изображений, но и при обработке геофизических полей [8], в радиозондировании ионосферы [9], в спектроскопии [10] и оптимальном управлении [11]. Здесь при построении устойчивых приближенных решений часто привлекается аппарат вариационной регуляризации с традиционными стабилизирующими функционалами. Так в обратных задачах динамики широко используется метод динамической регуляризации [11, 12] с тихоновскими квадратичными стабилизаторами. По нашему мнению, использование вместо классических квадратичных стабилизаторов новых функционалов, например, в форме вариации или липшицевой нормы, может оказаться в некоторых случаях более целесообразным с точки зрения более адекватной аппроксимации искомого негладкого решения со сложной структурой.

2. Регуляризация в пространстве Липшица

2.1. Пусть Π — некоторый компакт в \mathbb{R}^w . Определим множество функций, удовлетворяющих на Π условию Липшица

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^\mu \quad \forall x_1, x_2 \in \Pi; \quad (2)$$

здесь A — константа, зависящая от функции u , $0 < \mu < 1$,

$$|x_1 - x_2| = \left(\sum_{i=1}^n |x_{1i} - x_{2i}|^2 \right)^{1/2}.$$

Через $H^\mu = H^\mu(\Pi)$ обозначим множество всех функций, удовлетворяющих на Π условию (2) фиксированного порядка μ . Как и в случае одной переменной (см. [13]), определим на H^μ норму

$$\|u\|_{H^\mu} = \max_{x \in \Pi} |u(x)| + \sup_{x_1, x_2 \in \Pi} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu}. \quad (3)$$

Рассмотрим тихоновскую регуляризацию нелинейного, в общем случае, уравнения (1), заданного на паре пространств $U = H^\mu(\Pi)$, $F = C(\Pi)$, со стабилизатором в форме (3)

$$\min\{\|Au - f_\delta\|_{C(\Pi)} + \alpha\|u - u^0\|_{H^\mu}\}, \quad (4)$$

где $u^0 \in H^\mu$ — некоторая фиксированная функция (пробное решение), $C(\Pi)$ — пространство непрерывных на компакте функций с чебышевской нормой

$$\|f\|_{C(\Pi)} = \max_{x \in \Pi} |f(x)|.$$

Предположим, что исходное уравнение (1) разрешимо в пространстве H^μ . Обозначим через M множество его решений, а через \hat{M} — множество решений, наименее уклоняющихся по норме H^μ от пробной функции u^0 , т.е. \hat{M} — множество u^0 -нормальных решений [10].

Теорема 2.1. Пусть A — нелинейный непрерывный в $C(\Pi)$ оператор и правая часть $f(x)$ уравнения (1) задана своим δ -приближением $f_\delta: \|f - f_\delta\|_{C(\Pi)} \leq \delta$.

Тогда для любой пробной функции $u^0 \in H^\mu(\Pi)$, для любой функции $f \in C(\Pi)$ и для любого параметра $\alpha > 0$ задача (4) имеет непустое множество U^α решений и при связи параметров

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta/\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0$$

имеет место сходимость

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \beta(U^{\alpha(\delta)}, \hat{M}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u^{\alpha(\delta)} \in U^{\alpha(\delta)}} \inf_{\hat{u} \in \hat{M}} \|u^{\alpha(\delta)} - \hat{u}\|_{C(\Pi)} = 0. \quad (5)$$

Кроме того, для любых $u^{\alpha(\delta_k)} \in U^{\alpha(\delta_k)}$, $\bar{u} \in \hat{M}$ таких, что в $C(\Pi)$ $u^{\alpha(\delta_k)} \rightarrow \bar{u} \in \hat{M}$, справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{\alpha(\delta_k)} - u^0\|_{H^\mu} = \|\bar{u} - u^0\|_{H^\mu}. \quad (6)$$

Доказательство. Р а з р е ш и м о с т ь. Пусть $\{u_n\}$ — минимизирующая последовательность в задаче (4). Обозначим через $\Phi(u)$ целевую функцию в задаче минимизации (4), а через Φ^* — оптимальное значение. Имеем

$$\Phi(u_n) = \|Au_n - f_\delta\|_{C(\Pi)} + \alpha \|u_n - u^0\|_{H^\mu} \rightarrow \Phi^*,$$

откуда следует, что последовательность $\{u_n\}$ ограничена в пространстве H^μ . По обобщенной теореме Арцела ([14, гл. 2, §7]) это влечет предкомпактность этой последовательности в пространстве $C(\Pi)$, т.е. для некоторой подпоследовательности номеров

$$u_{n_k}(x) \rightarrow \bar{u}(x), \quad \bar{u} \in C(\Pi), \quad (7)$$

равномерно по $x \in \Pi$. Из ограниченности $\{u_n\}$ в H^μ и соотношения (7) вытекает, что $\bar{u} \in H^\mu$.

Покажем, что в этих условиях норма $\|u\|_{H^\mu}$ полунепрерывна снизу относительно равномерной сходимости. Для этого достаточно установить, что этим свойством обладает второе слагаемое в формуле (3). Введем обозначение

$$d = \liminf_{k \rightarrow \infty} \sup_{x_1, x_2 \in \Pi} \frac{|u_{n_k}(x_1) - u_{n_k}(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu}.$$

В предположении, что имеет место равномерная сходимость (7), убедимся, что

$$\sup_{x_1, x_2} \frac{|\bar{u}(x_1) - \bar{u}(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} \leq d. \quad (8)$$

По определению верхней грани для любого ε найдутся $x_1^*, x_2^* \in \Pi$ такие, что

$$\frac{|\bar{u}(x_1^*) - \bar{u}(x_2^*)|}{|x_1^* - x_2^*|^\mu} \geq \sup_{x_1, x_2} \frac{|\bar{u}(x_1) - \bar{u}(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} - \varepsilon.$$

Тогда из соотношений

$$\begin{aligned} d &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \sup_{x_1, x_2 \in \Pi} \frac{|u_{n_k}(x_1) - u_{n_k}(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{n_k \geq m} \frac{|u_{n_k}(x_1^*) - u_{n_k}(x_2^*)|}{|x_1^* - x_2^*|^\mu} \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{n_k \geq m} \left\{ \frac{|\bar{u}(x_1^*) - \bar{u}(x_2^*)|}{|x_1^* - x_2^*|^\mu} - \frac{|\bar{u}(x_1^*) - u_{n_k}(x_1^*)|}{|x_1^* - x_2^*|^\mu} - \frac{|\bar{u}(x_2^*) - u_{n_k}(x_2^*)|}{|x_1^* - x_2^*|^\mu} \right\} \\ &= \frac{|\bar{u}(x_1^*) - \bar{u}(x_2^*)|}{|x_1^* - x_2^*|^\mu} \geq \sup_{x_1, x_2} \frac{|\bar{u}(x_1) - \bar{u}(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} - \varepsilon \end{aligned}$$

вытекает требуемое неравенство (8).

Принимая во внимание теперь соотношение (7), непрерывность оператора A в $C(\Pi)$ и установленный факт полунепрерывности нормы пространства H^μ , получаем

$$\Phi^* \leq \Phi(\bar{u}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \Phi(u_{n_k}) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi(u_{n_k}) = \Phi^*,$$

т.е. функция $\bar{u} \in H^\mu$ и реализует минимум в задаче (4).

С х о д и м о с т ь. Переобозначим экстремальный элемент через u^α . Тогда для любого решения $\hat{u} \in \hat{M}$ имеем очевидное неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(u^\alpha) &= \|Au^\alpha - f_\delta\|_{C(\Pi)} + \alpha \|u^\alpha - u^0\|_{H^\mu} \leq \Phi(\hat{u}) \\ &= \|A\hat{u} - f^\delta\|_{C(\Pi)} + \alpha \|\hat{u} - u^0\|_{H^\mu} \leq \delta + \alpha \|\hat{u} - u^0\|, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\|u^\alpha - u^0\|_{H^\mu} \leq \frac{\delta}{\alpha} + \|\hat{u} - u^0\|_{H^\mu}. \quad (9)$$

При связи параметров $\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ это влечет ограниченность $\{u^{\alpha(\delta)}(x)\}$ по норме пространства H^μ . На основании обобщенной теоремы Арцела приходим к заключению о предкомпактности $\{u^{\alpha(\delta)}\}$ в сильной топологии пространства $C(\Pi)$. Итак, существует подпоследовательность $u^{\alpha(\delta_k)}$ такая, что $u^{\alpha(\delta_k)}(x) \rightarrow \bar{u}(x)$ равномерно, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{\alpha(\delta_k)} - \bar{u}\|_{C(\Pi)} = 0.$$

Установим, что $\bar{u} - u^0$ -нормальное решение уравнения (1).

Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|A\bar{u} - f\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|Au^{\alpha(\delta_k)} - f\|_{C(\Pi)} \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \|f_{\delta_k} - f\|_{C(\Pi)} + \|Au^{\alpha(\delta_k)} - f_{\delta_k}\|_{C(\Pi)} + \alpha(\delta_k) \|u^{\alpha(\delta_k)} - u^0\|_{H^\mu} \right\} \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \delta_k + \|A\hat{u} - f_{\delta_k}\|_{C(\Pi)} + \alpha(\delta_k) \|\hat{u} - u^0\|_{H^\mu} \right\} = 0, \end{aligned}$$

т.е. $\bar{u}(x)$ — решение уравнения (1), что вместе с оценкой (9) влечет включение $\bar{u} \in \hat{M}$.

Таким образом, фактически доказано, что все предельные точки последовательности $u^{\alpha(\delta)}$ относительно пространства $C(\Pi)$ являются u^0 -нормальными решениями уравнения (1). Это влечет β -сходимость (5). Пусть \bar{u} — предельная функция последовательности $\{u^{\alpha(\delta_k)}\}$, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{\alpha(\delta_k)}(x) - \bar{u}(x)\|_{C(\Pi)} = 0.$$

Тогда, ввиду полунепрерывности липшицевой нормы и неравенства (9), имеем цепочку неравенств

$$\|\bar{u} - u^0\|_{H^\mu} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u^{\alpha(\delta_k)} - u^0\|_{H^\mu} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|u^{\alpha(\delta_k)} - u^0\|_{H^\mu} \leq \|\hat{u} - u^0\|_{H^\mu},$$

откуда вытекает (6).

Следствие 2.1. *Если уравнение (1) однозначно разрешимо, тогда вместо β -сходимости (5) имеем обычную сходимость $u^{\alpha(\delta)}$ в пространстве $C(\Pi)$.*

Следствие 2.2. *Если оператор A линейный и вместо $\|u\|_{H^\mu}$ в задаче (4) использовать стабилизатор вида*

$$\Omega(u - u^0) = \|u - u^0\|_{H^\mu} + \|u\|_{L_p}^p \quad (p > 1),$$

то задача (4) становится однозначно разрешимой и в условиях теоремы последовательность $u^{\alpha(\delta)}$ равномерно сходится к этому решению.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность экстремального элемента в задаче (4) есть следствие строгой выпуклости L_p -нормы. Сходимость $u^{\alpha(\delta)}$ устанавливается по той же схеме, что и в теореме.

2.2. Пусть компакт Π допускает разбиение на симплексы $\{\Delta_m\}$ n -го порядка с максимальным диаметром $h = \max_m \text{diam}(\Delta_m)$. Обозначим через $U_h \subset H^\mu$ конечномерное подпространство непрерывных кусочно-линейных (т.е. линейных на каждом симплексе) функций.

Поставим в соответствие задаче (4) последовательность конечномерных задач

$$\min \left\{ \|Au_h - f_\delta\|_{C(\Pi)} + \alpha \|u_h - u_h^0\|_{H^\mu} : u_h \in U_h \right\} = \Phi_h^*. \quad (4h)$$

Примем обозначение U_h^α для множества решений задачи (4h).

Теорема 2.2. Пусть выполнены предположения теоремы 2.1. Тогда для любых $\alpha > 0$, $u_h^0 \in U_h$ задача (4h) имеет непустое множество решений U_h^α и справедливы соотношения

$$\lim_{h \rightarrow 0} \beta(U_h^\alpha, U^\alpha) = \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{u_h^\alpha \in U_h^\alpha} \inf_{u^\alpha \in U^\alpha} \|u_h^\alpha - u^\alpha\|_{C(\Pi)} = 0, \quad (10)$$

причем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h^\alpha - u^0\|_{H^\mu} = \|u^\alpha - u^0\|_{H^\mu} \quad (11)$$

для любых u^α, u_h^α таких, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h^\alpha - u^\alpha\|_{C(\Pi)} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разрешимость устанавливается аналогично теореме 2.1. Введем обозначение \bar{u}_h^α для кусочно-линейной непрерывной функции, принимающей в узлах x_i значения, равные $u^\alpha(x_i)$, где $u^\alpha \in U^\alpha$.

Учитывая равномерную сходимость $\bar{u}_h^\alpha(x) \rightarrow u^\alpha(x)$, имеем соотношение

$$\begin{aligned} \Phi^* &\leq \varliminf_{h \rightarrow 0} \Phi_h^* = \varliminf_{h \rightarrow 0} \left\{ \|Au_h^\alpha - f_\delta\|_{C(\Pi)} + \alpha \|u_h^\alpha - u^0\|_{H^\mu} \right\} \\ &\leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left\{ \|Au_h^\alpha - f_\delta\|_{C(\Pi)} + \alpha \|u_h^\alpha - u^0\|_{H^\mu} \right\} \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left\{ \|A\bar{u}_h^\alpha - f_\delta\|_{C(\Pi)} \right\} \\ &+ \alpha \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left\{ \max_{x_i} |u^\alpha(x_i) - u^0(x_i)| + \max_{x_i, x_j} \frac{|(u^\alpha(x_i) - u^0(x_i)) - (u^\alpha(x_j) - u^0(x_j))|}{|x_i - x_j|^\mu} \right\} \\ &\leq \|Au^\alpha - f_\delta\|_{C(\Pi)} + \alpha \|u^\alpha\|_{H^\mu} = \Phi^*, \end{aligned}$$

т.е. $\lim_{h \rightarrow 0} \Phi_h^* = \Phi^*$. Отсюда вытекает ограниченность последовательности $\{u_h^\alpha\}$ в пространстве H^μ и, следовательно, ее предкомпактность в $C(\Pi)$, т.е. существует равномерно сходящаяся подпоследовательность

$$u_{h'}^\alpha(x) \rightarrow \bar{u}(x), \quad h' \rightarrow 0.$$

Поскольку оператор A непрерывен в $C(\Pi)$, а норма в H^μ полунепрерывна снизу, то получаем

$$\Phi^* \leq \Phi(\bar{u}) \leq \varliminf_{h' \rightarrow 0} \Phi(u_{h'}^\alpha) \leq \overline{\lim}_{h' \rightarrow \infty} \Phi_{h'}^* = \Phi^*, \quad (12)$$

т.е. $\bar{u}(x)$ — экстремальная функция в задаче (4). Итак, все предельные функции последовательности $\{u_h^\alpha\}$ относительно равномерной сходимости являются экстремалами задачи (4), откуда следует справедливость соотношения (10), в чем легко убедиться рассуждением от противного.

Формула (11) есть непосредственное следствие соотношения (12).

З а м е ч а н и е 2.1. Как и для задачи (4) (см. следствие 2.2), использование вместо $\|u_h\|_{H^\mu}$ стабилизатора

$$\Omega(u_h) = \|u_h\|_{H^\mu} + \|u_h\|_{L_p}^p, \quad p > 1,$$

гарантирует для линейного оператора единственность решения задачи (4h) и справедливость теоремы о сходимости

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h^\alpha - u^\alpha\|_{C(\Pi)} = 0.$$

3. Регуляризация и дискретная аппроксимация в пространстве Соболева

3.1. Использование стабилизирующих функционалов с нормой пространства Липшица не позволяет теоретически рассмотреть случай разрывного решения операторного уравнения (1). Как известно, стабилизаторы с обобщенной вариацией допускают наличие негладких решений, однако здесь удастся доказать в многомерном случае сходимостъ приближенных решений лишь по норме L_p [2]. Чтобы охватить случай негладкого (разрывного) решения и обеспечить сходимостъ регуляризованных аппроксимаций в более сильной нормированной топологии, привлечем в качестве стабилизирующего функционала норму пространства Соболева с дробными производными порядка $0 < \gamma_i < 1, i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим функции n переменных, заданных в параллелепипеде $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x < b\}$. На множестве U функций с абсолютно непрерывными частными дробными интегралами $I_{a_i+0}^{1-\gamma_i} u(x)$ [15] и условиями

$$I_{a_i+0}^{1-\gamma_i} u(x) |_{x_i=a_i} = 0, \quad u(x) |_{x_i=a_i} = 0, \quad (13)$$

где a_i — компоненты вектора a , определим пространство $W_p^\gamma(\Pi)$ с нормой

$$\|u\|_{W_p^\gamma}^p = \int_{\Pi} |u(x)|^p dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} |D_{a_i+0}^{\gamma_i} u(x)|^p dx,$$

где

$$(D_{a_i+0}^{\gamma_i} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{a_i}^{x_i} \frac{u(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)}{(x_i - \xi)^{\gamma_i}} d\xi$$

есть частная левосторонняя производная Римана—Лиувилля порядка $\gamma_i, 0 < \gamma_i < 1$ (см. [15, §24]), $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$.

Теорема 3.1. Пусть $A : W_p^\gamma(\Pi) \rightarrow L_q(D)$ — линейный непрерывный оператор, $1 < p, q < \infty, \|f - f_\delta\| \leq \delta, u^0 \in W_p^\gamma(\Pi)$.

Тогда для любого $\alpha > 0$ существует единственное решение u^α экстремальной задачи

$$\min\{\|Au - f_\delta\|_{L_q}^q + \alpha \|u - u^0\|_{W_p^\gamma}^p : u \in W_p^\gamma(\Pi)\} = \Phi^* \quad (14)$$

и при связи параметров $\alpha(\delta) \rightarrow 0, \delta^q/\alpha(\delta) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ имеет место сходимостъ

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u^{\alpha(\delta)} - \hat{u}\|_{W_p^\gamma} = 0,$$

где \hat{u} — решение уравнения (1), ближайшее к u^0 по норме $W_p^\gamma(\Pi)$.

Доказательство. *Р а з р е ш и м о с т ь.* Пусть $\{u_n\}$ — минимизирующая последовательность в задаче (14). Тогда $\|u_n\|_{L_p} \leq c_1, \|D_{a_i+0}^{\gamma_i} u_n\|_{L_p} \leq c_2$, т.е. последовательности ограничены, поэтому в силу равномерной выпуклости пространства L_p слабо предкомпактны:

$$u_{n_k} \rightarrow \bar{u} \in L_p \text{ (слабо в } L_p(\Pi)), \quad D_{a_i+0}^{\gamma_i} u_{n_k} \rightarrow \bar{f}_i \text{ (слабо в } L_p). \quad (15)$$

Принимая во внимание, что при принятых условиях (13) дробные интегралы $I_{a_i+0}^{\gamma_i}$ являются взаимно обратными операторами для дробных производных ([15, §2]), причем ограниченными в L_p ([15, §2, п. 7]), имеем из (15)

$$I_{a_i+0}^{\gamma_i} D_{a_i+0}^{\gamma_i} u_{n_k} = u_{n_k} \rightarrow I_{a_i+0}^{\gamma_i} \bar{f}_i = \bar{u},$$

следовательно,

$$D_{a_i+0}^{\gamma_i} I_{a_i+0}^{\gamma_i} \bar{f}_i = \bar{f}_i = D_{a_i+0}^{\gamma_i} \bar{u},$$

т.е. оператор $D_{a+0}^\gamma = (D_{a_1+0}^{\gamma_1}, D_{a_2+0}^{\gamma_2}, \dots, D_{a_n+0}^{\gamma_n})$ слабо замкнут в L_p .

Если обозначить через Φ целевой функционал в задаче (14), то, ввиду слабой непрерывности оператора A и слабой полунепрерывности снизу L_p -нормы, получаем

$$\Phi^* \leq \Phi(\bar{u}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \Phi(u_{n_k}) = \Phi^*,$$

т.е. \bar{u} — решение задачи (14). Переобозначив это решение через u^α (решение единственно в силу строгой выпуклости функционала $\|u\|_{W_p^\gamma}^p$), из очевидного неравенства

$$\Phi(u^\alpha) \leq \Phi(\hat{u})$$

получаем оценку для регуляризованного решения

$$\|u^\alpha\|_{W_p^\gamma}^p \leq \frac{\delta^q}{\alpha} + \|\hat{u}\|_{W_p^\gamma}^p. \quad (16)$$

Снова воспользуемся слабой компактностью ограниченной последовательности в L_p :

$$u^{\alpha_k} \rightharpoonup \check{u} \text{ (слабо в } L_p), \quad D_{a_i+0}^\gamma u^{\alpha_k} \rightharpoonup \check{f}_i \text{ (слабо в } L_p), \quad (17)$$

где $\alpha_k = \alpha(\delta_k)$, откуда в силу слабой замкнутости D_{a+0}^γ

$$\check{f}_i = D_{a_i+0}^{\gamma_i} \check{u}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \|A\check{u} - f\|_{L_q} &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Au^{\alpha_k} - f\|_{L_q} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \|Au^{\alpha_k} - f\|_{L_q}^q + \alpha \|u^{\alpha_k}\|^p \right\}^{1/q} + \delta_k \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ [\delta_k^q + \alpha \|\hat{u}\|_{W_p^\gamma}^p]^{1/q} + \delta_k \right\} = 0 \end{aligned}$$

вытекает, что \check{u} — решение уравнения (1).

С учетом (16), (17) получаем

$$\|\check{u}\|_{W_p^\gamma}^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u^{\alpha_k}\|_{W_p^\gamma}^p \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\delta_k^p}{\alpha(\delta_k)} + \|\hat{u}\|_{W_p^\gamma}^p \right\} = \|\hat{u}\|_{W_p^\gamma}^p,$$

что означает единственность предельной точки последовательности $\{u^{\alpha(\delta)}(x)\}$ и, следовательно, ее сходимости к функции $\hat{u}(x)$.

3.2. При численной реализации регуляризирующего алгоритма, порождаемого тихоновской процедурой, необходим этап дискретной аппроксимации (задача (14)).

Пусть, для простоты изложения, n -мерная область Π есть куб. Построим равномерную сетку с шагом $h = 1/m$ по каждой переменной, введем сеточный аналог \mathbb{R}_h^n пространства \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}_h^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = (j_1 h, j_2 h, \dots, j_n h), \quad j_1, j_2, \dots, j_n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\},$$

сеточную область $\Pi_h = \mathbb{R}_h^n \cap \Pi$ и сеточные функции $u_h : \mathbb{R}_h^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Определим семейство \mathcal{P} связывающих операторов $p_n : w_p^\gamma \rightarrow w_p^{\gamma, h}$ (определение $w_p^{\gamma, h}$ смотри ниже)

$$\mathcal{P} = \left\{ p_h : (p_h u)(x) = h^{-n} \int_{\omega_h(x)} u(y) dy \right\}, \quad (18)$$

где $\omega_h(x)$ — элементарная ячейка объемом h^n с узлом $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е.

$$\omega_h(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : x_j - h \leq y < x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Семейство \mathcal{P} порождает дискретную аппроксимацию (см. [16, 17]) пространства $W_p^\alpha(\Pi)$ последовательностью пространств $w_p^{\gamma,h}$ m^n -мерных векторов с нормой

$$\|u\|_{w_p^{\alpha,h}} = \sum_{x \in \Pi_h} h^n |u(x)|^p + \sum_{x \in \Pi_h} \sum_{i=1}^n h^n |\partial_i v_i(x)|^p,$$

$$\partial_i v_i(x) = \frac{v_i(x) - v_i(x - h e_i)}{h}, \quad v_i(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma_i)} \int_{a_i}^{x_i} \frac{u(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)}{(x_i - \xi)^{\gamma_i}} d\xi,$$

$$e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0).$$

Этот факт устанавливается аналогично случаю соболевских пространств с целым показателем γ ([16, 17]). Это же семейство \mathcal{P} интегральных средних (18) образует дискретную аппроксимацию пространства $L_q(D)$ последовательностью пространств $\{l_q^h\}$ с нормой

$$\|u_h\|_{l_q^h} = \left(\sum_{x \in D_h} h^n |u_h(x)|^q \right)^{1/q};$$

здесь $D_h = D \cap \mathbb{R}_h^n$, D — n -мерный параллелепипед, который, без потери общности, можно считать единичным кубом. Поскольку теперь связывающие операторы p_h действуют в других нормированных пространствах, примем для них обозначение \mathcal{Q} .

Дискретная аппроксимация пространств W_p^γ , L_q порождает дискретную и дискретно слабую сходимость элементов (функций) и операторов [16–18]:

$$u_h \xrightarrow{\mathcal{P}} u \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - p_h u\| = 0,$$

$$u_h \xrightarrow{\mathcal{P}} u \Leftrightarrow (v_h \xrightarrow{\mathcal{P}^*} v \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \langle v, u_h \rangle = \langle v, u \rangle),$$

$$A_h \xrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{Q}} A \Leftrightarrow (u_h \xrightarrow{\mathcal{P}} u \Rightarrow A_h u_h \xrightarrow{\mathcal{Q}} Au),$$

$$A_h \xrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{Q}} A \Leftrightarrow (u_h \xrightarrow{\mathcal{P}} u \Rightarrow A_h u_h \xrightarrow{\mathcal{Q}} Au);$$

здесь $A : W_p^\gamma \rightarrow L_q$, $A_h : w_p^{\gamma,h} \rightarrow l_q^h$ — линейные ограниченные операторы, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — соотношение двойственности или скалярное произведение (в гильбертовом случае), \mathcal{P}^* — семейство связывающих операторов, которое задает двойственную аппроксимацию [18], символы “ $\xrightarrow{\mathcal{P}}$ ”, “ $\xrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{Q}}$ ” обозначают дискретную и дискретно слабую сходимость соответственно; в дальнейшем для упрощения записи мы будем опускать над ними обозначения \mathcal{P} , \mathcal{Q} .

Поставим в соответствие задаче (14) семейство конечномерных задач

$$\Phi_h^* = \min \left\{ \|A_h u_h - f_{\delta,h}\|_{l_q^h}^q + \alpha \|u_h - u_h^0\|_{w_p^{\gamma,h}}^p : u_h \in w_p^{\gamma,h} \right\}. \quad (14h)$$

Теорема 3.2. Пусть $A_h \xrightarrow{\mathcal{P}} A$, $A_h \xrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{Q}} A$, $f_{\delta,h} \xrightarrow{\mathcal{Q}} f_\delta$, $u_h^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда при $\alpha > 0$ задача (14h) имеет единственное решение u_h^α и справедливо соотношение

$$u_h^\alpha \xrightarrow{\mathcal{P}} u^\alpha.$$

Доказательство. Разрешимость задачи устанавливается стандартным образом. Единственность экстремальной функции u_h^α следует из строгой выпуклости нормы пространства $w_p^{\gamma,h}$.

Обозначим целевую функцию через $\Phi_h(u_h)$. Имеем следующее очевидное неравенство (индексы при нормах опущены):

$$\Phi_h(u_h^\alpha) \leq \Phi_h(p_h u^\alpha) = \|A_h p_h u^\alpha - f_{\delta,h}\|^q + \alpha \|p_h u^\alpha - u_h^0\|^p,$$

откуда

$$\|u_h^\alpha - u_h^0\|^p \leq \frac{1}{\alpha} [\|A_h p_h u^\alpha - f_{\delta,h}\|^q + \alpha \|p_h u^\alpha - u_h^0\|^p]. \quad (19)$$

Из дискретной сходимости $A_h \rightarrow A$, $f_{\delta,h} \rightarrow f_\delta$, $u_h^0 \rightarrow u^0$, $p_h u^\alpha \rightarrow u^\alpha$ следует ограниченность всех последовательностей и, следовательно, ввиду неравенства (19), ограниченность u_h^α , т.е. $\|u_h^\alpha\| \leq C = \text{const}$.

Поскольку W_p^γ рефлексивно и сепарабельно, то последовательность $\{u_h^\alpha\}$ дискретно слабо компактна [18], т.е. существует дискретно слабо сходящаяся подпоследовательность

$$u_{h'}^\alpha \rightharpoonup \bar{u} \in W_p^\gamma.$$

Следствием последнего соотношения и условий теоремы является сходимость

$$A_{h'} u_{h'}^\alpha - f_{\delta,h'} \rightarrow A\bar{u} - f,$$

откуда, ввиду известного свойства дискретной слабой сходимости, получаем

$$\Phi^* \leq \|A\bar{u} - f\|^q + \alpha \|\bar{u} - u^0\|^p \leq \varliminf_{h \rightarrow 0} \{\|A_{h'} u_{h'}^\alpha - f_{\delta,h'}\|^q + \|u_{h'}^\alpha - u_{h'}^0\|^p\} \leq \overline{\lim}_{h' \rightarrow 0} \Phi_{h'}^*. \quad (20)$$

Докажем справедливость соотношения

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \Phi_h^* \leq \Phi^*.$$

Действительно, из дискретной сходимости

$$p_h u^\alpha \rightarrow u^\alpha, \quad A_h p_h u^\alpha - f_{\delta,h} \rightarrow A u^\alpha - f_\delta,$$

получаем

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \|A_h p_h u^\alpha - f_{\delta,h}\|^q &= \|A u^\alpha - f_\delta\|^q, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|p_h u^\alpha - u_h^0\|^p &= \|u^\alpha - u^0\|^p, \end{aligned}$$

что влечет

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \Phi_h^* = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \Phi_h(u_h^\alpha) \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \Phi_h(p_h u^\alpha) = \Phi^*. \quad (21)$$

Объединяя (20), (21), заключаем, что \bar{u} — экстремальная функция в задаче (14), т.е. $\bar{u} = u^\alpha$, а также

$$\lim_{h' \rightarrow 0} \|u_{h'}^\alpha - u_{h'}^0\| = \|u^\alpha - u^0\|. \quad (22)$$

Известно [2, 19], что если (U_h) образует дискретную аппроксимацию пространства U и модуль выпуклости Кларксона для U_h равномерно по h ограничен снизу, т.е.

$$\delta_{U_h}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|u + v\|/2 : u, v \in U_h, \|u\| = \|v\| = 1, \|u - v\| \geq \varepsilon\} \geq \delta_0 > 0 \quad \forall h > 0, \quad (23)$$

то пара $U, (U_h)$ обладает дискретным свойством Ефимова — Стечкина

$$u_h \rightharpoonup u, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\| = \|u\| \Rightarrow u_h \rightarrow u.$$

Последовательность пространств $(W_p^{\gamma,h})$, как и (l_p^h) , обладает свойством (23), что без труда выводится из неравенства Кларксона для l_p [20].

Учитывая этот факт, из (19), (22) получаем дискретную сходимость

$$u_{h'}^\alpha \rightarrow u^\alpha.$$

Поскольку $\{u_h^\alpha\}$ имеет только одну предельную точку, то это влечет сходимость всей последовательности.

З а м е ч а н и е 3.1. При $q = p = 2$ в задаче минимизации (14h) целевая функция является сильно выпуклой и дифференцируемой в \mathbb{R}^N ($N = m^n$), поэтому для численного решения этой задачи применимы традиционные методы, например, градиентного типа, которые гарантируют сходимость итераций как по функционалу, так и по аргументу.

4. Методы решения негладких конечномерных регуляризованных задач

4.1. Обратимся к задаче (4h). Пусть A — линейный оператор. Модифицируем стабилизирующий функционал, добавив L_2 -норму. Тогда (4h) принимает вид (для $u_h^0 = 0$)

$$\min\{\|Au_h - f_\delta\|_{C(\Pi)} + \alpha[\|u_h\|_{L_2(\Pi)}^2 + \|u_h\|_{H^\mu(\Pi)}]\} : u_h \in U_h\} = d_N \quad (24)$$

и представляет собой задачу безусловной минимизации сильно выпуклой недифференцируемой функции N переменных, где N — число узлов при разбиении компакта Π на симплексы. Так как целевая функция $\Phi_h(u)$ выпукла, то она субдифференцируема, поэтому для решения (24) можно привлечь субградиентные методы.

Рассмотрим один из вариантов итерационных процессов этого типа

$$u^{k+1} = u^k - \lambda_k \frac{\partial\Phi_h(u^k)}{\|\partial\Phi_h(u^k)\|}, \quad (25)$$

где $\partial\Phi_h(u^k)$ — произвольный субградиент функции Φ_h в точке u^k в пространстве \mathbb{R}^N .

Теорема 4.1. Пусть последовательность параметров λ_k удовлетворяет следующим соотношениям: $\lambda_k \geq 0$, $\lambda_k \rightarrow 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$.

Тогда итерации u^k процесса (25) сходятся к экстремальному вектору $\hat{u}_h \in \mathbb{R}^N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании известного факта [20] субградиентный метод (25) в \mathbb{R}^N порождает минимизирующую последовательность для любой выпуклой целевой функции. В силу сильной выпуклости Φ_h это влечет сходимость итераций к вектору u^N , кусочно-линейное восполнение которого совпадает с решением задачи (24).

З а м е ч а н и е 4.1. Простейший вариант (25) субградиентных методов был выбран исключительно для иллюстрации предлагаемой методики. Разумеется, вместо (25) можно использовать весь арсенал негладкой конечномерной аппроксимации (см., например, [21, 22]). В частности, если известна некоторая оценка \tilde{d}_N для оптимального значения d_N в задаче (24), то можно воспользоваться более эффективным итерационным процессом

$$u^{k+1} = u^k - \frac{(\Phi_h(u^k) - \tilde{d}_N)\partial\Phi_h(u^k)}{\|\partial\Phi_h(u^k)\|^2}, \quad (25a)$$

где величина \tilde{d}_N может уточняться в процессе итераций.

Необходимо также отметить, что при наличии дополнительной априорной информации об искомом решении, например, в форме системы выпуклых неравенств

$$Q = \{u : g_i(u) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

итерационные процессы (25), (25а) легко модифицировать таким образом, чтобы имела место сходимость к элементу, удовлетворяющему системе неравенств. Для этого достаточно в методе (25) заменить субградиент $\partial\Phi_h(u)$ на обобщенный субградиент

$$H(u) = \begin{cases} \partial\Phi_h(u), & \text{если } G(u) < 0, \\ F \in \text{co}\{\partial\Phi_h(u) \cup \partial G(u)\}, & \text{если } G(u) = 0, \\ \partial G(u), & \text{если } G(u) > 0; \end{cases}$$

здесь $G(u) = \max_{1 \leq i \leq m} g_i(u)$, а $\text{co}\{M\}$ — выпуклая оболочка множества M .

В итерационном методе (25а) следует перейти к процессу

$$u^{k+1} = P(Tu^k),$$

где T — оператор шага в (25а), а отображение P определяется формулой

$$P(u) = u - \lambda \frac{G^+(u)\partial G(u)}{\|\partial G(u)\|^2}, \quad 0 < \lambda < 2, \quad G^+(u) = \max\{0, G(u)\}.$$

Сходимость итераций следует из общей теории фейеровских процессов [23].

4.2. Конечномерная аппроксимация, предложенная выше (см. п. 2.2), не влечет полной дискретизации регуляризованной экстремальной задачи, поскольку целевая функция в (24) содержит непрерывные элементы (функцию $f_\delta(x)$, нормы пространств C , L_p). В конкретных примерах можно перейти к полностью дискретизованной проблеме и получить легко реализуемый алгоритм.

Для иллюстрации рассмотрим одномерное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Au \equiv \int_0^1 K(y, x)u(x)dx = f(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (26)$$

где $K(t, s)$, $f(x)$ — непрерывные функции своих переменных. Зададим равномерную сетку по x и y с шагом $h = 1/N$ и аппроксимируем интеграл квадратурной формулой прямоугольников. Введем обозначение $f_i = f(y_i)$. Запишем задачу на минимум

$$\min \left\{ \max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^N hK(y_i, x_j)u_j - f_i \right| + \alpha \left[\sum_{j=1}^N h|u_j|^2 + \max_{1 \leq j \leq N} |u_j| + \max_{i,j} \frac{|u_i - u_j|}{|x_i - x_j|^\mu} \right] : \{u_j\}_1^N \right\} = \bar{d}_N, \quad (27)$$

которая, как и (24), является конечномерной аппроксимацией задачи (4), но, в отличие от (24), задача (27) уже не содержит бесконечномерных объектов.

Убедимся, что ее экстремальные элементы аппроксимируют решение задачи (4), в которой дополнительно в стабилизатор введена L_2 -норма, принято $u^0 = 0$ и оператор A определен формулой (26).

Теорема 4.2. *Экстремальная задача (27) имеет единственное решение $\bar{u}^N = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N)$ и последовательность кусочно-линейных восполнений $\hat{u}^N(x)$, построенных по вектору \bar{u}^N , равномерно сходится к решению задачи*

$$\min \{ \|Au - f\|_C + \alpha [\|u\|_{L_2}^2 + \|u\|_{H^\mu}] : u \in H^\mu \} = d. \quad (28)$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \bar{d}_N \leq d. \quad (29)$$

Введем обозначение $\check{u}^N(x)$ для кусочно-линейной функции, являющейся решением задачи (24) в одномерном случае, а через \check{u}^N обозначим вектор, составленный из значений функции $\check{u}^N(x)$ на сетке. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \bar{d}_N &= \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \min \left\{ \max_i \left| \sum_{j=1}^N h K(y_i, x_j) u_j - f(y_i) \right| \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left[\sum_{j=1}^N h |u_j|^2 + \max_j |u_j| + \max_{i,j} \frac{|u_i - u_j|}{|x_i - x_j|^\mu} \right] : \{u_j\}_1^N \right\} \\ &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left\{ \max_i \left| \sum_{j=1}^N h K(y_i, x_j) \check{u}_j - f(y_i) \right| + \alpha \left[\sum_{j=1}^N h |\check{u}_j|^2 + \max_i |\check{u}_i| + \max_{i,j} \frac{|\check{u}_i - \check{u}_j|}{|x_i - x_j|^\mu} \right] \right\} \\ &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left\{ \max_i \left| \int_0^1 K(y_i, x) \check{u}^N(x) dx - f(y_i) \right| + R_N(W) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left[\int_0^1 |\check{u}^N(x)|^2 dx + \max_i |\check{u}_i| + \max_{i,j} \frac{|\check{u}_i - \check{u}_j|}{|x_i - x_j|^\mu} \right] \right\} \\ &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left\{ \max_y \left| \int_0^1 K(y, x) \check{u}^N(x) dx - f(y) \right| + \alpha \left[\int_0^1 |u^N(x)|^2 dx + \|\check{u}^N\|_{H^\mu} \right] \right\} = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} d_N = d. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равномерным стремлением к нулю остатка $R_N(W)$ сходящейся (согласно теореме Арцела–Асколи) квадратурной формулы для предкомпактного семейства функций

$$W = \{w_i(x) : w_i(x) = K(y_i, x) \check{u}^N(x), i = 1, 2, \dots, N\}$$

(см. [17, §5]), а также фактом, установленным в теореме 2.2 (с учетом замечания 2.1), о сходимости оптимальных значений при кусочно-линейной аппроксимации.

Разрешимость конечномерной задачи (27) следует из непрерывности и свойства равномерного роста целевой функции в \mathbb{R}^N , а единственность экстремального вектора \bar{u}^N — из ее сильной выпуклости. Из неравенства (29) вытекает равномерная по N ограниченность

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\bar{u}_j| + \max_{1 \leq i, j \leq N} \frac{|\bar{u}_i - \bar{u}_j|}{|x_i - x_j|^\mu} \leq \text{const}.$$

Тогда последовательность кусочно-линейных восполнений $\hat{u}^N(x)$, построенных по векторам \bar{u}^N , ограничена в пространстве H^μ . Поэтому найдется подпоследовательность $\hat{u}^{N_k}(x)$ кусочно-линейных функций, равномерно сходящаяся к непрерывной функции $\bar{u}(x)$.

Покажем, что $\bar{u}(x)$ реализует минимум в задаче (28). Поскольку $\bar{u} \in H^\mu$ (см. п. 2), это вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} d \leq \Phi(\bar{u}) &\leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi(\hat{u}^{N_k}) = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \max_y \left| \int_0^1 K(y, x) \hat{u}^{N_k}(x) dx - f(y) \right| \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left[\int_0^1 |\hat{u}^{N_k}(x)|^2 ds + \max_x |\hat{u}^{N_k}(x)| + \max_{x_1, x_2} \frac{|u^{N_k}(x_1) - u^{N_k}(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \max_y \left| \sum_{j=1}^{N_k} hK(y, x_j) \bar{u}_j - f(y) \right| + R_N(\Psi) + \alpha \left[\sum_{j=1}^{N_k} h|\bar{u}_j|^2 + \max_j |\bar{u}_j| + \max_{i,j} \frac{|\bar{u}_j - \bar{u}_i|}{|x_i - x_j|^\mu} \right] \right\} \\
&= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{N_k} hK(\tilde{y}_{i_k}, x_j) \bar{u}_j - f(\tilde{y}_{i_k}) \right| + \alpha \left[\sum_{j=1}^{N_k} h|\bar{u}_j|^2 + \max_j |\bar{u}_j| + \max_{i,j} \frac{|\bar{u}_j - \bar{u}_i|}{|x_i - x_j|^\mu} \right] \right\} \\
&\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{N_k} hK(\tilde{y}_{i_k}, x_j) - K(y_{i_k}, x_j) \bar{u}_j \right| + \left| \sum_{j=1}^{N_k} hK(y_{i_k}, x_j) \bar{u}_j - f(y_{i_k}) \right| \right. \\
&\quad \left. + |f(y_{i_k}) - f(\tilde{y}_{i_k})| + \alpha \left[\sum_{j=1}^{N_k} h|\bar{u}_j|^2 + \max_j |\bar{u}_j| + \max_{i,j} \frac{|\bar{u}_j - \bar{u}_i|}{|x_i - x_j|^\mu} \right] \right\} \\
&\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \max_i \left| \sum_{j=1}^{N_k} hK(y_i, x_j) \bar{u}_j - f(y_i) \right| + \alpha \left[\sum_{j=1}^{N_k} h|\bar{u}_j|^2 + \max_j |\bar{u}_j| + \max_{i,j} \frac{|\bar{u}_j - \bar{u}_i|}{|x_i - x_j|^\mu} \right] + \varepsilon_N \right\} \\
&= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \bar{d}_{N_k} \leq d;
\end{aligned}$$

здесь \tilde{y}_{i_k} — точка отрезка $[0,1]$, в которой разность под знаком модуля достигает своего максимума, ее номер i_k означает, что она лежит на отрезке разбиения $[y_{i_k}, y_{i_{k+1}}]$, $R(\Psi)$ — остаток квадратурной формулы для $\Psi = \{\psi_y(x) : \psi_y(x) = K(y, x)\hat{u}^{N_k}(x)\}$.

4.3. При реализации субградиентного метода для задачи (26) субдифференциал каждого из четырех слагаемых вычисляется по известным формулам субдифференциального исчисления. Приведем, например, формулу для субдифференциала четвертого слагаемого

$$\varphi(u) = \max_{1 \leq i, j \leq N} \frac{|u_i - u_j|}{|x_i - x_j|^\mu}. \quad (30)$$

Обозначим через $J(u)$ множество пар индексов, для которых в (30) достигается максимум. Определим вектор

$$v_{i,j} = \left(0, \dots, \frac{1}{|x_i - x_j|^\mu}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{|x_i - x_j|^\mu}, 0, \dots, 0 \right),$$

где ненулевые элементы занимают позиции с номерами i, j соответственно. Тогда субдифференциал, т.е. множество субградиентов, в точке $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ вычисляется по формуле

$$\partial\varphi(u) = \text{co} \left\{ \partial(|u_i - u_j|/|x_i - x_j|^\mu) : i, j \in J(u) \right\},$$

где

$$\partial(|u_i - u_j|/|x_i - x_j|^\mu) = \begin{cases} v_{ij}, & \text{если } u_i - u_j > 0, \\ \text{co}\{v_{ij}, -v_{ij}\}, & \text{если } u_i - u_j = 0, \\ -v_{ij}, & \text{если } u_i - u_j < 0, \end{cases}$$

$\text{co}\{u, v\}$ — выпуклая оболочка элементов u, v .

Таким образом, предлагаемая технология решения некорректно поставленных задач с негладким решением сводится к реализации двухэтапного метода, в котором на первом этапе реализуется тихоновская регуляризация в общем случае с недифференцируемым сглаживающим функционалом, а на втором, после дискретизации регуляризованной задачи, применяется сходящийся итерационный процесс.

Предварительные численные эксперименты показали, что при использовании в качестве стабилизатора липшицевой нормы с подходящим выбором параметра μ данная методика позволяет восстанавливать с хорошим качеством не только непрерывные, но и разрывные решения для интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н.** О регуляризации некорректно поставленных задач// Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
2. **Vasin V.V.** Regularization and iterative approximation for linear ill-posed problems in the space of functions of bounded variation// Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1, 2002. P. S225–S229.
3. **Васин В.В., Сerezникова Т.И.** Двухэтапный метод аппроксимации негладких решений и восстановление зашумленного изображения// Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 126–135.
4. **Леонов А.С.** Кусочно-равномерная регуляризация двумерных некорректных задач с разрывными решениями. Численный анализ// Журн. вычисл. математики и матем. физ. 1999. Т. 39, № 12. С. 1939–1944.
5. **Vogel C.R.** Computational methods for inverse problems. Philadelphia: SIAM, 2002. 183 p.
6. **Vogel C., Hanke M.** Two-preconditioners for regularized inverse problems II: Implementation and numerical results. Preprint, 1998. Internet: ftp.math.montana.edu/pub/vogel.
7. **Vasin V.V.** Stable approximation of nonsmooth solutions to ill-posed problems// Докл. Акад. Наук. 2005. Т. 402, № 5. С. 586–589.
8. **В.В.Васин, Пересторонина Г.Я., Пруткин И.Л., Тимерханова Л.Ю.** Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для трехслойной среды// Мат. моделирование. 2003. Т. 15, № 12. С. 69–76.
9. **Агеев А.Л., Васин В.В., Бессонова Э.Н., Маркушевич В.М.** Радиозондирование ионосферы на двух частотах. Алгоритмический анализ интегрального уравнения Фредгольма — Стильтьеса// Теоретические проблемы в геофизике. М.: Наука, 1997. С. 101–118. (Вычислительная сейсмология; Вып. 29).
10. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-Posed Problems with A Priori Information. Utrecht: VSP, 1995. 255 p.
11. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ 1999. 236 с.
12. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе// Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1983, № 2. С. 51–60.
13. **Мухелишвили Н.И.** Сингулярные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
14. **Колмогоров Ф.Н., Фомин С.В.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1981. 542 с.
15. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
16. **Stummel F.** Diskrete Konvergenz Linearer Operatoren. I, II// Math. Ann. 1970. B. 190, № 1. S. 45–92; Math. Z. 1971. B. 120. S. 231–264.
17. **Vainikko G.M.** Funktionalanalysis der Diskretisierungs Methoden. Leipzig: Teubner. Verlagsgesellschaft, 1976. 137 s.
18. **Stummel F.** Discrete Convergence of Mappings// Top. Numer. Anal., New York, 1973. P. 285–310.
19. **Васин В.В.** Общая схема дискретизации регуляризирующих алгоритмов в банаховых пространствах// Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 2. С. 271–275.
20. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 255 с.
21. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
22. **Демьянов В.Ф., Васильев П.В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
23. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. 210 с.

УДК 517.977

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ТРЕХ ЛИЦ¹

Н. Л. Григоренко

Рассматривается дифференциальная игра трех игроков, динамика которой описывается линейными дифференциальными уравнениями при геометрических ограничениях на управляемые параметры. Получены достаточные условия существования стратегии первого игрока, гарантирующей посещение траекторией игры заданного целевого множества при любом допустимом управлении второго игрока и уклонение траектории игры от встречи с терминальным множеством третьего игрока. Предложен алгоритм построения стратегии первого игрока, гарантирующей окончание игры за конечное время. Приведено решение модельного примера.

1. Постановка задачи

В евклидовом n мерном пространстве происходит движение векторов x , y , динамика которых описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) - Cv_1(t), & x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = Dy(t) + Fv_2(t), & y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $t \in [0, \theta]$, $u \in P \subset E^{p_1}$, $v_1 \in Q_1 \subset E^{p_2}$, $v_2 \in Q_2 \subset E^{p_2}$; P , Q_1 , Q_2 — выпуклые компакты, $0 \in \text{Int } P$, $0 \in \text{Int } Q_1$, $0 \in \text{Int } Q_2$, u — параметр управления первого игрока, v_1 — параметр управления второго игрока, v_2 — параметр управления третьего игрока, A , B , C , D , F — постоянные матрицы, A , D — размерности $(n \times n)$, B — размерности $(n \times p_1)$, C , F — размерности $(n \times p_2)$.

В пространстве E^n заданы множества M_1 и M_2 , $0 \in M_2$. Предполагается, что они имеют вид $M_1 = M + M_1^2$, $M_2 = M + M_2^2$, где M — линейное подпространство из E^n , M_1^2 , M_2^2 — выпуклые компакты из L , L — ортогональное дополнение к M в E^n ; $x_0 \notin M_1$, $x_0 \notin y_0 + M_2$.

Под допустимыми управлениями второго и третьего игроков будем понимать измеримые по Лебегу функции $v_1(t)$, $v_2(t)$ со значениями в множествах Q_1 , Q_2 соответственно. Допустимые управления первого игрока — измеримые по Лебегу квазистратегии [1] $u(t) = u(t, v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ со значениями в множестве P . Первый игрок располагает информацией об уравнениях движения и начальной позиции (1), ограничениях на управления, множествах M_1 , M_2 и в каждый момент времени t знает $v_i(s)$, $i = 1, 2$, $s \in [0, t]$.

Скажем, что для начальной позиции (x_0, y_0) существует решение задачи о выигрыше первого игрока для игры (1), если найдется допустимое управление $u(t)$ и конечный момент времени T такие, что $x(T) \in M_1$, $T \leq \theta$ и $x(t) \notin y(t) + M_2$, $t \in [0, T]$, при любых допустимых управлениях второго и третьего игроков $v_1(t)$, $v_2(t)$.

Рассматривается задача о нахождении достаточных условий на параметры игры (1), при которых для начальной позиции (x_0, y_0) существует решение задачи о выигрыше первого игрока.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-08034-офи-п) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-7581.2006.1).

2. Вспомогательные построения

Положим $P = P_1 + P_2 + P_3$, $0 \in \text{Int } P_j$, $j = 1, 2, 3$, $u = u_1 + u_2 + u_3$, $u_j \in P_j$, $j = 1, 2, 3$, P_j , $j = 1, 2, 3$, — выпуклые компакты. Пусть π — оператор ортогонального проектирования из E^n на подпространство L , $\dim L = q$, $q \geq 2$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу управляемости на множество M_1 [2, 3] для первого игрока. Задана динамическая система

$$\dot{z} = Az + Bu_1, \quad z(0) = z_0 = x_0, \quad (2)$$

$z \in E^n$, $u_1 \in P_1 \subset E^p$, $t \in [0, \theta]$, u_1 — параметр управления.

Скажем, что для позиции z_0 и целевого множества M_1 существует решение задачи управляемости для системы (2), если найдется допустимое управление $u_1(t)$ и конечный момент времени $T \leq \theta$, такие, что для соответствующего решения $\pi z(T) \in \pi M_1$.

Условие управляемости системы (2) из начального положения x_0 на множество M_1^2 состоит в существовании момента времени T , для которого справедливо условие непустоты пересечения проекции множества достижимости $\pi X(T)$ системы (2) и конечного множества M_1^2 : $\pi x(T) \cap M_1^2 \neq \emptyset$. В терминах опорных функций это условие формулируется в форме наличия корня T уравнения $\lambda(T, x_0) = 0$, где

$$\lambda(t, x_0) = \min_{\|l\|=1, l \in L} \left[\left(\pi e^{At} x_0, l \right) + \int_0^t c \left(\pi e^{A(t-s)} B P_1, l \right) ds + c(M_1^2, -l) \right]. \quad (3)$$

Здесь $c(M_1^2, l)$ — опорная функция множества M_1^2 в направлении l .

Предположение 1. *Существует множество P_1 такое, что уравнение $\lambda(T, x_0) = 0$ имеет положительный корень T .*

Обозначим через l^* нормальный вектор опорной гиперплоскости к множеству $\pi X(T)$ в точке касания с множеством M_1^2 . В силу цилиндричности множества M_1 имеем $l^* \in L$. Так как каждый вектор $s \in E^n$ однозначно представляется в виде $s = \pi s + (I - \pi)s$, $\pi s \in L$, $(I - \pi)s \in M$, то положим $s_1 = l^* + 0_M$, где 0_M — нулевой вектор из M . Пусть $\dot{s} = -A^*s$, $s(T) = s_1$. Вектор $l^* = l(T, x_0)$ находится из условия минимума (3), и $s(t) = e^{A(T-t)} s_1$. Управление $u_1(t)$ находится из условия

$$(Bu_1(t), s(t)) = c(BP_1, s(t)). \quad (4)$$

Покажем, что управление $u_1(t)$, выбранное из соотношения (4), решает задачу управляемости. Множество $X(t)$ выпукло, и $x(t) \in \partial X(t)$ для всех $t \in [0, T]$ при $u_1(t)$ выбранном как решение (4). Вектора границы $X(t)$ характеризуются вектором $s(t)$ — нормалью к опорной гиперплоскости в точке $x(t)$. В случае цилиндричности множества M_1 все вектора $x(T) \in \partial X(T)$, имеющие опорный вектор $s(T)$, принадлежат M_1 . Таким образом, управление (4) обеспечивает управляемость на M_1 . Для того чтобы отличать управление (4) от других управлений, решающих задачу управляемости, управление (4) и соответствующую траекторию будем называть выбранными по принципу быстрогодействия.

З а м е ч а н и е. Выше мы привели один из способов решения задачи управляемости, основанный на методе решения задачи быстрогодействия [1, 3]. Построения следующих параграфов опираются на свойства построенных управления и траектории по отношению к динамическим возможностям третьего игрока. Например, при расчете модельных примеров видно, что не для всех начальных позиций третьего игрока целесообразно движение вектора $z(t)$ по траектории системы (2) с максимальной скоростью. Решение задачи управляемости с другими свойствами управления и траектории содержится в работах [2, 7–9]. После соответствующей модификации такие управления так же могут быть выбраны в качестве управления $u_1(t)$.

Будем считать далее, что известно управление $u_1(t)$, решающее задачу управляемости, и пусть T — гарантированное время окончания процесса управляемости. Обозначим соответствующую траекторию $z(t)$, $t \in [0, T]$, $z(0) = x_0$, $z(T) \in M_1$.

Предположение 2. *Существует такое целое число $k \geq 0$, что ранг матрицы $\pi A^k B$ равен q , а матрицы $\pi A^i B = 0$ при $i = 0, \dots, k-1$, если $k \geq 1$.*

Лемма 1. *Функция $\pi z(t)$, $t \in [0, T]$, принадлежит пространству Соболева $H_0^{k+1}(0, T)$.*

Доказательство леммы 1 следует из того факта, что предположение 2 позволяет представить решение в виде кратного интеграла порядка $k+1$ от некоторой измеримой по Лебегу функции [4].

3. Компенсация управления второго игрока

Положим $\pi e^{At} x_0 + \int_0^t \pi e^{A(t-s)} B u_1(s) ds = \pi z(t)$, $\int_0^t \pi e^{A(t-s)} B u_3(s) ds = \xi(t)$. Отметим, что выбор управления $u_1(t)$ определяет функцию $\pi z(t)$, $t \in [0, T]$. Для решения уравнения (1) справедливо представление

$$\pi x(t) = \pi z(t) + \int_0^t \pi e^{A(t-s)} B u_2(s) ds - \int_0^t \pi e^{A(t-s)} C v_1(s) ds + \xi(t).$$

Предпишем первому игроку выбирать управление $u_2(t)$ как решение уравнения компенсации

$$\int_0^t \pi e^{A(t-s)} B u_2(s) ds = \int_0^t \pi e^{A(t-s)} C v_1(s) ds, \quad (5)$$

где измеримая функция $v_1(s) \in Q_1$, $s \in \Delta$, считается известной, а измеримая функция $u_2(s) \in P$, $s \in \Delta$, является неизвестной.

Предположение 3. *Существует такое целое число k_1 , $k_1 \geq k \geq 0$, что*

А) ранг матрицы $\pi A^{k_1} C$ равен q , а матрицы $\pi A^j C = 0$ при $j = 0, \dots, k_1 - 1$, если $k_1 \geq 1$;

Б) если $k_1 = k$, то существует такая константа $\mu > 1$, что $\mu \pi A^k B P_2^ \supset \pi A^k C Q_1$.*

Предположение 3 содержит достаточные условия разрешимости уравнения (5) при произвольной измеримой $v_1(s) \in Q_1$, $s \in \Delta$ [5]. Другие типы достаточных условий существования решения уравнения (5) содержатся в работах [7, 8]. Для нахождения управления $u_2(t)$, являющегося решением уравнения (5), может быть использован способ, изложенный далее в § 5.

4. Маневр обхода

Перейдем к построению управлений $u_3(t)$ с целью обеспечения выполнения соотношения $\pi x(t) \notin \pi y(t) + \pi M_2$, $t \in [0, T]$. Первое условие, которое мы наложим на класс управлений $u_3(t)$, состоит в выполнении равенства $\xi(T) = 0$. Учитывая (5), условие уклонения вектора $\pi x(t)$ от встречи с множеством $\pi y(t) + \pi M_2$ перепишем в виде

$$\pi z(t) + \xi(t) \notin \pi y(t) + \pi M_2. \quad (6)$$

В момент начала игры $\pi x_0 \notin \pi y_0 + \pi M_2$. Управление $v_2(t)$ третьего игрока известно первому игроку до текущего момента времени и не известно вперед. Пусть r — малая положительная константа. Положим $M_3(r) = \pi M_2 + rS^q$, где $S^q = \{\eta \in E^q : |\eta| \leq 1\}$.

Если $v_2(t)$ таково, что $\pi x(t) \notin \pi y(t) + M_3(r)$, $t \in [0, T]$, то полагаем $u_3(t) = 0$, $t \in [0, T]$ и соответственно получаем $\xi(t) = 0$, $t \in [0, T]$.

Пусть $v_2(t)$ таково, что существует первый момент времени $t_0 = t_0(r)$ такой, что $\pi x(t_0) \in \pi y(t_0) + M_3(r)$ (т.е. уменьшение расстояния между первым игроком и терминальным множеством третьего игрока до величины r впервые наступило в момент t_0). С этого момента оценим возможные положения третьего игрока с помощью его области достижимости. Построению траектории обхода первым игроком такой области посвящены следующие выкладки.

Используя формулу Коши для решения линейного уравнения, перепишем (6) для $t \geq t_0$ в виде $\pi z(t) - \pi e^{D(t-t_0)}y(t_0) + \xi(t) \in \pi M_2 + \int_{t_0}^t \pi e^{(t-s)D} FQ_2 ds$. Обозначим $w(t) = \pi z(t) -$

$\pi e^{D(t-t_0)}y(t_0)$, $M_4(t) = \pi M_2 + \int_{t_0}^t \pi e^{(t-s)D} FQ_2 ds$; t_{2i-1} и t_{2i} , $i = 1, \dots, l$, — левые и правые

концы отрезков времени, таких, что $w(t) \in M_4(t)$, $t \in [t_{2i-1}, t_{2i}] \subset [0, T]$. В новых переменных условие уклонения (6) перепишем в виде

$$w(t) + \xi(t) \notin M_4(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (7)$$

Так как кривая $w(t)$ определяется управлением $u_1(t)$ и параметрами игры (1), а множество $M_4(t)$ замкнуто, то следующее предположение есть предположение о параметрах процесса (2), свойствах управления $u_1(t)$ и траектории $\pi z(t)$, для которых конечно число l посещений параметрической кривой $w(t)$ множества $M_4(t)$ и выполнено условие $w(t) \notin M_4(t)$, $t \in (t_{2l}, T]$, или, в других терминах, $\pi x(t) \notin \pi y(t) + M_2$, $t \in (t_{2l}, T]$.

Предположение 4. Для траектории $\pi z(t)$ существуют положительные числа r и l такие, что $0 < t_0 < t_1 \leq t_2 < \dots < t_{2i-1} \leq t_{2i} < \dots < t_{2l-1} \leq t_{2l} < T = t_{2l+1}$.

Отметим, что, согласно определению, $t_i = t_i(r)$, $i = 0, \dots, 2l$. Рассмотрим следующую задачу. Задана кривая $w(t)$, $t \in [t_0, T]$, и множество $M_4(t)$ — выпуклый компакт, непрерывно зависящий от t в метрике Хаусдорфа, $t \in [t_0, T]$. Требуется построить вектор функцию $\xi(t)$, $\xi(0) = 0$, $\xi(T) = 0$, $\xi(t) \in C^{k+1}[t_0, T]$, для которой выполнено (7).

Предположение 5. Существует $k+1$ раз дифференцируемая вектор функция $a(t)$, удовлетворяющая условиям $a(t) \in \text{Int } M_4(t)$, $a(t) \notin w(t)$, $t \in [t_1, T]$.

Построение функции $\xi(t)$ проведем в два этапа. На первом этапе построим функцию $\xi_1(t) = \eta_1(t)(w(t) - a(t))$, обладающую свойствами $\xi_1(t) = 0$, $\xi_1(T) = 0$, $\xi_1(t) + w(t) \notin \text{Int } M_4(t)$, $t \in [t_0, T]$, где

$$\eta(t) = \left(\frac{1}{d(w(t) - a(t), M_4(t) - a(t))} - 1 \right), \quad t \in [t_{2i-1}, t_{2i}], \quad i = 1, \dots, l,$$

$$\eta_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, T] \setminus \bigcup_{i=1}^l [t_{2i-1}, t_{2i}]; \\ \eta(t), & \text{если } t \in \bigcup_{i=1}^l [t_{2i-1}, t_{2i}]. \end{cases}$$

Здесь $d(w(t), M_4(t) - a(t))$ — дистанционная функция множества $M_4(t) - a(t)$ [6]. Так как $a(t) \notin w(t)$, $t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]$, то $d(w(t) - a(t), M_4(t) - a(t)) \neq 0$, $t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]$, $i = 1, \dots, l$. Из определения дистанционной функции следует, что $\eta(t) \geq 0$, $t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]$, $i = 1, \dots, l$.

Положим

$$w_1(t) = w(t) + \eta_1(t)(w(t) - a(t)), \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Лемма 2. Кривая $w_1(t)$ удовлетворяет условию $w_1(t) \notin \text{Int } M_4(t)$, $t \in [0, T]$.

Доказательство. Из (8) имеем

$$\begin{aligned} w_1(t) - a(t) &= w(t) - a(t) + (w(t) - a(t)) \left(\frac{1}{d(w(t) - a(t), M_4(t) - a(t))} - 1 \right) \\ &= \frac{w(t) - a(t)}{d(w(t) - a(t), M_4(t) - a(t))}. \end{aligned}$$

Так как $w(t) - a(t) \in M_4(t) - a(t)$, $t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]$, то $0 < d(w(t) - a(t), M_4(t) - a(t)) \leq 1$. Следовательно, $\frac{1}{d(w(t) - a(t), M_4(t) - a(t))} \geq 1$ и справедливо соотношение $d(w_1(t) - a(t), M_4(t) - a(t)) = \frac{1}{d(w(t) - a(t), M_4(t) - a(t))} d(w(t) - a(t), M_4(t) - a(t)) = 1$. Таким образом, $w_1(t) \notin \text{Int } M_4(t)$, $t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]$. Лемма 2 доказана.

На втором этапе построим векторную функцию $\xi(t)$, удовлетворяющую (7) и условиям гладкости. Для этого построим гладкую оценочную функцию для функции $\eta_1(t)$. Определим функции

$$\begin{aligned} \psi(t, \zeta, \tau, \varepsilon) &= \begin{cases} 0, & \text{если } t \notin [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon], \\ \zeta e^{-\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)^2}, & \text{если } t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon], \end{cases} \\ \varphi(t) &= \sum_{i=1}^l \frac{(t - t_{2i-1} + \varepsilon_i)^{k+2} (t_{2i} + \varepsilon_i - t)}{2^{h_i t}} \psi\left(t, \zeta_i, \frac{t_{2i-1} + t_{2i}}{2}, \frac{t_{2i} - t_{2i-1}}{2} + \varepsilon_i\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\zeta_i, h_i, \varepsilon_i$ — положительные параметры, $i = 1, \dots, l$, $k \geq 0$.

Предположение 6. Существуют положительные параметры $\zeta_i, h_i, \varepsilon_i$:

$$0 < \varepsilon_i < \min \left\{ \frac{t_{2i-1} - t_{2i-2}}{2}, \frac{t_{2i+1} - t_{2i-1}}{2}, i = 1, \dots, l \right\},$$

такие, что для функции (9) справедливо неравенство $\varphi(t) > \eta_1(t)$, $t \in (t_1 - \varepsilon_1, t_{2l} + \varepsilon_{2l})$.

Выберем функцию $\xi(t)$ в виде $\xi(t) = \varphi(t)(w(t) - a(t))$, и пусть

$$w_2(t) = w(t) + \xi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

Лемма 3. Кривая $w_2(t)$ удовлетворяет условию $w_2(t) \notin \text{Int } M_4(t)$, $t \in [0, T]$.

Доказательство. Если $\varphi(t) > \eta_1(t)$, то согласно (10) $d(w_2(t) - a(t), M_4(t) - a(t)) = (1 + \varphi(t))d(w(t) - a(t), M_4(t) - a(t)) > (1 + \eta_1(t))d(w(t) - a(t), M_4(t) - a(t)) = 1$. Таким образом, $d(w_2(t) - a(t), M_4(t) - a(t)) \geq 1$, т.е. $w_2(t) \notin \text{Int } M_4(t)$. Лемма 3 доказана.

5. Отслеживание кривой обхода

В силу (9) и предположения 5, функция $\xi(t) = \varphi(t)(w(t) - a(t))$ имеет непрерывные производные до порядка $k+1$ для $t \in [0, T]$. Из (9) и соотношения для j -й производной произведения двух функций, $j = 1, 2, \dots$, следует, что значение функции $\mu(t)$ и значения ее $k+1$ производных обращаются в ноль при $t = 0$. Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ следующее интегральное уравнение 1-го рода типа Вольтерра относительно $u_3(\cdot)$:

$$\int_0^t \pi e^{A(t-s)} B u_3(s) ds = \xi(t), \quad (11)$$

в классе измеримых функций $u_3(t) \in U$, где U — класс p -мерных измеримых по Лебегу векторных функций, ограниченных по модулю на $[0, T]$. Положим $\mu(t) = \frac{d^{k+1}\xi(t)}{dt^{k+1}}$, $\mu_1 = \max_{t \in [0, T]} \|\mu(t)\|$, $\Gamma = \max_{0 \leq s \leq t \leq T} \|\pi A^{k+1} e^{(t-s)A} B (\pi A^k B)^+\|$, $(A)^+$ — псевдообратная матрица для матрицы A .

Лемма 4. Для функции $\mu(t)$ существует решение уравнения (11) для $t \in [0, T]$ в классе U , и для решения справедлива оценка $\|u_3(t)\| \leq \|(\pi A^k B)^+\| \mu_1 e^{\Gamma t}$.

Доказательство. Продифференцируем обе части равенства (11) $k + 1$ раз по t . В силу предположения 1 и формулы $\pi e^{tA} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \pi A^k B$ получим эквивалентное (11) интегральное уравнение

$$\pi A^k B u_3(t) + \int_0^t \pi A^{k+1} e^{(t-s)A} B u_3(s) ds = \mu(t). \quad (12)$$

Обозначим

$$\pi A^k B u_3 = \omega. \quad (13)$$

Так как ранг $(q \times p)$ -матрицы $\pi A^k B$ равен q , то выполнено необходимое и достаточное условие существования решения неоднородной системы (13) при любом $\omega \in \mathbb{R}^q$. Обозначим через $(\pi A^k B)^+$ матрицу размера $(p \times q)$, псевдообратную для $(q \times p)$ -матрицы $\pi A^k B$. Тогда $u_3 = (\pi A^k B)^+ \omega$ и интегральное уравнение (12) имеет вид

$$\omega(t) + \int_0^t \pi A^{k+1} e^{(t-s)A} B (\pi A^k B)^+ \omega(s) ds = \mu_1(t). \quad (14)$$

Полученное уравнение можно решить методом последовательных приближений при произвольной измеримой ограниченной по модулю $\mu(t)$, $t \in [t_0, T]$. Интегрируя полученное решение $\omega(t)$ $k + 1$ раз и используя тот факт, что значение функции $\mu(t)$ и значения ее $k + 1$ производных обращаются в 0 при $t = 0$, получаем, что так построенное решение уравнения (14) является решением уравнения (11) и принадлежит классу U . Лемма 4 доказана.

Ограничение на управление $u_3(t)$, $t \in [0, T]$, при котором можно реализовать маневр обхода, соответствующий векторной функции $\xi(t)$, имеет вид

$$P_3 \supseteq S_l(0). \quad (15)$$

Здесь $S_l(0)$ — сфера радиуса l с центром 0, $l = \mu_1 e^{\Gamma T} \|(\pi A^k B)^+\|$.

Предположение 7. Множество P_3 удовлетворяет включению (15).

6. Основное утверждение

Сформулируем достаточное условие существования решения задачи о выигрыше первого игрока.

Теорема 1. Если для игры (1) в позиции (x_0, y_0) выполнены предположения 1–7, то для этой позиции существует решение задачи о выигрыше первого игрока.

Доказательство. При выполнении предположений 1–7 управление $u(t)$ может быть получено в виде вольтерровского оператора $u(t) = U(t, v_1(\cdot), v_2(\cdot))$, где $v_i(\cdot) = \{v_i(s), 0 \leq s \leq t\}$, $v_i(s) \in Q_i$, $i = 1, 2$, — произвольная измеримая функция при $s \in [t_0, T]$, по следующей

схеме. Пусть для начальной позиции (x_0, y_0) существуют множества P_i , $i = 1, 2, 3$, и положительные параметры h, h_i, ε_i , $i = 1, \dots, l$, такие, что выполнены предположения 1–7. При управлении $u_1(t)$, выбранном как решение задачи управляемости (4), $u_2(t)$ — как решение уравнения (5) и управления $u_3(t)$, выбранном как решение уравнения (11), согласно леммам 1–4, для траектории игры (1) выполнены соотношения $\pi x(T) \in \pi M_1$, $\pi x(t) \notin \pi y(t) + \pi M_2$, $t \in [0, T]$, т.е. разрешима задача о выигрыше первого игрока. Теорема доказана.

7. Пример

Пусть уравнения игры (1) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2 = u(t) - v_1(t), & x_2(0) = x_2^0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, & y_1(0) = y_1^0, \\ \dot{y}_2 = v_2(t), & y_2(0) = y_2^0, \end{cases} \quad (16)$$

где $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$, $\|u(t)\| \leq \rho$, $\|v_i\| \leq \sigma_i = 0.3$, $i = 1, 2$, $x_1(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $x_2(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y_1(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $y_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Множество M_1 имеет вид $M_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 = (-3, 1)\}$, а множество $M_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in S_1(0)\}$, где $S_1(0)$ — круг радиуса 1 с центром в точке $(0, 0)$.

Обозначим $m_1 = (-3, 1)$, $P_1 = \{u_1 : \|u_1\| \leq \rho_1\}$, $P_2 = \{u_2 : \|u_2\| \leq \rho_2\}$, $P_3 = \{u_3 : \|u_3\| \leq \rho_3\}$, $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \leq \rho$, $\eta(t) = x_1(0) + x_2(0)t - m_1$. Гарантированное время окончания процесса управления T является решением уравнения

$$\rho_1^2 t^4 = 4(\xi_1 + 2\xi_2 t + \xi_3 t^2), \quad (17)$$

где $\xi_1 = \|x_1(0) - m_1\|^2$, $\xi_2 = (x_1(0) - m_1, x_2(0))$, $\xi_3 = \|x_2(0)\|^2$ [9]. Положим $\rho_1 = 1$. Тогда из (17) находим $T = 6.674$. Управление $u_1(t)$, $t \in [0, T]$, решающее задачу управляемости на множество M_1 , и соответствующая траектория $y(t)$, $t \in [0, T]$, имеют вид

$$u_1(t) = -\frac{\rho_1 \eta(T)}{\|\eta(T)\|}, \quad \pi z(t) = \eta(t) + m_1 - \frac{\rho_1 \eta(T) t^2}{2\|\eta(T)\|}. \quad (18)$$

Согласно предположениям 2 и 3, $k = k_1 = 1$, и для игры (16) уравнение (5) имеет решение $u_2(t) = v_1(t)$, при этом $\rho_2 = 0.3$. Перейдем к построению управления $u_3(t)$. Из (18) находим: $l = 1$, $t_0 = 1.4$ при $r = 0.6$. Положим $a(t) = (0, 0)$. Множество $(M_4(t) - a)$ при $t \geq t_0$ есть круг с центром в начале координат, радиуса $R(t) = 1 + \sigma_2(t - t_0)^2/2$. Поэтому функции $d(\pi z(t) - a, M_2^2 - a)$ и $\eta_1(t)$ имеют вид

$$d(\pi z(t) - a, M_2^2 - a) = \frac{\|\pi z(t) - a\|}{R(t)}, \quad \eta_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \notin [t_1, t_2]; \\ \frac{R(t)}{\|\pi z(t) - a\|} - 1, & \text{если } t \in [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Неравенство $\varphi(t) \geq \eta_1(t)$ выполнено при $\zeta_1 = 0.106$, $h_1 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.6$. Решение соответствующего игре (16) интегрального уравнения (11) имеет вид: $u_3(t) = (\varphi(t)(w(t) - a))'_t$. При указанных параметрах $\zeta_1, h_1, \varepsilon_1$ управление $u_3(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяет ограничению $\|u_3(t)\| \leq 11.2$, $t \in [t_1, t_2]$. На рис. 1 приведены: базовая траектория $x_1(t)$ (соответствующая управлению (18)) и кривая обхода $w_2(t)$, соответствующая выбранным параметрам $\zeta_1, h_1, \varepsilon_1$. На базовой траектории $x_1(t)$ квадратиками и цифрами обозначены точки, в которых находится вектор $x_1(t)$ в моменты времени $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6.7$. Траектория $y_1(t)$ движения третьего игрока приведена для $t \in [0, t_0]$. Ее начало и конец обозначены треугольниками. Для моментов времени $t = 1.4, 2.4, 3.4, 4.4$ изображены концентрические области — множество $\pi e^{D(t-t_0)y(t_0)} + M_4(t)$

(внутреннее множество соответствует $t = 1.4$, внешнее — $t = 4.4$). Таким образом, для игры (16) существует решение задачи о выигрыше первого игрока, если ограничение на управление первого игрока $\rho = 12.5$.

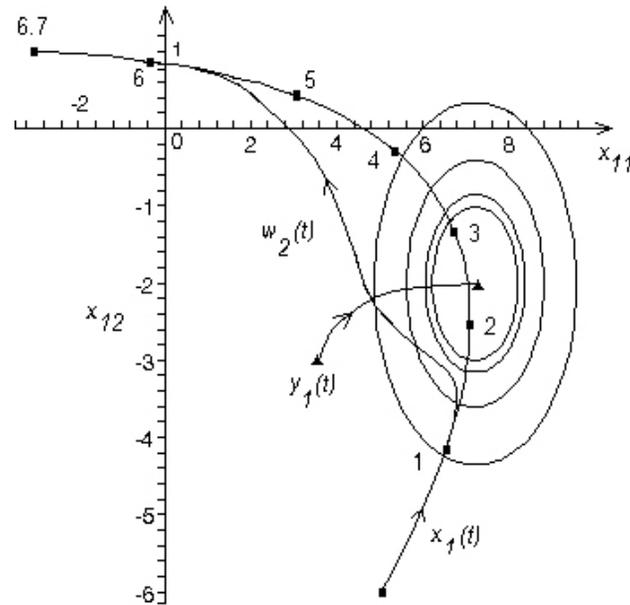


Рис.1. Траектории $x_1(t)$ и $w_2(t)$.

Поступила 03.02.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
4. Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999.
5. Понтрягин Л.С., Мищенко Е. Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 3. С. 436–445.
6. Половинкин Е.С., Балашов М. В. Элементы выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.
7. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. Метод экстремального сдвига и задачи оптимизации// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. Т. 10, № 2. С. 83–105.
8. Никольский М.С. Некоторые задачи отслеживания заданного движения при наличии помех // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1866–1873.
9. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.

УДК 519.6

ПРЯМО-ДВОЙСТВЕННЫЕ ФЕЙЕРОВСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹

И. И. Еремин

Рассматривается *S-технология*, реализующая редукцию выпуклых задач квадратичного программирования к решению систем линейных и одного выпуклого неравенств. К последним применяется тот или иной вариант фейеровского метода. Решается, в частности, вопрос о конструктивной отделимости выпуклых полиэдральных множеств слоем наибольшей толщины. Этот алгоритм играет важную роль в задачах дискриминантного анализа.

Введение

В статье пойдет речь о построении итерационных методов фейеровского типа для решения задач квадратичного программирования по такой технологии, которая позволяет наравне с решением исходной задачи получать и двойственные оценки (по терминологии Канторовича — объективно обусловленные оценки) тех или иных параметров (в их экономической или технологической интерпретации). Сказанное поясним на примере общей задачи математического программирования, записанной в форме

$$P : \min \{f_0(x) \mid f_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}.$$

На основе принципа двойственности задаче математического программирования P можно поставить в соответствие так называемую (по терминологии, принятой в линейном программировании) *симметрическую* задачу, состоящую в решении некоторой системы неравенств S (называемую также *симметрической*). В последней фигурирует как переменный вектор $x \in \mathbb{R}^n$ исходной задачи, так и переменный вектор $u \in \mathbb{R}^m$ двойственной задачи (m — число ограничений в исходной задаче).

Система S может быть подвергнута преобразованию, имеющему смысл гауссовского исключения (об этом в п. 1), в результате чего формируется система неравенств и уравнений с меньшим числом переменных — это с одной стороны, а с другой — она приспособлена для решения фейеровскими методами (п. 2).

Для дальнейшего изложения материала договоримся о следующих обозначениях и сокращениях:

\mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство;

\mathbb{E}_n — арифметическое n -мерное пространство;

$\|x\|$ — норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$, определяемая соотношением $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$, $x = [x_1, \dots, x_n]^T$;

$\alpha^+ := \max\{0, \alpha\}$, $x^+ = [x_1^+, \dots, x_n^+]^T$;

$\text{opt}P$ — оптимальное значение задачи P ;

$\text{Arg}P$ — оптимальное множество оптимизационной задачи P , т.е. совокупность тех x , в которых достигается ее оптимальное значение;

$\text{arg}P$ — конкретный вектор из $\text{Arg}P$;

¹Работа выполнена при государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-792.2003.1) и финансовой поддержке РФФИ (проекты 04-01-00108, 03-01-00565).

$F := \dots$ — символ, присваиваемый содержательному выражению, стоящему после символа “=”;

$\text{Pr}_M(x)$ — проекция точки x на множество $M \subset \mathbb{R}^n$;

ЛП — линейное программирование.

1. Математический аппарат: двойственность

Пусть функции в задаче P дифференцируемы. Тогда одна из реализаций двойственной к P задачи запишется в таком виде

$$P^* : \max \{F(x, u) \mid \nabla_x F(x, u) = 0, u \geq 0\}, \quad (1.1)$$

где $F(x, u) := f_0(x) + \sum_{j=1}^m u_j f_j(x)$ — функция Лагранжа, соответствующая задаче P . Задачи P и P^* связаны следующей теоремой (см. [1, теоремы 24.2 и 24.4]).

Теорема двойственности. *Если задача P разрешима, пусть в точке $\tilde{x} \in \text{Arg}P$, и $\exists p \in \mathbb{R}^n : W(p) = [f_1(p), \dots, f_m(p)] < 0$ (условие Слейтера), то существует вектор $\tilde{u} \geq 0$ такой, что $[\tilde{x}, \tilde{u}] \in \text{Arg}P^*$, при этом $\text{opt}P = \text{opt}P^*$, т.е. $f_0(\tilde{x}) = F(\tilde{x}, \tilde{u})$.*

Утверждение (см. [1, следствие 24.1]). *Если \bar{x} и $[x', u']$ допустимы относительно ограничений задач P и P^* , то*

$$f_0(\bar{x}) \geq F(x', u'). \quad (1.2)$$

Следствие. *Если в (1.2) выполняется равенство*

$$f_0(\bar{x}) = F(x', u'), \quad (1.3)$$

то $\bar{x} \in \text{Arg}P$ и $[x', u'] \in \text{Arg}P^$, равным образом $x' \in \text{Arg}P$.*

В связи с этим приобретает самостоятельную роль система

$$S : \quad W(x) \leq 0, \quad \nabla_x F(x, u) = 0, \quad u \geq 0, \quad f_0(x) \leq F(x, u), \quad (1.4)$$

к которой сводится задача нахождения решения как задачи P (исходной), так и двойственной P^* (двойственной к P). Будем называть систему (1.4) *симметрической* (как и в линейном программировании).

2. S-технология

Как было отмечено в п. 1, на основе принципа двойственности решение исходной задачи выпуклого программирования может быть сведено к решению системы неравенств и уравнений (1.4). Сама по себе эта система может быть достаточно трудной для отыскания ее решения, но для некоторых классов задач такая трудность может быть преодолена, например, за счет применения к системе S гауссовских исключений. Поясним это обстоятельство.

Пусть имеется некоторая конечная система уравнений и неравенств с векторным аргументом $x \in \mathbb{E}_n$:

$$g_j(x) = 0, \quad j \in J_=; \quad g_i(x) \leq 0, \quad i \in J_\leq. \quad (2.1)$$

Если в каком-либо уравнении этой системы одну из переменных можно однозначно выразить через остальные переменные, то подстановку этой переменной в остальные соотношения системы (2.1) назовем *элементарным гауссовским исключением*. Последовательность элементарных исключений назовем просто гауссовским исключением. Такие исключения сохраняют известные свойства гауссовских исключений для конечных систем линейных уравнений. Элементарное гауссовское исключение можно применить и к неравенству. Пусть $g_k(x) \leq 0, k \in J_\leq$.

Это неравенство можно переписать в форме $g_k(x) + x_{n+1} = 0$, $x_{k+1} \geq 0$, а далее действовать по описанному правилу.

Гауссовские исключения, как и в случае конечных систем линейных уравнений, позволяют получать системы с более простой структурой (не только в смысле меньшего числа переменных).

Приведем схему редукции оптимизационной задачи P к системе неравенств и уравнений, удобной для ее численной реализации:

$$\begin{array}{c} P \\ \searrow \\ \downarrow \\ P^* \nearrow \end{array} \quad S \xrightarrow{T} \tilde{S} \longrightarrow T(\cdot) \in \mathcal{F}_{\tilde{M}}$$

Схема 1.

Пояснения к схеме:

P — исходная оптимизационная задача;

P^* — двойственная к ней задача;

S — симметрическая система;

\tilde{S} — система уравнений и неравенств — как результат применения к S целесообразно выбранных элементарных гауссовских исключений;

$T(\cdot) \in \mathcal{F}_{\tilde{M}}$ означает выбор конкретного итерационного оператора $T(\cdot)$ из класса \tilde{M} -фейеровских операторов $\mathcal{F}_{\tilde{M}}$, где $\tilde{M} = \text{Arg } \tilde{S}$ (см. п. 3).

В целом совокупность процедур в соответствии со схемой 1 назовем *S-технологией*. Ниже материал, приведенный в п. 2, иллюстрируется на примерах задач выпуклого квадратичного программирования, в частности, задач делимости выпуклых полиэдральных множеств слоем максимальной толщины.

3. Фейеровские процессы [2, гл. II и III]

Базовым понятием, лежащим в основании фейеровских методов, является понятие M -фейеровского отображения $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такого, что образ $T(x)$ элемента $x \notin M$ ближе к любой точке $y \in M$, чем x , при этом $T(y) = y$, $\forall y \in M$. Здесь M — выпуклое замкнутое множество из \mathbb{R}^n . Простейшим примером M -фейеровского отображения является оператор метрического проектирования на $M : \text{Pr}_M(x)$. Поэтому на M -фейеровское отображение можно смотреть как на некоторое обобщение операции метрического проектирования. Обозначим класс M -фейеровских отображений через \mathcal{F}_M . В прикладных аспектах M -фейеровские отображения конструируются, как из элементарных кирпичиков, из простых проектирований на простые множества: гиперплоскость, полупространство, параллелепипед, неотрицательный ортант, линейное многообразие, задаваемое конечной системой линейных уравнений.

Приведем пример. Пусть

$$M := \{x \mid l_j(x) := (a_j, x) - b_j \leq 0, j = 1, \dots, m\},$$

т.е. M — множество решений конечной системы линейных неравенств. Положим $M_j := \{x \mid l_j(x) \leq 0\}$, $T(x) := \sum_{j=1}^m \alpha_j \text{Pr}_{M_j}(x)$, где $\alpha_j > 0$, $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$. Отображение $T(x)$, синтезированное из элементарных проектирований, является непрерывным M -фейеровским, при этом $\{x_{k+1} = T(x_k)\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow x' \in M$.

Методы фейеровского типа, соотнесенные к задачам решения систем линейных и выпуклых неравенств, а также задач линейного и выпуклого программирования, развиты достаточно хорошо [3]. Ниже остановимся кратко на основных свойствах и теоремах, относящихся к теории

фейеровских операторов и порождаемых ими процессов, сходящихся к решению той или иной поставленной задачи.

3.1. Исходные определения, понятия и утверждения

Пусть T — однозначное отображение из X в X и $\text{Fix } T =: M \neq \emptyset$. Здесь $\text{Fix } T$ — множество точек неподвижности отображения T .

О п р е д е л е н и е 3.1. Отображение $T \in \{X \rightarrow X\}$ называется M -фейеровским, если для него выполняются соотношения

$$T(y) = y, \quad \|T(x) - y\| < \|x - y\|, \quad \forall y \in M, \quad \forall x \notin M. \quad (3.1)$$

О п р е д е л е н и е 3.2. Многозначное отображение $T \in \{X \rightarrow 2^X\}$ называется M -фейеровским, если выполняются соотношения

$$T(y) = y, \quad \|z - y\| < \|x - y\|, \quad \forall y \in M, \quad \forall z \in T(x), \quad \forall x \notin M. \quad (3.2)$$

Приведем пример такого отображения.

Пусть $M := \{x \mid f_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\} \neq \emptyset$, $\{f_j(x)\}_1^m$ — выпуклые функции, $d(x) = \max_{(j)} f_j(x)$, $J(x) := \{j \mid d(x) = f_j(x)\}$. Положим

$$T(x) := \left\{ x - \lambda \frac{d^+(x)}{\|h\|^2} h \mid h \in \sum_{j \in J(x)} \alpha_j \partial f_j(x), \alpha_j > 0, \sum_{j \in J(x)} \alpha_j = 1 \right\}, \quad (3.3)$$

$0 < \lambda < 2$, $\partial f_j(x)$ — субдифференциал выпуклой функции $f_j(x)$. Отображение (3.3) удовлетворяет определению 3.2.

Обозначим через \mathcal{F}_M класс M -фейеровских (как однозначных, так и многозначных) отображений. В дальнейшем будем использовать понятие замкнутости отображения $T \in \mathcal{F}_M$, которое состоит в выполнении следующей импликации:

$$(\{x_k\} \rightarrow x', \{y_k\} \rightarrow y', y_k \in T(x_k)) \implies y' \in T(x'). \quad (3.4)$$

Класс замкнутых M -фейеровских отображений будем обозначать $\overline{\mathcal{F}}_M$. Если отображение $T \in \mathcal{F}_M$ однозначно и замкнуто, то оно непрерывно.

О п р е д е л е н и е 3.3. Последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ называется M -фейеровской, если

$$\{x_k\} \cap M = \emptyset, \quad \|x_{k+1} - y\| < \|x_k - y\|, \quad \forall y \in M, \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

О п р е д е л е н и е 3.4. Последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ назовем *почти M -фейеровской*, если

$$\{x_k\} \cap M = \emptyset, \quad \|x_{k+1} - y\| \leq \|x_k - y\|, \quad \forall y \in M, \quad \forall k = 0, 1, \dots,$$

причем эта последовательность содержит M -фейеровскую подпоследовательность, т.е. $\exists \{x_{j_k}\} \subset \{x_k\}$:

$$\|x_{j_{k+1}} - y\| < \|x_{j_k} - y\|, \quad \forall y \in M, \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

П р и м е ч а н и е к определению 3.4. Если из почти M -фейеровской последовательности убрать возможные повторения, то останется последовательность, именуемая слабо M -фейеровской, что соответствует следующему определению.

О п р е д е л е н и е 3.5. Последовательность $\{x_k\}$ называется *слабо M -фейеровской*, если

$$\{x_k\} \cap M = \emptyset, \quad \|x_{k+1} - y\| \leq \|x_k - y\|, \quad \forall y \in M, \quad x_{k+1} \neq x_k, \quad \forall k. \quad (3.7)$$

Заметим, что такие последовательности порождаются слабо M -фейеровскими отображениями T со следующим их определением:

$$T(y) = y, \quad \|T(y) - y\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in M, \quad \forall x \notin M, \quad T(x) \neq x. \quad (3.8)$$

Легко проверить свойство: если $T(x)$ — слабо M -фейеровское, то $T_\alpha(x) := \alpha T(x) + (1 - \alpha)x$ является M -фейеровским при $\alpha \in (0, 1)$.

Ниже будем полагать $X = \mathbb{R}^n$.

Перечислим некоторые необходимые для дальнейшего свойства и факты, относящиеся к M -фейеровским отображениям и M -фейеровским последовательностям [2, гл. II].

1⁰. Если $\mathcal{F}_M \neq \emptyset$, то множество M автоматически выпукло и замкнуто.

2⁰. Если M выпукло и телесно, то любая M -фейеровская последовательность $\{x_k\}$ сходится к некоторому $x' \in \mathbb{R}^n$.

3⁰. Если $T \in \mathcal{F}_M$ и последовательность $\{x_k\}$ порождена процессом

$$\{x_{k+1} \in T(x_k)\}_{k=0}^\infty, \quad (3.9)$$

причем $\{x_k\} \cap M = \emptyset$, то $\{x_k\}$ — M -фейеровская.

4⁰. Если $\{x_k\}$ — M -фейеровская последовательность и некоторая предельная ее точка x' принадлежит M , то $\{x_k\} \rightarrow x'$.

Утверждение 3.1. Если $T \in \mathcal{F}_M$ и $T(x)$ непрерывно, то

$$\{x_{k+1} = T(x_k)\}_{k=0}^\infty \rightarrow x' \in M.$$

Утверждение 3.2. Если $T \in \overline{\mathcal{F}}_M$, то

$$\{x_{k+1} \in T(x_k)\}_{k=0}^\infty \rightarrow x' \in M.$$

Поскольку, как уже отмечалось, отображение (3.3) является замкнутым M -фейеровским, то в силу утверждения 3.2 процесс типа (3.9) сходится к решению совместной системы выпуклых неравенств $f_j(x) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$.

Можно сразу же заметить, что так как любая задача ЛП сводится просто к решению некоторой конструктивно выписываемой системы линейных неравенств, то рассмотренный подход может быть применен и к решению задачи ЛП.

3.2. Базовые конструкции фейеровских отображений

Как уже отмечалось, оператор $\text{Pr}_M(x)$ метрического проектирования на выпуклое замкнутое множество является непрерывным M -фейеровским. Проектирование на простейшие выпуклые множества осуществляется весьма просто, к таким простым (элементарным) множествам можно отнести гиперплоскость, полупространство, параллелепипед, неотрицательный ортант, шар и др. Если имеется некоторая совокупность простых выпуклых множеств $M_j \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$ и соответствующая совокупность операторов проектирования на них $\text{Pr}_{M_j}(x)$, $j = 1, \dots, m$ (они являются M_j -фейеровскими), то из этих элементарных проектирований можно конструировать (разными способами) более сложные фейеровские отображения относительно множества $M := \bigcap_{j=1}^m M_j \neq \emptyset$.

Приведем базовые конструкции такого рода, которые ниже будут даны с более общих позиций.

Итак, пусть $T_j \in \mathcal{F}_{M_j}$, $j = 1, \dots, m$ и $M := \bigcap_{j=1}^m M_j \neq \emptyset$.

Утверждение 3.3. *Справедлива импликация*

$$(T_j \in \mathcal{F}_{M_j}, j = 1, \dots, m) \implies T^\alpha(x) := \sum_{j=1}^m \alpha_j T_j(x) \in \mathcal{F}_M, \quad (3.10)$$

здесь $\alpha_j > 0$, $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$.

Утверждение 3.4. *Если $\sigma := (j_1, \dots, j_m)$ — любое упорядочение индексов $j = 1, \dots, m$, то*

$$T^{(\sigma)}(x) := T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_m}(x) \in \mathcal{F}_M. \quad (3.11)$$

Примечание 3.1. Если в этих утверждениях $\{T_j(x)\}_1^m$ непрерывны, то $T^{(\alpha)}(x)$ и $T^{(\sigma)}(x)$ непрерывны; если же они замкнуты, то $T^\alpha(x)$ и $T^{(\sigma)}(x)$ также замкнуты. Следовательно, к последним можно применить утверждения 3.1 и 3.2 о сходимости процессов, ими порождаемых.

Рассмотрим еще одну конструкцию отображения $T \in \mathcal{F}_M$, получаемого из $\{T_j\}_1^m$. Пусть для множеств M_j заданы функции $d_j(x)$, обладающие свойством: $d_j(y) = 0$ для $y \in M_j$ и $d_j(x) > 0$ для $x \notin M_j$. Будем считать эти функции выпуклыми. Введем $d(x) := \max_{(j)} d_j(x)$ и $J(x) := \{j \mid d(x) = d_j(x)\}$ (эта ситуация копирует уже рассмотренные ситуации).

Введем отображение

$$T(x) := \text{conv}\{T_{j_x}(x) \mid j_x \in J(x)\}; \quad (3.12)$$

здесь conv — символ выпуклой оболочки множеств, стоящих в скобках $\{ \}$.

Утверждение 3.5. *Отображение (3.12) является M -фейеровским, при этом если $\{T_j(x)\}_1^m$ замкнуты, то отображение $T(x)$ замкнуто.*

Примечание 3.2. В утверждениях 3.3–3.5 все множества M_j , $j = 1, \dots, m$, могут совпадать, при этом содержательность этих утверждений не утрачивается. Более того, эти частные утверждения подчеркивают в явном виде тот важный факт, что из всякой конечной совокупности M -фейеровских отображений можно строить новые отображения из \mathcal{F}_M способами, зафиксированными в утверждениях 3.3–3.5. Из этих утверждений следует, что класс отображений \mathcal{F}_M замкнут относительно выпуклой суммы любой конечной совокупности отображений из \mathcal{F}_M и относительно любой их суперпозиции, т.е. \mathcal{F}_M является своего рода выпуклой алгеброй.

Как показывают выше сформулированные общие теоремы о фейеровских операторах, потенциал их конструирования относительно выпуклых множеств, задаваемых тем или иным способом, исключительно велик. Это обстоятельство является важным, ибо в конкретных случаях возникает возможность подбора итерационного оператора, который в конкретной ситуации был бы наиболее эффективным. Сказанное особенно применимо в условиях задания множеств смешанными системами линейных и выпуклых неравенств.

Приведем одну из фейеровских конструкций применительно к множеству решений системы, включающей подсистему линейных неравенств, подсистему линейных уравнений и одно выпуклое неравенство:

$$\left. \begin{aligned} Ax \leq b &\sim l_j(x) := (a_j, x) - b_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, m; & (\alpha) \\ Bx = d &\sim s_i(x) := (h_i, x) - d_i = 0, \quad i = 1, \dots, k; & (\beta) \\ f(x) &:= \frac{1}{2} x^T Qx + (c, x) - \alpha_0 \leq 0; & (\gamma) \\ x &\geq 0. & (\delta) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Матрица Q в (3.13) предполагается неотрицательно определенной, так что функция $f(x)$ является выпуклой. Система (3.13) имеет именно ту структуру, которая в последующих параграфах будет возникать как итог S -технологий применительно к различным задачам квадратичного программирования.

Множества решений подсистем (α) , (β) и (γ) обозначим через M_1 , M_2 и M_3 соответственно. Условие $x \geq 0$ задает неотрицательный ортант \mathbb{R}_+^n пространства \mathbb{R}^n . Запишем конкретные отображения $V(\cdot) \in \mathcal{F}_{M_1}$, $W(\cdot) \in \mathcal{F}_{M_2}$ и $S(\cdot) \in \mathcal{F}_{M_3}$:

$$V(x) = x - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{l_j^+(x)}{\|a_j\|^2} a_j, \quad W(x) = x - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{s_i(x)}{\|h_i\|^2} h_i, \quad S(x) = x - \frac{f^+(x)}{\|Qx\|^2} Qx.$$

Среднее арифметическое этих операторов будет принадлежать классу \mathcal{F}_M , где $M = \bigcap_{i=1}^3 M_i$. Остается учесть требование $x \geq 0$, что осуществляется операцией “+”. Итоговый оператор может быть записан в следующем виде:

$$\Phi(x) := \left[\frac{1}{3}(V(x) + W(x) + S(x)) \right]^+.$$

Этот оператор является \widetilde{M} -фейеровским и непрерывным, где \widetilde{M} — множество решений системы (3.13). Следовательно, процесс, генерируемый соотношением

$$x_{k+1} = \Phi(x_k),$$

сходится к некоторому решению системы (3.13) (при произвольном начальном $x_0 \in \mathbb{R}^n$).

4. Иллюстрации применения S -технологии для задач квадратичного программирования

Остановимся на двух примерах.

1⁰. Рассмотрим задачу проектирования точки $p \in \mathbb{R}^n$ на линейное многообразие, задаваемое системой линейных уравнений. Задачу можно записать так:

$$\min \left\{ f_0(x) := \frac{1}{2} \|x - p\|^2 \mid Ax = b \right\}. \quad (4.1)$$

Сформируем ее функцию Лагранжа

$$F(x, u) = \frac{1}{2} \|x - p\|^2 + (Ax - b, u)$$

и систему S , содержательно отвечающую системе (1.4):

$$Ax = b, \quad \nabla_x F(\cdot) = x - p + A^T u = 0. \quad (4.2)$$

В предположении линейной независимости строк матрицы A из (4.2) весьма просто получается хорошо известная формула

$$\text{Pr}_H(p) = p - A^T(AA^T)^{-1}(Ap - b) \quad (4.3)$$

вычисления проекции точки p на многообразие $H := \{x \mid Ax = b\}$.

В случае, когда требование линейной независимости строк матрицы A отсутствует, проекция находится как решение системы линейных уравнений (4.2). Точнее: если найдено решение $[\bar{x}, \bar{u}]$, то $\bar{x} = \text{Pr}_H(p)$.

2⁰. Рассмотрим задачу

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|x - p\|^2 \mid Ax \leq b \right\}, \quad (4.4)$$

т.е. задачу проектирования точки $p \in \mathbb{R}^n$ на многогранник $M := \{x \mid Ax \leq b\}$. Функция Лагранжа для задачи (4.4) имеет тот же вид, что и для задачи (4.1), но в этом случае присутствует требование $u \geq 0$. Запишем аналог системы S , т.е. системы (1.4) (применительно к задаче на \min):

$$Ax \leq b, \quad x - p + A^T u = 0, \quad u \geq 0, \quad 0 \leq (Ax - b, u). \quad (4.5)$$

В соответствии с S -технологией (см. схему 1) преобразуем систему (4.5). Получив переменную x из второго соотношения и подставив в остальные, получаем систему

$$A(p - A^T u) \leq b, \quad u \geq 0, \quad (A^T u, p - A^T u) - (b, u) \geq 0,$$

или

$$-(AA^T)u \leq b - Ap, \quad u \geq 0, \quad u^T(AA^T)u - (Ap - b, u) \leq 0. \quad (4.6)$$

Эта система содержит линейные неравенства и одно выпуклое. К ней применим любой из фейеровских методов ее решения. Если \bar{u} — решение (точное или приближенное), то

$$\bar{x} = p - A^T \bar{u}$$

— точная (или приближенная) проекция точки p на M .

5. Общий случай задачи выпуклого квадратичного программирования

Рассмотрим общую задачу квадратичного программирования

$$P : \min \left\{ \underbrace{\frac{1}{2}(x-p)^T Q(x-p) + (c, x)}_{f(x)} \mid Ax \leq b, Bx = d \right\}. \quad (5.1)$$

Будем предполагать Q — положительно определенная матрица. Пусть $F(x, u, v) := f(x) + (Ax - b, u) + (Bx - d, v)$ — функция Лагранжа, отвечающая задаче (5.1). В определении $F(x, u, v)$ переменные $u \geq 0$ и v — векторы множителей Лагранжа (*двойственные переменные*). Запишем функцию $F(x, u, v)$, соотношение $\nabla_x F(x, u, v) = 0$ и неравенство $f(x) \leq F(x, u, v)$ в формате матричных умножений:

$$F(x, u, v) = \frac{1}{2}(x-p)^T Q(x-p) + c^T x + u^T(Ax - b) + v^T(Bx - d), \quad (5.2)$$

$$\nabla_x F(x, u, v) = Q(x-p) + c + A^T u + B^T v = 0, \quad (5.3)$$

$$b^T u + d^T v \leq x^T(A^T u + B^T v) \quad (= (A^T u + B^T v)^T x). \quad (5.4)$$

Из (5.3) находим x :

$$x = p - Q^{-1}(A^T u + B^T v + c). \quad (5.5)$$

Подставляя x согласно (5.5) в неравенство (5.4), получаем

$$b^T u + d^T v \leq (A^T u + B^T v)^T [p - Q^{-1}(A^T u + B^T v + c)], \quad (5.6)$$

или в преобразованном виде

$$(A^T u + B^T v)^T Q^{-1}(A^T u + B^T v) + b^T u + d^T v \leq (A^T u + B^T v)^T (p - Q^{-1}c). \quad (5.7)$$

Неравенство (5.7) является выпуклым относительно переменной $z := \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Правая часть в (5.7) может быть записана так:

$$(A^T u + B^T v)^T (p - Q^{-1}c) = (p - Q^{-1}c)^T (A^T u + B^T v),$$

что дает возможность неравенство (5.7) переписать в виде

$$(A^T u + B^T v)^T Q^{-1}(A^T u + B^T v) + (b^T + (Q^{-1}c - p)^T A^T)u + (d^T + (Q^{-1}c - p)^T B^T)v \leq 0 \quad (5.8)$$

— это выпуклое неравенство. Чтобы получить систему в целом, надо x из (5.5) подставить в ограничения задачи (5.1), т.е.

$$A(p - Q^{-1}(A^T u + B^T v + c)) \leq b, \quad B(p - Q^{-1}(A^T u + B^T v + c)) = d. \quad (5.9)$$

Соединив выпуклое неравенство (5.8) с системой линейных неравенств (5.9) и с требованием неотрицательности u , т.е. $u \geq 0$, получим систему, которую можно решать любым из вариантов фейеровских методов. Если найдено ее решение \tilde{u} (точное или приближенное), то, подставив его в формулу (5.5), получим точное (или приближенное) решение \bar{x} задачи (5.1).

6. Частный случай

Из постановки задачи (5.1), записанной в самом общем виде, выделим частный случай, имеющий самостоятельное актуальное значение:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} x^T Q x + (c, x) \mid Ax \leq b \right\}, \quad (6.1)$$

где Q — положительно определенная матрица. При этом предположении и условии непустоты $M := \{x \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$ задача (6.1) разрешима, причем ее решение единственно. В соответствии с общей схемой формирования двойственной задачи (см. п. 1) будем иметь

$$\max \{F(x, u) \mid Qx + c + A^T u = 0, u \geq 0\}, \quad (6.1)^*$$

где $F(x, u) = \frac{1}{2} x^T Q x + (c, x) + (u, Ax - b)$.

Выпишем теперь симметрическую задачу

$$Ax \leq b, \quad x = -Q^{-1}(c + A^T u), \quad u \geq 0, \quad (u, Ax - b) \geq 0. \quad (6.2)$$

Систему (6.2) можно преобразовать к виду

$$-A Q^{-1}(c + A^T u) \leq b, \quad u \geq 0, \quad -(A^T u, Q^{-1}(c + A^T u)) - (b, u) \geq 0,$$

или

$$-A Q^{-1} A^T u \leq b + A Q^{-1} c, \quad u \geq 0, \quad (A^T u, Q^{-1} A^T u) + (A Q^{-1} c + b, u) \leq 0. \quad (6.3)$$

Эта система состоит из подсистемы линейных неравенств и одного выпуклого неравенства. К ней можно, как уже и отмечалось ранее, применить тот или иной фейеровский метод. Опять-таки, если найдено решение \tilde{u} системы, то решение исходной задачи будет вычисляться по формуле

$$\bar{x} = -Q^{-1}(c + A^T \tilde{u})$$

(см. (6.2)).

Теперь на задачу (6.1) посмотрим иначе. Рассмотрим задачу последовательного программирования

$$\left. \begin{aligned} L : \min \{(c, x) \mid Ax \leq b\} & \text{ — задача ЛП,} \\ \min \{(1/2) x^T Q x \mid x \in \text{Arg} L\}. & \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Известно [4, § 38], что если L разрешима, то при достаточно малом $\alpha > 0$ задача (6.4) эквивалентна (по совпадению Arg) задаче

$$\min \left\{ (c, x) + \alpha \frac{1}{2} x^T Q x \mid Ax \leq b \right\}, \quad (6.5)$$

т.е. задаче (6.1) с наличием коэффициента $\alpha > 0$. Следовательно, система (6.3) как раз и решает задачу (6.4), нужно лишь в системе (6.3) повсюду вместо Q писать αQ .

В практическом плане небесполезно получить формулу для решения задачи квадратичного программирования при наличии ограничений в форме системы линейных уравнений

$$\min \left\{ \frac{1}{2} (x - p)^T Q (x - p) + (c, x) \mid Ax = b \right\}. \quad (6.6)$$

В (6.6) будем считать, что строки в матрице A линейно независимы (что, в частности, гарантирует невырожденность матрицы AA^T и существование обратной к ней матрицы $(AA^T)^{-1}$). Запишем для задачи (6.6) функцию Лагранжа

$$F(x, u) = \underbrace{\frac{1}{2} (x - p)^T Q (x - p) + (c, x)}_{f(x)} + (u, Ax - b)$$

и градиент этой функции

$$\nabla_x F(x, u) = Q(x - p) + c + A^T u.$$

Симметрическая система, соответствующая задаче (6.6), будет иметь вид

$$Ax = b, \quad \nabla_x F(x, u) = 0, \quad f(x) = F(x, u) \quad (6.7)$$

(заметим, что u — свободная переменная). Систему (6.7) можно переписать в эквивалентной форме

$$Ax = b, \quad Q(x - p) + c + A^T u = 0. \quad (6.8)$$

В (6.8) отсутствует соотношение $f(x) = F(x, u)$, ибо оно вырождается в силу соотношения $Ax = b$, которое в (6.8) присутствует. Из (6.8) следует

$$x = p - Q^{-1}(c + A^T u). \quad (6.9)$$

Подставляя это соотношение в систему $Ax = b$, получаем (после элементарных преобразований)

$$u = (AQ^{-1}A^T)^{-1}(Ap - b + AQ^{-1}c). \quad (6.10)$$

В тех предположениях, которые мы приняли для задачи (6.6), вектор u из (6.7), равным образом и x , определяются однозначно и задаются формулами (6.10) и (6.9).

Заметим, что при $Q = E$ и $c = 0$ задача (6.6) — это задача проектирования точки p на линейное многообразие, задаваемое системой линейных уравнений $Ax = b$ (в предположении линейной независимости строк матрицы A). Сама проекция, как уже отмечалось в п. 4, задается формулой (4.3).

7. Отделимость двух непересекающихся многогранников

Пусть заданы два непересекающихся множества

$$M := \{x \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset \quad \text{и} \quad N := \{y \mid By \leq d\} \neq \emptyset, \quad (7.1)$$

которые подлежат разделению слоем наибольшей толщины.

Употребим термин *сильная отделимость*, что будет означать отделимость многогранников M и N слоем наибольшей толщины. Сильная отделимость эквивалентна, по существу, задаче отыскания расстояния между M и N в смысле метрики

$$\rho(M, N) := \min \{ \|x - y\| \mid x \in M, y \in N \}. \quad (7.2)$$

Если $\bar{x} \in M$ и $\bar{y} \in N$ являются arg-точками задачи (7.2), т.е. $\text{opt}(7.2) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$, то слоем наибольшей толщины, разделяющим множества (7.1), будет $P := P_1 \cap P_2$, где P_1 и P_2 — полупространства, задаваемые линейными неравенствами

$$(x - \bar{x}, \bar{x} - \bar{y}) \leq 0 \quad \text{и} \quad (y - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y}) \geq 0$$

соответственно.

Гиперплоскость

$$H := \left\{ x \mid \left(x - \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, \bar{x} - \bar{y} \right) = 0 \right\}$$

будем называть *сильно разделяющей* многогранники M и N *гиперплоскостью*.

Перепишем задачу (7.2) в форме

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \mid Ax \leq b, By \leq d \right\}. \quad (7.3)$$

Цель: свести ее к решению некоторой системы выпуклых неравенств (точнее, к системе линейных неравенств и одному выпукло-квадратичному неравенству).

Сформулированная задача является важной в связи с актуальностью вопросов строгой разделимости гиперплоскостью непересекающихся выпуклых множеств (пусть, многогранников) в дискриминантном анализе. Вопросы разделимости многогранников хорошо разработаны. Более сложная задача — это задача о разделимости слоем наибольшей толщины, что эквивалентно задаче отыскания точек из M и N , реализующих $\min_{\substack{x \in M \\ y \in N}} \|x - y\|$.

Итак, рассмотрим задачу (7.3). Запишем ее функцию Лагранжа:

$$F(x, y, ; u, v) := \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + (Ax - b, u) + (By - d, v), \quad [u, v] \geq 0.$$

Подсчитаем

$$\nabla_{x,y} F(x, y; u, v) = 0 \sim x - y + A^T u = 0, \quad y - x + B^T v = 0. \quad (7.4)$$

Для формирования симметрической задачи нужно сформировать неравенство

$$\frac{1}{2} \|x - y\|^2 \leq F(x, y; u, v) = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + (A^T u, x) - (b, u) + (B^T v, y) - (d, v),$$

или

$$0 \leq (A^T u, x) + (B^T v, y) - (b, u) - (d, v). \quad (7.5)$$

Подставляя в (7.5) $A^T u$ и $B^T v$ из (7.4), получаем $\|x - y\|^2 + (b, u) + (d, v) \leq 0$. В итоге получаем систему

$$\left. \begin{aligned} Ax \leq b, \quad By \leq d; & \quad (7.6)_1 \\ x - y = -A^T u; & \quad (7.6)_2 \\ x - y = B^T v; & \quad (7.6)_3 \\ \|x - y\|^2 + (b, u) + (d, v) \leq 0; & \quad (7.6)_4 \\ [u, v] \geq 0. & \quad (7.6)_5 \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Имея ввиду (7.6)₂, величину $\|x - y\|^2 (= (x - y, x - y))$ можно заменить на $(A^T u, A^T u) = u^T (AA^T) u$. Так как $x = y - A^T u$, то, подставляя это значение в (7.6)₁ и (7.6)₃, получим заключительную систему:

$$\left. \begin{aligned} A(y - A^T u) &\leq b, & By &\leq d, \\ A^T u + B^T v &= 0, \\ u^T (AA^T) u + (b, u) + (d, v) &\leq 0, \\ [u, v] &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Система (7.7) содержит подсистему линейных относительно $[y, u, v]$ неравенств и одно выпуклое квадратичное неравенство. Найдя ее решение $[\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}]$, по формуле $x = \bar{y} - A^T \bar{u}$ находим вектор \bar{x} , который в паре с \bar{y} дает точки из M и N , реализующие расстояние между множествами. По \bar{x} и \bar{y} строится сильно разделяющий M и N слой, т.е. разделяющий слой наибольшей толщины.

Вместе с тем будет определена сильно разделяющая гиперплоскость

$$H = \left\{ x \mid \left(x - \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, \bar{x} - \bar{y} \right) = 0 \right\}.$$

Поступила 17.12.2005

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976.
2. **Еремин И.И., Мазуров В.Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979.
3. **Бердникова Е.А., Еремин И.И., Попов Л.Д.** Распределенные фейеровские процессы для систем линейных неравенств и задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 16–32.
4. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: изд-во “Екатеринбург”, 1999.

УДК 517.928

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В СЛУЧАЕ ДВУХ РЕШЕНИЙ ПРЕДЕЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ¹**

А. М. Ильин, С. Ф. Долбеева

В настоящей статье изучается асимптотика решения начальной задачи

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, t, \varepsilon), \quad x(t_0) = A, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Эта задача давно и достаточно хорошо изучена в случае, когда существует одно устойчивое решение предельного уравнения

$$f(x(t), t, 0) \equiv 0. \quad (2)$$

(Подробная библиография имеется в [1]). Значительно сложнее обстоит дело в том случае, когда уравнение (2) имеет несколько решений и их графики пересекаются. Асимптотика решений различных задач подобного рода изучалась в ряде работ (см., например, [2–6]), однако в них лишь выяснялся предел решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ и устанавливались оценки разности между допредельным и предельным решениями. Более полное исследование асимптотического разложения не проводилось.

В этой статье для задачи (1) в случае, когда уравнение (2) имеет два решения, графики которых пересекаются, при естественных дополнительных предположениях строится равномерное асимптотическое разложение решения с точностью до любой степени ε . Краткое изложение результата опубликовано в [8].

Будем предполагать выполненными следующие условия:

1. Функция $f(x, t, \varepsilon)$ бесконечно дифференцируема при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на множестве $D = \{x, t : t_0 \leq t \leq t_1, |x| \leq B\}$.
2. Существуют функции $\varphi_1(t) \in C^\infty[t_0, t_1]$ и $\varphi_2(t) \in C^\infty[t_0, t_1]$ такие, что $|\varphi_j(t)| < B$, $f(\varphi_j(t), t, 0) \equiv 0$, $j = \overline{1, 2}$, $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$ при $t < t^*$, $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ при $t > t^*$.
3. Без ограничения общности будем считать, что $t^* = 0$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ и, следовательно, $f(0, 0, 0) = 0$. Предположим, что при $t < 0$ решение $\varphi_1(t)$ устойчиво, а $\varphi_2(t)$ неустойчиво. Под этим понимается, что при $t < 0$ справедливы неравенства $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), t, 0) < 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_2(t), t, 0) > 0$.
При $t > 0$ будем считать, что решение $\varphi_2(t)$ устойчиво, а $\varphi_1(t)$ неустойчиво, то есть $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), t, 0) > 0$, а $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_2(t), t, 0) < 0$.
4. Начальное значение A находится в области влияния решения $\varphi_1(t)$, то есть $|A| < B$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t_0, 0) < 0$ для всех значений x между A и $\varphi_1(t_0)$.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 05-01-01008, 06-01-00124, НШ-1446.2003.1).

При этих условиях $x(t, \varepsilon)$ — решение задачи (1) — стремится к $\varphi_1(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $t_0 < t < -\delta$, $\forall \delta > 0$. На отрезке $[t_0, -\delta]$ справедливо равномерное асимптотическое разложение [1]:

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon} \right). \quad (3)$$

Однако при достаточно малых δ асимптотика перестает быть равномерной, и дальнейшее поведение решения $x(t, \varepsilon)$ в окрестности нуля и при $t > 0$ (если оно продолжимо) не столь тривиально.

Из взаимного расположения графиков функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ вытекает, что $\varphi_1'(0) \leq \varphi_2'(0)$. Дополнительно предположим, что

$$\varphi_1'(0) < \varphi_2'(0). \quad (4)$$

Лемма 1. При указанных выше предположениях справедливы соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) \leq 0.$$

Доказательство. Так как $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), t, 0) < 0$ при $t < 0$, а $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), t, 0) > 0$ при $t > 0$, то, следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = 0$ и $\left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), t, 0) \right) \right|_{t=0} \geq 0$.

Аналогично, $\left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_2(t), t, 0) \right) \right|_{t=0} \leq 0$. Значит,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(0, 0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) \varphi_1'(0) \geq 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(0, 0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) \varphi_2'(0) \leq 0.$$

С учетом неравенства (4) получаем, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) \leq 0$.

Для доказательства равенства $\frac{\partial f}{\partial t}(0, 0, 0) = 0$ рассмотрим тождество $f(\varphi_1(t), t, 0) \equiv 0$. Учитывая разложение этой функции в ряд Тейлора в начале координат, получаем

$$f(\varphi_1(t), t, 0) = f\left(t\varphi_1'(0) + O(t^2), t, 0\right) = \left[t\varphi_1'(0) + O(t^2)\right] \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) + t \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0, 0) + O(t^2).$$

Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial t}(0, 0, 0) = 0$. \square

Дополнительное условие, которое мы будем предполагать и которое (так же, как и условие (4)) соответствует ситуации общего положения, следующее:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) = -2\gamma^2 < 0.$$

Лемма 2. При условиях, наложенных на функцию $f(x, t, \varepsilon)$, справедливо равенство

$$f(x, t, \varepsilon) = -\gamma^2(x - \varphi_1'(0)t)(x - \varphi_2'(0)t) + O(\varepsilon + |x|^3 + |t|^3).$$

Доказательство. В тождестве $f(\varphi_j(t), t, 0) \equiv 0$, $j = \overline{1, 2}$, разложим функцию $f(\varphi_j(t), t, 0)$ в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f(\varphi_j(t), t, 0) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0)[\varphi_j(t)]^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(0, 0, 0)t\varphi_j(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(0, 0, 0)t^2 + O(t^3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0)[t\varphi'_j(0)]^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(0, 0, 0)t^2\varphi'_j(0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(0, 0, 0)t^2 + O(t^3). \end{aligned}$$

Следовательно, многочлен $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0)z^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(0, 0, 0)z + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(0, 0, 0)$ имеет корни $\varphi'_1(0)$ и $\varphi'_2(0)$ и равен

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) \left(z - \varphi'_1(0) \right) \left(z - \varphi'_2(0) \right) = -\gamma^2 \left(z - \varphi'_1(0) \right) \left(z - \varphi'_2(0) \right).$$

Так как

$$f(x, t, \varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(0, 0, 0)tx + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(0, 0, 0)t^2 + O(\varepsilon + |x|^3 + |t|^3),$$

то

$$\begin{aligned} f(x, t, \varepsilon) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0)t^2 \left(\frac{x}{t} - \varphi'_1(0) \right) \left(\frac{x}{t} - \varphi'_2(0) \right) + O(\varepsilon + |x|^3 + |t|^3), \\ f(x, t, \varepsilon) &= -\gamma^2(x - \varphi'_1(0)t)(x - \varphi'_2(0)t) + O(\varepsilon + |x|^3 + |t|^3). \quad \square \end{aligned} \quad (5)$$

Без ограничения общности будем далее считать, что

$$\varphi'_1(0) = -1, \quad \varphi'_2(0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) = -2 \quad (6)$$

и, следовательно,

$$f(x, t, \varepsilon) = -(x^2 - t^2) + O(\varepsilon + |x|^3 + |t|^3). \quad (7)$$

(При указанных выше условиях к этому случаю сводится общий случай после линейной замены переменных $x \Leftrightarrow y$ и замены малого параметра, при которых функции φ_j переходят в функции ψ_j : $x = ay + bt$, $\varphi_j(t) = a\psi_j(t) + b$, где $a = \frac{\varphi'_2(0) - \varphi'_1(0)}{2} > 0$, $b = \frac{\varphi'_2(0) + \varphi'_1(0)}{2}$, а $\varepsilon = \varepsilon_1 \gamma^2 a$).

Перейдем к построению асимптотики решения задачи (1) при условиях (6). Как указано выше, на отрезке $[t_0, -\delta]$ справедливо равномерное асимптотическое разложение (3).

Коэффициенты $x_k(t)$ являются решениями рекуррентной системы уравнений, которая получается после формальной подстановки ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) \quad (8)$$

в уравнение (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε :

$$x_0(t) = \varphi_1(t), \quad x'_0(t) = x_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(P) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(P), \quad (9)$$

$$x'_1(t) = x_2(t) \frac{\partial f}{\partial x}(P) + x_1(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varepsilon}(P) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}(P) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)x_1^2, \quad (10)$$

$$x'_k(t) = x_{k+1}(t) \frac{\partial f}{\partial x}(P) + \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \varepsilon^{k+1}}(P)$$

$$+ \sum_{m=2}^{k+1} \sum_{p=1}^m \frac{1}{(m-p)!p!} \frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial \varepsilon^{m-p}}(P) \prod_{\sum r_j = k+1-(m-p)} x_{r_j}, \quad k \geq 2. \quad (11)$$

Здесь посредством P обозначена точка $(\varphi_1(t), t, 0)$.

Из соотношений (5), (6) вытекает, что при $t < 0$ справедливо равенство $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), t, 0) = 2t + O(t^2)$. Следовательно, $x_1(t) = -\frac{1}{2t} \left(1 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0)\right) + O(1)$. Будем посредством $\sigma(t)$ обозначать бесконечно дифференцируемые при $t < 0$ в окрестности нуля функции, не снабжая их дополнительными индексами: $\sigma(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$. Итак, из первого уравнения системы $x_1(t) = t^{-1}\sigma(t)$. Из следующего равенства (10) вытекает, что $x_2(t) = t^{-3}\sigma(t)$. Далее по индукции легко заключить, что

$$x_k(t) = t^{1-2k}\sigma(t). \quad (12)$$

Аналогичное асимптотическое разложение решения легко строится и при $0 < t \leq t_1$. Формальное асимптотическое разложение имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{x}_k(t), \quad (13)$$

где $\tilde{x}_0(t) = \varphi_2(t)$, а остальные коэффициенты также имеют особенности при $t \rightarrow 0$: $\tilde{x}_k(t) = t^{1-2k}\tilde{\sigma}(t)$.

Посредством $\tilde{\sigma}(t)$ также обозначаются функции, бесконечно дифференцируемые при $t > 0$ в окрестности нуля.

Тем самым рассматриваемая задача является бисингулярной по терминологии [7]. В соответствии с методом согласования асимптотических разложений в окрестности особой точки (в данном случае в окрестности нуля) следует ввести новые, растянутые, переменные и рассмотреть другое асимптотическое разложение.

После замены переменных $t = \sqrt{\varepsilon}\tau$, $x = \sqrt{\varepsilon}y$, уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} f(\sqrt{\varepsilon}y, \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon). \quad (14)$$

Асимптотическое решение в окрестности нуля будем искать в виде ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} y_j(\tau). \quad (15)$$

Коэффициенты этого ряда $y_j(\tau)$ надо определить на всей оси τ от $-\infty$ до ∞ . Уравнения для $y_j(\tau)$ получаются обычным способом: правая часть уравнения (14) $\frac{1}{\varepsilon} f(\sqrt{\varepsilon}y, \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon)$ разлагается в ряд Тейлора в точке $(0, 0, 0)$. Затем ряд (15) надо подставить в уравнение (14) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε .

Из вида уравнения (7) следует, что главный член асимптотики (15) — это функция $y_0(\tau)$, которая является решением уравнения

$$\frac{dy_0}{d\tau} = -(y_0^2 - \tau^2) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0). \quad (16)$$

Обозначим $\lambda = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0)$. Из соображений согласования ряда (15) с рядами (3), (13) функция $y_0(\tau)$ должна иметь асимптотику $-\tau$ при $\tau \rightarrow -\infty$ и асимптотику τ при $\tau \rightarrow \infty$. Такое

решение существует тогда и только тогда, когда $\lambda > -1$, и в этом случае оно равно $\frac{w'(\tau)}{w(\tau)}$, где

$$w(\tau) = \left(\Gamma(a) \Phi\left(a, \frac{1}{2}, \tau^2\right) + 2\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \tau \Phi\left(a + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \tau^2\right) \right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right). \quad (17)$$

Здесь $\Phi(a, \mu, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [9, с. 528, 556], [10, с. 120–122], $a = \frac{\lambda + 1}{4}$.

Таким образом определенная функция $w(\tau)$ имеет следующие асимптотики:

$$w(\tau) = C|\tau|^{-1/2-\lambda} \exp(-\tau^2/2) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tau^{-2k} \right), \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (18)$$

$$w(\tau) = \tilde{C}\tau^{-1/2+\lambda} \exp(\tau^2/2) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \tau^{-2k} \right), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (19)$$

(Точные значения постоянных C и \tilde{C} не важны.)

Нетрудно показать, что функция $y_0(\tau)$ положительна, а из формулы (17) вытекает, что $y_0(0) = \frac{2\Gamma(a + 1/2)}{\Gamma(a)} = \frac{2\Gamma(\frac{\lambda+3}{4})}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{4})}$.

Из асимптотик (18) и (19) следует, что функция $y_0(\tau)$ ведет себя как $-\tau$ при $\tau \rightarrow -\infty$ и как τ при $\tau \rightarrow \infty$. Более точно:

$$y_0(\tau) = -\tau + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tau^{-2k+1}, \quad \tau \rightarrow -\infty,$$

$$y_0(\tau) = \tau + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \tau^{-2k+1}, \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

(Всюду в статье ряды понимаются как асимптотические.)

Коэффициенты c_k и d_k зависят от λ и однозначно вычисляются по рекуррентным формулам.

Исследуем более точно уравнения для остальных коэффициентов разложения (15) при $j > 0$. Разложение правой части уравнения (14) $\frac{1}{\varepsilon} f(\sqrt{\varepsilon}y, \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon)$ формально в ряд Тейлора по степеням $\varepsilon^{1/2}$ в точке $(0, 0, 0)$ имеет вид бесконечной суммы, каждый член которого — это $c_{l,m,n} \varepsilon^{n/2} \tau^l y^m$, где $l + m \leq n + 2$. Если в правую часть равенства (14) вместо y подставить ряд (15), то есть $y = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} y_j(\tau)$, то снова получится формальный ряд по степеням $\varepsilon^{1/2}$.

Каждый член этого ряда имеет вид $c_\alpha \varepsilon^{n/2} \tau^l \prod_p y_{j_p}$, где $\sum_p (j_p + 1) + l \leq n + 2$. (Точный вид постоянной c_α не имеет значения.) Таким образом, если приравнять в равенстве (14) коэффициенты при одинаковых степенях ε , то получатся уравнения

$$\frac{dy_k}{d\tau}(\tau) = -2y_0(\tau)y_k(\tau) + G_k(\tau), \quad (20)$$

где $G_k(\tau)$ — указанные выше суммы членов вида $c_\alpha \varepsilon^{n/2} \tau^l \prod_p y_{j_p}$, в которых присутствуют y_{j_p} с индексами, меньшими, чем k .

Если учесть, что $y_0(\tau) = \frac{w'(\tau)}{w(\tau)}$, то уравнение (20) принимает вид

$$\frac{dy_k}{d\tau}(\tau) + 2\frac{w'(\tau)}{w(\tau)}y_k(\tau) = G_k(\tau),$$

откуда

$$y_k(\tau) = \frac{1}{w^2(\tau)} \int_{-\infty}^{\tau} w^2(\xi) G_k(\xi) d\xi + \frac{C}{w^2(\tau)}.$$

Так как функция $\frac{1}{w^2(\tau)}$ экспоненциально стремится к бесконечности при $\tau \rightarrow -\infty$, то для степенного поведения решения (20) на $\pm\infty$ необходимо считать постоянную C равной нулю.

Итак, единственное решение уравнения (20), которое имеет степенной характер на $-\infty$, это

$$y_k(\tau) = \frac{1}{w^2(\tau)} \int_{-\infty}^{\tau} w^2(\xi) G_k(\xi) d\xi. \quad (21)$$

Так как $y_0(\tau)$ ведет себя как линейная функция на $\pm\infty$, то функция $G_1(\tau)$ растет на $\pm\infty$ не быстрее, чем τ^3 . Более точно: $y_0(\tau) = \tau\sigma(\tau^{-2})$ при $\tau \rightarrow -\infty$. (Здесь, как и всюду в статье, под $\sigma(z)$ понимается формальный ряд $\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$.) Следовательно, $G_1(\tau) = \tau^3\sigma(\tau^{-2})$ при $\tau \rightarrow -\infty$.

Аналогичное поведение функции $y_0(\tau)$ и $G_1(\tau)$ имеют при $\tau \rightarrow +\infty$.

Из этих соотношений и из асимптотик (18), (19) вытекает, что $y_1(\tau) = \tau^2\sigma(\tau^{-2})$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$.

Далее следует по индукции предположить, что

$$y_j(\tau) = \tau^{j+1}\sigma(\tau^{-2}), \quad \tau \rightarrow \pm\infty \quad (22)$$

при $j < k$. Тогда из рассмотренного вида функций $G_k(\tau)$ следует, что $G_k(\tau) = \tau^{k+2}\sigma(\tau^{-2})$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Из явного вида решения (21) следует, что $y_k(\tau) = \tau^{k+1}\sigma(\tau^{-2})$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$.

Итак, полностью построены внешние (8), (13) и внутреннее (15) формальные асимптотические разложения решения задачи (1). Дальнейшая часть статьи будет посвящена доказательству того, что построенные ряды действительно являются асимптотическими рядами решения задачи (1). Прежде всего следует установить, что эти ряды являются асимптотическими решениями задачи. Как всегда, это означает, что частичные суммы рядов приближенно удовлетворяют уравнению и начальным условиям. Что касается начальных условий, то это следует из построения функций $x_k(t)$ и $v_k\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right)$ в формуле (3) (см. [1]). Так же хорошо известно, что ряд (3) является асимптотическим решением задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$, $t_0 < t < -\delta$, $\forall \delta > 0$. Но в окрестности нуля не только нет хорошего приближения, но и сам ряд (3) теряет асимптотический характер. Это относится, конечно, к первому слагаемому $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t)$, тогда как члены

ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right)$ экспоненциально малы вне любой окрестности начальной точки t_0 . Поэтому предстоит выяснить, насколько точно частичные суммы удовлетворяют уравнению (1) и в какой области.

Внешнее разложение. Рассмотрим частичную сумму $\hat{x}_n(t) = \varphi_1(t) + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k x_k(t)$ ряда (8)

и выражение $\varepsilon \frac{d\hat{x}_n}{dt} - f(\hat{x}_n(t), t, \varepsilon)$. Обозначив $z = \sum_{j=1}^n \varepsilon^j x_j(t)$, разложим функцию $f(\hat{x}_n(t), t, \varepsilon)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в точке $(\varphi_1(t), t, \varepsilon)$:

$$f(\hat{x}_n(t), t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(\varphi_1(t), t, \varepsilon) z^k + \frac{1}{n!} \int_0^z \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} f(\varphi_1(t) + \xi, t, \varepsilon) (z - \xi)^n d\xi. \quad (23)$$

Далее будем рассматривать внешнее разложение (8) только при $t < -\varepsilon^\alpha$, где $\alpha < 1/2$. При этом условии в силу (12) справедлива оценка $|z| < M\varepsilon^{1-2\alpha}$. Поэтому интеграл в формуле (23) оценивается как $O\left(\varepsilon^{(n+1)(1-2\alpha)}\right)$.

Далее представим каждый член в правой части равенства (23) в виде частичной суммы ряда Тейлора по степеням z и ε с остаточным членом:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\hat{x}_n}{dt} - f(\hat{x}_n(t), t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^{k+1} \frac{dx_k}{dt} \varepsilon \left[x_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(P) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(P) \right] \\ &- \varepsilon^2 \left[x_2(t) \frac{\partial f}{\partial x}(P) + x_1(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varepsilon}(P) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}(P) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) x_1^2 \right] \\ &- \sum_{k=2}^n \varepsilon^{k+1} \left[x_{k+1}(t) \frac{\partial f}{\partial x}(P) + \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \varepsilon^{k+1}}(P) \right] \\ &+ \sum_{m=2}^{k+1} \sum_{p=1}^m \frac{1}{(m-p)! p!} \frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial \varepsilon^{m-p}}(P) \prod_{\sum r_j = k+1-(m-p)} x_{r_j} \Big] + O\left(\varepsilon^{(n+1)(1-2\alpha)}\right), \end{aligned}$$

где через P обозначена точка $(\varphi_1(t), t, 0)$. Таким образом, из последнего соотношения в силу равенств (9), (10) и (11) в области $t < -\varepsilon^\alpha$ справедлива оценка

$$\varepsilon \frac{d\hat{x}_n}{dt} - f(\hat{x}_n(t), t, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{(n+1)(1-2\alpha)}\right). \quad (24)$$

Совершенно аналогично проводится оценка разности

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \left[\varphi_2(t) + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \tilde{x}_k(t) \right] - f \left(\left[\varphi_2(t) + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \tilde{x}_k(t) \right], t, \varepsilon \right)$$

при $t > \varepsilon^\alpha$. Эта разность имеет тот же порядок $O\left(\varepsilon^{(n+1)(1-2\alpha)}\right)$.

Внутреннее разложение. Далее проверим, насколько хорошо частичные суммы ряда (15) удовлетворяют уравнению (14). Для этого снова рассмотрим частичную сумму $\hat{y}_n = \sum_{j=0}^n \varepsilon^{j/2} y_j(\tau)$ и выражение

$$\varepsilon \frac{d\hat{y}_n}{d\tau} - f(\sqrt{\varepsilon} \hat{y}_n(\tau), \sqrt{\varepsilon} \tau, \varepsilon).$$

Если разложить функцию $f(\sqrt{\varepsilon} \hat{y}_n(\tau), \sqrt{\varepsilon} \tau, \varepsilon)$ в ряд Тейлора с остаточным членом, то получим равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\hat{y}_n}{d\tau} - f(\sqrt{\varepsilon} \hat{y}_n(\tau), \sqrt{\varepsilon} \tau, \varepsilon) &= \varepsilon \frac{dy_0}{d\tau} + \varepsilon \sum_{j=1}^n \varepsilon^{j/2} \frac{dy_j}{d\tau} - \varepsilon \hat{y}_n^2 + \varepsilon \tau^2 - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) \\ &- \sum_{2 < 2r+k+l \leq n+2} \frac{1}{r! k! l!} \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial t^l \partial \varepsilon^r}(0, 0, 0) \varepsilon^{r+(k+l)/2} \hat{y}_n^k \tau^l + O\left(|\hat{y}_n|^{n+3} + |\tau|^{n+3} + \varepsilon^{(n+1)/2}\right). \end{aligned}$$

Далее следует заменить \hat{y}_n соответствующей суммой и ограничиться лишь теми слагаемыми, в которых показатель степени ε не превосходит $1 + n/2$. Сумма остальных слагаемых не превосходит $O\left(|\hat{y}_n|^{n+3} + |\tau|^{n+3} + \varepsilon^{(n+1)/2}\right)$. Коэффициенты при остальных степенях ε обращаются в нуль в силу уравнений (16) и (20). Поэтому $\varepsilon \frac{d\hat{y}_n}{d\tau} - f(\sqrt{\varepsilon} \hat{y}_n(\tau), \sqrt{\varepsilon} \tau, \varepsilon) = O\left(|\hat{y}_n|^{n+3} + |\tau|^{n+3} + \varepsilon^{(n+1)/2}\right)$

$\varepsilon^{(n+1)/2}$). Если рассматривать те значения внутренней переменной τ , для которых $|t| < \varepsilon^\beta$, (т.е. $|\tau| < \varepsilon^{\beta-1/2}$), $0 < \beta < 1/2$, то в силу оценок (22) справедливо соотношение

$$\varepsilon \frac{d\hat{y}_n}{d\tau} - f(\sqrt{\varepsilon}\hat{y}_n(\tau), \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{(n+1)\beta}\right). \quad (25)$$

Согласование асимптотических разложений. Центральным пунктом исследования является доказательство согласования внутреннего асимптотического разложения (15) и внешних асимптотических разложений (8), (13) для промежуточных значений t и τ , когда t достаточно мало, а τ достаточно велико. Более точно: надо доказать, что частичные суммы рядов (8) и (15) мало отличаются при $t = -\varepsilon^\alpha$, $0 < \alpha < 1/2$, а частичные суммы рядов (13) и (15) мало отличаются при $t = \varepsilon^\alpha$. Основной способ сравнения частичных сумм различных асимптотических рядов состоит в рассмотрении операторов $A_{n,t}$ и $A_{m,\tau}$, применяемых к этим рядам [7]. Результат применения оператора $A_{n,t}$ — это частичная сумма ряда, содержащая те и только те члены, в которых показатель степени ε не больше n , а коэффициенты зависят от t . Аналогично определяется оператор $A_{m,\tau}$ с той лишь разницей, что коэффициенты ряда зависят от τ . Согласование рядов заключается в выполнении равенства: для любых натуральных n и m

$$A_{m,\tau}A_{n,t}U = A_{n,t}A_{m,\tau}V, \quad (26)$$

где U и V — соответствующие формальные асимптотические ряды. В тех задачах, где коэффициенты рядов U и V (решения вспомогательных дифференциальных уравнений) определяются а priori неоднозначно, равенство (26) служит для их окончательного выбора. В данной задаче коэффициенты разложений (8), (13) и (15) уже однозначно определены, и осталось только убедиться в справедливости равенства (26).

Если U — это ряд (8), то $A_{n,t}U = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k x_k(t)$. Для того чтобы получить $A_{m,\tau}A_{n,t}U$, надо перейти к переменной $\tau = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}$, переписать $A_{n,t}U$ в виде ряда по степеням ε с коэффициентами, зависящими от τ , и ограничиться членами с показателями ε , не превосходящими m . Надо воспользоваться асимптотиками (12) функций $x_k(t)$ при $t \rightarrow -0$:

$$x_k(t) = t^{1-2k} \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} t^j = \varepsilon^{1/2-k} \tau^{1-2k} \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} \varepsilon^{j/2} \tau^j.$$

Соотношение между рядами (8) и (15) можно наглядно представить в виде таблицы.

		$\varepsilon^{1/2}y_0(\tau)$	$\varepsilon y_1(\tau)$	$\varepsilon^{3/2}y_2(\tau)$...	$\varepsilon^m y_{2m-1}(\tau)$
1		$-\varepsilon^{1/2}\tau$	$\varepsilon c_{0,1}\tau^2$	$\varepsilon^{3/2}c_{0,2}\tau^3$...	$\varepsilon^m c_{0,2m-1}\tau^{2m}$
2	$x_0(t)$	$-t$	$c_{0,1}t^2$	$c_{0,2}t^3$...	$c_{0,2m-1}t^{2m}$
3		$\varepsilon^{1/2}c_{1,0}\tau^{-1}$	$\varepsilon c_{1,1}$	$\varepsilon^{3/2}c_{1,2}\tau$...	$\varepsilon^m c_{1,2m-1}\tau^{2m-2}$
4	$\varepsilon x_1(t)$	$\varepsilon c_{1,0}t^{-1}$	$\varepsilon c_{1,1}$	$\varepsilon c_{1,2}t$...	$\varepsilon c_{1,2m-1}t^{2m-2}$
5		$\varepsilon^{1/2}c_{2,0}\tau^{-3}$	$\varepsilon c_{2,1}\tau^{-2}$	$\varepsilon^{3/2}c_{2,2}\tau^{-1}$...	$\varepsilon^m c_{2,2m-1}\tau^{2m-4}$
6	$\varepsilon^2 x_2(t)$	$\varepsilon^2 c_{2,0}t^{-3}$	$\varepsilon^2 c_{2,1}t^{-2}$	$\varepsilon^2 c_{2,2}t^{-1}$...	$\varepsilon^2 c_{2,2m-1}t^{2m-4}$
7		$\varepsilon^{1/2}c_{3,0}\tau^{-5}$	$\varepsilon c_{3,1}\tau^{-4}$	$\varepsilon^{3/2}c_{3,2}\tau^{-3}$...	$\varepsilon^m c_{3,2m-1}\tau^{2m-6}$
8	$\varepsilon^3 x_3(t)$	$\varepsilon^3 c_{3,0}t^{-5}$	$\varepsilon^3 c_{3,1}t^{-4}$	$\varepsilon^3 c_{3,2}t^{-3}$...	$\varepsilon^3 c_{3,2m-1}t^{2m-6}$
...
...
2n+1		$\varepsilon^{1/2}c_{n,0}\tau^{1-2n}$	$\varepsilon c_{n,1}\tau^{2-2n}$	$\varepsilon^{3/2}c_{n,2}\tau^{3-2n}$...	$\varepsilon^m c_{n,2m-1}\tau^{2m-2n}$
2n+2	$\varepsilon^n x_n(t)$	$\varepsilon^n c_{n,0}t^{1-2n}$	$\varepsilon^n c_{n,1}t^{2-2n}$	$\varepsilon^n c_{n,2}t^{3-2n}$...	$\varepsilon^n c_{n,2m-1}t^{2m-2n}$

В ней представлены члены суммы $A_{n,t}U = \hat{x}_n(t)$. В каждой четной строке таблицы стоят те члены асимптотического разложения при $t \rightarrow -0$ функции $\varepsilon^k x_k(t)$ — одного из членов

ряда (8), которые входят в сумму $A_{m,\tau}A_{n,t}U$. В стоящей выше над ней нечетной строке стоят те же функции, записанные в переменной τ . В результате в каждом столбце (на пересечении с нечетными строчками) размещены конечные суммы вида

$$\varepsilon^{(l+1)/2} \sum_{k=0}^n c_{k,l} \tau^{l+1-2k}.$$

Таким образом, остается показать, что эти столбцы являются частичными суммами асимптотик построенных ранее функций $\varepsilon^{(l+1)/2}y_l(\tau)$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Для этого снова обратимся к равенству (24) для $\hat{x}_n = A_{n,t}U$. В этом равенстве при $t < -\varepsilon^\alpha$ разложим функцию $f(\hat{x}_n(t), t, \varepsilon)$ в ряд Тейлора в точке $(0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{dx_0}{dt} + \varepsilon \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \frac{dx_k}{dt} - \left(-\hat{x}_n^2 + t^2 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varepsilon}(0, 0, 0) \varepsilon \hat{x}_n + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \varepsilon}(0, 0, 0) \varepsilon t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}(0, 0, 0) \varepsilon^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{2 < p+l+r \leq n} \frac{1}{p! l! r!} \frac{\partial^q f}{\partial x^p \partial t^l \partial \varepsilon^r}(0, 0, 0) \varepsilon^r \hat{x}_n^p t^l \right) = O\left(|\hat{x}_n|^{n+1} + |t|^{n+1} + \varepsilon^{(n+1)(1-2\alpha)}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Далее в этом равенстве заменим функции $x_k(t)$ частичными суммами их асимптотик (12) при $t \rightarrow -0$, сохраняя в каждой частичной сумме лишь те слагаемые, в которых показатель степени t не больше, чем $2m$. Всюду при рассмотрении согласования внешнего и внутреннего разложений будем считать, что

$$\varepsilon^\alpha < |t| < \varepsilon^\beta, \quad (28)$$

где $0 < \beta < \alpha < 1/2$. При согласовании рядов (8) и (15) кроме того будем, естественно, считать, что $t < 0$. В левой части равенства (27) останется лишь конечное число членов вида $C\varepsilon^{lt^r}$, где r — целые, а l — целые неотрицательные числа. Отброшенные члены (перенесем их в правую часть равенства) не превосходят $O(\varepsilon^{2\beta m})$ в силу ограничения (28), так как $|\hat{x}_n(t)| = O(\varepsilon^\beta)$. Далее перейдем к внутренней переменной $\tau = \varepsilon^{-1/2}t$ и применим к левой части равенства (27) оператор $A_{m+1,\tau}$. Отброшенные члены (тоже перенесем их в правую часть равенства) не превосходят $O(\varepsilon^{2m(1-2\alpha)})$. После этого $\varepsilon \frac{d\hat{x}_n}{dt}$ превращается в $\varepsilon \frac{dA_{m,\tau}A_{n,t}U}{d\tau}$, а $A_{m,\tau}A_{n,t}U$ — это сумма членов, стоящих в нечетных строках таблицы. Если сгруппировать эти члены по вертикалям и обозначить коэффициенты при $\varepsilon^{l/2}$ посредством $z_{l,n}$, то в левой части равенства (27) окажется выражение

$$\varepsilon \frac{d}{d\tau} \sum_{l=0}^{2m-1} \varepsilon^{l/2} z_{l,n}(\tau) - \left[-\varepsilon z_{0,n}^2 + \varepsilon \tau^2 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) + \varepsilon \sum_{l=1}^{2m-1} \varepsilon^{l/2} \left(-2z_{0,n}z_{l,n} + G_{l,n}(\tau) \right) \right],$$

где функции $G_{l,n}(\tau)$ аналогичны функциям $G_k(\tau)$ в уравнениях (20). Более точно: функции $G_{l,n}(\tau)$ так же зависят от $z_{j,n}(\tau)$ с индексами, меньшими, чем l , как функции $G_k(\tau)$ зависят от y_j с индексами, меньшими, чем k . Правая часть равенства в рассматриваемой части отрезка не превосходит $O(\varepsilon^{(n+1)\beta} + \varepsilon^{(n+1)2\alpha} + \varepsilon^{(n+1)(1-2\alpha)})$. Поэтому в левой части равенства коэффициенты при различных степенях ε с достаточно большими показателями равны нулю. Следовательно, в рассматриваемой части отрезка функции $z_{l,n}(\tau) = \sum_{j=0}^n c_{j,l} \tau^{l+1-2j}$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и построенные выше коэффициенты внутреннего разложения $y_l(\tau)$. Так как рекуррентные уравнения для коэффициентов асимптотик решений этих уравнений однозначно разрешимы, то отсюда вытекает, что $z_{l,n}(\tau)$ как раз являются частичными суммами асимптотических рядов функций $y_l(\tau)$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Соотношение (26) доказано.

Аналогично проводится согласование асимптотических рядов (20) и (13) при $\varepsilon^\alpha < t < \varepsilon^\beta$.

Равномерная асимптотика решения. Доказанные оценки (24), (25) и соотношение (26) позволяют довольно легко доказать, что построенные ряды приближают решение задачи (1) равномерно с точностью до любой степени малого параметра. Посредством $\omega(z)$ обозначим бесконечно дифференцируемую монотонную функцию одного переменного такую, что $\omega(z) \equiv 0$ при $z \leq 0$, $\omega(z) \equiv 1$ при $z \geq 1$. Пусть t_2 — какая-то фиксированная точка между t_0 и нулем. Как известно [1], ряд (3) равномерно приближает решение задачи (1) на участке $t_0 \leq t \leq t_2$. Таким образом, $|\hat{x}_n(t_2) - x(t_2, \varepsilon)| < M\varepsilon^{n+1}$, где $x(t, \varepsilon)$ — решение задачи (1), а $\hat{x}_n(t)$ — частичная сумма ряда (8). Посредством U обозначим ряд (8), посредством \tilde{U} — ряд (13), а посредством V — ряд (15). Построим составную частичную сумму исследованных асимптотических рядов $Y_n(t, \varepsilon) = (1 - \omega(t\varepsilon^{-\beta} + 2))A_{n,t}U + \omega(t\varepsilon^{-\beta} - 1)A_{n,t}\tilde{U} + \omega(t\varepsilon^{-\beta} + 2)(1 - \omega(t\varepsilon^{-\beta} - 1))A_{n,\tau}V$. Здесь $A_{n,t}$ и $A_{n,\tau}$ — определенные выше операторы. Из вида функции $\omega(z)$ вытекает, что $Y_n(t, \varepsilon) = A_{n,t}U$ при $t \leq -2\varepsilon^\beta$, $Y_n(t, \varepsilon) = A_{n,t}\tilde{U}$ при $t \geq 2\varepsilon^\beta$ и $Y_n(t, \varepsilon) = A_{n,\tau}V$ при $|t| \leq \varepsilon^\alpha$. А согласно равенству (26) $Y_n(t, \varepsilon) = A_{n,t}U = A_{n,\tau}V$ при $-2\varepsilon^\beta \leq t \leq -\varepsilon^\alpha$ и $Y_n(t, \varepsilon) = A_{n,t}\tilde{U} = A_{n,\tau}V$ при $\varepsilon^\alpha \leq t \leq 2\varepsilon^\beta$. Таким образом, всюду при $t_2 \leq t \leq t_1$ вследствие неравенств (24) и (25) справедлива оценка

$$\left| \varepsilon \frac{d}{dt} Y_n(t, \varepsilon) - f(Y_n(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right| < M\varepsilon^{(n+1)(1-2\alpha)}.$$

Для окончания доказательства рассмотрим верхнюю и нижнюю функции: $R_{+,n,r}(t, \varepsilon) = Y_n(t, \varepsilon) + \varepsilon^r$ и $R_{-,n,r}(t, \varepsilon) = Y_n(t, \varepsilon) - \varepsilon^r$, где r — произвольное достаточно большое число, а n будет выбираться тоже достаточно большим, в зависимости от r . По условию, $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), t, 0) < 0$ при $t < 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_2(t), t, 0) < 0$ при $t > 0$. Кроме того, в силу (6) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) = -2$. Значит, при $|t| > \varepsilon^\alpha$ справедливы неравенства $\frac{\partial f}{\partial x}(Y_n(t, \varepsilon), t, 0) < -\mu\varepsilon^\alpha$, где $\mu > 0$. При $|t| < \varepsilon^\beta$ составное разложение совпадает с внутренним, поэтому $Y_n(t, \varepsilon) = A_{n,\tau}V$. Так как функция $y_0(\tau)$ строго положительна, то для этих значений t также $\frac{\partial f}{\partial x}(Y_n(t, \varepsilon), t, 0) < -\mu\varepsilon^{\alpha+1/2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{d}{dt} R_{+,n,r}(t, \varepsilon) - f(R_{+,n,r}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \\ &= \varepsilon \frac{d}{dt} Y_n(t, \varepsilon) - f(Y_n(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + \left(f(Y_n(t, \varepsilon), t, \varepsilon) - f(R_{+,n,r}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right) \\ &= O\left(\varepsilon^{(n+1)(1-2\alpha)}\right) - \varepsilon^r \frac{\partial f}{\partial x}(Y_n(t, \varepsilon) + \text{th } \varepsilon^r, t, 0), 0 < \text{th} < 1. \end{aligned}$$

Из упомянутых выше оценок производной $\frac{\partial f}{\partial x}$ следует, что при достаточно больших n

$$\varepsilon \frac{d}{dt} R_{+,n,r}(t, \varepsilon) - f(R_{+,n,r}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) > 0.$$

Так как $R_{+,n,r}(t_2, \varepsilon) > Y_n(t_2, \varepsilon)$, то, следовательно, $R_{+,n,r}(t, \varepsilon) > Y_n(t, \varepsilon)$ всюду при $t_2 \leq t \leq t_1$. Аналогично проверяется, что на всем этом промежутке $R_{-,n,r}(t, \varepsilon) < Y_n(t, \varepsilon)$. Тем самым равномерное приближение решения задачи (1) обосновано.

В заключение сформулируем **окончательный результат**. Пусть $x(t, \varepsilon)$ является решением начальной задачи (1) и выполнены условия 1–4. Пусть $0 < \alpha < 1/2$. Если выполнены условия (6) и $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) > -1$, то ряд (3) является равномерным асимптотическим рядом для $x(t, \varepsilon)$ при $t_0 \leq t \leq -\varepsilon^\alpha$, ряд (13) является равномерным асимптотическим рядом для $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon^\alpha \leq t \leq t_1$, а ряд (15) является равномерным асимптотическим рядом для $x(t, \varepsilon)$ при $|t| \leq \varepsilon^\alpha$.

Если рассматривать задачу (1) до замены, приводящей к условию (6), то вместо условия $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) > -1$ в этом случае достаточным условием построенной асимптотики является условие

$$\lambda = (\varphi_2'(0) - \varphi_1'(0))^{-1} \left(2 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) - (\varphi_2'(0) + \varphi_1'(0)) \right) > -1.$$

Это условие является точным. Действительно, легко видеть, что для уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = -x^2 + t^2 + b\varepsilon$$

$\lambda = b$ и при любых $b \leq -1$, $t_0 < 0$, $x(t_0, \varepsilon) = A > 0$ решение задачи (1) для малых положительных $\varepsilon > 0$ не продолжается при $t > 0$.

Отметим, что и при $\lambda < -1$ построенные ряды (3) и (15) являются равномерными асимптотическими всюду при $t < \sqrt{\varepsilon}(\tau_0 - \delta)$, где δ — любое положительное число, а τ_0 — полюс функции $y_0(\tau)$. Однако скорее всего при таком λ решение задачи не продолжается для положительных t , как это видно для вышеприведенного примера.

Поступила 10.03.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990.
2. **Lebovitz N. R., Schaar R. J.** Exchange of stabilities in autonomous systems // Studies in Appl. Math. 1975. Vol. LIV, no. 3. P. 229–260.
3. **Lebovitz N. R., Schaar R. J.** Exchange of stabilities in autonomous systems. II. Vertical bifurcation // Studies in Appl. Math. 1977. Vol. LVI, no. 1. P. 1–50.
4. **Nefedov N., Schneider K.** Singularly perturbed systems: Case of exchange of stability. Weierstrass-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin. Preprint № 158, 1995.
5. **Butuzov V., Nefedov N., Schneider K.** Singularly perturbed boundary value problems for systems of Tichonov's type in case of exchange of stabilities. Weierstrass-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin. Preprint № 408, 1998.
6. **Бутузов В.Ф., Неведов Н.Н.** Сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения второго порядка в случае смены устойчивости // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 3. С. 354–362.
7. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
8. **Долбеева С.Ф., Ильин А.М.** Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром при условии пересечения линий устойчивости предельного решения // Докл. Академии Наук. 2006. Т. 408, № 4. С. 1–3.
9. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям М.: ИЛ, 1951. 828 с.
10. **Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1995. 560 с.

ЯВЛЕНИЕ БУФЕРНОСТИ В СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К ДВУМЕРНЫМ ГАМИЛЬТОНОВЫМ¹

А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов

Рассматриваются гамильтоновы системы на плоскости, возмущенные малыми периодическими по времени добавками. Устанавливаются условия, при которых в этих системах при стремлении возмущений к нулю происходит неограниченное накопление экспоненциально устойчивых периодических решений, или, иными словами, имеет место явление буферности. Показывается, что данный феномен характерен для целого ряда классических механических задач, описываемых уравнениями маятникового типа.

Введение

О феномене буферности принято говорить в случае, когда в фазовом пространстве некоторой динамической системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать сосуществование любого фиксированного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т. д.).

Из результатов известной работы А. А. Витта [1], а также из значительно более поздних работ [2–7] следует, что буферность представляет собой универсальное нелинейное явление, возникающее в математических моделях из различных областей естествознания: радиофизики, механики, экологии, нелинейной оптики, теории горения и т. д. Поэтому весьма актуальна проблема изучения типовых сценариев накопления аттракторов в различных динамических системах. К настоящему времени удалось выявить три таких сценария: в первую очередь это сценарий Витта, являющийся наиболее распространенным, а также тьюрингский и гамильтонов механизмы накопления аттракторов.

Ситуация, в которой реализуется механизм Витта, заключается в следующем. Предположим, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия некоторой динамической системы имеет место критический случай счетного числа чисто мнимых собственных значений, а при изменении каких-либо входящих в эту систему параметров происходит последовательное смещение точек спектра в правую комплексную полуплоскость. Тогда, как установлено в уже упоминавшихся работах [1–7], чаще всего в такой системе наблюдается феномен буферности в простейшем его варианте: происходит неограниченное накопление устойчивых циклов, причем каждый отдельно взятый цикл рождается из нулевого состояния равновесия неустойчивым, а затем обретает устойчивость, подрастая по амплитуде.

Тьюрингский механизм отличается от механизма Витта по существу лишь тем, что каждый индивидуальный цикл (или состояние равновесия) при изменении управляющих параметров сначала обретает устойчивость, а затем снова ее теряет. Таким образом, общее число аттракторов увеличивается, и их состав постоянно обновляется. Как показано в монографии [7], данная ситуация реализуется главным образом в системах типа реакция-диффузия при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии, но может возникать и в системах с запаздыванием при неограниченном увеличении времени запаздывания. В частности, с ней сталкиваемся при рассмотрении известной модели “брюсселятор”, изучавшейся еще А. Тьюрингом [8] (отсюда и название — тьюрингский механизм).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-01004).

Описанные сценарии накапливания аттракторов характерны, естественно, только для систем с бесконечномерным фазовым пространством. Что же касается конечномерных систем, то в них простейшим механизмом возникновения буферности является, по всей видимости, так называемый гамильтонов сценарий, проиллюстрированный в [7] на ряде двумерных отображений из механики. Суть этого сценария состоит в следующем.

Рассмотрим сначала некоторую гамильтонову или консервативную (не меняющуюся при обращении времени) систему обыкновенных дифференциальных уравнений с полутора или более степенями свободы. Согласно выработанным к настоящему времени общим представлениям о динамике таких систем (см. [9, 10]) хаотические движения в них сосуществуют со счетным числом так называемых островков устойчивости, примыкающих к эллиптическим состояниям равновесия или циклам. Предположим, далее, что наша система возмущена малыми добавками, обеспечивающими ее диссипативность. Тогда некоторые из упомянутых состояний равновесия или циклов могут стать асимптотически устойчивыми и, что самое главное, количество последних может неограниченно увеличиваться при стремлении возмущений к нулю. А это как раз и означает, что в рассматриваемой системе наблюдается явление буферности, механизм возникновения которого уместно назвать гамильтоновым.

Следует заметить, что гамильтонов механизм несмотря на его простоту до сих пор оставался наименее изученным, так как кроме уже упоминавшихся двумерных отображений (см. [7]) он не был подкреплён какими-либо другими содержательными примерами. Указанный пробел восполняется в данной статье. А именно, ниже сначала устанавливаются некоторые общие теоремы о явлении буферности в слабо возмущенных гамильтоновых системах, а затем полученные результаты применяются к ряду конкретных уравнений маятникового типа с периодическими по времени малыми добавками (в физической литературе такого типа уравнения принято называть системами с полутора степенями свободы).

1. Предельные значения функций Мельникова на периодических орбитах

1.1. Постановка задачи и описание результатов

Как уже было сказано выше, объектом исследования в настоящей работе является двумерная неавтономная система вида

$$\dot{x} = H'_y(x, y) + \varepsilon f(t, x, y), \quad \dot{y} = -H'_x(x, y) + \varepsilon g(t, x, y). \quad (1.1)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, функции $H(x, y)$ и $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ бесконечно дифференцируемы по совокупности переменных $(x, y) \in G$ и $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times G$ соответственно, где $G \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая область. Кроме того, возмущения f , g предполагаем периодическими по t с некоторым периодом $T_0 > 0$.

План дальнейших действий таков. Сначала для системы (1.1) вводится последовательность $M_{n/m}(t)$, $n, m \in \mathbb{N}$, функций Мельникова, вычисленная на резонансных циклах системы

$$\dot{x} = H'_y(x, y), \quad \dot{y} = -H'_x(x, y), \quad (1.2)$$

периоды которых находятся в отношении $n : m$ с периодом T_0 внешнего воздействия. При этом предполагаем, что m фиксировано, а n пробегает множество $\mathbb{N}(m) \subset \mathbb{N}$, состоящее из всех натуральных чисел, взаимно простых с m . Основное же ограничение заключается в том, что резонансные циклы, о которых говорится выше, лежат внутри некоторого замкнутого контура Γ , составленного из двух сепаратрис и двух седел, и при $n \xrightarrow{m} \infty$ стремятся к Γ (здесь и далее символ $\xrightarrow{m} \infty$ означает стремление к бесконечности по точкам множества $\mathbb{N}(m)$).

На следующем этапе устанавливается теорема о структуре множества всех равномерных по $t \in [0, T_0/m]$ частичных пределов последовательности $M_{n/m}(t)$ при $n \xrightarrow{m} \infty$. Показывается,

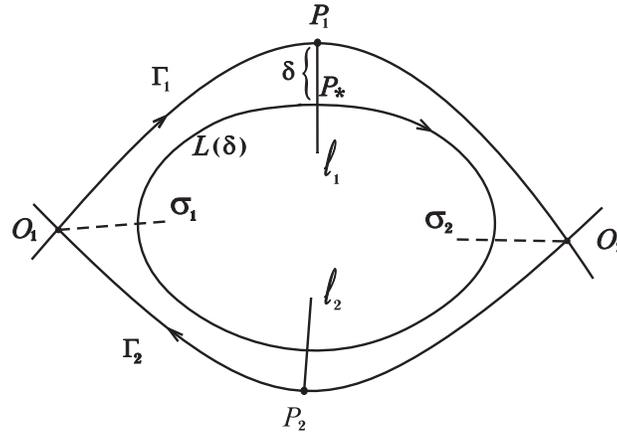


Рис. 1.1

в частности, что в общем случае это множество состоит как минимум из двух элементов. Попутно получаются и условия реализуемости в системе (1.1) явления буферности, которые формулируются в терминах предельных значений функций Мельникова.

Приступим к детальному описанию ограничений, при которых будет изучаться система (1.1). Большинство из них относятся к предельной гамильтоновой системе (1.2).

Условие 1.1. *Считаем, что система (1.2) имеет в области G замкнутый контур Γ (см. рис. 1.1), состоящий из двух сепаратрис Γ_1, Γ_2 и двух седел O_1, O_2 :*

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x_1(t), y_1(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (x_1(t), y_1(t)) = O_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t), y_1(t)) = O_2; \\ \Gamma_2 &= \{(x_2(t), y_2(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (x_2(t), y_2(t)) = O_2, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_2(t), y_2(t)) = O_1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Сделанные предположения позволяют ввести две функции Мельникова

$$M^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t + \tau, x_j(\tau), y_j(\tau)) d\tau, \quad j = 1, 2, \quad (1.4)$$

где $\Phi(t, x, y) = H'_x(x, y)f(t, x, y) + H'_y(x, y)g(t, x, y)$, отвечающие сепаратрисам (1.3). Как известно [11], если какая-либо из данных функций имеет простые нули, то это влечет трансверсальность пересечения двух инвариантных многообразий системы (1.1), возникающих при $\varepsilon > 0$ в результате расщепления соответствующей сепаратрисы.

Для описания следующего ограничения рассмотрим точку $P_1 = (x_1(0), y_1(0))$ на Γ_1 и обозначим через l_1 отрезок нормали к кривой Γ_1 в этой точке, направленный внутрь контура Γ (см. рис. 1.1).

Условие 1.2. *Считаем, что в области, ограничиваемой кривой Γ , система (1.2) имеет однопараметрическое семейство циклов*

$$L(\delta) = \{(x_*(t, \delta), y_*(t, \delta)) : 0 \leq t \leq T(\delta)\}, \quad 0 < \delta \leq \delta_*, \quad (1.5)$$

периоды $T(\delta)$ которых обладают свойствами:

$$T(\delta) > 0, \quad T'(\delta) < 0 \text{ при } \delta \in (0, \delta_*], \quad T(\delta) \rightarrow +\infty \text{ при } \delta \rightarrow +0. \quad (1.6)$$

Считаем еще, что фазовые траектории (1.5) пересекают l_1 без касания, причем (см. рис. 1.1) $P_* = (x_*(0, \delta), y_*(0, \delta)) \in l_1$, $\rho(P_*, P_1) = \delta$, где $\rho(*, *)$ — евклидова метрика.

Условие 1.3. *Предполагаем, что $h'(\delta) \neq 0$ при $\delta \in (0, \delta_*]$, где*

$$h(\delta) = H(x_*(t, \delta), y_*(t, \delta)). \quad (1.7)$$

Нетрудно увидеть, что условие 1.2 обеспечивает существование последовательности функций Мельникова $M_{n/m}(t)$, о которой говорилось выше. Действительно, в силу (1.6) каждое из уравнений $T(\delta) = nT_0/m$, $n \in \mathbb{N}(m)$, начиная с некоторого номера $n_0 = n_0(m)$, допускает единственное решение $\delta_{n/m} \in (0, \delta_*]$, причем $\delta_{n/m} \searrow 0$ при $n \xrightarrow{m} \infty$. Таким образом, интересующая нас последовательность задается равенствами

$$M_{n/m}(t) = \int_0^{nT_0} \Phi(t + \tau, x_{n/m}^*(\tau), y_{n/m}^*(\tau)) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}(m), \quad n \geq n_0, \quad (1.8)$$

где $x_{n/m}^*(t) = x_*(t, \delta_{n/m})$, $y_{n/m}^*(t) = y_*(t, \delta_{n/m})$. Что же касается условия 1.3, то его смысл прояснится в следующем пункте. Пока лишь отметим, что в совокупности с двумя предыдущими условиями оно позволяет воспользоваться известными асимптотическими методами анализа слабо возмущенных гамильтоновых систем (см., например, [12–14]) и получить следующее стандартное утверждение о соответствии между простыми нулями какой-либо из функций (1.8) и грубыми периодическими решениями исходной системы (1.1).

Лемма 1.1. *Пусть выполнены условия 1.1–1.3 и при некоторых фиксированных n , m : $n \in \mathbb{N}(m)$, $n \geq n_0(m)$, функция $M_{n/m}(t)$ имеет на полуинтервале $[0, T_0)$ простой нуль $t = t_*$. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ у системы (1.1) существует грубое nT_0 -периодическое по t решение. Это решение имеет седловой тип при условии*

$$T'(\delta_{n/m})M'_{n/m}(t_*)/h'(\delta_{n/m}) > 0, \quad (1.9)$$

а при выполнении строго противоположного (1.9) неравенства является фокусом, устойчивым при

$$s_{n/m} = \int_0^{nT_0} s(\tau, x_{n/m}^*(\tau), y_{n/m}^*(\tau)) d\tau < 0, \quad (1.10)$$

где $s(t, x, y) = f'_x(t, x, y) + g'_y(t, x, y)$, и неустойчивым в случае $s_{n/m} > 0$.

Следует отметить, что сформулированная лемма представляет собой аналог известного результата Пуанкаре о рождении изолированных периодических решений в гамильтоновых системах, близких к нелинейным интегрируемым (см. [15], а также [16, с. 259–260]). Отметим также, что периодические решения, доставляемые этой леммой при $m = 1$, принято называть субгармониками, а в случае $m \geq 2$ — ультрасубгармониками.

Отдельно остановимся на вопросе о количестве периодических решений, существование которых гарантирует лемма 1.1 при фиксированных n , m . В связи с этим обратим внимание, что в отличие от правых частей системы (1.1) функция (1.8) является периодической с периодом T_0/m . Действительно, представим фигурирующий в (1.8) интеграл в виде суммы интегралов по отрезкам $[knT_0/m, (k+1)nT_0/m]$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, а затем сделаем в получившихся интегралах замены $\tau - knT_0/m \rightarrow \tau$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ и воспользуемся периодичностью функций $x_{n/m}^*(t)$, $y_{n/m}^*(t)$ с периодом nT_0/m . В результате убеждаемся, что

$$M_{n/m}(t) = \int_0^{nT_0/m} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \Phi(t + knT_0/m + \tau, x_{n/m}^*(\tau), y_{n/m}^*(\tau)) \right) d\tau. \quad (1.11)$$

Заметим, далее, что в силу взаимной простоты чисел n , m наборы значений

$$\{knT_0/m \pmod{T_0}, k = 0, \dots, m-1\}, \quad \{kT_0/m \pmod{T_0}, k = 0, \dots, m-1\}$$

совпадают. А отсюда и из (1.11) получаем итоговую формулу

$$M_{n/m}(t) = \int_0^{nT_0/m} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \Phi(t + kT_0/m + \tau, x_{n/m}^*(\tau), y_{n/m}^*(\tau)) \right) d\tau, \quad (1.12)$$

из которой, в свою очередь, очевидным образом следует требуемая периодичность функции $M_{n/m}(t)$.

Лемма 1.2. *Предположим, что в условиях леммы 1.1 функция $M_{n/m}(t)$ имеет только простые нули, количество которых на полуинтервале $[0, T_0/m)$ равно $2p$, $p \geq 1$ (обозначим их через t_k , $k = 1, \dots, 2p$). Предположим, далее, что $s_{n/m} \neq 0$, где $s_{n/m}$ — величина (1.10). Тогда, во-первых, все нули функции $M_{n/m}(t)$ на полуинтервале $[0, T_0)$ исчерпываются точками*

$$t_k + rT_0/m, \quad k = 1, \dots, 2p, \quad r = 0, 1, \dots, m-1; \quad (1.13)$$

во-вторых, найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ система (1.1) имеет $2pt$ грубых nT_0 -периодических решений

$$(x_j(t, \varepsilon), y_j(t, \varepsilon)), \quad j = 1, \dots, 2pt, \quad (1.14)$$

отвечающих корням (1.13), причем половина из этих решений имеют седловой тип, а половина являются фокусами (устойчивыми при $s_{n/m} < 0$ и неустойчивыми в противном случае); в-третьих, помимо (1.14) система (1.1) допускает еще семейство решений вида

$$(x_j(t + kT_0, \varepsilon), y_j(t + kT_0, \varepsilon)), \quad j = 1, \dots, 2pt, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.15)$$

Обращаем внимание, что сформулированная лемма не нуждается в отдельном обосновании. В самом деле, существование нулей (1.13) (при $r \neq 0$) вытекает из периодичности функции (1.8) с периодом T_0/m , а существование отвечающих этим нулям периодических решений (1.14) с требуемыми свойствами устойчивости — следствие леммы 1.1. Смысл же леммы 1.2 в том, что достаточно знать только геометрически различные периодические решения (1.14), а все остальные получаются из них сдвигами по времени на величины, кратные T_0 (см.(1.15)).

Обратимся теперь к проблеме нахождения всех частичных пределов последовательности (1.8) при $n \xrightarrow{m} \infty$. Как будет ясно из дальнейшего, ее решение базируется на асимптотических свойствах $T(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$. Для выявления этих свойств обозначим через l_2 отрезок внутренней нормали к кривой Γ в точке $P_2 = (x_2(0), y_2(0)) \in \Gamma_2$ (см. рис. 1.1) и представим $T(\delta)$ в виде суммы $\tau_1(\delta) + \tau_2(\delta)$, где $\tau_1(\delta)$ — время движения по траектории (1.5) от l_1 до l_2 , а $\tau_2(\delta)$ — время возврата с l_2 на l_1 .

Лемма 1.3. *Существуют конечные пределы*

$$\varkappa_* = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\tau_1(\delta) - \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{1}{\delta} \right), \quad \varkappa_{**} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\tau_2(\delta) - \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{1}{\delta} \right), \quad (1.16)$$

где $\pm\lambda_1$ и $\pm\lambda_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$) — характеристические показатели седел O_1 и O_2 .

Приведенная лемма позволяет получить ответ на интересующий нас вопрос о пределах последовательности (1.8) при $n \xrightarrow{m} \infty$.

Теорема 1.1. *В случае иррационального отношения λ_1/λ_2 множество всех (равномерных по $t \in [0, T_0/m]$) частичных пределов последовательности (1.8) при $n \xrightarrow{m} \infty$ состоит из непрерывного семейства функций*

$$S_m^{(1)}(t) + S_m^{(2)}(t + z), \quad (1.17)$$

где

$$S_m^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} M^{(j)}(t + kT_0/m), \quad j = 1, 2, \quad (1.18)$$

$M^{(1)}(t)$, $M^{(2)}(t)$ — функции Мельникова (1.4), а непрерывный параметр z пробегает отрезок $[0, T_0/m]$. В случае же, когда $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$ взаимно просты, упомянутое множество дискретно и исчерпывается конечным набором функций

$$S_m^{(1)}(t) + S_m^{(2)}(t + z_r), \quad r \in \Omega(m, q), \quad (1.19)$$

где

$$z_r = \frac{r p T_0}{q m} + c_0, \quad c_0 = (\lambda_2 z_* - \lambda_1 z_{**})/(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (1.20)$$

$$\Omega(m, q) = \mathbb{N}(m) \cap \{r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq q\}.$$

Следует добавить, что индексное множество $\Omega(m, q)$ состоит из одного значения $r = 1$ только при $p = 1$, $q = 2$ и четном m . Во всех же остальных случаях при условии, что $S_m^{(2)}(t) \neq \text{const}$ и что T_0/m — наименьший период этой функции, вне зависимости от соизмеримости λ_1 , λ_2 множество частичных пределов последовательности (1.8) содержит не менее двух элементов.

Будем говорить о явлении *гамильтоновой буферности*, если при подходящем уменьшении ε и при фиксированных прочих параметрах можно добиться сосуществования в системе (1.1) любого наперед заданного конечного числа экспоненциально устойчивых периодических по t решений. Достаточные условия реализуемости этого явления содержатся в следующем утверждении, вытекающем из теоремы 1.1.

Теорема 1.2. *Предположим, что в дополнение к условиям 1.1–1.3 некоторая функция $M_*(t) = S_{m_*}^{(1)}(t) + S_{m_*}^{(2)}(t + z_*)$, $z_* \in [0, T_0/m_*]$, $m_* \in \mathbb{N}$, принадлежащая множеству частичных пределов последовательности (1.8) при $m = m_*$, имеет на полуинтервале $[0, T_0/m_*)$ нули t_1 , t_2 , для которых $M_*'(t_1)M_*'(t_2) < 0$. Пусть, далее, выполняется неравенство*

$$s_\infty = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} s(\tau, x, y) \Big|_{(x,y)=O_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} s(\tau, x, y) \Big|_{(x,y)=O_2} \right] d\tau < 0, \quad (1.21)$$

где функция $s(t, x, y)$ определена в (1.10). Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ количество экспоненциально устойчивых периодических по t решений системы (1.1) неограниченно растет.

1.2. Обоснование результатов

Начнем с доказательства леммы 1.3 и убедимся, к примеру, в справедливости первого предельного равенства (1.16) (второе устанавливается аналогично). В связи с этим обратимся к монографиям [17, 18], из результатов которых вытекает существование в окрестности седла O_2 локального диффеоморфизма

$$(x, y) \xrightarrow{U} (u, v) \quad (1.22)$$

класса C^∞ со следующими свойствами. Во-первых, под действием отображения (1.22) состояние равновесия O_2 переходит в начало координат, а примыкающие к нему участки сепаратрис Γ_1 и Γ_2 — в отрезки $\{(u, v) : u = 0, 0 \leq v \leq r_0\}$ и $\{(u, v) : 0 \leq u \leq r_0, v = 0\}$ соответственно, где $r_0 > 0$ достаточно мало. Во-вторых, саму систему (1.2) замена (1.22) преобразует к виду

$$\dot{u} = \lambda_2(1 + \Delta(uv))u, \quad \dot{v} = -\lambda_2(1 + \Delta(uv))v, \quad (1.23)$$

где определенная в некоторой окрестности нуля функция $\Delta = \Delta(s)$ такова, что $\Delta(0) = 0$, $\Delta(s) \in C^\infty$.

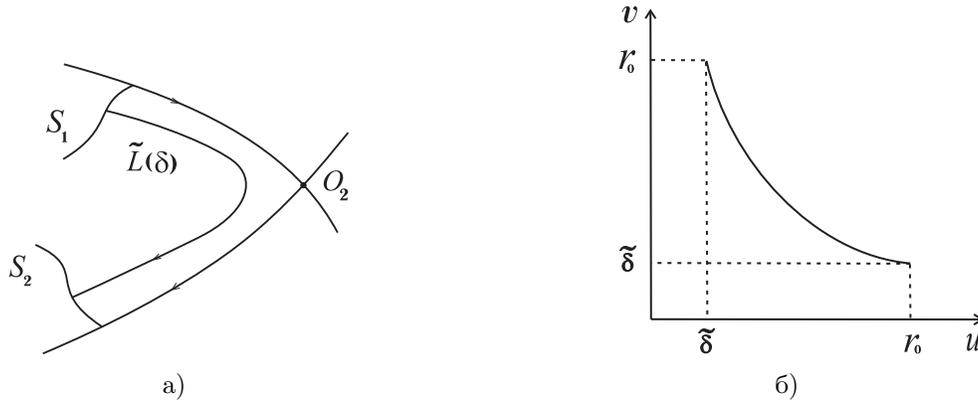


Рис. 1.2

Дальнейший анализ базируется на следующих геометрических построениях. Рассмотрим две криволинейные секущие $S_1 = U^{-1}(\gamma_1)$, $S_2 = U^{-1}(\gamma_2)$, где $\gamma_1 = \{(u, v) : 0 \leq u \leq r_0, v = r_0\}$, $\gamma_2 = \{(u, v) : u = r_0, 0 \leq v \leq r_0\}$, и участок $\tilde{L}(\delta)$ фазовой кривой (1.5), заключенный между ними (см. рис. 1.2а). Из явного вида системы (1.23) очевидным образом следует, что в новых переменных u, v этот участок задается равенством (см. рис. 1.2б)

$$\tilde{L}(\delta) = \{(u, v) : uv = r_0\tilde{\delta}, \tilde{\delta} \leq u \leq r_0\}, \quad (1.24)$$

где $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\delta)$, $\tilde{\delta}(0) = 0$, $\tilde{\delta}'(0) > 0$ — некоторая функция класса C^∞ , определенная на отрезке вида $[0, \delta_{**}]$, $0 < \delta_{**} \leq \delta_*$.

На следующем этапе разобьем $\tau_1(\delta)$ на три слагаемых $\tau_{1,1}(\delta) + \tau_{1,2}(\delta) + \tau_{1,3}(\delta)$, где $\tau_{1,1}$ — время движения по траектории (1.5) от l_1 до S_1 , $\tau_{1,2}$ — время, которое траектория $L(\delta)$ проводит между секущими S_1 и S_2 , а $\tau_{1,3}$ — время движения от S_2 до l_2 . Отметим сразу, что первое и третье слагаемые получившейся суммы очевидным образом регулярны: $\tau_{1,1}(\delta), \tau_{1,3}(\delta) \in C^\infty[0, \delta_{**}]$, причем $\tau_{1,1}(0), \tau_{1,3}(0)$ представляют собой времена движения по участкам сепаратрис Γ_1, Γ_2 от l_1 до S_1 и от S_2 до l_2 соответственно. Что же касается слагаемого $\tau_{1,2}$, то для него из (1.23), (1.24) имеем

$$\tau_{1,2}(\delta) = \frac{\ln(r_0/\tilde{\delta}(\delta))}{\lambda_2(1 + \Delta(r_0\tilde{\delta}(\delta)))}. \quad (1.25)$$

И наконец, объединяя равенство (1.25) с отмеченными выше свойствами $\tau_{1,1}, \tau_{1,3}$, приходим к выводу, что функция $\tau_1(\delta)$ допускает представление

$$\tau_1(\delta) = \frac{\psi_1(\delta)}{\lambda_2} \ln \frac{1}{\tilde{\delta}} + \psi_2(\delta),$$

где $\psi_1(\delta), \psi_2(\delta) \in C^\infty[0, \delta_{**}]$, $\psi_1(0) = 1$. А отсюда автоматически следует первое равенство (1.16), в котором $\varkappa_* = \psi_2(0)$. Лемма 1.3 доказана.

Установленная лемма позволяет уже достаточно просто разобраться с вычислением частичных пределов последовательности (1.8). Однако для проведения соответствующего анализа нам потребуются дополнительные геометрические построения. А именно, рассмотрим отрезки σ_1 и σ_2 с концами в точках O_1 и O_2 , направленные внутрь контура Γ и не касающиеся сепаратрис Γ_1, Γ_2 (см. рис. 1.1). Обозначим, далее, через $t_j(\delta)$, $j = 1, \dots, 4$, времена движения по циклу (1.5) от l_1 до σ_2 , от σ_2 до l_2 , от l_2 до σ_1 и от σ_1 до l_1 соответственно. После этого заменим промежуток $[0, nT_0/m]$ в интеграле из (1.12) двумя отрезками $[-t_4(\delta_n/m), t_1(\delta_n/m)]$, $[t_1(\delta_n/m), t_1(\delta_n/m) + t_2(\delta_n/m) + t_3(\delta_n/m)]$ (что возможно в силу периодичности подынтегральной функции с периодом $T(\delta_n/m) = nT_0/m$) и перейдем во втором из

получившихся интегралов к новой переменной $\tau' = \tau - \tau_1(\delta_{n/m})$. В результате убеждаемся, что $M_{n/m}(t) = M_{n/m,1}(t) + M_{n/m,2}(t)$, где

$$M_{n/m,1}(t) = \int_{-t_4(\delta_{n/m})}^{t_1(\delta_{n/m})} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \Phi(t + kT_0/m + \tau, x_{n/m}^*(\tau), y_{n/m}^*(\tau)) \right) d\tau, \quad (1.26)$$

$$M_{n/m,2}(t) = \int_{-t_2(\delta_{n/m})}^{t_3(\delta_{n/m})} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \Phi\left(t + \theta_{n/m} + kT_0/m + \tau, x_{n/m}^*(\tau + \tau_1(\delta_{n/m})), y_{n/m}^*(\tau + \tau_1(\delta_{n/m}))\right) \right] d\tau, \quad (1.27)$$

$$\theta_{n/m} = \tau_1(\delta_{n/m}) - \left[\frac{m\tau_1(\delta_{n/m})}{T_0} \right] \frac{T_0}{m} \in [0, T_0/m), \quad (1.28)$$

а через $[x]$ обозначена, как обычно, целая часть x .

Анализ последовательностей (1.26), (1.27) базируется на группе справедливых при $\delta \rightarrow 0$ асимптотических равенств:

$$(x_*(t, \delta), y_*(t, \delta)) = (x_1(t), y_1(t)) + O(\sqrt{\delta}), \quad t \in [-t_4(\delta), t_1(\delta)]; \quad (1.29)$$

$$(x_*(t + \tau_1(\delta), \delta), y_*(t + \tau_1(\delta), \delta)) = (x_2(t), y_2(t)) + O(\sqrt{\delta}), \quad t \in [-t_2(\delta), t_3(\delta)]; \quad (1.30)$$

$$t_j(\delta) = \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{1}{\delta} + O(1), \quad j = 1, 2; \quad t_j(\delta) = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{1}{\delta} + O(1), \quad j = 3, 4, \quad (1.31)$$

вытекающих из проделанных при доказательстве леммы 1.3 построений. Действительно, из представления (1.24) для кривой $L(\delta)$ в окрестности O_2 и из аналогичного представления в окрестности O_1 заключаем, что, во-первых, расстояние от точки $(x_*(t, \delta), y_*(t, \delta))$ до контура Γ является величиной порядка δ при тех t , когда эта точка находится вне некоторых фиксированных окрестностей седел; во-вторых, $\rho(L(\delta), O_j) = O(\sqrt{\delta})$, $j = 1, 2$. А отсюда автоматически следует справедливость асимптотических формул (1.29), (1.30) равномерно по t из указанных промежутков.

Для того чтобы убедиться, к примеру, в наличии равенств (1.31) для $t_1(\delta)$ и $t_2(\delta)$, без ограничения общности будем считать, что секущая σ_2 в переменных (u, v) (см. (1.22)) записывается в виде прямой $v = u$. Далее, несложный подсчет показывает, что времена $\tilde{t}_1(\delta)$, $\tilde{t}_2(\delta)$ движения фазовой точки системы (1.23) по участкам кривой (1.24), расположенным выше и ниже секущей $v = u$, имеют порядок $\frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{1}{\delta}$. Остается добавить, что $t_j(\delta) = \tilde{t}_j(\delta) + O(1)$, $j = 1, 2$.

Возвращаясь к равенствам (1.26), (1.27) и учитывая в них формулы (1.29)–(1.31) при $\delta = \delta_{n/m}$, приходим к выводу, что интересующие нас последовательности при $n \xrightarrow{m} \infty$ допускают равномерные по $t \in [0, T_0/m]$ асимптотические представления

$$M_{n/m,1}(t) = S_m^{(1)}(t) + O\left(\sqrt{\delta_{n/m}} \ln \frac{1}{\delta_{n/m}}\right), \quad M_{n/m,2}(t) = S_m^{(2)}(t + \theta_{n/m}) + O\left(\sqrt{\delta_{n/m}} \ln \frac{1}{\delta_{n/m}}\right),$$

где $S_m^{(j)}(t)$, $j = 1, 2$ — функции (1.18), $\theta_{n/m}$ — числовая последовательность (1.28). А отсюда, в свою очередь, заключаем, что множество всех равномерных частичных пределов исходной последовательности $M_{n/m}(t)$ задается формулой

$$S_m^{(1)}(t) + S_m^{(2)}(t + z), \quad z \in \Lambda, \quad (1.32)$$

где Λ — множество частичных пределов последовательности $\theta_{n/m}$ при $n \xrightarrow{m} \infty$.

На завершающем этапе обоснования теоремы 1.1 воспользуемся предельными соотношениями (1.16), из которых следует, что

$$\tau_1(\delta_{n/m}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{nT_0}{m} + c_0 + o(1), \quad n \xrightarrow{m} \infty, \quad (1.33)$$

где c_0 — постоянная из (1.20). Подставляя, далее, формулу (1.33) в явное выражение для $\theta_{n/m}$ (см. (1.28)), убеждаемся, что множество Λ либо совпадает с отрезком $[0, T_0/m]$ (в случае иррационального λ_1/λ_2), либо состоит из конечного числа элементов вида

$$(rpT_0/(mq) + c_0) \pmod{T_0/m}, \quad r \in \Omega(m, q)$$

(если $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) = p/q$ при взаимно простых натуральных p, q). Таким образом, в силу (1.32) в каждом из двух случаев получаем требуемые равенства (1.17) или (1.19), (1.20). Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2 по существу вытекает из леммы 1.1 и уже установленной теоремы 1.1. Поэтому ниже приведем лишь краткую схему ее обоснования.

Предположим, что функция $M_*(t)$, о которой говорится в условиях этой теоремы, является пределом подпоследовательности функций Мельникова

$$M_{n_k/m_*}(t), \quad n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots, \quad n_k \in \mathbb{N}(m_*), \quad k \geq 1.$$

Тогда автоматически $M'_{n_k/m_*}(t) \rightarrow M'_*(t)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно по $0 \leq t \leq T_0/m_*$ (для доказательства этого факта достаточно продифференцировать по t формулы (1.26), (1.27) и провести все дальнейшие рассуждения). А отсюда и из ограничений, наложенных на $M_*(t)$, вытекает, что, начиная с некоторого номера k_0 , все функции $M_{n_k/m_*}(t)$ имеют на полуинтервале $[0, T_0/m_*)$ простые нули $t_{1,k}, t_{2,k}$, стремящиеся при $k \rightarrow \infty$ к нулям t_1, t_2 функции $M_*(t)$. Кроме того, опираясь на асимптотические представления (1.29)–(1.31), нетрудно показать, что $s_{n_k/m_*}/(n_k T_0) \rightarrow s_\infty$ при $k \rightarrow \infty$, где s_{n_k/m_*} — подпоследовательность последовательности (1.10) при $m = m_*$, а s_∞ — постоянная (1.21), которая, напомним, предполагается отрицательной. Тем самым, без ограничения общности можно считать, что $s_{n_k/m_*} < 0$ при $k \geq k_0$.

Суммируя все сказанное, приходим к выводу, что условия теоремы 1.2 влекут выполнение условий леммы 1.1 при $m = m_*$ сразу для бесконечной последовательности номеров $n_k, k \geq k_0$, причем $s_{n_k/m_*} < 0, M'_{n_k/m_*}(t_{1,k})M'_{n_k/m_*}(t_{2,k}) < 0, k \geq k_0$. А это значит, что нулям $t_{1,k}, t_{2,k}$ в исходной системе (1.1) при надлежащем уменьшении ε соответствуют периодические решения заведомо разных типов и, что самое главное, с необходимостью одно из них — устойчивый фокус. Таким образом, применяя упомянутую лемму к любому конечному подмножеству номеров $n_k, k \geq k_0$, получаем требуемый факт: неограниченное увеличение числа устойчивых периодических решений системы (1.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Итак, для придания нашему изложению необходимой полноты осталось разобраться с леммой 1.1. Как уже отмечалось выше, для ее доказательства можно воспользоваться известными асимптотическими методами из [12–14], суть которых заключается в переходе к новым переменным, одна из которых меняется медленно (со скоростью порядка ε), а другая является быстрой. В рамках условий 1.1–1.3 в качестве таких переменных удобно взять координаты $(\varphi, \delta): 0 < \delta \leq \delta_*, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \pmod{2\pi}$, связанные с исходными переменными (x, y) равенствами

$$x = \tilde{x}_*(\varphi, \delta), \quad y = \tilde{y}_*(\varphi, \delta), \quad (1.34)$$

где $\tilde{x}_*(\varphi, \delta) = x_*(\varphi/\omega(\delta), \delta), \tilde{y}_*(\varphi, \delta) = y_*(\varphi/\omega(\delta), \delta), \omega(\delta) = 2\pi/T(\delta)$.

Дальнейший способ действий стандартен: сначала, полагая $z = t$, перейдем от (1.1) к трехмерной системе для (x, y, z) , затем выполним в получившейся системе замену переменных $(x, y) \rightarrow (\delta, \varphi)$, исходя из формул (1.34), а после этого примем φ за новое время. В результате

приходим к системе с 2π -периодическими по φ и T_0 -периодическими по z правыми частями, имеющей вид

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{\omega(\delta)} + O(\varepsilon), \quad \frac{d\delta}{d\varphi} = \frac{\varepsilon}{\omega(\delta)h'(\delta)} \Phi(z, \tilde{x}_*(\varphi, \delta), \tilde{y}_*(\varphi, \delta)) + O(\varepsilon^2). \quad (1.35)$$

Здесь $h(\delta)$ — функция (1.7), производная которой в силу условия 1.3 отлична от нуля, а функция $\Phi(z, x, y)$ та же самая, что и в (1.4).

Для нахождения начальных условий периодических решений системы (1.35) обратимся к уравнениям

$$z(2\pi m, z_0, \delta_0, \varepsilon) = z_0 \pmod{T_0}, \quad \delta(2\pi m, z_0, \delta_0, \varepsilon) = \delta_0, \quad (1.36)$$

где $(z(\varphi, z_0, \delta_0, \varepsilon), \delta(\varphi, z_0, \delta_0, \varepsilon))$ — решение рассматриваемой системы с произвольно фиксированными начальными условиями $z_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 \in (0, \delta_*]$, заданными при $\varphi = 0$, а m — произвольное натуральное число. Подставим, далее, в (1.36) очевидные асимптотические представления

$$z(\varphi, z_0, \delta_0, \varepsilon) = z_1(\varphi) + O(\varepsilon), \quad \delta(\varphi, z_0, \delta_0, \varepsilon) = \delta_0 + \varepsilon \Delta_1(\varphi) + O(\varepsilon^2), \quad (1.37)$$

где

$$z_1(\varphi) = z_0 + \frac{\varphi}{\omega(\delta_0)}, \quad \Delta_1(\varphi) = \frac{1}{\omega(\delta_0)h'(\delta_0)} \int_0^\varphi \Phi(z_1(s), \tilde{x}_*(s, \delta_0), \tilde{y}_*(s, \delta_0)) ds. \quad (1.38)$$

В итоге после приведения подобных слагаемых, сокращения второго из получившихся уравнений на ε и отбрасывания слагаемых порядка ε для нахождения z_0, δ_0 приходим к системе первого приближения

$$\frac{2\pi m}{\omega(\delta_0)} = nT_0, \quad \frac{1}{\omega(\delta_0)h'(\delta_0)} \int_0^{2\pi m} \Phi(z_1(s), \tilde{x}_*(s, \delta_0), \tilde{y}_*(s, \delta_0)) ds = 0, \quad (1.39)$$

где натуральное n , как и номер m , может быть произвольным. Однако нас интересует случай, когда n, m выбраны в соответствии с условиями леммы 1.1, что и считаем сделанным.

Обратимся сначала к первому уравнению из (1.39) и заметим, что оно эквивалентно уравнению $T(\delta_0) = nT_0/m$, а значит, имеет единственное решение $\delta_0 = \delta_{n/m} \in (0, \delta_*]$. Подставляя, далее, $\delta_0 = \delta_{n/m}$ во второе равенство из (1.39), для отыскания возможных значений z_0 получаем уравнение

$$\frac{1}{h'(\delta_{n/m})} M_{n/m}(z_0) = 0, \quad (1.40)$$

где $M_{n/m}$ — функция Мельникова (1.8), о которой идет речь в лемме 1.1. Поэтому уравнение (1.40) заведомо имеет решение $z_0 = t_*$, для которого

$$M'_{n/m}(t_*) \neq 0. \quad (1.41)$$

Суммируя изложенное, приходим к выводу, что, во-первых, условия леммы 1.1 гарантируют существование у системы (1.39) решения

$$(z_0, \delta_0) = (t_*, \delta_{n/m}); \quad (1.42)$$

во-вторых, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ этому решению соответствует решение $(z(\varepsilon), \delta(\varepsilon))$: $z(0) = t_*$, $\delta(0) = \delta_{n/m}$ исходной системы (1.36). Для проверки последнего утверждения достаточно учесть в (1.39) отброшенные ранее слагаемые порядка ε и применить к получившейся системе теорему о неявной функции по переменным z_0, δ_0 в точке $z_0 = t_*$, $\delta_0 = \delta_{n/m}$, $\varepsilon = 0$. Подчеркнем, что условия упомянутой теоремы здесь заведомо выполняются, так как асимптотические представления (1.37), (1.38) допускают, очевидно, дифференцирование по z_0, δ_0 и

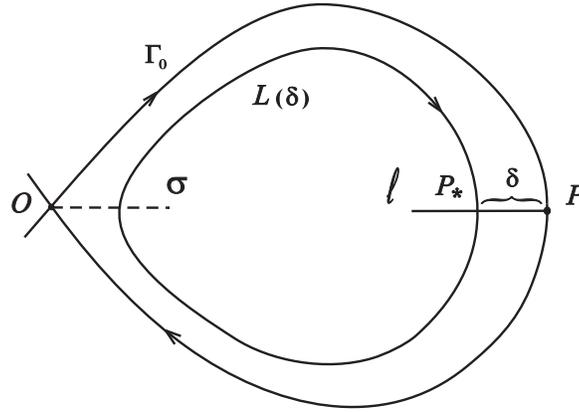


Рис. 1.3

якобиан системы (1.39), вычисленный на решении (1.42), в силу неравенства (1.41) отличен от нуля.

Построенному выше решению $(z(\varepsilon), \delta(\varepsilon))$ системы (1.36) в системе (1.1) соответствует nT_0 -периодическое решение $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$, мультипликаторы которого определяются из матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial z_0}(2\pi m, z_0, \delta_0, \varepsilon) & \frac{\partial z}{\partial \delta_0}(2\pi m, z_0, \delta_0, \varepsilon) \\ \frac{\partial \delta}{\partial z_0}(2\pi m, z_0, \delta_0, \varepsilon) & \frac{\partial \delta}{\partial \delta_0}(2\pi m, z_0, \delta_0, \varepsilon) \end{pmatrix} \Big|_{z_0=z(\varepsilon), \delta_0=\delta(\varepsilon)}. \quad (1.43)$$

Далее, несложный подсчет с учетом равенств (1.37), (1.38) показывает, что собственные значения $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon)$ матрицы (1.43) допускают асимптотику

$$\begin{aligned} \lambda_1(\varepsilon) &= 1 + \sqrt{\varepsilon} \sqrt{m T'(\delta_{n/m}) M'_{n/m}(t_*) / h'(\delta_{n/m})} + O(\varepsilon), \\ \lambda_2(\varepsilon) &= 1 - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{m T'(\delta_{n/m}) M'_{n/m}(t_*) / h'(\delta_{n/m})} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Таким образом, при условии (1.9) подкоренное выражение в (1.44) положительно, а значит, мультипликаторы $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon)$ вещественны и $|\lambda_1(\varepsilon)| > 1, |\lambda_2(\varepsilon)| < 1$. При выполнении же строго противоположного (1.9) неравенства имеем $\lambda_2(\varepsilon) = \bar{\lambda}_1(\varepsilon)$, и в силу теоремы Лиувилля

$$|\lambda_1(\varepsilon)| = |\lambda_2(\varepsilon)| = \exp(\varepsilon s_{n/m}/2 + O(\varepsilon^2)) < 1 \quad (> 1)$$

при $s_{n/m} < 0$ (> 0), где $s_{n/m}$ — величина (1.10). Лемма 1.1 доказана.

Как уже было сказано в п. 1.1, лемма 1.2 не требует отдельного обоснования. Отметим только, что периодические решения (1.14) и их сдвиги (1.15) соответствуют всем нулям функции Мельникова $M_{n/m}(t)$, лежащим на полуинтервале $[0, nT_0)$. Любому же другому нулю этой функции отвечает периодическое решение, совпадающее с одним из решений семейства (1.14), (1.15).

1.3. Случай одной сепаратрисной петли

В данном пункте установим аналоги теорем 1.1, 1.2 для более простого случая, когда условия 1.1–1.3 заменены следующими ограничениями.

Условие 1.1'. Предполагаем, что система (1.2) имеет в области G замкнутый контур Γ (см. рис. 1.3), состоящий из сепаратрисы Γ_0 и седла O :

$$\Gamma_0 = \{(x_0(t), y_0(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (x_0(t), y_0(t)) = O. \quad (1.45)$$

Условие 1.2'. Считаем, что в области, ограничиваемой кривой $\Gamma = \Gamma_0 \cup O$, система (1.2) имеет однопараметрическое семейство циклов (1.5), периоды $T(\delta)$ которых обладают свойствами (1.6). Предполагаем также, что фазовые траектории (1.5) пересекают без касания секущую l , являющуюся отрезком внутренней нормали к кривой (1.45) в точке $P = (x_0(0), y_0(0))$, причем (см. рис. 1.3) $P_* = (x_*(0, \delta), y_*(0, \delta)) \in l$, $\rho(P_*, P) = \delta$, где, как и в условии 1.2, $\rho(*, *)$ — евклидова метрика.

Условие 1.3'. Считаем, что $h'(\delta) \neq 0$ при $\delta \in (0, \delta_*]$, где $h(\delta)$ — функция (1.7).

Как и в предыдущем случае, перечисленные условия позволяют ввести функцию Мельникова

$$M_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t + \tau, x_0(\tau), y_0(\tau)) d\tau \quad (1.46)$$

для сепаратрисы (1.45), а также последовательность функций Мельникова (1.8), вычисленную на резонансных циклах (1.5) с периодами $T(\delta) = n T_0/m$. Далее, леммы 1.1, 1.2 сохраняются здесь дословно (вместе с обоснованиями), а теорема 1.1 заменяется следующим существенно более простым утверждением.

Теорема 1.3. При выполнении условий 1.1'–1.3' и при любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ в метрике пространства $C^1[0, T_0/m]$ справедливо предельное равенство

$$\lim M_{n/m}(t) = S_m^{(0)}(t), \quad n \xrightarrow{m} \infty, \quad (1.47)$$

где $S_m^{(0)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} M_0(t + k T_0/m)$, $M_0(t)$ — функция (1.46).

Доказательство. Как и при обосновании теоремы 1.1, рассмотрим отрезок σ с концом в точке O , направленный внутрь Γ и не касающийся Γ_0 (см. рис. 1.3), а через $t_1(\delta)$, $t_2(\delta)$ обозначим времена движения по циклу (1.5) от l до σ и от σ до l соответственно. Далее, заменим промежуток $[0, n T_0/m]$ в интеграле из (1.12) отрезком $[-t_2(\delta_{n/m}), t_1(\delta_{n/m})]$ и воспользуемся справедливыми при $\delta \rightarrow +0$ асимптотическими представлениями:

$$\begin{aligned} (x_*(t, \delta), y_*(t, \delta)) &= (x_0(t), y_0(t)) + O(\sqrt{\delta}) \text{ равномерно по } t \in [-t_2(\delta), t_1(\delta)]; \\ t_j(\delta) &= \frac{1}{2\lambda_0} \ln \frac{1}{\delta} + O(1), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где $\pm\lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$) — характеристические показатели седла O . Подчеркнем, что равенства (1.48) обосновываются по той же схеме, что и аналогичные им соотношения (1.29)–(1.31).

Подставляя формулы (1.48) при $\delta = \delta_{n/m}$ в упомянутый выше интеграл, после некоторых преобразований приходим к равномерным по $t \in [0, T_0/m]$ асимптотическим представлениям

$$\begin{aligned} M_{n/m}(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} M_0(t + k T_0/m) + O\left(\sqrt{\delta_{n/m}} \ln \frac{1}{\delta_{n/m}}\right), \\ M'_{n/m}(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} M'_0(t + k T_0/m) + O\left(\sqrt{\delta_{n/m}} \ln \frac{1}{\delta_{n/m}}\right), \end{aligned}$$

из которых требуемое равенство (1.47) вытекает очевидным образом. Теорема 1.3 доказана.

Следует отметить, что при $m = 1$ существование предела (1.47) установлено в монографии [14].

Обратимся теперь к вопросу о реализуемости в системе (1.1) при условиях 1.1'–1.3' явления гамильтоновой буферности. Нетрудно показать (см. соответствующее место в п. 1.2), что из теоремы 1.3 и леммы 1.1 вытекает следующее утверждение, представляющее собой аналог теоремы 1.2.

Теорема 1.4. Пусть выполнены условия 1.1'–1.3' и при некотором натуральном m функция $M_*(t) = S_m^{(0)}(t)$ имеет на полуинтервале $[0, T_0/m)$ два таких нуля t_1, t_2 , что $M'_*(t_1)M'_*(t_2) < 0$. Предположим, далее, что справедливо неравенство

$$s_\infty = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[s(\tau, x, y) \Big|_{(x,y)=O} \right] d\tau < 0, \quad (1.49)$$

где $s(t, x, y)$ — функция из (1.10). Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ количество сосуществующих экспоненциально устойчивых периодических решений системы (1.1) неограниченно растет.

Применимость теорем 1.3, 1.4 проиллюстрируем на примере уравнения Дуффинга с квадратичной нелинейностью:

$$\ddot{x} - x + x^2 = -\varepsilon \dot{x} + \varepsilon a \cos \nu t, \quad (1.50)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, а параметры $a, \nu > 0$ имеют порядок единицы. Нетрудно проверить, что после перехода к переменным (x, y) , $y = \dot{x}$ уравнение (1.50) порождает систему, фазовый портрет которой при $\varepsilon = 0$ на качественном уровне имеет вид, показанный на рис. 1.3. В частности, здесь

$$\begin{aligned} O &= (0, 0), \quad \Gamma_0 = \{(x_0(t), \dot{x}_0(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \quad x_0(t) = 3/(\operatorname{ch} t + 1), \\ l &= \{(x, y) : y = 0, 3/2 - \delta_* \leq x \leq 3/2\}, \quad \delta_* \in (0, 3/2), \quad T_0 = 2\pi/\nu, \end{aligned} \quad (1.51)$$

а циклы (1.5) в данном случае — это замкнутые траектории

$$y^2/2 - x^2/2 + x^3/3 = c, \quad -1/6 < c < 0, \quad (1.52)$$

периоды которых монотонно стремятся к бесконечности при $c \rightarrow -0$.

Из равенств (1.51), (1.52) следует, что условия 1.1'–1.3' в рассматриваемом примере выполняются автоматически, а функция (1.46) для уравнения (1.50) вычислена в [19] и имеет вид

$$M_0(t) = -\frac{6}{5} + a \frac{6\pi\nu^2}{\operatorname{sh}(\pi\nu)} \sin \nu t. \quad (1.53)$$

Что же касается фигурирующей в теореме 1.3 предельной функции $S_m^{(0)}(t)$, то для нее из (1.53) вытекает равенство

$$S_m^{(0)}(t) = \begin{cases} -\frac{6}{5} m & \text{при } m \geq 2, \\ M_0(t) & \text{при } m = 1. \end{cases} \quad (1.54)$$

Из формул (1.49), (1.54) следует, что здесь $s_\infty = -1$, а нули t_1, t_2 с требуемыми в теореме 1.4 свойствами функция (1.54) имеет только при $m = 1$ и при выполнении неравенства

$$a > \frac{\operatorname{sh}(\pi\nu)}{5\pi\nu^2}. \quad (1.55)$$

В то же время, именно при условии (1.55) появляются простые нули у функции Мельникова (1.53). Таким образом, феномен гамильтоновой буферности в рассматриваемом уравнении напрямую связан с возникновением грубых гомоклинических структур в результате разрушения сепаратрисы Γ_0 . По этому поводу уместно отметить работы [16, 20], в которых близкий феномен установлен в чисто гамильтоновом случае, т. е. когда система (1.1) сохраняет гамильтоновость при $\varepsilon > 0$.

2. Явление буферности в уравнениях маятникового типа

2.1. Теоремы о субгармонической буферности

В данном разделе полученные выше общие результаты применяются для исследования феномена гамильтоновой буферности в уравнении

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + \sin x = \varepsilon f(t, x), \quad (2.1)$$

описывающем вынужденные колебания нелинейного маятника с малым трением $\varepsilon > 0$ под действием внешней силы $\varepsilon f(t, x)$. Предполагаем, что бесконечно дифференцируемая по совокупности переменных функция f периодична по t с некоторым периодом $T_0 > 0$, а по x — с периодом 2π . Типовыми примерами этой функции являются

$$f(t, x) = -a \cos \nu t \sin x, \quad a \cos \nu t \cos x, \quad a \sin(x - \nu t), \quad (2.2)$$

где $a, \nu > 0$. Отметим, что первые два случая (2.2) соответствуют маятнику, точка подвеса которого совершает вертикальные или горизонтальные гармонические колебания, а в третьем случае точка подвеса равномерно движется по вертикальной окружности с постоянной частотой ν (см. [21]).

Убедимся сначала, что после перехода к переменным (x, y) , где $y = \dot{x}$, уравнение (2.1) порождает систему, для которой выполняются условия 1.1–1.3. Действительно, в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} O_1 &= (-\pi, 0), \quad O_2 = (\pi, 0), \quad \Gamma_1 = \{(x_0(t), \dot{x}_0(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \\ \Gamma_2 &= \{(2\pi - x_0(t), -\dot{x}_0(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \quad x_0(t) = 4 \arctan(\exp t) - \pi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

а значит, справедливо первое из упомянутых условий. Далее, аналогом семейства циклов (1.5) для уравнения (2.1) служит совокупность периодических движений

$$L(k) = \{(x, y) : x = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(t, k)), \quad y = 2k \operatorname{cn}(t, k), \quad 0 \leq t \leq T(k)\} \quad (2.4)$$

с периодами $T(k) = 2\pi/\omega(k)$. Здесь $k \in (0, 1)$ — произвольный параметр, функции $\operatorname{sn}(t, k)$, $\operatorname{cn}(t, k)$ — эллиптические синус и косинус соответственно (см., например, [22]), а частота $\omega(k)$ задается равенством

$$\omega(k) = \frac{\pi}{2F(\pi/2, k)}, \quad (2.5)$$

где $F(\tau, k) = \int_0^\tau ds/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}$ — эллиптический интеграл первого рода. Добавим еще, что поскольку частота (2.5) на интервале $0 < k < 1$ монотонно убывает от единицы до нуля, то для периода $T(k)$ цикла (2.4) выполняются аналоги свойств (1.6), которые в данном случае имеют вид

$$T'(k) > 0 \text{ при } 0 < k < 1, \quad T(k) \rightarrow +\infty \text{ при } k \rightarrow 1 - 0. \quad (2.6)$$

Для проверки оставшегося условия 1.3 заметим, что гамильтониан $H(x, y) = 1 - \cos x + y^2/2$ на любом цикле (2.4) не зависит от t и принимает значение, равное $2k^2$.

Установленные факты позволяют определить для уравнения (2.1) требуемые функции Мельникова $M^{(1)}(t)$, $M^{(2)}(t)$, $M_{n/m}(t)$. В самом деле, для $M^{(j)}(t)$, $j = 1, 2$, в соответствии с равенствами (1.4), (2.3) имеем формулы

$$M^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau, x_0(\tau)) \dot{x}_0(\tau) d\tau - 8, \quad M^{(2)}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau, -x_0(\tau)) \dot{x}_0(\tau) d\tau - 8. \quad (2.7)$$

Рассмотрим, далее, уравнения $T(k) = nT_0/m$, которые в силу (2.6) при каждом $n \in \mathbb{N}(m)$, $n \geq n_0 = [2\pi m/T_0] + 1$, допускают решения $k = k_{n/m} \in (0, 1)$, причем $k_{n/m} \nearrow 1$ при $n \xrightarrow{m} \infty$. А отсюда, в свою очередь, следует, что

$$M_{n/m}(t) = \int_0^{nT_0} f(t + \tau, x_{n/m}(\tau)) \dot{x}_{n/m}(\tau) d\tau - \int_0^{nT_0} (\dot{x}_{n/m}(\tau))^2 d\tau, \quad n \in \mathbb{N}(m), \quad n \geq n_0, \quad (2.8)$$

где $x_{n/m}(t) = 2 \arcsin(k_{n/m} \operatorname{sn}(t, k_{n/m}))$.

Приступим теперь к вопросу о реализуемости в уравнении (2.1) феномена гамильтоновой буферности. Характерная особенность этого уравнения состоит в том, что в отличие от рассмотренного в п. 1.1 общего случая помимо обычных периодических решений $x(t)$, $x(t+T_0) \equiv x(t)$, $T_0 > 0$, которые принято называть колебательными, у него возможны еще так называемые вращательные периодические движения $x(t)$, для которых $x(t+T_0) \equiv x(t) + 2\pi k$ при некотором целом $k \neq 0$. Таким образом, буферность здесь может проявляться в двух формах — колебательной и вращательной.

В формулируемом ниже утверждении речь идет о колебательных субгармонических периодических решениях, которые, напомним, отвечают нулям функций Мельникова (2.8) при $m = 1$. Всюду ниже для краткости эти функции обозначаются через $M_n(t)$.

Теорема 2.1 (о колебательной субгармонической буферности). *Предположим, что какая-либо из функций*

$$M_*(t) = M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t) \quad \text{или} \quad M_*(t) = M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t + T_0/2) \quad (2.9)$$

имеет на полуинтервале $[0, T_0)$ нули t_1, t_2 , для которых $M_'(t_1)M_*'(t_2) < 0$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ количество экспоненциально устойчивых колебательных субгармонических периодических решений у уравнения (2.1) неограниченно растет.*

Доказательство. Заметим, что в силу симметрии в данном случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и все три точки $P_1 = \Gamma_1|_{t=0}$, $P_2 = \Gamma_2|_{t=0}$, $P_* = L(k)|_{t=0}$ (см. рис. 1.1) лежат на одной прямой $S = \{(x, y) : x = 0\}$, которая, в свою очередь, перпендикулярна сепаратрисам Γ_1, Γ_2 . Поэтому автоматически $l_1, l_2 \subset S$ и, в частности, $\tau_1 = \tau_2$, $\varkappa_* = \varkappa_{**}$, $c_0 = 0$ (см. (1.16), (1.20)). А отсюда и из теоремы 1.1 (при $m = 1$) заключаем, что при $l \rightarrow \infty$

$$M_{2l}(t) \rightarrow M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t), \quad M_{2l+1}(t) \rightarrow M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t + T_0/2), \quad (2.10)$$

где $M_{2l}(t)$, $M_{2l+1}(t)$ — подпоследовательности исходной последовательности $M_n(t)$.

Из установленных предельных равенств (2.10) и из сделанных предположений относительно одной из функций (2.9) вытекает, что мы находимся в рамках применимости теоремы 1.2. Действительно, условие устойчивости (1.21) для уравнения (2.1) выполняется очевидным образом, поскольку здесь $s_\infty = -1$. А это значит, что в силу упомянутой теоремы при $\varepsilon \rightarrow 0$ количество его устойчивых колебательных субгармоник неограниченно растет. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2 (о вращательной субгармонической буферности). *Предположим, что нули t_1, t_2 , о которых говорится в теореме 2.1, имеет хотя бы одна из функций*

$$M_*(t) = M^{(1)}(t) \quad \text{или} \quad M_*(t) = M^{(2)}(t). \quad (2.11)$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ неограниченно возрастает количество экспоненциально устойчивых вращательных субгармоник уравнения (2.1).

Доказательство. Изучим сначала вопрос о существовании у уравнения (2.1) вращательных периодических движений с положительными скоростями \dot{x} . В связи с этим обратим внимание, что при $\varepsilon = 0$ оно имеет семейство таких решений, задающееся равенством $\dot{x} = \sqrt{2(\xi + \cos x)}$, где параметр $\xi > 1$ произволен. Обыгрывая данное обстоятельство, перейдем от рассматриваемого уравнения к трехмерной системе для $(x, y, z) = (x, \dot{x}, t)$, затем выполним в получившейся системе замену $(x, y) \rightarrow (\tau, \xi)$, исходя из формул

$$x = \tau, \quad y = \sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \quad (2.12)$$

и в заключение примем τ за новое время. В результате приходим к системе

$$\frac{dz}{d\tau} = 1/\sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = -\varepsilon\sqrt{2(\xi + \cos \tau)} + \varepsilon f(z, \tau), \quad (2.13)$$

которую, естественно, следует рассматривать в области $\xi > 1$.

Как и при доказательстве леммы 1.1, обозначим через $(z(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon), \xi(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon))$ решенные системы (2.13) с произвольно фиксированными начальными условиями $z_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0 > 1$, заданными при $\tau = 0$, и рассмотрим уравнения

$$z(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) = z_0 \pmod{T_0}, \quad \xi(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) = \xi_0 \quad (2.14)$$

для определения начальных условий интересующих нас периодических движений. Подставим, далее, в систему (2.14) вытекающие из (2.13) асимптотические формулы

$$z(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon) = z_1(\tau) + O(\varepsilon), \quad \xi(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon) = \xi_0 + \varepsilon \xi_1(\tau) + O(\varepsilon^2), \quad (2.15)$$

где

$$z_1(\tau) = z_0 + \int_0^\tau ds/\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}, \quad \xi_1(\tau) = \int_0^\tau [f(z_1(s), s) - \sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}] ds. \quad (2.16)$$

В результате после некоторых преобразований и отбрасывания слагаемых порядка ε приходим к аналогичной (1.39) предельной системе

$$\int_0^{2\pi} \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}} = n T_0, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \int_0^{2\pi} [f(z_1(s), s) - \sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}] ds = 0, \quad (2.17)$$

которая, в принципе, содержит всю необходимую нам информацию.

Рассмотрим сначала первое уравнение из (2.17) и заметим, что его левая часть как функция переменной ξ_0 монотонно убывает при $1 < \xi_0 < \infty$ от $+\infty$ до нуля. Таким образом, при каждом $n \geq 1$ это уравнение имеет единственное решение $\xi_0 = \xi_{0,n}$, $\xi_{0,n} \searrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Подставляя, далее, $\xi_0 = \xi_{0,n}$ во второе равенство из (2.17) и учитывая в нем соотношения

$$2k_n F(\pi/2, k_n) = n T_0, \quad \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_{0,n} + \cos s)}} = k_n F(\tau/2, k_n), \quad (2.18)$$

где $k_n = \sqrt{2/(\xi_{0,n} + 1)}$, $F(\tau, k)$ — эллиптический интеграл первого рода (см. (2.5)), для нахождения z_0 получаем уравнение

$$M_n(z_0) \equiv \int_0^{2\pi} f(z_0 + k_n F(s/2, k_n), s) ds - \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\xi_{0,n} + \cos s)} ds = 0. \quad (2.19)$$

Следуя описанной при доказательстве леммы 1.1 схеме, без труда убеждаемся, что любому простому корню $z_{0,*} \in [0, T_0]$ этого уравнения при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует грубое вращательное периодическое решение исходного уравнения (2.1), являющееся седлом (при $M'_n(z_{0,*}) < 0$) или устойчивым фокусом (в случае $M'_n(z_{0,*}) > 0$).

Предположим, что нули t_1, t_2 с требуемыми свойствами имеет первая из функций (2.11). Тогда если мы покажем, что последовательность функций Мельникова (2.19) при $n \rightarrow \infty$ сходится в C^1 -метрике на отрезке $0 \leq z_0 \leq T_0$ к пределу $M^{(1)}(z_0)$, то утверждение теоремы 2.2 будет установлено (см. аналогичное место в доказательстве теоремы 1.2). А так как очевидным образом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\xi_{0,n} + \cos s)} ds = 8, \tag{2.20}$$

то проблема сводится к анализу последовательности интегралов

$$\widetilde{M}_n(z_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + k_n F(s/2, k_n), s) ds, \quad n \geq 1, \tag{2.21}$$

где по сравнению с (2.19) изменен промежуток интегрирования (эта операция законна, так как в силу первого равенства (2.18) подынтегральная функция в (2.21) периодична по s с периодом 2π).

Выполним в интегралах (2.21) последовательно замены $s/2 \rightarrow s, s = \operatorname{am}(u, k_n)$, где $\operatorname{am}(u, k)$ — функция, определяющаяся как неявная из уравнения $F(s, k) = u$. В результате интересующие нас функции примут вид

$$\widetilde{M}_n(z_0) = 2 \int_{-r_n}^{r_n} f(z_0 + k_n u, 2 \operatorname{am}(u, k_n)) \operatorname{dn}(u, k_n) du, \quad n \geq 1, \tag{2.22}$$

где $r_n = \pi/(2\omega(k_n)), \operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)}$.

На заключительном этапе подставим в формулы (2.22) и в аналогичные формулы, получающиеся из них после дифференцирования по z_0 , известные асимптотические представления для эллиптических функций при $k \rightarrow 1 - 0$ (см., например, [23]):

$$\begin{aligned} F(\pi/2, k) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-k} + O(1), \\ \operatorname{am}(u, k) &= 2 \arctan(\exp u) - \pi/2 + O(\sqrt{1-k}), \\ \operatorname{dn}(u, k) &= 1/\operatorname{ch} u + O(\sqrt{1-k}), \end{aligned} \tag{2.23}$$

второе и третье из которых справедливы равномерно по $u \in [-\frac{\pi}{2\omega(k)}, \frac{\pi}{2\omega(k)}]$. В результате убеждаемся, что в метрике пространства $C^1[0, T_0]$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{M}_n(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z_0 + t, x_0(t)) \dot{x}_0(t) dt, \tag{2.24}$$

где $x_0(t)$ — функция из (2.3). И наконец, объединяя (2.20), (2.24), получаем требуемую сходимость $M_n(z_0)$ к $M^{(1)}(z_0)$.

Для завершения доказательства теоремы 2.2 осталось рассмотреть случай, когда нули t_1, t_2 с нужными свойствами существуют у функции $M_*(t) = M^{(2)}(t)$. Здесь речь пойдет о вращательных периодических движениях системы (2.1) с отрицательными скоростями. Их нахождение связано с исследованием системы

$$\frac{dz}{d\tau} = 1/\sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = -\varepsilon \sqrt{2(\xi + \cos \tau)} - \varepsilon f(z, -\tau), \tag{2.25}$$

получающейся из исходного уравнения (2.1) при переходе к переменным $x, y = \dot{x}, z = t$ и аналогичной (2.12) замене $x = -\tau, y = -\sqrt{2(\xi + \cos \tau)}$.

Анализ системы (2.25) идентичен описанному выше и приводит к аналогичной (2.19) последовательности функций Мельникова

$$M_n(z_0) = - \int_0^{2\pi} f(z_0 + k_n F(s/2, k_n), -s) ds - \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\xi_{0,n} + \cos s)} ds, \quad n \geq 1. \quad (2.26)$$

Далее, привлекая в очередной раз асимптотические представления (2.23), нетрудно показать, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность (2.26) сходится в метрике пространства $C^1[0, T_0]$ к функции $M^{(2)}(z_0)$. А отсюда и из сделанных относительно $M_*(t) = M^{(2)}(t)$ предположений вытекает нужный факт: неограниченное увеличение при $\varepsilon \rightarrow 0$ количества устойчивых вращательных периодических решений уравнения (2.1) с отрицательными скоростями. Теорема 2.2 полностью доказана.

Применимость установленных теорем проиллюстрируем на примерах (2.2). Используя теорию вычетов, можно показать, что в первом из них для функций Мельникова (2.7) выходят формулы

$$M^{(1)}(t) = M^{(2)}(t) = \frac{2\pi\nu^2}{\operatorname{sh}(\pi\nu/2)} a \sin \nu t - 8, \quad (2.27)$$

во втором — формулы

$$M^{(1)}(t) = \frac{2\pi\nu^2}{\operatorname{ch}(\pi\nu/2)} a \cos \nu t - 8, \quad M^{(2)}(t) = -\frac{2\pi\nu^2}{\operatorname{ch}(\pi\nu/2)} a \cos \nu t - 8, \quad (2.28)$$

а в третьем случае интересующие нас функции задаются равенствами

$$M^{(1)}(t) = \frac{4\pi\nu^2 \exp(\pi\nu/2)}{\operatorname{sh}(\pi\nu)} a \sin \nu t - 8, \quad M^{(2)}(t) = -\frac{4\pi\nu^2 \exp(-\pi\nu/2)}{\operatorname{sh}(\pi\nu)} a \sin \nu t - 8. \quad (2.29)$$

Из формул (2.27)–(2.29) следует, что при увеличении a условия теорем 2.1, 2.2 будут заведомо выполняться во всех рассмотренных ситуациях. А это значит, что при подходящим образом фиксированных параметрах a, ν и при $\varepsilon \rightarrow 0$ неограниченный рост числа устойчивых субгармоник, как колебательных, так и вращательных, происходит в каждом из уравнений (2.1), (2.2). Впрочем, справедливости ради, следует отметить, что поскольку эти решения накапливаются в окрестности сепаратрис Γ_1, Γ_2 , то области притяжения большинства из них весьма узки. В чисто аналитическом плане данный факт выражается в том, что решения $k = k_n$ уравнений $4F(\pi/2, k) = nT_0$ и $2kF(\pi/2, k) = nT_0$ стремятся к единице при $n \rightarrow \infty$.

2.2. О существовании ультрасубгармоник

В данном пункте остановимся на вопросе о существовании у уравнения (2.1) ультрасубгармонических решений (напомним, что ультрасубгармониками называются периодические решения, отвечающие нулям функций Мельникова (2.8) при $m \geq 2$ и нулям аналогичных функций для вращательного случая). В связи с этим введем в рассмотрение разложение Фурье правой части $f(t, x)$ из (2.1), которое имеет вид

$$f(t, x) = a_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \cos k\nu t + b_k(x) \sin k\nu t, \quad (2.30)$$

где $\nu = 2\pi/T_0$. Подставим, далее, ряд (2.30) в (2.8) и воспользуемся для функций $M_{n/m}(t)$ представлением (1.12). В результате с учетом очевидных равенств

$$\sum_{l=0}^{m-1} \exp\left(\frac{2\pi kl}{m} i\right) = \sum_{l=0}^{m-1} \exp\left(-\frac{2\pi kl}{m} i\right) = \begin{cases} m & \text{при } k/m \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

приходим к формулам

$$M_{n/m}(t) = m \int_0^{nT_0/m} [\tilde{f}(t + \tau, x_{n/m}(\tau)) - \dot{x}_{n/m}(\tau)] \dot{x}_{n/m}(\tau) d\tau, \quad (2.31)$$

$$\tilde{f}(t, x) = a_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{lm}(x) \cos(lm\nu t) + b_{lm}(x) \sin(lm\nu t).$$

Из соотношений (2.31) следует, что функции (2.8) могут иметь простые нули только при наличии в разложении (2.30) гармоник, кратных m . По этой причине, в частности, заведомо отсутствуют ультрасубгармонические периодические решения, как колебательные, так и вращательные, у уравнений (2.1), (2.2). Появляются же устойчивые ультрасубгармоники в этих уравнениях только при существенном увеличении параметра a , когда перестает работать лемма 1.1.

Для пояснения сути дела обратимся, например, к уравнению

$$\ddot{x} + (1 + \mu \cos \nu t) \sin x = 0, \quad (2.32)$$

считая, что параметр $\mu > 0$ мал, а частота $\nu > 0$ внешнего параметрического воздействия, как и ранее, имеет порядок единицы. Последовательность дальнейших действий такова. Сначала, полагая, $(x, y) = (x, \dot{x})$, перейдем от (2.32) к двумерной неавтономной системе. Затем выполним в этой системе замену $(x, y) \rightarrow (k, \varphi)$, $k \in (0, 1)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi \pmod{2\pi}$, исходя из формул (см. (2.4))

$$x = 2 \arcsin \left(k \operatorname{sn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k)}, k \right) \right), \quad y = 2k \operatorname{cn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k)}, k \right). \quad (2.33)$$

И наконец, обозначим через Π_μ — отображение сдвига по решениям получившейся системы для k, φ за время от $t_0 = 0$ до $t_1 = 2\pi/\nu$.

Нетрудно увидеть, что интересующее нас отображение Π_μ допускает представление

$$\Pi_\mu : \begin{cases} k \rightarrow k + \mu \Delta_1(k, \varphi, \mu), \\ \varphi \rightarrow \varphi + \gamma(k) + \mu \Delta_2(k, \varphi, \mu) \pmod{2\pi}, \end{cases} \quad (2.34)$$

где

$$\gamma(k) = 2\pi \omega(k)/\nu, \quad \gamma'(k) < 0 \text{ при } 0 < k < 1, \quad \gamma(0) = 2\pi/\nu, \quad \gamma(1) = 0, \quad (2.35)$$

а функции Δ_1, Δ_2 являются аналитическими по совокупности переменных и 2π -периодическими по φ .

Из свойств (2.35) следует, что если рассматривать k, φ как полярные координаты на плоскости, то (2.34) представляет собой сохраняющее площадь закручивающее отображение (точнее говоря, становится таковым после замены k на $\tilde{k} = \int_0^k 4s ds / \omega(s)$). А это означает, что мы можем воспользоваться известной геометрической теоремой Пуанкаре (см., например, [24, 25]), которая в данном случае утверждает следующее: для любого рационального числа $m/n \in (0, 1/\nu)$ найдется такое $\mu_0 = \mu_0(m/n)$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ существует $2ln$ неподвижных точек отображения Π_μ^n , где $l = l(\mu)$ — некоторое натуральное число. Более того, можно показать [24], что в общем случае половина из этих неподвижных точек эллиптические, а половина — седловые.

Из сказанного выше следует, что в окрестности резонансного цикла (2.33), для которого $\omega(k) = \frac{m}{n} \nu$, $m \geq 2$, при некоторых достаточно малых μ исходное уравнение (2.32) имеет по крайней мере два периодических решения, одно из которых седловое, а другое эллиптическое. Далее, фиксируем такое μ и добавим в уравнение (2.32) малое трение $\varepsilon > 0$, т. е. перейдем к уравнению

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + (1 + \mu \cos \nu t) \sin x = 0. \quad (2.36)$$

Тогда, очевидно, эллиптическое периодическое движение сохранится и станет устойчивым фокусом. Отметим еще, что аналогичные построения справедливы, естественно, и в случае вращательных ультрасубгармоник.

Итак, на качественном уровне вопрос о реализуемости в уравнении (2.36) устойчивых ультрасубгармоник, как колебательных, так и вращательных, решается достаточно просто и с необходимостью приводит к условию $\varepsilon/\mu \ll 1$. Что же касается точного соотношения между параметрами ε и μ , при котором существует та или иная ультрасубгармоника, то эта проблема пока остается открытой.

Подводя итог, проиллюстрируем изложенные соображения качественного характера результатами компьютерного анализа уравнения (2.36) при

$$\varepsilon = 0.001, \quad \mu = 1.6, \quad \nu = 5. \quad (2.37)$$

Вычисления, сделанные с помощью программы Д. С. Глызина (см. [26]), показали, что при условиях (2.37) в рассматриваемом уравнении сосуществует не менее 16 устойчивых вращательных ультрасубгармоник, для которых $x(t+T_0) \equiv x(t) + 2\pi m$ при некоторых $T_0 > 0$, $|m| \geq 2$. Проекция восьми из этих решений на плоскость (x, \dot{x}) при $-\pi \leq x \leq \pi$ представлены на рис. 2.1–2.8 (оставшиеся восемь решений получаются из приведенных на данных рисунках в результате замен $x \rightarrow -x$, $\dot{x} \rightarrow -\dot{x}$). Общее же количество устойчивых периодических решений, которые удалось обнаружить в уравнении (2.36) при значениях параметров (2.37), равно 26.

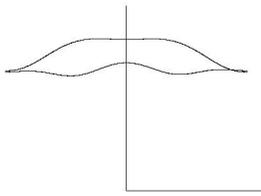


Рис. 2.1

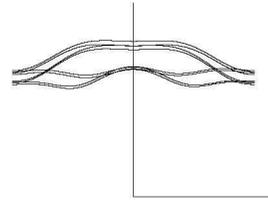


Рис. 2.2

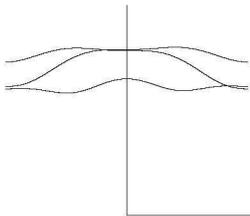


Рис. 2.3

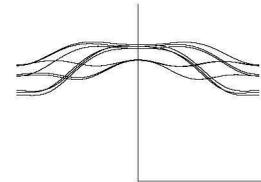


Рис. 2.4

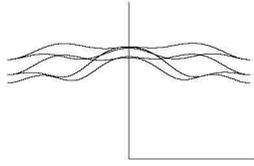


Рис. 2.5

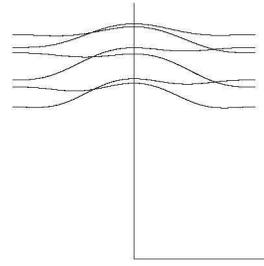


Рис. 2.6

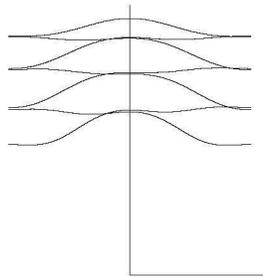


Рис. 2.7

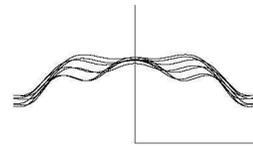


Рис. 2.8

3. Анализ примеров

3.1. Физическая часть

В данном разделе установленные выше общие результаты о явлении гамильтоновой буферности применяются к двум модельным уравнениям маятникового типа:

$$\ddot{x} + \sin x = \frac{a}{k} \sin(kx - \nu t), \quad (3.1)$$

$$\ddot{x} + (1 + a \cos \nu t) \sin x = 0, \quad (3.2)$$

где a, k, ν — положительные параметры, а также к уравнению

$$\ddot{x} + x = a \sin(x - \nu t), \quad (3.3)$$

получающемуся из (3.1) при условии $k \gg 1$ после замены $kx \rightarrow x$ и отбрасывания слагаемых порядка малости $1/k^2$ и выше. Аргументом в пользу выбора в качестве объектов исследования именно этих уравнений служит тот факт, что они допускают многочисленные физические интерпретации. Некоторые прикладные проблемы, связанные с уравнениями (3.1)–(3.3), описываются ниже.

Начнем с простейшей постановки задачи, приводящей к уравнению (3.1). Следуя [21], рассмотрим механическую систему, состоящую из плоского маятника, точка подвеса которого

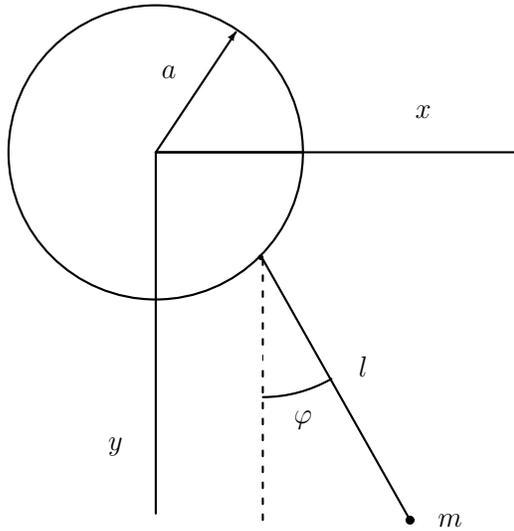


Рис. 3.1

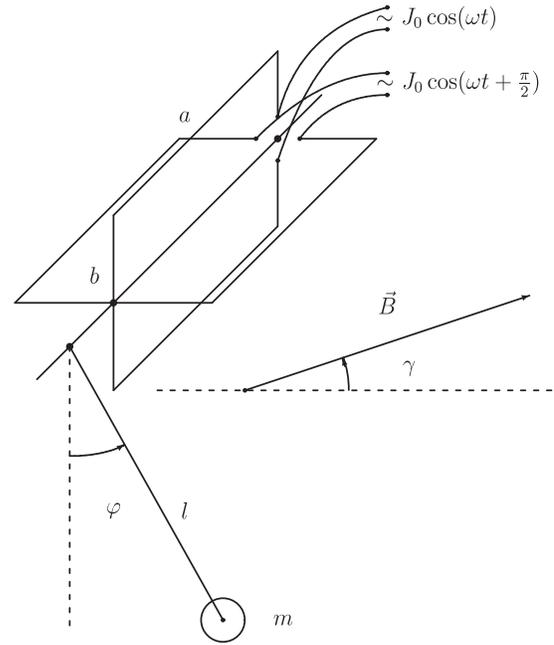


Рис. 3.2

равномерно движется по вертикальной окружности с постоянной частотой ω (см. рис. 3.1). В этой ситуации функция Лагранжа и уравнение движения системы имеют вид

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mla\omega^2 \sin(\varphi - \omega t) + mgl \cos \varphi, \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = A_0 \cos(\varphi - \omega t), \quad (3.4)$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикальной оси, m и l — его масса и длина, a — радиус окружности, по которой вращается точка подвеса, g — ускорение свободного падения, $\omega_0^2 = g/l$, $A_0 = a\omega^2/l$. Остается заметить, что фигурирующее в (3.4) уравнение преобразуется к виду (3.1) при $k = 1$.

Следующий пример интересен тем, что представляет собой простейшую модель взаимодействия механического осциллятора с элементарными составляющими коллекторного электрического двигателя. Предположим, что, как и в предыдущем случае, имеется плоский маятник, но теперь воздействие на него осуществляется за счет поворота в магнитном поле контуров с переменным током. Точнее говоря, рассмотрим электромеханическую систему (см. рис. 3.2) с двумя перпендикулярными друг другу одинаковыми рамками, закрепленными на оси вращения маятника (т. е. на прямой, проходящей через точку подвеса и перпендикулярной плоскости колебаний). Будем считать, что эти рамки помещены в постоянное магнитное поле B и по каждой из них течет ток одинаковой амплитуды J_0 и частоты ω , сила которого равна соответственно $J_0 \cos \omega t$ и $J_0 \cos(\omega t + \pi/2)$. Учитывая, далее, силу воздействия магнитного поля на каждый из замкнутых контуров площади $S = ab$, где a, b — размеры прямоугольных рамок, и считая массу рамок пренебрежимо малой по сравнению с массой m маятника, получаем следующую функцию Лагранжа:

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi + SJ_0 B \cos(\omega t) \sin(\varphi + \gamma) + SJ_0 B \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2} + \gamma\right),$$

где γ — угол наклона магнитного поля по отношению к горизонтали, лежащей в плоскости колебаний маятника (см. рис. 3.2). Что же касается уравнения движения, то оно в данном случае имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = A_0 \sin(\varphi - \omega t + \gamma),$$

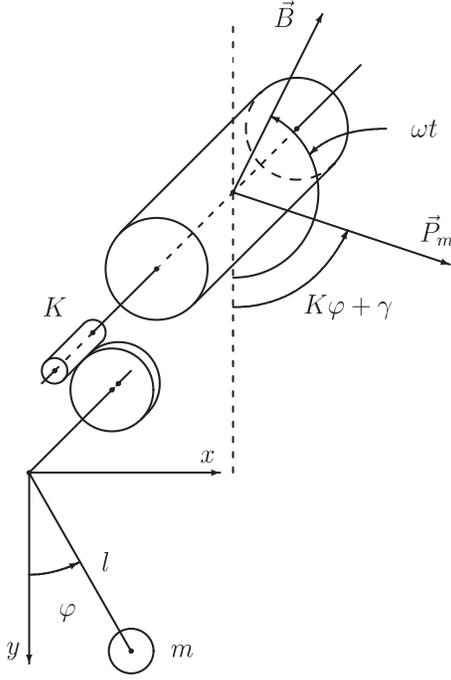


Рис. 3.3

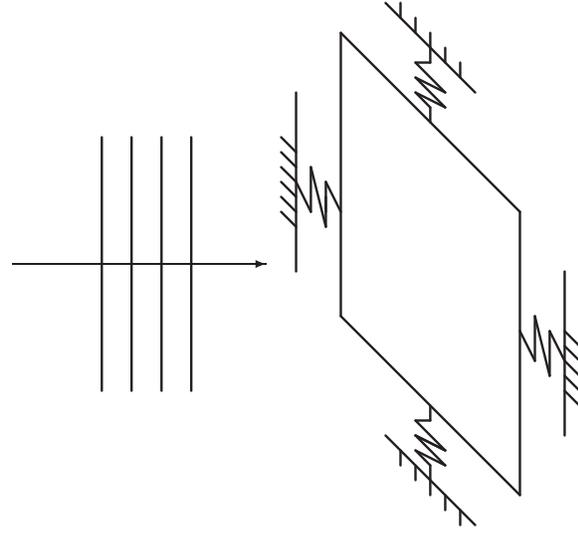


Рис. 3.4

где $\omega_0^2 = g/l$, $A_0 = SJ_0B/(ml^2)$. Тем самым, как и в предыдущей задаче, снова приходим к уравнению (3.1) при $k = 1$.

Для придания физического смысла уравнению (3.1) в случае $k \neq 1$ несколько усложним предыдущий пример. С этой целью рассмотрим маятник, который соединен с трехфазным синхронным двигателем переменного тока через редуктор с передаточным числом K (см. рис. 3.3). В простейшем приближении предполагается, что в двигателе генерируется бегущее магнитное поле интенсивности $B_0 \cos \omega t$, где B_0 — амплитуда поля, ω — частота сетевого напряжения. Кроме того, предположим, что направление магнитного момента ротора \vec{P}_m перпендикулярно оси вращения и составляет при $\varphi = 0$ угол γ с вертикальной осью. Изменение угла наклона маятника φ в свою очередь меняет упомянутый угол (посредством редуктора) и делает его равным $K\varphi + \gamma$ (см. рис. 3.3). И наконец, считаем, что магнитная сила, воздействующая на ротор двигателя, определяется амплитудой B_0 внешнего магнитного поля, магнитным моментом ротора P_m , а также углом $\omega t - (K\varphi + \gamma)$ между ними.

При сделанных допущениях функция Лагранжа рассматриваемой системы имеет вид

$$L = \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi + P_m B_0 \cos(\omega t - K\varphi - \gamma), \quad (3.5)$$

где J — момент инерции маятника и ротора. Выписывая, далее, отвечающее (3.5) уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = -A_0 \sin(K\varphi - \omega t + \gamma), \quad \omega_0^2 = mgl/J, \quad A_0 = KP_m B_0/J,$$

убеждаемся, что оно с точностью до обозначений совпадает с модельным уравнением (3.1).

Уравнение (3.2) не нуждается в особых комментариях, поскольку оно представляет собой классическую модель колебаний маятника с точкой подвеса, вибрирующей вдоль вертикальной оси (см. [21]). Можно также предложить и эквивалентный электромеханический вариант данной задачи, подобно тому, как это было сделано выше в случае уравнения (3.1).

Уравнение (3.3), как уже отмечалось ранее, является предельным случаем уравнения (3.1) при $k \rightarrow \infty$, хотя может допускать и самостоятельные физические интерпретации. Например, оно возникает при описании движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле и в поле плоской волны [10]. Среди механических приложений этого уравнения отметим задачу о колебаниях подвешенной на пружинах прямоугольной пластины под действием звуковой волны (см. рис. 3.4).

Действительно, если не учитывать деформацию и вертикальное смещение пластины, то закон изменения ее горизонтального смещения $x(t)$ будет иметь вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{S}{m} \sum_{j=1}^n P_j \sin(k_j x + \omega_j t). \quad (3.6)$$

Здесь S и m — площадь и масса пластины, ω_0 — собственная частота ее колебаний, обусловленная силами упругости, а P_j , ω_j и $\lambda_j = 2\pi/k_j$ — соответственно амплитуда колебаний давления, частота и длина j -ой звуковой волны. Предполагая, что в правой части уравнения (3.6) можно выделить главную составляющую суммы и отбросить остальные слагаемые, приходим к уравнению вида (3.3).

Аналогичная задача возникает при моделировании движения заряженной частицы в поле пакета плоских волн. Согласно результатам из [9] смещение $x(t)$ такой частицы описывается уравнением

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} \sum_{j=1}^n E_j \sin(k_j x + \omega_j t). \quad (3.7)$$

Здесь e и m — заряд и масса частицы, E_j и ω_j — амплитуды и частоты составляющих волнового пакета, $\lambda_j = 2\pi/k_j$ — длины волн.

Предположим, что в изучаемом пакете волн можно выделить две главные составляющие, т. е. сумма в правой части (3.7) содержит только два слагаемых (при $j = 1, 2$). Тогда замена $u = k_1 x + \omega_1 t$ позволяет перейти от (3.7) к уравнению вида (3.1).

3.2. Исследование квазилинейного осциллятора

Анализ примеров начнем с исследования квазилинейного осциллятора

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + x = \mu \sin(x - \nu t), \quad (3.8)$$

получающегося из уравнения (3.3) при $a = \mu$ и при добавлении малого затухания $\varepsilon > 0$. Заметим сразу, что учет слагаемого $\varepsilon \dot{x}$ имеет физический смысл во всех перечисленных в п. 3.1 ситуациях. Что же касается параметра $\mu > 0$, то в дальнейшем его считаем хотя и малым, но фиксированным по отношению к ε .

Остановимся сначала на одном необходимом для последующего анализа свойстве уравнения (3.8). Предположим, что при $\varepsilon = 0$ и при любом фиксированном $\mu > 0$ (не обязательно малом) это уравнение допускает некоторое эллиптическое периодическое движение $x_0(t)$ периода $T_0 > 0$ (эллиптичность означает, что его мультипликаторы λ_1, λ_2 комплексные и в силу гамильтоновости $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$). Тогда, очевидно, найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ у рассматриваемого уравнения существует близкое периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, $x(t, 0) = x_0(t)$ периода $T(\varepsilon)$, $T(0) = T_0$, являющееся экспоненциально устойчивым. Действительно, в силу теоремы Лиувилля для мультипликаторов $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon)$ этого решения имеем

$$|\lambda_1(\varepsilon)| = |\lambda_2(\varepsilon)| = \exp(-\varepsilon T(\varepsilon)/2) < 1.$$

Из сказанного выше следует, что проблема гамильтоновой буферности для уравнений (3.8) сводится к отысканию эллиптических периодических решений квазилинейного осциллятора

$$\ddot{x} + x = \mu \sin(x - \nu t). \quad (3.9)$$

В связи с этим введем в рассмотрение множества Ω_n , $n = 1, 2, \dots$, состоящие из наборов параметров $(\mu, \nu) : \mu, \nu > 0$, при которых уравнение (3.9) имеет не менее n различных эллиптических периодических решений. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Множество Ω_n не пусто при любом $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Достаточно ясно, что при $\mu \sim 1$ проблема нахождения интересующих нас периодических решений нелокальна. Однако она становится локальной при дополнительных условиях

$$0 < \mu \ll 1, \quad \nu = m + \delta\mu, \quad \delta \sim 1, \quad (3.10)$$

где m — некоторое фиксированное натуральное число, а знак параметра δ произволен. Смысл этих условий ясен: малость μ позволяет воспользоваться асимптотическими методами, а специальный выбор ν обеспечивает близость к резонансу $m : 1$ между частотой внешнего воздействия и собственной частотой колебаний системы.

Для удобства последующего анализа сначала, полагая $\dot{x} = y$, $z = x - \nu t$, перейдем от уравнения (3.9) к системе, затем выполним полярную замену переменных $x = \rho \sin \tau$, $y = \rho \cos \tau$, а после этого примем τ за новое время. В результате с учетом соотношений (3.10) получим следующую двумерную неавтономную систему с 2π -периодическими по τ коэффициентами:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu \sin z \cos \tau / \left(1 - \frac{\mu}{\rho} \sin z \sin \tau\right), \quad \frac{dz}{d\tau} = (\rho \cos \tau - m - \delta\mu) / \left(1 - \frac{\mu}{\rho} \sin z \sin \tau\right). \quad (3.11)$$

Обозначим через $(\rho(\tau, \rho_0, z_0, \mu), z(\tau, \rho_0, z_0, \mu))$ решение системы (3.11) с произвольно фиксированными начальными условиями $(\rho_0, z_0) : \rho_0 > 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$, заданными при $\tau = 0$. Рассмотрим, далее, уравнения для нахождения начальных условий ρ_0, z_0 периодических решений. В нашем случае упомянутые уравнения имеют вид

$$\rho(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) = \rho_0, \quad z(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) = z_0 - 2\pi m, \quad (3.12)$$

поскольку фазовая переменная z должна обладать периодичностью второго рода, т. е. $z(\tau + 2\pi, \rho_0, z_0, \mu) \equiv z(\tau, \rho_0, z_0, \mu) - 2\pi m$.

Анализ системы (3.12) не вызывает затруднений. Действительно, подставим в нее вытекающие из (3.11) и справедливые равномерно по $0 \leq \tau \leq 2\pi$ асимптотические представления для $\rho(\tau, \rho_0, z_0, \mu)$, $z(\tau, \rho_0, z_0, \mu)$:

$$\rho = \rho_1(\tau) + \mu\rho_2(\tau) + O(\mu^2), \quad z = z_1(\tau) + \mu z_2(\tau) + O(\mu^2), \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1(\tau) &\equiv \rho_0, \quad z_1(\tau) = z_0 + \rho_0 \sin \tau - m\tau, \quad \rho_2(\tau) = \int_0^\tau \sin z_1(s) \cos s ds, \\ z_2(\tau) &= \int_0^\tau \left[\frac{1}{\rho_0} (\rho_0 \cos s - m) \sin z_1(s) \sin s - \delta + \rho_2(s) \cos s \right] ds. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В результате после приведения подобных слагаемых, сокращения на μ и предельного перехода при $\mu \rightarrow 0$ для нахождения ρ_0, z_0 получаем систему

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(\rho_0 \sin s - ms) \cos s ds \sin z_0 &= 0, \\ -\frac{m}{\rho_0} \int_0^{2\pi} \sin(\rho_0 \sin s - ms) \sin s ds \cos z_0 - 2\pi\delta &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

И наконец, воспользуемся известными соотношениями

$$\exp(i\rho_0 \sin s - im s) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(\rho_0) \exp(i(p-m)s),$$

$$J_{p+1}(\rho_0) + J_{p-1}(\rho_0) = \frac{2p}{\rho_0} J_p(\rho_0), \quad J_{p+1}(\rho_0) - J_{p-1}(\rho_0) = -2J'_p(\rho_0),$$

где J_p — функции Бесселя, позволяющими вычислить входящие в (3.15) интегралы и преобразовать интересующую нас систему к более простому виду

$$\frac{2\pi m}{\rho_0} J_m(\rho_0) \sin z_0 = 0, \quad \frac{2\pi m}{\rho_0} J'_m(\rho_0) \cos z_0 - 2\pi\delta = 0. \quad (3.16)$$

Исследование системы (3.16) проведем в наиболее интересном случае $\delta = 0$, когда имеет место точный резонанс. Нетрудно увидеть, что при $\delta = 0$ она допускает счетное число решений

$$(\rho_0, z_0) = (\rho_{0,k}, 0), (\rho_{0,k}, \pi) \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.17)$$

где $\rho_{0,k}$ — занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения $J'_m(\rho_0) = 0$. Заметим, далее, что каждое отдельно взятое решение (3.17) порождает при всех достаточно малых $\mu > 0$ решение $(\rho_k(\mu), z_k(\mu))$: $\rho_k(0) = \rho_{0,k}$, $z_k(0) = 0$ или π , исходной системы (3.12). Для того чтобы убедиться в этом, поступим так же, как и при обосновании леммы 1.1: учтем в (3.16) отброшенные слагаемые порядка μ и применим к получившейся системе теорему о неявной функции по переменным ρ_0, z_0 в точке $\rho_0 = \rho_{0,k}$, $z_0 = 0$ или π , $\mu = 0$ (условия этой теоремы здесь заведомо выполняются, так как якобиан системы (3.16), вычисленный на любом решении (3.17), в силу неравенств

$$J_m(\rho_{0,k})J''_m(\rho_{0,k}) < 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

отличен от нуля).

Подведем итог. Из проделанного анализа вытекает существование для любого натурального n такого $\mu_n > 0$, что при $\delta = 0$, $0 < \mu \leq \mu_n$ система (3.11) заведомо имеет $2n$ периодических решений, отвечающих корням (3.17) при $k = 1, \dots, n$. Более того, все эти решения оказываются эллиптическими. В самом деле, их мультипликаторы — это спектры аналогичных (1.43) матриц Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) & \frac{\partial \rho}{\partial z_0}(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) \\ \frac{\partial z}{\partial \rho_0}(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) & \frac{\partial z}{\partial z_0}(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

вычисленных на найденных выше решениях системы (3.12). Остается добавить, что в силу (3.13), (3.14), (3.17), (3.18) собственные значения каждой из матриц (3.19) комплексные и допускают асимптотику вида

$$\lambda(\mu) = 1 \pm i\mu \frac{2\pi m}{\rho_{0,k}} \sqrt{-J_m(\rho_{0,k})J''_m(\rho_{0,k})} + O(\mu^2).$$

Теорема 3.1 полностью доказана.

3.3. Анализ уравнений маятникового типа

В этом пункте проанализируем два оставшихся примера и начнем с уравнения

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + (1 + \varepsilon \alpha \cos \nu t) \sin x = 0, \quad (3.20)$$

получающегося из (2.36) при $\mu = \varepsilon\alpha$, $\alpha = \text{const} > 0$. Можно было бы, конечно, считать параметры ε и μ независимыми и получить для данного случая аналог теоремы 3.1. Но постановка задачи (3.20) оказывается более информативной, так как наряду с феноменом гамильтоновой буферности позволяет выявить механизм накопления устойчивых периодических решений при фиксированном $\varepsilon > 0$ и при увеличении параметра α .

Обратимся сначала к исследованию вращательных периодических движений и отметим, что поскольку уравнение (3.20) инвариантно относительно замены $x \rightarrow -x$, то достаточно найти лишь те из них, которые лежат в полуплоскости (x, \dot{x}) : $\dot{x} > 0$. Напомним, далее, что в силу изложенного в п. 2.2 рассматриваемое уравнение не может иметь ни колебательных, ни вращательных ультрасубгармонических периодических решений. Таким образом (см. доказательство теоремы 2.2), проблема сводится к отысканию нулей функций Мельникова (2.19), вычисленных для случая $T_0 = 2\pi/\nu$, $f = -\alpha \cos \nu t \sin x$. Несложный подсчет показывает, что эти функции преобразуются к виду

$$M_n(t) = I_n(k_n)\alpha \sin \nu t - \frac{8}{k_n} E(\pi/2, k_n), \quad (3.21)$$

где, напомним, $k_n \in (0, 1)$ — решения уравнений $\nu k F(\pi/2, k) = n\pi$, $n \geq 1$, а $E(\tau, k) = \int_0^\tau \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} ds$ — эллиптический интеграл второго рода. Что же касается интеграла $I_n(k)$, то он задается формулой

$$I_n(k) = \int_0^{2\pi} \sin \tau \sin(2n \omega(k) F(\tau/2, k)) d\tau, \quad (3.22)$$

где частота $\omega = \omega(k)$ та же, что и в (2.5).

Для вычисления интеграла (3.22), как и в случае (2.21), сделаем в нем последовательно замены $\tau/2 \rightarrow \tau$, $\tau = \text{am}(u, k)$. В результате убеждаемся, что

$$\begin{aligned} I_n(k) &= 4 \int_0^{\pi/\omega} \text{sn}(u, k) \text{cn}(u, k) \text{dn}(u, k) \sin(2n \omega u) du \\ &= -\frac{2}{k^2} \int_0^{\pi/\omega} \sin(2n \omega u) d(\text{dn}^2(u, k)) = \frac{4n \omega}{k^2} \int_0^{\pi/\omega} \text{dn}^2(u, k) \cos(2n \omega u) du. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Учитывая, далее, в (3.23) известное разложение Фурье (см. [22, 23])

$$k^2 \text{sn}^2(u, k) = 1 - 2E(\pi/2, k) \omega/\pi - 8\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^{2n}} \cos(2n \omega u), \quad (3.24)$$

где

$$q = \exp\left(-\pi \frac{F(\pi/2, \sqrt{1 - k^2})}{F(\pi/2, k)}\right), \quad (3.25)$$

окончательно получаем:

$$I_n(k) = \frac{4\pi\nu^2 q^n}{1 - q^{2n}} > 0, \quad n \geq 1. \quad (3.26)$$

Предположим, что при некотором натуральном n выполняется условие

$$\alpha > \alpha_{n,*} = \frac{8 E(\pi/2, k_n)}{k_n I_n(k_n)}. \quad (3.27)$$

Тогда на полуинтервале $0 \leq t < 2\pi/\nu$ соответствующая функция (3.21) имеет два простых нуля t_1, t_2 : $t_1 < t_2$. Учитывая неравенство (3.26), нетрудно показать, что первому из этих нулей при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ отвечает экспоненциально устойчивое вращательное периодическое решение исходного уравнения (3.20), а второму — седловое. Интересно также отметить, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность критических значений $\alpha_{n,*}$ стремится к конечному пределу

$$\alpha_\infty(\nu) = \frac{4 \operatorname{sh}(\pi\nu/2)}{\pi\nu^2}. \quad (3.28)$$

Этот факт — очевидное следствие установленной при доказательстве теоремы 2.2 сходимости последовательности (2.19) к функции $M^{(1)}(z_0)$, которая в рассматриваемом случае задается равенством (2.27) (при замене в нем t на z_0 , a на α).

Обратимся теперь к вопросу о существовании и устойчивости колебательных периодических решений уравнения (3.20). Напомним, что в силу леммы 1.1 данный вопрос сводится в конечном итоге к отысканию нулей функций Мельникова (2.8), которые в случае $m = 1$, $T_0 = 2\pi/\nu$, $f = -\alpha \cos \nu t \sin x$ преобразуются к виду

$$M_n(t) = I_n(k_n)\alpha \sin \nu t - \frac{8\pi}{\omega(k_n)}(k_n^2 - 1) - 16 E(\pi/2, k_n), \quad n \geq n_0 = [\nu] + 1, \quad (3.29)$$

где

$$I_n(k) = 2n \omega(k) \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{dn}^2(\tau, k) \cos(n\omega\tau) d\tau. \quad (3.30)$$

Заметим, далее, что интеграл (3.30) вполне аналогичен уже вычисленному нами интегралу (3.23). Таким образом, привлекая равенства (3.24), (3.25), приходим к выводу, что

$$I_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2m + 1, \quad m = 0, 1, \dots, \\ 8\pi\nu^2 \cdot \frac{q^m}{1 - q^{2m}} > 0 & \text{при } n = 2m, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.31)$$

Из соотношений (3.31) следует, что при нечетных номерах n соответствующая функция (3.29) — не равная нулю константа. Поэтому фиксируем произвольно четное $n = 2m \geq n_0$, $m \geq 1$, и предположим, что справедливо условие

$$\alpha > \alpha_{m,**} = \left(\frac{8\pi}{\omega(k_{2m})} (k_{2m}^2 - 1) + 16 E(\pi/2, k_{2m}) \right) / I_{2m}(k_{2m}). \quad (3.32)$$

Тогда, очевидно, функция $M_{2m}(t)$ имеет на полуинтервале $[0, 2\pi/\nu)$ два простых нуля $t_1 < t_2$, причем в отличие от предыдущего случая первому из этих нулей в исходном уравнении (3.20) отвечает седловое периодическое решение, а второму — экспоненциально устойчивое. И наконец, следует добавить, что в силу первого соотношения (2.10) и формул (2.27) фигурирующая в (3.32) последовательность $\alpha_{m,**}$ сходится при $m \rightarrow \infty$ и к тому же пределу (3.28), что и последовательность критических значений $\alpha_{n,*}$ из (3.27).

Подводя итог, отметим, что при фиксированных параметрах α, ν , удовлетворяющих неравенству

$$\alpha > \alpha_\infty(\nu), \quad (3.33)$$

и при $\varepsilon \rightarrow 0$ в уравнении (3.20) происходит неограниченное накопление устойчивых субгармоник, как колебательных, так и вращательных. Связано это с тем, что при условии (3.33) мы находимся в рамках применимости теорем 2.1, 2.2. Кроме того, опираясь на развитую в [14] методику, можно показать существование любых конечных наборов критических значений $\alpha_{n,*}(\varepsilon)$, $\alpha_{m,**}(\varepsilon)$: $\alpha_{n,*}(0) = \alpha_{n,*}$, $\alpha_{m,**}(0) = \alpha_{m,**}$ параметра α , при которых в уравнении (3.20) происходят бифуркации типа седло-узел. При этих бифуркациях, напомним, рождаются пары

циклов — устойчивый и неустойчивый. Можно также доказать существование критического значения $\alpha = \alpha_\infty(\nu, \varepsilon)$, $\alpha_\infty(\nu, 0) = \alpha_\infty(\nu)$, при котором появляются гомоклинические касания. Но тогда естественным образом возникает вопрос: существуют ли бесконечные последовательности критических значений $\alpha_{n,*}(\varepsilon)$, $\alpha_{m,**}(\varepsilon)$ и будут ли они при $n \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$ стремиться к $\alpha_\infty(\nu, \varepsilon)$? Ответ на него, по всей видимости, положителен, что косвенным образом следует из результатов работ [27, 28]. В этих работах установлено, что появлению или исчезновению точки гомоклинического касания предшествуют каскады бифуркаций типа седло-узел.

Перейдем теперь к уравнению

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + \sin x = \varepsilon \alpha \sin(x - \nu t), \quad (3.34)$$

получаемому из (3.1) при $k = 1$, $a = \varepsilon \alpha$, $\alpha = \text{const} > 0$ и при учете малого трения $\varepsilon \dot{x}$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Очевидно, оно не может иметь ультрасубгармонических периодических решений (по тем же причинам, что и уравнение (3.20)), а исследование его субгармоник вполне аналогично изложенному выше. Поэтому здесь опустим все промежуточные вычисления и ограничимся лишь сводкой окончательных результатов.

Как и в предыдущем случае, за существование вращательных субгармоник уравнения (3.34) отвечают нули функций Мельникова (2.19). Упомянутые функции по-прежнему имеют вид (3.21), но теперь интеграл $I_n(k)$ задается разными формулами для вращательных периодических решений с положительными и отрицательными скоростями \dot{x} . А именно, справедливо равенство

$$I_n(k) = \begin{cases} -\frac{8\pi\nu^2 q^n}{1 - q^{4n}} & \text{при } \dot{x} > 0, \\ \frac{8\pi\nu^2 q^{3n}}{1 - q^{4n}} & \text{при } \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Из формулы (3.35) следует, что в данном случае имеются две последовательности критических значений α , отвечающих бифуркациям типа седло-узел, которые стремятся к различным пределам

$$\begin{aligned} \alpha_\infty^1(\nu) &= \frac{2 \exp(-\pi\nu/2) \text{sh}(\pi\nu)}{\pi\nu^2} & \text{при } \dot{x} > 0, \\ \alpha_\infty^2(\nu) &= \frac{2 \exp(\pi\nu/2) \text{sh}(\pi\nu)}{\pi\nu^2} & \text{при } \dot{x} < 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Поиск колебательных субгармоник уравнения (3.34) приводит к функциям Мельникова вида (3.29), в которых

$$I_n(k) = -\frac{8\pi n^2 \omega^2 q^{n/2}}{1 + (-1)^{n+1} q^n}, \quad n \geq n_0. \quad (3.37)$$

Что же касается соответствующей последовательности критических значений

$$\alpha_{n,**} = \left(\frac{8\pi}{\omega(k_n)} (k_n^2 - 1) + 16 E(\pi/2, k_n) \right) / |I_n(k_n)|,$$

то в силу (3.37) она имеет два частичных предела

$$\alpha_\infty^3(\nu) = \frac{4 \text{sh}(\pi\nu/2)}{\pi\nu^2}, \quad \alpha_\infty^4(\nu) = \frac{4 \text{ch}(\pi\nu/2)}{\pi\nu^2}, \quad (3.38)$$

реализующихся на четных и нечетных номерах n соответственно.

Просуммируем приведенные факты. В отличие от предыдущего примера здесь удастся обнаружить сразу четыре субгармонических каскада бифуркаций типа седло-узел, причем для соответствующих предельных значений (3.36), (3.38) справедливо равенство

$$\min_{1 \leq j \leq 4} \alpha_\infty^j(\nu) = \alpha_\infty^1(\nu). \quad (3.39)$$

Таким образом, явление гамильтоновой буферности в уравнении (3.34) реализуется при $\alpha > \alpha_\infty^1(\nu)$, причем в силу (3.39) при увеличении амплитуды внешнего воздействия α сначала появляются устойчивые вращательные субгармоники с положительными скоростями \dot{x} . Если же $\alpha > \max_{1 \leq j \leq 4} \alpha_\infty^j(\nu)$, то в этом уравнении существуют устойчивые субгармоники всех типов и при $\varepsilon \rightarrow 0$ их количество неограниченно растет.

3.4. Заключение

Остановимся на физическом смысле полученных результатов. Заметим, что рассмотренная в п. 3.1 задача о взаимодействии синхронного двигателя и маятника (см. рис. 3.3) достаточно часто встречается в реальных физических системах, поскольку при движении всевозможных манипуляторов возникает ситуация эксцентрика на валу, моделирующаяся в простейшем случае уравнением

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + x = \mu \sin(x - \nu t), \quad (3.40)$$

где $\varepsilon, \mu > 0$ — независимые малые параметры. В связи с этим обратим внимание, что при любом фиксированном $\nu \neq 2/n$, $n \in \mathbb{N}$ данное уравнение имеет устойчивое колебательное $2\pi/\nu$ -периодическое движение малой амплитуды (порядка μ), которое описывает “состояние покоя” рассматриваемой системы. Однако с точки зрения приложений наиболее интересен случай, когда наряду с состоянием покоя существует единственный устойчивый вращательный периодический режим амплитуды порядка единицы. Это означает, что при наличии подходящего начального толчка двигатель раскручивает маятник.

Описанная выше оптимальная ситуация, казалось бы, должна наблюдаться при фиксированном $\mu > 0$ и при уменьшении ε , т. е. при увеличении добротности системы. Но в действительности этого не происходит, а возникает явление буферности: в зависимости от выбора начальных условий могут реализовываться различные устойчивые периодические движения из их достаточно большого потенциального запаса. Таким образом, излишняя добротность приводит к нестабильной работе системы, поскольку неизвестно заранее, на какой именно устойчивый режим она выйдет при очередном запуске.

Изложенные физические соображения можно проиллюстрировать результатами компьютерного анализа уравнения (3.40). Привлекая в очередной раз пакет Tracer 3.5 (см. [26]), удалось показать, что, например, при значениях параметров (2.37), кроме “состояния покоя”, в зависимости от выбора начальных условий в этом уравнении реализуется еще не менее одиннадцати различных устойчивых периодических решений, среди которых присутствуют как вращательные, так и колебательные. Проекция этих решений на плоскость (x, \dot{x}) при $-\pi \leq x \leq \pi$ изображены на рис. 3.5–3.15.

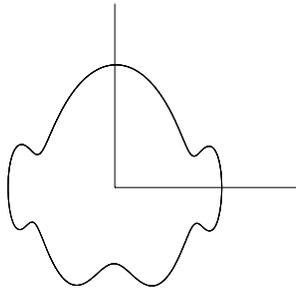


Рис. 3.5

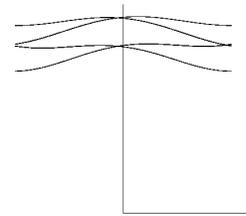


Рис. 3.6

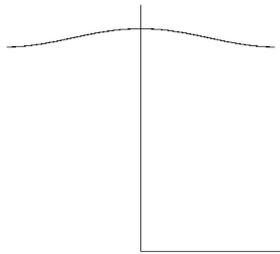


Рис. 3.7

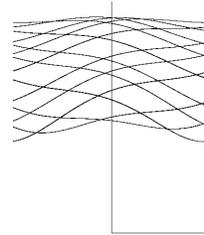


Рис. 3.8

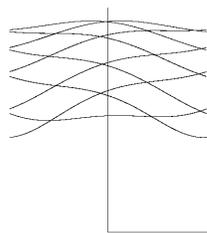


Рис. 3.9

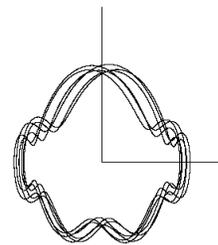


Рис. 3.10

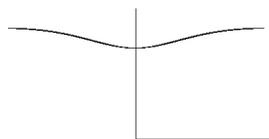


Рис. 3.11

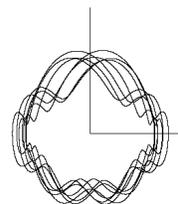


Рис. 3.12

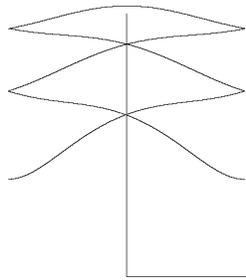


Рис. 3.13

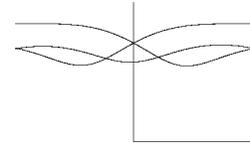


Рис. 3.14

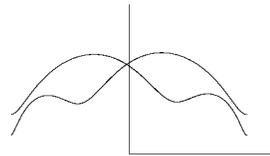


Рис. 3.15

В заключение остановимся на некоторых общих закономерностях, вытекающих из проделанного в данной статье анализа.

а) Явление буферности типично для систем, близких к двумерным гамильтоновым. Действительно, достаточные условия реализуемости этого феномена удалось получить для целых классов таких систем (см. теоремы 1.2, 1.4, 2.1, 2.2).

б) Буферность имеет место в ряде классических механических и электромеханических задач, моделирующихся уравнениями маятникового типа с периодическими по времени малыми добавками.

в) Возникновению этого явления сопутствуют каскады бифуркаций типа седло-узел и сложная динамика, связанная с разрушением сепаратрисных петель или контуров. Последнее обстоятельство, в частности, служит причиной того, что время выхода системы на тот или иной устойчивый периодический режим может быть достаточно большим, т. е. наблюдается так называемый *переходной хаос*.

Пользуясь случаем, выражаем благодарность С. Д. Глызину, в соавторстве с которым были получены все результаты для функций Мельникова $M_{n/m}(T)$ при $m = 1$, а также результаты, относящиеся к уравнениям (3.1)–(3.3).

Поступила 15.01.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Витт А.А.** Распределенные автоколебательные системы // Журн. технич. физики. 1934. Т. 4, № 1. С. 144–157.
2. **Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.** Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М: Наука, 1998. (Тр. МИАН, Т. 222).
3. **Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Сушко В.Г.** Специфика автоколебательных процессов в резонансных гиперболических системах // Фунд. и прикл. математика. 1999. Т. 5, № 2. С. 437–473.
4. **Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.** Явление буферности в резонансных системах гиперболических уравнений // УМН. 2000. Т. 55, вып. 2 (332). С. 95–120.
5. **Колесов А.Ю., Розов Н.Х.** Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 153–207.
6. **Колесов А.Ю., Розов Н.Х.** Явление буферности в распределенных механических системах // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 2. С. 183–198.
7. **Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.** Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.
8. **Turing A.** The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 1952. V. 237. P. 37–72.
9. **Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.** Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
10. **Заславский Г.М.** Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва—Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.
11. **Мельников В. К.** Устойчивость центра при периодических по времени возмущениях // Тр. ММО. 1963. Т. 12. С. 3–52.
12. **Морозов А.Д., Шильников Л.П.** О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 3. С. 385–394.
13. **Морозов А.Д.** Глобальный анализ в теории нелинейных колебаний. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1995.
14. **Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.** Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва—Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
15. **Пуанкаре А.** Избранные труды в трех томах. Том I. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971.
16. **Козлов В.В.** Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. университета, 1995.
17. **Брюно А.Д.** Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
18. **Каток А.Б., Хасселблат Б.** Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.
19. **Кузнецов С.П.** Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит, 2001.
20. **Козлов В.В.** Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // УМН. 1986. Т. 41, № 5. С. 177–178.
21. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988.
22. **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.** Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматлит, 1963.
23. **Abramovitz M., Stegun I.** Handbook of mathematical functions. National Bureau of Standard. U.S.A. 1964.
24. **Арнольд В.И., Авец А.** Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.
25. **Мозер Ю.** КАМ-теория и проблемы устойчивости. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
26. <http://tracer3.narod.ru>
27. **Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.** О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. I. // Матем. сб. 1972. Т.88, № 4. С. 475–492.
28. **Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.** О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. II. // Матем. сб. 1973. Т. 90, №1. С. 139–157.

УДК 517.977

ОДНА ЗАДАЧА ОБ УСТОЙЧИВОМ ОТСЛЕЖИВАНИИ ДВИЖЕНИЯ¹

Н. Н. Красовский, А. Н. Котельникова

Рассматривается задача об отслеживании движением объекта движения модели в условиях неопределенности или конфликта [1–7]. Управляющие воздействия формируются в дискретной по времени схеме на основе пошаговых вероятностных испытаний.

1. Уравнения движения

Движение $x_\omega[t]$ управляемого x -объекта описывается дифференциальным уравнением Ито с последствием [6], [8–13]:

$$dx_\omega[t] = \left(\int_{-h}^0 dG(\vartheta) x_\omega[t + \vartheta] + B^{[s]} u_\omega^{[x,s]}[t] + r[t] + f^{[x]} \left(u_\omega^{[x]}[t], v^{[x]}[t], x_\omega^{[u]} \left[t - h_\omega^{[x,u]}[t] \right], x_\omega^{[v]} \left[t - h_\omega^{[x,v]}[t] \right] \right) \right) dt + B^{[W]}(t, x_\omega[t]) dW_\omega[t]. \quad (1.1)$$

Движение $z_\omega[t]$ лидирующей z -модели описывается уравнением

$$\dot{z}_\omega[t] = \left(\int_{-h}^0 dG(\vartheta) z_\omega[t + \vartheta] + B^{[s]} u^{[z,s]}[t] + \int_{M^{[z]}} \int_{N^{[z]}} f^{[z]} \left(u^{[z]}, v^{[z]}, z_\omega^{[u]} \left[t - h^{[z,u]} \right], z_\omega^{[v]} \left[t - h^{[z,v]} \right] \right) \mu^{[z]} \left(du^{[z]}, dh^{[z,u]}; t \right) \nu^{[z]} \left(dv^{[z]}, dh^{[z,v]}; t \right) \right), \quad (1.2)$$

$$|x| < H, \quad |z| < H, \quad H > 0 - \text{const}, \quad H \leq \infty, \quad t_* \leq t, \quad t_0 + h \leq t_*, \quad h = \text{const} > 0.$$

Здесь $x = \{x_i, \quad i = 1, \dots, n\}$, $z = \{z_i, \quad i = 1, \dots, n\}$ — n -мерные векторы-столбцы,

$$|w| = (w_1^2 + \dots + w_n^2)^{1/2}, \quad \bar{0} = \{w_i = 0, \quad i = 1, \dots, n\}, \quad \bar{\theta} = \{y(\vartheta) = \bar{0}, \quad -h \leq \vartheta \leq 0\}, \quad w = x, z. \quad (1.3)$$

Индекс ω обозначает элементарное случайное событие. Иногда в обозначении случайных величин будем индекс ω опускать. Символ

$$w_\omega[t, \cdot] = \{w_\omega[t + \vartheta], \quad -h \leq \vartheta \leq 0\}, \quad w = x, z$$

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00436) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-8512.2006.1.

обозначает историю, реализовавшуюся на движении (1.1) или (1.2) к моменту t . Потенциальная история будет обозначаться символом

$$w(\cdot) = \{w(\vartheta), -h \leq \vartheta \leq 0\}, \quad w = x, z,$$

так что может случиться равенство

$$w[t, \cdot] = w(\cdot) : \quad \{w[t + \vartheta] = w(\vartheta), -h \leq \vartheta \leq 0\}.$$

Допустимые непрерывные функции оцениваются нормами

$$\|w(\cdot)\|_C = \max_{-h \leq \vartheta \leq 0} |w(\vartheta)|, \quad \|w(\cdot)\|_{L_2} = \left(|w(0)|^2 + \int_{-h}^0 |w(\vartheta)|^2 d\vartheta \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Вообще, часто будем заменять точкой всю совокупность или часть аргументов у той или иной функции, а также заменять точкой индексы или часть индексов у той или иной переменной или у того или иного параметра, когда это не должно вызывать недоразумения.

Переменные $u^{[l]}, v^{[l]}$ — конечномерные векторы, $h^{[l]}$ — скаляры. В (1.2) величины $\mu^{[z]}(du, dh; t)$, $\nu^{[z]}(dv, dh; t)$ — вероятностные меры на допустимых значениях $M^{[z]}$ и $N^{[z]}$ переменных $\{u^{[l]}, h^{[l]}\}$ и $\{v^{[l]}, h^{[l]}\}$. Полагаем, что интеграл Стильеса в (1.1), (1.2) имеет вид

$$\int_{-h}^0 dG(\vartheta)w(\vartheta) = \sum_{j=0}^N G^{[j]}w(\vartheta_j) + \int_{-h}^0 G_*(\vartheta)w(\vartheta) d\vartheta, \quad (1.5)$$

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_{k+1} < \vartheta_k, \quad -h \leq \vartheta_j \leq 0, \quad j = 0, \dots, N,$$

где матрица-функция $G_*(\vartheta)$ непрерывна. Этот интеграл Стильеса характеризует природу x -объекта и z -модели. Величина $B^{[s]}u^{[l, s]}[t]$ — стабилизатор, где функция $u^{[l, s]}[t]$ формируется по принципу обратной связи линейно по $x_\omega[t, \cdot]$ или $z_\omega[t, \cdot]$ на реализациях $x_\omega[t, \cdot]$ или $z_\omega[t, \cdot]$ соответственно, согласно [14–17]. Функции $f^{[l]}(\cdot)$ отражают влияние управляющих воздействий $u^{[l]}, h^{[l, u]}$ и помех $v^{[l]}, h^{[l, v]}$. Переменная $r[t]$ — неопределенная малая помеха. Векторы $u^{[l]}, v^{[l]}$ и скаляры $h^{[l]}$ — элементы компактов:

$$u^{[l]} \in U^{[l]}, \quad v^{[l]} \in V^{[l]}, \quad h^{[l]} \in H^{[l]} = [-h, 0]. \quad (1.6)$$

В каждой области

$$|w| \leq H^* < H, \quad H^* = \text{const} > 0, \quad (1.7)$$

функция $f^{[l]}(\cdot)$ непрерывна по совокупности аргументов $\{u^{[l]}, v^{[l]}, w^{[l, u]}, w^{[l, v]}\}$ относительно их метрики, которая определена нормой

$$\left\| \{u^{[l]}, v^{[l]}, w^{[l, u]}, w^{[l, v]}\} \right\|_* = \max \left\{ |u^{[l]}|, |v^{[l]}|, |w^{[l, u]}|, |w^{[l, v]}| \right\}, \quad (1.8)$$

и, стало быть, в каждой такой области (1.7) функция $f^{[l]}(\cdot)$ ограничена.

Выполняются условия Липшица

$$\begin{aligned} & \left| f^{[l]} \left(u^{[l]}, v^{[l]}, w_{(2)}^{[l, u]}, w_{(2)}^{[l, v]} \right) - f^{[l]} \left(u^{[l]}, v^{[l]}, w_{(1)}^{[l, u]}, w_{(1)}^{[l, v]} \right) \right| \\ & \leq L^{[f]} \left(\left| w_{(2)}^{[l, u]} - w_{(1)}^{[l, u]} \right| + \left| w_{(2)}^{[l, v]} - w_{(1)}^{[l, v]} \right| \right), \quad L^{[f]} = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В (1.1), (1.2) истории $x^{[u]}[t, \cdot]$, $x^{[v]}[t, \cdot]$, $z^{[u]}[t, \cdot]$, $z^{[v]}[t, \cdot]$ отражают одну и ту же реализацию истории $x[t, \cdot]$, но — по-разному, в соответствии с их разной ролью в процессе управления.

В броуновском члене $B^{[W]}(\cdot)W_\omega[t]$ величина $W_\omega[t]$ — стандартный r -мерный ($0 < r \leq n$) винеровский процесс с независимыми компонентами $W_{j\omega}[t], j = 1, \dots, r$ [11]. Матрица-функция $B^{[W]}(t, x) = \{b_{(1)}^{[W]}(t, x), \dots, b_{(r)}^{[W]}(t, x)\}$ непрерывна и по аргументу x липшицева.

Задача состоит в формировании таких управляющих воздействий $u^{[x]}, u^{[z]}, v^{[z]}, h^{[x,u]}, h^{[z,u]}$ и $h^{[z,v]}$, которые обеспечивают устойчивость по вероятности [6, 10, 12, 18, 19] случайного движения $\{x_\omega[t], z_\omega[t]\}$, где в концепции Ляпунова движение $z_\omega[t]$ играет роль невозмущенного движения, а движение $x_\omega[t]$ — роль возмущенного. Притом движению $z_\omega[t]$, а вместе с ним и движению $x_\omega[t]$ желательно придать некоторое оговариваемое качество. Например, желательно сохранить движение $z_\omega[t]$ в заданной области $|z| < H^*$.

Задачу об отслеживании будем рассматривать в двух вариантах: на конечном отрезке времени $t_* \leq t \leq T$ или на бесконечном полуинтервале $t_* \leq t < \infty$.

Так как исходные предположения о рассматриваемых уравнениях не выходят за рамки известных условий, при которых строится формализованная теория вероятностных процессов [6, 8, 9, 11, 13], то при обсуждении тех или иных вероятностных конструкций ограничимся содержательной картиной, опуская упоминание о формальных уточняющих обстоятельствах, таких, как измеримость, марковость (строгая) в соответствующем фазовом пространстве (мгновенных состояний или историй движения) и т.д.

Заметим еще, что согласно известным оценкам рассматриваемые процессы естественно аппроксимируются в среднем квадратичном или по вероятности в дискретных схемах, где ограничения (1.6) на управляющие воздействия аппроксимируются конечными множествами точек, а винеровский процесс заменяется очень частой последовательностью случайных импульсов $\{\Delta_\omega(\tau_k) = \pm\delta^{[W]}, \delta^{[W]} = (\Delta\tau)^{1/2} = (\tau_{k+1} - \tau_k)^{1/2}, k = 1, 2, \dots, p(\delta^{[W]}) = p(-\delta^{[W]}) = 1/2$, причем шаг $\Delta\tau$ очень мал относительно шага Δt дискретной по времени схемы, в которой строятся управляющие воздействия, формирующие процесс $\{x_\omega[t], z_\omega[t]\}$.

2. Схема формирования процесса

Рассогласование $y_\omega[t] = x_\omega[t] - z_\omega[t]$ описывается уравнением

$$\begin{aligned} dy_\omega[t] = & \left(\int_{-h}^0 dG(\vartheta)y_\omega[t + \vartheta] + B^{[s]} \cdot (u_\omega^{[x,s]}[t] - u_\omega^{[z,s]}[t]) + r[t] \right. \\ & \left. + f^{[x]} \left(u_\omega^{[x]}[t], v_\omega^{[x]}[t], x_\omega^{[u]}[t - h^{[x,u]}[t]], x_\omega^{[v]}[t - h^{[x,v]}[t]] \right) \right. \\ & \left. - \int_{M^{[z]}} \int_{N^{[z]}} f^{[z]} \left(u_\omega^{[z]}, v_\omega^{[z]}, z_\omega^{[u]}[t - h^{[z,u]}[t]], z_\omega^{[v]}[t - h^{[z,v]}[t]] \right) \mu^{[z]}(du^{[z]}, dh^{[z,u]}; t) \nu^{[z]}(dv^{[z]}, dh^{[z,v]}; t) \right) dt \\ & + B^{[W]}(t, x_\omega[t]) dW_\omega[t]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Воздействия $u^{[x]}, h^{[x,u]}, u^{[z]}, v^{[z]}, h^{[z,u]}, h^{[z,v]}$ формируются в органе управления в интересах желаемой цели управления в дискретной по времени t схеме с малым шагом $t_l \leq t \leq t_{l+1}$, $l = 1, 2, \dots$; $t_1 = t_*$, по принципу обратной связи по реализации информационного образа:

$$Y[t_l, z_\omega[t_l, \cdot], y_\omega[t_l, \cdot]] = \{t_l, z_\omega[t_l, \cdot], y_\omega[t_l, \cdot]\}. \quad (2.2)$$

Эта реализация Y определяет случайную величину $\{u_\omega^{[x]}[t_l], h_\omega^{[x,u]}[t_l], \mu^{[x]}(du, dh; t_l)\}$, реализация которой

$$\left(u_\omega^{[x]}[t_l, \cdot], h_\omega^{[x,u]}[t_l, \cdot] \right) = \left\{ u_\omega^{[x]}[t] = u_\omega^{[x]}[t_l], h_\omega^{[x,u]}[t] = h_\omega^{[x,u]}[t_l], t_l < t < t_{l+1} \right\} \quad (2.3)$$

определяет управляющие воздействия $u^{[x]}$ и $h^{[x,u]}$, трактуемые как результат случайного испытания по выбору значения случайной величины $u_\omega^{[x]}, h_\omega^{[x,u]}$ с вероятностью, определенной мерой $\mu^{[x]}(du, dh; t_l)$.

Вместе с мерой $\mu^{[x]}(\cdot)$, определяющей выбор реализаций $u_\omega^{[x]}[t_l, \cdot], h_\omega^{[x,u]}[t_l, \cdot]$, может реализоваться любая пара кусочно-непрерывных справа помех

$$\left(v^{[x]}[t_l, \cdot], h^{[x,v]}[t_l, \cdot] \right) = \left\{ v^{[x]}[t], h^{[x,v]}[t], t_l \leq t < t_{l+1} \right\}, \quad (2.4)$$

допустимых по ограничениям (1.6), а также любая кусочно-непрерывная справа помеха $r[t]$, допустимая по некоторому оговоренному ограничению:

$$|r[t]| \leq \delta^{[r]}[t], \delta^{[r]}[t] > 0, \quad t_* \leq t. \quad (2.5)$$

Пара $(u_\omega^{[x]}, h_\omega^{[x,u]})$ есть случайная величина, независимая от помех (2.4), (2.5), которые могут зависеть от $\mu^{[x]}(\cdot)$, но не от реализаций $u_\omega^{[x]}[t_l], h_\omega^{[x,u]}[t_l]$.

Роль управляющих воздействий для движения z -модели в уравнении (1.2) играют вероятностные меры $\mu^{[z]}(du^{[z]}, dh^{[z,u]}; t), \nu^{[z]}(dv^{[z]}, dh^{[z,v]}; t)$, которые предполагаются кусочно-неизменными по времени t на каждом интервале $t_l < t < t_{l+1}$. При выборе этих мер $\mu^{[z]}$ и $\nu^{[z]}$, наряду с информацией о реализации Y (2.2), может использоваться информация о выбранной уже реализации $u_\omega^{[x]}[t_l, \cdot], h_\omega^{[x,u]}[t_l, \cdot]$. И тогда сначала может назначаться мера $\nu^{[z]}(dv^{[z]}, dh^{[z,v]}; t), t_l < t < t_{l+1}$, из условия, которое должно способствовать устойчивому отслеживанию движения $z_\omega[t]$ движением $x_\omega[t]$, а затем с учетом назначенных воздействий $u_\omega^{[x]}[t], h_\omega^{[x,u]}[t], \nu^{[z]}(dv^{[z]}, dh^{[z,v]}; t), t_l < t < t_{l+1}$, может выбираться воздействие-мера $\mu^{[z]}(du^{[z]}, dh^{[z,u]}; t)$ из условия, которое должно способствовать осуществлению желаемого качества движения $z_\omega[t]$, а вместе с этим при устойчивом отслеживании x -движением z -движения воздействие $\mu^{[z]}(du^{[z]}, dh^{[z,u]}; t)$ будет способствовать и осуществлению желаемого качества всего процесса $\{x_\omega[t], z_\omega[t]\}$. В этой статье основное внимание уделено проблеме устойчивости процесса отслеживания, а задача о желаемом качестве z -движения, которая может решаться в согласии с теорией устойчивости движения [20–22] и теорией дифференциальных игр [1–5], [23–25], остается за рамками предлагаемой статьи. Примем, однако, что выполняется следующее условие.

Пусть выбраны некоторые числа $H_* > 0, \varepsilon_* > 0, H_* > \varepsilon_* > \varepsilon_*$. Предположим, что начальные истории удовлетворяют условиям:

$$\|x_\omega[t_*, \cdot]\|_C \leq H_*, \quad \|z_\omega[t_*, \cdot]\|_C \leq H_*, \quad \|y_\omega[t_*, \cdot]\|_C < \varepsilon_*. \quad (2.6)$$

Тогда найдется такое число $H^* > 0$, что при должном выборе воздействий $\mu^{[z]}(du^{[z]}, dh^{[z,u]}; t), t_l < t < t_{l+1}, l = 1, 2, \dots$, будут при $t \geq t_*$ выполнены неравенства

$$\|x_\omega[t, \cdot]\|_C < H^*, \quad \|z_\omega[t, \cdot]\|_C < H^*, \quad t_* \leq t, \quad (2.7)$$

если только будет выполняться неравенство

$$\|y_\omega[t, \cdot]\|_C \leq \varepsilon^*, \quad t_* \leq t. \quad (2.8)$$

Вместе с воздействиями (2.3)–(2.5), $\mu^{[z]}, \nu^{[z]}$ реализуется помеха $W_\omega[t]$. При реализациях воздействий (2.4) и (2.5) случайные величины — пара $\{u_\omega^{[x]}[t_l], h_\omega^{[x,u]}[t_l]\}$ и помеха $W_\omega[t]$ — стохастически независимы.

В случае задачи об устойчивости отслеживания на конечном отрезке времени $t_* \leq t \leq T$ полагаем, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |r[t]| &\leq \delta^{[r]}, \quad \delta^{[r]} = \text{const} > 0, \\ \|B^{[W]}(t, x)\|_E &\leq \delta^{[W]}, \quad \delta^{[W]} = \text{const} > 0, \quad \|B\|_E = \max_{|u| \leq 1} |Bu|, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$t_{l+1} - t_l \leq \delta^{[l]}, \quad \delta^{[l]} = \text{const} > 0, \quad l = 1, 2, \dots$$

В случае задачи об устойчивости отслеживания на бесконечном полуинтервале времени $t_* \leq t < \infty$ полагаем, что выполняются неравенства

$$\delta^{[l]} l^{-q} \leq t_{l+1} - t_l \leq \delta^{[l]} l^{-\gamma_*}, \quad \delta^{[l]} > 0, \quad q, \gamma_* = \text{const},$$

$$\frac{2}{3} < q < 1, \quad \frac{2}{3} < \gamma_* < q,$$

$$|r[t]| \leq \delta^{[r]} t_l^{-\gamma}, \quad t_l \leq t \leq t_{l+1}, \quad \delta^{[r]} > 0, \quad \gamma = \text{const}, \quad q^* = \text{const}, \quad \gamma + \gamma_* > q^* > 1, \quad (2.10)$$

$$\|B^{[W]}\|_E \leq \delta^{[W]} l^{-\gamma^*}, \quad \delta^{[W]} > 0, \quad \gamma^* = \text{const}, \quad 2\gamma^* + \gamma_* > q^* > 1.$$

Пусть назначены числа $\varepsilon > 0$ и $\beta < 1$. При выбранных значениях $H_* > 0$, $\varepsilon^* > \varepsilon_* > 0$ задача состоит в выборе линейного стабилизатора [14, 15]

$$B^{[s]} u_\omega^{[s]}[t] = B^{[s]} \left(U_*(0) y_\omega[t] + \int_{-h}^0 U_*(\vartheta) y_\omega[t + \vartheta] d\vartheta \right), \quad (2.11)$$

в выборе вероятностных мер $\mu^{[x]}(du, dh; t)$, $\mu^{[z]}(du, dh; t)$, $\nu^{[z]}(dv, dh; t)$, в назначении соответственно оценок (2.9) или (2.10) и числа $\delta^{[y]} > 0$ таких, чтобы выполнялось следующее условие сильной устойчивости по вероятности [6, 10, 12, 18, 19]: в случае $t_* \leq t \leq T$ — условие

$$P \left(\sup_{t_* \leq t \leq T} |y_\omega[t]| < \varepsilon \right) > \beta \quad (2.12)$$

и в случае $t_* \leq t < \infty$ — условие

$$P \left(\sup_{t_* \leq t < \infty} |y_\omega[t]| < \varepsilon \right) > \beta, \quad (2.13)$$

какова бы ни была пара исходных историй $\{z_\omega[t_*, \cdot], x_\omega[t_*, \cdot]\}$, удовлетворяющая условиям (2.6) и условию

$$\|y_\omega[t_*, \cdot]\|_C \leq \delta^{[y]}, \quad \delta^{[y]} < \varepsilon_*, \quad (2.14)$$

и какими бы ни оказались допустимые помехи $r[t]$, $v^{[z]}[t]$ и $h^{[z, u]}[t]$.

Здесь и ниже $P(\cdot)$ — вероятность.

3. Формирование процесса

Предполагаем, что для уравнения

$$\dot{y}[t] = \int_{-h}^0 dG(\vartheta) y[t + \vartheta] + B^{[s]} u^{[s]}[t] \quad (3.1)$$

выполнены условия стабилизируемости [14], то есть возможно построить оператор вида (2.11) так, что если в (3.1) на месте $B^{[s]} u^{[s]}[t]$ будет выражение $B^{[s]} \left(U_*(0) y[t] + \int_{-h}^0 U_*(\vartheta) y[t + \vartheta] d\vartheta \right)$, то в силу получившегося уравнения

$$\dot{y}[t] = \int_{-h}^0 dG(\vartheta) y[t + \vartheta] + B^{[s]} \left(U_*(0) y[t] + \int_{-h}^0 U_*(\vartheta) y[t + \vartheta] d\vartheta \right) \quad (3.2)$$

невозмущенное движение $y[t] \equiv \bar{0}$ будет асимптотически устойчивым [16, 22]. Здесь матрица-функция $U_*(\vartheta)$, $-h \leq \vartheta < 0$, непрерывна и ограничена по норме $\|U(\vartheta)\|_E$. Тогда можно назначить квадратичный функционал Ляпунова $V(y(\cdot))$ [16, 22, 26–28]:

$$V(y(\cdot)) = V(\{y(\vartheta), -h \leq \vartheta \leq 0\}) = y'(0)A^{(0)}y(0) + y'(0) \int_{-h}^0 A^{(1)}(\vartheta)y(\vartheta) d\vartheta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 y'(\sigma)A^{(2)}(\sigma, \vartheta)y(\vartheta) d\vartheta d\sigma + \int_{-h}^0 y'(\vartheta)A^{(3)}(\vartheta)y(\vartheta) d\vartheta, \quad (3.3)$$

определенно-положительный по $|y(0)|$, то есть удовлетворяющий неравенству

$$V(y(\cdot)) \geq w_*(|y(0)|), \quad (3.4)$$

где функция $w_*(r) > 0$ при $r > 0$ непрерывна и не убывает по r . Функционал $V(\cdot)$ допускает бесконечно малый высший предел по $\|y(\cdot)\|_{L_{2\bullet}}$, то есть удовлетворяет неравенству

$$V(y(\cdot)) \leq w^*(\|y(\cdot)\|_{L_{2\bullet}}), \quad (3.5)$$

где функция $w^*(r) > 0$ при $r > 0$, $w^*(0) = 0$, непрерывна и не убывает по r .

Правая производная функционала $V(y(\cdot))$ в силу уравнения (3.2) определенно-отрицательна по $\|y(\cdot)\|_{L_{2\bullet}}^2$ и удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_+(y(t, \cdot)) \leq -\|y(t, \cdot)\|_{L_{2\bullet}}^2. \quad (3.6)$$

Матрицы $A^{(i)}(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$, липшицевы. Верхний индекс “ r ” означает транспонирование.

Пусть в момент t_l реализовались истории $x_\omega[t_l, \cdot]$, $z_\omega[t_l, \cdot]$, $y_\omega[t_l, \cdot] = x_\omega[t_l, \cdot] - z_\omega[t_l, \cdot]$. Это определит градиент функционала $V(y_\omega[t_l, \cdot])$:

$$s'_{\omega}[t_l] = \text{grad}_{y_\omega[t_l]} V(y_\omega[t_l, \cdot]) = y'_{\omega}[t_l] \cdot 2A^{(0)} + \int_{-h}^0 y'_{\omega}[t_l + \vartheta]A^{(1)'}(\vartheta) d\vartheta \quad (3.7)$$

и две задачи — на минимакс и максимин [4, 23]:

$$\min_{\mu(du, dh)} \sup_{v, h} s'_{\omega}[t_l] \int_{M^{[x]}} f^{[x]} \left(u^{[x]}, v^{[x]}, x_\omega^{[u]}[t_l - h^{[x, u]}], x_\omega^{[v]}[t_l - h^{[x, v]}] \right) \mu^{[x]}(du^{[x]}, dh^{[x, u]}) = \zeta_0^{[x]}(s'_{\omega}[t_l], x_\omega[t_l, \cdot]) \quad (3.8)$$

$$\max_{\nu(dv, dh)} \inf_{\mu(du, dh)} s'_{\omega}[t_l] \int_{M^{[z]}} \int_{N^{[z]}} f^{[z]} \left(u^{[z]}, v^{[z]}, x_\omega^{[u]}[t_l - h^{[z, u]}], x_\omega^{[v]}[t_l - h^{[z, v]}] \right) \times \mu^{[z]}(du^{[z]}, dh^{[z, u]}) \nu^{[z]}(dv^{[z]}, dh^{[z, v]}) = \zeta_0^{[z]}(s'_{\omega}[t_l], x_\omega[t_l, \cdot]). \quad (3.9)$$

Здесь $x_\omega^{[u]}[\cdot] = x_\omega^{[v]}[\cdot] = x_\omega[\cdot]$; $M^{[x]}, M^{[z]}, N^{[z]}$ — области допустимых значений воздействий $u^{[x]}, v^{[x]}, h^{[x]}$; $\mu^{[x]}(\cdot), \mu^{[z]}(\cdot), \nu^{[z]}(\cdot)$ — вероятностные меры.

Предполагаем, что, каковы бы ни были значения $s_\omega[t_l]$, $x_\omega[t_l, \cdot]$, которые могут встретиться, будет выполнено условие

$$\zeta_0^{[x]}(s'_{\omega}[t_l], x_\omega[t_l, \cdot]) - \zeta_0^{[z]}(s'_{\omega}[t_l], x_\omega[t_l, \cdot]) \leq 0. \quad (3.10)$$

Это условие будет выполнено, в частности, в том случае, когда функции $f^{[x]}(\cdot)$ и $f^{[z]}(\cdot)$ одинаковы. Задача (3.9) имеет цену и седловую точку [29] и при этом, стало быть, минимум (3.8) не больше, чем максимум (3.9), который есть цена $\zeta_0^{[z]}(\cdot)$ для игровой задачи (3.9).

Пусть $\mu_0^{[x]}(du, dh; t_l)$ — решение задачи (3.8). В согласии со сказанным в разделе 2 полагаем, что эта мера $\mu_0^{[x]}(\cdot)$ определяет случайный выбор воздействий $(u_{0\omega}^{[x]}[t_l], h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l])$ на x -объект на интервале $t_l < t < t_{l+1}$:

$$u_{0\omega}^{[x]}[t] = u_{0\omega}^{[x]}[t_l], h_{0\omega}^{[x,u]}[t] = h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l], \quad t_l < t < t_{l+1}. \quad (3.11)$$

Стало быть, движение $x_\omega[t]$ -объекта описывается уравнением

$$\begin{aligned} dx_\omega[t] = & \left(\int_{-h}^0 dG(\vartheta)x_\omega[t + \vartheta] + B^{[s]} \left(U_*(0)x_\omega[t] + \int_{-h}^0 U_*(\vartheta)x_\omega[t + \vartheta] d\vartheta \right) + r[t] \right. \\ & \left. + f^{[x]} \left(u_{0\omega}^{[x]}[t_l], v^{[x]}[t], x_\omega[t_l - h^{[x,u]}[t_l]], x_\omega[t_l - h^{[x,v]}[t_l]] \right) \right) dt + B^{[W]}(t, x_\omega[t]) dW_\omega[t]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Пусть $\nu_0^{[z]}(dv, dh; t_l)$ — решение задачи (3.9), а $\mu_*(du, dh; t)$ — кусочно-постоянная по времени мера, выбранная как-то из условия о желаемом качестве движения. Заметим, кстати, что в случае, если функция $f^{[z]}(\cdot)$ ограничена при всех возможных значениях ее аргументов так, что будет справедливо неравенство

$$\left| f^{[z]}(u^{[z]}, v^{[z]}, z^{[u]}, z^{[v]}) \right| \leq M = \text{const} \quad (3.13)$$

при условиях

$$u^{[z]} \in U^{[z]}, v^{[z]} \in V^{[z]}, |z^{[u]}| < \infty, |z^{[v]}| < \infty, \quad (3.14)$$

то выполнение условия о сохранении движений $z_\omega[t], x_\omega[t]$ в достаточно большой области (2.7) при условии (2.6) является следствием асимптотической устойчивости решений уравнения (3.2), и это устанавливается при помощи функционала Ляпунова $V(y(\cdot))$ в приложении к уравнению (1.2) для z -модели с учетом, что $w_*(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, и при достаточно больших значениях $\|z[t, \cdot]\|_{L_2}$ производная $\dot{V}_+(z[t, \cdot])$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_+(z[t, \cdot]) \leq - \left(|z[t]|^2 + \int_{-h}^0 |z[t + \vartheta]|^2 d\vartheta \right) + M_* \left(|z[t]|^2 + \int_{-h}^0 |z[t + \vartheta]|^2 d\vartheta \right)^{1/2}, \quad M_* = \text{const}.$$

Итак, в соответствии с материалом из этого раздела полагаем, что движение $z_\omega[t]$ на интервале $t_l < t < t_{l+1}$ описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{z}_\omega[t] = & \int_{-h}^0 dG(\vartheta)z_\omega[t + \vartheta] + B^{[s]} \left(U_*(0)z_\omega[t] + \int_{-h}^0 U_*(\vartheta)z_\omega[t + \vartheta] d\vartheta \right) \\ & + \int_{M^{[z]}} \int_{N^{[z]}} f^{[z]} \left(u^{[z]}, v^{[z]}, x_\omega[t_l - h^{[z,u]}], x_\omega[t_l - h^{[z,v]}] \right) \mu_*^{[z]}(du^{[z]}, dh^{[z,u]}; t) \nu_0^{[z]}(dv^{[z]}, dh^{[z,v]}; t_l). \end{aligned} \quad (3.15)$$

4. Устойчивость процесса

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть процесс формируется оговоренным в разделах 1–3 способом. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\beta < 1$ при подходящих в условиях (2.6)–(2.8) значениях $H_*, \varepsilon_*, \varepsilon^*$ можно указать в (2.9), (2.10) малые числа $\delta^{[t]}, \delta^{[r]}, \delta^{[W]}$ и указать число $\delta_*^{[y]} > 0$ так, что при ограничении на исходную историю $y_\omega[t_*, \cdot]$:

$$\|y_\omega[t_*, \cdot]\|_C \leq \delta_*^{[y]} < \varepsilon_* \quad (4.1)$$

будет выполнено неравенство (2.12) или неравенство (2.13) соответственно.

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Полагаем в (2.8) $\varepsilon^* = \varepsilon$. Назначим число $\varepsilon_* = \varepsilon/2$. Пусть выбрано число $H_* > 0$, которое вместе с ε_* определяет ограничение (2.6) на исходные истории $x_\omega[t_*, \cdot], y_\omega[t_*, \cdot], z_\omega[t_*, \cdot]$. Тогда по нашему предположению можно указать такое значение $H^* > 0$, что для формируемого процесса $\{x_\omega[t], z_\omega[t]\}$, какими бы ни оказались воздействия $\nu_0^{[z]}(dv^{[z]}, dh^{[z,v]}; t_l)$, $l = 1, 2, \dots$, при $t \geq t_*$ можно будет подходящими воздействиями $\mu_*^{[z]}(du^{[z]}, dh^{[z,u]}; t)$ обеспечить неравенство (2.7), но однако, при том дополнительном условии, что все время при $t \geq t_*$ будет осуществляться неравенство

$$|y_\omega[t]| \leq \varepsilon^*, \quad t_* \leq t. \quad (4.2)$$

На самом деле неравенство (4.2) для движения $x_\omega[t] = z_\omega[t] + y_\omega[t]$ в силу уравнения (1.1) выполняться при условии $|z_\omega[t]| \leq H^*, t_* \leq t$, не будет из-за броуновской помехи $B^{[W]}(t, x_\omega[t]) \cdot dW_\omega[t]$. Однако, введем искусственно движения $z_\omega^* = z[t], y_\omega^*[t]$, а вместе с этим и движение $x_\omega^*[t] = z_\omega^*[t] + y_\omega^*[t]$ следующим образом [6, 10, 12, 18, 19]. Если на некоторой реализации $y_\omega[\cdot]$ на отрезке $t_* \leq \tau \leq t$ выполняются неравенства

$$|y_\omega[\tau]| < \varepsilon^*, \quad t_* \leq \tau \leq t; \quad |y_\omega[t_l]| < \varepsilon_*, \quad t_* \leq t_l \leq t, \quad (4.3)$$

то полагаем

$$z_\omega^*[\tau] = z_\omega[\tau], \quad x_\omega^*[\tau] = x_\omega[\tau], \quad y_\omega^*[\tau] = y_\omega[\tau], \quad t_* \leq \tau \leq t. \quad (4.4)$$

Если же для некоторой реализации $y_\omega[\cdot]$ условие (4.3) нарушается впервые так, что либо сначала выполняется равенство

$$|y_\omega[\tau(\omega)]| = \varepsilon^*; \quad \tau(\omega) = t \neq t_l, \quad (4.5)$$

либо сначала выполняется неравенство

$$\varepsilon_* \leq y_\omega[\tau(\omega)] \leq \varepsilon^*; \quad \tau(\omega) = t = t_l, \quad (4.6)$$

то полагаем, что выполняется (4.4) для $\tau \leq t = \tau(\omega)$. А при $\tau > t = \tau(\omega)$ для рассматриваемой реализации $y_\omega[\cdot]$ полагаем

$$y_\omega^*[\tau] = y_\omega[\tau(\omega)], \quad z_\omega^*[\tau] = z_\omega[\tau(\omega)], \quad x_\omega^*[\tau] = x_\omega[\tau(\omega)], \quad \tau \geq \tau(\omega). \quad (4.7)$$

При фиксированной паре $\{z_\omega^*[t_l, \cdot], y_\omega^*[t_l, \cdot]\}$ движение $z[t]$, $t_l \leq t \leq t_{l+1}$, в паре с которым реализуются $y_\omega[t]$, $t_l \leq t \leq \min\{\tau(\omega), t_{l+1}\}$, единственно.

Для таких искусственно введенных движений $y_\omega^*[t]$, $x_\omega^*[t] = z_\omega^*[t] + y_\omega^*[t]$ условие (2.8) выполняется, а вместе с тем при $t \in [t_*, \tau(\omega)]$ выполняется и условие (2.7). И такого искусственного выполнения условий (2.7) и (2.8) оказывается достаточно для доказательства нужных свойств уже для действительных движений $x_\omega[t], z_\omega[t]$ и $y_\omega[t] = x_\omega[t] - z_\omega[t]$.

Зафиксируем некоторое число $\delta_*^{[y]} \in (0, \varepsilon_*)$. Рассмотрим процесс, порожденный исходными историями

$$\|z^*[t_*, \cdot]\|_C \leq H_*, \quad \|x^*[t_*, \cdot]\|_C \leq H_*, \quad \|y^*[t_*, \cdot]\|_C \leq \delta_*^{[y]}. \quad (4.8)$$

Пусть к моменту $t_l, l \geq 1$, реализовались истории $x_\omega^*[t_l, \cdot], z_\omega^*[t_l, \cdot], y_\omega^*[t_l]$, $t_l < \tau(\omega)$, $|y_\omega^*[t_l]| < \varepsilon_*$. Эти истории определяют случайные управляющие воздействия $u_{\omega_0}^{[x]}[t_l], h_{\omega_0}^{[x,u]}[t_l]$ для x -объекта, а также управляющие воздействия-меры $\mu_*^{[z]}(du^{[z]}, dh^{[z,u]}; t)$, $\nu_0^{[z]}(dv^{[z]}, dh^{[z,v]}; t_l)$ для z -модели. Вместе с помехами $v^{[x]}[t], h^{[x,v]}[t], r[t], B^{[W]}(t, x_\omega^*[t])dW_\omega[t]$ эти воздействия определяют такие реализации движения $\{z_\omega^*[t], y_\omega^*[t]\}$, $t \geq t_l$, каждая из которых определяется при прочих одинаковых условиях парой реализаций $\{u_{\omega_0}^{[x]}[t], h_{\omega_0}^{[x,u]}[t]\}$, причем первая компонента этой пары есть в свою очередь пара $\{u_{\omega_0}^{[x]}[t] = u_{\omega_0}^{[x]}[t_l], h_{\omega_0}^{[x,u]}[t] = h_{\omega_0}^{[x,u]}[t_l], t_l < t < t_{l+1}\}$, вероятностное распределение которой определяется мерой $\mu_0^{[x]}(du^{[x]}, dh^{[x,u]}; t_l)$ из решения задачи (3.8). Случайные величины: пара $\{u_{\omega_0}^{[x]}[t], h_{\omega_0}^{[x,u]}[t]\}$ и $W_\omega[t]$ независимы.

Рассмотрим значение функционала $V(y_\omega^*[t, \cdot])$, $t_l \leq t \leq t_{l+1}$, на реализациях $\{z_\omega^*[t, \cdot], y_\omega^*[t]\}$. Если на такой реализации случится $|y_\omega^*[\tau(\omega)]| = \varepsilon^*$, $t_l < \tau(\omega) < t_{l+1}$, то принимаем, что при $t \geq \tau(\omega)$ будет выполняться равенство

$$V(y_\omega^*[t, \cdot]) = V(y_\omega^*[\tau(\omega), \cdot]), \quad t \geq \tau(\omega) \quad (4.9)$$

и стало быть, будет выполняться равенство

$$\dot{V}_+(y_\omega^*[t, \cdot]) = 0, \quad t \geq \tau(\omega), \quad (4.10)$$

которое, как и равенство (4.7), назначается искусственно [6, 10, 12, 18, 19].

Здесь $\dot{V}_+(y_\omega^*[t, \cdot])$ — правая производная “замороженного” функционала $V(y_\omega^*[t, \cdot])$ на движении $y_\omega^*[t]$.

Если, однако, на рассматриваемой реализации $\{z_\omega^*[t], y_\omega^*[t]\}$ нет момента $\tau(\omega) \in (t_l, t_{l+1})$, в который выполняется условие $|y_\omega^*[\tau(\omega)]| = \varepsilon^*$, тогда обратимся к любому значению $t \in (t_l, t_{l+1})$. Если же на этой реализации есть момент $\tau(\omega) \in (t_l, t_{l+1}) : |y_\omega^*[\tau(\omega)]| = \varepsilon^*$, то полагаем $t \in [t_l, \tau(\omega))$. Рассмотрим теперь величину [6, 10, 12, 18, 19]

$$\dot{\tilde{V}}_+(y_\omega^*[t, \cdot]) = \lim_{\tau \rightarrow t+0} \frac{E\{V(y_\omega^*[\tau, \cdot])|z_\omega^*[t, \cdot], y_\omega^*[t, \cdot]\} - V(y_\omega^*[t, \cdot])}{\tau - t}, \quad (4.11)$$

которая имеет смысл усредненной правой производной функционала $V(y_\omega^*[t, \cdot])$, порожденной при $\tau > t$ на движении $y_\omega^*[\tau, \cdot]$ рассматриваемой реализацией $\{z_\omega^*[t, \cdot], y_\omega^*[t, \cdot]\}$. Величина (4.11) определяется бесконечно малым производящим оператором [13] рассматриваемого вероятностного процесса $\{z_\omega^*[\tau], y_\omega^*[\tau]\}$. Здесь и ниже символ $E\{\dots\}$ обозначает условное математическое ожидание.

Обозначим символом $W_\omega[t, \cdot]$ реализацию

$$W_\omega[t, \cdot] = \{W_\omega[\tau], t_l \leq \tau \leq t\}. \quad (4.12)$$

Возьмем математическое ожидание случайной величины $V(y_\omega^*[t, \cdot])$ при $t \in [t_l, t_{l+1}]$:

$$\begin{aligned} & E_{W_\omega[t, \cdot], (u_{\omega_0}^{[x]}[t_l], h_{\omega_0}^{[x,u]}[t_l])} \left\{ V(y_\omega^*[t, \cdot]) | z_\omega^*[t_l, \cdot], y_\omega^*[t_l, \cdot] \right\} \\ &= \int_{M^{[x]}} E_{W[t, \cdot]} \left\{ V(y_\omega^*[t, \cdot]) | u_\omega^{[x]}, h_\omega^{[x,u]} \right\} \mu_0^{[x]}(du^{[x]}, dh^{[x,u]}; t_l). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Вычислим правую производную величины (4.13) по t при $t \in [t_l, t_{l+1})$. В согласии с формулами Ито [8, 9, 30] и Дынкина [6, 11–13] имеем равенство

$$\frac{d}{dt} E_{W_\omega[t, \cdot], (u_{\omega_0}^{[x]}[t_l], h_{\omega_0}^{[x,u]}[t_l])} \left\{ V(y_\omega^*[t, \cdot]) | z_\omega^*[t_l, \cdot], y_\omega^*[t_l, \cdot] \right\} \quad (4.14)$$

$$= \int_{M^{[x]}} E_{W_\omega[t, \cdot]} \left\{ \tilde{V}_+(y_\omega^*[t, \cdot]) | u^{[x]}, h^{[x, u]} \right\} \mu_0^{[x]} \left(du^{[x]}, dh^{[x, u]}; t_l \right).$$

Если для некоторой реализации $y_\omega^*[t], z_\omega^*[t]$ оказывается, что при данном t выполняется неравенство $\tau(\omega) \leq t$, где $|y_\omega^*[\tau(\omega)]| = \varepsilon^*$, то для этой реализации в (4.14) для $\tilde{V}_+(y_\omega^*[t, \cdot]) = \dot{V}_+(y_\omega^*[t, \cdot])$ выполняется равенство (4.10). Иначе производная $\tilde{V}_+(y_\omega^*[t, \cdot])$ в согласии с формулой Ито [8, 9, 30] определяется равенством

$$\begin{aligned} \tilde{V}_+(y_\omega^*[t, \cdot]) &= \dot{V}_+(y[t, \cdot])_{(3.2), y=y_\omega^*} + s'l_\omega[t] \left(r[t] + f^{[x]} \left(u_{0\omega}^{[x]}[t_l], v^{[x]}[t], x_\omega^* [t_l - h_{0\omega}^{[x, u]}[t_l]], x_\omega^* [t - h^{[x, v]}[t]] \right) \right) \\ &- \int_{M^{[z]}} \int_{N^{[z]}} f^{[z]} \left(u^{[z]}, v^{[z]}, x_\omega^* [t_l - h^{[z, u]}], x_\omega^* [t_l - h^{[z, v]}] \right) \mu_*^{[z]} \left(du^{[z]}, dh^{[z, u]}; t \right) \nu_0^{[z]} \left(dv^{[z]}, dh^{[z, v]}; t_l \right) \\ &+ \sum_{j=1}^r b_{(j)}^{[W]'}(t, x_\omega^*[t]) A^{(0)} b_{(j)}^{[W]}(t, x_\omega[t]). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Для оценки величины $\tilde{V}_+(y_\omega^*[t, \cdot])$, а затем величин (4.14) и (4.13) удобно в согласии с (3.6) оценить $\tilde{V}_+(y_\omega^*[t, \cdot])$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_+(y_\omega^*[t, \cdot]) &\leq -\|y_\omega^*[t, \cdot]\|_{L_2}^2 + (s'l_\omega[t] - s'l_\omega[t_l]) \cdot (\dots) \\ &+ s'l_\omega[t_l] \cdot \left(r[t] + \left(f^{[x]} \left(u_{0\omega}^{[x]}[t_l], v^{[x]}[t], x_\omega^* [t_l - h_{0\omega}^{[x, u]}[t_l]], x_\omega^* [t - h^{[x, v]}[t]] \right) \right) \right. \\ &- \left. f^{[x]} \left(u_{0\omega}^{[x]}[t_l], v^{[x]}[t], x_\omega^* [t_l - h_{0\omega}^{[x, u]}[t_l]], x_\omega^* [t_l - h_*^{[x, v]}[t]] \right) \right) \\ &+ f^{[x]} \left(u_{0\omega}^{[x]}[t_l], v^{[x]}[t], x_\omega^* [t_l - h_{0\omega}^{[x, u]}[t_l]], x_\omega^* [t_l - h_*^{[x, v]}[t]] \right) \\ &- \int_{M^{[z]}} \int_{N^{[z]}} f^{[z]} \left(u^{[z]}, v^{[z]}, x_\omega^* [t_l - h^{[z, u]}], x_\omega^* [t_l - h^{[z, v]}] \right) \mu_*^{[z]} \left(du^{[z]}, dh^{[z, u]}; t \right) \nu_0^{[z]} \left(dv^{[z]}, dh^{[z, v]}; t_l \right) \\ &+ \sum_{j=1}^r b_{(j)}^{[W]}(t, x_\omega^*[t]) A^{(0)} b_{(j)}^{[W]}(t, x_\omega[t]). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь в случае $t - h^{[x, v]}[t] > t_l$ полагаем $h_*^{[x, v]}[t] = 0$, а в случае $t - h^{[x, v]}[t] \leq t_l$ полагаем $t_l - h_*^{[x, v]}[t] = t - h^{[x, v]}[t]$.

Второе слагаемое в правой части (4.16) оценивается неравенством

$$|(s'l_\omega[t] - s'l_\omega[t_l]) \cdot (\dots)| \leq |(s'l_\omega[t] - s'l_\omega[t_l])| C^{[s]}, \quad C^{[s]} = \text{const}. \quad (4.17)$$

Для величины $s'l_\omega[t_l]r[t]$ имеем неравенство

$$|s'l_\omega[t_l]r[t]| \leq |r[t]| C^{[r]} \leq \delta^{[r]}[t] C^{[r]}, \quad C^{[r]} = \text{const}. \quad (4.18)$$

Для второго слагаемого внутри скобок при множителе $s'l_\omega[t_l]$ в том случае, когда $t - h^{[x, v]}[t] > t_l$, имеем по свойствам функции $f^{[x]}(\cdot)$ следующее неравенство:

$$\left| f^{[x]} \left(\dots, x_\omega^* [t - h^{[x, v]}[t]] \right) - f^{[x]} \left(\dots, x_\omega^* [t - h_*^{[x, v]}[t]] \right) \right| \leq L^{[f]} \left| x_\omega^* [t - h^{[x, v]}[t]] - x_\omega^* [t_l] \right|. \quad (4.19)$$

А в другом случае, когда $t - h^{[x,v]}[t] \leq t_l$, имеем равенство

$$\left| f^{[x]} \left(\dots, x_\omega^* \left[t - h^{[x,v]}[t] \right] \right) - f^{[x]} \left(\dots, x_\omega^* \left[t - h_*^{[x,v]}[t] \right] \right) \right| = 0. \quad (4.20)$$

В обоих случаях аргумент $t_l - h_*^{[x,v]}[t]$ в $x_\omega^*[\cdot]$ содержится в таком множестве аргументов $t_l - h^{[x,v]}$, которые содержат компоненту $h^{[x,v]}$ в той паре $(v^{[x]}, h^{[x,v]})$, по которой вычисляется верхняя грань в задаче на минимакс (3.8).

В соответствии с определением (3.7) для величины $s'[\tau] = \text{grad}_{y[\tau]} V(y[\tau], \cdot)$ и согласно (3.3) имеем

$$s'_\omega[\tau] = y'_\omega[\tau] \cdot 2A^{(0)} + \int_{-h}^0 y'_\omega[\tau + \vartheta] A^{(1)}(\vartheta) d\vartheta. \quad (4.21)$$

Поэтому для разности $s'[\tau] - s'[t_l]$ получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} s'[\tau] - s'[t_l] &= (y'_\omega[\tau] - y'_\omega[t_l]) \cdot 2A^{(0)} + \int_{-h}^0 y'_\omega[\tau + \vartheta] A^{(1)'}(\vartheta) d\vartheta - \int_{-h}^0 y'_\omega[t_l + \vartheta] A^{(1)}(\vartheta) d\vartheta \\ &= \left(\int_{t_l}^{\tau} F_\omega[\tau] d\tau + \int_{t_l}^{\tau} B^{[W]}(\tau, x_\omega[\tau]) dW_\omega[\tau] \right)' \cdot 2A^{(0)} + \int_0^{\tau-t_l} y'_\omega[t_l + \vartheta] A^{(1)'}(\vartheta - (\tau - t_l)) d\vartheta \\ &+ \int_{\tau-t_l-h}^0 y'_\omega[t_l + \vartheta] \left(A^{(1)'}(\vartheta - (\tau - t_l)) - A^{(1)'}(\vartheta) \right) d\vartheta - \int_{-h}^{\tau-t_l-h} y'_\omega[t_l + \vartheta] A^{(1)'}(\vartheta) d\vartheta. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Из этого равенства вследствие липшицевости матрицы-функции $A^{(1)}(\vartheta)$ следует неравенство

$$|s_\omega[\tau] - s_\omega[t_l]| \leq C^{[A]}(\tau - t_l) + \left| \int_{t_l}^{\tau} F_\omega[\tau] d\tau + \int_{t_l}^{\tau} B^{[W]}(\tau, x_\omega^*[\tau]) dW_\omega[\tau] \right|. \quad (4.23)$$

Из (4.22) следует, что дифференциал Ито для величины $(y_\omega^*[\tau] - y_\omega^*[t_l])$ при условии $\tau < \tau(\omega)$ выражается равенством

$$d(y_\omega^*[\tau] - y_\omega^*[t_l]) = F_\omega[\tau] d\tau + B^{[W]}(\tau, x_\omega^*[\tau]) dW_\omega[\tau]. \quad (4.24)$$

Стало быть, для усредненной правой производной для функции Ляпунова

$$v(y - y_\omega^*[t_l]) = \frac{1}{2}(y - y_\omega^*[t_l])^2 \quad (4.25)$$

согласно формуле Ито [8, 9, 30] справедливо равенство

$$\frac{\tilde{d}}{d\tau_+} \left(\frac{1}{2}(y_\omega^*[\tau] - y_\omega^*[t_l])^2 \right) = F_\omega[\tau](y_\omega^*[\tau] - y_\omega^*[t_l]) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r b_{(j)}^{[W]'}(\tau, x_\omega[\tau]) b_{(j)}^{[W]}(\tau, x_\omega[\tau]). \quad (4.26)$$

А в случае $\tau(\omega) \leq \tau < t_{l+1}$ имеем

$$\frac{\tilde{d}}{d\tau_+} \left(\frac{1}{2}(y_\omega^*[\tau] - y_\omega^*[t_l])^2 \right) = 0 \quad (4.27)$$

Из этих равенств интегрированием в согласии с формулой Дынкина [6, 11–13] получается неравенство

$$\frac{1}{2} E\{|y_\omega[t] - y_\omega[t_l]|^2\} \leq \int_{t_l}^t E\{|F_\omega[\tau]|C^{[y]} + C^{[W]}\|B^{[W]}\|_E^2\}d\tau \leq C(t - t_l), \quad (4.28)$$

из которого согласно неравенству Коши-Буняковского [11] следует неравенство

$$E\{|y_\omega[t] - y_\omega[t_l]|\} \leq C^*(t - t_l)^{1/2}. \quad (4.29)$$

Аналогичным образом из (3.12) получается оценка

$$\begin{aligned} & \left| f^{[x]} \left(u_{0\omega}^{[x]}[t_l], v^{[x]}[t], x_\omega^* \left[t_l - h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l] \right], x_\omega^* \left[t - h^{[x,v]}[t] \right] \right) \right. \\ & \left. - f^{[x]} \left(u_{0\omega}^{[x]}[t_l], v^{[x]}[t], x_\omega^* \left[t_l - h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l] \right], x_\omega^* \left[t_l - h_*^{[x,v]}[t] \right] \right) \right| \\ & \leq C^{[f]} \left(t - h^{[x,v]}[t] - t_l \right) + C^{[L]} \left| \int_{t_l}^{t-h^{[x,v]}[t]} B^{[W]} \left(\tau, x_\omega^*[\tau] \right) dW_\omega[\tau] \right|, \end{aligned} \quad (4.30)$$

из которой выводится неравенство

$$E \left\{ \left| f^{[x]} \left(\dots, x_\omega^* \left[t - h^{[x,v]}[t] \right] \right) - f^{[x]} \left(\dots, x_\omega^* \left[t_l - h_*^{[x,v]}[t] \right] \right) \right| \right\} \leq C_*(t - t_l)^{1/2}. \quad (4.31)$$

Для оценки величины

$$\begin{aligned} & s_\omega[t_l] \left(f^{[x]} \left(u_{0\omega}^{[x]}[t_l], v^{[x]}[t], x_\omega^* \left[t_l - h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l] \right], x_\omega^* \left[t_l - h_*^{[x,v]}[t] \right] \right) \right. \\ & \left. - \int_{M^{[z]}} \int_{N^{[z]}} f^{[z]} \left(u^{[z]}, v^{[z]}, x_\omega^* \left[t_l - h^{[z,u]} \right], x_\omega^* \left[t_l - h^{[z,v]} \right] \right) \mu_*^{[z]} \left(du^{[z]}, dh^{[z,u]}; t \right) \nu_0 \left(dv^{[z]}, dh^{[z,v]}; t_l \right) \right) \end{aligned}$$

оценим сначала условную по $\{u_{0\omega}^{[x]}[t_l], h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l]\}$ вероятность замораживания реализации $y_\omega^*[t]$, $t_l < t < t_{l+1}$, $|y_\omega^*[t_l]| < \varepsilon_*$ в момент $\tau(\omega) \in (t_l, t_{l+1})$, когда выполняется равенство $|y_\omega^*[\tau(\omega)]| = \varepsilon^*$.

Используем снова функцию Ляпунова

$$v(y - y_\omega^*[t_l]) = \frac{1}{2}(y - y_\omega^*[t_l])^2.$$

Если при $\tau \in [t_l, t]$ выполняется неравенство

$$|y_\omega^*[\tau]| < \varepsilon^*, \quad t_* \leq \tau \leq t, \quad (4.32)$$

то для усредненной производной $\tilde{v}_+(y_\omega^*[\tau] - y_\omega^*[t_l])$ будет справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \tilde{v}_+(y_\omega^*[\tau] - y_\omega^*[t_l]) &= \frac{d}{d\tau_+} \left(\frac{1}{2}(y_\omega^*[\tau] - y_\omega^*[t_l])^2 \right) \leq |y_\omega^*[\tau] - y_\omega^*[t_l]|C^{[y]} + C^{[W]}\|B(t, x_\omega^*[t])\|_E^2 \\ &\leq C_* + C\|B(t, x_\omega^*[t])\|_E^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Если же $t \geq \tau(\omega)$, то

$$\tilde{v}_+(y_\omega^*[t] - y_\omega^*[t_l]) = 0. \quad (4.34)$$

Из (4.33), (4.34) интегрированием снова по формулам Ито [8, 9, 30] и Дынкина [6, 11–13] получаем неравенство

$$\begin{aligned} & E \left\{ (y_\omega^*[t] - y_\omega^*[t_l])^2 | z_\omega^*[t_l, \cdot], y_\omega^*[t_l, \cdot], u_{0\omega}^{[x]}[t_l], h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l] \right\} \\ & \leq C_*(t - t_l) + C \|B(t, x_\omega^*[t])\|_E^2 (t - t_l) \leq \tilde{C} (t - t_l). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Отсюда в согласии с неравенством Коши-Буняковского [11] следует оценка

$$E \left\{ |y_\omega^*[t] - y_\omega^*[t_l]| | z_\omega^*[t_l, \cdot], y_\omega^*[t_l, \cdot], u_{0\omega}^{[x]}[t_l], h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l] \right\} \leq C^*(t - t_l)^{1/2}, \quad (4.36)$$

и в соответствии с неравенством Чебышева [11] получаем неравенство

$$P \left(\sup_{t_l \leq t < t_{l+1}} |y_\omega^*[t]| < \varepsilon^* \right) > 1 - \frac{C^*(t - t_l)^{1/2}}{q|\varepsilon^* - \varepsilon_*|}, \quad 0 < q < 1. \quad (4.37)$$

Эта оценка не зависит от выбора $\{u_{0\omega}^{[x]}[t_l], h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l]\}$. Поэтому по смыслу величин $\{u_{0\omega}^{[x]}[t_l], h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l]\}$ как элементов, которые определяются решением задачи (3.8) на минимум, приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} E \left\{ s[t_l] f^{[x]}(\dots) | z_\omega^*[t_l, \cdot], y_\omega^*[t_l] \right\} &= \int_{M^{[x]}} E_* \left\{ s[t_l] f^{[x]}(\dots) | u^{[x]}, h^{[x,u]} \right\} \mu_0^{[x]}(du^{[x]}, dh^{[x,u]}; t_l) \\ &+ \int_{M^{[x]}} E_* \left\{ s[t_l] f^{[x]}(\dots) | u^{[x]}, h^{[x,u]} \right\} \mu_0^{[x]}(du^{[x]}, dh^{[x,u]}; t_l). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Здесь символ $E_* \{ \dots \}$ обозначает усреднение по некоторой совокупности реализаций $W_\omega[t, \cdot]$, для которых при фиксированных $u^{[x]} = u_{0\omega}^{[x]}[t_l], h^{[x,u]} = h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l]$ соответствующие реализации $y_\omega^*[t]$ не замораживаются на интервале $t_l < t < t_{l+1}$. Полагая все вероятности для совокупностей таких реализаций равными числу \tilde{q}_* , получаем из (4.37) с учетом смысла $\mu_0^{[x]}(\cdot)$ следующее соотношение:

$$E \left\{ s[t_l] \left(f^{[x]}(\dots) - \int_{M^{[z]}} \int_{N^{[z]}} f^{[z]}(\dots) \nu_0^{[z]}(\cdot) \right) \right\} \leq C_*^{[f]} (1 - \tilde{q}_*). \quad (4.39)$$

Таким образом, приходим к оценке

$$\begin{aligned} & E \left\{ s[t_l] \left(f^{[x]} \left(u_{0\omega}^{[x]}[t_l], v[t], x_\omega^* \left[t_l - h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l] \right], x_\omega^* \left[t_l - h_{0\omega}^{[x,u]}[t_l] \right] \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{M^{[z]}} \int_{N^{[z]}} f^{[z]} \left(u^{[z]}, v^{[z]}, x_\omega^* \left[t_l - h^{[z,u]} \right], x_\omega^* \left[t_l - h^{[z,v]} \right] \right) \cdot \mu_*^{[z]}(du^{[z]}, dh^{[z,u]}; t_l) \cdot \nu_0^{[z]}(dv^{[z]}, dh^{[z,v]}; t_l) \right) \right\} \\ & \leq C^{[f]} \frac{C^*(t - t_l)^{1/2}}{|\varepsilon^* - \varepsilon_*|}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Учитывая приведенные оценки, получаем следующую оценку для математического ожидания функционала $V(y_\omega^*[t, \cdot])$ в случае конечного отрезка времени $t_* \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} & E \{ V(y_\omega^*[t, \cdot]) | z_\omega^*[t_*, \cdot], y_\omega^*[t_*, \cdot] \} \leq V(y_\omega^*[t_*, \cdot]) \\ & + C \left(\delta^{[t]} + (\delta^{[t]})^{1/2} + \delta^r + (\delta^{[W]})^2 \right) \left(\frac{T - t_*}{\delta^{[t]}} + 1 \right) \delta^{[t]} \leq V(y_\omega^*[t_*, \cdot]) + C^* \delta. \end{aligned} \quad (4.41)$$

В случае полубесконечного интервала времени $t_* \leq t < \infty$ получается оценка

$$\begin{aligned} & E|V(y_\omega^*[t, \cdot])|z_\omega^*[t_*, \cdot], y_\omega^*[t_*, \cdot])| \leq V(y_\omega^*[t_l, \cdot]) \\ & + C \sum_{l=1}^{\infty} l^{-\gamma_*} \left(\delta^{[t]} l^{-\gamma_*} + (\delta^{[t]})^{1/2} l^{-\frac{\gamma_*}{2}} + \delta^r l^{-\gamma} + (\delta^{[W]})^2 l^{-2\gamma_*} \right) \delta^{[t]} \\ & \leq V(y_\omega^*[t_*, \cdot]) + C_* \left(\sum_{l=1}^{\infty} l^{-q_*} \right) \delta \leq V(y_\omega^*[t_*, \cdot]) + C^* \delta, \quad q_* > 1, \end{aligned} \quad (4.42)$$

где $\delta \rightarrow 0$ при $\delta^{[t]}, \delta^{[r]}, \delta^{[W]} \rightarrow 0$.

По построению процесса $\{z_\omega^*[t], y_\omega^*[t]\}$ в случае $t_* \leq t \leq T$ для выполнения неравенства

$$P\left(\sup_{t_* \leq t \leq T} |y_\omega^*[t]| < \varepsilon^* = \varepsilon\right) > \beta \quad (4.43)$$

достаточно выполнения неравенства

$$P\left(\sup_{1 \leq l \leq l^*} |y_\omega^*[t_l]| < \varepsilon_*\right) > \beta, \quad (4.44)$$

$$l^* = \left(\frac{T - t_*}{\delta^{[t]}} + 1\right).$$

А в случае $t_* \leq t < \infty$ для выполнения неравенства

$$P\left(\sup_{t_* \leq t < \infty} |y_\omega^*[t]| < \varepsilon^* = \varepsilon\right) > \beta \quad (4.45)$$

достаточно и необходимо выполнение неравенства

$$P\left(\sup_{1 \leq t_l < \infty} |y_\omega^*[t_l]| < \varepsilon_*\right) > \beta. \quad (4.46)$$

По условию (3.10) для выполнения неравенства

$$|y_\omega^*[t_l]| < \varepsilon_* \quad (4.47)$$

достаточно выполнения неравенства

$$V(y_\omega^*[t_l, \cdot]) < w_*(\varepsilon_*). \quad (4.48)$$

Стало быть, для выполнения (4.45) или (4.47) соответственно согласно неравенству Чебышева [11] достаточно выполнения неравенства

$$\frac{E\{V(y_\omega^*[t_l, \cdot])|z_\omega^*[t_*, \cdot], y_\omega^*[t_*, \cdot]\}}{w_*(\varepsilon_*)} < q_*(1 - \beta), \quad q_* < 1, \quad (4.49)$$

то есть достаточно выполнения неравенства

$$\frac{V(y[t_*, \cdot]) + C^* \delta}{w_*(\varepsilon_*)} < q_*(1 - \beta). \quad (4.50)$$

А этого можно добиться выбором согласно (3.5) достаточно малого числа $\delta_*^{[y]} > 0$ в ограничении (4.1) на исходную историю $y_\omega^*[t_*, \cdot]$ и выбором достаточно малого числа δ в (4.41) или (4.42) соответственно.

Это доказывает теорему.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр систем с последствием // Прикл. математика и механика, 1971. Т. 35, вып.5.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
5. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва—Ижевск: Институт компьютер. исслед., 2003.
6. **Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. М.: Наука, 1981.
7. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479с.
8. **Ито К., Маккин Г.** Диффузионные процессы и их траектории (перев. с англ.). М.: Мир, 1968.
9. **Ito K., Nisio M.** On stationary solutions of stochastic differential equations. J.Math. Kyoto Univ. 1964. Vol. 4, No. 1. P. 1–79.
10. **Harold J. Kushner.** Stochastic Stability and Control. New York: Academic Press, 1967.
11. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
12. **Хасьминский Р.З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.
13. **Дынкин Е.Б.** Марковские процессы. Физматгиз, 1963.
14. **Осипов Ю.С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения, 1965. Т. 1, № 5. С. 463–473.
15. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
16. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
17. **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с последствием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.
18. **Кац И.Я., Красовский Н.Н.** Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 5.
19. **Kats I.Ya. and Martynyuk A.A.** Stability and Stabilization of Nonlinear Systems with Random Structure. Taylor and Francis Inc., London and New York, 2002.
20. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
21. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. Изд-е второе, исправленное. М.: Наука, 1966.
22. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
23. **Субботин А.И.** Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью // Докл. АН СССР, 1972. Т. 206, № 3. С. 552–555.
24. **Лукоянов Н.Ю.** Об экстремальном прицеливании в задачах управления системами с последствием // Изв. УрГУ: Математика и механика. 2003. Вып.5, № 26. С. 115–123.
25. **Лукоянов Н.Ю., Решетова Т.Н.** Задачи конфликтного управления функциональными системами высокой размерности // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 4. С. 586–597.
26. **Репин Ю.М.** Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1965, вып. 3.
27. **Ким А.В.** i -Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург, 1996.
28. **Yoshizawa T.** Stability Theory by Lyapunov's Second Method. Math. Soc. Japan, 1966.
29. **фон Нейман Дж., Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
30. **Ито К.** Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов/ Математика. Сб. перев. иностр. статей. 1959. Vol. 3, No. 5. С. 131-141.

ДИНАМИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ СОСТОЯНИЙ И ГАРАНТИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹

А. В. Кряжимский, В. И. Максимов

Рассматривается задача гарантирующего управления системой параболических уравнений. Указывается алгоритм ее решения, основанный на сочетании процессов реконструкции в “реальном” времени и управления по принципу обратной связи.

1. Введение. Постановка задачи

Метод управления с моделью предложен Н.Н. Красовским в начале семидесятых годов для конечномерных управляемых систем с динамическими возмущениями (см. [1]). Метод позволяет строить законы управления с обратной связью, устойчивые относительно малых помех в канале наблюдения фазовых состояний. В [2] метод управления с моделью применен в решениях некоторых задач управления с наблюдением неполного сигнала о фазовых состояниях. В этих решениях включенная в контур управления вспомогательная управляемая система — модель — служит не только для непосредственного формирования управляющих воздействий в исходной системе, но и для приближенной динамической реконструкции ее полных фазовых состояний; реконструированные состояния задействуются в блоке устойчивого управления. Цель данной заметки — показать, каким образом метод реконструкции-управления с моделью может быть применен к системам с распределенными параметрами, в частности, к системе “реакции-диффузии” (см., например, [3–5]).

Пусть задана управляемая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + A_1^0 x(t) + A_1 x(t) + B_1 y(t) = f(t, u(t), v(t)), \\ \dot{y}(t) + A_2^0 y(t) + A_2 y(t) + B_2 x(t) = g(t) \end{cases} \quad (1)$$

в произведении гильбертовых пространств H_1 и H_2 на отрезке времени $I = [t_0, \vartheta]$ ($t_0 < \vartheta$). Здесь t — момент времени, $(x(t), y(t))$ — фазовое состояние, $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ — значения управляющего параметра и динамического возмущения; P и Q (ресурсы управления и возмущения) — замкнутые ограниченные множества в метрических пространствах. Линейный непрерывный самосопряженный оператор A_j^0 ($j = 1, 2$) отображает гильбертово пространство V_j в сопряженное ему пространство V_j^* и удовлетворяет условию коэрцитивности:

$$\langle A_j^0 z, z \rangle_{(V_j^*, V_j)} \geq a_j^0 |z|_{V_j}^2$$

при всех $z \in V_j$; здесь a_j^0 — положительная константа, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(V_j^*, V_j)}$ — двойственность между V_j^* и V_j . В дальнейшем предполагается, что пространства V_j вложены плотно и непрерывно в

¹Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований РАН № 16 (проект “Теория оценки риска природных катастроф”), Международного института прикладного системного анализа (ИАСА) и Программы поддержки ведущих научных школ России. Для второго автора — также при поддержке РФФИ (проект 04-01-00059).

пространства $(H_j, |\cdot|_{H_j})$, отождествляемые со своими сопряженными:

$$V_j \subset H_j = H_j^*, \quad |x|_{H_j} \leq c_j |x|_{V_j} \quad \forall x \in V_j, \quad c_j > 0.$$

Операторы $A_1 : H_1 \mapsto H_1$, $A_2 : H_2 \mapsto H_2$, $B_1 : H_2 \mapsto H_1$, $B_2 : H_1 \mapsto H_2$ локально липшицевы и удовлетворяют условиям роста:

$$|A_1 x|_{H_1} \leq a_1 |x|_{H_1}, \quad |A_2 y|_{H_2} \leq a_2 |y|_{H_2},$$

$$|B_1 y|_{H_1} \leq b_1 |y|_{H_2}, \quad |B_2 x|_{H_2} \leq b_2 |x|_{H_1} \quad \text{при всех } x \in H_1, y \in H_2$$

(a_1, a_2, b_1, b_2 — положительные константы). Функция $f : I \times P \times Q \mapsto H_1$ ограничена и удовлетворяет условию Каратеодори: для любого $t \in I$ отображение $(u, v) \mapsto f(t, u, v)$ непрерывно и для любых $u \in P, v \in Q$ отображение $t \mapsto f(t, u, v)$ измеримо (относительно меры Лебега на I). Кроме того, выполнено условие седловой точки: при почти всех $t \in I$ для каждого $l \in H_1$

$$\sup_{u \in P} \inf_{v \in Q} \langle l, f(t, u, v) \rangle_{H_1} = \inf_{v \in Q} \sup_{u \in P} \langle l, f(t, u, v) \rangle_{H_1};$$

здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_j}$ — скалярное произведение в H_j ($j = 1, 2$). Функция $g : I \mapsto H_2$ измерима и ограничена. *Допустимое управление* есть всякая измеримая функция $u(\cdot) : I \mapsto P$, *допустимое возмущение* — всякая измеримая функция $v(\cdot) : I \mapsto Q$. Множества всех допустимых управлений и возмущений обозначим соответственно \mathcal{U} и \mathcal{V} . Зафиксируем начальное состояние $(x_0, y_0) \in V_1 \times V_2$. *Движение* (системы (1)) под действием $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ есть функция $(x(\cdot), y(\cdot)) \in L_2(I; H_1 \times H_2)$, обобщенная производная которой $(\dot{x}(\cdot), \dot{y}(\cdot))$ есть элемент этого же пространства, т.е. $(x(\cdot), y(\cdot)) \in W_1 \times W_2$, где

$$W_j = \{x(\cdot) \in L_2(I; H_j) : \dot{x}(\cdot) \in L_2(I; H_j)\},$$

$\dot{x}(\cdot)$ — производная от $x(\cdot)$ в смысле пространства распределений, символ $W_1 \times W_2$ означает декартово произведение пространств W_1 и W_2 ,

$$\|x(\cdot)\|_{W_j} = \{\|x(\cdot)\|_{L_2(I; H_j)}^2 + \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(I; H_j)}^2\}^{1/2}.$$

Эта функция удовлетворяет условию $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ и (в смысле пространства распределений) равенству (1). Из результатов [6–8] следует существование и единственность этого движения, которое будем обозначать $(x(\cdot|u(\cdot), v(\cdot)), y(\cdot|u(\cdot), v(\cdot)))$. Именно, имеет место

Лемма 1. (а) *Для любых $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ существует единственное движение $(x(\cdot|u(\cdot), v(\cdot)), y(\cdot|u(\cdot), v(\cdot)))$ системы (1).*

(б) *Можно указать такое число d_* , что равномерно по всем $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\} \in Z_I = \{(x(\cdot|u(\cdot), v(\cdot)), y(\cdot|u(\cdot), v(\cdot))) : u(\cdot) \in \mathcal{U}, v(\cdot) \in \mathcal{V}\}$ справедливо неравенство*

$$\sup_{t \in I} \left\{ |x(t)|_{H_1}^2 + |y(t)|_{H_2}^2 + \int_{t_0}^t |x(\tau)|_{H_1}^2 d\tau + \int_{t_0}^t |y(\tau)|_{H_2}^2 d\tau + \int_{t_0}^t |x_\tau(\tau)|_{H_1}^2 d\tau + \int_{t_0}^t |y_\tau(\tau)|_{H_2}^2 d\tau \right\} \leq d_*.$$

Доказательство. Введем гильбертово пространство $H = H_1 \times H_2$ со скалярным произведением

$$(\{x, y\}, \{x', y'\})_H = (x, x')_{H_1} + (y, y')_{H_2} \quad \forall \{x, y\}, \{x', y'\} \in H,$$

а также оператор

$$F\{x, y\} = \{A_1^0 x, A_2^0 y\} \quad \forall \{x, y\} \in D_{H_1}(A_1^0) \times D_{H_2}(A_2^0),$$

где

$$D_{H_j}(A_j^0) = \{x \in V_j : A_j^0 x \in H_j\}, \quad j = 1, 2.$$

Из результатов работы [7] следует, что F является субдифференциалом выпуклой, собственной, слабо полунепрерывной снизу функции

$$\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \quad (\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\})$$

вида

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \langle A_1^0 x, x \rangle_{(V_1^*, V_1)} + \langle A_2 y, y \rangle_{(V_2^*, V_2)} \right\}, & \text{если } \{x, y\} \in V_1 \times V_2, \\ +\infty, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

т.е.

$$F\{x, y\} = \partial\varphi(x, y).$$

Пусть $G(x, y) = \{A_1 x + B_1 y, A_2 y + B_2 x\}$, $z = \{x, y\}$. Фиксируем произвольные $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$. Тогда система (1) может быть переписана в виде уравнения, содержащего субдифференциал

$$\frac{dz}{dt}(t) + \partial\varphi(z(t)) = Gz(t) + f_*(t),$$

$$z(t_0) = z_0 = \{x_0, y_0\}, \quad f_*(t) = \{f(t, u(t), v(t)), g(t)\}.$$

В таком случае из теоремы 1.13 [8] следует существование единственного решения этого уравнения $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\} \in W_1 \times W_2$, $z(\cdot) \in L_2(I; V_1) \times L_2(I; V_2)$ такого, что функция $t \rightarrow \varphi(z(t))$ является абсолютно непрерывной на T и, следовательно,

$$z(t) \in D(\varphi) = V_1 \times V_2 \quad \text{при всех } t \in I.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Далее символ Z^ε означает замкнутую ε -окрестность множества Z в $H_1 \times H_2$ ($\varepsilon \geq 0$, Z^0 — замыкание множества Z). Зафиксируем семейства $(M_t)_{t \in I}$ и $(N_t)_{t \in I}$ замкнутых множеств в $H_1 \times H_2$, такие, что множества $M = \cup_{t \in I} \{t\} \times M_t$ и $N = \cup_{t \in I} \{t\} \times N_t$ замкнуты в $I \times H_1$ и $I \times H_2$ соответственно. Для каждого $\varepsilon \in [0, +\infty)$ будем говорить, что движение $(x(\cdot), y(\cdot)) : I \mapsto H_1 \times H_2$ ε -наводится, если существует $\tau \in I$ такое, что $(x(\tau), y(\tau)) \in M_\tau^\varepsilon$ и $(x(t), y(t)) \in N_t^\varepsilon$ при всех $t \in [t_0, \tau]$. Нас интересуют законы управления, гарантирующие, что при достаточной точности наблюдаемого сигнала о фазовых состояниях движение системы (1) ε -наводится со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$.

2. Случай измерения компоненты $x(\cdot)$

Сначала рассмотрим случай наблюдения компоненты $x(t)$, затем случай наблюдения компоненты $y(t)$; второй случай — основной. В целях конструктивности сосредоточимся на частной ситуации, отвечающей методу стабильных дорожек из [1]. Именно, примем, что при почти всех $t \in I$ множество $F(t) = \bigcap_{v \in Q} f(t, P, v)$ выпукло, замкнуто и непусто. Здесь $f(t, P, v) = \{f(t, u, v) : u \in P\}$.

Множество всех измеримых функций $r(\cdot) : I \mapsto H_1$ таких, что $r(t) \in F(t)$ при почти всех $t \in I$, обозначим символом \mathcal{R} . *Дорожкой* назовем всякую функцию $(w(\cdot), z(\cdot)) \in W_1 \times W_2$, удовлетворяющую условию $(w(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0)$ и являющуюся решением системы

$$\begin{cases} \dot{w}(t) + A_1^0 w(t) + A_1 w(t) + B_1 z(t) = r(t), \\ \dot{z}(t) + A_2^0 z(t) + A_2 z(t) + B_2 w(t) = g(t), \end{cases} \quad (2)$$

где $r(\cdot) \in \mathcal{R}$; при этом будем говорить, что $(w(\cdot), z(\cdot))$ порождается функцией $r(\cdot)$. Как следует из леммы 1, для каждой функции $r(\cdot) \in \mathcal{R}$ существует единственная порождаемая ею дорожка.

Следуя [1], назовем закон управления, использующий результаты наблюдения полного фазового состояния, *стратегией* и определим ее как пару (Δ, U) , где $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$, — разбиение отрезка I , с диаметром $d(\Delta) = \max\{\tau_{i+1} - \tau_i : i = 0, 1, \dots, m-1\}$, и

$$U : I \times H_1 \mapsto P$$

— *обратная связь*. Движение, порожденное указанной стратегией при точности наблюдения h ($h \geq 0$), есть функция вида

$$(x(\cdot), y(\cdot)) = (x(\cdot|u(\cdot), v(\cdot)), y(\cdot|u(\cdot), v(\cdot))),$$

где $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и для всех $i = 0, 1, \dots, m-1$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, при некоторых $\xi(\tau_i) \in H_1$ таких, что

$$|\xi(\tau_i) - x(\tau_i)|_{H_1} \leq h,$$

выполняется равенство

$$u(t) = U(\tau_i, \xi(\tau_i)).$$

Множество всех таких движений обозначим символом $Z_h(\Delta, U)$.

Скажем, что семейство $((\Delta_h, U_h))_{h>0}$ стратегий *гарантирует устойчивое наведение*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $h_0 > 0$ такое, что при каждом $h \in (0, h_0]$ всякое движение из $Z_h(\Delta_h, U_h)$ ε -наводится. Здесь $\Delta_h = (\tau_{i,h})_{i=1}^{m_h}$ — семейство разбиений отрезка I таких, что

$$\tau_{i,0} = t_0, \quad \tau_{i,m_h} = \vartheta, \quad d(\Delta_h) = \max\{\tau_{i+1,h} - \tau_{i,h} : i = 0, 1, \dots, m_h - 1\} \rightarrow 0.$$

Далее зафиксируем семейство $(\Delta_h)_{h>0}$ разбиений отрезка I со свойством

$$\lim_{h \rightarrow 0} d(\Delta_h^0) = 0$$

и положительную функцию $h \mapsto \zeta(h)$ положительного аргумента h такую, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \zeta(h) = 0.$$

Следующая теорема есть прямое обобщение основного утверждения [1], характеризующего метод стабильных дорожек для конечномерных систем.

Теорема 1. (1) Семейство стратегий, гарантирующих устойчивое наведение, существует тогда и только тогда, когда существует 0-наводящаяся дорожка.

(2) Пусть $(w^0(\cdot), z^0(\cdot))$ — 0-наводящаяся дорожка. Тогда семейство $((\Delta_h, U_h))_{h>0}$ стратегий, где U_h таковы, что

$$\sup_{v \in Q} \left\langle \xi - w(t), f(t, U_h(t, \xi), v) \right\rangle_{H_1} \leq \inf_{u \in P} \sup_{v \in Q} \left\langle \xi - w(t), f(t, u, v) \right\rangle_{H_1} + \zeta(h) \quad \text{при } t = \tau_{i,h}, \quad (3)$$

гарантирует устойчивое наведение; более того,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup \left\{ \left| (x(t), y(t)) - (w^0(t), z^0(t)) \right|_{H_1 \times H_2} : t \in I, (x(\cdot), y(\cdot)) \in Z_h(\Delta_h, U_h) \right\} = 0. \quad (4)$$

Доказательство. Сначала докажем второе утверждение теоремы. По определению 0-наводящейся дорожки

$$(w^0(\tau), z^0(\tau)) \in M_\tau \quad \text{при некотором } \tau \in I,$$

$$(w^0(t), z^0(t)) \in N_t \quad \text{при всех } t \in [t_0, \tau].$$

Зафиксируем $h > 0$. Пусть $(x_h(\cdot), y_h(\cdot))$ — движение, порожденное стратегией (Δ_h, U_h) , т.е. решение системы (1), отвечающее некоторой функции $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и кусочно-постоянному управлению $u_h(\cdot)$ вида

$$\begin{aligned} u_h(t) = u_{h,i} = U_h(\tau_i, \xi_i^h), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{i,h}, \\ \xi_i^h \in H_1, \quad |\xi_i^h - x_h(\tau_i)|_{H_1} \leq h. \end{aligned} \quad (5)$$

Оценим изменение величины

$$\lambda^h(t) = |z_h(t) - g_0(t)|_{H_1 \times H_2}^2, \quad t \in I,$$

полагая $z_h(\cdot) = (x_h(\cdot), y_h(\cdot))$, $g_0(\cdot) = (w^0(\cdot), z^0(\cdot))$. Имеем при п. в. $t \in I$

$$\dot{\lambda}^h(t) = \nu_h^{(1)}(t) + \nu_h^{(2)}(t),$$

где

$$\begin{aligned} \nu_h^{(1)}(t) &= 2\langle \dot{x}_h(t) - \dot{w}^0(t), x_h(t) - w^0(t) \rangle_{H_1}, \\ \nu_h^{(2)}(t) &= 2\langle \dot{y}_h(t) - \dot{z}^0(t), y_h(t) - z^0(t) \rangle_{H_2}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \nu_h^{(1)}(t) &= -\left\langle A_1^0 s_{h,1}(t) + A_1 x_h(t) - A_1 w^0(t) + B_1 y_h(t) - B_1 z^0(t) \right. \\ &\quad \left. + f(t; u_{h,i}, v(t)) - r^0(t), s_{h,1}(t) \right\rangle_{H_1}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\nu_h^{(2)}(t) = -\left\langle A_2^0 s_{h,2}(t) + A_2 y_h(t) - A_2 z^0(t) + B_2 x_h(t) - B_2 w^0(t), s_{h,2}(t) \right\rangle_{H_2}, \quad (7)$$

$$A_1^0 s_{h,1}(t), A_1 w^0(t) \in L_2(I, H_1), \quad A_2^0 s_{h,2}(t), A_2 z^0(t) \in L_2(I, H_2) \quad \text{при п. в. } t \in I.$$

Здесь

$$\begin{aligned} s_{h,1}(t) &= x_h(t) - w^0(t), \\ s_{h,2}(t) &= y_h(t) - z^0(t), \end{aligned}$$

а $r^0(\cdot) \in \mathcal{R}$ — управление, порождающее дорожку $(w^0(\cdot), z^0(\cdot))$. В силу условия коэрцитивности при п. в. $t \in I$ справедливы неравенства

$$-\langle A_j^0 s_{h,j}(t), s_{h,j}(t) \rangle_{(V_j^*, V_j)} = -\langle A_j^0 s_{h,j}(t), s_{h,j}(t) \rangle_{H_j} \leq -a_j^0 |s_{h,j}(t)|_{V_j}^2, \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Аналогично, учитывая липшицевость операторов A_j, B_j , имеем

$$\begin{aligned} &\left| \left\langle A_1 x_h(t) - A_1 w^0(t) + B_1 y_h(t) - B_1 z^0(t), s_{h,1}(t) \right\rangle_{H_1} \right| \\ &\leq L_{1,a} |s_{h,1}(t)|_{H_1}^2 + L_{1,b} |s_{h,2}(t)|_{H_2} |s_{h,1}(t)|_{H_1}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &\left| \left\langle A_2 y_h(t) - A_2 z^0(t) + B_2 x_h(t) - B_2 w^0(t), s_{h,2}(t) \right\rangle_{H_2} \right| \\ &\leq L_{2,a} |s_{h,2}(t)|_{H_2}^2 + L_{2,b} |s_{h,1}(t)|_{H_1} |s_{h,2}(t)|_{H_2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме того, при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ в силу леммы 1

$$\begin{aligned} &\left\langle f(t, u_{h,i}, v(t)) - r^0(t), s_{h,1}(t) \right\rangle_{H_1} \\ &\leq \left\langle f(t, u_{h,i}, v(t)) - r^0(t), \xi_i^h - w^0(\tau_i) \right\rangle_{H_1} + k_1 \left(h + \int_{\tau_i}^t \left\{ |\dot{x}_h(\tau)|_{H_1} + |\dot{w}^0(\tau)|_{H_1} \right\} d\tau \right) \end{aligned}$$

$$\leq \left\langle f(t, u_{h,i}, v(t)) - r^0(t), \xi_i^h - w^0(\tau_i) \right\rangle_{H_1} + k_2(h + \delta^{1/2}).$$

Учитывая правило определения управления $r^0(\cdot)$, заключаем: существует функция $u_v(\cdot) = u(\cdot; v(\cdot)) \in \mathcal{U}$ такая, что

$$r^0(t) = f(t, u_v(t), v(t)) \quad \text{при п. в. } t \in I.$$

Следовательно, в силу (3) и условия седловой точки при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left\langle f(t, u_{h,i}, v(t)) - r^0(t), \xi_i^h - w^0(\tau_i) \right\rangle_{H_1} \\ &= \left\langle f(t, u_{h,i}, v(t)) - f(t, u_v(t), v(t)), \xi_i^h - w^0(\tau_i) \right\rangle_{H_1} \leq \zeta(h) + k_2(h + \delta^{1/2}). \end{aligned} \quad (11)$$

Объединив (6)–(11), будем иметь при п. в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\dot{\lambda}^h(t) + a_1^0 |s_{h,1}(t)|_{V_1}^2 + a_2^0 |s_{h,2}(t)|_{V_2}^2 \leq k_3 \lambda^h(t) + \zeta(h) + k_2(h + \delta^{1/2}).$$

В силу неравенства Гронуолла [9] отсюда выводим

$$\lambda^h(t) \leq (t - t_0)(\zeta(h) + k_2(h + \delta^{1/2})) + c \int_{t_0}^t k_3(\tau - t_0)(\zeta(h) + k_2(h + \delta^{1/2})) d\tau,$$

где $c = \exp(\vartheta - t_0)k_3$. Итак,

$$\lambda^h(t) \leq k_4(\zeta(h) + h + \delta^{1/2}), \quad t \in I.$$

Здесь постоянная k_4 выписывается в явном виде. Из последнего неравенства следует, что семейство стратегий, где U_h удовлетворяет (3), гарантирует устойчивое наведение. Кроме того, отсюда следует также соотношение (4), ибо постоянные k_j , $j \in [1 : 4]$ не зависят от $x_h(\cdot)$, $y_h(\cdot)$, $w^0(\cdot)$, $z^0(\cdot)$. Таким образом, второе утверждение теоремы доказано.

Перейдем к доказательству первого утверждения. Предполагая противное, заключаем, что существует семейство стратегий, гарантирующее устойчивое наведение, однако, не существует 0-наводящейся дорожки. Последнее означает, что для любого управления $r(\cdot) \in \mathcal{R}$ либо

$$(w_r(\tau), z_r(\tau)) \notin M_\tau \quad \text{при всех } \tau \in I, \quad (12)$$

либо при некотором t_r

$$(w_r(t_r), z_r(t_r)) \notin N_{t_r}. \quad (13)$$

Здесь $(w_r(\cdot), z_r(\cdot))$ — дорожка, порождаемая функцией $r(\cdot)$. Так как существует семейство стратегий, гарантирующее устойчивое наведение — семейство U_h , $h \in (0, 1)$ — то для любой последовательности $\varepsilon_j \rightarrow 0+$ при $j \rightarrow \infty$ существует последовательность $h_j \rightarrow 0+$ такая, что всякое движение из множества $Z_{h_j}(\Delta_{h_j}, U_{h_j})$ ε_j -наводится. Следовательно, для последовательности функций

$$(x_j(\cdot), y_j(\cdot)) = \left(x(\cdot | u_j(\cdot), v_j(\cdot)), y(\cdot | u_j(\cdot), v_j(\cdot)) \right),$$

где

$$u_j(t) = u_{ji} = U_{h_j}(\tau_i, \xi^{(j)}(\tau_i)),$$

$$|\xi^{(j)}(\tau_i) - x_j(\tau_i)|_{H_1} \leq h_j \quad \text{при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$$

существуют функции $v_{ji}(t, u_{ji})$ со свойствами:

а) $\mu_j(t) = f(t, u_{ji}, v_{ji}(t, u_{ji})) \in F(t) \quad \text{при п. в. } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$

б) функции $\mu_j(t)$ измеримы, и выполнены следующие условия: существуют моменты $\tau_j \in I$ такие, что

$$(x_j(\tau_j), y_j(\tau_j)) \in M_{\tau_j}^{\varepsilon_j}, \quad (14)$$

$$(x_j(\tau), y_j(\tau)) \in N_{\tau}^{\varepsilon_j} \quad \forall \tau \in [t_0, \tau_j]. \quad (15)$$

В силу леммы 1, свойства непустоты, выпуклости и замкнутости $F(t) \forall t \in I$, не нарушая общности, можно считать, что

$$\begin{aligned} \tau_j &\rightarrow \tau_* \in I, \\ \mu_j(\cdot) &\rightarrow \mu(\cdot) \text{ слабо в } L_2(I; H_1) \text{ при } j \rightarrow \infty, \\ \mu(t) &\in F(t) \text{ при п. в. } t \in I, \\ (x_j(\cdot), y_j(\cdot)) &\rightarrow (w_\mu(\cdot), z_\mu(\cdot)) \text{ в } C(I; H_1 \times H_2), \end{aligned} \quad (16)$$

где $(w_\mu(\cdot), z_\mu(\cdot))$ — дорожка, порожденная функцией $\mu(\cdot)$. Ввиду замкнутости в $I \times H_1$ и $I \times H_2$ множеств M и N соответственно, из (14), (15) следует

$$(w_\mu(\tau_*), z_\mu(\tau_*)) \in M_{\tau_*}, \quad (17)$$

$$(w_\mu(\tau), z_\mu(\tau)) \in N_\tau \quad \forall \tau \in [t_0, \tau_*].$$

Действительно, предполагая противное, заключаем, что либо

$$(w_\mu(\tau_*), z_\mu(\tau_*)) \notin M_{\tau_*}, \quad (18)$$

либо существует $\tau_0 \in [t_0, \tau_*]$ такое, что

$$(w_\mu(\tau_0), z_\mu(\tau_0)) \notin N_{\tau_0}. \quad (19)$$

Однако (18) эквивалентно следующему соотношению:

$$P_* = (\tau_*, u_\mu(\tau_*), z_\mu(\tau_*)) \notin M.$$

Так как M — замкнутое множество, то существует окрестность $\mathcal{U}(P_*)$ точки P_* такая, что

$$\mathcal{U}(P_*) \cap M \neq \emptyset;$$

последнее противоречит (14), (16). Если верно (19), то аналогично получаем противоречие с (15), (16). Итак, (17) установлено. Однако это противоречит (12), (13). Первое утверждение теоремы доказано.

Обратим внимание, что 0-наводящаяся дорожка из утверждения 2 теоремы 1 может формироваться в реальном времени как движение управляемой модели (2). При таком способе формирования дорожки стратегии, описанные во втором утверждении, вкладываются в схему процедур управления с моделью, определяемую согласно [1, 10].

3. Случай наблюдения компоненты $y(\cdot)$

Переходя к законам управления при наблюдении компоненты $y(t)$ состояния $(x(t), y(t))$, сразу определим их как процедуры управления с моделью; далее будем называть их y -процедурами управления. Фиксируем модель со следующей динамикой:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) + A_1^0 w(t) + A_1 w(t) + B_1 \eta(t) = r(t), \\ \dot{z}(t) + A_2^0 z(t) + A_2 \eta(t) + B_2 s(t) = g(t); \end{cases} \quad (20)$$

здесь $\eta(t)$ — результат наблюдения компоненты $y(t)$, $r(t) \in F(t)$ и $s(t) \in H_2$ — управляющие воздействия. Всякую кусочно-постоянную функцию $\eta(\cdot) : I \mapsto H_2$ назовем *сигнальным входом модели*, всякую функцию $r(\cdot) \in \mathcal{R}$ — *управляющим r -входом модели*, всякую измеримую и ограниченную функцию $s(\cdot) : I \mapsto H_1$ — *управляющим s -входом модели*. Движением модели, порожденным сигнальным входом $\eta(\cdot)$, управляющим r -входом $r(\cdot)$ и управляющим s -входом $s(\cdot)$, назовем функцию $(w(\cdot), z(\cdot)) \in L_2(I; H_1 \times H_2)$, обобщенная производная которой $(\dot{w}(\cdot), \dot{z}(\cdot))$ есть элемент этого же пространства, т.е. $(w(\cdot), z(\cdot)) \in W_1 \times W_2$. Такое движение, которое существует и единственно, будем обозначать символом

$$(w(\cdot|\eta(\cdot), r(\cdot), s(\cdot)), z(\cdot|\eta(\cdot), r(\cdot), s(\cdot))).$$

Зададим *y-процедуру управления* четверкой $(\Delta, r(\cdot), S, U)$, где

$$\Delta = (\tau_i)_{i=1}^m \quad \text{— разбиение отрезка } I,$$

$$r(\cdot) \in \mathcal{R} \quad \text{— программное управление в модели},$$

$$S : (t, \eta, z) \mapsto S(t, \eta, z) : I \times H_2 \times H_2 \mapsto H_2 \quad \text{— обратная связь в модели},$$

$$U : (t, s, w) \mapsto U(t, s, w) : I \times H_2 \times H_1 \mapsto P \quad \text{— обратная связь в системе}.$$

Расширенное движение, порожденное указанной *y-процедурой управления* $(\Delta, r(\cdot), S, U)$ при точности наблюдения h , есть функция $(x(\cdot), y(\cdot), w(\cdot), z(\cdot))$, где

$$(x(\cdot), y(\cdot)) = (x(\cdot|u(\cdot), v(\cdot)), y(\cdot|u(\cdot), v(\cdot))), \quad v(\cdot) \in \mathcal{V},$$

$$(w(\cdot), z(\cdot)) = (w(\cdot|\eta(\cdot), r(\cdot), s(\cdot)), z(\cdot|\eta(\cdot), r(\cdot), s(\cdot))), \quad r(\cdot) \in \mathcal{R},$$

и для всех $i = 0, 1, \dots, m-1$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\eta(t) = \eta(\tau_i), \quad |\eta(\tau_i) - y(\tau_i)|_{H_2} \leq h, \quad (21)$$

$$s(t) = S(\tau_i, \eta(\tau_i), z(\tau_i)),$$

$$u(t) = U(\tau_i, s(\tau_i), w(\tau_i));$$

при этом функции $\eta(\cdot)$, $r(\cdot)$, $s(\cdot)$ назовем соответственно *реализациями* сигнального входа модели, управляющего r -входа модели и управляющего s -входа модели при расширенном движении $(x(\cdot), y(\cdot), w(\cdot), z(\cdot))$; функцию $u(\cdot)$ назовем *реализацией* управления в системе при расширенном движении $(x(\cdot), y(\cdot), w(\cdot), z(\cdot))$, функцию $(x(\cdot), y(\cdot))$ — *движением* (системы (1)), порожденным *y-процедурой управления* $(\Delta, r(\cdot), S, U)$ при точности наблюдения h . Множество всех последних движений обозначим символом $Z_h(\Delta, r(\cdot), S, U)$. Скажем, что семейство $((\Delta_h, r_h(\cdot), S_h, U_h))_{h>0}$ *y-процедур управления гарантирует устойчивое наведение*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $h_0 > 0$ такое, что при каждом $h \in (0, h_0]$ всякое движение из $Z_h(\Delta_h, r_h(\cdot), S_h, U_h)$ ε -наводится. Будем предполагать также, что выполняется

У с л о в и е 1. Существует постоянная $C > 0$ такая, что для всякого движения $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), w(\cdot)) \in Z_h(\Delta_h, r_h(\cdot), S_h, U_h)$

а) справедливо включение $t \rightarrow B_2 x(t) \in L_2(I; V_2)$;

б) выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |B_2 x(t)|_{V_2}^2 dt + \int_{t_0}^{\vartheta} \left| \frac{d}{dt} (B_2 x(t)) \right|_{H_2}^2 dt \leq C.$$

Пусть далее оператор B_2 обратим и обратный оператор B_2^{-1} локально липшицев. Тогда критерий существования семейства *y-процедур управления*, гарантирующих устойчивое наведение, тот же, что и для семейства стратегий U_h (см. утверждение 1 теоремы 1). В обосновании

этого результата — основного для настоящей заметки (см. заключительную теорему 2) — ключевую роль играет тот факт, что обратные связи S_h в модели можно подобрать так, что вход $s(t)$ модели реконструирует ненаблюдаемую компоненту $x(t)$ состояния системы сколь угодно точно (в среднеквадратичном) при достаточной точности наблюдений.

Дадим точную формулировку. Фиксируем число $\rho > 0$ такое, что

$$|x(t|u(\cdot), v(\cdot))|_{H_1} \leq \rho$$

для всех $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $t \in I$ (можно показать, что ρ существует), и скалярную функцию $h \rightarrow \alpha(h) \in (0, 1)$ скалярного аргумента такую, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h + d(\Delta_h))\alpha^{-1}(h) = 0.$$

Лемма 2. Пусть семейство $((\Delta_h, r_h(\cdot), S_h, U_h))_{h>0}$ y -процедур управления таково, что

$$S_h(t, \eta, z) = \operatorname{argmin}\{\langle \eta - z, B_2 \nu \rangle_{H_2} + \alpha(h)|B_2 \nu|_{H_2} : \nu \in H_2, |\nu|_{H_2} \leq \rho\} \quad \text{при } t = \tau_i \equiv \tau_{i,h}, \quad (22)$$

U_h — произвольное (возможно, многозначное) отображение декартова произведения $I \times H_2 \times H_1$ в P .

Тогда существует число $K > 0$ такое, что для любых $h > 0$ и расширенного движения $(x(\cdot), y(\cdot), w(\cdot), z(\cdot))$, порожденного y -процедурой управления $(\Delta_h, r_h(\cdot), S_h, U_h)$ при точности наблюдения h , справедлива оценка

$$|s(\cdot) - x(\cdot)|_{L_2(I, H_2)}^2 \leq K \left[(h + d(\Delta_h) + \alpha(h))^{1/2} + (h + d(\Delta_h))\alpha^{-1}(h) \right],$$

где $s(\cdot)$ — реализация s -входа модели при расширенном движении $(x(\cdot), y(\cdot), w(\cdot), z(\cdot))$.

Доказательство. Фиксируем $h \in (0, 1)$. В силу обратимости оператора B_2 и локальной липшицевости B_2^{-1} для доказательства леммы достаточно установить справедливость неравенства

$$|B_2 s(\cdot) - B_2 x(\cdot)|_{L_2(I, H_2)}^2 \leq K_1 \left\{ (h + \delta + \alpha)^{1/2} + (h + \delta)\alpha^{-1} \right\}, \quad (23)$$

$\delta = d(\Delta_h)$, $\alpha = \alpha(h)$. Проверим это неравенство. Из (1), (20) получаем

$$\dot{\mu}(t) + A_2^0 \mu(t) + A_2 \xi^h(t) - A_2 y(t) + B_2 s(t) - B_2 x(t) = 0 \quad \text{при п.в. } t \in I,$$

где

$$\mu(t) = z(t) - y(t) \quad \text{при } t \in I, \quad \xi^h(t) = \eta(\tau_i) \quad \text{при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Следовательно, в силу условия коэрцитивности при п. в. $t \in I$ справедливо неравенство

$$\langle \dot{\mu}(t), \mu(t) \rangle_{H_2} + a_2^0 |\mu(t)|_{V_2}^2 \leq -\langle B_2 s(t) - B_2 x(t) + A_2 \xi^h(t) - A_2 y(t), \mu(t) \rangle_{H_2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon_h(t)}{dt} &\equiv \langle \dot{\mu}(t), \mu(t) \rangle_{H_2} + a_2^0 |\mu(t)|_{V_2}^2 + 0.5\alpha(h) \left\{ |B_2 s(t)|_{H_2}^2 - |B_2 x(t)|_{H_2}^2 \right\} \\ &\leq -\left\langle B_2 s(t) - B_2 x(t) + A_2 \xi^h(t) - A_2 y(t), \mu(t) \right\rangle_{H_2} \\ &\quad + 0.5\alpha(h) \left\{ |B_2 s(t)|_{H_2}^2 - |B_2 x(t)|_{H_2}^2 \right\} \quad \text{при п.в. } t \in I. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее, умножив второе уравнение (20) на $z(t)$, а затем проинтегрировав, получим для $z(\cdot)$ оценку

$$\sup_{t \in I} \left\{ |z(t)|_{H_2} + \int_{t_0}^t |z(\tau)|_{V_2}^2 d\tau \right\} \leq C_1 \left\{ d + |y_0|_{V_2} + |g(\cdot)|_{L_2(I, H_2)} \right\}, \quad (25)$$

равномерную по всем решениям $z(\cdot)$ системы (20). Из (25), учитывая свойства операторов A_2^0 и B_2 , выводим оценку

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |\dot{z}(\tau)|_{H_2}^2 d\tau \leq C_2 \left\{ d + |y_0|_{V_2} + |g(\cdot)|_{L_2(I; H_2)} \right\},$$

также равномерную по всем решениям $z(\cdot)$ системы (20). Кроме того, при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ в силу (21) справедливо неравенство

$$|A_2 \xi^h(t) - A_2 y(t)|_{H_2} \leq k \left(h + \int_{\tau_i}^t |\dot{y}(\tau)|_{H_2} d\tau \right).$$

Проинтегрировав правую и левую части (24) и воспользовавшись двумя последними неравенствами, будем иметь при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\begin{aligned} \varepsilon_h(t) &= |\mu(t)|_{H_2}^2 + 2a_2^0 \int_{\tau_i}^t |\mu(\tau)|_{V_2}^2 d\tau + \alpha(h) \int_{t_0}^t \left\{ |B_2 s(\tau)|_{H_2}^2 - |B_2 x(\tau)|_{H_2}^2 \right\} d\tau \\ &\leq \varepsilon_h(\tau_i) - 2 \int_{\tau_i}^t \left\langle B_2 s(\tau) - B_2 x(\tau), \mu(\tau) \right\rangle_{H_2} d\tau \\ &+ \alpha(h) \int_{\tau_i}^t \left\{ |B_2 s(\tau)|_{H_2}^2 - |B_2 x(\tau)|_{H_2}^2 \right\} d\tau + k_0 \int_{\tau_i}^t \left(h + \int_0^{\nu} |\dot{y}(\tau)|_{H_2} d\tau \right) d\nu. \end{aligned} \quad (26)$$

В силу леммы 1 при п. в. $t \in \delta_i$

$$-\left\langle B_2 s(t) - B_2 x(t), \mu(t) \right\rangle_{H_2} \leq \left\langle B_2 s(t) - B_2 x(t), z(\tau_i) - \eta(\tau_i) \right\rangle_{H_2} + k_1 \rho_i(t, h), \quad (27)$$

$$\rho_i(t, h) = h + \int_{\tau_i}^t \left\{ |\dot{z}(\tau)|_{H_2} + |\dot{y}(\tau)|_{H_2} \right\} d\tau.$$

Таким образом, из (25) и (27), учитывая правило определения $s(\cdot)$, получаем

$$\varepsilon_h(t) \leq \varepsilon_h(\tau_i) + k_2(t - \tau_i) \rho_i(t, h) \quad \text{при } t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}). \quad (28)$$

Снова учитывая лемму 1, а также ограниченность пучка решений $z(\cdot)$ системы (20) в пространстве W_2 , из (28) выводим

$$\begin{aligned} \varepsilon_h(t) &\leq \varepsilon_h(0) + k_3 \left(h + \delta \int_{t_0}^t \left\{ |\dot{z}(\tau)|_{H_2} + |\dot{y}(\tau)|_{H_2} \right\} d\tau \right) \\ &\leq k_4(h + \delta) \quad \text{при } t \in I, \quad \delta = \delta(h). \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда следует неравенство

$$\sup_{t \in I} \left\{ |z(t) - y(t)|_{H_2}^2 + a_2^0 \int_{t_0}^t |z(\tau) - y(\tau)|_{V_2}^2 d\tau \right\} \leq K_0(h + \delta + \alpha).$$

Заметим, что для любых $x(\cdot), y(\cdot) \in W_j$, $j = 1, 2$ при $t \leq s$, $t, s \in I$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\langle x(t), y(t) \rangle_{H_j} - \langle x(s), y(s) \rangle_{H_j} = \int_s^t \left\{ \langle \dot{x}(\tau), y(\tau) \rangle_{H_j} + \langle \dot{y}(\tau), x(\tau) \rangle_{H_j} \right\} d\tau.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^s \langle \dot{\mu}(t), B_2 x(t) \rangle_{H_2} dt &= \langle \mu(s), B_2 x(s) \rangle_{H_2} - \langle \mu(\tau), B_2 x(\tau) \rangle_{H_2} \\ &- \int_{\tau}^s \left\langle \mu(t), \frac{d}{dt}(B_2 x(t)) \right\rangle_{H_2} dt, \quad t_0 \leq \tau \leq s \leq \vartheta. \end{aligned} \quad (30)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mu}(t) + A_2 \xi^h(t) - A_2 y(t), B_2 x(t) \rangle_{H_2} + \langle A_2^0 \mu(t), B_2 x(t) \rangle_{(V_2^*, V_2)} \\ = \langle B_2 x(t) - B_2 s(t), B_2 x(t) \rangle_{H_2} \quad \text{при п. в. } t \in I. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (29) следует оценка

$$|B_2 s(\cdot)|_{L_2(T; H_2)}^2 \leq |B_2 x(\cdot)|_{L_2(T; H_2)}^2 + k_5(h + \delta)\alpha^{-1}. \quad (32)$$

Учитывая (29), (31), а также условие 1 и лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t_0}^{\vartheta} \langle B_2 s(t) - B_2 x(t), B_2 x(t) \rangle_{H_2} dt \right| \\ &\leq \|A_2^0\|_{L(V_2, V_2^*)} \int_{t_0}^{\vartheta} |\mu(t)|_{V_2} |B_2 x(t)|_{V_2} dt + k_6(h + \delta^{1/2}) + |\langle \mu(\vartheta), B_2 x(\vartheta) \rangle_{H_2}| \\ &+ |\langle \mu(t_0), B_2 x(t_0) \rangle_{H_2}| + \left| \int_{t_0}^{\vartheta} \left\langle \mu(t), \frac{d}{dt}(B_2 x(t)) \right\rangle_{H_2} dt \right| \leq k_7(h + \delta + \alpha)^{1/2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, в силу (32) из (33) выводим

$$\begin{aligned} |B_2 x(\cdot) - B_2 s(\cdot)|_{L_2(I; H_2)}^2 &= |B_2 x(\cdot)|_{L_2(I; H_2)}^2 - 2 \int_{t_0}^{\vartheta} \langle B_2 s(t), B_2 x(t) \rangle_{H_2} dt \\ &+ |B_2 s(\cdot)|_{L_2(I; H_2)}^2 \leq 2|B_2 x(\cdot)|_{L_2(I; H_2)}^2 - 2 \int_0^{\vartheta} \langle B_2 s(t), B_2 x(t) \rangle_{H_2} dt + k_5(h + \delta)\alpha^{-1} \\ &\leq k_8 \left\{ (h + \delta + \alpha)^{1/2} + (h + \delta)\alpha^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем (23). Лемма доказана.

Наличие приближения $s(t)$ ненаблюдаемой компоненты $x(t)$ позволяет использовать обратные связи, опирающиеся на приближенную информацию о полном состоянии системы (1). В частности, модифицированные обратные связи (3) обеспечивают свойство аппроксимации дорожки, аналогичное (4). Именно, верна следующая

Лемма 3. Пусть дорожка $(w^0(\cdot), z^0(\cdot))$ порождается функцией $r^0(\cdot) \in \mathcal{R}$ и семейство $((\Delta_h, r_h(\cdot), S_h, U_h))_{h>0}$ у-процедур управления определено условиями: $r_h(\cdot) = r^0(\cdot)$, S_h находится согласно (22), а отображения U_h таковы, что

$$\sup_{v \in Q} \left\langle S_h(t, \eta, z) - w, f(t, U_h(t, S_h, w), v) \right\rangle_{H_1} \leq \inf_{u \in P} \sup_{v \in Q} \left\langle S_h(t, \eta, z) - w, f(t, u, v) \right\rangle_{H_1} + \zeta(h). \quad (34)$$

Тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup \left\{ \left| (x(t), y(t)) - (w^0(t), z^0(t)) \right|_{H_1 \times H_2} : t \in I, (x(\cdot), y(\cdot)) \in Z_h(\Delta_h, r_h(\cdot), S_h, U_h) \right\} = 0.$$

Лемма 3 и теорема 1 влекут основное утверждение работы.

Теорема 2. 1) Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) существует семейство у-процедур управления, гарантирующих устойчивое наведение,
- (ii) существует семейство стратегий, гарантирующих устойчивое наведение,
- (iii) существует 0-наводящаяся дорожка.

2) Пусть $(w^0(\cdot), z^0(\cdot))$ — 0-наводящаяся дорожка и $r^0(\cdot)$ — порождающая ее функция. Тогда семейство $((\Delta_h, r_h(\cdot), S_h, U_h))_{h>0}$ у-процедур управления, где $r_h(\cdot) = r^0(\cdot)$, S_h находятся согласно (22), а U_h удовлетворяют (34), гарантирует устойчивое наведение.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно проверить второе утверждение. Пусть $(w^0(\cdot), z^0(\cdot))$ — 0-наводящаяся дорожка и $r^0(\cdot)$ — порождающая ее функция. Оценим изменение величины

$$\lambda_h(t) = |p(t) - p_*(t)|_{H_1 \times H_2}^2,$$

где $p(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot)) = (x(\cdot|u(\cdot), v(\cdot)), y(\cdot|u(\cdot), v(\cdot)))$ — фазовая траектория системы (1), $p_*(\cdot) = (w^0(\cdot), z^0(\cdot))$. Имеем

$$\lambda_h(t) \leq \sum_{j=1}^4 \lambda_h^{(j)}(t),$$

$$\lambda_h^{(1)}(t) = 2|x(t) - w(t)|_{H_1}^2, \quad \lambda_h^{(2)}(t) = 2|y(t) - z(t)|_{H_2}^2,$$

$$\lambda_h^{(3)}(t) = 2|w^0(t) - w(t)|_{H_1}^2, \quad \lambda_h^{(4)}(t) = 2|z^0(t) - z(t)|_{H_2}^2.$$

Здесь $(w(\cdot), z(\cdot))$ — фазовая траектория системы (20). Аналогично (24) получаем

$$0.5 \dot{\lambda}_h^{(1)}(t) = 2 \left\langle \dot{x}(t) - \dot{w}(t), x(t) - w(t) \right\rangle_{H_1} \leq I_i \text{ при п. в. } t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \tau_i = \tau_{i,h}, \quad (35)$$

где

$$I_i = 2 \left\langle B_1 \eta(\tau_i) - B_1 y(t) + A_1 w(t) - A_1 x(t) + f(t, u(t), v(t)) - r(t), x(t) - w(t) \right\rangle_{H_1}.$$

Учитывая правило определения управления $r(\cdot)$, заключаем: существует функция $u_v(\cdot) = u(\cdot; v(\cdot)) \in \mathcal{U}$ такая, что

$$r(t) = f(t, u_v(t), v(t)) \quad \text{при п. в. } t \in I. \quad (36)$$

Умножив первое уравнение системы (20) на $w(\cdot)$ и проинтегрировав, аналогично (25) получаем оценку

$$\sup_{t \in I} \left\{ |w(t)|_{H_1} + \int_{t_0}^t \left\{ |w(\tau)|_{V_1}^2 + |\dot{w}(\tau)|_{H_1}^2 \right\} d\tau \right\} \leq C_3(1 + |x_0|_{V_1}),$$

равномерную по всем $w(\cdot)$. Из леммы 1 и правила определения $u(t)$ следуют оценки

$$\begin{aligned}
 I_i &\leq 2 \left\langle B_1 \eta(\tau_i) - B_1 y(\tau_i) + f(t, u(t), v(t)) - f(t, u_v(t), v(t)), x(t) - w(t) \right\rangle_{H_1} \\
 &\quad + 2L_2 \int_{\tau_i}^t |\dot{y}(\tau)|_{H_2} d\tau |x(t) - w(t)|_{H_1} + 2L_1 |x(t) - w(t)|_{H_1}^2 \\
 &\leq 2L_2 \int_{\tau_i}^t |\dot{y}(\tau)|_{H_2} d\tau |x(t) - w(t)|_{H_1} + 2L_1 |x(t) - w(t)|_{H_1}^2 \\
 &\quad + 2 \left\langle f(t, u(t), v(t)) - f(t, u_v(t), v(t)), s(\tau_i) - w(\tau_i) \right\rangle_{H_1} + k_0 |s(\tau_i) - x(t)|_{H_1} + K_* \int_{\tau_i}^t |\dot{w}(\tau)|_{H_1} d\tau \\
 &\leq k_1 (t - \tau_i)^{1/2} |x(t) - w(t)|_{H_1} + k_2 ((t - \tau_i)^{1/2} + h + |s(\tau_i) - x(t)|_{H_1}) + 2L_1 |x(t) - w(t)|_{H_1}^2. \quad (37)
 \end{aligned}$$

Здесь L_1 и L_2 постоянные Липшица отображений A_1 и B_1 в соответствующих областях. Из (37) получаем

$$\lambda_h^{(1)}(t) \leq k_3 \left(\delta^{1/2} + h + \int_{t_0}^t |s(\tau) - x(\tau)|_{H_1} d\tau + \int_{t_0}^t |x(\tau) - w(\tau)|_{H_1}^2 d\tau \right). \quad (38)$$

Кроме того, верна оценка

$$\begin{aligned}
 \lambda_h^{(3)}(t) &\leq 2 \int_{t_0}^t \left\{ |B_1 \eta^h(\tau) - B_1 z^0(\tau)|_{H_1} + |A_1 w^0(\tau) - A_1 w(t)|_{H_1} \right\} |w^0(\tau) - w(\tau)|_{H_1} d\tau \\
 &\leq k_4 \int_{t_0}^t \left\{ |w^0(\tau) - w(\tau)|_{H_1}^2 d\tau + |\eta^h(\tau) - z^0(\tau)|_{H_2}^2 \right\} d\tau, \quad (39)
 \end{aligned}$$

где $\eta^h(\tau) = \eta(\tau_i)$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. В силу (21) имеем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$|\eta(\tau_i) - z^0(t)|_{H_2} \leq h + k_5 \delta^{1/2} + |y(t) - z(t)|_{H_2} + |z^0(t) - z(t)|_{H_2}. \quad (40)$$

Поэтому из (39) и (40) получаем при $t \in I$

$$\lambda_h^{(3)}(t) \leq k_5 \left(h + \delta + \int_{t_0}^t \sum_{j=2}^4 \lambda_h^{(j)}(\tau) d\tau \right). \quad (41)$$

Аналогично, учитывая условие коэрцитивности, выводим

$$\lambda_h^{(4)}(t) \leq k_6 \int_{t_0}^t \left\{ |\eta^h(\tau) - z^0(\tau)|_{H_2}^2 + |s(\tau) - w^0(\tau)|_{H_1}^2 \right\} d\tau. \quad (42)$$

В силу неравенства

$$|s(t) - w^0(t)|_{H_1} \leq |s(t) - x(t)|_{H_1} + |x(t) - w^0(t)|_{H_1} \quad \text{при п.в. } t \in I$$

из (42), воспользовавшись (40), получаем

$$\lambda_h^{(4)}(t) \leq k_7 \left(h + \int_{t_0}^t \left\{ |s(\tau) - x(\tau)|_{H_1}^2 + \sum_{j=1}^4 \lambda_h^{(j)}(\tau) \right\} d\tau \right). \quad (43)$$

Кроме того, в силу леммы 2 имеем

$$\lambda_h^{(2)}(t) \leq K_0(h + \delta + \alpha) \quad \forall t \in I. \quad (44)$$

Из (38), (41), (43), (44), воспользовавшись условием 2 и оценкой (23), получаем при достаточно малых h ($h \in (0, h_1)$):

$$\sum_{j=1}^4 \lambda_h^{(j)}(t) \leq k_8 \left(h + \delta^{1/2} + (h + \delta + \alpha)^{1/2} + (h + \delta)\alpha^{-1} + \int_{t_0}^t \sum_{j=2}^4 \lambda_h^{(j)}(\tau) d\tau \right).$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла [9] имеем

$$\lambda_h(t) \leq \sum_{j=1}^4 \lambda_h^{(j)}(t) \leq k_9 \left\{ (h + \delta + \alpha)^{1/2} + (h + \delta)\alpha^{-1} \right\}, \quad t \in I.$$

Из последнего неравенства следует, что семейство $((\Delta_h, r_h(\cdot), S_h, U_h))_{h>0}$ y -процедур управления, где $r_h(\cdot) = r^0(\cdot)$, S_h находятся согласно (22) и U_h удовлетворяют (34), гарантирует устойчивое наведение. Утверждение 2 теоремы доказано.

4. Пример

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^k с достаточно гладкой границей Γ . Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t, \nu)}{\partial t} - \Delta_L x(t, \nu) + x(t, \nu) - y(t, \nu) &= u(t, \nu) - v(t, \nu), \\ \frac{\partial y(t, \nu)}{\partial t} - \Delta_L y(t, \nu) + y(t, \nu) + x(t, \nu) &= 0, \quad (t, \nu) \in I \times \Omega \end{aligned} \quad (45)$$

с начальным условием

$$x(t_0, \nu) = x_0(\nu), \quad y(t_0, \nu) = y_0(\nu), \quad \nu \in \Omega \quad (46)$$

и краевым условием Дирихле

$$x(t, \nu) = 0, \quad y(t, \nu) = 0, \quad (t, \nu) \in I \times \Gamma. \quad (47)$$

Здесь Δ_L — оператор Лапласа, $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали к Γ . Значения $u(t, \cdot)$ распределенного управления и значения $v(t, \cdot)$ ненаблюдаемого и неконтролируемого возмущения ограничены соответственно замкнутыми шарами P и Q в $L_2(\Omega)$ радиусов p и $q \leq p$ с центрами в нуле.

Фиксируем семейства $(M_t)_{t \in I}$ и $(N_t)_{t \in I}$ замкнутых множеств в декартовом произведении $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Для системы (45)–(47) рассмотрим задачу о наведении: наблюдая компоненту $y(t, \cdot)$ состояния $(x(t, \cdot), y(t, \cdot))$, привести траекторию на M_τ (в какой-либо момент $\tau \in I$) с сохранением ее в N_t при всех $t \leq \tau$. В канале наблюдения допускаются помехи: для результатов $\eta(t, \cdot)$ наблюдения выполняются неравенства $|\eta(t, \cdot) - y(t, \cdot)|_{L_2(\Omega)} \leq h$. Задача понимается в асимптотическом смысле: требуется, чтобы при достаточно малом h свойство наведения было гарантировано относительно сколь угодно малых окрестностей множеств M_τ и N_t .

Рассматриваемая система представляется в виде (1), удовлетворяющей всем перечисленным в начале заметки условиям. При этом $H_1 = H_2 = L_2(\Omega)$, $V_1 = V_2 = H_0^1(\Omega)$, оператор A_1^0 определяется по правилу

$$\langle A_1^0 x, y \rangle_{(V_1^*, V_1)} = \int_{\Omega} \nabla x(\nu) \nabla y(\nu) d\nu \quad (x, y \in V_1),$$

$A_2^0 = A_1^0$, $A_1 x = x$, $A_2 y = y$, $B_1 y = -y$, $B_2 x = x$ ($x, y \in V_1$), $f(t, u, v) = u - v$, $g(t) = 0$ (см. [3]). Движение $(x(\cdot), y(\cdot)) = (x(\cdot|u(\cdot), v(\cdot)), y(\cdot|u(\cdot), v(\cdot)))$ системы (1) под действием допустимых управления $u(\cdot)$ и возмущения $v(\cdot)$ представляет решение исходной системы: $(t, \nu) \mapsto (x(t)(\nu), y(t)(\nu))$ есть решение начально-краевой задачи (45)–(47). Данное представление имеет место при условии $(x_0(\cdot), y_0(\cdot)) \in V_1 \times V_2$, которое считаем выполненным.

Описанная выше задача о гарантированном наведении системы (45)–(47) (в терминах системы (1)) есть задача о построении семейства y -процедур управления, гарантирующего устойчивое наведение. Модель (20) в этом случае описывается начально-краевой задачей

$$\frac{\partial w(t, \nu)}{\partial t} - \Delta_L w(t, \nu) + w(t, \nu) - \eta(t, \nu) = r(t, \nu), \tag{48}$$

$$\frac{\partial z(t, \nu)}{\partial t} - \Delta_L z(t, \nu) + \eta(t, \nu) + s(t, \nu) = 0, \quad (t, \nu) \in I \times \Omega,$$

$$w(t_0, \nu) = x_0(\nu), \quad z(t_0, \nu) = y_0(\nu), \quad \nu \in \Omega, \tag{49}$$

$$w(t, \nu) = 0, \quad z(t, \nu) = 0, \quad (t, \nu) \in I \times \Gamma. \tag{50}$$

Здесь $r(t, \cdot) \in F(t)$, $F(t)$ — замкнутый шар в H_1 радиуса $p - q$ с центром в нуле ($t \in I$). Для решения задачи применим метод, описанный для общего случая. Уравнение (2) дорожки эквивалентно начально-краевой задаче

$$\frac{\partial w(t, \nu)}{\partial t} - \Delta w(t, \nu) + w(t, \nu) - z(t, \nu) = r(t, \nu), \tag{51}$$

$$\frac{\partial z(t, \nu)}{\partial t} - \Delta z(t, \nu) + z(t, \nu) + w(t, \nu) = 0, \quad (t, \nu) \in I \times \Omega,$$

(49), (50). По утверждению 1 теоремы 2 поставленная задача об управлении разрешима тогда и только тогда, когда при некотором $r^0(\cdot) \in \mathcal{R}$ решение $t \mapsto (w^0(t, \cdot), z^0(t, \cdot))$ начально-краевой задачи (51), (49), (50) 0-наводится: существует $\tau \in I$, для которого $(w^0(\tau, \cdot), z^0(\tau, \cdot)) \in M_{\tau}$ и $(w^0(t, \cdot), z^0(t, \cdot)) \in N_t$ при всех $t \in [t_0, \tau]$.

Пусть данное условие выполнено. Тогда семейство $((\Delta_h, r_h(\cdot), S_h, U_h))_{h>0}$ y -процедур управления, гарантирующее устойчивое наведение, находится из утверждения 2 теоремы 2. Опустим формальную конкретизацию обратных связей S_h и U_h (напомним, что $r_h(t)(\cdot) = r^0(t, \cdot)$) и дадим содержательное описание алгоритма управления, определяемого $(\Delta_h, r_h(\cdot), S_h, U_h)$ при фиксированном h . Пусть τ_i и τ_{i+1} — соседние точки разбиения Δ_h , в момент τ_i система (45)–(47) находится в состоянии $(x(\tau_i, \cdot), y(\tau_i, \cdot))$, модель (48)–(50) — в состоянии $(w(\tau_i, \cdot), z(\tau_i, \cdot))$ и $\eta(\tau_i, \cdot)$ — результат наблюдения компоненты $y(\tau_i, \cdot)$. По состоянию модели и результату наблюдения обратная связь S_h назначает значение $s(\tau_i, \cdot)$ s -входа модели, а обратная связь U_h — (зависящее от $s(\tau_i, \cdot)$) значение $u(\tau_i, \cdot)$ управления в системе. На промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ система функционирует под действием постоянного управления $u(t, \cdot) = u(\tau_i, \cdot)$ и какого-либо возмущения $v(t, \cdot)$, модель — под действием постоянного сигнального входа $\eta(t, \cdot) = \eta(\tau_i, \cdot)$, управляющего r -входа $r^0(t, \cdot)$ и постоянного управляющего s -входа $s(\tau_i, \cdot)$. Значения $s(\tau_i, \cdot)$ и

$u(\tau_i, \cdot)$ находятся по формулам

$$s(\tau_i, \nu) = \begin{cases} \frac{\beta(\tau_i, \nu)}{2\alpha(h)}, & |\beta(\tau_i, \nu)| \leq 2\alpha(h)\rho, \\ \rho \frac{\beta(\tau_i, \nu)}{|\beta(\tau_i, \nu)|}, & |\beta(\tau_i, \nu)| > 2\alpha(h)\rho, \end{cases} \quad \beta(\tau_i, \nu) = z(\tau_i, \nu) - \eta(\tau_i, \nu),$$

$$u(\tau_i, \nu) = p \operatorname{sign}(w(\tau_i, \nu) - s(\tau_i, \nu)).$$

Поступила 17.01.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
3. **Vrabie I.I.** Compactness Methods For Nonlinear Evolutions. London: Pitman, 1987.
4. **Hollis S.L., Martin R.H., Jr., Pierre M.** Global Existence and Boundedness in Reaction-Diffusion Systems// SIAM J. Math. Anal. 1987. V. 18, no. 6. P. 744–761.
5. **Rothe F.** Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems. Lecture Notes in Math., 1072. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
6. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург. 2000.
7. **Brézis H.** Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groups de Contractions dans les Espaces de Hilbert. Amsterdam: North-Holland, 1973.
8. **Barbu V.** Optimal Control of Variational Inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics, Vol. 100. London–Boston, 1984.
9. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Мир, 1977.
10. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

ПРИНЦИП СРАВНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ¹

А. Б. Куржанский

Статья посвящена принципу сравнения для уравнений в частных производных первого порядка типа Гамильтона — Якоби — Беллмана и Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса, описывающих решения задач достижимости и синтеза управлений как при полной, так и при ограниченной информации о возмущениях в системе. Поскольку точные решения указанных уравнений требуют достаточно сложных вычислений, в статье приводятся верхние и нижние оценки решений этих уравнений, которых в ряде случаев может оказаться достаточно для решения таких задач, как исследование зон безопасности движений, верификации управляющих стратегий, условий непересечения трубок достижимости и т.д. Для систем с изначальной линейной структурой показано, что в числе предлагаемых оценок присутствуют эллипсоидальные, обеспечивающие “тугие” аппроксимации выпуклых множеств достижимости и множеств разрешимости для задач синтеза управлений.

1. Введение

Как известно, решение многих задач о синтезе управлений для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями с запаздыванием, сводится к рассмотрению уравнения в частных производных первого порядка типа Гамильтона — Якоби — Беллмана и его модификаций (ГЯБ) [1–6]. Для игровых проблем управления задача синтеза может быть часто сведена к решению более сложного уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса (ГЯБА) [3, 7–9]. Кроме того, к аналогичным уравнениям могут быть сведены решения задач о вычислении прямых и попятных множеств достижимости для управляемых систем без возмущений (уравнение ГЯБ) [6, 10–13] и для систем с неопределенными возмущениями (уравнение ГЯБА) [3, 14, 15].

Известно также, что решения уравнений указанного типа весьма сложны для вычислений, соответствующие численные подходы и алгоритмы находятся в стадии разработки [16, 17]. Однако для ряда задач, например, для проблем достижимости, построения зон безопасности движения или верификации алгоритмов построения стратегий управления, нередко достаточно довольствоваться приближенными решениями, которые требуют меньшей вычислительной нагрузки и могут быть получены путем замены исходных уравнений ГЯБ, ГЯБА подходящими вариационными неравенствами [18] в силу имеющего место *принципа сравнения* (см. [6, 19, 20]). В данной статье приводятся несколько теорем сравнения, применимых к нелинейным системам. Рассматриваются как случаи гладких решений, так и те, в которых гладкость не требуется. Показано также, что для линейно-выпуклых задач о построении множеств достижимости указанные теоремы могут приводить к эффективным внешним и внутренним эллипсоидальным аппроксимациям этих множеств.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00332) и гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (НШ-5344.2006.1).

2. Уравнение ГЯБ. Верхние оценки множеств достижимости

Начнем изложение с обыкновенных систем без возмущений. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, $u \in \mathcal{P}(t) \subset \mathbb{R}^m$ — управление. Функция $f(t, x, u)$ предполагается непрерывной по совокупности переменных, удовлетворяющей стандартным условиям существования, единственности и продолжаемости решений в пределах рассматриваемых промежутков; $\mathcal{P}(t)$ — многозначная функция с компактными значениями, непрерывная по Хаусдорфу [13]. Зная начальное множество \mathcal{X}^0 (при $t = t_0$) и целевое множество \mathcal{M} (при $t = \vartheta$), имеет смысл построить прямые ($\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t; t_0, \mathcal{X}^0)$, $t \geq t_0$) и попятные ($\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t; \vartheta, \mathcal{M})$, $t \leq \vartheta$) трубки достижимости для системы (2.1), выпущенные соответственно из множества позиций $\{t_0, \mathcal{X}^0\}$ и $\{\vartheta, \mathcal{M}\}$ [6, 11].

Введем обозначение

$$\mathcal{H}(t, x, p) = \max\{(p, f(t, x, u)) \mid u \in \mathcal{P}(t)\}.$$

Хорошо известно [6, 10], что решение $V(t, x)$ соответствующего “прямого” уравнения ГЯБ вида

$$V_t + \mathcal{H}(t, x, V_x) = 0, \quad V(t, x) = d^2(x(t_0), \mathcal{X}^0), \quad (2.2)$$

позволяет вычислить $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}^0)$ как множество уровня:

$$\mathcal{X}[\tau] = \{x : V(\tau, x) \leq 0\}.$$

Здесь $d(x, \mathcal{X}) = \inf\{(x - z, x - z)^{1/2} \mid z \in \mathcal{X}\}$ — евклидово расстояние множества \mathcal{X} до точки x . При этом последнее свойство множества $\mathcal{X}[t]$ не зависит от того, в каком смысле рассматривается решение уравнения (2.2) — в классическом или обобщенном.

Таким образом, точное описание множеств $\mathcal{X}[\tau]$ требует решения уравнения (2.2) в частных производных первого порядка. В общем случае эта задача весьма трудна, так как множества достижимости нелинейных систем могут принимать весьма замысловатый вид (см. [21, 22]).

В связи со сказанным будем искать внешние и внутренние оценки функций $V(t, x)$, а вместе с ними — внешние и внутренние оценки множеств $\mathcal{X}[\tau]$.

Предположение 2.1. *Заданы функция $H(t, x, p)$ и функции $w^+(t, x) \in C_1$, $\mu(t) \in L_1$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\mathcal{H}(t, x, p) \leq H(t, x, p), \quad \forall \{t, x, p\}, \quad (2.3)$$

$$w_t^+ + H(t, x, w_x^+) \leq \mu(t). \quad (2.4)$$

Теорема 2.1. *Пусть функции $H(t, x, p)$, $w^+(t, x)$, $\mu(t)$ удовлетворяют предположению 2.1. Тогда существует оценка*

$$\mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{X}_+[t], \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{X}_+[t] = \left\{ x : w^+(t, x) \leq \int_{t_0}^t \mu(s) ds + \max\{w^+(t_0, x) \mid x \in \mathcal{X}^0\} \right\}. \quad (2.6)$$

Пусть существует пара $x^{0*} \in \mathcal{X}^0$, $u^*(t) \in \mathcal{P}(t)$, $t \geq t_0$, такая, что соответствующая траектория $x^*(t) \in \mathcal{X}[t]$. Тогда

$$dw^+(t, x)/dt|_{x=x^*(t)} = w_t^+(t, x^*) + (w_x^+(t, x^*), f(t, x^*, u^*))$$

$$\leq w_t^+(t, x^*) + \mathcal{H}(t, x^*, w_x^+) \leq w_t^+(t, x^*) + H(t, x^*, w_x^+) \leq \mu(t).$$

Последнее приводит к условию

$$dw^+(t, x)/dt|_{x=x^*(t)} \leq \mu(t).$$

Интегрируя это неравенство от t_0 до t , имеем

$$w^+(t, x^*(t)) \leq \int_{t_0}^t \mu(s) ds + w^+(t_0, x^*(t_0)) \leq \int_{t_0}^t \mu(s) ds + \max \left\{ w^+(t_0, x) \mid x \in \mathcal{X}^0 \right\},$$

что означает $x^*(\tau) \in \mathcal{X}_+[\tau]$. Теорема доказана.

Напомним, что в случае, когда функция $V(t, x)$ недифференцируема, уравнение (2.2) записано лишь формально и его решение следует рассматривать в обобщенном “вязкостном” [23–25] или “минимаксном” [26] смысле.

Аналогичные теоремы справедливы и для *попятных множеств достижимости* $\mathcal{W}[t]$ (“мостов Красовского” или множеств разрешимости в терминах [28]). А именно, если $\mathcal{W}(t, \vartheta, \mathcal{M}) = \mathcal{W}[t]$ — попятное множество достижимости из *целевого множества* (компакта $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$), то

$$\mathcal{W}[\tau] = \left\{ x : V^{(b)}(\tau, x) \leq 0 \right\},$$

где $V^{(b)}(t, x)$ — решение (классическое или обобщенное) “попятного” уравнения ГЯБ

$$V_t^{(b)} - \mathcal{H}(t, x, -V_x^{(b)}) = 0, \quad V^{(b)}(\vartheta, x) = d^2(x(\vartheta), \mathcal{M}). \quad (2.7)$$

Предположение 2.2. *Заданы функции $H(t, x, p)$, $w^{(b+)}(t, x) \in C_1$, $\nu(t) \in L_1$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x, p) &\leq H(t, x, p), \quad \forall \{t, x, p\}, \\ w_t^{(b+)} - H(t, x, -w_x^{(b+)}) - \nu(t) &\geq 0. \end{aligned}$$

Теорема 2.2. *Пусть функции $H(t, x, p)$, $w^{(b+)}(t, x)$, $\nu(t)$ удовлетворяют предположению 2.2. Тогда существует верхняя оценка*

$$\mathcal{W}[t] \subseteq W_+[t],$$

где

$$W_+[t] = \left\{ x : w^{(b+)}(t, x) \leq \max \{ w^{(b+)}(\vartheta, x) \mid x \in \mathcal{M} \} - \int_t^\vartheta \nu(s) ds \right\}.$$

Доказательство теоремы аналогично предыдущей. Перейдем к обсуждению внутренних оценок для множеств достижимости и соответствующих неравенств для уравнений ГЯБ.

3. Уравнение ГЯБ. Внутренние оценки множеств достижимости

В данном параграфе рассмотрим внутренние оценки попятных областей достижимости $\mathcal{W}[t] = \mathcal{W}(t, x, \mathcal{M})$. Как и выше, здесь и далее не требуется обязательная дифференцируемость функции цены $V^{(b)}(t, x)$.

Пусть функция $V^{(b)}(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных и является обобщенным (вязкостным) решением уравнения (2.7).

Рассмотрим следующие допущения.

Предположение 3.1. *Заданы функции $h(t, x, p)$ и $w^-(t, x) \in C_1$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t, x, p) &\geq h(t, x, p), \quad \forall \{t, x, p\}, \\ w_t^-(t, x) - h(t, x, -w_x^-(t, x)) &\leq 0; \\ w^-(t_0, x) &\geq V^{(b)}(t_0, x).\end{aligned}$$

В условиях предположения 3.1 имеем

$$w_t^- - \mathcal{H}(t, x, -w_x^-) \leq w_t^- - h(t, x, -w_x^-) \leq 0.$$

Интегрируя последнее неравенство от t до ϑ вдоль траектории $x(s)$ ($s \in [t, \vartheta]$), удовлетворяющей третьему неравенству этого предположения для $x = x(\vartheta)$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.1. *При выполнении предположения 3.1 справедлива оценка*

$$V^{(b)}(t, x) \leq w^-(t, x).$$

Данный факт аналогичен утверждениям 7.5–7.7 из [19].

Обозначив $W^-[t] = \{x : w^-(t, x) \leq 0\}$ и воспользовавшись последним неравенством, приходим к следующему заключению.

Следствие 3.1. *В условиях предположения 3.1 справедливо включение*

$$W^-[t] \subseteq \mathcal{W}[t]. \quad (3.1)$$

Перейдем к нахождению оценок для более сложного уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса (уравнения ГЯБА).

4. Уравнение ГЯБА — внешние оценки

Рассмотрим уравнение с неопределенностью:

$$\dot{x} = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v), \quad (4.1)$$

где f_1, f_2 аналогичны по свойствам функции f . Здесь $u \subseteq \mathcal{P}(t) \subset \mathbb{R}^p$ — управление, $v \in \mathcal{Q}(t) \subset \mathbb{R}^q$ — неизвестное возмущение (неопределенность) в системе, априорно ограниченное непрерывной по Хаусдорфу компактнозначной функцией $\mathcal{Q}(t)$.

Будем далее выбирать $u(t, x) \subseteq \mathcal{P}(t)$ в классе \mathcal{U} , состоящем из либо однозначных, $u(t, x)$, либо многозначных, $U(t, x)$, позиционных стратегий, обеспечивающих существование и продолжительность решений дифференциального уравнения (включения)

$$\dot{x} = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v), \quad u = u(t, x) \quad (u \in \mathcal{U}(t, x)) \quad (4.2)$$

на любом конечном интервале времени, какой бы ни была функция $v(\cdot) \in \mathcal{V}_O$ — элемент множества всех измеримых функций $v(t)$ со значениями в $\mathcal{Q}(t)$. Определение решения такой системы может быть заимствовано в виде, предложенном в первом случае в монографии [3], а во втором — в монографии [27]. При этом однозначные стратегии и соответствующее определение решений уместно, как правило, применять для нелинейных систем, а многозначные — для линейно-выпуклых систем.

Введя обозначение

$$\mathcal{H}^0(t, x, p) = \mathcal{H}_1(t, x, p) + \mathcal{H}_2(t, x, p),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1(t, x, p) &= \max_u \{ (p, f_1(t, x, u) \mid u \in \mathcal{P}(t) \}, \\ \mathcal{H}_2(t, x, p) &= \min_v \{ (p, f_2(t, x, v)) \mid v \in \mathcal{Q}(t) \},\end{aligned}$$

рассмотрим на промежутке $\tau \leq t \leq \vartheta$ уравнение в частных производных первого порядка

$$V_t^{(b)0} - \mathcal{H}^0(t, x, -V_x^{(b)0}) = 0, \quad V^{(b)0}(\vartheta, x) = d^2(x, \mathcal{M}), \quad (4.3)$$

где \mathcal{M} — компактное в \mathbb{R}^n целевое множество, аналогичное рассмотренному ранее. Данное уравнение принято называть *уравнением Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса*.

О п р е д е л е н и е 4.1. Множеством разрешимости $\mathcal{W}^0[t] = \mathcal{W}(t, \vartheta, \mathcal{M})$ (понятным множеством достижимости) задачи о попадании в целевое множество \mathcal{M} при неопределенности в силу системы (4.2) в классе позиционных стратегий управления называется совокупность таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует позиционная стратегия $u(t, x)$ ($U(t, x)$), приводящая систему в момент ϑ в множество \mathcal{M} , несмотря на возмущения $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Вычисление множества $\mathcal{W}[t]$ может быть осуществлено путем решения уравнения (4.3) [29].

Теорема 4.1. *Справедливо условие*

$$\mathcal{W}[t] = \{x : V^{(b)0}(t, x) \leq 0\}.$$

Как уже говорилось выше, точное вычисление множества $\mathcal{W}[t]$ согласно предыдущей теореме может оказаться достаточно сложным. Перейдем к выводу верхних и нижних оценок для функций $V^{(b)}(t, x)$ и множеств $\mathcal{W}[t]$.

Предположение 4.1. *Заданы непрерывные функции $H_1(t, x, p)$, $H_2(t, x, p)$ и функции $w^0(t, x) \in C_1$, $\mu^0(t) \in L_1$, удовлетворяющие следующим неравенствам:*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1(t, x, p) &\leq H_1(t, x, p), \quad \mathcal{H}_2(t, x, p) \geq H_2(t, x, p), \quad \forall \{t, x, p\}, \\ w_t^0 - H_1(t, x, -w_x^0) - H_2(t, x, -w_x^0) - \mu^0(t) &\geq 0, \\ w^0(\vartheta, x) &\leq V^{(b)0}(\vartheta, x).\end{aligned}$$

Теорема 4.2. *Пусть функции $H_1(t, x, p)$, $H_2(t, x, p)$, $w^0(t, x)$, $\mu^0(t)$ удовлетворяют предположению 4.1 и пусть*

$$W^0[\tau] = \left\{ x : w^0(\tau, x) \leq \max\{w^0(\vartheta, x) \mid x \in \mathcal{M}\} - \int_{\tau}^{\vartheta} \mu^0(t) dt = k(\tau) \right\}.$$

Тогда имеют место утверждения:

- (i) *справедливо включение $\mathcal{W}[\tau] \subseteq W^0[\tau]$,*
- (ii) *справедливо неравенство*

$$w^0(t, x) - k(t) \leq V_0^{(b)}(t, x), \quad t \in [\tau, \vartheta].$$

Полученные выводы следуют из цепочки неравенств

$$w_t^0 - \mathcal{H}^0(t, x, -w_x^0) \geq w_t^0(t, x) - H_1(t, x, -w_x^0) - H_2(t, x, w_x^0) - \mu^0(t) \geq 0,$$

вытекающих из первых двух неравенств предположения 4.1 и третьего неравенства этого предположения аналогично схемам доказательств теорем 2.1, 2.2 с учетом принятой формализации рассматриваемой задачи синтеза управления.

Далее конкретизируем полученные формулы для линейных систем. С этой целью в качестве $w^0(t, x)$ используем квадратичные функции.

5. Эллипсоидальные оценки

Пусть рассматриваемая система (4.1) линейна и имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v. \quad (5.1)$$

Кроме того, пусть ограничения на функции u , v и целевое множество \mathcal{M} заданы при помощи невырожденных эллипсоидов. А именно,

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(p_u(t), P(t)), \quad v \in \mathcal{Q}(t) = \mathcal{E}(q_v(t), Q(t)), \\ \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M), \quad t \in [t_0, \vartheta], \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $P'(t) = P(t) > 0$, $Q'(t) = Q(t) > 0$, $M' = M > 0$. Здесь эллипсоид

$$\mathcal{E}(p_u, P) = \left\{ u : (u - p_u, P^{-1}(u - p_u)) \leq 1 \right\},$$

так что его опорная функция

$$\rho(l \mid \mathcal{E}(p_u, P)) = \max\{(l, p) \mid p \in \mathcal{E}(p_u, P)\} = (l, p_u) + (l, P, l)^{1/2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} -\mathcal{H}^0(t, x, -p) &= (p, A(t)x) + \min_u \max_v \left\{ (p, B(t)u + C(t)v) \mid u \in \mathcal{E}(p_u(t), P(t)), v \in \mathcal{E}(q_v(t), Q(t)) \right\} \\ &= (p, A(t)x + B(t)p_u(t) + C(t)q_v(t)) - (p, B(t)P(t)B'(t)p)^{1/2} + (p, C(t)P(t)C'(t)p)^{1/2}, \end{aligned}$$

и уравнение ГЯБА (4.3), т.е.

$$V_t^{(b)0} - \mathcal{H}^0(t, x, -V_x^{(b)0}) = 0, \quad V^{(b)0}(\vartheta, x) = h^2(x, \mathcal{E}(m, M)), \quad (5.3)$$

примет специфический вид, характерный для линейной системы, где

$$h^2(x, \mathcal{E}(m, M)) = \mathbf{h}[x] = (x - m, M^{-1}(x - m)) - 1$$

при $\mathbf{h}[x] > 0$ и

$$h^2(x, \mathcal{E}(m, M)) = 0,$$

если $\mathbf{h}[x] \leq 0$.

Чтобы получить нижнюю оценку для функции $V^{(b)0}$ и верхнюю для множества $\mathcal{W}[t]$, применим схему теоремы 4.2. Далее используем следующие неравенства:

$$(p, B(t)P(t)B'(t)p)^{1/2} \leq \gamma^2(t) + (4\gamma^2(t))^{-1}(p, B(t)P(t)B'(t)p),$$

$$(p, C(t)Q(t)C'(t)p)^{1/2} \geq (T(t)p, T(t)p)^{-1/2} \left(T(t)p, S(t)(C(t)Q(t)C'(t))^{1/2}p \right),$$

где число $\gamma^2(t) > 0$ и вектор $p \in \mathbb{R}^n$ — любые; $S(t)$ — любая непрерывная матричная функция, значения $S(t)$ которой являются ортогональными матрицами: $S(t)S'(t) = I$; $T(t) = T'(t)$ — матричная функция, $T(t)p \neq 0$.

Здесь в первом соотношении равенство достигается при

$$\gamma^2(t) = (1/2)(p, B(t)P(t)B'(t)p)^{1/2},$$

и во втором — при коллинеарности векторов $S(t)(C(t)Q(t)C'(t))^{1/2}p$ и $T(t)p$.

В условиях предположения 4.1, отнесенного к системе (5.1), в качестве функции $w^0(t, x)$ примем квадратичную: $w^0(t, x) = w(t, x) = (x - x^*(t), K(t)(x - x^*(t))) - 1$, где $K(t) = K'(t) > 0$ и $x^*(t)$ дифференцируемы. Взяв в качестве $T(t)$ матрицу $K^{-1}(t)$, далее получим

$$\begin{aligned} w_t - \mathcal{H}^0(t, x, -w_x) &= w_t + (w_x, A(t)x + B(t)p_u(t) + C(t)q_v(t)) \\ &\quad - (w_x, B(t)P(t)B'(t)w_x)^{1/2} + (w_x, C(t)P(t)C'(t)w_x)^{1/2} \\ &\geq w_t + (w_x, A(t)x + B(t)p_u(t) + C(t)q_v(t)) - \gamma^2(t) - (4\gamma^2(t))^{-1}(w_x, B(t)P(t)B'(t)w_x) \\ &\quad + (K^{-1}(t)w_x, K^{-1}(t)w_x)^{-1/2} \left(K^{-1}(t)w_x, S(t)(C(t)Q(t)C'(t))^{1/2}w_x \right). \end{aligned}$$

Подставляя сюда $w(t, x) = (x - x^*(t), K(t)(x - x^*(t))) - 1$, заметим, что в области

$$D(r) = \{(t, x) : (x - x^*(t), x - x^*(t)) < r^2, t \in [\tau, \vartheta]\}$$

будет справедливо условие

$$\begin{aligned} w_t - \mathcal{H}^0(t, x, -w_x) &\geq \left\{ (x - x^*(t), \dot{K}(t)(x - x^*(t))) - 2 \left(\dot{x}^*(t), K(t)(x - x^*(t)) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(K(x - x^*(t)), A(t)x + B(t)p_u(t) + C(t)q_v(t) \right) \right. \\ &\quad \left. - (\gamma^2(t))^{-1} \left(K(x - x^*(t)), B(t)P(t)B'(t)K(x - x^*(t)) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2r^{-1} \left(x - x^*(t), S(t)(C(t)Q(t)C'(t))^{1/2}K(x - x^*(t)) \right) \right\} - \gamma^2(t). \end{aligned} \quad (5.4)$$

При достаточно большом r схема теоремы 4.2 остается справедливой в пределах $D(r)$. Чтобы оказаться в условиях этой схемы, теперь достаточно потребовать, чтобы выражение в фигурных скобках неравенства (5.4) обращалось в тождественный нуль в $D(r)$, для чего потребуем выполнения равенства

$$\begin{aligned} &\left(x - x^*(t), \dot{K}(t)(x - x^*(t)) \right) - 2 \left(\dot{x}^*(t), K(t)(x - x^*(t)) \right) + 2 \left(K(t)(x - x^*(t)), A(t)(x - x^*(t)) \right) \\ &+ A(t)x^*(t) + B(t)p_u(t) + C(t)q_v(t) - (\gamma^2(t))^{-1} \left(K(t)(x - x^*(t)), B(t)P(t)B'(t)K(t)(x - x^*(t)) \right) \\ &+ 2r^{-1} \left(x - x^*(t), S(t)(C(t)Q(t)C'(t))^{1/2}K(t)(x - x^*(t)) \right) = 0 \end{aligned}$$

при $(t, x) \in D(r)$. Приравнивая к нулю члены при вторых степенях $x - x^*$ и члены при первых степенях тех же переменных, заметим, что последнее равенство будет выполнено в том и только том случае, когда выполняются уравнения $(\mathbf{C}(t) = (C(t)Q(t)C'(t))^{1/2})$

$$\begin{aligned} &\dot{K} + K'A(t) + A'(t)K - (\gamma^2(t))^{-1}K(B(t)P(t)B'(t)K \\ &+ r^{-1}(KS(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{C}(t)S'(t)K) = 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$x^* = A(t)x^*(t) + B(t)p_u(t) + C(t)q_u(t) \quad (5.6)$$

с граничными условиями

$$K(\vartheta) = M^{-1}, \quad x^*(\vartheta) = m.$$

При выполнении уравнений (5.5), (5.6) из (5.4) вытекает неравенство

$$dw/dt + \gamma^2(t) \geq 0.$$

Пусть $x(t)$ — траектория с начальным условием $x(\tau) = x$, оканчивающаяся в точке $x(\vartheta)$, отвечающая оптимальной стратегии $u(\cdot, \cdot)$ и возмущению $v(\cdot)$. Из определения функции цены следует, что $V^{(b)0}(\tau, x) \geq V^{(b)0}(\vartheta, x(\vartheta))$. Интегрируя неравенство $dw/dt + \gamma^2(t) \geq 0$ вдоль траектории, получим

$$w(\tau, x) - \int_{\tau}^{\vartheta} \gamma^2(t) dt \leq w(\vartheta, x(\vartheta)) \leq V^{(b)0}(\vartheta, x(\vartheta)) \leq V^{(b)0}(\tau, x),$$

где $x \in R^n$, $\tau \leq \vartheta$, $w(t, x) = (x - x^*(t), K(t)(x - x^*(t))) - 1$, причем $K(t)$, $x^*(t)$ определяются уравнениями (5.5), (5.6) и

$$w(\vartheta, x) = (x - x^*(\vartheta), M^{-1}(x - x^*(\vartheta))) - 1.$$

Отсюда вытекает утверждение

Теорема 5.1. (i) *Справедливо включение*

$$\mathcal{W}^0[t] \subseteq W^0[t], \quad (5.7)$$

где

$$W^0[t] = \left\{ x : (x - x^*(t), K(t)(x - x^*(t))) \leq 1 + \int_t^{\vartheta} \gamma^2(s) ds \right\}.$$

(ii) *Функция*

$$\mathbf{w}^0(t, x | \gamma^2(\cdot)) = w(t, x) - \int_t^{\vartheta} \gamma^2(s) ds$$

оценивает $V^{(b)0}(t, x)$ снизу:

$$\mathbf{w}^0(t, x | \gamma^2(\cdot)) \leq V^{(b)0}(t, x). \quad (5.8)$$

Преобразуем уравнение (5.5). С этой целью заменим переменную K на \mathcal{K}_+ в соответствии с соотношениями

$$\mathcal{K} = K^{-1}, \quad \dot{\mathcal{K}} = -\mathcal{K}\dot{K}\mathcal{K}, \quad \mathcal{K}_+(t) = \left(1 + \int_t^{\vartheta} \gamma^2(s) ds \right) \mathcal{K}(t).$$

Тогда приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{K}}_+ &= A(t)\mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_+A'(t) + \pi(t)\mathcal{K}_+ - (\pi(t))^{-1}B(t)P(t)B'(t) \\ &\quad + r^{-1}(\mathcal{K}_+S(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{C}(t)S'(t)\mathcal{K}_+) \end{aligned} \quad (5.9)$$

и граничному условию $\mathcal{K}_+(\vartheta) = M$.

Здесь принято обозначение

$$\pi(t) = \gamma^2(t) \left(1 + \int_t^{\vartheta} \gamma^2(s) ds \right)^{-1}.$$

Полученные формулы позволяют сделать следующее заключение.

Теорема 5.2. *Справедливо включение (внешняя оценка)*

$$\mathcal{W}[t] \subseteq W_+^0[t],$$

где

$$W_+^0[t] = \mathcal{E}(x^*(t), \mathcal{K}_+(t)) = \left\{ x : (x - x^*(t), \mathcal{K}_+^{-1}(t)(x - x^*(t))) \leq 1 \right\},$$

каким бы ни был выбор функций $\pi(t) > 0$ и ортогональных матриц $S(t)$.

З а м е ч а н и е 5.1. При $r \rightarrow \infty$ приходим к случаю, когда возмущения отсутствуют ($Q(t) \equiv 0$). Тогда в правой части системы (2.3) будет отсутствовать последний член и ее решение будет продолжаемо в направлении убывания времени от момента ϑ ; матрица $\mathcal{K}_+(t)$ здесь будет оставаться положительной. При убывании $r \rightarrow 0$ могут наступить моменты, с которых матрица $\mathcal{K}_+(t)$ теряет свойство положительности или с которых решение в направлении убывания времени теряет свойство продолжаемости. Исследование чувствительности решения к изменениям параметра $r > 0$ и $r = r(t) > 0$ выходит за рамки данной работы.

З а м е ч а н и е 5.2. Последнее соотношение — внешняя эллипсоидальная аппроксимация попятного множества достижимости $\mathcal{W}[t]$ при неопределенности — получено *дедуктивным путем*, отправляясь от уравнений типа ГЯБА. Следует отметить, что аналогичные утверждения были получены ранее *индуктивным путем* в работах [28, 30] без использования гамильтонова формализма. При этом дифференциальные уравнения для матриц конфигураций соответствующих аппроксимирующих “индуктивных” эллипсоидов имеют структуру, аналогичную найденному выше уравнению (5.9) для матриц \mathcal{K}_+ “дедуктивных” внешних эллипсоидов.

З а м е ч а н и е 5.3. При надлежащем выборе параметров $\pi(t)$, $S(t)$, r уравнения (5.5), аналогично схемам работы [30], можно получить эллипсоиды, “тугие” по каждому направлению $l \in \mathbb{R}^n$, в том смысле, что для каждого l можно указать такие параметры $\pi(\cdot)$, $S(\cdot)$, r , при которых будет выполнено равенство

$$\rho(l|\mathcal{W}[t]) = \rho(l|W_+^0[t]).$$

В последнем случае вычисление множеств $\mathcal{W}[t]$ допускает эффективное *распараллеливание*.

Следуя схемам, предложенным выше, для множеств $\mathcal{W}[t]$ данного параграфа можно получить и внутренние эллипсоидальные оценки вида $W_-^0[t] = \mathcal{E}(x^*(t), \mathcal{K}_-(t))$. При этом центры $x^*(t)$ указанных эллипсоидов будут такими же, как и для внешних оценок, т.е. заданными при помощи уравнения (5.6).

Приведем формулы для матриц \mathcal{K}_- , “внутренние” аналоги уравнения (5.9). Будем иметь ($\mathbf{B}(t) = (B(t)P(t)B'(t))^{1/2}$):

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{K}}_- &= A(t)\mathcal{K}_- + \mathcal{K}_-A'(t) + \pi(t)\mathcal{K}_- + (\pi(t))^{-1}C(t)Q(t)C'(t) \\ &\quad - r^{-1}(\mathcal{K}_-S(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{B}(t)S'(t)\mathcal{K}_-) \end{aligned} \quad (5.10)$$

с граничным условием $\mathcal{K}_-(\vartheta) = M$. Здесь $\pi(t) > 0$, и матрицы $S(t) = S'(t)$, $S(t)S'(t) = I$, — такие же, как и в уравнении (5.9).

Таким образом, имеет место утверждение

Теорема 5.3. *Справедливо включение (внутренняя оценка)*

$$\mathcal{W}[t] \supseteq W_-^0[t] = \mathcal{E}(x^*(t), \mathcal{K}_-(t)),$$

где

$$W_-^0[t] = \{x : (x - x^*(t), \mathcal{K}_-^{-1}(t)(x - x^*(t))) \leq 1\},$$

каким бы ни был выбор функций $\pi(t) > 0$ и ортогональных матриц $S(t)$ (при надлежащем $r > 0$).

Замечание, аналогичное 5.1, справедливо и для внутренних эллипсоидов. Как уже упоминалось выше, вычисление множеств $W_+^0[t]$, $W_-^0[t]$ является центральным элементом в решении задач о синтезе управлений при неопределенности.

6. Заключение

В данной работе приведено несколько теорем сравнения, указывающих на возможность получать верхние и нижние оценки решений уравнений типа ГЯБ, ГЯБА, возникающих в теории управления, в том числе, при управлении в условиях неизвестных, но ограниченных возмущений, и в игровых ситуациях. Эти оценки, в свою очередь, позволяют получить внешние и внутренние оценки соответствующих прямых и попятных “множеств достижимости”. Поскольку точное решение уравнений ГЯБ, ГЯБА доставляет серьезные вычислительные трудности, применение указанных оценок может облегчить решение тех задач, где для получения ответа достаточно знать лишь приближенные решения (задачи планирования безопасных движений, верификации некоторых алгоритмов синтеза управлений, проверки условий непересечения трубок достижимости и другие проблемы, рассчитанные на гарантированный результат). Показано также, что, исходя из уравнений типа ГЯБ, ГЯБА, в системах с исходной линейной структурой и выпуклыми ограничениями на управления и возмущения могут быть получены внешние и внутренние эллипсоидальные оценки прямых и попятных множеств достижимости. Эти дедуктивные оценки, аналогичные полученным ранее индуктивным способом, приводят к аппроксимациям, позволяющим путем параллельных вычислений аппроксимировать искомые множества достижимости с любой степенью точности.

Автор благодарит М. И. Гусева за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 21.11.2005

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
2. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современные проблемы управления. М.: Наука, 1968.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. New York: Springer-Verlag, 1988.
4. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problem of ordinary differential equations: dynamic solutions. Gordon and Breach, 1995.
5. Bertsekas D. P. Dynamic Programming and Optimal Control. V. I, II. Athena Scientific, Belmont, 1995.
6. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamic optimization for reachability problems // J. Optim. Theory Appl., 2001. V. 108, no. 2. P. 227–251.
7. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
8. Basar T., Bernhard P. H^∞ -optimal control and related minimax design problems. 2nd ed. Birkhäuser, 1995.
9. Basar T., Olsder J. Dynamic noncooperative game theory. New York: Acad. Press, 1982.
10. Leitmann G. Optimality and reachability via feedback controls // Dynamic Systems and Microphysics / Blaquièrre A., Leitmann G., eds. 1982.
11. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
12. Lee E.B., Marcus L. Foundations of Optimal Control Theory. New York: Wiley, 1967.
13. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
14. Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 6. С. 1314–1317.
15. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On reachability under uncertainty // SIAM Journal on Control and Optimization. 2002. V. 41, no. 1. P. 181–216.
16. Osher S., Fedkiw R. Level set methods and dynamic implicit surfaces // Applied Mathematical Sciences. V. 153. New York: Springer-Verlag, 2003.
17. Sethian J.A. Level Set Methods and Fast Marching Methods. Second ed. Cambridge Univ. Press, 1999.

18. **Бенсуссан А., Лионс Ж.-Л.** Импульсное управление и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1987.
19. **Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.** Nonsmooth Analysis and Control Theory. // Springer-Verlag, Ser. GTM. 1998. V. 178.
20. **Гурман В.И.** Принцип расширения в задачах управления. М.: Физматлит, 1997.
21. **Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.** Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system // J. Computer and Syst. Sci. Intl. 2003. V. 42, no. 3. P. 320–328.
22. **Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.** Об аппроксимации областей достижимости систем управления // Прикл. математика и механика. 1998. № 2. С. 179–186.
23. **Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L.** Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 282, no. 2. P. 487–502.
24. **Fleming W.H., Soner H.M.** Controlled Markov processes and viscosity solutions. New York: Springer-Verlag, 1993.
25. **Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.** Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations // SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997.
26. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first-order PDE’s. The dynamical optimization perspective // SCFA. Boston: Birkhäuser, 1995.
27. **Filippov A.F.** Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. Dordrecht: Kluwer, 1988.
28. **Kurzanski A.B., Vályi I.** Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control // SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997.
29. **Варайя П., Куржанский А.Б.** Эллипсоидальные методы для задач динамики и управления. Ч. 1 // Современная математика и ее приложения. Ин-т кибернетики АН Грузии, Тбилиси, 2005. Т. 23. С. 34–72.
30. **Kurzanski A.B., Varaiya P.** Reachability analysis for uncertain systems—the ellipsoidal technique // Dynamics Contin., Discrete, Impuls. Systems. Ser. B (Appl. Algorithms). 2002. Vol. 9, no. 3. P. 347–367.

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Г. И. Марчук

Введение

В настоящее время исследование сложных систем невозможно без приложения математического моделирования, методов вычислительной математики и численного моделирования, которые в их современном смысле теснейшим образом взаимосвязаны. Они стали, по существу, всеобщим средством познания, и их значение во всех сферах жизни и деятельности невозможно переоценить. Особое значение здесь принимают приложения математического моделирования и вычислительной математики к анализу сложных систем в глобальных проблемах, таких, как изменение климата, долгосрочный прогноз погоды, оценка загрязнения окружающей среды, изменения в биосфере и оценка здоровья людей планеты. В изучении таких глобальных проблем и анализе сложных систем чрезвычайно полезно применение ряда фундаментальных принципов математики, одним из которых является *принцип двойственности* с присущими ему такими понятиями, как *сопряженные операторы* и *сопряженные уравнения*, являющимися конкретным отображением этого принципа.

В настоящей работе мы кратко остановимся на понятиях сопряженных операторов и уравнений и отметим возможные их приложения в математическом моделировании и вычислительной математике. Затем, привлекая сопряженные уравнения, мы приведем примеры решения проблем, связанных с такими сложными системами, как система “атмосфера — океан — континент” нашей планеты, иммунная система человека, система охраны окружающей среды.

1. Сопряженные уравнения и принцип двойственности

Для исследования сложных систем и математических моделей разработан ряд общих подходов и принципов. Одним из них является принцип двойственности. Этот принцип успешно применяется во многих разделах математики: математической логике, геометрии, теории функций, исследованиях частично упорядоченных пространств, вычислительной математике, теории оптимального управления и др. В применении к исследованию сложных систем *принцип двойственности* заключается в том, что, заменяя в каком-либо верном утверждении о сложной системе все входящие в него понятия на двойственные им, получают верное (двойственное исходному) утверждение.

При применении принципа двойственности к анализу сложных систем привлекаются конкретные отображения двойственности в теории пространств и теории операторов: сопряженные пространства, сопряженные классы функций, сопряженные операторы.

1.1. Сопряженные операторы

Одним из основополагающих понятий в принципе двойственности и его приложениях, является понятие сопряженного оператора. Это понятие фактически было введено Лагранжем в конце XVIII века (правда, лишь для вычислительных целей и без наименования), который,

рассматривая линейное дифференциальное уравнение $Au = f$, вводит сопряженное к нему уравнение $A^*u^* = g$ и получает типичный пример двойственности вида:

$$\int u^* Au \, dx = \int u A^* u^* \, dx, \quad (1.1)$$

справедливый для u, u^* , обращающихся в нуль на концах интервала интегрирования. Этот пример является первым примером “функционального оператора” A^* , “сопряженного” к A . Поэтому соотношения типа (1.1) часто называют как *соотношение сопряженности* или *равенство Лагранжа*.

Одно из современных определений сопряженного оператора следующее. Пусть A есть линейный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в вещественном банаховом пространстве X , действующий из X в вещественное банахово пространство Y . Через X^*, Y^* обозначим пространства, сопряженные соответственно X, Y . Тогда сопряженный оператор есть линейный оператор A^* , действующий из Y^* в X^* и который строится так: если для всех $u \in D(A)$ имеет место равенство

$$\langle Au, u^* \rangle = \langle u, g \rangle, \quad (1.2)$$

где $Au \in Y, u^* \in Y^*, g \in X^*$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — соотношение двойственности на паре Y, Y^* или X, X^* , то на множестве элементов u^* , удовлетворяющих (1.2), однозначно определен оператор $A^*u^* = g$ с областью определения $D(A^*)$ и действующий из Y^* в X^* . С использованием оператора A^* соотношение сопряженности (1.2) примет вид:

$$\langle Au, u^* \rangle = \langle u, A^*u^* \rangle, \quad \forall u \in D(A), u^* \in D(A^*). \quad (1.3)$$

Если X, Y — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_X, (\cdot, \cdot)_Y$ соответственно, то сопряженный оператор может быть введен с использованием теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала и соотношение сопряженности здесь принимает следующую форму:

$$(Au, u^*)_Y = (u, A^*u^*)_X \quad \forall u \in D(A), u^* \in D(A^*). \quad (1.4)$$

В том случае, если рассматривается нелинейный оператор $F(u)$ с областью определения $D(F)$, плотной в X , задание сопряженного оператора, соответствующего $F(u)$, усложняется. Так, сопряженный оператор здесь также может быть введен на основе теории линейных операторов. Для этого достаточно представить $F(u)$ в виде $F(u) = A(u)u$, где $A(u)$ — некоторый линейный оператор, зависящий от u как от параметра с областью определения $D(A) = D(F)$ и действующий из X в Y . Теперь, следуя теории линейных операторов, сопряженный оператор вводится на основе соотношения сопряженности:

$$\langle A(\tilde{u})u, u^* \rangle = \langle u, A^*(\tilde{u})u^* \rangle \quad \forall u, \tilde{u} \in D(A), u^* \in D(A^*), \quad (1.5)$$

которое приводит к следующему равенству для исходного нелинейного оператора $F(u)$:

$$\langle F(u), u^* \rangle = \langle u, A^*(u)u^* \rangle \quad \forall u \in D(F), u^* \in D(A^*). \quad (1.6)$$

Обратим внимание на возможную неоднозначность представления $F(u) = A(u)u$ и неединственность сопряженного оператора $A^*(u)$, соответствующего $F(u)$. Однако *если оператор $F(u)$ обладает необходимой гладкостью и задан в виде ряда Тейлора (или представлен предельно в виде ряда Тейлора), то оператор $A^*(u)$ единственный* (Г.И. Марчук, В.И. Агошков).

В работе [11] показано, что сопряженный оператор можно вывести из класса эквивалентности линейных операторов, соответствующих данному нелинейному оператору. Этим достигается единственность сопряженного оператора и выделяется класс нелинейных операторов,

для которых сопряженный оператор существует. В линейном же случае класс эквивалентности состоит из единственного оператора — классического сопряженного оператора.

Пусть \mathcal{D} — линейное множество, плотное в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , и каждому элементу $\varphi \in \mathcal{D}$ соответствует линейный оператор $A_\varphi \equiv A(\varphi)$, действующий в \mathcal{H} ,

$$\{\psi \rightarrow A_\varphi \psi, \quad \psi \in \mathcal{D}(A_\varphi)\}$$

с областью определения $\mathcal{D}(A_\varphi)$, содержащей \mathcal{D} . Пусть, далее, $\mathcal{D}(A_\varphi^*)$ также содержит \mathcal{D} , так что $\mathcal{D}(A_\varphi)$ и $\mathcal{D}(A_\varphi^*)$ плотны в \mathcal{H} . Введем (нелинейные) операторы

$$\varphi \rightarrow A_\varphi^* \varphi = A_\varphi^* \psi|_{\psi=\varphi}, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

с областью определения \mathcal{D} .

О п р е д е л е н и е 1. Назовем множества линейных операторов $\{A_\varphi, \varphi \in \mathcal{D}\}$ и $\{B_\varphi, \varphi \in \mathcal{D}\}$ эквивалентными, $A_\varphi \sim B_\varphi$, если выполнено равенство

$$A_\varphi^* \varphi = B_\varphi^* \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Введенная эквивалентность обладает свойствами рефлексивности $A_\varphi \sim A_\varphi$; симметричности $B_\varphi \sim A_\varphi$, если $A_\varphi \sim B_\varphi$; транзитивности $A_\varphi \sim C_\varphi$, если $A_\varphi \sim B_\varphi$ и $B_\varphi \sim C_\varphi$. Поэтому множества линейных операторов распадаются на непересекающиеся классы эквивалентности.

Пусть $L(\varphi)$ — (нелинейный) оператор с линейной областью определения $\mathcal{D}(L)$, плотной в \mathcal{H} . По аналогии с линейным случаем определим сопряженный оператор L_φ^* к оператору L_φ .

О п р е д е л е н и е 2. Сопряженным оператором L_φ^* к оператору L_φ назовем класс эквивалентности линейных операторов $\{\psi \rightarrow L_\varphi^* \psi, \varphi \in \mathcal{D}(L)\}$ таких, что область определения $\mathcal{D}(L_\varphi^*)$ оператора L_φ^* содержит $\mathcal{D}(L)$ и выполнено равенство

$$\langle L(\varphi), \psi \rangle = \langle \varphi, L_\varphi^* \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(L_\varphi^*), \quad \varphi \in \mathcal{D}(L).$$

Из этого определения вытекают такие утверждения [11].

Если L — линейный оператор, то класс эквивалентности сопряженного оператора к L состоит из единственного оператора L^ , который не зависит от φ .*

Сопряженный оператор L_φ^ к оператору L_φ единственный (в том смысле, что единственный класс эквивалентности $\{L_\varphi^*, \varphi \in \mathcal{D}(L)\}$).*

Изложенное определение сопряженного оператора как класса эквивалентности допускает распространение и на случай банахова пространства. Однако заметим, что *этот класс в общем случае может не включать сопряженные операторы*, построенные по другим изложенным ранее принципам. Это следует, в частности, из свойств линейных сопряженных операторов и определения сопряженного оператора в нелинейных задачах как класса эквивалентности, по которым *это определение охватывает класс операторов $F(u) \equiv A_i(u)u$, $i = 1, 2, \dots$, с замкнутыми операторами $\{A_i(u)\}$.*

Сопряженные уравнения нашли свое применение для построения законов сохранения (сохраняющихся токов) на основе выбора *ассоциированной линейной системы, являющейся сопряженной к исходной системе* [10]. Данный метод применим к построению законов сохранения как в системах линейных дифференциальных, так и в сложных системах, описываемых нелинейными уравнениями (не обязательно дифференциальными). Эти подходы к построению законов сохранения были распространены В.П. Дымниковым на эволюционные уравнения общего вида [16]. Им были построены интегральные законы сохранения в нелинейных эволюционных системах. Ряд положений данного метода построения законов сохранения был конкретизирован В.П. Дымниковым в применении к системам уравнений гидродинамического типа [17].

Свойства сопряженных операторов достаточно полно исследованы для линейных операторов в гильбертовых и банаховых пространствах и отражены во многих монографиях. Изучению сопряженных операторов в нелинейных задачах посвящены работы S. Yamamoto, М.М. Вайнберга, Г.И. Марчука, В.С. Владимировой, В.П. Дымникова, В.И. Агошкова, В.П. Шутяева, И.В. Воловича, С.М. Похожаева, В.А. Треногина и др.

1.2. Сопряженные операторы и теория чувствительности

Сопряженные операторы и сопряженные уравнения нашли различные приложения в математике. Одним из классических и ярких приложений сопряженных операторов и уравнений является их применение к современной теории разрешимости линейных уравнений в банаховых пространствах (С.М. Никольский, С.Г. Крейн). Примеры приложений теории сопряженных операторов и уравнений даны во многих разделах математики, среди которых мы отметим *теорию регулярных возмущений и теорию чувствительности*, где сопряженные уравнения и их решения нашли самые широкие применения в связи с исследованием различных сложных систем.

Так, пусть математическая модель некоторой сложной системы записана в виде операторного уравнения

$$Au = f \quad (1.7)$$

с линейным оператором $A : X \rightarrow Y$ и областью определения $D(A)$, плотной в X , т.е. $\overline{D(A)} = X$. Предположим, что одной из целей анализа рассматриваемой системы является вычисление значения функционала от решения u :

$$J(u) = \langle u, g \rangle, \quad (1.8)$$

заданного элементом $g \in X^*$. Если при этом нас интересуют N значений функционала $J(u)$, соответствующие решениям $u \equiv u_i, i = 1, \dots, N$, при $f = f_i, i = 1, \dots, N$, то процесс вычислений $J_i \equiv J(u_i), i = 1, \dots, N$, можно осуществить путем решения N уравнений (1.7) и вычисления J_i по формуле (1.8). Однако во многих случаях использование принципа двойственности для задач может существенно упростить всю процедуру решения поставленной задачи. Для этого введем сопряженный оператор A^* и рассмотрим сопряженное уравнение

$$A^*u^* = g \quad (1.9)$$

с элементом g в правой части, определяющим $J(u)$. Тогда двойственное выражение для искомого функционала имеет вид

$$J = \langle f, u^* \rangle, \quad (1.10)$$

где $f = f_i, i = 1, \dots, N$. Таким образом для решения поставленной задачи вычисления J_i достаточно решить лишь одно уравнение — сопряженное уравнение (1.9) — и осуществить вычисления N значений J_i по формуле (1.10), что может быть гораздо эффективнее, чем процесс вычислений, основанный на решении прямых уравнений (1.7).

Представление (1.10) приводит к важной интерпретации решения u^* сопряженного уравнения, а именно, к возможности рассмотрения u^* как функции чувствительности (функции ценности) функционала J к изменениям в элементе f , определяемом исходными данными задачи (Г.И. Марчук, В.В. Орлов).

С решениями сопряженных уравнений теснейшим образом связана теория чувствительности в нелинейных задачах. Предположим, что рассматривается нелинейное уравнение

$$F(u) = f \quad (1.11)$$

с непрерывно дифференцируемым оператором $F : X \rightarrow Y$ и изучается чувствительность функционала (1.8) к возмущениям h в элементе f . Функцией чувствительности $J \equiv J_f$ к возмущению h назовем градиент $P \equiv J'_f(u)$ функционала J в выражении для вариации функционала

δJ :

$$\delta J_f(h) = \langle h, P \rangle. \quad (1.12)$$

Проведя известные вычисления (см., например, Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П.), находим двойственное представление δJ_f :

$$\delta J_f = \langle h, u^* \rangle, \quad (1.13)$$

где $u^* \equiv P$ — решение сопряженного уравнения

$$(F'(u))u^* = g. \quad (1.14)$$

Если $F(u) \equiv Au$ — его линейный оператор, то функция чувствительности функционала (1.8) есть решение линейного сопряженного уравнения при $g = h$.

Приведенное выше определение функции чувствительности допускает разнообразные обобщения при рассмотрении нелинейных уравнений и функционалов, зависящих от возмущающих элементов (параметров, коэффициентов уравнений, весовых функций в функционалах и др.).

1.3. Сопряженные операторы в теории возмущений

На базе сопряженных уравнений и их решений разработаны многие эффективные алгоритмы возмущений, нашедшие широкие приложения в изучении и приближенном решении многих прикладных задач. Наиболее популярна в практических расчетах *теория малых возмущений*. В линейных задачах ограничение малости возмущений часто снимается. Так при рассмотрении уравнения (1.7) при невозмущенном элементе f и возмущенном $\tilde{f} = f + \delta f$, значение $\delta J \equiv J_{\tilde{f}} - J_f$ имеет вид

$$\delta J = \langle \delta f, u^* \rangle, \quad (1.15)$$

где u^* — решение сопряженного уравнения (1.9).

Если рассматривается уравнение (1.11) с f и $\tilde{f} = f + \epsilon \delta f$, где ϵ — малый параметр, то

$$\delta J = \epsilon \langle \delta f, u^* \rangle + O(\epsilon^2), \quad (1.16)$$

где u^* — решение уравнения (1.14).

Алгоритмы малых возмущений широко используются также при приближенном решении обобщенных задач на собственные значения вида

$$Au = \lambda Bu, \quad \|u\|_X = 1, \quad (1.17)$$

где A, B — линейные операторы, $\overline{D(A)} = X \equiv X^*$, $D(A) \subseteq D(B)$, и B — положительный оператор. Пусть λ_0, u_0 — решение задачи (1.17) и λ_0 — простое собственное значение. Тогда λ_0 является решением (точнее, одним из компонентов решения) сопряженной задачи на собственные значения:

$$A^* u_0^* = \lambda_0 B^* u_0^*, \quad \|u_0^*\|_X = 1. \quad (1.18)$$

Рассмотрим задачу (1.17) с возмущенными операторами $\tilde{A} = A + \epsilon \delta A$, $\tilde{B} = B + \epsilon \delta B$, где $\delta A, \delta B$ подчинены соответственно A и B , а ϵ есть малый параметр. Тогда согласно теории регулярных возмущений (К.О. Friedrichs, F. Rellich, Т. Kato, М.И. Вишик, Л.А. Люстерник, Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский) имеют место разложения по малому параметру:

$$\tilde{u}_0 = u_0 + \epsilon u_0^{(1)} + \epsilon^2 u_0^{(2)} + \dots, \quad \tilde{\lambda}_0 = \lambda_0 + \epsilon \lambda_0^{(1)} + \epsilon^2 \lambda_0^{(2)} + \dots, \quad (1.19)$$

где $u_0^{(1)}, \lambda_0^{(1)}$ удовлетворяют уравнению

$$(Au_0^{(1)} - \lambda_0 B u_0^{(1)}) + (\delta A u_0 - \lambda_0 \delta B u_0) - \lambda_0^{(1)} B u_0 = 0, \quad (1.20)$$

причем накладывается ограничение $(u_0^{(1)}, u_0)_X = 0$. Если умножить (1.20) скалярно в X на $u_0^{(*)}$, то с учетом (1.18) получаем выражение для первой поправки $\lambda_0^{(1)}$:

$$\lambda_0^{(1)} = \frac{(\delta A u_0, u_0^{(*)})_X - \lambda_0 (\delta B u_0, u_0^{(*)})_X}{(B u_0, u_0^{(*)})_X}. \quad (1.21)$$

Итак, зная u_0, u_0^*, λ_0 , можно затем вычислять с точностью $O(\epsilon^2)$ поправки $\lambda_0^{(1)}$ при произвольных возмущениях $\{\delta A\}, \{\delta B\}$.

Однако помимо приложений в вычислительных алгоритмах формула малых возмущений (1.21) может быть использована в математическом моделировании таких систем как ядерные реакторы с применением многогрупповых моделей. Так, пусть операторы \tilde{A}, \tilde{B} определяются некоторыми дифференциальными операторами с кусочно-постоянными коэффициентами, выбираемыми так, чтобы $((A - \tilde{A})u_0, u_0^*)_X = 0, ((B - \tilde{B})u_0, u_0^*)_X = 0$. Такой выбор коэффициентов (“многогрупповых констант”) возможен для основных типов операторов A, B , применяемых в математической теории ядерных реакторов. Строя соответствующие многогрупповые константы для A, B , можно добиться, чтобы также $((\tilde{A} - A)u_0, u_0^*)_X = 0, ((\tilde{B} - B)u_0, u_0^*)_X = 0$. В этом случае мы заключаем, что *собственные числа λ_0 для точной задачи (1.17) и $\tilde{\lambda}_0$ для многогрупповой задачи (1.17) с операторами \tilde{A}, \tilde{B} с точностью до величины второго порядка малости совпадают*. Следовательно, для расчета “критического режима” ядерного реактора можно применять многогрупповые математические модели, которые, к тому же, численно гораздо проще решать. Именно на этом принципе — принципе получения многогрупповых констант и использования их в последующих численных расчетах — базируется решение многих задач для сложных систем.

1.4. Сопряженные уравнения в эволюционных задачах

Рассмотренные выше подходы с использованием сопряженных уравнений и их решений допускают распространение на эволюционные задачи вида:

$$u_t + Au = f, \quad u(0) = u_0. \quad (1.22)$$

Сопряженная задача в данном случае имеет вид

$$-u_t^* + A^* u^* = G, \quad u^*(T) = g, \quad (1.23)$$

а соотношение сопряженности есть

$$\langle u(0), u^*(0) \rangle + \int_0^T \langle f, u^* \rangle dt = \langle u(T), g \rangle + \int_0^T \langle u, G \rangle dt. \quad (1.24)$$

Из (1.24) следует, что решение u^* сопряженной задачи (1.23) здесь может быть интерпретировано как функция чувствительности; на основе соотношения (1.24) также могут быть получены различные важные приложения функции чувствительности к анализу нестационарных систем. Ряд таких приложений и соответствующих заключений о поведении исследуемой системы будет продемонстрирован ниже при рассмотрении конкретных систем.

2. Сопряженные уравнения и глобальный перенос примесей

Одной из центральных проблем современности является охрана окружающей среды. Моделирование процессов глобального переноса примесей в атмосфере — одна из задач среди этих проблем. Пусть модель переноса рассматривается применительно к Земле в системе координат

(λ, ψ, z) , $\varphi = \varphi(\lambda, \psi, z, t)$ — концентрация примесей; $F(\lambda, \psi, z, t)$ — функция размещения и мощности источников.

Основное уравнение переноса примесей на сфере запишем в следующем виде [9, 19]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + (w - w_g) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = F \end{aligned} \quad (2.1)$$

при соответствующих физическому процессу граничных условиях и начальном условии

$$\varphi = \varphi^{(0)} \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (2.2)$$

Пусть требуется вычислить функционал

$$J = \int_0^T dt \int_{\Omega} p \varphi d\Omega, \quad (2.3)$$

где $p(\lambda, \psi, z, t)$ — заданная функция с носителем в Ω :

$$\omega \subset \Omega. \quad (2.4)$$

Множество ω соответствует зоне, где производится оценка загрязнения. В зависимости от задания области ω мы можем получить различные интегральные характеристики поля загрязнения примесей. Задача сводится к оценке функционалов вида (2.3), определенных на функциях состояния, удовлетворяющих исходной задаче (2.1)–(2.2).

Для оценки функционала J применяется подход, основанный на использовании сопряженных задач

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \psi} - (w - w_g) \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \varphi^*}{\partial \psi} \right) = p, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\varphi^* = 0 \quad \text{при} \quad t = T.$$

Если теперь воспользоваться решением сопряженной задачи, то для функционала находим следующее представление:

$$J = \int_0^T dt \int_G F \varphi^* dG + \int_0^T dt \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \alpha \varphi_0 \varphi^* \Big|_{z=b} d\psi. \quad (2.6)$$

По значениям функции φ^* можно районировать область Ω , выделяя опасные зоны по отношению к загрязнению атмосферы в ω . Конструктивно это районирование определяется с помощью функции φ^* , нормированной на свое максимальное значение. На рис. 1 показано поле функции чувствительности для Арктического региона, выделяемого в качестве охраняемой зоны.

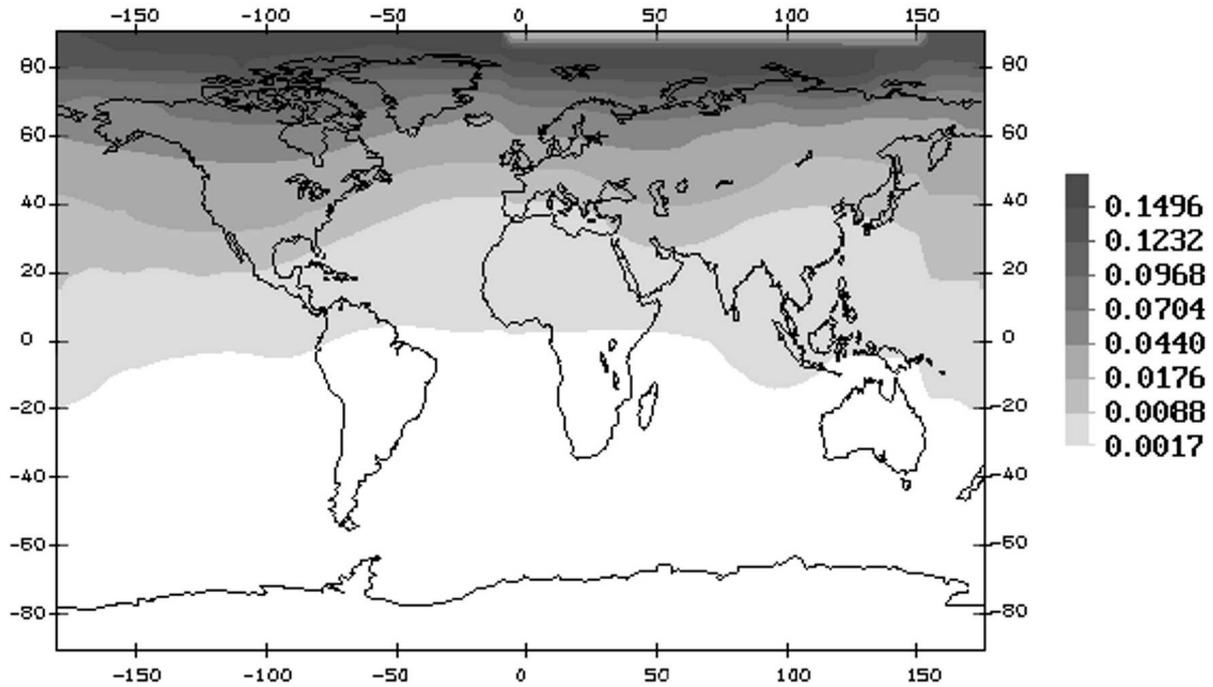


Рис. 1. Функция чувствительности. Охраняемая зона: Арктика. Январь — февраль 1986 г. ($H = 1.5$ км.)

3. Исследование климата Земли

Одним из важных примеров сложной системы является система “атмосфера — океан — континент” (см. рис. 2). Изучение поведения этой системы имеет первостепенное значение в исследовании климата Земли. Для проведения этих исследований в СССР, а затем в Российской Федерации были разработаны многие программы исследований. Одной из них была программа “Разрезы”, сформулированная нами в 1980 году для изучения проблемы глобального взаимодействия атмосферы и океана. Центральной задачей этой программы было построение иерархии ключевых районов (энергоактивных зон) взаимодействия атмосферы и океана. Методологической основой исследований был метод сопряженных уравнений.

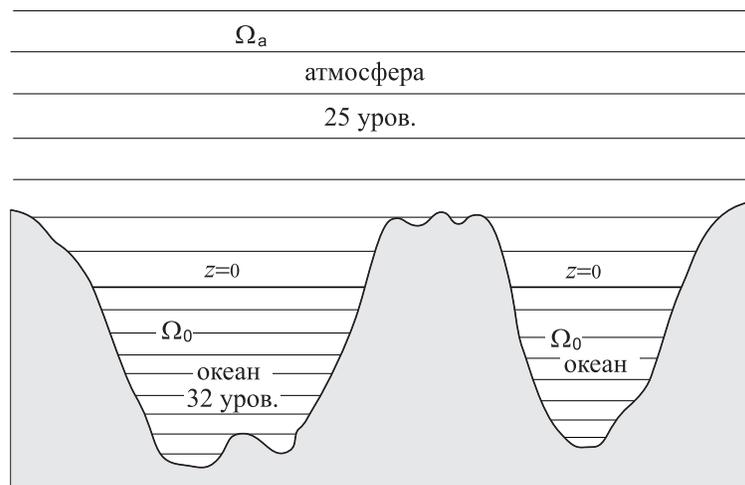


Рис. 2. Система “атмосфера — океан — континент”.

На основе результатов проведенного численного моделирования можно сделать вывод о том регионе, воздействие которого особенно важно для средней температуры в том или ином

регионе на тот или иной промежуток времени. Аналогичные исследования по моделированию климата были осуществлены для многих районов земной поверхности. Помимо изложенного выше, сопряженные уравнения находят важные применения при изучении ряда проблем геофизической гидротермодинамики, таких, как разработка методов эффективного решения задач ассимиляции данных наблюдений (спутниковых, корабельных и др.) в современных математических моделях и решение обратных задач и задач инициализации для моделей динамики океанов, атмосферы в их взаимодействии.

Для разработки этих методов и решения отмеченных глобальных задач в Институте вычислительной математики РАН создана общая методология, базирующаяся на использовании современных достижений теории сопряженных уравнений, обратных задач, оптимального управления и современных математических моделей, эффективных численных методов и использования параллельных ЭВМ [6, 7]. Эти исследования проводятся в рамках ряда программ Отделения математических наук и Президиума РАН.

На основе результатов численного моделирования можно выделить регионы Земли и Мирового океана, воздействие которых особенно важно для изучаемой территории за определенный промежуток времени.

4. Математические проблемы в иммунологии

Защита организмов от вирусных и бактериальных инфекций осуществляется иммунной системой, которая представляет собой пример сложной системы в иммунологии. Математические модели в иммунологии представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Примерами моделей, построенных нами, являются: базовая модель инфекционного заболевания и математическая модель противовирусного иммунного ответа. Эти модели применялись для исследования механизмов развития неблагоприятных форм инфекционных заболеваний при гепатите, гриппе, пневмонии, туберкулезе и др.

Базовая модель инфекционного заболевания. Рассматривается математическая модель инфекционного заболевания. Это — система нелинейных уравнений с запаздывающим временем. Здесь V — концентрация вирусов, C — концентрация плазматических клеток, F — концентрация антител, m — масса пораженного органа, τ — время для образования клона антител. Остальные параметры — константы, связанные с формой заболевания [12–15]. Тогда система уравнений иммунной защиты организма принимает вид [4, 12, 13]:

$$\xi(m) = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq m^*, \\ 1 - m, & m^* \leq m \leq 1, \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (\beta - \gamma F(t)) V(t),$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \rho C(t) - \eta \gamma F(t) V(t) - \mu_f F(t),$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \xi(m) \alpha V(t - \tau) F(t - \tau) - \mu_f (C - C^*),$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \sigma V(t) - \mu_m m(t),$$

$$V(t_0) = V_0, \quad F(t_0) = F_0, \quad C(t_0) = C_0, \quad m(t_0) = m_0,$$

$$V(t) = 0, \quad F(t) = F_0, \quad t \in [t_0 - \tau, t_0].$$

Формы динамики инфекционных заболеваний. Интегрирование системы уравнений вместе с начальными данными позволяет описать все основные формы заболеваний — субклинического, острого, хронического и летального [4] (см. рис. 3).

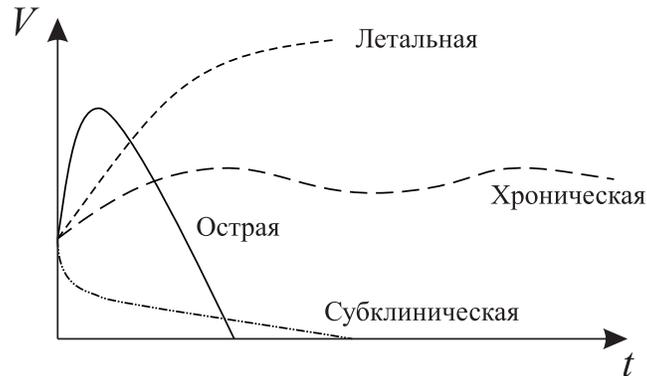


Рис. 3. Динамика концентрации вирусов в зависимости от форм заболеваний.

Лечение хронических форм. Одной из трудных форм заболеваний является хроническая. Она связана с первым уравнением базовой модели, которое модифицируется следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (\beta - \gamma F) V \pm q.$$

Здесь q — количество антител или антигенов. Рассмотрим сначала случай, когда в правой части добавляются антитела ($+q$): динамика процесса показана пунктирными линиями (см. рис. 4).

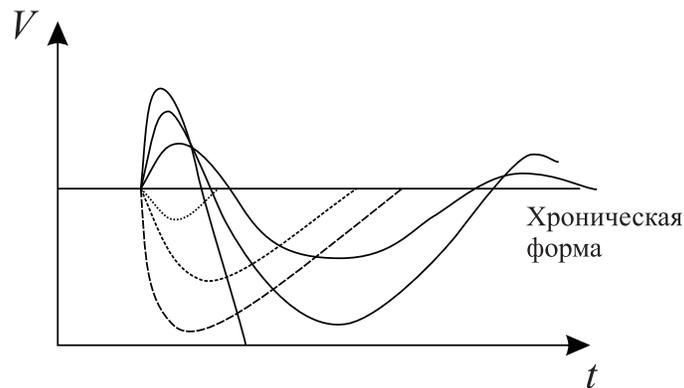


Рис. 4. Динамика лечения хронических форм заболеваний.

Особое значение имеют формы динамики хронических заболеваний. На рисунке ради простоты хроническое заболевание представлено прямой линией. Пунктирными линиями изображены решения уравнения с введением противовирусных препаратов ($+q$). При увеличении вводимого препарата пунктирная кривая сначала снижалась до определенного уровня, а затем снова выходила на “хронический уровень”. Если вводится препарат, увеличивающий интенсивность вирусов ($-q$), то концентрация вирусов сначала увеличивается, а затем, после некоторых колебаний, снова выходит на “хроническую кривую”. Лишь после существенного увеличения V кривая динамики резко снижается и приходит к уровню $V = 0$. Это означает, что только высокая концентрация вирусов способна привести к мощной иммунологической реакции с выздоровлением [12].

Гипертоксическая форма. Наконец, система уравнений иммунного ответа объясняет способность иммунной реакции вывести динамику болезни из возможного летального исхода к полному выздоровлению. Для этого при достаточно высоких концентрациях вируса (это особенно часто связано с эпидемиями гриппа) необходимо ввести в интервале $[t_1, t_2]$ кортикостероидные гормоны на 2–3 дня, которые приостанавливают производство вирусов ($\beta = 0$), чтобы дать сформироваться клону, продуцирующему иммуноглобулины, которые при $t > t_2$ начинают активное уничтожение вирусов с выздоровлением (см. рис. 5).

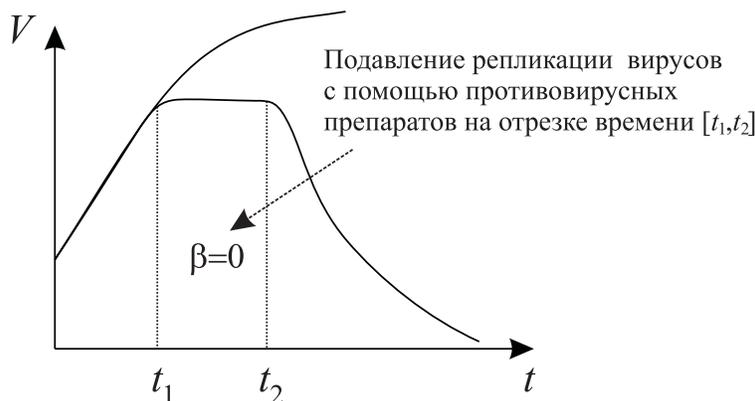


Рис. 5. Подавление репликации вирусов с помощью противовирусных препаратов.

На основе математических моделей была исследована динамика гепатита, гриппа, туберкулеза, пневмонии и других заболеваний [13]. Дальнейшие исследования связаны с разработкой оптимальных методов терапии для конкретного пациента. Для этого потребуется рассмотреть сопряженные уравнения, теорию возмущений и оптимальное управление.

Заключение

В XXI веке исключительную роль в решении сложных систем будет играть теория сопряженных уравнений, благодаря которой удастся решить волнующие общество проблемы глобальных изменений, проблемы минимизации напряжения, экологических климатических и биосферных возмущений. Уже определены наукой пути построения сопряженных уравнений, соответствующих нелинейным процессам в атмосфере и океане. Они позволят предвычислять чувствительность функционалов задач, связанных с жизнеобеспечением тех или иных регионов земного шара, к различного рода возмущениям. А это одна из важнейших задач современности, как одна из задач математики и в целом фундаментальной науки.

Поступила 01.02.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г.И. Численные методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1958.
2. Марчук Г.И. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961.
3. Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
4. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1980.
5. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992.
6. Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. М.: Наука, 1993.
7. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б., Лыкосов В.Н., Галин В.Я. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1984.

8. **Марчук Г.И., Орлов В.В.** К теории сопряженных функций // Нейтронная физика. М.: Атомиздат, 1961.
9. **Марчук Г.И., Алоян А.Е.** Глобальный перенос примеси в атмосфере // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31, №5. С. 597–606.
10. **Владимиров В.С., Волович И.В.** Законы сохранения для нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, №4. С. 843–847.
11. **Владимиров В.С., Марчук Г.И.** Об определении сопряженного решения оператора для нелинейных задач // Докл. Академии Наук. 2000. Т. 372, №2. С. 165–168.
12. **Marchuk G.I.** Mathematical modelling of immune response in infectious diseases. Kluwer Academic, 1997.
13. **Марчук Г.И., Петров Р.В.** Математическая модель противовирусного иммунного ответа. Препринт ОВМ АН СССР. 1980.
14. **Марчук Г.И., Бербенцова Э.П.** Острые пневмонии: иммунология, оценка тяжести, клиника, лечение. М.: Наука, 1989.
15. **Марчук Г.И., Бербенцова Э.П.** Хронический бронхит: иммунология, оценка тяжести, клиника, лечение. М.: Наука, 1995.
16. **Дымников В.П.** Об общих представлениях интегральных законов сохранения нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. Академии Наук. 2002. Т. 382, №2. С. 173–175.
17. **Дымников В.П.** Сопряженные уравнения систем гидродинамического типа // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37, №4. С. 459–462.
18. **Marchuk G.I., Osipov Yu.S.** Mathematical modelling and global processes. // Our Fragile World. Challenges and Opportunities for Sustainable Development. V. 2./ M.K. Tolba (Ed.). Oxford: EOLSS Publishers, 2001. P. 1071–1096.
19. **Марчук Г.И., Алоян А.Е., Арутюнян В.О.** Сопряженные уравнения и трансграничный перенос примесей // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2005. №2. С. 54–64.

DYNAMICALLY STABLE COOPERATIVE SOLUTIONS IN RANDOMLY FURCATING DIFFERENTIAL GAMES¹

L. A. Petrosyan and D. W. K. Yeung

The paradigm of randomly furcating differential games incorporates stochastic elements via randomly branching payoffs in differential games. This paper considers dynamically stable cooperative solutions in randomly furcating differential games. Analytically tractable payoff distribution procedures contingent upon specific random events are derived. This new approach widens the application of cooperative differential game theory to problems where future environments are not known with certainty.

1. Introduction

The discipline of game theory studies decision making in an interactive environment. One particularly complex and fruitful branch of game theory is dynamic or differential games, which investigates interactive decision making over time. The origin of differential games traces back to [1], which for various reasons did not appear in print until 1965. A variational approach to differential games was developed in [2], and [3] investigated the geometry of differential games. In [4], differential games in open-loop solution in terms of the maximum principle were solved; [5, 6] provided a general mathematical theory for solving zero-sum differential games. Solutions for discrete time zero-sum differential games were constructed in [7], and [8] derived solution mechanisms for discrete time zero-sum games with distributed parameters. In [9] methods are developed for computing Stackelberg strategies in linear differential games. Recently, Yeung [10, 11] introduced the paradigm of randomly-furcating stochastic differential games. As a result, it is possible to study stochastic elements via randomly branching payoffs under the format of differential games.

Cooperative games suggest the possibility of socially optimal and group efficient solutions to decision problems involving strategic action. In dynamic cooperative games, a stringent condition on cooperation and agreement is required: In the solution, the optimality principle must remain optimal throughout the game, at any instant of time along the optimal state trajectory determined at the outset. This condition is known as *dynamic stability* or *time consistency*. The question of dynamic stability in differential games has been rigorously explored in the past three decades (see [12] and [13]). In the presence of stochastic elements, a more stringent condition—that of *subgame consistency*—is required for a credible cooperative solution. In particular, a cooperative solution is subgame-consistent if an extension of the solution policy to a situation with a later starting time and any feasible state brought about by prior optimal behavior would remain optimal. A rigorous framework for the study of dynamically stable solutions in cooperative stochastic differential games was established in the works [14, 15].

This paper considers dynamically stable cooperative solutions in randomly furcating differential games. Analytically tractable payoff distribution procedures contingent upon specific random events are derived. This new approach widens the application of cooperative differential game theory to problems where future environments are not known with certainty.

¹Financial support from the Research Grant Council of Hong Kong (grant nos. HKBU2103/04H and FRG/04-05/II-03) is gratefully acknowledged.

2. Game Formulation and Nash Equilibria

Consider a class of randomly furcating differential games in which there are two players. The game interval is $[t_0, T]$. When the game commences at t_0 , the payoff structures of the players are known. In future instants of time t_k ($k = 1, 2, \dots, m$), where $t_0 < t_m < T \equiv t_{m+1}$, the payoff structures are affected by a series of random events Θ^k . In particular, Θ^k for $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ are independent and identically distributed random variables with range $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ and corresponding probabilities $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\eta\}$. Changes in preference, technology, legal arrangements and the physical environments are examples of factors which cause change in payoff structures. At time T a terminal value $q^i(x(T))$ will be given to player i . Specifically, player i seeks to maximize

$$E_{t_0} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} g^{[i, \theta_0^0]} [s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_0)} ds + \sum_{h=1}^m \sum_{\alpha_h=1}^{\eta} \lambda_{\alpha_h} \int_{t_h}^{t_{h+1}} g^{[i, \theta_{\alpha_h}^h]} [s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_0)} ds + e^{-r(T-t_0)} q^i(x(T)) \right\}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (2.1)$$

where $x(s) \in X \subset \mathbb{R}^n$ is a vector of state variables, $\theta_{\alpha_k}^h \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ for $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\theta_{\alpha_0} = \theta_0^0 \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ is known at time t_0 , r is the discount rate, and $u_i \in U^i$ is the control of player i . The payoffs of the players are transferable.

The game's state dynamics is characterized by the differential equation

$$\dot{x}(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s)], \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.2)$$

To obtain a feedback solution for the game (2.1)–(2.2), we first consider the solution for the subgame in the last time interval, that is, $[t_m, T]$. For the case where $\theta_{\alpha_m}^m \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ has occurred at time instant t_m and $x(t_m) = x_{t_m} \in X$, player i maximizes the payoff

$$\int_{t_m}^T g^{[i, \theta_{\alpha_m}^m]} [s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_0)} ds + q^i(x(T)) e^{-r(T-t_0)}, \quad (2.3)$$

subject to

$$\dot{x}(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s)], \quad x(t_m) = x_m. \quad (2.4)$$

The conditions characterizing a feedback solution of the game (2.3)–(2.4) can be obtained as

Lemma 2.1. *A set of feedback strategies $\{u_i^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t) = \phi_i^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t, x); \quad i \in \{1, 2\}$ and $t \in [t_m, T]\}$ constitutes a Nash equilibrium solution for the game (2.3)–(2.4) if there exist continuously differentiable functions $V^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}(t, x) : [t_m, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, which satisfy the following conditions:*

$$\begin{aligned} -V_t^{i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}}(t, x) &= \max_{u_i^{\theta_{\alpha_m}^m} \in U^i} \left\{ g^{[i, \theta_{\alpha_m}^m]} [t, x, u_i^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}, \phi_j^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t, x)] e^{-r(t-t_0)} \right. \\ &\quad \left. + V_x^{i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}}(t, x) f [t, x, u_i^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}, \phi_j^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t, x)] \right\}, \\ V^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}(T, x) &= e^{-r(T-t_m)} q^i(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Proof. This result follows readily from the optimality principles in [1, 16].

For ease of exposition and sidestepping the issue of multiple equilibria, we assume that a particular Nash equilibrium is adopted in the entire subgame. In order to formulate the subgame in

the next to last time interval $[t_{m-1}, t_m)$, it is necessary to identify the expected terminal payoffs at time t_m . If $\theta_{\alpha_m}^m$ occurs at time t_m , one can invoke Lemma 2.1 and obtain player i 's payoff at time t_m as $V^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}(t_m, x_m)$. Note that $V^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}(t_m, x_m)$ gives the payoff to player i for playing the subgame in the last interval if $\theta_{\alpha_m}^m$ occurs. Taking mathematical expectation, the expected value to player i for playing the subgame in the last interval payoff can be obtained as

$$\sum_{\alpha=1}^{\eta} \lambda_{\alpha} V^i[\theta_{\alpha}^m]^{(m)}(t_m, x_m). \quad (2.6)$$

The expected terminal payoff of player i , for $i \in \{1, 2\}$, in the subgame over the time interval $[t_{m-1}, t_m]$ can be computed as (2.6) under the assumption that a particular Nash equilibrium is adopted in each of the possible subgame scenarios in the time interval $[t_m, T]$. If $\theta_{\alpha_{m-1}}^{m-1} \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\eta}\}$ occurs at time t_{m-1} , the subgame in the time interval $[t_{m-1}, t_m]$ can be formally set up as

$$\max_{u_i} \left\{ \int_{t_{\tau-1}}^{t_{\tau}} g^{[i, \theta_{\alpha_{m-1}}^{m-1}]} [s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_0)} ds + \sum_{\alpha=1}^{\eta} \lambda_{\alpha} V^i[\theta_{\alpha}^m]^{(m)}(t_m, x(t_m)) \right\}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (2.7)$$

subject to

$$\dot{x}(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s)], \quad x(t_{m-1}) = x_{m-1} \in X. \quad (2.8)$$

Similarly, if $\theta_{\alpha_k}^k \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\eta}\}$ occurs at time t_k , the subgame in the time interval $[t_k, t_{k+1})$ for $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-2\}$ can be set up as

$$\max_{u_i} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} g^{[i, \theta_{\alpha_k}^k]} [s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_0)} ds + \sum_{\alpha=1}^{\eta} \lambda_{\alpha} V^i[\theta_{\alpha}^{k+1}]^{(k+1)}(t_{k+1}, x(t_{k+1})) \right\}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (2.9)$$

subject to

$$\dot{x}(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s)], \quad x(t_k) = x_k \in X. \quad (2.10)$$

Using [11] a feedback solution of game (2.1)–(2.2) can be characterized by the following theorem.

Theorem 2.2. *A set of feedback strategies $\{u_i^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t) = \phi_i^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t, x); \quad u_i^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}(t) = \phi_i^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}(t, x)$, for $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ and $i \in \{1, 2\}\}$ contingent upon the events $\theta_{\alpha_m}^m \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\eta}\}$ and $\theta_{\alpha_k}^k \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\eta}\}$ constitutes a Nash equilibrium solution for the game (2.1)–(2.2) if there exist continuously differentiable functions $V^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}(t, x) : [t_m, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ and $V^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}(t, x) : [t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, which satisfy the following conditions:*

$$\begin{aligned} -V_t^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}(t, x) &= \max_{u_i^{\theta_{\alpha_m}^m} \in U^i} \left\{ g^{[i, \theta_{\alpha_m}^m]} [t, x, u_i^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}, \phi_j^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t, x)] e^{-r(t-t_0)} \right. \\ &\quad \left. + V_x^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}(t, x) f [t, x, u_i^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}, \phi_j^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t, x)] \right\}, \end{aligned}$$

$$V^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}(T, x) = e^{-r(T-t_0)} q^i(x);$$

$$-V_t^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}(t, x) = \max_{u_i^{\theta_{\alpha_k}^k} \in U^i} \left\{ g^{[i, \theta_{\alpha_k}^k]} [t, x, u_i^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}, \phi_j^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}(t, x)] e^{-r(t-t_0)} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + V_x^{i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(t, x) f \left[t, x, u_i^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}, \phi_j^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}(t, x) \right] \Bigg\}, \\
V^{i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(t_{k+1}, x) & = \sum_{\alpha=1}^{\eta} \lambda_{\alpha} V^{i[\theta_{\alpha}^{k+1}]^{(k)}}(t_{k+1}, x), \\
& \text{for } i \in \{1, 2\} \text{ and } k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}.
\end{aligned}$$

Proof. This result follows readily from [1, 16].

Two remarks that will be utilized in subsequent analysis are given below.

Remark 2.3. One can readily verify that

$$\bar{V}^{i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(t_k, x_k) = V^{i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(t_k, x_k) e^{r(t_k - t_0)}$$

is the payoff value function to player i in the game

$$\begin{aligned}
& \max_{u_i} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} g^{[i, \theta_{\alpha_k}^k]}[s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_k)} ds \right. \\
& \left. + e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \sum_{\alpha=1}^{\eta} \lambda_{\alpha} \bar{V}^{i[\theta_{\alpha}^{k+1}]^{(k+1)}}(t_{k+1}, x(t_{k+1})) \right\}, \quad i \in \{1, 2\},
\end{aligned}$$

subject to

$$\dot{x}(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s)], \quad x(t_k) = x_k \in X.$$

Remark 2.4. One can also readily verify that

$$\bar{V}^{i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)\tau}}(\tau, x_{\tau}) = V^{i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(\tau, x_{\tau}) e^{r(\tau-t_0)}, \quad \tau \in [t_k, t_{k+1}),$$

is the payoff value function to player i in the game

$$\begin{aligned}
& \max_{u_i} \left\{ \int_{\tau}^{t_{k+1}} g^{[i, \theta_{\alpha_k}^k]}[s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-\tau)} ds \right. \\
& \left. + e^{-r(t_{k+1}-\tau)} \sum_{\alpha=1}^{\eta} \lambda_{\alpha} \bar{V}^{i[\theta_{\alpha}^{k+1}]^{(k+1)}}(t_{k+1}, x(t_{k+1})) \right\}, \quad i \in \{1, 2\},
\end{aligned}$$

subject to

$$\dot{x}(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s)], \quad x(\tau) = x_{\tau} \in X.$$

3. Cooperation Arrangement

Now consider the case when the players want to cooperate and agree to act and allocate the cooperative payoff according to a set of agreed upon optimality principles. The agreement on how to act cooperatively and allocate cooperative payoff constitutes the solution optimality principle of a cooperative scheme. In particular, the solution optimality principle for the cooperative game (2.1)–(2.2) includes:

- (i) an agreement on a set of cooperative strategies/controls and
- (ii) a mechanism to distribute total payoff between players.

Both group rationality and individual rationality are required in a cooperative plan. Group rationality requires the players to seek a set of cooperative strategies/controls that yields a Pareto optimal solution. The allocation principle has to satisfy individual rationality in the sense that neither player would be worse off than before under cooperation.

3.1. Group rationality

Since payoffs are transferable, group rationality requires the players to maximize their expected joint payoff

$$E_{t_0} \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_{t_0}^{t_1} g^{[j, \theta_0^0]} [s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_0)} ds + \sum_{j=1}^2 q^j (x(T)) \right\},$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \sum_{h=1}^m \sum_{\alpha_h=1}^{\eta} \lambda_{\alpha_h} \int_{t_h}^{t_{h+1}} g^{[j, \theta_{\alpha_h}^h]} [s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_0)} ds + e^{-r(T-t_0)} \sum_{j=1}^2 q^j (x(T)) \Bigg\}, \quad (3.1)$$

subject to (2.2).

We solve the control problem (3.1) and (2.1) in a manner similar to that which we used to solve the game (2.1)–(2.2). Invoking Bellman's technique of dynamic programming, we obtain the conditions characterizing an optimal solution of the problem (2.2)–(3.1) as

Theorem 3.5. *A set of controls $\{u_i^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t) = \psi_i^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t, x); u_i^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}(t) = \psi_i^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}(t, x)$, for $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ and $i \in \{1, 2\}\}$ contingent upon the events $\theta_{\alpha_m}^m$ and $\theta_{\alpha_k}^k$ constitutes an optimal solution for the control problem (3.1)–(2.2) if there exist continuously differentiable functions $W^{[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}}(t, x) : [t_m, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ and $W^{[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(t, x) : [t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ which satisfy the following conditions:*

$$-W_t^{[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}}(t, x) = \max_{u_1^{\theta_{\alpha_m}^m}, u_2^{\theta_{\alpha_m}^m}} \left\{ \sum_{j=1}^2 g^{[j, \theta_{\alpha_m}^m]} [t, x(t), u_1^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}, u_2^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}] e^{-r(t-t_\tau)} + W_x^{[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}}(t, x) f [t, x, u_1^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}, u_2^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}] \right\},$$

$$W^{[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}}(T, x) = e^{-r(T-t_0)} \sum_{j=1}^2 q^j (x);$$

$$-W_t^{[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(t, x) = \max_{u_1^{\theta_{\alpha_k}^k}, u_2^{\theta_{\alpha_k}^k}} \left\{ \sum_{j=1}^2 g^{[j, \theta_{\alpha_k}^k]} [t, x, u_1^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}, u_2^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}] e^{-r(t-t_k)} + W_x^{[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(t, x) f [t, x, u_1^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}, u_2^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}] \right\},$$

$$W^{[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(t_{k+1}, x) = \sum_{\alpha=1}^{\eta} \lambda_{\alpha} W^{[\theta_{\alpha}^{k+1}]^{(k)}}(t_{k+1}, x), \quad \text{for } k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}.$$

Proof. Following the argument in the analysis in Section 2 we obtain $\sum_{\alpha=1}^{\eta} \lambda_{\alpha} W^{[\theta_{\alpha}^{k+1}]^{(k)}}(t_{k+1}, x_{t_{k+1}})$ as the expected terminal value for the control problem in the time interval $[t_k, t_{k+1}]$, for $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Then direct application of the technique of dynamic programming in [16] yields Theorem 3.5.

Hence under cooperation the players will adopt the cooperative strategy $\left[\psi_1^{(h)\theta_{\alpha_h}^h}(t, x), \psi_2^{(h)\theta_{\alpha_h}^h}(t, x) \right]$ in the time interval $[t_h, t_{h+1}]$ if $\theta_{\alpha_h} \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\eta}\}$ occurs at time t_h , for $h \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$. In a cooperative framework, the issue of nonuniqueness of the optimal controls can be resolved by agreement between the players on a particular set of controls. Substitution of the

set of cooperative strategy into (2.2) yields the dynamics of the cooperative state trajectory in the time interval $[t_k, t_{k+1}]$ for $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ as

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= f \left[s, x(s), \psi_1^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}(s, x(s)), \psi_2^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}(s, x(s)) \right], \quad s \in [t_k, t_{k+1}), \\ x(t_k) &= x_k, \end{aligned} \quad (3.2)$$

if $\theta_{\alpha_k}^k \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ occurs at time t_k .

For simplicity in exposition we denote the set of state variables realizable at time t according to (3.2) by X_t^* , and use x_t^* to denote an element in X_t^* that could occur.

Finally, similarly to Remarks 2.3 and 2.4 we have two remarks that will be utilized in the subsequent analysis.

Remark 3.6. One can readily verify that

$$\overline{W}^{[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(t_k, x_k) = W^{[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(t_k, x_k) e^{r(t_k - t_0)}$$

is the maximized value of the control problem

$$\begin{aligned} & \max_{u_1, u_2} E_{t_k} \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} g^{[j, \theta_{\alpha_k}^k]} [s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_k)} ds \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^2 \sum_{h=k+1}^m \sum_{\alpha_h=1}^{\eta} \lambda_{\alpha_h} \int_{t_h}^{t_{h+1}} g^{[j, \theta_{\alpha_h}^h]} [s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_k)} ds + e^{-r(T-t_k)} \sum_{j=1}^2 q^j(x(T)) \right\}, \end{aligned}$$

subject to

$$\dot{x}(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s)], \quad x(t_k) = x_k \in X.$$

Remark 3.7. One can readily verify that

$$\overline{W}^{[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)\tau}}(\tau, x_\tau) = W^{[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}}(\tau, x_\tau) e^{r(\tau - t_0)}, \quad \tau \in [t_k, t_{k+1}),$$

is the maximized value of the control problem

$$\begin{aligned} & \max_{u_1, u_2} E_\tau \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_\tau^{t_{k+1}} g^{[j, \theta_{\alpha_k}^k]} [s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-\tau)} ds \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^2 \sum_{h=k+1}^m \sum_{\alpha_h=1}^{\eta} \lambda_{\alpha_h} \int_{t_h}^{t_{h+1}} g^{[j, \theta_{\alpha_h}^h]} [s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-\tau)} ds + e^{-r(T-\tau)} \sum_{j=1}^2 q^j(x(T)) \right\}, \end{aligned}$$

subject to

$$\dot{x}(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s)], \quad x(\tau) = x_\tau \in X.$$

3.2. Individual rationality

Assume that at time t_0 when the initial state is x_0 , the agreed upon optimality principle assigns a set of imputation vectors contingent upon the events θ_0^0 and $\theta_{\alpha_h}^h$ for $\theta_{\alpha_h} \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ and $h \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$. We use

$$\left[\xi^1[\theta_0^0]^{(0)}(t_0, x_0), \xi^2[\theta_0^0]^{(0)}(t_0, x_0) \right]$$

to denote an imputation vector of the gains in such a way that the share of the i th player over the time interval $[t_0, T]$ is equal to $\xi^i[\theta_0^0]^{(0)t_0}(t_0, x_0)$.

Individual rationality requires that

$$\xi^i[\theta_0^0]^{(0)t_0}(t_0, x_0) \geq V^i[\theta_0^0]^{(0)}(t_0, x_0) \quad \text{for } i \in \{1, 2\}.$$

In a dynamic framework, individual rationality has to be maintained at every instant of time $t \in [t_0, T]$ along the cooperative trajectory. At time t , for $t \in [t_0, t_1)$, if the players are allowed to reconsider their cooperative plan, they will compare their cooperative payoff to their noncooperative payoff at that time. Using the same optimality principle, at time t , for $t \in [t_0, t_1)$, an imputation vector will assign the shares of the players over the time interval $[t, T]$ as $\left[\xi^1[\theta_0^0]^{(0)t}(t, x_t^*), \xi^2[\theta_0^0]^{(0)t}(t, x_t^*) \right]$ (in current value at time t). Individual rationality requires that

$$\xi^i[\theta_0^0]^{(0)t}(t, x_t^*) \geq \bar{V}^i[\theta_0^0]^{(0)t}(t, x_t^*) \quad \text{for } i \in \{1, 2\} \quad \text{and } t \in [t_0, t_1).$$

At time t_h , for $h \in \{1, 2, \dots, \tau\}$, if $\theta_{\alpha_h}^h \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ has occurred and the state is $x_{t_h}^*$, the same optimality principle assigns an imputation vector $\left[\xi^1[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)t_h}(t_h, x_{t_h}^*), \xi^2[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)t_h}(t_h, x_{t_h}^*) \right]$ (in current value at time t_h). Individual rationality is satisfied if

$$\xi^i[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)}(t_h, x_{t_h}^*) \geq \bar{V}^i[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)}(t_h, x_{t_h}^*) \quad \text{for } i \in \{1, 2\}.$$

Using the same optimality principle, at time t , for $t \in [t_k, t_{k+1})$, an imputation vector will assign the shares of the players over the time interval $[t, T]$ as $\left[\xi^1[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)}(t, x_t^*), \xi^2[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)}(t, x_t^*) \right]$ (in terms of current value at time t). Individual rationality requires that

$$\xi^i[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)t}(t, x_t^*) \geq \bar{V}^i[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)t}(t, x_t^*) \quad \text{for } i \in \{1, 2\}, \quad t \in [t_h, t_{h+1}), \quad \text{and } h \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

4. Dynamically Stable Cooperation and Consistent Payment

A stringent requirement for solutions of cooperative differential games is dynamic stability. In particular, the dynamic stability of a solution of a cooperative differential game is the property that, when the game proceeds along an optimal trajectory, at each instant of time the players are guided by the same optimality principles and hence do not have any grounds for deviation from the previously adopted “optimal” behavior throughout the game. In the presence of stochastic elements, subgame consistency is required for a credible cooperative solution. In particular, an extension of the solution policy to a situation with a later starting time and any feasible state brought about by prior optimal behaviors would remain optimal. A dynamically stable solution to the randomly furcating game (2.1)–(2.2) is sought in this section.

4.1. Solution imputation vector

According to the solution optimality principle the players agree to share their cooperative payoff according to the following set of imputation vectors:

$$\begin{aligned} & \left[\xi^1[\theta_0^0]^{(0)}(t_0, x_0), \xi^2[\theta_0^0]^{(0)}(t_0, x_0) \right] \quad \text{at time } t_0, \\ & \left[\xi^1[\theta_0^0]^{(0)t}(t, x_t^*), \xi^2[\theta_0^0]^{(0)t}(t, x_t^*) \right] \quad \text{for } t \in [t_0, t_1), \\ & \left[\xi^1[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)}(t_h, x_{t_h}^*), \xi^2[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)}(t_h, x_{t_h}^*) \right] \quad \text{at time } t_h \\ & \quad \text{for } \theta_{\alpha_h}^h \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\} \quad \text{and } h \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ & \left[\xi^1[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)t}(t, x_t^*), \xi^2[\theta_{\alpha_h}^h]^{(h)t}(t, x_t^*) \right] \\ & \quad \text{for } t \in [t_h, t_{h+1}), \quad \theta_{\alpha_h}^h \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}, \quad \text{and } h \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Since (4.1) is guided by a solution optimality principle group optimality and individual rationality are satisfied.

The solution imputation $\xi^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)\tau}(t, x_t^*)$ may be governed by many specific principles. For instance, the players agree to maximize the sum of their payoffs and equally divide the excess of the cooperative payoff over the noncooperative payoff. This yields the Shapley value imputation. The imputation scheme has to satisfy

Scheme 4.8.

$$\begin{aligned} \xi^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}(t_k, x_{t_k}^*) &= \bar{V}^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}(t_k, x_{t_k}^*) + \frac{1}{2} \left[\bar{W}[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}(t_k, x_{t_k}^*) - \sum_{j=1}^2 \bar{V}^j[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}(t_k, x_{t_k}^*) \right], \\ \xi^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)t}(t, x_t^*) &= \bar{V}^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)t}(t, x_t^*) + \frac{1}{2} \left[\bar{W}[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)t}(t, x_t^*) - \sum_{j=1}^2 \bar{V}^j[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)t}(t, x_t^*) \right] \end{aligned}$$

for $i \in \{1, 2\}$ and $t \in (t_k, t_{k+1})$.

As another example, the solution imputation $\xi^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)\tau}(t, x_t^*)$ may be an allocation principle in which the players allocate the total joint payoff according to the relative sizes of the firms' noncooperative profits. Hence the imputation scheme has to satisfy

Scheme 4.9.

$$\begin{aligned} \xi^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}(t_k, x_{t_k}^*) &= \frac{\bar{V}^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}(t_k, x_{t_k}^*)}{\sum_{j=1}^2 \bar{V}^j[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}(t_k, x_{t_k}^*)} \bar{W}[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)}(t_k, x_{t_k}^*), \\ \xi^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)t}(t, x_t^*) &= \frac{\bar{V}^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)t}(t, x_t^*)}{\sum_{j=1}^2 \bar{V}^j[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)t}(t, x_t^*)} \bar{W}[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)t}(t, x_t^*) \end{aligned}$$

for $i \in \{1, 2\}$ and $t \in (t_k, t_{k+1})$.

Crucial to the analysis is the formulation of a payoff distribution mechanism that would lead to the realization of Condition (4.1). This will be done in the next subsection.

4.2. Dynamically stable payoff distribution procedure

First consider the cooperative subgame in the last time interval, that is, $[t_m, T]$, in which $\theta_{\alpha_m}^m \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ has occurred at time t_m . That is the game

$$\max_{u_1, u_2} \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_{t_m}^T g^{[j, \theta_{\alpha_m}^m]}[s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_m)} ds + e^{-r(T-t_m)} \sum_{j=1}^2 q^j(x(T)) \right\}, \quad (4.2)$$

subject to

$$\dot{x}(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s)], \quad x(t_m) = x_m^*. \quad (4.3)$$

According to (4.1) the players agree to share their cooperative payoff according to the imputation $[\xi^1[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)t_m}(t_m, x_{t_m}^*), \xi^2[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)t_m}(t_m, x_{t_m}^*)]$. Following [14], we formulate a payoff distribution over time so that the agreed imputations can be realized. Let the vectors $[B_1^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(s), B_2^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(s)]$ denote the instantaneous payoff at time $s \in [t_m, T]$ for the cooperative subgame (4.2)–(4.3). In other words, player i , for $i \in \{1, 2\}$, obtains an instantaneous payment $B_i^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(s)$ at time instant s . A terminal value of $q^i(x_T^*)$ is received by player i at time T .

In particular, $B_1^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(s)$ and $q^i(x_T^*)$ constitute a payoff distribution for the subgame in the sense that

$$\begin{aligned} & \xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)t_m}(t_m, x_{t_m}^*) \\ &= \left\{ \left(\int_{t_m}^T B_i^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(s) e^{-r(s-t_m)} ds + e^{-r(T-t_m)} q^i(x_T^*) \right) \middle| x(t_m) = x_{t_m}^* \right\} \quad \text{for } i \in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

As the game proceeds at time t , for $t \in [t_m, T)$, using the same optimality principle, an imputation vector will assign the shares of the players over the time interval $[t, T]$ as $\xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)t}(t, x_t^*)$. For consistency, it is required that

$$\begin{aligned} & \xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)t}(t, x_t^*) \\ &= \left\{ \left(\int_t^T B_i^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(s) e^{-r(s-t)} ds + e^{-r(T-t)} q^i(x_T^*) \right) \middle| x(t) = x_t^* \right\} \quad \text{for } t \in [t_m, T]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

To fulfill group optimality, it is required that

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \xi^j[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)t}(t, x_t^*) = \overline{W}[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)t}(t, x_t^*), \\ & \sum_{j=1}^2 B_j^{[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)t}}(t) = \sum_{j=1}^2 g^{[j, \theta_{\alpha_m}^m]} [t, x_t^*, \psi_1^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t, x_t^*), \psi_2^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(t, x_t^*)] \quad \text{for } t \in [t_m, T]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

If the conditions from (4.4) to (4.2) are satisfied, one can say that the solution imputations are time-consistent in the sense that (4.1) can be realized.

Now we define

$$\begin{aligned} \xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)t_m}(t, x_t^*) &= \left\{ \left(\int_t^T B_i^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(s) e^{-r(s-t_m)} ds + e^{-r(T-t_m)} q^i(x_T^*) \right) \middle| x(t) = x_t^* \right\} \\ & \quad \text{for } t \in [t_m, T] \quad \text{and } i \in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Using (4.4), (4.5), and (4.7), we have

$$\xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)t_m}(t, x_t^*) = e^{-r(t-t_m)} \xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)t}(t, x_t^*) \quad \text{for } t \in [t_m, T]. \quad (4.8)$$

Moreover, we can write

$$\begin{aligned} \xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau}(\tau, x_\tau^*) &= \int_\tau^{\tau+\Delta t} B_i^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(s) e^{-r(s-\tau)} ds + e^{-r(\Delta t)} \xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau+\Delta t}(\tau + \Delta t, x_\tau^* + \Delta x_\tau^*) \\ & \quad \text{for } \tau \in [t_m, T] \quad \text{and } i \in \{1, 2\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

where $\Delta x_\tau^* = f[\tau, x_\tau^*, \psi_1^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(\tau, x_\tau^*), \psi_2^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(\tau, x_\tau^*)] \Delta t + o(\Delta t)$ and $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ as $\Delta t \rightarrow 0$.

From (4.9) we obtain

$$\int_\tau^{\tau+\Delta t} B_i^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(s) e^{-r(s-\tau)} ds = \xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau}(\tau, x_\tau^*) - e^{-r(\Delta t)} \xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau+\Delta t}(\tau + \Delta t, x_\tau^* + \Delta x_\tau^*). \quad (4.10)$$

Invoking (4.8) yields

$$\int_\tau^{\tau+\Delta t} B_i^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(s) e^{-r(s-\tau)} ds = \xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau}(\tau, x_\tau^*) - \xi^i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau}(\tau + \Delta t, x_\tau^* + \Delta x_\tau^*). \quad (4.11)$$

For imputations $\xi^{i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau}}(t, x_t^*)$, for $\tau \in [t_m, T]$ and $t \in [\tau, T]$, which are functions continuously differentiable in t and x_t^* , one can express (4.11), with $\Delta t \rightarrow 0$, as

$$B_i^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(\tau) \Delta t = - \left[\xi_t^{i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau}}(t, x_t^*) \Big|_{t=\tau} \right] \Delta t - \left[\xi_{x_t^*}^{i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau}}(t, x_t^*) \Big|_{t=\tau} \right] \\ \times \left\{ f \left[\tau, x_\tau^*, \psi_1^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(\tau, x_\tau^*), \psi_2^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(\tau, x_\tau^*) \right] \Delta t + o(\Delta t) \right\}. \tag{4.12}$$

Dividing (4.12) throughout by Δt , with $\Delta t \rightarrow 0$, yields

$$B_i^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(\tau) = - \left[\xi_t^{i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau}}(t, x_t^*) \Big|_{t=\tau} \right] \\ - \left[\xi_{x_t^*}^{i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau}}(t, x_t^*) \Big|_{t=\tau} \right] f \left[\tau, x_\tau^*, \psi_1^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(\tau, x_\tau^*), \psi_2^{(m)\theta_{\alpha_m}^m}(\tau, x_\tau^*) \right] \quad \text{for } i \in \{1, 2\}. \tag{4.13}$$

One can repeat the analysis from (4.4) to (4.13) for all $\xi^{i[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)\tau}}(\tau, x_\tau^*)$ each associated with $\theta_{\alpha_m}^m \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ and obtain the corresponding $B_i^{(\theta_{\alpha_m}^m)^m}(\tau)$ for $\tau \in [t_m, T]$.

In order to formulate the cooperative subgame in the next to last time interval $[t_{m-1}, t_m]$, it is necessary to identify the expected terminal payoffs at time t_m . Using Theorem 3.5, one can obtain $W^{[\theta_{\alpha_m}^m]^{(m)}}(t_m, x_m^*)$ if $\theta_{\alpha_m}^m \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ occurs at time t_m . The term $\sum_{\alpha=1}^\eta W^{[\theta_\alpha^m]^{(m)}}(t_m, x_m^*)$ gives the expected joint payoff of the cooperative game over the duration $[t_m, T]$ and hence is the expected terminal joint payoff for the cooperative subgame in the time interval $[t_{m-1}, t_m]$. In a similar manner, the term $\sum_{\alpha=1}^\eta W^{[\theta_\alpha^{k+1}]^{(k+1)}}(t_{k+1}, x_{k+1}^*)$ gives the expected terminal joint payoff for the cooperative subgame in the time interval $[t_k, t_{k+1}]$ for $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. In general, the cooperative subgame in the time interval $[t_k, t_{k+1}]$ if $\theta_{\alpha_k}^k \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ occurs at time t_k for $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ can be expressed as

$$\max_{u_1, u_2} \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} g^{[j, \theta_{\alpha_k}^k]}[s, x(s), u_1(s), u_2(s)] e^{-r(s-t_k)} ds \right. \\ \left. + e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \sum_{j=1}^2 \sum_{\alpha=1}^\eta \overline{W}^{[\theta_\alpha^{k+1}]^{(k+1)}}(t_{k+1}, x(t_{k+1})) \right\}, \tag{4.14}$$

subject to

$$\dot{x}(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s)], \quad x(t_k) = x_k^*. \tag{4.15}$$

One can repeat the analysis from (4.4) to (4.13) for all $\xi^{i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)\tau}}(\tau, x_\tau^*)$ each associated with an $\theta_{\alpha_k}^k \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ for $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ and derive the corresponding $B_i^{(\theta_{\alpha_k}^k)^k}(\tau)$ for $\tau \in [t_k, t_{k+1})$. Hence the theorem below follows.

Theorem 4.10. *If the solution imputations $\xi^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)\tau}(t, x_t^*)$ for $i \in \{1, 2\}$, $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$, $t \in [\tau, t_{k+1}]$, and $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ satisfy group optimality and individual rationality and are differentiable in t and x_t^* , then a payoff distribution procedure with a terminal payment $q^i(x_T^*)$ at time T and an instantaneous payment at time $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$,*

$$B_i^{(\theta_{\alpha_k}^k)^k}(\tau) = - \left[\xi_t^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)\tau}(t, x_t^*) \Big|_{t=\tau} \right] - \left[\xi_{x_t^*}^i[\theta_{\alpha_k}^k]^{(k)\tau}(t, x_t^*) \Big|_{t=\tau} \right] f \left[\tau, x_\tau^*, \psi_1^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}(\tau, x_\tau^*), \psi_2^{(k)\theta_{\alpha_k}^k}(\tau, x_\tau^*) \right],$$

$$i \in \{1, 2\} \quad \text{and} \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}, \quad (4.16)$$

contingent upon $\theta_{\alpha_k}^k \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\eta\}$ that occurred at time t_k , yields a time consistent cooperative solution to the randomly furcating differential game (2.1)–(2.2).

Proof. Theorem 4.10 can be proved by following the analysis from (4.4) to (4.15).

5. Conclusions

This paper considers dynamically stable cooperative solutions in randomly furcating differential games. This new approach widens the application of cooperative differential game theory to problems where future environments are not known with certainty. The analysis presented can be extended in a couple of directions. First the random event Θ^k may take up more complex processes, like a branching process.

The analysis can also be extended to the case where there are stochastic elements in the system. Consider the situation where the state dynamics of the duopoly is characterized by the vector stochastic differential equation

$$dx(s) = f[s, x(s), u_1(s), u_2(s)] ds + \sigma[s, x(s)] dz(s), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.1)$$

where $\sigma[s, x(s)]$ is an $n \times n_1$ matrix and $z(s)$ is an n_1 -dimensional Wiener process.

Since this is the first time that subgame consistent solution is derived for randomly furcating games, further research along this line is expected.

Received February 17, 2006

REFERENCES

1. R. Isaacs, *Differential Games* (Wiley, New York, 1965).
2. L. D. Berkovitz, in *Advances in Game Theory*, Ed. by M. Dresher, L. S. Shapley, and A. W. Tucker (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1964), pp. 127–174.
3. G. Leitmann and G. Mon, *Journal of Astronaut and Science* **14**, 56 (1967).
4. L. S. Pontryagin, *Uspekhi Mat. Nauk* **21**, 219 (1966).
5. N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin, *Positional Differential Games* (Nauka, Moscow, 1974).
6. N. N. Krasovskii, *Control of Dynamical System* (Nauka, Moscow, 1985).
7. Yu. S. Osipov, *Dokl. AN SSSR* **197** (5) (1971).
8. Yu. S. Osipov, *Dokl. AN SSSR* **223** (6) (1975).
9. S. Osipov and A. Kleimenov, in *ICM Millennium Lectures on Games*, Ed. by L. Petrosyan and D. Yeung (Springer-Verlag, Berlin, 2003), pp. 391–396.
10. D. W. K. Yeung, *J. Optim. Theory Appl.* **111** (2), 445 (2001).

-
11. D. W. K. Yeung, in *ICM Millennium Lectures on Games*, Ed. by L. Petrosyan and D. Yeung (Springer-Verlag, Berlin, 2003), pp. 107–126.
 12. A. Haurie, *J. Optim. Theory Appl.* **18**, 31 (1976).
 13. L. A. Petrosyan and N. N. Danilov, *Cooperative Differential Games and Their Applications* (Izd. Tomsk. Univ., Tomsk, 1982).
 14. D. W. K. Yeung and L. Petrosyan, *Cooperative Stochastic Differential Games* (Springer-Verlag, New York, 2006).
 15. D. W. K. Yeung and L. Petrosyan, *J. Optim. Theory Appl.* **120** (3), 651 (2004).
 16. R. Bellman, *Dynamic Programming* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957).

УДК 517.955

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАКСНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧЕ КОШИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹

Н. Н. Субботина, Т. Б. Токманцев

В работе предложен новый вычислительный метод построения функции цены в задаче оптимального управления на минимум позиционного функционала платы вдоль движений системы на фиксированном отрезке времени. Алгоритм основан на попятных конструкциях, использующих обобщение метода характеристик уравнения Беллмана. Получены оценки предлагаемой аппроксимации. Результаты проиллюстрированы на модельном примере.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления системой, динамика которой описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in P, \quad (1.1)$$

где $t \in [0, T]$ — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, управляющий параметр u выбирается из заданного компакта $P \subset \mathbb{R}^m$. Функционал платы имеет вид

$$I_{t_0, x_0}(x(\cdot), u(\cdot)) = \min_{\theta \in [t_0, T]} \left\{ \sigma(\theta, x(\theta; t_0, x_0, u(\cdot))) + \int_{t_0}^{\theta} g(t, x(t), u(t)) dt \right\}, \quad (1.2)$$

где $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)): [t_0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$ — траектория движения динамической системы (1.1), стартовой из начальной точки (t_0, x_0) под воздействием управления $u(\cdot): [t_0, T] \mapsto P$.

Задача состоит в управлении системой (1.1) таким образом, чтобы обеспечить оптимальный результат $V(t_0, x_0)$, который определяется соотношением

$$V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot) \in U_{t_0, T}} I_{t_0, x_0}(x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot)) \quad (1.3)$$

для начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Символом $U_{t_0, T}$ обозначается множество всех допустимых управлений — измеримых функций $u(\cdot): [t_0, T] \mapsto P$, называемых программами.

Задачи такого типа возникают во многих приложениях и теоретических работах [4, 6, 7, 13, 15]. Исследования этих задач опираются на классические результаты теории оптимального управления [2, 5, 8]. Из множества численных методов решения задач динамической оптимизации выделим два основных направления, близких к предлагаемому в данной работе подходу. К первой группе относятся методы, базирующиеся на попятных конструкциях и использующие операторы программного поглощения (см., например, работы [1, 3, 11] и цитируемую в них литературу). Ко второму направлению относятся разработки сеточных методов решения дифференциальных игр и задач оптимального управления, использующие свойство стабильности функции цены (см., например, работы [10, 12, 14] и ссылки в них).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00609) и гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-8512.2006.1).

В данной работе предлагается новый вычислительный метод построения функции цены $V(t, x)$ с помощью понятных конструкций, использующих обобщение метода характеристик уравнения Беллмана.

2. Основные предположения и вспомогательные результаты

Символами Π_T и $\text{cl } \Pi_T$ будут обозначаться полосы в пространстве \mathbb{R}^{n+1} :

$$\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n, \quad \text{cl } \Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Предположим, что исходные данные удовлетворяют следующим условиям.

A1. Функции $f(t, x, u) = \{f_i(t, x, u)\}$ и $g(t, x, u)$ в (1.1), (1.2) определены и непрерывны на $\text{cl } \Pi_T \times P$ вместе со своими частными производными $\partial f_i / \partial t$, $\partial f_i / \partial x_j$, $\partial g / \partial t$, $\partial g / \partial x_j$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, n}$, и липшицевы относительно t и x , т.е.

$$\|f(t', x', u) - f(t'', x'', u)\| \leq L_1(|t' - t''| + \|x' - x''\|),$$

$$|g(t', x', u) - g(t'', x'', u)| \leq L_1(|t' - t''| + \|x' - x''\|),$$

для любых (t', x') , $(t'', x'') \in \text{cl } \Pi_T$, $u \in P$ с константой $L_1 > 0$.

A2. Функция $\sigma(t, x)$ в (1.2) определена и непрерывна на $\text{cl } \Pi_T$ вместе со своими частными производными $\partial \sigma / \partial t$, $\partial \sigma / \partial x_i$, $i \in \overline{1, n}$.

Рассмотрим полные вектограммы скоростей системы:

$$F(t, x) = (f(t, x, P), g(t, x, P)) = \left\{ (f(t, x, u), g(t, x, u)) : u \in P \right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

A3. Для любых $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$, $p \in \mathbb{R}^n$, множества

$$\text{Arg} \min_{(f, g) \in F(t, x)} [\langle p, f \rangle + g] = \left\{ (f^0(t, x, p), g^0(t, x, p)) \right\}$$

состоят из единственного элемента $(f^0(t, x, p), g^0(t, x, p))$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — символ скалярного произведения векторов.

Как известно [15], функция цены $V(t, x)$ в рассматриваемой задаче оптимального управления совпадает с минимаксным решением следующей задачи Коши для уравнения Беллмана

$$\partial V(t, x) / \partial t + \min_{u \in P} \left[\langle D_x V(t, x), f(t, x, u) \rangle + g(t, x, u) \right] = 0, \quad (t, x) \in \Pi_T, \quad (2.1)$$

$$V(T, x) = \sigma(T, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

с дополнительным условием

$$V(t, x) \leq \sigma(t, x), \quad \forall (t, x) \in \text{cl } \Pi_T. \quad (2.2)$$

Здесь

$$D_x V(t, x) = \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_n} \right).$$

Функция $V(t, x)$ является, вообще говоря, негладкой. Нетрудно показать [9], что в любой точке $(t, x) \in \Pi_T$ существует супердифференциал этой функции $\partial_x V(t, x)$, элементами которого являются суперградиенты p , определяемые соотношениями

$$V(t, x + \Delta x) - V(t, x) \leq \langle p, \Delta x \rangle + o(\|\Delta x\|),$$

$$o(\|\Delta x\|) / \|\Delta x\| \rightarrow 0, \quad \text{при } \|\Delta x\| \rightarrow 0,$$

для всех $x + \Delta x$ из некоторой окрестности $O(x)$. Отметим, что в точках дифференцируемости функции $V(t, x)$ супердифференциал $\partial_x V(t, x)$ состоит из единственного элемента — градиента $D_x V(t, x)$.

Отметим, что в нашей задаче, согласно условию А.3, гамильтониан $H(t, x, p)$ определен равенством

$$H(t, x, p) = \min_{u \in P} \left\{ \langle p, f(t, x, u) \rangle + g(t, x, u) \right\} = \langle p, f^0(t, x, p) \rangle + g^0(t, x, p).$$

Из условий А.1, А.3 вытекает, что гамильтониан обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} D_p H(t, x, p) &= f^0(t, x, p), \\ D_x H(t, x, p) &= D_x f^0(t, x, p)^\top \cdot p + D_x g^0(t, x, p), \end{aligned}$$

и функции $f^0(t, x, p)$ и $g^0(t, x, p)$ непрерывны по совокупности аргументов $(t, x, p) \in \text{cl } \Pi_T \times P$ и обладают непрерывными частными производными по t и x . Здесь символ $^\top$ означает транспонирование. Также выполнены условия продолжимости

$$\begin{aligned} \|f^0(t, x, p)\| &\leq K_1(1 + \|x\|), \\ |g^0(t, x, p)| &\leq K_1(1 + \|x\|) \end{aligned} \quad (2.3)$$

при всех $(t, x, p) \in \text{cl } \Pi_T \times \mathbb{R}^n$, где $K_1 = \max_{u \in P} \|f(0, 0_n, u)\| + L_1 T + 1$, $0_n = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Таким образом, при выполнении условий А.1, А.3 существуют классические характеристики уравнения Беллмана (2.1), которые описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = D_{\hat{p}} H(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ \frac{d\hat{p}}{dt} = -D_{\hat{x}} H(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ \frac{d\hat{z}}{dt} = \langle \hat{p}, D_{\hat{p}} H(t, \hat{x}, \hat{p}) \rangle - H(t, \hat{x}, \hat{p}), \end{cases} \quad (2.4)$$

и удовлетворяют при $t = T$ следующим краевым условиям:

$$\hat{x}(T, y) = y, \quad \hat{p}(T, y) = D_y \sigma(T, y), \quad \hat{z}(T, y) = \sigma(T, y),$$

где параметр $y \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления системой (1.1) на отрезке $[t_i, t_j] \subset [0, T]$ на минимум функционала платы

$$J_{t_i, x_i, t_j}(x(\cdot), u(\cdot)) = V\left(t_j, x(t_j; t_i, x_i, u(\cdot))\right) + \int_{t_i}^{t_j} g(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.5)$$

где $V(t_j, x)$ — цена в исходной задаче (1.1), (1.2), $u(\cdot) \in U_{t_i, t_j}$.

Как следует из [4, 9], справедливы следующие утверждения:

Теорема 2.1. *Если в задаче (1.1), (2.5) выполнены условия А.1–А.3, то для любой точки $(t_i, x) \in \Pi_T$ множество экстремалей $x^e(\cdot) = x(\cdot; t_i, x, u^e(\cdot))$ совпадает с множеством $X(t_i, x, t_j)$ компонент $\hat{x}(\cdot, y)$ классических характеристик для уравнения Беллмана, пересекающихся в точке (t_i, x) , т.е.*

$$X(t_i, x, t_j) = \left\{ \hat{x}(\cdot, y) : \hat{x}(t_i, y) = x, \hat{x}(t_j, y) = y \right\}.$$

Множество соответствующих им коэкстремалей $p^e(\cdot)$ совпадает с множеством компонент $\hat{p}(\cdot, y)$ классических характеристик таких, что

$$y \in Y(t_i, x, t_j) = \left\{ y : \hat{x}(t_j, y) = y, \hat{x}(t_i, y) = x \right\}, \quad \hat{p}(t_j, y) \in \partial_y V(t_j, y).$$

Теорема 2.2. Если в задаче (1.1), (2.5) выполнены условия А.1–А.3, то оптимальный результат $V^*(t_i, x_0, t_j)$ управления системой (1.1) на отрезке $[t_i, t_j]$ имеет следующее представление

$$V^*(t_i, x_0, t_j) = \inf_{y_0, p_0} \left[V(t_j, y_0) + \int_{t_i}^{t_j} g^0(\tau, \hat{x}(\tau; t_j, y_0), \hat{p}(\tau; t_j, p_0)) d\tau \right],$$

где

$$y_0 \in Y(t_i, x_0, t_j), \quad p_0 = \hat{p}(t_j, y_0) \in \partial_y V(t_j, y_0).$$

3. Описание алгоритма

Предлагаемый алгоритм построения аппроксимации $\tilde{V}(t, x)$ функции цены задачи (1.1), (1.2) опирается на приведенные выше теоремы 2.1 и 2.2.

Рассмотрим разбиение $\Gamma_N = \{t_0, t_1, \dots, t_N = T\}$ отрезка времени $[t_0, T]$ с шагом Δt . В момент $t = t_N$ рассмотрим прямоугольную область $D \subset \mathbb{R}^n$ в фазовом пространстве и зададим на ней равномерную сетку $Q_N = \{y^j, j = (j_1, \dots, j_n)\}$, с шагом Δy . В дальнейшем эта сетка будет меняться согласно предлагаемому алгоритму. При этом узлы сетки будут точками на траекториях характеристической системы. Обозначим через Q_i сетку в момент $t = t_i$. Из предположения А.1 и (2.3) вытекает, что точки всех сеток Q_i содержатся в компактном множестве $D_T = \exp(L_1 T) \cdot D$. Кроме того, в каждый момент $t = t_i$ формируется массив краевых условий для характеристической системы: $R_i = \{(y^j, p^j, \tilde{V}(t_i, y^j)) : y^j \in Q_i, p^j \in \partial_y \tilde{V}(t_i, y^j)\}$.

Характеристику, определенную на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ и удовлетворяющую краевым условиям

$$\hat{x}^j(t_{i+1}) = y^j \in Q_{i+1}, \quad \hat{p}^j(t_{i+1}) = p^j \in \partial_y \tilde{V}(t_i, y^j), \quad \hat{z}^j(t_{i+1}) = \tilde{V}(t_{i+1}, y^j),$$

обозначим $(\hat{x}^j(\cdot), \hat{p}^j(\cdot), \hat{z}^j(\cdot))$, а ее значение при $t = t_i$ обозначим символом $(\hat{x}_i^j, \hat{p}_i^j, \hat{z}_i^j)$.

На отрезках времени $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in \overline{0, N-1}$, будем интегрировать характеристику в обратном времени и на характеристиках рекуррентно вычислять функцию $\tilde{V}(t_i, x)$.

В момент $t = t_N$ аппроксимация цены $\tilde{V}(t_N, \hat{x}_N^j) = \sigma(t_N, \hat{x}_N^j) = \hat{z}^j(t_N)$. Для моментов времени t_i , $i \in \overline{0, N-1}$, функцию $\tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^j)$ определяем как минимум значения функции $\sigma(t_i, \hat{x}_i^j)$ и значения характеристики \hat{z}_i^j . Если в точке $(t_i, \hat{x}_i^{j_0})$ пересекаются несколько характеристик, т.е. $x_i^{j_0} = x_i^{j_1}$, $j_0 \neq j_1$, то при вычислении аппроксимации $\tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^{j_0})$ должны учитываться все такие характеристики. Более того, поскольку при реализации вычислительной схемы характеристики строятся с погрешностью, то при вычислении этой аппроксимации учитываются все характеристики, концы \hat{x}_i^j которых в момент $t = t_i$ лежат в некоторой ρ -окрестности точки $\hat{x}_i^{j_0}$ ($\rho > 0$ — параметр аппроксимации). Аппроксимация функции цены, согласно теоремам 2.1 и 2.2, имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^{j_0}) &= \min \left\{ \sigma(t_i, \hat{x}_i^{j_0}), \min_{j: \|\hat{x}_i^j - \hat{x}_i^{j_0}\| \leq \rho} \hat{z}_i^j \right\} \\ &= \min_{j: \|\hat{x}_i^j - \hat{x}_i^{j_0}\| \leq \rho} \left\{ \sigma(t_i, \hat{x}_i^j), \tilde{V}(t_{i+1}, \hat{x}_{i+1}^j) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g^0(\tau, \hat{x}^j(\tau), \hat{p}^j(\tau)) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Значения $\tilde{V}(t, \hat{x})$, вычисленные при $t = t_i$, определяют новые краевые условия $\hat{z}^j(t_i) = \tilde{V}(t_i, \hat{x}^j(t_i))$ при интегрировании характеристической системы на отрезке времени $[t_{i-1}, t_i]$.

Для того, чтобы сформировать полный массив краевых условий R_i для интегрирования характеристической системы на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, нужно построить супердифференциалы $\partial_y V(t_i, y^j)$, $y^j \in Q_i$. Затем, выбрав на них сетки $\hat{p}_k(t_i, y^j) \in \partial_y V(t_i, y^j)$, $k = 1, \dots, K^j$, с шагом,

не превосходящим заданного параметра $\Delta\rho$, используем их узлы в качестве краевых условий для импульсной компоненты.

Отметим, что число точек сетки K^j является величиной равномерно ограниченной. Этот факт следует из того, что функция оптимального результата является липшицевой при сделанных выше предположениях (см. [4, 9]).

Для численного построения супердифференциалов рассмотрим следующие ситуации. Если $\tilde{V}(\cdot)$ совпадает с $\sigma(\cdot)$ в некоторой окрестности точки $(t_i, \hat{x}_i^{j_0})$ (что можно проверить по соседним узлам), то $\partial_x \tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^{j_0}) = \{D_x \sigma(t_i, \hat{x}_i^{j_0})\}$. Если же в точке $(t_i, \hat{x}_i^{j_0})$ график функции $\sigma(\cdot)$ касается графика функции $\tilde{V}(\cdot)$, то в качестве аппроксимации супердифференциала функции $\tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^{j_0})$ рассмотрим множество

$$\partial_x \tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^{j_0}) = \text{co} \left\{ D_x \sigma(t_i, \hat{x}_i^{j_0}), \bigcup_{j: \|\hat{x}_i^j - \hat{x}_i^{j_0}\| \leq \rho} \hat{p}^j(t_i) \right\},$$

где символ "co" означает выпуклую оболочку.

4. Оценка

Рассмотрим отрезок времени $[t_i, t_{i+1}]$. Для каждой точки $y^j \in Q_{i+1}$ вычислим характеристику методом Эйлера. Обозначим символами: $\tilde{V}(t, x)$ — аппроксимацию функции цены при точно вычисляемых характеристиках, $\tilde{V}_\Delta(t, x)$ — аппроксимацию функции цены при характеристиках, вычисляемых методом Эйлера, $(\bar{x}_i^j, \bar{p}_i^j, \bar{z}_i^j)$ — точку характеристики, вычисленной методом Эйлера, в момент $t = t_i$. Пусть в момент $t = t_N$ из точки (y^j, p^j, z^j) , $(y^j, p^j, z^j) \in R_N$, выпущено две характеристики — точная и приближенная, вычисленная методом Эйлера. Расхождение между $\hat{x}(\cdot; t_N, y^j)$ и $\bar{x}(\cdot; t_N, y^j)$ на отрезке $[0, T]$ можно оценить как

$$\|\hat{x}(t; t_N, y^j) - \bar{x}(t; t_N, y^j)\| \leq TK_1 \Delta t + \omega(F \Delta t), \quad t \in [0, T],$$

где $\omega(\cdot)$ — модуль непрерывности функций $f^0(t, x, \cdot)$, $g^0(t, x, \cdot)$ по p , т.е.

$$\omega(\Delta) = \sup_{|p_1 - p_2| \leq \Delta, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n} \left\{ \|f^0(t, x, p_1) - f^0(t, x, p_2)\|, |g^0(t, x, p_1) - g^0(t, x, p_2)| \right\};$$

$$F = \max_{(t, x, u) \in [0, T] \times D_T \times P} \|f(t, x, u)\|.$$

Полагаем

$$L_2 = \max_{(t, x) \in [0, T] \times D_T} \|D_x \sigma(t, x)\|,$$

где

$$D_x \sigma(t, x) = \left(\frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x_n} \right).$$

Оценим погрешность аппроксимации функции цены $\tilde{V}_\Delta(t, x)$ в точке (t_i, \bar{x}_i^j) :

$$|\tilde{V}_\Delta(t_i, \bar{x}_i^j) - V(t_i, \bar{x}_i^j)| \leq |\tilde{V}_\Delta(t_i, \bar{x}_i^j) - \tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^j)| + |\tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^j) - V(t_i, \hat{x}_i^j)| + |V(t_i, \hat{x}_i^j) - V(t_i, \bar{x}_i^j)|.$$

Первое слагаемое в правой части неравенства можно оценить, используя липшицевость на множестве $[0, T] \times D_T$ функций $\sigma(\cdot)$ и $g^0(\cdot)$ с константами L_2 и L_1 соответственно:

$$\begin{aligned} |\tilde{V}_\Delta(t_i, \bar{x}_i^j) - \tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^j)| &\leq L_2 \|\bar{x}_i^j - \hat{x}_i^j\| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| g^0(t_{i+1}, \bar{x}(t_{i+1}), \bar{p}(t_{i+1})) \right. \\ &\quad \left. - g^0(\tau, \hat{x}(\tau), \bar{p}(t_{i+1})) \right| d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| g^0(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{p}(t_{i+1})) - g^0(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{p}(\tau)) \right| d\tau \\ &\leq (L_2 + L_1 \Delta t)(TK_1 \Delta t + \omega(F \Delta t)) + \Delta t \omega(F \Delta t). \end{aligned}$$

Отметим, что согласно алгоритму $\hat{p}(t_{i+1}) = \bar{p}(t_{i+1})$.

Второе слагаемое можно оценить, используя принцип оптимальности, подлинейный рост функций $f^0(\cdot, p)$ и $g^0(\cdot, p)$ (см. (2.3)) и локальную липшицевость функции $\sigma(\cdot)$:

$$|\tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^j) - V(t_i, \hat{x}_i^j)| \leq \Delta t \left[L_2 \omega(F \Delta t) (1 + L_2 \Delta t e^{L_2 \Delta t}) (1 + \Delta t) + (L_2 + K_1(1 + L_2)(1 + M)) \right],$$

где

$$M = \max_{i=1, \dots, N-1} \left\{ \max_{\hat{x}_{i+1}^j \in Q_{i+1}} (\|\hat{x}_{i+1}^j\| + K_1 \Delta t) (1 + K_1 \Delta t e^{K_1 \Delta t}) \right\}.$$

Поскольку функция цены локально липшицева, то для третьего слагаемого получаем оценку

$$V(t_i, \hat{x}_i^j) - V(t_i, \bar{x}_i^j) \leq L_V (TK_1 \Delta t + \omega(F \Delta t)),$$

где $L_V = (L_2 + 2TL_1)(1 + 2TL_1 e^{2TL_1}) + 1$ — константа Липшица функции цены на рассматриваемом компакте $[0, T] \times D_T$.

Таким образом, окончательная оценка имеет вид

$$|\tilde{V}_\Delta(t_i, \bar{x}_i^j) - V(t_i, \bar{x}_i^j)| \leq C_1 \Delta t + C_2 \omega(F \Delta t),$$

где константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ определяются равенствами

$$C_1 = \left[L_2 + (L_2 + 2TL_1)(1 + 2TL_1 e^{2TL_1}) + 1 \right] TK_1 + L_2 + K_1(1 + L_2)(1 + M) + 1,$$

$$C_2 = L_2 + L_V = L_2 + \left[(L_2 + 2TL_1)(1 + 2TL_1 e^{2TL_1}) + 1 \right] + 1.$$

5. Пример

Работа алгоритма была апробирована в следующем модельном примере.

Динамика управляемой системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = u, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, 2].$$

Функционал платы имеет вид

$$I_{t_0, x_0}(x(\cdot), u(\cdot)) = \min_{\theta \in [t_0, 2]} \left\{ -\frac{(x(\theta) + \theta - 2)^2}{2} - 3\theta(2 - \theta) - \int_{t_0}^{\theta} \sqrt{1 - u^2(t)} dt \right\}.$$

Параметры аппроксимации $\rho = 10^{-5}$, $\Delta x = 0.002$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta p = 0.02$. Результат работы алгоритма представлен на рисунке. Отметим, что функция цены в этом примере является негладкой. Она недифференцируема на множестве

$$\left\{ (t, x) \in [0, 1) \times \mathbb{R} : x = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}(t - 2) + y, \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}(t - 2) - \frac{y^2}{2} = -\frac{(x - 2 + t)^2}{2} - 3t(2 - t) \right\},$$

где $y \in \mathbb{R}$ — параметр.

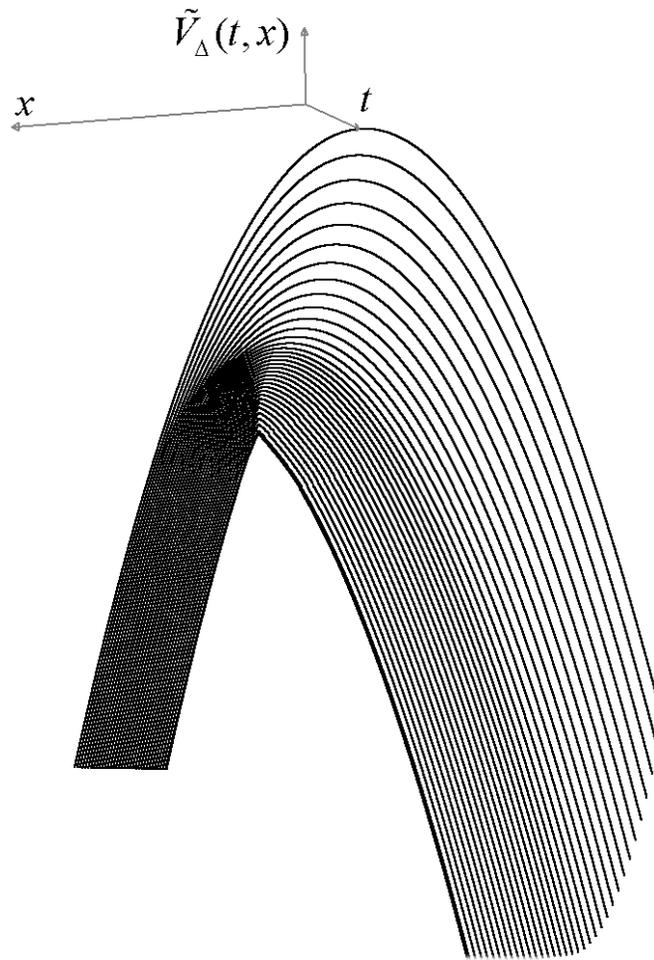


Рис. 1. График функции цены.

Поступила 14.01.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И. Субботина, В.С. Пацко. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984. 296 с.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
3. Камзолкин Д.В. Численный метод приближенного вычисления функции цены для задачи оптимального управления с терминальным функционалом // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. Т. 5, № 2. С. 121-132.
4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
6. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
7. Осипов Ю.С. Задачи теории дифференциально-разностных игр / Диссертация на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук: Ленинградский гос. университет им. А.А. Жданова, 1971.
8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 392 с.
9. Субботина Н.Н. Метод характеристик для уравнений Гамильтона—Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Современная математика и ее приложения. Т. 20 "Дифференциальные уравнения". Тбилиси: Академия Наук Грузии, Институт кибернетики, 2004. 132 с.
10. Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Аппроксимационные операторы и конечно-разностные схемы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби // Известия РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173-185.
11. Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. О приближенном построении решений в игровых задачах управления // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 3. С. 413-421.

12. **Bardi M., Falcone M., Soravia P.** Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions // Stochastic and differential games: theory and numerical methods (M. Bardi, T. Parthasarathy and T.E.S. Raghavan eds.). Annals of the ISDG. Boston: Birkhäuser, 1999. No. 4. P. 289-303.
13. **Melikyan A.A.** Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998. 310 p.
14. **Souganidis P.** Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton—Jacobi equations // J. Diff. Eqns. 1985. Vol. 59. P. 1-43.
15. **Subbotin A.I.** Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspectives. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.

УДК 517.972.8

НЕСЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В АБСТРАКТНЫХ ЗАДАЧАХ О ДОСТИЖИМОСТИ¹

А. Г. Ченцов

Рассматривается задача о построении множеств притяжения в топологическом пространстве при условии, что выбор асимптотической версии решения стеснен ограничениями в виде непустого семейства множеств. Последние должны содержать (каждое) “почти всё” решение (в случае использования решений-последовательностей это означает, что с некоторого номера все элементы последовательности должны быть точками соответствующего множества). В работе исследуются вопросы структуры множества притяжения. Рассматривается зависимость множеств притяжения от топологии и семейства, задающего “асимптотические” ограничения. Исследуются некоторые вопросы, связанные с применением компактификации Стоун-Чеха и расширения Волмэна.

1. Краткое введение

Рассматривается задача о выборе варианта асимптотического поведения при наличии ограничений. Последние также имеют асимптотический характер и могут быть, в частности, связаны с релаксациями экстремальных задач и задач о построении тех или иных множеств достижимости и пучков траекторий управляемых систем; см. [1–3].

В связи с общими конструкциями расширений задач теории управления отметим сейчас построения [3, гл. III, IV], где введены классы точных, приближенных и обобщенных управлений. Подход, развиваемый далее (см. также [4–7]), допускает естественные аналогии с [3]. Отметим также работы [8–10], где, в частности, конструкции, имеющие (объективно) смысл расширений, использовали элементы выпуклого анализа и теории двойственности. В связи с обобщенными задачами управления, реализующими расширения исходных содержательных задач, отметим [1, 3, 11].

Элементы теории расширений широко использовались в работах Н.Н. Красовского и его школы как при построении решений классических задач теории (программного) управления, так и при решении дифференциальных игр; см. [1, 2, 12–14]. В определении фундаментального свойства стабильности (множеств) Н.Н. Красовского предусматривалось использование обобщенной реакции на “обычное” и, более того, постоянное управление игрока-противника. Наряду с правилом экстремального сдвига, это сыграло важную роль в установлении основополагающей теоремы об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина, которая определила существование и структуру решения нелинейной дифференциальной игры. Эта теорема послужила основой многих исследований в области решения игровых задач динамики. В работах Ю.С. Осипова были получены условия альтернативной разрешимости дифференциально-разностных игр, установлена структура решения дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами, в системах с последействием; см. [15, 16].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-01-00414, 04-01-96093).

2. Содержательное обсуждение задачи

Фиксируем непустые множества E (пространство решений) и \mathbf{H} (пространство оценок), а также оператор

$$\mathbf{h} : E \longrightarrow \mathbf{H}, \quad (2.1)$$

именуемый целевым. Если E_0 — подмножество (п/м) множества E , формирующее ограничение $e \in E_0$ на выбор решения e , то множество-образ $\mathbf{h}^1(E_0) \triangleq \{\mathbf{h}(x) : x \in E_0\}$ (здесь и ниже \triangleq — равенство по определению) играет роль абстрактного аналога области достижимости (ОД) в теории управления; см. [1–3]. Сама задача о построении ОД может рассматриваться в виде конкретной версии последующей общей постановки. Ослабление ограничений — замена E_0 каким-либо множеством \tilde{E}_0 , $E_0 \subset \tilde{E}_0 \subset E$, — используется для изучения особенностей данной задачи как в ее конкретной (связанной с исследованием “обычной” ОД), так и в абстрактной версиях. Правда, непосредственный выбор \tilde{E}_0 нередко осуществить затруднительно, зато понятен бывает тип таких множеств; по этой причине зачастую удается указать непустое семейство \mathcal{E} п/м E , составленное из множеств \tilde{E}_0 упомянутого типа. Обычно предполагается, что пересечение всех множеств из \mathcal{E} совпадает с E_0 .

Семейство \mathcal{E} также можно использовать в виде своеобразного ограничения. При этом, правда, решение — точка E — заменяется тем или иным вариантом асимптотического поведения. Простейшим и, в основном, согласующимся с [3, гл. III, IV] вариантом можно считать секвенциальное приближенное решение (ПР) в виде последовательности $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ в множестве E со свойством: при всяком выборе $U \in \mathcal{E}$ $e_j \in U$ для почти всех $j \in \mathcal{N}$, где (здесь и ниже) $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$. Это свойство будем рассматривать как соблюдение \mathcal{E} -ограничения. При этом реализуется своеобразный “результат” в виде последовательности $(\mathbf{h}(e_i))_{i=1}^{\infty}$ обычных оценок. При оснащении \mathbf{H} топологией можно ожидать (и добиваться подбором топологии) сходимости этой последовательности, а возникающий при этом предел рассматривать как элемент притяжения (ЭП). С учетом соотношений между E_0 и \mathcal{E} имеем свойство: все точки $\mathbf{h}^1(E_0)$ суть ЭП. Последних, однако, может оказаться намного больше.

Пример. Рассмотрим следующую управляемую систему

$$\dot{x}_1 = |x_2| + u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2 \quad (2.2)$$

на промежутке времени $[0, 1]$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Пару (u_1, u_2) рассматриваем как управляющий вектор; при этом $u_1 \in [0, 1]$, $|u_2| = 1$. Сами управления формируются как программы

$$U : [0, 1[\longrightarrow P, \quad P \triangleq [0, 1] \times (\{-1\} \cup \{+1\});$$

полагаем, что используемые программы U — суть кусочно-постоянные и непрерывные справа вектор-функции. Через \mathcal{U} обозначаем сейчас множество всех управляющих программ U вышеупомянутого типа. Каждой из программ $U \in \mathcal{U}$ отвечает единственная траектория φ_U системы (2.2) с нулевыми начальными условиями; φ_U — непрерывная функция из $[0, 1]$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (здесь и ниже \mathbb{R} — вещественная прямая) с компонентами $\varphi_{U,1}$ и $\varphi_{U,2}$, причем

$$\varphi_{U,2}(t) = \int_0^t U_2(\tau) d\tau, \quad \varphi_{U,1}(t) = \int_0^t |\varphi_{U,2}(\tau)| d\tau + \int_0^t U_1(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

где $t \in [0, 1]$. Имеется одно промежуточное условие: требуется, чтобы

$$\varphi_{U,1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0.$$

Этому условию отвечает множество \mathcal{U}_∂ всех допустимых (т.е. удовлетворяющих данному неравенству) управлений из \mathcal{U} . Множество

$$G_\partial \triangleq \{\varphi_U(1) : U \in \mathcal{U}_\partial\} \quad (2.4)$$

есть ОД системы (2.2) в момент $t = 1$ при вышеупомянутых ограничениях на выбор управления-программы. Из (2.3), (2.4) следует, что $\mathcal{U}_\partial = \emptyset$ и $G_\partial = \emptyset$. Обратимся к ЭП, допуская ослабление промежуточного условия до неравенств

$$\varphi_{U,1} \left(\frac{1}{2} \right) \leq \varepsilon, \quad (2.5)$$

где $\varepsilon \in]0, \infty[$ может изменяться. С (2.5) мы связываем множество $\mathcal{U}_\partial[\varepsilon]$ всех $U \in \mathcal{U}$ таких, что выполнено (2.5). Каждое неравенство (2.5) реализуется быстро осциллирующей на промежутке $[0, 1/2[$ компонентой U_2 управления $U \in \mathcal{U}$ (компонента U_1 должна быть “выключена” на данном промежутке). Мы получаем тогда возможность формировать $U(t) \in P$ на $[1/2, 1[$ как угодно, что уже не влияет на соблюдение (2.5). Следуя намеченному плану, будем использовать сейчас последовательности $(U_j)_{j=1}^\infty$ в \mathcal{U} со свойствами:

(1) при каждом $\varepsilon > 0$ (2.5) выполняется при $U = U_j$ для почти всех $j \in \mathcal{N}$;

(2) последовательность $(\varphi_{U_j}(1))_{j=1}^\infty$ сходится к некоторой точке $z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в обычной топологии покоординатной сходимости.

Получаемые таким образом точки z являются ЭП в смысле общих соглашений, предшествующих примеру. При этом следует полагать $E = \mathcal{U}$, $\mathbf{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbf{h}(U) = \varphi_U(1)$ при $U \in \mathcal{U}$, $E_0 = \mathcal{U}_\partial$, $\mathcal{E} = \{\mathcal{U}_\partial[\varepsilon] : \varepsilon \in]0, \infty[\}$; при оснащении \mathbf{H} используется топология покоординатной сходимости. Сейчас мы укажем достаточно массивное множество ЭП, определяя последние в терминах действия (обобщенных) управлений из $[0, 1[$ в множество $\tilde{P} \triangleq [0, 1] \times [-1, 1]$, зануляющихся на $[0, 1/2[$ и постоянных на $[1/2, 1[$. Итак, если $w \in \tilde{P}$, $w = (w_1, w_2)$, то определяем непрерывную функцию $\tilde{\varphi}[w]$ из $[0, 1]$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с компонентами $\tilde{\varphi}_1[w]$ и $\tilde{\varphi}_2[w]$ по следующему правилу. Именно, при $t \in [0, 1]$

$$\tilde{\varphi}[w](t) = (\tilde{\varphi}_1[w](t), \tilde{\varphi}_2[w](t));$$

для $t \leq 1/2$ $\tilde{\varphi}_1[w](t) = \tilde{\varphi}_2[w](t) = 0$, а при $t \geq 1/2$

$$\tilde{\varphi}_2[w](t) = \left(t - \frac{1}{2} \right) w_2, \quad \tilde{\varphi}_1[w](t) = \int_{\frac{1}{2}}^t |\tilde{\varphi}_2[w](\tau)| d\tau + \left(t - \frac{1}{2} \right) w_1. \quad (2.6)$$

Ясно, что $\tilde{\varphi}[w]$ есть траектория системы (2.2) при действии управляющей вектор-функции (со значениями в \tilde{P}) вышеупомянутой структуры. Легко видеть также, что при любом выборе $w = (w_1, w_2) \in \tilde{P}$ вектор $\tilde{\varphi}[w](1)$ есть ЭП; см. в этой связи [3, гл. IV]. При этом (см. (2.6))

$$\tilde{\varphi}_1[w](1) = |w_2| \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) dt + \frac{w_1}{2} = \frac{w_1}{2} + \frac{|w_2|}{8}, \quad \tilde{\varphi}_2[w](1) = \frac{w_2}{2}. \quad (2.7)$$

Перебирая $w \in \tilde{P}$, мы получаем на основе (2.7) множество ЭП, имеющее внутренние точки. Такой точкой является, в частности, следующая:

$$z \triangleq \left(\frac{1}{4}, 0 \right) = \tilde{\varphi}[w](1)$$

при $w_1 = 1/2$ и $w_2 = 0$. В самом деле, пусть $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и при этом

$$|\tilde{z}_1 - z_1| < \frac{1}{8}, \quad |\tilde{z}_2 - z_2| < \frac{1}{8},$$

где $z_1 = 1/4$ и $z_2 = 0$. Тогда полагаем $\tilde{w}_2 \triangleq 2\tilde{z}_2$; при этом $|\tilde{w}_2| < 1/4$,

$$\tilde{w}_1 \triangleq 2 \left(\tilde{z}_1 - \frac{|\tilde{w}_2|}{8} \right) = 2 \left(\tilde{z}_1 - \frac{|\tilde{z}_2|}{4} \right) \leq 2\tilde{z}_1 < 2 \left(z_1 + \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{4} < 1.$$

С другой стороны, $|\tilde{z}_2| < 1/8$, а потому

$$\tilde{w}_1 > 2 \left(\tilde{z}_1 - \frac{1}{32} \right) > 2 \left(\left(z_1 - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{32} \right) = \frac{3}{16} > 0.$$

Стало быть, $\tilde{w} \triangleq (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \in \tilde{P}$, причем

$$\tilde{\varphi}_1[\tilde{w}](1) = \tilde{z}_1 - \frac{|\tilde{w}_2|}{8} + \frac{|\tilde{w}_2|}{8} = \tilde{z}_1, \quad \tilde{\varphi}_2[\tilde{w}](1) = \frac{\tilde{w}_2}{2} = \tilde{z}_2.$$

Итак, $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \tilde{\varphi}[\tilde{w}](1)$ есть ЭП. Поскольку выбор \tilde{z} был произвольным, установлено, что окрестность

$$\left] z_1 - \frac{1}{8}, z_1 + \frac{1}{8} \left[\times \left] -\frac{1}{8}, \frac{1}{8} \left[\right.$$

точки z состоит только из ЭП. Итак, “одномерное” возмущение ограничений приводит к реализации плоского “нароста” ОД, состоящего из ЭП. В данном примере все ЭП допускают реализацию в классе секвенциальных ПР, аналогичных в идейном отношении ПР в [3, гл. III]; в этой связи см. раздел 4 в [4].

Несколько позднее (после соответствующих определений) будет приведен пример ситуации, в которой секвенциальные ПР не формируют ни одного ЭП. В то же время (в упомянутом примере) ЭП существуют, но реализуются при использовании более изощренных вариантов асимптотического поведения. В связи с уже рассмотренным примером отметим примеры в [5, гл. 1], [6, гл. 1,2], [7, гл. 1], а также содержательное обсуждение в [3, гл. III]. Кроме того, см. [8–10], где рассматривались подобные явления в задачах вариационного исчисления и математического программирования. Объективно здесь возникает неустойчивость (даже по результату) при ослаблении ограничений, которая, однако, полезна в том смысле, что возникающие скачки результата (см. пример) приводят к фактическому расширению наших возможностей. Следует только выяснить эти новые возможности, что традиционно осуществлялось методами теории расширений (см., в частности, [3, гл. III], [11]).

В некоторых работах по теории расширений (см., например, [9,10]) отмечалась недостаточность в ряде случаев секвенциального подхода к построению ПР; в серии замечаний предлагалось использовать в этом (по существу) качестве направленности в множестве E . Подобный шаг был сделан в общей топологии (теорема Биркгофа о представлении замыкания; см. [17–19] и др.). Полезно отметить, что и сам термин расширение (компактификация) широко использовался в топологии; см. [17–22]. Среди наиболее употребительных конструкций такого рода особо отметим компактификацию Стоуна-Чеха и расширение Волмэна; см., например, [18,22]. Характерным явлением в этих построениях являются т.н. наросты; так, например, во многих работах рассматривался нарост $\beta(\mathcal{N}) \setminus \mathcal{N}$, отвечающий стоун-чеховскому расширению \mathcal{N} ; см. [22, с. 83] и библиографию [22].

Если обратиться к вышеупомянутому примеру задачи управления, то возникающее там множество ЭП также можно интерпретировать как нарост ОД. Далее будут отмечены и другие аналогии расширений в общей топологии и расширений в задачах управления. Эти аналогии более заметны, если ориентироваться в прикладных исследованиях на задачи о достижимости (подобные примеру), хотя те же самые эффекты проявляются и в экстремальных задачах (см. [3, гл. III], [8–10]). Данные аналогии становятся еще более ощутимыми, если не ограничиваться секвенциальными ПР. Полезно упомянуть в этой связи об известном положении общей топологии: замыкание не реализуется, вообще говоря, в виде множества пределов

последовательностей. То же самое можно сказать и в отношении ЭП в топологических пространствах (ТП) общего вида. Между тем потребность в использовании таких ТП возникает в некоторых приложениях. В частности, можно отметить некоторые задачи управления с импульсными ограничениями при использовании естественных для этого круга задач аппроксимативных конструкций; в этой связи отметим сейчас только работу [23], где рассматривались асимптотические аналоги одноимпульсного режима управления. Опуская сейчас обсуждение соответствующих аналогий в “чистой” математике, отметим в связи со сказанным выше целесообразность построения общей теории несеквенциальных ЭП и множеств таких ЭП, именуемых далее множествами притяжения (МП), с привлечением топологических методов, включая теорию расширений ТП.

3. Общие конструкции

Мы будем рассматривать весьма общие задачи асимптотического анализа, что требует соответствующей формализации, включающей моменты теоретико-множественного характера. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x — какой-либо объект, то через $\{x\}$ обозначаем одноточечное множество (синглетон), содержащее x . Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X ; пусть $\text{Fin}(X)$ — семейство всех непустых конечных п/м X . Через B^A обозначаем множество всех отображений из множества A в множество B . Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то через $f^1(C)$ обозначаем образ множества C при действии f , а через $(f|C)$ — сужение f на множество C : $(f|C) \in B^C$ и при этом $(f|C)(x) \triangleq f(x) \quad \forall x \in C$. Мы используем традиционное понятие образа семейства; см., например, [24, гл. I]. Именно, для всяких множеств A и B , функции $f \in B^A$ и семейства $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ полагаем, что

$$f^1[\mathcal{C}] \triangleq \{f^1(C) : C \in \mathcal{C}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B)),$$

получая образ семейства \mathcal{C} . Если \mathcal{X} — семейство, а Y — множество, то через $\mathcal{X}|_Y$ обозначаем семейство всех множеств-пересечений $X \cap Y$, $X \in \mathcal{X}$.

Сведения из топологии. Если (X, τ) — ТП и $A \in \mathcal{P}(X)$, то через $\text{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание A в (X, τ) ; ТП $(A, \tau|_A)$ есть подпространство ТП (X, τ) . Через $C(X, \tau_1, Y, \tau_2)$ обозначаем множество всех (τ_1, τ_2) -непрерывных функций из Y^X , где τ_1 и τ_2 — топологии X и Y соответственно. Если (X, τ) — ТП и $x \in X$, то через $N_\tau(x)$ обозначаем семейство всех окрестностей [24, гл. I, §2] точки x в (X, τ) . Компактное [18, гл. 3] хаусдорфово ТП именуется компактом. Если (X, τ) — ТП, то через $(\tau\text{-comp})[X]$ обозначаем семейство всех компактных в (X, τ) п/м множества X , а через $(\tau\text{-comp})^0[X]$ — семейство всех множеств $S \in \mathcal{P}(X)$ таких, что $\exists K \in (\tau\text{-comp})[X] : S \subset K$; в случае хаусдорфова ТП (X, τ)

$$(\tau\text{-comp})^0[X] = \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \text{cl}(H, \tau) \in (\tau\text{-comp})[X]\}$$

(семейство всех предкомпактных в (X, τ) п/м X). Для всякого ТП (X, τ) полагаем, что $(\tau\text{-comp})_0[X] \triangleq (\tau\text{-comp})^0[X] \setminus \{\emptyset\}$.

Фильтры и базы фильтров. Если H — множество, то через $\beta[H]$ (через $\beta_0[H]$) обозначаем множество всех семейств $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H))$ (всех семейств $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(H))$) таких, что

$$\forall H_1 \in \mathcal{H} \forall H_2 \in \mathcal{H} \exists H_3 \in \mathcal{H} : H_3 \subset H_1 \cap H_2; \quad (3.1)$$

семейства из $\beta_0[H]$ — базы фильтров H и только они, $\beta_0[H] \subset \beta[H]$. Свойство (3.1) характеризует семейства из $\beta[H]$ как направленные двойственно по отношению к вложению.

Понятие фильтра является центральным для всего последующего изложения. Введем множество всех фильтров произвольного множества: если S — множество, то через $\mathfrak{F}[S]$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(S))$ таких, что

- (1) $A \cap B \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{F}$,
(2) $\forall F \in \mathcal{F} \quad \forall G \in \mathcal{P}(S) \quad ((F \subset G) \implies (G \in \mathcal{F}))$.

Семейства $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[S]$ — суть фильтры множества S . Через $\mathfrak{F}_u[S]$ обозначаем множество всех максимальных (по вложению) фильтров множества S , или множество всех ультрафильтров (u/ϕ) S . Данные обозначения соответствуют [4, 25–28]. Если $x \in S$, то

$$(S\text{-ult})[x] \triangleq \{F \in \mathcal{P}(S) \mid x \in F\} \in \mathfrak{F}_u[S]; \quad (3.2)$$

u/ϕ вида (3.2) называют тривиальными. Далее используются также свободные u/ϕ , определяемые тем условием, что пересечение всех множеств каждого такого u/ϕ пусто. Каждый u/ϕ является либо свободным, либо тривиальным; см. [24, гл. I].

Множество всех u/ϕ произвольного множества может быть превращено в нульмерный [18, гл.6] компакт. Именно, если X — множество, то определяем оператор

$$\varphi[X] : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{F}_u[X])$$

посредством правила: $\varphi[X](A) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[X] \mid A \in \mathcal{F}\}$; семейство-образ $\varphi[X]^1(\mathcal{P}(X))$ является базой некоторой топологии множества $\mathfrak{F}_u[X]$. Эту (единственную) топологию обозначаем через $\tau_{\mathfrak{F}}[X]$; ТП

$$(\mathfrak{F}_u[X], \tau_{\mathfrak{F}}[X]) \quad (3.3)$$

является нульмерным компактом, для которого: (1) $\{(X\text{-ult})[x] : x \in X\}$ — всюду плотное в ТП (3.3) п/м $\mathfrak{F}_u[X]$; (2) $\varphi[X]^1(\mathcal{P}(X))$ — семейство всех открыто-замкнутых в ТП (3.3) п/м $\mathfrak{F}_u[X]$. Компакт (3.3) можно рассматривать как вариант компактификации Стоуна-Чеха дискретного пространства $(X, \mathcal{P}(X))$, а также (в данном случае) как расширение Волмэна [18, §3.6].

Построение фильтров с помощью баз; функциональные преобразования баз фильтров. Если S — множество и $\mathcal{S} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$, то через $\mathfrak{F}_0[S|\mathcal{S}]$ (через $\mathfrak{F}_u^0[S|\mathcal{S}]$) обозначаем множество всех фильтров $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[S]$ (всех u/ϕ $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[S]$) таких, что $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$;

$$(\mathfrak{F}_u^0[S|\mathcal{S}] \subset \mathfrak{F}_0[S|\mathcal{S}]) \& (\forall \mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}_0[S|\mathcal{S}] \exists \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}_u^0[S|\mathcal{S}] : \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2). \quad (3.4)$$

Из (3.4) будет следовать факт достаточности u/ϕ для решения рассматриваемых задач несеквенциального асимптотического анализа.

Если X — множество и $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$, то

$$(X\text{-}\mathfrak{f}\mathfrak{i})[\mathcal{B}] \triangleq \{L \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset L\} \in \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{B}] \quad (3.5)$$

(фильтр, порожденный базой \mathcal{B}); отметим, что $\mathfrak{F}[X] \subset \beta_0[X]$, а потому в (3.5) можно использовать $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$ вместо \mathcal{B} , получая при этом снова исходный фильтр \mathcal{F} .

Если X и Y — множества, $f \in Y^X$ и $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$, то $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[Y]$, причем

$$((X\text{-}\mathfrak{f}\mathfrak{i})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}_u[X]) \implies ((Y\text{-}\mathfrak{f}\mathfrak{i})[f^1[\mathcal{B}]] \in \mathfrak{F}_u[Y]). \quad (3.6)$$

В (3.6) также можно использовать фильтр множества X в качестве \mathcal{B} . Если при этом f — сюръекция X на Y , то

$$(f^1[\mathcal{F}] \in \mathfrak{F}[Y] \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]) \& (f^1[\mathcal{U}] \in \mathfrak{F}_u[Y] \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u[X]). \quad (3.7)$$

Если S — множество, а \mathbb{Z}_S — множество всех семейств $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$ таких, что

$$\bigcap_{L \in \mathcal{K}} L \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{Z})$$

(элементы \mathbb{Z}_S — непустые центрированные семейства п/м S и только они), то $\mathfrak{F}[S] \subset \mathbb{Z}_S$ и

$$\mathfrak{F}_u[S] = \{\mathcal{Z} \in \mathbb{Z}_S \mid \forall \mathcal{G} \in \mathbb{Z}_S \quad ((\mathcal{Z} \subset \mathcal{G}) \implies (\mathcal{Z} = \mathcal{G}))\}. \quad (3.8)$$

Стало быть (см.(3.8)), у/ф множества S — суть максимальные центрированные семейства п/м S и только они.

Сходимость баз фильтров. Следуем [24, гл. I] в определении упомянутой сходимости: если (X, τ) — ТП, $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ и $x \in X$, то по определению

$$(\mathcal{B} \xrightarrow{\tau} x) \iff (N_\tau(x) \subset (X\text{-fi})[\mathcal{B}]). \quad (3.9)$$

В качестве \mathcal{B} можно использовать фильтры, у/ф, образы баз фильтров и у/ф.

Если (X, τ) — ТП и $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$, то

$$(\tau\text{-CL})[\mathcal{B}] \triangleq \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \text{cl}(B, \tau) \quad (3.10)$$

есть множество всех точек прикосновения базы фильтра \mathcal{B} в ТП (X, τ) . Мы можем использовать в (3.10) вместо \mathcal{B} образ базы фильтра (образ фильтра, образ у/ф). Множество (3.10) существенно используется ниже в вопросах, связанных с представлением ЭП.

Направленности. Направленностью в множестве X называем всякий триплет (D, \preceq, f) , для которого (D, \preceq) — направленное множество (D — непустое множество, \preceq — направление на D ; см. [17, гл. 2]) и $f \in X^D$. Фильтры и направленности тесно связаны. Если (D, \preceq, f) есть направленность в множестве X , то

$$(X\text{-ass})[D; \preceq; f] \triangleq \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \exists d_1 \in D \forall d_2 \in D ((d_1 \preceq d_2) \implies (f(d_2) \in U))\} \in \mathfrak{F}[X]$$

(как обычно, при $\delta_1 \in D$ и $\delta_2 \in D$ выражение $\delta_1 \preceq \delta_2$ означает, что δ_2 следует за δ_1 , или мажорирует δ_1 , в смысле \preceq , т. е. $(\delta_1, \delta_2) \in \preceq$; $\preceq \subset D \times D$). Если же Y — множество и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[Y]$, то для некоторой направленности $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, g)$ в Y выполнено равенство $\mathcal{F} = (Y\text{-ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; g]$. Если (X, τ) — ТП, (D, \preceq, f) — направленность в X и $x \in X$, то по определению (см.(3.9))

$$((D, \preceq, f) \xrightarrow{\tau} x) \iff ((X\text{-ass})[D; \preceq; f] \xrightarrow{\tau} x).$$

Тем самым определена сходимость по Мору – Смиту [17, гл. 2]. Последовательность — частный случай направленности.

Предельные точки направленности. Если (D, \preceq) — направленное множество, $D \neq \emptyset$, то

$$(\preceq\text{-cof})[D] \triangleq \{M \in \mathcal{P}(D) \mid \forall d \in D \exists m \in M : d \preceq m\}$$

(семейство всех конфинальных, в смысле (D, \preceq) , п/м D). Если (X, τ) — ТП и (D, \preceq, f) — направленность в X , то

$$(\tau\text{-cl})[D; \preceq; f] \triangleq \{x \in X \mid f^{-1}(Y) \in (\preceq\text{-cof})[D] \ \forall Y \in N_\tau(x)\} \quad (3.11)$$

есть множество всех предельных точек (D, \preceq, f) в ТП (X, τ) .

Компактность и ультрафильтры. Отметим известное (см. [18, 19, 22]) положение: ТП (X, τ) компактно тогда и только тогда, когда

$$\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[X] \exists x \in X : \mathcal{F} \xrightarrow{\tau} x. \quad (3.12)$$

Из (3.12) вытекает, что для произвольных ТП (X, τ) , множества $K \in (\tau\text{-comp})[X]$ и у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[K]$

$$\exists y \in K : \mathcal{F} \xrightarrow{\tau} y. \quad (3.13)$$

4. Ультрарешения и обобщенные оценки

Рассмотрим триплет $(E, \mathbf{H}, \mathbf{h})$ раздела 1 (см. (2.1)) и введем образ

$$\mathbb{H} \triangleq \mathbf{h}^1(E) \in \mathcal{P}'(\mathbf{H}) \quad (4.1)$$

множества E при действии \mathbf{h} ; ясно, что \mathbf{h} — сюръекция E на \mathbb{H} . Непустые нульмерные компакты

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{H}}[E]), (\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}]) \quad (4.2)$$

используем как обобщенные версии множеств E и \mathbb{H} соответственно. В согласии с [19, с.213] введем оператор

$$\mathfrak{U} : \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \longrightarrow \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] \quad (4.3)$$

по следующему правилу: $\mathfrak{U}(\mathcal{F}) \triangleq (\mathbb{H}\text{-}\mathfrak{h})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]]$ (см. (3.6)). Будем именовать (4.3) оператором Чеха, имея в виду построения [19, с.213]. В нашем случае (см.(4.1)) оператор Чеха сюръективен (см. [19]). Более того, он непрерывен в смысле компактов (4.2):

$$\mathfrak{U} \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{H}}[E], \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}]); \quad (4.4)$$

если же \mathbf{h} (2.1) — инъективное отображение E в \mathbf{H} , то \mathfrak{U} (4.4) есть гомеоморфизм компактов (4.2).

Введем операторы погружения множеств E и \mathbb{H} в компакты (4.2):

$$\mathbf{m} \triangleq ((E\text{-ult})[x])_{x \in E} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^E, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{n} \triangleq ((\mathbb{H}\text{-ult})[y])_{y \in \mathbb{H}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]^{\mathbb{H}}; \quad (4.6)$$

тогда $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \text{cl}(\mathbf{m}^1(E), \tau_{\mathfrak{H}}[E])$ и $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] = \text{cl}(\mathbf{n}^1(\mathbb{H}), \tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}])$. Из определения оператора (4.4), а также из (4.5) и (4.6) вытекает равенство

$$\mathfrak{U} \circ \mathbf{m} = \mathbf{n} \circ \mathbf{h}. \quad (4.7)$$

Наконец, из сюръективности \mathbf{h} (как оператора из E на \mathbb{H}) следует, что (см.(3.7))

$$\mathfrak{U}(\mathcal{F}) = \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \quad (4.8)$$

Напомним, что $\mathbf{E} \triangleq \varphi[E]^1(\mathcal{P}(E)) = \{\varphi[E](S) : S \in \mathcal{P}(E)\}$ есть база первого ТП в (4.2) и, одновременно, — семейство всех открыто-замкнутых (в этом ТП) п/м $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Как следствие,

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] = \bigcap_{A \in \mathcal{E}} \varphi[E](A) \in (\tau_{\mathfrak{H}}[E]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (4.9)$$

Мы называем элементы множеств $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$, где \mathcal{E} — непустое подсемейство $\mathcal{P}(E)$, ультрарешениями (у/р) в задаче с ограничениями асимптотического характера в виде семейства \mathcal{E} (имеется в виду условие $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ на выбор у/ф \mathcal{F}). Из (4.9) видно, что у/р всякий раз составляют компакт. С учетом (4.4) и (4.9) мы получаем свойство: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) \in (\tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]]; \quad (4.10)$$

каждый элемент множества-образа в левой части (4.10) можно рассматривать как результат действия соответствующего у/р. Мы именуем упомянутые элементы обобщенными оценками (ОО) или ультраоценками, в то время как точки \mathbb{H} рассматриваем как реализуемые оценки. В (4.10) имеем компакт ОО, которые могут не сводиться к ЭП в условиях оснащения \mathbf{H} какой-либо фиксированной топологией. Среди всех ОО (а эти ОО — суть у/ф \mathbb{H}) интересны, с точки зрения асимптотического анализа, прежде всего те ОО, которые не реализуются точками \mathbb{H} . Оказывается, что и такие ОО составляют компакт: справедливо следующее

Предложение 4.1. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) \setminus \{(\mathbb{H}\text{-ult})[z] : z \in \mathbb{H}\} \in (\tau_{\mathbb{H}}[\mathbb{H}]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]].$$

Доказательство использует (4.10) и свойство дискретной вложенности \mathbb{H} во второй из компактов (4.2); данное свойство подобно в идейном отношении свойству, обсуждаемому в разделе 4 работы [28].

Отметим, что из (4.1) и (4.7) вытекает равенство $\mathfrak{U}^1(\mathbf{m}^1(E)) = \mathbf{n}^1(\mathbb{H})$; см. также (4.5), (4.6). Кроме того, из определений легко следует представление множества точных решений в терминах множества u/p : если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U = \mathbf{m}^{-1}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]); \quad (4.11)$$

итак, точка множества E реализует при действии \mathbf{m} (4.5) некоторое u/p тогда и только тогда, когда она является точным решением, т.е. элементом пересечения всех множеств семейства, порождающего “асимптотические ограничения”. В связи с (4.11) отметим следующее

Предложение 4.2. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то имеет место следующее свойство компактности

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) \setminus \mathbf{n}^1\left(\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) = \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) \setminus \mathfrak{U}^1\left(\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) \in (\tau_{\mathbb{H}}[\mathbb{H}]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]]. \quad (4.12)$$

Доказательство использует ранее упоминавшееся свойство дискретной вложенности множества \mathbb{H} и равенство (4.7). Суть утверждения в следующем: множество всех ОО, не реализуемых в классе точных решений (см.(4.11)), — компакт. Полезно иметь в виду, что множество в левой части (4.12) содержится в множестве-образе

$$\mathfrak{U}^1\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right).$$

В этой связи имеет смысл ввести т.н. свободные u/p . Полагаем, что

$$(\text{Fam})[E] \triangleq \left\{ \mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \emptyset \right\}. \quad (4.13)$$

Элементы (4.13) именуем свободными семействами п/м E ; см. [18, 19]. Тогда, как легко видеть,

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E] \triangleq \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \cap (\text{Fam})[E] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \setminus \mathbf{m}^1(E) \in (\tau_{\mathbb{H}}[E]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]] \quad (4.14)$$

(компакт свободных u/ϕ множества E); в (4.14) учтено свойство дискретной вложенности E в первый из компактов (4.2). В (4.14) имеем нарост, отвечающий расширению Волмэна дискретного пространства $(E, \mathcal{P}(E))$ (в данном случае он совпадает с наростом при стоунчеховской компактификации; см. [18, §3.6]). В свою очередь, из (4.9), (4.11) и (4.14) имеем очевидное следствие: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}] &\triangleq \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \cap \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1(E) \\ &= \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) \in (\tau_{\mathbb{H}}[E]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]] \end{aligned} \quad (4.15)$$

(компакт свободных u/p). Из предложения 4.2, (4.7) и (4.15) получаем, что

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) \setminus \mathbf{n}^1\left(\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) \subset \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (4.16)$$

Итак (см.(4.16)), ОО, не реализуемые в классе точных решений (т.е. не являющиеся точными оценками), непременно реализуются в классе свободных у/р. Отметим, наконец, что ОО, реализуемые в классе свободных у/р, непременно составляют компакт: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то (см.(4.4), (4.15))

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) \in (\tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]]. \quad (4.17)$$

Итак, наиболее характерные фрагменты в пространствах у/р и ОО, связанные с расширением, тяготеют к компактности (см., в частности, (4.17)). Вместе с тем множества

$$\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \quad \mathbf{n}^1\left(\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) \quad (4.18)$$

открыты соответственно в первом и втором компактах в (4.2), что следует из вышеупомянутого принципа дискретной вложенности. Множества (4.18) связаны с реализацией точных решений и не имеют отношения к постановкам, характерным для задач асимптотического анализа. С учетом (4.7), (4.11), (4.15) и стандартных свойств операции взятия образа мы получаем свойство: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) &= \mathfrak{U}^1\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}] \cup \mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) = \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) \cup \mathfrak{U}^1\left(\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) \\ &= \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) \cup \mathbf{n}^1\left(\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

причем справедливо (4.10). Итак, множество всех ОО можно рассматривать как объединение множества всех точных оценок (операцию взятия образа при действии \mathbf{n} в (4.19) можно, как и аналогичные операции для \mathbf{m} и \mathbf{n} в (4.18), рассматривать как несущественное преобразование) и множества всех ОО, реализуемых свободными у/р. В результате данного объединения (см.(4.19)) компактного и открытого множеств непременно реализуется, однако, множество компактное. В связи с вышеупомянутым принципом дискретной вложенности отметим сейчас только следующие свойства:

$$\{\mathbf{m}(x)\} = \varphi[E](\{x\}) \in \tau_{\mathfrak{H}}[E] \quad \forall x \in E; \quad (4.20)$$

$$\{\mathbf{n}(y)\} = \varphi[\mathbb{H}](\{y\}) \in \tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}] \quad \forall y \in \mathbb{H}; \quad (4.21)$$

(4.20), (4.21) обеспечивают открытость множеств (4.18), реализуемых каждое в виде объединения открытых множеств-синглетонов.

Наряду с (4.19), возможен и другой взгляд на интересующее нас множество ОО (ультра-оценок): мы можем рассматривать у/ф множества E , лежащие в замыкании первого в (4.18) множества, как точные в существенном решения (эта интерпретация будет особенно естественной при рассмотрении МП). С точки зрения асимптотического анализа более интересны у/р, не являющиеся точными в существенном. Рассмотрим свойства таких “асимптотических по существу” у/р.

Предложение 4.3. *Если $A \in \mathcal{P}(E)$, то $\varphi[E](A) = \text{cl}(\mathbf{m}^1(A), \tau_{\mathfrak{H}}[E])$.*

Ключевым в соответствующем доказательстве является свойство: для каждого у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ семейство

$$\mathfrak{N}[\mathcal{F}] \triangleq \{\varphi[E](F) : F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{P}'(\tau_{\mathfrak{H}}[E])$$

есть локальная база первого в (4.2) компакта в точке \mathcal{F} , т.е. фундаментальная система окрестностей; все окрестности из $\mathfrak{N}[\mathcal{F}]$ открыто-замкнуты, т.к. $\mathfrak{N}[\mathcal{F}] \subset \mathbf{E}$.

С учетом свойств отображения $\varphi[E]$ (см. [4, §7]), (4.9) и предложения 4.3 легко проверяется, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $A \in \mathcal{P}(E)$

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \text{cl}(\mathbf{m}^1(A), \tau_{\mathfrak{H}}[E]) = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E} \cup \{E \setminus A\}] \in (\tau_{\mathfrak{H}}[E]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]. \quad (4.22)$$

Кроме того, из (4.20) и предложения 4.3 легко извлекается следующее свойство: при $A \in \mathcal{P}(E)$

$$\text{cl}(\mathbf{m}^1(A), \tau_{\mathfrak{H}}[E]) \setminus \mathbf{m}^1(A) = \varphi[E](A) \setminus \mathbf{m}^1(A) \in (\tau_{\mathfrak{H}}[E]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]. \quad (4.23)$$

В представлении (4.22) полезно связать \mathcal{E} и A условием: A — пересечение всех множеств из \mathcal{E} . В этой связи условимся о соглашениях:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{c}} \triangleq \mathcal{E} \cup \left\{ E \setminus \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right) \right\} \in (\text{Fam})[E] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (4.24)$$

Здесь же заметим, что $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{H}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{H}] \quad \forall \mathcal{H} \in (\text{Fam})[E]$. В последнем свойстве можно использовать семейства (4.24). С учетом отмеченных обстоятельств из (4.22) имеем при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, что

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}_{\mathbf{c}}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}_{\mathbf{c}}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \text{cl} \left(\mathbf{m}^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right), \tau_{\mathfrak{H}}[E] \right) \in (\tau_{\mathfrak{H}}[E]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]], \quad (4.25)$$

$$\text{cl} \left(\mathbf{m}^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right), \tau_{\mathfrak{H}}[E] \right) = \varphi[E] \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right) \in (\tau_{\mathfrak{H}}[E]\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]], \quad (4.26)$$

причем компакты (4.25), (4.26) обладают непересекающимися открыто-замкнутыми окрестностями: именно, множества

$$\varphi[E] \left(E \setminus \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right) \right), \quad \varphi[E] \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right)$$

открыто-замкнуты в первом из компактов (4.2), содержат соответственно компакты (4.25), (4.26) и при этом не пересекаются.

В силу (4.9) и (4.11) имеем следующее вложение

$$\text{cl} \left(\mathbf{m}^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right), \tau_{\mathfrak{H}}[E] \right) \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (4.27)$$

Предложение 4.4. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то справедливо равенство

$$\mathfrak{U}^1 \left(\text{cl} \left(\mathbf{m}^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right), \tau_{\mathfrak{H}}[E] \right) \right) = \text{cl} \left(\mathbf{n}^1 \left(\mathbf{h}^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right) \right), \tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}] \right).$$

Доказательство. Из (4.4) имеем с учетом свойств ТП (4.2) утверждение о замкнутости отображения (4.4) (мы можем рассматривать \mathfrak{U} как непрерывное отображение из компактного ТП в хаусдорфово; см [18, §3.1]), а тогда

$$\mathfrak{U}^1(\text{cl}(\mathbf{m}^1(A), \tau_{\mathfrak{H}}[E])) = \text{cl}(\mathfrak{U}^1(\mathbf{m}^1(A)), \tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}]),$$

где A — пересечение всех множеств из \mathcal{E} . В силу (4.7) $\mathfrak{U}^1(\mathbf{m}^1(A)) = \mathbf{n}^1(\mathbf{h}^1(A))$, чем и завершается доказательство. \square

Следствие 4.1. Для всякого семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ компакт OO имеет следующий вид:

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) = \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}_{\mathbf{c}}]) \cup \text{cl} \left(\mathbf{n}^1 \left(\mathbf{h}^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right) \right), \tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}] \right). \quad (4.28)$$

Доказательство. С учетом (4.25), (4.27)

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}_c] \cup \text{cl}\left(\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau_{\mathbb{H}}[E]\right).$$

Поэтому по свойствам операции взятия образа получаем равенство

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) = \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}_c]) \cup \mathfrak{U}^1\left(\text{cl}\left(\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau_{\mathbb{H}}[E]\right)\right).$$

Равенство (4.28) получаем теперь непосредственным применением предложения 4.4. \square

Комбинируя (4.26) и предложение 4.4, получаем свойство

$$\text{cl}\left(\mathbf{n}^1\left(\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right), \tau_{\mathbb{H}}[\mathbb{H}]\right) = \mathfrak{U}^1\left(\varphi[E]\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) \in (\tau_{\mathbb{H}}[\mathbb{H}]\text{-comp})[\mathbb{H}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)).$$

В (4.19) и (4.28) даны два представления компакта ОО, реализуемые в виде объединения компоненты, которую можно связать с действием точных или точных в существенном у/р, а также компоненты, определяемой свободными у/р; последние наиболее интересны с точки зрения компактификации Стоуна-Чеха и расширения Волмэна. В (4.28) имеем представление в виде суммы двух компактов, первый из которых есть компакт ОО для семейства, отличающегося от исходного добавлением ровно одного множества (см. (4.24)).

Предложение 4.5. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$ есть множество всех у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, для каждого из которых существует направленность (D, \preceq, f) в множестве E такая, что

$$(\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[D; \preceq; f]) \& ((D, \preceq, \mathbf{m} \circ f) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{H}}[E]} \mathcal{F}).$$

Доказательство подобно в логическом отношении аналогичным обоснованиям в [4] и [25, с. 140]. Мы получили интерпретацию компакта у/р как МП. Оказывается, что подобным образом можно интерпретировать и компакт ОО.

Теорема 4.1. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}])$ есть множество всех у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$, для каждого из которых существует направленность (D, \preceq, f) в множестве E такая, что

$$(\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[D; \preceq; f]) \& ((D, \preceq, \mathbf{n} \circ \mathbf{h} \circ f) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{H}}[\mathbb{H}]} \mathcal{F}). \quad (4.29)$$

Доказательство. Без ограничения общности можно полагать, что $\mathcal{E} \in \beta[E]$ (в противном случае можно заменить \mathcal{E} семейством $\mathcal{K} \in \beta[E]$ всех конечных пересечений множеств из \mathcal{E} ; этот прием, неоднократно используемый в дальнейшем, не изменяет ни компакта у/р, ни МП, определяемого в терминах (4.29), так как для всякой направленности (D, \preceq, f) в множестве E имеем эквивалентность

$$(\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[D; \preceq; f]) \iff (\mathcal{K} \subset (E\text{-ass})[D; \preceq; f]),$$

вытекающую из аксиом фильтра). Обозначим через Ω множество всех у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$, для каждого из которых существует направленность (D, \preceq, f) в E со свойством (4.29). Пусть $s \triangleq \mathbf{n} \circ \mathbf{h}$. Тогда $s \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]^E$ и в силу (4.7) $s = \mathfrak{U} \circ \mathbf{m}$. В этом случае (см. [4], [6, с. 35])

$$\Omega = \bigcap_{U \in \mathcal{E}} \text{cl}(s^1(U), \tau_{\mathbb{H}}[\mathbb{H}]). \quad (4.30)$$

С учетом (4.30), непрерывности \mathfrak{U} (см. (4.4)) и свойств ТП (4.2) получаем, что (см. [6, с. 147])

$$\Omega = \mathfrak{U}^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} \text{cl}(\mathbf{m}^1(U), \tau_{\mathfrak{H}}[E]) \right). \quad (4.31)$$

В силу предложения 4.5 и упомянутого представления [6, с. 35] имеем

$$\bigcap_{U \in \mathcal{E}} \text{cl}(\mathbf{m}^1(U), \tau_{\mathfrak{H}}[E]) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}^0[E|\mathcal{E}]$$

(мы существенно использовали свойство $\mathcal{E} \in \beta[E]$). В итоге из (4.31) получаем равенство $\Omega = \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}^0[E|\mathcal{E}])$. \square

Мы установили, что (без какого-либо оснащения пространства оценок топологией) компакт ОО является МП в смысле [4–7]. Стало быть, сами ОО суть ЭП в задаче, для которой множество \mathbf{H} заменено на $\mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}[\mathbb{H}]$ с оснащением последнего топологией нульмерного компакта, а оператор \mathbf{h} заменен соответственно на отображение $\mathbf{n} \circ \mathbf{h}$.

5. Множества притяжения. Общие свойства

Мы переходим к рассмотрению случая, когда пространство оценок \mathbf{H} оснащается топологией, в терминах которой определяется МП в \mathbf{H} , т.е. множество всех ЭП. Мы можем, в частности, использовать топологии \mathbf{H} в качестве своеобразного инструмента, изменяя их по мере надобности. С их помощью реализуется следующая идея визуализации ОО: ту или иную ОО (ультраоценку), являющуюся, как уже отмечалось, u/ϕ множества \mathbb{H} (и, стало быть, базой фильтра множества \mathbf{H}), мы стремимся наделить свойством сходимости. Возникающий в итоге (обобщенный) предел мы и рассматриваем как ЭП.

Через $(\text{top})[\mathbf{H}]$ (через $(\text{TOP})[\mathbf{H}]$) обозначаем множество всех (всех хаусдорфовых) топологий множества \mathbf{H} . Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то через $(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех точек $z \in \mathbf{H}$, для каждой из которых существует направленность (D, \preceq, f) в множестве E такая, что

$$(\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[D; \preceq; f]) \& ((D, \preceq, \mathbf{h} \circ f) \xrightarrow{\tau} z). \quad (5.1)$$

Мы называем множество $(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}]$ МП (соответствующим паре (τ, \mathcal{E})); точки $z \in \mathbf{H}$, реализуемые некоторой направленностью в виде (5.1), называем далее ЭП. Разумеется, в качестве этой направленности может использоваться последовательность. В [4] указаны условия, достаточные для того, чтобы класс последовательностей позволял реализовать все ЭП (т.е. все МП $(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}]$; см. также [6, с.38]). Пример задачи управления в разделе 1 всем этим условиям удовлетворяет.

Отметим следующее простое свойство [4]: если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] = \bigcap_{U \in \mathcal{E}} \text{cl}(\mathbf{h}^1(U), \tau). \quad (5.2)$$

Примеры. Рассмотрим сначала случай, когда семейство \mathcal{E} одноэлементно: $\mathcal{E} = \{E_0\}$, где $E_0 \in \mathcal{P}(E)$. Тогда, в частности, $\mathcal{E} \in \beta[E]$ и в силу (5.2)

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] = \text{cl}(\mathbf{h}^1(E_0), \tau), \quad (5.3)$$

где $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$. Хорошо известно, что замыкание множества в ТП не допускает, вообще говоря, представления в терминах пределов сходящихся последовательностей (см. [17, 18, 24]); простой пример такого рода приведен и в [7, с.62, 63]. По этой причине уже в данном простейшем случае ограничиться при построении МП (5.3) классом последовательностей без потери качества, вообще говоря, не удастся.

Рассмотрим более сложный пример, привлекая конструкцию на основе (3.11). Именно, рассмотрим направленность (D, \preceq, f) в ТП (X, τ) . Пусть $[d; \rightarrow) \triangleq \{\delta \in D \mid d \preceq \delta\} \quad \forall d \in D$. Тогда

$$\mathcal{D} \triangleq \{[d; \rightarrow) : d \in D\} \in \beta_0[D].$$

Нас интересует множество (3.11). Оно, как легко видеть, есть вариант МП. В самом деле, полагаем, что

$$E = D, \mathbf{H} = X, \mathbf{h} = f, \mathcal{E} = \mathcal{D}. \quad (5.4)$$

Тогда $\mathcal{E} \in \beta_0[E]$, а потому $(\tau\text{-}\mathbf{AS})[\mathcal{E}]$ можно определять посредством (5.2). С другой стороны [17, гл. 2], $(\tau\text{-cl})[D; \preceq; f]$ есть пересечение всех множеств $\text{cl}(f^1(U), \tau)$, $U \in \mathcal{D}$. В итоге

$$(\tau\text{-}\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau\text{-cl})[D; \preceq; f]. \quad (5.5)$$

Равенство (5.5), доставляющее важный пример МП, полезно дополнить:

$$\mathfrak{B} \triangleq f^1[\mathcal{D}] = \{f^1([d; \rightarrow)) : d \in D\} = \mathbf{h}^1[\mathcal{E}] \in \beta_0[\mathbf{H}],$$

т.е. $\mathfrak{B} \in \beta_0[X]$; при этом справедлива цепочка равенств

$$(X\text{-ass})[D; \preceq; f] = (\mathbf{H}\text{-ass})[E; \preceq; \mathbf{h}] = (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathfrak{B}].$$

Как следствие (см. (5.5)), $(\tau\text{-cl})[D; \preceq; f] = (\tau\text{-CL})[(X\text{-ass})[D; \preceq; f]]$.

Сейчас, ориентируясь на (5.5), мы рассмотрим один конкретный пример, полагая в качестве направленности последовательность.

Итак, пусть $D = \mathcal{N} = \{1; 2; \dots\}$ и \preceq есть обычный порядок \leq на множестве \mathcal{N} (всех натуральных чисел). Тогда \mathcal{D} есть семейство всех промежутков $\overline{n, \infty} \triangleq \{i \in \mathcal{N} \mid n \leq i\}$, $n \in \mathcal{N}$; пересечение всех множеств из \mathcal{D} пусто.

Пусть X — множество всех нормированных вещественнозначных конечно-аддитивных $(0,1)$ -мер на σ -алгебре $\mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(\mathcal{N})$ всех п/м натурального ряда. Полагаем далее, что $\tau = \tau_*(\mathcal{P}(D))|_X$, где $\tau_*(\mathcal{P}(D)) = \tau_*(\mathcal{P}(\mathcal{N}))$ есть стандартная *-слабая топология множества всех ограниченных вещественнозначных конечно-аддитивных мер на $\mathcal{P}(D)$; см., например, [5–7], [29, гл. IV, V] и [30]. Известно [6, с. 45], что τ совпадает с топологией поточечной сходимости множества X , индуцированной из тихоновского произведения экземпляров вещественной прямой \mathbb{R} с обычной $|\cdot|$ -топологией при использовании $\mathcal{P}(D)$ в качестве индексного множества. Мы определяем f как правило, сопоставляющее каждому числу $n \in \mathcal{N}$ меру Дирака $\delta_n \in X$, сосредоточенную в точке n и определенную на $\mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(\mathcal{N})$. По теореме Алаоглу (X, τ) — компакт; см. [7, с. 305, 306]. Из (5.2) мы имеем свойство непустоты множества (5.5); по выбору \mathcal{D}

$$\{\text{cl}(\mathbf{h}^1(U), \tau) : U \in \mathcal{D}\} \in \mathbb{Z}_X,$$

причем все множества последнего семейства замкнуты. Стало быть, пересечение всех этих множеств непусто, что с учетом (5.2) означает требуемое положение: МП (5.5) непусто. На самом же деле мы получили хорошо известное свойство направленности в компактном ТП. В интерпретации, связанной с МП, это означает, что для каждой точки z непустого множества (5.5) можно указать направленность $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, g)$ в множестве $E = D$, для которой

$$(\mathcal{D} \subset (D\text{-ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; g]) \ \& \ ((\mathbb{D}, \sqsubseteq, f \circ g) \xrightarrow{\tau} z). \quad (5.6)$$

Мы использовали здесь комбинацию (5.1) и (5.4). Оказывается, однако, что ни одна из направленностей со свойством (5.6) не может быть последовательностью, несмотря на то, что (в нашем случае) $f = \mathbf{h}$ — последовательность и справедливо (5.5). Иными словами, ни один ЭП из множества (5.5) не реализуется секвенциально; в этой связи отметим рассуждение [7, с. 238], которое, в свою очередь, является модификацией свойства, отмеченного в [30, с. 113, 139].

Строго говоря, в [7, с. 238] показано, что при всяком выборе (строго) возрастающей последовательности $(n_k)_{k \in \mathcal{N}}$ в $\mathcal{N} = D$ возникающая последовательность $(\delta_{n_k})_{k \in \mathcal{N}}$ не может сходиться к какой-либо точке (точнее, мере) $\mu \in X$ в (*-слабой) топологии $\tau_*(\mathcal{P}(\mathcal{N})) = \tau_*(\mathcal{P}(D))$ (здесь — аналогия с [30, с. 113, 139]). Однако трансформация, связанная с топологией τ и использованием секвенциальных ПР (в целях построения ЭП), практически очевидна. Окончательный вывод состоит в следующем: в нашем примере секвенциальных ПР вообще не существует, т.е. не существует последовательности $(N_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в $\mathcal{N} = D$, для которой:

- (1) при всяком выборе $n \in \mathcal{N}$ $N_j \in \overline{n, \infty}$ с некоторого момента;
- (2) последовательность $(f(N_i))_{i \in \mathcal{N}} = (\delta_{N_i})_{i \in \mathcal{N}}$ является сходящейся в (X, τ) .

Итак, выбирая секвенциальный подход, мы обречены на пустое МП; принимая же более общее определение МП (см. (5.1)), мы имеем уже непустое (обобщенное) МП, обладающее к тому же важным свойством (5.5): получаемое таким образом “несеквенциальное” МП есть множество предельных точек последовательности в ТП. \square

Отметим, что в [5–7, 23, 31] и в целом ряде других работ рассматривались примеры построения МП для задач управления линейными системами с импульсными ограничениями на выбор управлений и траекторными ограничениями различных типов.

Вернемся к общей постановке. Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$(\mathfrak{F}_u\text{-sol})[\mathcal{E}|\tau] \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] \mid \exists z \in \mathbf{H} : \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} z\}; \quad (5.7)$$

у/р из множества (5.7) называем ПР. Основанием для этого является следующее легкопроверяемое свойство:

$$\begin{aligned} (\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] &= \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] : \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} z\} = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \\ &\in (\mathfrak{F}_u\text{-sol})[\mathcal{E}|\tau] : \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} z\} \quad \forall \tau \in (\text{top})[\mathbf{H}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \end{aligned} \quad (5.8)$$

В связи с (5.8) отметим, что в силу (3.4) использование для построения ЭП не только у/ф, но и произвольных фильтров, соблюдающих “асимптотические ограничения”, не приводит к какому-либо расширению МП. В связи с применением (5.2) для представления МП отметим, что при всяком выборе семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ семейство

$$\mathcal{E}_f \triangleq \left\{ \bigcap_{U \in \mathcal{K}} U : \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{E}) \right\} \in \beta[E] \quad (5.9)$$

эквивалентно \mathcal{E} в следующем смысле

$$(\mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}_f]) \& ((\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] = (\tau\text{-AS})[\mathcal{E}_f]) \quad \forall \tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]. \quad (5.10)$$

В силу (5.9), (5.10) мы можем применять (5.2), используя несущественное преобразование $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_f$. Следующее свойство устанавливает связь МП и одного из традиционных понятий общей топологии: если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$, то (см. (3.10), (5.2))

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{B}] = (\tau\text{-CL})[\mathbf{h}^1[\mathcal{B}]]. \quad (5.11)$$

Разумеется, в качестве \mathcal{B} можно (в (5.11)) использовать фильтр множества E . Из (5.11) видно, что в практически интересных случаях МП есть множество точек прикосновения образа базы фильтра; в этом представлении существенно то, что в конструкции МП мы не ограничивались секвенциальным подходом. В свою очередь, из (3.10) и (5.11) имеем после несложных преобразований свойство: если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то $(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}]$ есть множество всех $z \in \mathbf{H}$ таких, что

$$U \cap \mathbf{h}^{-1}(V) \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{E} \quad \forall V \in N_\tau(z).$$

Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$, то через $(\mathbf{h} - \text{LIM})[\mathcal{B}|\tau]$ обозначаем множество всех точек $z \in \mathbf{H}$, для каждой из которых $\mathbf{h}^1[\mathcal{B}] \xrightarrow{\tau} z$. В качестве \mathcal{B} можно, конечно, использовать фильтр и, в частности, у/ф множества E . Из (5.8) имеем, в частности, что

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}]} (\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}|\tau] \quad \forall \tau \in (\text{top})[\mathbf{H}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (5.12)$$

Условимся о следующем обозначении в связи с ослаблением топологии пространства оценок: если $\tau_1 \in (\text{top})[\mathbf{H}]$, то

$$(\text{top})[\mathbf{H}|\tau_1] \triangleq \{\tau_2 \in (\text{top})[\mathbf{H}] \mid \tau_2 \subset \tau_1\}$$

и, кроме того, $(\text{TOP})[\mathbf{H} \mid \tau_1] \triangleq (\text{top})[\mathbf{H}|\tau_1] \cap (\text{TOP})[\mathbf{H}]$. Тем самым мы выделяем особо возможность хаусдорфова ослабления исходной топологии; последняя, конечно, и сама должна быть хаусдорфовой, для того чтобы упомянутое ослабление существовало. При $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $\tau_1 \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\tau_2 \in (\text{top})[\mathbf{H}|\tau_1]$

$$(\tau_1\text{-AS})[\mathcal{E}] \subset (\tau_2\text{-AS})[\mathcal{E}]; \quad (5.13)$$

с учетом (5.13) можно рассчитывать на лучшую визуализацию ОО, порождаемых у/р, посредством ослабления топологии пространства оценок. Оказывается, однако, что в практически интересных случаях эти возможности весьма ограничены. В порядке рассмотрения этих вопросов отметим сначала (см. [24, гл. I]), что

$$\begin{aligned} \forall \tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \quad \forall \mathcal{U} \in (\mathfrak{F}_u\text{-sol})[\mathcal{E}|\tau] \\ \exists! z \in \mathbf{H} : (\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{U}|\tau] = \{z\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Предложение 5.1. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $\tau_1 \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $(\mathfrak{F}_u\text{-sol})[\mathcal{E}|\tau_1] = \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}]$, то

$$(\tau_1\text{-AS})[\mathcal{E}] = (\tau_2\text{-AS})[\mathcal{E}] \quad \forall \tau_2 \in (\text{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]. \quad (5.15)$$

Доказательство (5.15) сводится к очевидной комбинации (5.8), (5.13) и (5.14). Основным условием, обеспечивающим (5.15), является требование: всякое у/р является ПР при оснащении множества \mathbf{H} топологией τ_1 . Ниже будет показано, что данное условие выполняется для достаточно широкого круга (компактифицируемых) задач, рассматриваемых обычно в теории расширений. Это будет сделано в двух последующих разделах. Сейчас мы продолжим рассмотрение общих свойств МП. Отметим прежде всего, что в силу (5.9) для всякого семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$(\mathcal{E} \in \mathbb{Z}_E) \iff (\mathcal{E}_f \in \beta_0[E]); \quad (5.16)$$

в случае $\mathcal{E} \notin \mathbb{Z}_E$ непременно имеет место

$$\mathcal{E}_f \in \beta[E] \setminus \beta_0[E],$$

а потому в силу (5.10) справедливы (в этом случае) равенства $\mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] = \emptyset$ и $(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] = \emptyset$ при $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$, что следует из свойства $\emptyset \in \mathcal{E}_f$. Возвращаясь к (5.16), отметим, что для $\mathcal{E} \in \mathbb{Z}_E$ (в силу (5.16)) имеем $\mathcal{E}_f \in \beta_0[E]$ и $(E\text{-f})[\mathcal{E}_f] \in \mathfrak{F}[E]$, причем (см. (5.10))

$$(\mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_u^0[E|(E\text{-f})[\mathcal{E}_f]]) \& ((\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] = (\tau\text{-AS})[(E\text{-f})[\mathcal{E}_f]]) \quad \forall \tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]. \quad (5.17)$$

С учетом (5.16), (5.17) можно сделать вывод о том, что все практически интересные случаи построения МП можно (на принципиальном уровне) ограничить ситуациями

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{F}], \quad \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]. \quad (5.18)$$

В этой связи отметим одно общее свойство структурного характера, полагая, что $\overline{1, m} \triangleq \{i \in \mathcal{N} \mid i \leq m\} \quad \forall m \in \mathcal{N}$.

Предложение 5.2. Если заданы число $n \in \mathcal{N}$ и кортеж

$$(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \longrightarrow \mathfrak{F}[E], \quad (5.19)$$

то $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i \in \mathfrak{F}[E]$ и при этом справедливо равенство

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0 \left[E \mid \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right] = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0 [E \mid \mathcal{F}_i]. \quad (5.20)$$

Доказательство. Первое свойство очевидно; следует отметить только включение

$$E \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i.$$

В связи с обоснованием (5.20) отметим очевидное вложение

$$\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0 [E \mid \mathcal{F}_i] \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0 \left[E \mid \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right], \quad (5.21)$$

вытекающее из определений. При обосновании противоположного вложения используется следующее, отмеченное в [24, §I.6], свойство: если у/ф множества E мажорирует пересечение конечного числа фильтров, то этот у/ф мажорирует один из этих фильтров. Для полноты изложения докажем данное свойство, используя известное [24, гл.I] положение: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, $A \in \mathcal{P}(E)$ и $B \in \mathcal{P}(E)$, то

$$(A \cup B \in \mathcal{F}) \implies ((A \in \mathcal{F}) \vee (B \in \mathcal{F})). \quad (5.22)$$

Нам достаточно рассмотреть (для обоснования (5.20)) случай $n = 2$. Итак, пусть (см. (5.19)) \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 — фильтры множества E ,

$$\mathcal{W} \triangleq \{F_1 \cup F_2 : F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2\}. \quad (5.23)$$

Из аксиом фильтра (см. раздел 2) имеем вложение $\mathcal{W} \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Вложение $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{W}$ следует из определения \mathcal{W} . Стало быть, $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Пусть $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0 [E \mid \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2]$. Тогда $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$. Покажем, что

$$(\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{U}) \vee (\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{U}). \quad (5.24)$$

Допустим противное: $(\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset) \& (\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset)$. Пусть $\Phi_1 \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{U}$ и $\Phi_2 \in \mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{U}$. Тогда $\Phi_1 \cup \Phi_2 \in \mathcal{W}$ в силу (5.23) и вместе с тем

$$(\Phi_1 \notin \mathcal{U}) \& (\Phi_2 \notin \mathcal{U}). \quad (5.25)$$

Однако в силу импликации (5.22), применяемой в условиях $\mathcal{F} = \mathcal{U}$, $A = \Phi_1$ и $B = \Phi_2$, мы получаем, что (5.25) невозможно (поскольку в рассматриваемом случае $\Phi_1 \cup \Phi_2 \in \mathcal{U}$). Полученное противоречие доказывает (5.24), чем (см. (5.21)) при $n = 2$ завершается требуемое обоснование (дальнейшее рассуждение — по индукции). \square

В дополнение к предложению 5.2 отметим свойство: если $n \in \mathcal{N}$ и выполнено (5.19), то

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i = \left\{ \bigcup_{i=1}^n F_i : (F_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right\}.$$

З а м е ч а н и е 5.1. Если $n \in \mathcal{N}$, выполнено (5.19) и $\mathcal{F} \triangleq \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i$, то, как нетрудно проверить,

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_i} F \right). \quad (5.26)$$

Со свойством (5.26) можно связать следующее полезное соображение. Будем полагать, что каждый из фильтров $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ определяет “асимптотические ограничения” на выбор у/ф множества E . Тогда при $i \in \overline{1, n}$ в виде пересечения $E_0^{(i)}$ всех множеств фильтра \mathcal{F}_i мы имеем стандартное ограничение на выбор решения-точки $e \in E$. Допустим, что $E_0^{(i)} = E_0^{(j)}$ при $i \in \overline{1, n}$ и $j \in \overline{1, n}$, т.е. фильтры $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ можно рассматривать как варианты ослабления одного и того же условия $x \in E_0$, где $E_0 \subset E$. Фильтр \mathcal{F} является точной нижней гранью множества $\{\mathcal{F}_i : i \in \overline{1, n}\}$ в смысле вложения; (5.26) показывает, что стандартным (точным) ограничением на выбор решения-точки, связанным с \mathcal{F} , снова является условие $e \in E_0$.

Далее будем учитывать (5.9), (5.16), (5.17) и тот факт, что для $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \setminus \mathbb{Z}_E$ и $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ имеет место $(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] = \emptyset$.

Предложение 5.3. Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$, $n \in \mathcal{N}$ и $(\mathcal{E}^{(i)})_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \rightarrow \mathbb{Z}_E$, то

$$\bigcup_{i=1}^n (\tau\text{-AS})[\mathcal{E}^{(i)}] = (\tau\text{-AS}) \left[\bigcap_{i=1}^n (E\text{-fin})[\mathcal{E}_f^{(i)}] \right].$$

З а м е ч а н и е 5.2. Заметим, что (см. (5.9)) при всяком $i \in \overline{1, n}$ в виде $\mathcal{E}_f^{(i)}$ мы имеем семейство всех множеств $\bigcap_{U \in \mathcal{K}} U$, $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{E}^{(i)})$.

Для доказательства предложения 5.3 достаточно отметить (5.17) и следующее из (5.8) и предложения 5.2 свойство: если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$, $n \in \mathcal{N}$ и выполнено (5.19), то

$$\bigcup_{i=1}^n (\tau\text{-AS})[\mathcal{F}_i] = (\tau\text{-AS}) \left[\bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right]. \quad (5.27)$$

Возможность использования (5.27) для обоснования предложения 5.3 наглядно демонстрирует факт достаточности МП (5.18) для исследования общих свойств МП. В этой связи уместно коснуться вопроса об использовании у/ф E в качестве “асимптотических ограничений”. Из определений раздела 2 следует, что

$$\mathfrak{F}_0[E|\mathcal{U}] = \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{U}] = \{\mathcal{U}\} \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u[E]. \quad (5.28)$$

В свою очередь, из (5.8), (5.12) и (5.28) вытекает свойство: если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u[E]$, то

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{U}] = (\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{U}|\tau]. \quad (5.29)$$

В (5.29) имеем вырожденный случай, не представляющий особого интереса для задач асимптотического анализа. В то же время случаи (5.18) исчерпывают (см (5.17)) практически интересные постановки; стало быть, при построении “асимптотических ограничений” цена замены фильтров на у/ф чрезмерно велика: задача теряет содержательность.

6. Компактифицируемые подпространства пространства обычных решений

Для плодотворного исследования МП и множеств ПР, реализующих ЭП (т.е. точки МП), важно свойство, которое будем называть компактифицируемостью задачи. Это свойство наглядно проявляется при использовании конструкций общей топологии, связанных с компактификациями (см. [17–22], [24] и др.). В то же время некоторые особенности, связанные с ограничениями асимптотического характера, требуют специального рассмотрения; отметим в этой связи [4], [25–28]. В данном разделе исследуется локальная версия конструкций [4], [25–28]: располагая “асимптотическими ограничениями”, мы стремимся выделять в их “составе” компактифицируемые фрагменты задачи. С этой целью введем семейство

$$(\mathbf{PC})[\tau] \triangleq \{A \in \mathcal{P}'(E) \mid \mathbf{h}^1(A) \in (\tau\text{-comp})^0[\mathbf{H}]\} \quad \forall \tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]. \quad (6.1)$$

Множества семейства (6.1) будем использовать для построения требуемых фрагментов, учитывая, что

$$\mathbf{h}^1(A) \in (\tau\text{-comp})_0[\mathbf{H}] \quad \forall \tau \in (\text{top})[\mathbf{H}] \quad \forall A \in (\mathbf{PC})[\tau]. \quad (6.2)$$

Если $A \in \mathcal{P}(E)$, то $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(A)) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$; поэтому $\mathbf{h}^1[A] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{H}))$ при $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$. Кроме того, при $A \in \mathcal{P}(E)$ имеем следующую цепочку вложений

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A] \subset \mathfrak{F}[A] \subset \beta_0[A] \subset \beta_0[E]. \quad (6.3)$$

Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$, $A \in \mathcal{P}'(E)$ и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]$, то (см. (6.3))

$$(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}|\tau] = \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} z\}; \quad (6.4)$$

в этом соотношении учитывается, что u/ϕ множества A есть база фильтра E (см. (6.3)), образ которой есть база фильтра \mathbf{H} .

По аналогии с [4] и [25, с.130] устанавливается свойство

$$(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}|\tau] \in \mathcal{P}'(\text{cl}(\mathbf{h}^1(A), \tau)) \quad \forall \tau \in (\text{top})[\mathbf{H}] \quad \forall A \in (\mathbf{PC})[\tau] \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]. \quad (6.5)$$

Из (6.5) легко следует (см. [24, гл. I] и (5.14)), что

$$\forall \tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}] \quad \forall A \in (\mathbf{PC})[\tau] \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A] \quad \exists! z \in \mathbf{H} : (\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}|\tau] = \{z\}.$$

Данное свойство делает корректным следующее определение.

Если $\tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}]$ и $A \in (\mathbf{PC})[\tau]$, то полагаем, что оператор

$$\mathfrak{H}_A^0[\tau] : \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A] \longrightarrow \mathbf{H} \quad (6.6)$$

определяется правилом: для всякого u/ϕ $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]$ точка $\mathfrak{H}_A^0[\tau](\mathcal{F}) \in \mathbf{H}$ такова, что

$$(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}|\tau] = \{\mathfrak{H}_A^0[\tau](\mathcal{F})\}. \quad (6.7)$$

Предложение 6.1. Если $\tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}]$ и $A \in (\mathbf{PC})[\tau]$, то

- (1) $\mathbf{h}(x) = \mathfrak{H}_A^0[\tau]((A\text{-ult})[x]) \quad \forall x \in A$;
- (2) $\mathfrak{H}_A^0[\tau]$ — сюръекция $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]$ на $\text{cl}(\mathbf{h}^1(A), \tau)$ со следующим свойством непрерывности

$$\mathfrak{H}_A^0[\tau] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A], \tau_{\mathbf{H}}[A], \text{cl}(\mathbf{h}^1(A), \tau), \tau|_{\text{cl}(\mathbf{h}^1(A), \tau)}).$$

Следствие 6.1. Если $\tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}]$ и $A \in (\mathbf{PC})[\tau]$, то $\mathfrak{H}_A^0[\tau] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A], \tau_{\mathbf{H}}[A], \mathbf{H}, \tau)$.

Доказательство предложения подобно доказательствам аналогичных положений [4] и [25, §§ 5, 7] и в данном изложении опущено.

Заметим, что для любых $\tau_1 \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\tau_2 \in (\text{top})[\mathbf{H}|\tau_1]$ непременно

$$(\mathbf{PC})[\tau_1] \subset (\mathbf{PC})[\tau_2], \quad (6.8)$$

а потому (см. (6.6), (6.8)), при условии $\tau_2 \in (\text{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$, имеем для всякого множества $A \in (\mathbf{PC})[\tau_1]$ оператор $\mathfrak{H}_A^0[\tau_2] \in \mathbf{H}^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A]}$.

Предложение 6.2. Если $\tau_1 \in (\text{TOP})[\mathbf{H}]$, $\tau_2 \in (\text{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$ и $A \in (\mathbf{PC})[\tau_1]$, то $\mathfrak{H}_A^0[\tau_1] = \mathfrak{H}_A^0[\tau_2]$.

Доказательство фактически следует из определений (в частности, учитываются (3.9) и (6.7)).

Полезно ввести локальные версии МП раздела 4. Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$, $A \in \mathcal{P}'(E)$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то через $(\tau\text{-as})[A|\mathcal{A}]$ обозначаем множество всех $z \in \mathbf{H}$, для каждого из которых существует направленность (D, \preceq, f) в множестве A такая, что

$$(\mathcal{A} \subset (A\text{-ass})[D; \preceq; f]) \& ((D, \preceq, (\mathbf{h}|A) \circ f) \xrightarrow{\tau} z);$$

легко видеть, что справедливо следующее равенство

$$(\tau\text{-as})[A|\mathcal{A}] = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[A|\mathcal{A}] : \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} z\}. \quad (6.9)$$

Предложение 6.3. Если $\tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}]$, $A \in (\mathbf{PC})[\tau]$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то

$$(\tau\text{-as})[A|\mathcal{A}] = \mathfrak{H}_A^0[\tau]^1(\mathfrak{F}_u^0[A|\mathcal{A}]). \quad (6.10)$$

В связи с обоснованием см. аналогичные положения [4], [25]; см. также (6.7) и (6.9). Предложения 6.1, 6.3 и следствие 6.1 определяют фактически некоторый локальный вариант компактификатора [28]: если $\tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}]$ и $A \in (\mathbf{PC})[\tau]$, то таковым можно полагать кортеж

$$(\mathfrak{F}_u[A], \tau_{\mathbf{H}}[A], (A\text{-ult})[\cdot], \mathfrak{H}_A^0[\tau]),$$

где $(A\text{-ult})[\cdot]$, как обычно, определяет правило погружения A в $\mathfrak{F}_u[A]$, превращающее точку $x \in A$ в y/ϕ $(A\text{-ult})[x]$. При $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$ $\mathfrak{F}_u^0[A|\mathcal{A}]$ есть множество допустимых обобщенных элементов, подобных u/ρ раздела 4. Это множество является вместе с тем МП: справедливо следующее

Предложение 6.4. Если $A \in \mathcal{P}'(E)$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то $\mathfrak{F}_u^0[A|\mathcal{A}]$ есть множество всех u/ϕ $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[A]$, для каждого из которых существует направленность (D, \preceq, f) в множестве A такая, что

$$(\mathcal{A} \subset (A\text{-ass})[D; \preceq; f]) \& ((D, \preceq, (A\text{-ult})[\cdot] \circ f) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{H}}[A]} \mathcal{F}).$$

Настоящее предложение подобно предложению 4.5; его доказательство следует аналогичным рассуждениям [4] и [25, с.140].

Отметим теперь, что для любых $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$(\tau\text{-pc})[\mathcal{E}] \triangleq \mathcal{E} \cap (\mathbf{PC})[\tau] = \{A \in \mathcal{E} \mid \mathbf{h}^1(A) \in (\tau\text{-comp})_0[\mathbf{H}]\}. \quad (6.11)$$

С учетом (6.11) рассмотрим некоторые варианты применения локальных версий компактификаций для исследования МП и компактов u/ρ , построенных ранее для (основного) случая, когда в качестве пространства обычных решений используется все множество E . Используя (5.17), мы ориентируемся на построение МП вида (5.18). Имеем в виду следующие простые свойства: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$ и $A \in \mathcal{F}$, то

$$\mathcal{F}|_A = \{F \in \mathcal{F} \mid F \subset A\} \in \mathfrak{F}[A]; \quad (6.12)$$

кроме того, истинна следующая импликация

$$(\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]) \implies (\mathcal{F}|_A \in \mathfrak{F}_u[A]). \quad (6.13)$$

В (6.12), (6.13) имеем достаточно простую возможность локализации многих конструкций раздела 4. Так, например, для всяких u/ϕ $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$ и множества $A \in \mathcal{F}$ с учетом (6.12), (6.13) имеем для $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$ и $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}|_A] \in \beta_0[\mathbf{H}]$ важное свойство

$$(\mathbf{H}\text{-fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]] = (\mathbf{H}\text{-fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}|_A]] \in \mathfrak{F}_u[\mathbf{H}]. \quad (6.14)$$

Предложение 6.5. Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $(\tau\text{-pc})[\mathcal{E}] \neq \emptyset$, то

$$\mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] = (\mathfrak{F}_u\text{-sol})[\mathcal{E}|\tau].$$

Доказательство следует из (6.5), (6.11) и (6.14). С учетом предложения 5.1 имеем

Следствие 6.2. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $\tau_1 \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $(\tau_1\text{-pc})[\mathcal{E}] \neq \emptyset$, то

$$(\tau_1\text{-AS})[\mathcal{E}] = (\tau_2\text{-AS})[\mathcal{E}] \quad \forall \tau_2 \in (\text{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1].$$

Предложение 6.6. Если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$, $A \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_A \triangleq \mathcal{F}|_A$, то

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{F}] = (\tau\text{-as})[A|\mathcal{F}_A].$$

Доказательство очевидно; см. (5.2), (6.9), (6.12). Из предложений 6.3 и 6.6 вытекает следующая

Теорема 6.1. *Если $\tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}]$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, $A \in (\tau\text{-pc})[\mathcal{F}]$ и $\mathcal{F}_A \triangleq \mathcal{F}|_A$, то справедливо равенство*

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{F}] = \mathfrak{H}_A^0[\tau]^1(\mathfrak{F}_u^0[A|\mathcal{F}_A]).$$

В теореме 6.1 используется (локальная) компактификация фрагмента основной задачи, который, однако, оказывается достаточно представительным с точки зрения исходной задачи асимптотического анализа. В этой связи отметим, что подобные теореме 6.1 конкретные случаи рассматривались в [6] и в целом ряде других работ. В условиях теоремы 6.1 роль семейства, порождающего “асимптотические ограничения”, играет фильтр \mathcal{F} . Это предположение ограничительным не является; см. (5.17), (5.18). Требование $(\tau\text{-pc})[\mathcal{F}] \neq \emptyset$, напротив, следует признать ограничением на выбор фрагмента A , $A \subset E$; см. условия теоремы. Предлагаемая в данной теореме конструкция не является универсальной относительно семейства множеств, определяющего “асимптотические ограничения”: фрагмент A может обслуживать постановку задачи с “асимптотическими ограничениями” в виде фильтра $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, но не обладать подобным свойством при $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$. В следующем разделе мы возвращаемся к универсальным компактификациям, рассмотрение которых было фактически начато в разделе 4, где, в частности, для компакта ОО было получено представление в виде МП (см. теорему 4.1). Данное МП реализуется, однако, не в пространстве оценок, а в соответствующем этому пространству стоун-чеховском компакте (второе ТП в (4.2)), элементы которого имеют чрезвычайно сложную природу. Поэтому имеет смысл визуализация ОО, осуществление которой мы связываем, как уже отмечалось, с оснащением \mathbf{H} топологией.

7. Компактификация пространства решений

В этом разделе мы подробно рассматриваем случай, когда \mathbb{H} является предкомпактным п/м \mathbf{H} при оснащении последнего некоторой топологией. В данном случае речь идет о компактификации всего пространства решений, которая обладает аналогией с расширениями ТП. Отметим, что предлагаемые в дальнейшем конструкции на идейном уровне соответствуют работам [4, 25]; они являются универсальными по отношению к выбору семейства \mathcal{E} , определяющего ограничения асимптотического характера (речь идет о компактификаторе, используемом в дальнейшем).

Нам потребуются некоторые новые определения. В виде

$$(\mathbf{h}\text{-top})[\mathbf{H}] \triangleq \{\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}] \mid \mathbb{H} \in (\tau\text{-comp})^0[\mathbf{H}]\} = \{\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}] \mid E \in (\mathbf{PC})[\tau]\} \quad (7.1)$$

имеем непустое множество: $\{\emptyset; \mathbf{H}\} \triangleq \{\emptyset\} \cup \{\mathbf{H}\} \in (\mathbf{h}\text{-top})[\mathbf{H}]$ (антидискретная топология, для которой $(\mathbf{H}, \{\emptyset; \mathbf{H}\})$ — компактное ТП).

Предложение 7.1. *Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то эквивалентны следующие три утверждения:*

- (1) $\mathcal{E} \in \mathbb{Z}_E$;
- (2) $(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] \neq \emptyset \quad \forall \tau \in (\mathbf{h}\text{-top})[\mathbf{H}]$;
- (3) $\exists \tau \in (\mathbf{h}\text{-top})[\mathbf{H}] : (\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] \neq \emptyset$.

Доказательство в существенной части сводится к использованию стандартного приема с применением известного свойства централизованных систем замкнутых множеств в компактном ТП (см. [17, 18, 21] и др.).

О п р е д е л е н и е 7.1. Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$, то кортеж (K, t, p, q) называем τ -компактификатором, если (K, t) — компактное ТП, $p \in K^E$, $q \in C(K, t, \mathbf{H}, \tau)$ и $\mathbf{h} = q \circ p$.

Заметим, что в случае, когда $\mathcal{E} \in \beta[E]$, $\tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}]$, а (K, t, p, q) — какой-либо τ -компактификатор, имеет место [5, с.41]

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] = q^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} \text{cl}(p^1(U), t) \right). \quad (7.2)$$

Предложение 7.2. *Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$, то для существования τ -компактификатора необходимо и достаточно, чтобы $\tau \in (\mathbf{h}\text{-top})[\mathbf{H}]$.*

Доказательство см. в [28, с.190]. Отметим, что утверждение предложения 7.2 в его существенной части было высказано Е.Г. Пыткеевым в устной форме. Совсем кратко воспроизведем схему доказательства в [28]. Если $\tau \in (\mathbf{h}\text{-top})[\mathbf{H}]$, то $\mathbb{H} \in (\tau\text{-comp})_0[\mathbf{H}]$ и для некоторого $\mathbf{K} \in (\tau\text{-comp})[\mathbf{H}]$ выполнено $\mathbb{H} \subset \mathbf{K}$. Тогда при $\mathbf{t} \triangleq \tau|_{\mathbf{K}}$ мы получаем компактное ТП (\mathbf{K}, \mathbf{t}) , причем $\mathbf{h} \in \mathbf{K}^E$. Определяем оператор $\mathbf{i} \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau)$ по правилу $\mathbf{i}(y) \triangleq y$ (\mathbf{i} — каноническая инъекция \mathbf{K} в \mathbf{H} ; $\mathbf{i}^{-1}(G) = \mathbf{K} \cap G$ при $G \in \tau$); ясно, что $\mathbf{i} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h}$. Итак, $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{h}, \mathbf{i})$ есть τ -компактификатор; достаточность основного условия установлена. Проверим необходимость. Пусть существует некоторый τ -компактификатор (K, t, p, q) . Тогда $\mathbb{H} = q^1(p^1(E)) \subset q^1(K)$, причем $q^1(K) \in (\tau\text{-comp})[\mathbf{H}]$ как образ компактного ТП при непрерывном отображении. В итоге $\mathbb{H} \in (\tau\text{-comp})^0[\mathbf{H}]$ и в силу (7.1) $\tau \in (\mathbf{h}\text{-top})[\mathbf{H}]$, ч.т.д. \square

Из (6.5) и (7.1) получаем, что

$$(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}|\tau] \in \mathcal{P}'(\text{cl}(\mathbb{H}, \tau)) \quad \forall \tau \in (\mathbf{h}\text{-top})[\mathbf{H}] \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E].$$

Это означает, в частности, свойство: если $\tau \in (\mathbf{h}\text{-top})[\mathbf{H}]$, то

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[\mathcal{E}|\tau] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]. \quad (7.3)$$

С учетом предложения 4.1 и (7.3) получаем, что $\forall \tau_1 \in (\mathbf{h}\text{-top})[\mathbf{H}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \quad \forall \tau_2 \in (\text{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$

$$(\tau_1\text{-AS})[\mathcal{E}] = (\tau_2\text{-AS})[\mathcal{E}]. \quad (7.4)$$

Мы усиливаем ниже (7.4). С этой целью введем множество

$$\begin{aligned} (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}] &\triangleq (\mathbf{h}\text{-top})[\mathbf{H}] \cap (\text{TOP})[\mathbf{H}] = \{ \tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}] \mid \\ &\mathbb{H} \in (\tau\text{-comp})^0[\mathbf{H}] \} = \{ \tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}] \mid E \in (\mathbf{PC})[\tau] \}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Полезно рассматривать (5.14), (7.3) и (7.5) в совокупности, привлекая также (6.6): из (6.6) и (7.5) мы получаем следующую возможность. Именно, для всякой топологии $\tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$ оператор

$$\mathfrak{H}[\tau] \triangleq \mathfrak{H}_E^0[\tau] \in \mathbf{H}^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]} \quad (7.6)$$

обладает (см. (6.7)) свойством: $\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$

$$(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}|\tau] = \{ \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{F}) \}. \quad (7.7)$$

Итак, в (7.6), (7.7) имеем частный случай оператора (6.6). Поэтому с учетом предложения 6.1 имеем следующее

Предложение 7.3. *Если $\tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$ и $\mathbf{t} \triangleq \tau|_{\text{cl}(\mathbb{H}, \tau)}$, то:*

- (1) $\mathbf{h} = \mathfrak{H}[\tau] \circ \mathbf{m}$;
- (2) $\mathfrak{H}[\tau] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{H}}[E], \text{cl}(\mathbb{H}, \tau), \mathbf{t})$;
- (3) $\mathfrak{H}[\tau]$ есть сюръекция $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ на $\text{cl}(\mathbb{H}, \tau)$.

Следствие 7.1. $\mathfrak{H}[\tau] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{H}}[E], \mathbf{H}, \tau) \quad \forall \tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$.

Полезно отметить свойство: если $\tau_1 \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$, то

$$(\text{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1] \subset (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$$

и, как следствие, при $\tau_2 \in (\text{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$ определены операторы $\mathfrak{H}[\tau_1]$ и $\mathfrak{H}[\tau_2]$, действующие каждый из $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ в \mathbf{H} . Из (7.6) и предложения 6.2 имеем

Предложение 7.4. Если $\tau_1 \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$ и $\tau_2 \in (\text{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$, то $\mathfrak{H}[\tau_1] = \mathfrak{H}[\tau_2]$.

Следствие 7.2. Если $\tau_1 \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$ и $\tau_2 \in (\text{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$, то $\text{cl}(\mathbb{H}, \tau_1) = \text{cl}(\mathbb{H}, \tau_2)$.

Для доказательства достаточно учесть предложения 7.3 и 7.4.

Предложение 7.5. Если $\tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$, то кортеж

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{H}}[E], \mathbf{m}, \mathfrak{H}[\tau]) \quad (7.8)$$

является τ -компактификатором, причем множество $\mathbf{m}^1(E)$ всюду плотно в компакте $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{H}}[E])$.

Последнее утверждение в предложении — известный факт, устанавливаемый в теории расширений ТП; см., например, [18, гл.3], [22, §6]. Первое утверждение о свойствах кортежа (7.8) следует из предложения 7.3 и следствия 7.1. Из предложений 6.3, 6.6, (7.5) и (7.6) вытекает

Предложение 7.6. Если $\tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}[\tau]^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]).$$

В связи с предложением 7.6 полезно напомнить предложение 4.5 о представлении компакта u/p в виде МП.

Оператор (7.6) естественным образом связан с вопросом о “визуализации” ОО. В этой связи введем одну вспомогательную операцию, отметив предварительно, что

$$\forall \tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}] \forall A \in (\tau\text{-comp})_0[\mathbf{H}] \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A] \exists ! z \in \mathbf{H} : \mathcal{F} \xrightarrow{\tau} z.$$

Мы учитываем (3.12), (3.13) и (6.3). Данное свойство делает корректным следующее определение: если $\tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}]$ и $A \in (\tau\text{-comp})_0[\mathbf{H}]$, то

$$\mathbf{l}_{\tau}[A] : \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A] \longrightarrow \mathbf{H}$$

есть по определению оператор, для которого

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \mathbf{l}_{\tau}[A](\mathcal{F}) \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A].$$

Предложение 7.7. Если $\tau \in (\text{TOP})[\mathbf{H}]$ и $A \in (\tau\text{-comp})_0[\mathbf{H}]$, то

$$\mathbf{l}_{\tau}[A] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[A], \tau_{\mathfrak{H}}[A], \mathbf{H}, \tau).$$

Доказательство подобно обоснованию предложения 7.1 работы [4]. Отметим теперь, что при $\tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$ непременно $\mathbb{H} \in (\tau\text{-comp})_0[\mathbf{H}]$ (см. (7.5)), а потому определен оператор

$$\mathbf{l}_{\tau}[\mathbb{H}] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}], \mathbf{H}, \tau).$$

Предложение 7.8. Если $\tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$, то $\mathfrak{H}[\tau] = \mathbf{l}_{\tau}[\mathbb{H}] \circ \mathfrak{U}$.

Доказательство легко следует из определений. Смысл предложения состоит в установлении связи между оператором Чеха и оператором предельного перехода (7.6), (7.7): посредством $\mathbf{l}_{\tau}[\mathbb{H}]$ визуализируется оператор Чеха. С учетом (4.8) получаем, в частности, что при $\tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$

$$\mathfrak{H}[\tau](\mathcal{F}) = \mathbf{l}_{\tau}[\mathbb{H}](\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]) \in \mathbf{H},$$

т.е. $\mathfrak{H}[\tau](\mathcal{F})$ есть обобщенный предел u/ϕ $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] = \mathfrak{U}(\mathcal{F}) \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$. С учетом данной конструкции многие положения разд. 4 получают более естественное толкование. Эти вопросы рассматриваются в следующем разделе.

8. Свободные ультрафильтры и элементы притяжения в пространстве оценок

В данном разделе мы возвращаемся к компакту (4.14) и его роли в представлении МП. Отметим сначала ряд очевидных фактов, касающихся визуализации (см. предложение 7.8) ОО, порожденных свободными у/р. Так, по аналогии с (4.17) имеем из (4.15), следствия 7.1 и предложения 7.5

Предложение 8.1. *Если $\tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то*

$$\mathfrak{H}[\tau]^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) \in (\tau\text{-comp})[\mathbf{H}], \quad (8.1)$$

причем $(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}[\tau]^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) \cup \mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)$.

Предложение 8.1 дополняется следующим свойством локальной универсальности компакта (8.1): если $\tau_1 \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$, $\tau_2 \in (\text{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то (см. предложение 7.4)

$$\mathfrak{H}[\tau_1]^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) = \mathfrak{H}[\tau_2]^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]). \quad (8.2)$$

Свойство (8.2) является полезным дополнением (7.4). Напомним, что из определения 7.1 и предложения 7.5, в частности, следует, что

$$\mathfrak{H}[\tau] \circ \mathbf{m} = \mathbf{h} \quad \forall \tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]. \quad (8.3)$$

С использованием следствия 7.1, (8.3) и свойства замкнутости [18, §1.4] каждого непрерывного отображения из компактного ТП в хаусдорфово (см. [18, §3.1]), мы получаем с учетом предложения 4.3, что при всяком выборе $\tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$ и $M \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} \text{cl}(\mathbf{h}^1(M), \tau) &= \text{cl}(\mathfrak{H}[\tau]^1(\mathbf{m}^1(M)), \tau) = \mathfrak{H}[\tau]^1(\text{cl}(\mathbf{m}^1(M), \tau_{\mathbf{H}}[E])) \\ &= \mathfrak{H}[\tau]^1(\varphi[E](M)) \in (\tau\text{-comp})[\mathbf{H}]. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Свойство (8.4) подобно по смыслу предложению 4.4. В частности, из (8.4) имеем

$$\begin{aligned} \text{cl}\left(\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau\right) &= \mathfrak{H}[\tau]^1\left(\text{cl}\left(\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau_{\mathbf{H}}[E]\right)\right) = \mathfrak{H}[\tau]^1\left(\varphi[E]\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) \\ &\in (\tau\text{-comp})[\mathbf{H}] \quad \forall \tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \end{aligned} \quad (8.5)$$

В (8.5) имеем представление множества всех оценок, реализуемых точными в существенном ПР; см. в этой связи (4.26). Именно, элементами множества (8.5) являются те и только те точки \mathbf{H} , которые можно получить действием у/ф E , принадлежащих замыканию множества всех точных решений. Упомянутые у/ф являются у/р; см. (4.27). Более того, все они являются ПР в силу (7.3); упомянутые ПР, однако, в значительной степени подобны точным решениям. Из предложения 7.4 и (8.5) мы, в частности, имеем следующее свойство локальной универсальности: если $\tau_1 \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$, $\tau_2 \in (\text{TOP})[\mathbf{H}|\tau_1]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\text{cl}\left(\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau_1\right) = \text{cl}\left(\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau_2\right). \quad (8.6)$$

Трактуя оценки из множеств типа (8.5) как точные в существенном, мы получили в (8.6) весьма универсальный компакт всех таких оценок (заметим, кстати, что в примере задачи управления в разделе 2 таких оценок не существует). Напомним, наконец, что в силу (4.27), предложения 7.6 и (8.5) имеем свойство: если $\tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\text{cl}\left(\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau\right) \subset (\tau\text{-AS})[\mathcal{E}]. \quad (8.7)$$

З а м е ч а н и е 8.1. В действительности (8.7) имеет место всегда. В самом деле, пусть $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Тогда в силу (5.9) имеем для $V \triangleq \bigcap_{U \in \mathcal{E}} U$ систему вложений $V \subset W \ \forall W \in \mathcal{E}_f$. Поэтому

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(V), \tau) \subset \bigcap_{W \in \mathcal{E}_f} \text{cl}(\mathbf{h}^1(W), \tau) = (\tau\text{-AS})[\mathcal{E}_f] = (\tau\text{-AS})[\mathcal{E}]. \quad (8.8)$$

Мы учли (5.2), (5.9) и (5.10). Из (8.8) с учетом определения V получаем (8.7). Итак, (8.7) справедливо при любых $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. \square

Напомним, что (см. (4.25), (4.27)) при всяком выборе $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}_c] \cup \text{cl}\left(\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau_{\mathbf{H}}[E]\right), \quad (8.9)$$

причем множества, используемые в правой части (8.9), не пересекаются и, более того, отделены (см. (4.25)–(4.27)). Отметим здесь же, что из (4.9), следствия 7.1 и предложения 7.6 вытекает свойство

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] \in (\tau\text{-comp})[\mathbf{H}] \ \forall \tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}] \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)).$$

Предложение 8.2. Если $\tau \in (\mathbf{h}\text{-TOP})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] = (\tau\text{-AS})[\mathcal{E}_c] \cup \text{cl}\left(\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau\right).$$

Доказательство вытекает из предложения 7.6, (8.5) и (8.9):

$$\begin{aligned} (\tau\text{-AS})[\mathcal{E}] &= \mathfrak{H}[\tau]^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) = \mathfrak{H}[\tau]^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}_c] \cup \text{cl}\left(\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau_{\mathbf{H}}[E]\right)) \\ &= \mathfrak{H}[\tau]^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}_c]) \cup \mathfrak{H}[\tau]^1(\text{cl}\left(\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau_{\mathbf{H}}[E]\right)) = (\tau\text{-AS})[\mathcal{E}_c] \cup \text{cl}\left(\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau\right). \end{aligned}$$

С использованием простейших конструкций, реализующих построение поднаправленностей на конфинальных п/м направленного множества (см. [17, гл. 2]), устанавливается следующее

Предложение 8.3. Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $(\tau\text{-AS})[\mathcal{E}_c]$ есть множество всех $z \in \mathbf{H}$, для каждого из которых существует направленность (D, \preceq, f) в множестве

$$E \setminus \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)$$

такая, что выполнено соотношение (5.1).

Поступила 21.11.05

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
4. **Ченцов А.Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна-Чеха. // Современная математика и ее приложения. Академия Наук Грузии. Институт кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119-150.

5. **Chentsov A.G.** Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244 p.
6. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 322 p.
7. **Chentsov A.G. and Morina S.I.** Extensions and Relaxations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 408 p.
8. **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1970. 488 с.
9. **Даффин Р.Дж.** Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М., 1959. С. 263-267.
10. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
11. **Гамкрелидзе Р.В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. 229 с.
12. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
13. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
14. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005-1022.
15. **Осипов Ю.С.** Дифференциальные игры для систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779-782.
16. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т.223, № 6. С. 1314-1317.
17. **Келли Дж.Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
18. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
19. **Čech E.** Topological spaces. Prague: Academia, 1966. 893 p.
20. **Архангельский А.В., Пономарев В.И.** Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 423 с.
21. **Александров П.С.** Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств. М.: Наука, 1978. 415 с.
22. **Архангельский А.В.** Компактность // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ. 1989. Т. 50. С. 5-128.
23. **Скворцова А.В., Ченцов А.Г.** О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1645-1657.
24. **Бурбаки Н.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
25. **Chentsov A.G.** Some questions of asymptotic analysis: approximate solutions and extension constructions // Functional Differential Equations. 2005. Vol. 12, No. 1-2. P. 119-148.
26. **Ченцов А.Г.** К вопросу о применении компактификации Стоуна-Чеха в некоторых задачах асимптотического анализа // Докл. Академии Наук. 2004. Т. 399, № 6. С.737-740.
27. **Ченцов А.Г.** Структура обобщенных множеств притяжения и конструкции расширений // Докл. Академии Наук. 2005. Т. 402, № 2. С. 173-176.
28. **Ченцов А.Г.** Обобщенные множества притяжения и приближенные решения, их формирующие // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. Т. 10, № 2. С.178-196.
29. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Основные структуры. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 895 с.
30. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Том 1. М.: Мир, 1977. 357 с.
31. **Chentsov A.G.** Universal properties of generalized integral constraints in the class of finitely additive measures // Functional Differential Equations. 1998. Vol. 5, № 1-2. P. 65-105.

УДК 531.391: 62-50

ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ МАССОЙ¹

Ф. Л. Черноусько

Рассматривается движение в сопротивляющейся среде системы, состоящей из твердого тела и подвижной внутренней массы. Внешняя среда действует на тело с силой, кусочно-линейно зависящей от его скорости. Изучается класс периодических движений внутренней массы, в которых скорость этой массы относительно тела кусочно-постоянна. Показано, что при определенных условиях возможно поступательное перемещение всей системы в среде. Определена средняя за период скорость этого перемещения. Найдены оптимальные параметры движения внутренней массы, при которых средняя скорость перемещения системы максимальна.

1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается система, состоящая из твердого тела массы M , внутри которого может перемещаться другое тело массы m . Для простоты будем называть эти тела “тело M ” и “тело m ” соответственно (рис. 1). Предполагается, что оба тела перемещаются вдоль прямой.

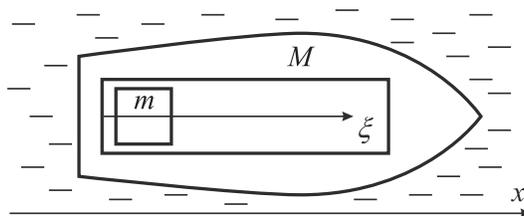


Рис. 1. Механическая система.

На тело M действует сила сопротивления F со стороны внешней среды, а движение тела m относительно тела M управляемо.

Обозначим через x и v соответственно смещение тела M и его скорость в инерциальной системе отсчета, а через ξ , u и w — смещение, скорость и ускорение тела m относительно тела M соответственно. Тогда кинематические уравнения движения тела m относительно тела M запишутся в виде

$$\dot{\xi} = u, \quad \dot{u} = w. \quad (1)$$

Уравнение движения всей системы можно представить в виде

$$M\dot{v} + m(\dot{v} + w) = F. \quad (2)$$

Силу сопротивления F считаем зависящей от скорости v тела M кусочно-линейным образом. А именно, эта сила пропорциональна скорости v с коэффициентами пропорциональности, различными для движений тела M вдоль оси x в положительном и отрицательном направлениях. Поскольку M и m — постоянные в задаче, для облегчения выкладок полагаем

$$F = -(M + m)k(v)v, \quad (3)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 05-01-00647 и 04-01-04002) и Программы поддержки ведущих научных школ России (НШ 1627.2003.1).

где коэффициент $k(v)$ задан в виде

$$\begin{aligned} k(v) &= k_+ \quad \text{при } v \geq 0, \\ k(v) &= k_- \quad \text{при } v < 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь k_+ и k_- положительные и, вообще говоря, различные числа. Различие коэффициентов k_+ и k_- отражает асимметрию тела M относительно плоскости, перпендикулярной оси x . Так, на рис. 1 носовая и кормовая части тела M отличны друг от друга, так что при движении тела вперед сопротивление меньше, чем при движении назад: $k_+ < k_-$.

Введем обозначение

$$\mu = m/(M + m) < 1 \tag{5}$$

и перепишем уравнение (2) с учетом соотношений (3) и (5) в виде

$$\dot{v} = -\mu w - k(v)v. \tag{6}$$

Здесь $k(v)$ определено равенствами (4).

Будем рассматривать периодические с периодом T движения тела m относительно тела M , происходящие в ограниченной области при условиях

$$0 \leq \xi(t) \leq L, \tag{7}$$

где $L > 0$ — заданная постоянная.

Неравенства (7) отражают реальные возможности перемещения внутренней массы в теле (ограниченные размеры полости). Не нарушая общности, примем, что в начале и в конце периода тело m находится на левой границе допустимого интервала (7), так что

$$\xi(0) = \xi(T) = 0. \tag{8}$$

В эти моменты относительное смещение тела m минимально, поэтому

$$u(0) = u(T) = 0. \tag{9}$$

В некоторый момент времени $\theta \in (0, T)$ тело m достигает правой границы интервала (7), и в этот момент имеем

$$\xi(\theta) = L, \quad u(\theta) = 0. \tag{10}$$

Потребуем, чтобы абсолютная скорость тела M также изменялась периодически с периодом T , так что выполняется условие

$$v(0) = v(T). \tag{11}$$

В данной работе ограничимся рассмотрением одного простого класса периодических движений, когда относительная скорость $u(t)$ тела m кусочно-постоянна, причем период содержит два интервала постоянства скорости. Такие движения рассматривались в работах [1,2], где изучен другой случай внешнего сопротивления — силы сухого трения, удовлетворяющие закону Кулона. В этих работах данные относительные движения названы двухфазными.

Нетрудно видеть, что при наложенных условиях (8)–(10) двухфазное движение имеет наименьшее возможное число интервалов постоянства скорости $u(t)$, так как при одном интервале, то есть при постоянной скорости $u(t)$ на интервале $(0, T)$, невозможно удовлетворить всем этим условиям.

Обозначим длительности интервалов постоянства скорости $u(t)$ через τ_1 и τ_2 , а соответствующие величины скорости на этих интервалах — через u_1 и $(-u_2)$. Имеем закон изменения скорости $u(t)$ в виде:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1 \quad \text{при } t \in (0, \tau_1), \\ u(t) &= -u_2 \quad \text{при } t \in (\tau_1, T), \quad T = \tau_1 + \tau_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Из условий (8)–(10) следует, что в начале периода скорость должна быть положительна, а в конце — отрицательна, так что u_1 и u_2 в (12) — положительные числа. Закон изменения скорости (12) изображен на рис. 2. Этот закон содержит три скачка скорости: в начале и в конце интервала $(0, T)$, а также в момент $t = \tau_1$. Доопределим в моменты $t = 0$, $t = \tau_1 = \theta$ и $t = T$ скорость $u(t) = 0$ в соответствии с формулами (9) и (10). Такое доопределение не влияет на движение тел и удобно для описания периодического процесса.

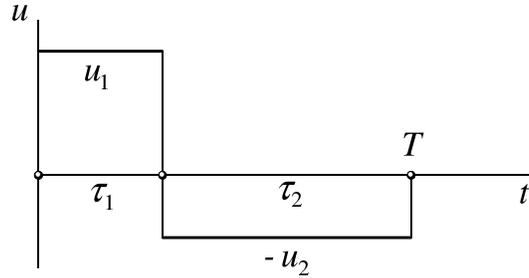


Рис. 2. Относительная скорость тела m .

Относительное ускорение $w(t)$ тела m , согласно второму уравнению (1) и (12), представляется в виде

$$w(t) = u_1\delta(t) - (u_1 + u_2)\delta(t - \tau_1) + u_2\delta(t - T), \quad (13)$$

где δ — дельта-функция Дирака. Так как $\theta = \tau_1$, то из первого уравнения (1) и формул (10), (12) получим

$$L = u_1\tau_1 = u_2\tau_2, \quad T = \tau_1 + \tau_2. \quad (14)$$

На величину относительной скорости тела m наложим ограничение

$$|u(t)| \leq U, \quad (15)$$

где U — заданная постоянная. Ограничение (15) приводит, в силу (12), к условиям

$$0 \leq u_1 \leq U, \quad 0 \leq u_2 \leq U. \quad (16)$$

В дальнейшем решаются следующие две задачи.

Задача 1. Определить все периодические движения $u(t)$ и $v(t)$ тел m и M , удовлетворяющие наложенным условиям (8)–(12).

Задача 2. Среди периодических движений, решающих Задачу 1, определить те, которые удовлетворяют ограничениям (16) и доставляют максимальную среднюю за период скорость тела M :

$$V = X/T \rightarrow \max, \quad X = x(T) - x(0). \quad (17)$$

2. Периодические движения

Проинтегрируем уравнение (6) по интервалу $(0, T)$. Учитывая второе уравнение (1), имеем

$$v(T) - v(0) = -\mu[u(T) - u(0)] - \int_0^T k(v)v dt. \quad (18)$$

В силу условий (9) и (11) получим из (18)

$$\int_0^T k(v)v dt = 0. \quad (19)$$

Если коэффициент сопротивления $k(v)$ не зависит от скорости ($k(v) = \text{const}$), то из (19) имеем

$$x(T) - x(0) = 0.$$

Следовательно, в случае постоянного коэффициента сопротивления перемещение системы как целого невозможно при любом периодическом движении внутренней массы. Тело M в этом случае будет лишь совершать периодические колебания вокруг некоторого среднего положения.

Из (19) следует, что при любом $k(v) > 0$ скорость $v(t)$ либо равна тождественно нулю, либо меняет знак на интервале $(0, T)$. Из уравнения (6) следует, что тривиальное решение $v(t) \equiv 0$ реализуется в случае $w(t) \equiv 0$, что в силу (13) означает, что $u_1 = u_2 = 0$. В дальнейшем рассматриваем нетривиальные решения уравнения (6).

Заметим, что перемена знака скорости $v(t)$, в силу уравнения (6), невозможна в момент, когда $w(t) = 0$. Поэтому перемена знака $v(t)$ на интервале $(0, T)$ может иметь место лишь в момент скачка скорости $u(t)$, то есть при $t = \tau_1$. В этот момент, согласно уравнению (6) и равенству (12), скорость $v(t)$ испытывает разрыв, равный

$$v(\tau_1 + 0) - v(\tau_1 - 0) = \mu(u_1 + u_2) > 0. \quad (20)$$

Так как в момент τ_1 скорость $v(t)$ меняет знак, а величина скачка $v(t)$ (см. (20)) в этот момент положительна, то должны выполняться условия

$$v(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, \tau_1), \quad v(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (\tau_1, T). \quad (21)$$

Подставим равенство (12) в уравнение (6) и проинтегрируем это уравнение при начальном условии

$$v(0) = v_0. \quad (22)$$

Сначала запишем условия на скачках в начале и в конце интервала $(0, T)$, принимая во внимание начальное условие (22) и условие периодичности (11). Получим

$$v(+0) = v_0 - \mu u_1 < 0, \quad v(T - 0) = v_0 + \mu u_2 > 0. \quad (23)$$

Неравенства в (23) вытекают из условий (21).

Уравнение (6), в котором $k(v)$ определено равенствами (4), приводит к следующим линейным уравнениям на соответствующих интервалах:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -k_- v \quad \text{при} \quad t \in (0, \tau_1), \\ \dot{v} &= -k_+ v \quad \text{при} \quad t \in (\tau_1, T). \end{aligned} \quad (24)$$

Проинтегрируем эти уравнения при начальных условиях (23), заданных на концах интервала $(0, T)$. Получим

$$\begin{aligned} v(t) &= (v_0 - \mu u_1) \exp(-k_- t) \quad \text{при} \quad t \in (0, \tau_1), \\ v(t) &= (v_0 + \mu u_2) \exp[k_+(T - t)] \quad \text{при} \quad t \in (\tau_1, T). \end{aligned} \quad (25)$$

В решениях (25) положим $t = \tau_1$ и подставим полученные соотношения в условие скачка (20). Имеем

$$(v_0 + \mu u_2) \exp(k_+ \tau_2) - (v_0 - \mu u_1) \exp(-k_- \tau_1) = \mu(u_1 + u_2). \quad (26)$$

Здесь использовано равенство $T = \tau_1 + \tau_2$ из (14). Из уравнения (26) определим v_0 в виде

$$v_0 = \mu(1 - e_1 e_2)^{-1} [u_1 e_2 (1 - e_1) - u_2 (1 - e_2)], \quad (27)$$

где используются обозначения

$$e_1 = \exp(-k_-\tau_1), \quad e_2 = \exp(-k_+\tau_2). \quad (28)$$

Подставляя равенство (27) в соотношения (25), получим

$$\begin{aligned} v(t) &= -\mu(u_1 + u_2)(1 - e_2)(1 - e_1e_2)^{-1} \exp(-k_-t) \quad \text{при } t \in (0, \tau_1), \\ v(t) &= \mu(u_1 + u_2)e_2(1 - e_1)(1 - e_1e_2)^{-1} \exp[k_+(T - t)] \quad \text{при } t \in (\tau_1, T). \end{aligned} \quad (29)$$

Искомые периодические решения $u(t)$ и $v(t)$ с периодом T (решение Задачи 1) полностью определены равенствами (12) и (29), в которых положительные параметры τ_1, τ_2 и u_1, u_2 должны удовлетворять условиям (14).

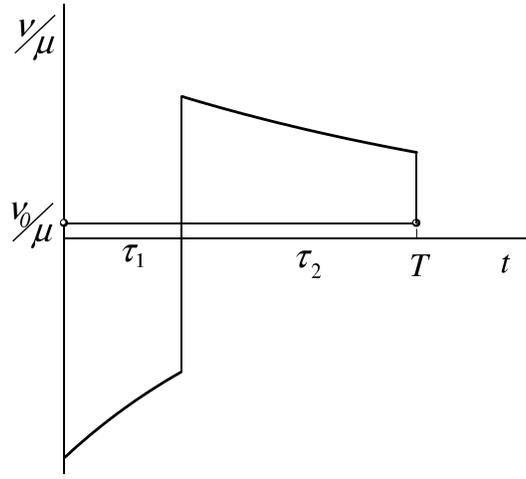


Рис. 3. Абсолютная скорость тела M .

Типичный график зависимости $v(t)$ изображен на рис. 3, где приняты следующие значения параметров:

$$k_+ = 0.5, \quad k_- = 1, \quad \tau_1 = 0.5, \quad \tau_2 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 1, \quad T = 1.5, \quad L = 1.$$

При этом, согласно (27), имеем

$$v_0/\mu = (2 - e^{1/2})/(e^{1/2} + 1) \approx 0.1326.$$

Отметим, что в силу (27) возможны значения $v_0 > 0$, $v_0 < 0$ и $v_0 = 0$.

Подсчитаем полное смещение тела M за период, для чего вычислим интеграл

$$X = x(T) - x(0) = \int_0^T v(t) dt,$$

где $v(t)$ определено равенствами (29). Получим

$$X = \mu(u_1 + u_2)(1 - e_1)(1 - e_2)(1 - e_1e_2)^{-1}(k_+^{-1} - k_-^{-1}). \quad (30)$$

Пользуясь равенствами (14), выразим параметры u_1, u_2 через τ_1, τ_2 . Тогда соотношение (30) примет вид

$$X = \mu LT(1 - e_1)(1 - e_2)(1 - e_1e_2)^{-1}(\tau_1\tau_2)^{-1}(k_+^{-1} - k_-^{-1}). \quad (31)$$

Так как согласно (28) имеем $e_i < 1$ при $i = 1, 2$, то из равенства (31) следует, что полное смещение тела M за период положительно при $k_+ < k_-$ и отрицательно при $k_+ > k_-$. В дальнейшем предполагаем, что $k_+ < k_-$, так что $X > 0$.

3. Оптимизация

Согласно равенствам (17) и (31), средняя скорость тела M за период равна

$$V = \mu L(1 - e_1)(1 - e_2)(1 - e_1 e_2)^{-1}(\tau_1 \tau_2)^{-1}(k_+^{-1} - k_-^{-1}). \quad (32)$$

При заданных μ , L , k_+ , k_- скорость V зависит только от двух положительных параметров τ_1 , τ_2 . Ограничения (16), наложенные на скорость тела m , в силу равенств (14) можно записать в виде

$$\tau_1 \geq \tau_0, \quad \tau_2 \geq \tau_0, \quad (33)$$

где используется обозначение

$$\tau_0 = L/U > 0. \quad (34)$$

Оценим частные производные $\partial V/\partial \tau_i$ при $i = 1, 2$. Для этого заметим, что функцию $V(\tau_1, \tau_2)$ из (32) можно представить в виде

$$V(\tau_1, \tau_2) = V_1(y, \tau_2)V_2(\tau_2), \quad (35)$$

где

$$V_1(y, \tau_2) = \frac{e^y - 1}{y(e^y - e_2)}, \quad y = k_- \tau_1, \quad (36)$$

а $V_2(\tau_2)$ — некоторая положительная функция, не зависящая от τ_1 .

Дифференцируя равенство (36), получим

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{e^y[y(1 - e_2) - (e^y - 1)(1 - e_2 e^{-y})]}{y^2(e^y - e_2)^2} < \frac{e^y(1 - e_2 e^{-y})(y - e^y + 1)}{y^2(e^y - e_2)^2} = \frac{y + 1 - e^y}{y^2(e^y - e_2)} < 0.$$

Отсюда, ввиду соотношений (35) и (36), имеем $\partial V/\partial \tau_1 < 0$. Так как функция $V(\tau_1, \tau_2)$ из (32) инвариантна относительно замены $\tau_1 \rightarrow \tau_2$, $\tau_2 \rightarrow \tau_1$, то отсюда следует также, что $\partial V/\partial \tau_2 < 0$.

Таким образом, функция $V(\tau_1, \tau_2)$ убывает с ростом каждого из своих аргументов, и ее максимум при ограничениях (33) достигается при крайних значениях

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_0 = L/U. \quad (37)$$

При этом согласно (14) имеем

$$u_1 = u_2 = U, \quad T = 2\tau_0.$$

Оптимальное относительное движение тела m представляет собой движение с максимальной скоростью U сначала от точки $\xi = 0$ до $\xi = L$, а затем с такой же по величине скоростью в обратную сторону, т.е. от $\xi = L$ до $\xi = 0$.

Максимально возможная средняя скорость тела M определяется соотношениями (32), (37) и (28) в виде

$$V_{\max} = \mu U^2 L^{-1}(1 - e_1)(1 - e_2)(1 - e_1 e_2)^{-1}(k_+^{-1} - k_-^{-1}),$$

$$e_1 = \exp(-k_- L/U), \quad e_2 = \exp(-k_+ L/U).$$

В случае, когда $k_- L/U \ll 1$, полученная формула для V_{\max} упрощается и дает

$$V_{\max} = \mu U(k_- - k_+)/(k_+ + k_-).$$

Таким образом, решение Задачи 2 построено.

4. Заключение

Рассматриваемый способ движения тел в сопротивляющейся среде за счет перемещения внутренних подвижных масс представляет интерес, так как не требует использования традиционных движителей: винта, пропеллера, реактивной струи, таких вспомогательных тел, как крылья, весла и др. Этот способ движения может быть полезен при разработке мобильных роботов, движущихся в различных средах. Отметим, что в случае сил сухого трения, подчиняющихся закону Кулона, данный способ движения реализован экспериментально [3].

Поступила 27.01.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черноусько Ф.Л.** О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Докл. Академии Наук. 2005. Т. 405, № 1. С. 56–60.
2. **Chernousko F.L.** Optimal motion of a body controlled by internal masses // “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби”. Труды международного семинара, Екатеринбург, 22-26 июня 2005г. Екатеринбург, 2006. Том 1, стр. 55–66.
3. **Li H., Furuta K., Chernousko F.L.** A pendulum-driven cart via internal force and static friction // In: Proceedings of International Conference “Physics and Control”, St. Petersburg, Russia. P. 15–17.

V. I. Berdyshev, N. N. Krasovskii, A. B. Kurzhanski, and E. F. Mishchenko. **Yurii Sergeevich OSIPOV (On the Occasion of His 70th Birthday).** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 3–5.

A. A. Agrachev, R. V. Gamkrelidze. **The Pontryagin Maximum Principle 50 Years Later.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 6–14.

V. I. Arnol'd. **Statistics and Classification of Topologies of Periodic Functions and Trigonometric Polynomials.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 15–24.

A. V. Borisov, V. V. Kozlov, I. S. Mamaev. **On the Fall of a Heavy Rigid Body in an Ideal Fluid.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 25–47.

We consider a problem about the motion of a heavy rigid body in an unbounded volume of an ideal irrotational incompressible fluid. This problem generalizes a classical Kirchhoff problem describing the inertial motion of a rigid body in a fluid. We study different special statements of the problem: the plane motion and the motion of an axially symmetric body. In the general case of motion of a rigid body, we study the stability of partial solutions and point out limiting behaviors of the motion when the time increases infinitely. Using numerical computations on the plane of initial conditions, we construct domains corresponding to different types of the asymptotic behavior. We establish the fractal nature of the boundary separating these domains.

F. P. Vasil'ev, A. S. Antipin. **Methods for Solving Unstable Equilibrium Programming Problems with Coupled Variables.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 48–63.

Regularization (stabilization, residual and quasisolution) methods for solving an unstable equilibrium programming problem are proposed for the case when not only the objective function but also the set determined by coupled inequality constraints are given inexactly. The convergence of these methods is studied. A regularizing operator is constructed.

V. V. Vasin. **Approximation of Nonsmooth Solutions of Linear Ill-Posed Problems.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 64–77.

In the multidimensional case, for the Tikhonov regularization, two new families of stabilizers containing the norms of the Lipschitz spaces and the norms of the Sobolev spaces with fractional derivatives are suggested. Theorems of convergence of Tikhonov regularized approximate solutions and their discrete approximations are proved. Detailed step-by-step investigation of the solving algorithm is performed by the example of an integral Fredholm equation of the first kind.

N. L. Grigorenko. **On the Theory of Three-Person Differential Games.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 78–85.

A differential game of three players with dynamics described by linear differential equations under geometric constraints on the control parameters is considered. Sufficient conditions are obtained for the existence of the first player's strategy guaranteeing that the trajectory of the game reaches a given target set for any admissible control of the second player and avoids the terminal set of the third player. An algorithm of constructing the first player's strategy guaranteeing the game's termination in finite time is suggested. A solution of a model example is given.

I. I. Eremin. **Direct-Dual Fejér Methods for Problems of Quadratic Programming.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 86–97.

The paper deals with the *S-technology*, which reduces convex problems of quadratic programming to the solution of systems of several linear, and one convex, inequalities. A certain variant of the Fejér method is applied to these systems. In particular, the problem of the constructive separability of convex polyhedral sets by a layer of maximal thickness is solved. This algorithm plays an important role in problems of discriminant analysis.

A. M. Il'in, S. F. Dolbeeva. **Asymptotics of the Solution to a Differential Equation with a Small Parameter in the Case of Two Limit Solutions.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 98–108.

Plane Hamiltonian systems perturbed by small time-periodic terms are The asymptotics of an initial value problem with a small parameter is studied.

A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov. **Buffer Phenomenon in Systems Close to Two-Dimensional Hamiltonian Ones.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 109–141.

Plane Hamiltonian systems perturbed by small time-periodic terms are considered. The conditions are established under which exponentially stable periodic solutions are accumulated infinitely in these systems as the perturbations tend to zero or, in other words, the buffer phenomenon occurs. It is shown that this phenomenon is typical for a wide range of classical mechanical problems described by equations of the pendulum type.

N. N. Krasovskii, A. N. Kotel'nikova. **One Problem on Stable Tracking of Motion.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 142–156.

A problem about tracking of a model motion by motion of an object under conditions of uncertainty or conflict [1–7] is considered. Controls are formed in a time-discrete scheme on the basis of step-by-step probabilistic tests.

A. V. Kryazhimskiy, V. I. Maksimov. **Dynamical State Reconstruction and Guaranteeing Control for a System of Parabolic Equations.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 157–172.

A problem of guaranteeing control for a system of parabolic equations is considered. A solving algorithm based on the combination of real time reconstruction processes and feedback control is designed.

A. B. Kurzhanski. **Comparison Principle for Equations of the Hamilton–Jacobi Type in Control Theory.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 173–183.

This paper deals with the comparison principle for the first-order ODEs of the Hamilton–Jacobi–Bellman and Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs type which describe solutions to the problems of reachability and control synthesis under complete as well as under limited information on the system disturbances. Since the exact solutions require fairly complicated calculation, this paper presents the upper and lower bounds to these solutions, which in some cases may suffice for solving such problems as the investigation of safety zones in motion planning, verification of control strategies or of conditions for the nonintersection of reachability tubes, etc. For systems with original linear structure it is indicated that present among the suggested estimates are those of ellipsoidal type, which ensure tight approximations of the convex reachability sets as well as of the solvability sets for the problem of control synthesis.

G. I. Marchuk. **Adjoint Equations and Their Applications.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 184–195.

L. A. Petrosyan. **Dynamically Stable Cooperative Solutions in Randomly Furcating Differential Games.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 196–207.

The paradigm of randomly furcating differential games incorporates stochastic elements via randomly branching payoffs in differential games. This paper considers dynamically stable cooperative solutions in randomly furcating differential games. Analytically tractable payoff distribution procedures contingent upon specific random events are derived. This new approach widens the application of cooperative differential game theory to problems where future environments are not known with certainty.

N. N. Subbotina, T. B. Tokmantsev. **A Numerical Method for the Minimax Solution of the Bellman Equation in the Cauchy Problem with Additional Restrictions.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 208–215.

A new numerical method is suggested for constructing the value function in optimal control problems of prescribed duration with positional running cost along motions of controlled dynamical systems. The algorithm is based on a backward procedure involving characteristics of the Bellman equation. Estimations of the approximation are provided. Results of simulations for a model example are exposed.

A. G. Chentsov. **Nonsequential Approximate Solutions in Abstract Problems of Attainability.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 216–241.

The problem of constructing attraction sets in a topological space is considered in the case when the choice of the asymptotic version of the solution is subject to constraints in the form of a nonempty family

of sets. Each of these sets must contain an “almost entire” solution (for example, all elements of the sequence, starting from some number, when solution-sequences are used). In the paper, problems of the structure of the attraction set are investigated. The dependence of attraction sets on the topology and the family determining “asymptotic” constraints is considered. Some issues concerned with the application of Stone–Čech compactification and the Wallman extension are investigated.

F. L. Chernousko. **Optimization of the Motion in a Resistant Medium of a Body with a Movable Internal Mass.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 1. P. 242–248.

The motion, in a resistant medium, of a system consisting of a rigid body and movable internal mass is considered. The external medium acts on the body by a force that piecewise linearly depends on its speed. The class of periodic motions of the internal mass for which the speed of this mass relative to the body is piecewise constant is studied. It is shown that, under certain conditions, the forward movement of the whole system in the medium is possible. The average speed of this movement over a period is determined. Optimal parameters of the motion of the internal mass for which the average speed of the system movement is maximal are found.

Научное издание

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Сборник научных трудов

*Рекомендовано к изданию Ученым советом
Института математики и механики
и НИСО Уральского отделения Российской академии наук*

ЛР № 020764 от 24.04.98.

Ответственные за выпуск: В. И. Максимов, С. И. Тарасова

Оригинал-макет подготовлен в ИММ УрО РАН.

НИСО УрО РАН № 34(06).
Подписано к печати 29.05.06. Формат $60 \times 84^{1/8}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 30. Уч.-изд. л. 23,25. Тираж 200 экз. Заказ 97

Институт математики и механики УрО РАН
620219 г. Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16.

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
“Уральский центр академического обслуживания”.
620219, г. Екатеринбург, ул. Первомайская, 91.