

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ**

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**Том 11, № 1**

**2005**

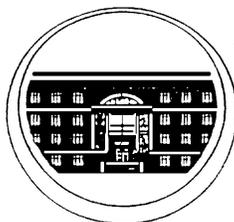
ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ  
И МЕХАНИКИ  
УрО РАН

Том 11  
№ 1

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ  
И ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

*Посвящается 80-летию академика РАН  
Николая Николаевича КРАСОВСКОГО*



Екатеринбург  
2005

**Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 11, № 1. Динамические системы и проблемы управления: Сб. науч. трудов. Посвящается 80-летию академика РАН Николая Николаевича Красовского. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. 242 с.**  
ISBN 5-7691-1612-9.

Настоящий выпуск посвящается 80-летию академика Николая Николаевича Красовского и представляет собой продолжение юбилейного издания “Оптимальное управление и дифференциальные игры” (Труды Института математики и механики, том 10, № 2, 2004). Тематика статей данного выпуска в основном относится к теории динамических систем и теории устойчивости, теории оптимального управления и дифференциальным играм, методам решения обратных задач динамики. Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в указанных областях.

**Редакционная коллегия**

акад. РАН **Ю. С. Осипов** (главный редактор),  
член-корр. РАН **В. И. Бердышев** (зам. гл. редактора),  
член-корр. РАН **В. В. Васин, Л. П. Власов,**  
**М. И. Гусев** (отв. редактор выпуска), акад. РАН **И. И. Еремин,**  
акад. РАН **А. М. Ильин, В. В. Кабанов, А. Ф. Клейменов,**  
акад. РАН **Н. Н. Красовский, В. И. Максимов, А. В. Маринов** (отв. секретарь),  
член-корр. РАН **А. А. Махнев, С. И. Морина** (отв. секретарь выпуска),  
член-корр. РАН **Ю. Н. Субботин**

ISBN 5-7691-1612-9

Т  $\frac{\text{ПРП} - 2005 - 37(05)}{8\text{П6}(03) - 1998}$  ПВ-2005

© УрО РАН, Институт  
математики и механики, 2005 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Е. С. Адыйуллина, Б. И. Ананьев.</b> Линейное оценивание статистически неопределенных систем .....	3
<b>В. Ю. Андрианов, Н. Н. Петров.</b> Поиск с противодействием .....	17
<b>А. В. Арутюнов.</b> Условия разрешимости нелинейных уравнений на конусе в окрестности аномальной точки .....	26
<b>В. Д. Батухтин, С. И. Бигильдеев.</b> К вопросу о наследовании функцией дифференциальных свойств потенциалов .....	32
<b>Ю. И. Бердышев.</b> О задачах последовательного обхода одним нелинейным объектом двух точек .....	43
<b>Т. С. Быкова, Е. Л. Тонков.</b> Приводимость линейной системы с последствием .....	53
<b>О. И. Вдовина, А. Н. Сесекин.</b> Численное построение областей достижимости для систем с импульсным управлением .....	65
<b>М. И. Гусев.</b> Оптимальные входы в задачах гарантированной идентификации .....	74
<b>Ю. Ф. Долгий.</b> Характеристическое уравнение в задаче асимптотической устойчивости периодической системы с последствием .....	85
<b>А. М. Ильин, М. А. Меленцов.</b> Асимптотика решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при больших значениях времени .....	97
<b>А. В. Ким, С. С. Рублева, Е. С. Чой.</b> К задаче аналитического конструирования регуляторов для систем с последствием .....	111
<b>А. И. Короткий.</b> Восстановление параметров системы Навье — Стокса .....	122
<b>А. В. Костоусов, В. Б. Костоусов.</b> Высокоточная навигация движущихся объектов по радиолокационным изображениям .....	139
<b>С. И. Кумков, В. С. Пацко, С. Г. Пятко, А. А. Федотов.</b> Построение множества разрешимости в задаче проводки самолета при ветровом возмущении .....	149
<b>В. И. Максимов.</b> О реконструкции граничных возмущений: случай краевых условий Неймана .....	160
<b>В. Н. Тарасов.</b> Об устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения .....	177
<b>А. А. Толстоногов.</b> Принцип релейности для управляемых систем субдифференциального типа .....	189
<b>В. И. Ухоботов, С. А. Никитина.</b> Построение гарантированного управления в квазилинейных системах .....	201
<b>А. А. Чикрий, И. И. Матичин.</b> Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков .....	212
<b>А. Ф. Шориков.</b> Адаптивное минимаксное управление процессом преследования в дискретных динамических системах с несколькими преследователями .....	225

УДК 519.856.2

**ЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>****Е. С. Адыйуллина, Б. И. Ананьев**

Рассмотрены задачи построения линейных операторов, определенных на пространстве сигналов, с целью восстановления фазовых состояний статистически неопределенных систем в гильбертовом пространстве. Изучены некоторые частные случаи, в частности, задачи фильтрации для эволюционных систем.

**Введение**

Рассматриваются системы, описываемые линейными уравнениями в гильбертовом пространстве и подверженные одновременному воздействию случайных и детерминированных возмущений. Строятся линейные по наблюдениям, оптимальные по минимуму среднеквадратичного рассогласования оценки текущего состояния системы. Для эволюционных систем указываются условия, когда оценки определяются дифференциальными уравнениями. Полученные общие результаты конкретизируются для некоторых типов уравнений с частными производными и конечномерных уравнений с запаздываниями. Задачи подобного рода активно исследуются, начиная с работы [1], где предполагалось, что возмущения являются винеровскими процессами с известными характеристиками. Впоследствии такие задачи начали рассматриваться с использованием минимаксного подхода [2–5]. В работах [6, 7] развивается новый подход, связанный с изучением множества всех условных средних. Применение к детерминированным уравнениям в частных производных изложено в статье [8]. Некоторые современные исследования конечномерных задач со смешанными возмущениями содержатся в работах [9, 10]. Мы придерживаемся идей и методов из работ [11–13], развивающих вышеназванные [6, 7].

В настоящей работе найдено общее решение для уравнений в гильбертовом пространстве. Особое внимание концентрируется на некоторых новых моментах, связанных с бесконечномерностью фазового пространства и выводом дифференциальных уравнений для оптимальных оценок в случае эволюционных уравнений. Предпочтение отдано именно линейным по измерениям оценкам, поскольку их вычисление менее трудоемко по сравнению с общим случаем. Все линейные пространства в работе считаются действительными.

**Обозначения**

$\mathcal{L}(K, H)$  — пространство линейных ограниченных операторов из одного нормированного пространства  $K$  в другое  $H$ ;  $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H, H)$ .

$\mathbf{S}_2(K, H)$  — гильбертово пространство линейных операторов Гильберта — Шмидта из одного гильбертова пространства  $K$  в другое  $H$  со скалярным произведением  $(U, V)_{\text{HS}} = \text{tr} UV^*$ , где  $\text{tr}$  — след оператора;  $\mathbf{S}_2(H) = \mathbf{S}_2(H, H)$ .

$\mathbf{S}_1(H)$  — банахово пространство ядерных линейных операторов в гильбертовом пространстве  $H$  с нормой  $\|U\|_{\text{tr}} = \text{tr}(UU^*)^{1/2}$ .

$\mathcal{K}(H)$  — выпуклый конус неотрицательных самосопряженных операторов в  $\mathbf{S}_1(H)$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00148) и гранта Н.Ш. 1889.2003.1.

$\mathbf{S}_\infty(K, H)$  — банахово пространство компактных (вполне непрерывных) линейных операторов с обычной операторной нормой;  $\mathbf{S}_\infty(H) = \mathbf{S}_\infty(H, H)$ .

$\mathcal{C}(K, H)$  — множество всех линейных, плотно определенных и замкнутых операторов из одного нормированного пространства  $K$  в другое  $H$ ;  $\mathcal{C}(H) = \mathcal{C}(H, H)$ .

$Z(A) = \{x : Ax = 0\}$  — нулевое многообразие линейного оператора  $A$ ;  $D(A)$  — область определения оператора  $A$ .

$R(A) = \{y : y = Ax, x \in D(A)\}$  — многообразие значений линейного оператора  $A$ .

$x \circ y : H \rightarrow K$  — оператор единичного ранга, где  $x$  и  $y$  — элементы гильбертовых пространств  $K$  и  $H$  соответственно, действующий по правилу  $(x \circ y)z = x(y, z)$ . Здесь размерность  $\dim R(x \circ y) = 1$ .

$E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega)$  — математическое ожидание случайного элемента  $\xi \in L_1(\Omega, P, H)$ , заданного на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  со значениями в банаховом пространстве  $H$ . Интеграл понимается в смысле Бохнера.

$\text{cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi) \circ (\eta - E\eta)]$  — ковариация случайных элементов  $\xi, \eta \in L_2(\Omega, P, H)$ ;  $\text{cov}(\xi) = \text{cov}(\xi, \xi)$ .

со  $F$  — выпуклая оболочка множества  $F$  в линейном пространстве.

$A^* : H \rightarrow K$  — гильбертов сопряженный оператор, где  $A \in \mathcal{C}(K, H)$  и  $K, H$  — гильбертовы пространства.

## 1. Постановка общей задачи минимаксного оценивания

Во многих случаях решение линейного эволюционного уравнения в фиксированный момент времени можно представить в виде

$$x = \mathcal{T}_1 v + \mathcal{T}_2 \xi, \quad (1.1)$$

где  $\mathcal{T}_i \in \mathcal{L}(H_i, H)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $H_i$  и  $H$  — гильбертовы пространства. Здесь  $\xi$  — случайное возмущение, заданное на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , имеющее нулевое математическое ожидание  $E\xi = 0$  и конечный второй момент  $E\|\xi\|^2 < \infty$ . Его ковариационный оператор  $\Sigma = \text{cov}(\xi)$  точно не задан и вместе с детерминированным возмущением  $v$  стеснен априорными включениями

$$v \in \mathbb{V} \subset H_1, \quad \Sigma \in \mathcal{S} \subset \mathcal{K}(H_2). \quad (1.2)$$

Вообще говоря, операторы  $\mathcal{T}_i$  в (1.1) зависят от времени  $t$ . Наряду с уравнением (1.1), где величина  $x$  недоступна для измерения, задано уравнение наблюдения

$$y = \mathcal{M}_1 v + \mathcal{M}_2 \xi, \quad (1.3)$$

где  $\mathcal{M}_i \in \mathcal{L}(H_i, M)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $M$  — гильбертово пространство. Пусть оператор  $U \in \mathcal{L}(H, K)$ , где  $K$  — еще одно гильбертово пространство. Ставится следующая минимаксная

**Задача 1.1.** *Найти оператор  $B \in \mathcal{L}(M, K)$  и элемент  $b \in K$  так, чтобы*

$$\sup_{v \in \mathbb{V}, \Sigma \in \mathcal{S}} E\|By + b - Ux\|^2 \rightarrow \min_{B, b}.$$

Близкие задачи рассмотрены в [14, 15]. В общем случае решение задачи 1.1 достаточно сложно и не всегда существует. Ниже сформулированы дополнительные условия на ограничения (1.2) и операторы уравнений (1.1) и (1.3), гарантирующие существование и единственность решения.

## 2. Условия существования и единственности решения задачи 1.1

Прежде всего заметим, что

$$E\|By + b - Ux\|^2 = \text{tr}[(BM_2 - UT_2)\Sigma(BM_2 - UT_2)^*] + \|b + (BM_1 - UT_1)v\|^2. \quad (2.1)$$

Равенство (2.1) устанавливается с использованием вполне очевидных фактов из [16, соотношения (5.1), (5.2)]. Примем

**Предположение 2.1.** *Множество  $\mathbb{V}$  из ограничений (1.2) симметрично относительно элемента  $v_0$ , т.е. для любого  $v \in \mathbb{V}$  верно, что  $2v_0 - v \in \mathbb{V}$ .*

Данное предположение приводит к неравенству  $\sup_{v \in \mathbb{V}} \|b + Nv\|^2 \geq \sup_{v \in \mathbb{V}} \|b_0 + Nv\|^2 = \sup_{v \in \mathbb{V} - v_0} \|Nv\|^2$ , которое выполняется при  $b_0 = -Nv_0$  для любого линейного оператора  $N : H_1 \rightarrow K$  и всякого элемента  $b \in K$  [15, стр. 304]. Таким образом, если решение задачи 1.1 существует, то всегда можно считать, что

$$b_0 = (UT_1 - B_0M_1)v_0, \quad (2.2)$$

где  $B_0 \in \mathcal{L}(M, K)$  — решение задачи

$$\sup_{V, \Sigma} \text{tr}[(BM_1 - UT_1)V(BM_1 - UT_1)^* + (BM_2 - UT_2)\Sigma(BM_2 - UT_2)^*] \rightarrow \min_B. \quad (2.3)$$

Здесь верхняя грань берется по  $V \in \mathcal{V} = \{v \circ v : v \in \mathbb{V} - v_0\}$  и  $\Sigma \in \mathcal{S}$ . Отметим, что в (2.3) использовано равенство  $\|Mv\|^2 = \text{tr}[MVM^*] = \text{tr}[M^*MV]$ , которое устанавливается прямым вычислением:  $\text{tr}[MVM^*] = \sum_i (e_i, MVM^*e_i) = \sum_i (M^*e_i, v)^2 = \|Mv\|^2$ . Здесь  $\{e_i\}$  — ортонормированный базис. Для краткости обозначим пару  $\{V, \Sigma\}$  через  $\alpha$  и введем множество  $\mathcal{A} = \mathcal{V} \times \mathcal{S} \subset \mathcal{K}(H_1) \times \mathcal{K}(H_2)$ . Кроме того, введем следующие обозначения:

$$\Gamma_\alpha = M_1VM_1^* + M_2\Sigma M_2^*, \quad \Delta_\alpha = U(T_1VM_1^* + T_2\Sigma M_2^*), \quad \Phi_\alpha = U(T_1VT_1^* + T_2\Sigma T_2^*)U^*. \quad (2.4)$$

Ввиду ядерности операторов  $V, \Sigma$ , операторы (2.4) также ядерные. К тому же,  $\Gamma_\alpha \in \mathcal{K}(M)$ ,  $\Phi_\alpha \in \mathcal{K}(K)$ . Задачу (2.3) перепишем в виде

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} L(B, \alpha) \rightarrow \min_B, \quad L(B, \alpha) = \text{tr}[B\Gamma_\alpha B^* - 2\Delta_\alpha B^* + \Phi_\alpha]. \quad (2.5)$$

Установим основные свойства функционала  $L(B, \alpha)$  в (2.5).

**Лемма 2.2.** *Всюду конечный функционал  $L(B, \alpha)$  является выпуклым и непрерывным по  $B \in \mathcal{L}(M, K)$ , аффинным и положительно однородным по  $\alpha \in \mathcal{K}(H_1) \times \mathcal{K}(H_2)$ . Кроме того, он неотрицателен при  $\alpha \in \mathcal{A}$  и непрерывен по  $\alpha$  в норме пространства  $\mathbf{S}_1(H_1) \times \mathbf{S}_1(H_2)$ .*

**Доказательство.** Воспользуемся представлением [17] ядерного оператора  $V = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i h_i \circ h_i \in \mathcal{K}(H_1)$  в гильбертовом пространстве, где  $\lambda_i > 0$ ,  $\sum \lambda_i = \|V\|_{\text{tr}}$ ,  $\{h_i\}$  — счетная ортонормированная система собственных векторов оператора  $V$ . Пусть  $\{e_\beta\}$  — полная ортонормированная система в  $K$ . Имеем

$$\begin{aligned} \text{tr}[BM_1VM_1^*B^*] &= \sum_{\beta} (e_\beta, BM_1VM_1^*B^*e_\beta) = \sum_{\beta} \sum_i \lambda_i (h_i, M_1^*B^*e_\beta)^2 \\ &= \sum_i \lambda_i \sum_{\beta} (BM_1h_i, e_\beta)^2 = \sum_i \lambda_i \|BM_1h_i\|^2 \leq \|BM_1\|^2 \|V\|_{\text{tr}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из полученного неравенства следует, что функционал  $\text{tr}[B\Gamma_\alpha B^*]$  конечен и непрерывен по  $V$ . Аналогично устанавливается его непрерывность по  $\Sigma$  и непрерывность функционалов

$\text{tr}[\Delta_\alpha B^*]$ ,  $\text{tr}[\Phi_\alpha]$ . Свойство, состоящее в том, что  $L(B, c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) = c_1L(B, \alpha_1) + c_2L(B, \alpha_2)$  для всех чисел  $c_1, c_2 \geq 0$ , ясно непосредственно из определения операции  $\text{tr}$ . Неотрицательность функционала при  $\alpha \in \mathcal{A}$  вытекает из его построения по формулам (2.1)–(2.5). Очевидно, что функционал  $\text{tr}[\Delta_\alpha B^*]$  представляет собой билинейную непрерывную форму по  $\alpha, B$ . Наконец, непрерывность функционала  $\text{tr}[B\Gamma_\alpha B^*]$ , обозначенного далее как  $L_\alpha(B)$ , по  $B$  вытекает из стандартного неравенства  $|\sqrt{L_\alpha(B_1)} - \sqrt{L_\alpha(B_2)}| \leq \sqrt{L_\alpha(B_1 - B_2)}$ , следующего, в свою очередь, из неравенства Коши – Шварца  $|\text{tr}[B_1\Gamma_\alpha B_2^*]| \leq \sqrt{L_\alpha(B_1)}\sqrt{L_\alpha(B_2)}$ , неравенства треугольника и оценки типа (2.6). Из этих же неравенств вытекает и выпуклость функционала  $L_\alpha(B)$  по  $B$ , так как, возводя неравенство треугольника в квадрат, получаем  $L_\alpha(c_1B_1 + c_2B_2) \leq c_1^2L_\alpha(B_1) + c_2^2L_\alpha(B_2) + 2c_1c_2\sqrt{L_\alpha(B_1)}\sqrt{L_\alpha(B_2)} \leq c_1L_\alpha(B_1) + c_2L_\alpha(B_2)$  для всех чисел  $c_1, c_2 \geq 0$ ,  $c_1 + c_2 = 1$ .  $\square$

**Следствие 2.3.** *Верхняя грань по  $\alpha$  в задаче (2.5) не изменится, если перейти к выпуклой и замкнутой по норме пространства  $\mathbf{S}_1(H_1) \times \mathbf{S}_1(H_2)$  оболочке  $\overline{\text{co}} \mathcal{A}$  множества  $\mathcal{A}$ .*

Доказательство следствия стандартно.

Нас будет интересовать возможность перестановки операций  $\inf$  и  $\sup$  в задаче (2.5). Поэтому примем еще одно

**Предположение 2.4.** *Множество  $\overline{\text{co}} \mathcal{A} = \overline{\text{co}}(\mathcal{V} \times \mathcal{S})$  является слабо компактным в пространстве  $\mathbf{S}_1(H_1) \times \mathbf{S}_1(H_2)$ . Эквивалентно, множества  $\overline{\text{co}} \mathcal{V}$  и  $\overline{\text{co}} \mathcal{S}$  являются слабо компактными в своих пространствах.*

Напомним, что совокупность  $\mathcal{V} \subset \mathcal{K}(H_1)$  определена после формулы (2.3) с учетом предположения 2.1, а множество  $\mathcal{S}$  задано в (1.2). Обсудим предположение 2.4. О пространстве  $\mathbf{S}_1(H)$  ядерных операторов в гильбертовом пространстве  $H$  известно, что оно рефлексивно тогда и только тогда, когда  $H$  конечномерно [17], [18, Приложение 3]. А так как единичный шар в банаховом пространстве слабо компактен, если и только если пространство рефлексивно, то ограниченности и слабой замкнутости множества не достаточно для его слабой компактности. Однако известно строение сопряженного пространства  $\mathbf{S}_1(H)^*$ : всякий линейный непрерывный функционал на  $\mathbf{S}_1(H)$  имеет вид  $f : A \mapsto \text{tr}(AB)$ , где  $B \in \mathcal{L}(H)$ , причем  $\mathbf{S}_1(H)^*$  изоморфно и изометрично  $\mathcal{L}(H)$ , [17, 18, Приложение 3]. Далее эти пространства отождествляются, т.е.  $\mathbf{S}_1(H)^* = \mathcal{L}(H)$ . Удобных критериев слабой компактности множеств в  $\mathbf{S}_1(H)$  нет. Упомянем только один результат, вытекающий из теоремы Моро [19, стр. 323] в выпуклом анализе.

**Лемма 2.5.** *Выпуклое и замкнутое множество  $\mathcal{W} \subset \mathbf{S}_1(H)$ , где  $H$  — гильбертово пространство, слабо компактно тогда и только тогда, когда его опорный функционал  $\rho(B|\mathcal{W}) = \sup_{A \in \mathcal{W}} \text{tr}[AB]$ ,  $B \in \mathcal{L}(H)$ , непрерывен в нуле в топологии Макки  $\tau(\mathcal{L}(H), \mathbf{S}_1(H))$ .*

Топология Макки [17, 19] является сильнейшей из всех локально-выпуклых топологий, согласованных с двойственностью между  $\mathbf{S}_1(H)$  и  $\mathcal{L}(H)$ . Базис окрестностей нуля в этой топологии образуют множества вида  $\{B : \max_{A \in U} |\text{tr}[AB]| < r\}$ , где  $U \subset \mathbf{S}_1(H)$  — некоторое выпуклое, симметричное относительно нуля и слабо компактное множество,  $r > 0$ . Отметим, что нас интересуют лишь выпуклые и замкнутые множества из  $\mathcal{K}(H)$ . Приведем пример бесконечномерного слабо компактного множества в  $\mathcal{K}(H)$ .

**Пример 2.6.** Пусть  $\mathcal{W}$  состоит из операторов вида  $W = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i h_i \circ h_i$ , где  $\{h_i\}$  — фиксированная счетная ортонормированная система в  $H$  и  $0 \leq \lambda_i \leq a_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots$ , причем ряд  $\sum_i a_i$  сходится. Множество  $\mathcal{W}$  выпукло, замкнуто и ограничено, так как  $\|W\|_{\text{tr}} \leq \sum_i a_i$ . Покажем, что оно слабо компактно. Для этого достаточно, в силу теоремы Эберлейна — Шмульяна [17], для любой последовательности  $\{W_n\} \subset \mathcal{W}$  выбрать подпоследовательность  $\{W_{n_k}\}$ , слабо сходящуюся к элементу из  $\mathcal{W}$ . Пусть набор собственных чисел  $\{\lambda_i^n\}$  соответствует оператору  $W_n$ . Используя канторовский диагональный метод, найдем подпоследовательность

$\lambda_i^{n_k} \rightarrow \lambda_i^0 \leq a_i$  и покажем, что  $W_{n_k} \xrightarrow{w} W_0 = \sum \lambda_i^0 h_i \circ h_i$ . Действительно,  $|\operatorname{tr}[(W_{n_k} - W_0)B]| \leq \|W_{n_k} - W\|_{\operatorname{tr}} \cdot \|B\| \rightarrow 0$  для любого оператора  $B \in \mathcal{L}(H)$  в силу равномерной и абсолютной сходимости ряда  $\sum_i \lambda_i^{n_k}$  к  $\sum_i \lambda_i^0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Используя высказанное ранее, установим следующее утверждение.

**Теорема 2.7.** *Пусть выполнены предположения 2.1 и 2.4. Тогда в задаче (2.5) справедливо равенство*

$$\inf_B \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} L(B, \alpha) = \inf_B \max_{\alpha \in \overline{\operatorname{co}} \mathcal{A}} L(B, \alpha) = \max_{\alpha \in \overline{\operatorname{co}} \mathcal{A}} \inf_B L(B, \alpha). \quad (2.7)$$

**Доказательство.** По лемме 2.2 функционал  $L(B, \alpha)$  вогнут и непрерывен по  $\alpha$  на  $\overline{\operatorname{co}} \mathcal{A}$ . Значит, он слабо полунепрерывен сверху и верхняя грань по  $\alpha$  в (2.7) достигается. Выпуклый по  $B$  функционал  $L(B, \alpha)$  всюду конечен и непрерывен на  $\mathcal{L}(M, K)$ . Следовательно, в силу теоремы о минимаксе [20, стр. 144] выполняется равенство (2.7).  $\square$

Подсчитаем теперь  $\inf_B L(B, \alpha)$  в (2.7) при фиксированном  $\alpha$ . Пусть  $\mathcal{G}_\alpha = \{G : G = B\Gamma_\alpha^{1/2}, B \in \mathcal{L}(M, K)\}$  — линейное многообразие, а  $\overline{\mathcal{G}}_\alpha$  — его замыкание в  $\mathbf{S}_2(M, K)$ . Тогда имеем

$$L(B, \alpha) = \tilde{L}(G, \alpha) = \operatorname{tr}[GG^* - 2\Delta_\alpha(\Gamma_\alpha^{1/2})^-G^* + \Phi_\alpha], \quad (2.8)$$

где  $G = B\Gamma_\alpha^{1/2} \in \mathcal{G}_\alpha$ ,  $(\Gamma_\alpha^{1/2})^-$  — псевдообратный оператор к  $\Gamma_\alpha^{1/2}$ . Теория псевдообратных операторов в гильбертовом пространстве изложена в [14]. Нам потребуется определение и основные свойства псевдообратных операторов  $\Gamma^-$  только в случае  $\Gamma \in \mathcal{K}(H)$ . Если  $\Gamma = \sum \lambda_i h_i \circ h_i$ , то  $\Gamma^- x = \sum h_i(h_i, x)/\lambda_i$ . Область определения  $D(\Gamma^-) = \{x \in H : \sum (x, h_i)^2/\lambda_i^2 < \infty\}$  всюду плотна в  $H$  и равна  $D(\Gamma^-) = R(\Gamma) \oplus Z(\Gamma)$ ,  $Z(\Gamma^-) = Z(\Gamma)$ ,  $\Gamma^-$  — замкнутый, самосопряженный и неограниченный оператор.  $\Gamma^- \Gamma$  — ортопроектор на  $R(\Gamma) = Z(\Gamma)^\perp$ . Замыкание оператора  $\Gamma \Gamma^-$  совпадает с  $\Gamma^- \Gamma$ . Для подсчета нижней грани по  $B$  в (2.7) нам потребуется

**Лемма 2.8.** *Справедливо равенство  $\Delta_\alpha(\Gamma_\alpha^{1/2})^- \Gamma_\alpha^{1/2} = \Delta_\alpha$ . Оператор  $\Delta_\alpha(\Gamma_\alpha^{1/2})^-$  в (2.8), плотно определенный на  $D((\Gamma_\alpha^{1/2})^-)$ , допускает единственное расширение  $\Delta_{\alpha\Gamma} \in \mathbf{S}_2(M, K)$ , совпадающее с замыканием оператора  $\Delta_\alpha(\Gamma_\alpha^{1/2})^-$ , причем  $Z(\Delta_{\alpha\Gamma}) = Z(\Gamma_\alpha)$  и  $\Delta_{\alpha\Gamma} \in \overline{\mathcal{G}}_\alpha$ .*

**Доказательство.** Поскольку  $\alpha$  фиксировано, опустим этот знак в обозначении операторов из (2.8). Так как  $(\Gamma^{1/2})^- \Gamma^{1/2}$  — ортопроектор, то  $x = (\Gamma^{1/2})^- \Gamma^{1/2} x + x_0$ , где  $x_0 \in Z(\Gamma^{1/2}) = Z(\Gamma)$ . Теперь из включения  $Z(\Gamma) \subset Z(\Delta)$  следует равенство  $\Delta(\Gamma^{1/2})^- \Gamma^{1/2} = \Delta$  и, следовательно, соотношение (2.8). Заметим далее, что линейный функционал  $\operatorname{tr}[\Delta(\Gamma^{1/2})^- \times G^*]$  ограничен на  $\mathcal{G} = \{G : G = B\Gamma^{1/2}, B \in \mathcal{L}(M, K)\}$ . Если бы это было не так, то нашлась бы последовательность  $\{G_n\}$ ,  $G_n \in \mathcal{G}$ ,  $\|G_n\|_{\operatorname{HS}} = 1$ , такая, что  $\operatorname{tr}[\Delta(\Gamma^{1/2})^- G_n^*] \rightarrow +\infty$ . Тогда функционал  $\tilde{L}(G_n)$  в (2.8) стремился бы к  $-\infty$ , что невозможно ввиду его неотрицательности. По теореме Рисса существует единственный элемент  $\Delta_\Gamma \in \overline{\mathcal{G}}$  такой, что  $\operatorname{tr}[\Delta_\Gamma G^*] = \operatorname{tr}[\Delta(\Gamma^{1/2})^- G^*]$  для любого  $G \in \mathcal{G}$ . Из последнего равенства следует, что  $\Delta_\Gamma^{1/2} = \Delta(\Gamma^{1/2})^- \Gamma^{1/2} = \Delta$ . Значит,  $\Delta_\Gamma = \Delta(\Gamma^{1/2})^-$  на всюду плотном в  $\mathbf{S}_2(M, K)$  множестве  $D((\Gamma^{1/2})^-) = R(\Gamma^{1/2}) \oplus Z(\Gamma)$ . В силу совпадения нулевых подпространств  $Z((\Gamma^{1/2})^-) = Z(\Gamma^{1/2}) = Z(\Gamma)$ , окончательно получаем, что  $Z(\Delta_\Gamma) = Z(\Gamma)$ .  $\square$

Из леммы 2.8 и равенства (2.8) вытекает

**Следствие 2.9.** *Для любого  $\alpha \in \overline{\operatorname{co}} \mathcal{A}$  имеем*

$$\inf_B L(B, \alpha) = \inf_{G \in \mathcal{G}_\alpha} \tilde{L}(G, \alpha) = \min_{G \in \overline{\mathcal{G}}_\alpha} \{(G, G)_{\operatorname{HS}} - 2(\Delta_{\alpha\Gamma}, G)_{\operatorname{HS}}\} + \operatorname{tr}[\Phi_\alpha] = \operatorname{tr}[\Phi_\alpha - \Delta_{\alpha\Gamma} \Delta_{\alpha\Gamma}^*], \quad (2.9)$$

причем минимум в (2.9) достигается на единственном элементе  $\Delta_{\alpha\Gamma} \in \overline{\mathcal{G}}_\alpha$ , построенном в лемме 2.8 и удовлетворяющем уравнению  $\Delta_{\alpha\Gamma} \Gamma_\alpha^{1/2} = \Delta_\alpha$ .

**З а м е ч а н и е 2.10.** Уравнение  $G\Gamma_\alpha^{1/2} = \Delta_\alpha$  имеет единственное решение  $G = \Delta_{\alpha\Gamma} \in \overline{\mathcal{G}}_\alpha$  ввиду того, что  $\mathcal{G}_\alpha^\perp = \{G \in S_2(M, K) : G\Gamma_\alpha^{1/2} = 0\}$ . Однако, вообще говоря,  $\Delta_{\alpha\Gamma} \notin \mathcal{G}_\alpha$ , и уравнение

$$B\Gamma_\alpha = \Delta_\alpha \quad (2.10)$$

может не иметь решения  $B \in \mathcal{L}(M, K)$ .

Рассмотрим простой пример, когда уравнение (2.10) не имеет решения.

**П р и м е р 2.11.** Пусть  $\Gamma = MVM^*$ ,  $\Delta = VM^*$ , где  $M : \{x_n\} \mapsto \{x_n/n\}$  и  $V : \{x_n\} \mapsto \{\lambda_n x_n\}$ ,  $\sum \lambda_n < \infty$ , — операторы в пространстве последовательностей  $l_2$ . Тогда равенство (2.10), где  $B$  — линейный оператор, возможно лишь, когда  $B : \{x_n\} \mapsto \{nx_n\}$ . Но такой оператор, очевидно, неограничен в  $l_2$ .

Хорошо известно [16], что разрешимость уравнения (2.10) является необходимым и достаточным условием того, чтобы квадратичная форма в (2.5) достигала минимума по  $B$ . Поэтому, комбинируя это утверждение с теоремой 2.7, получаем следующий критерий разрешимости задачи 1.1.

**Теорема 2.12.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.7. Тогда задача 1.1 имеет решение в том и только том случае, когда выполняется равенство*

$$\inf_{\{B: \|B\| \leq \mu\}} \max_{\alpha \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}} L(B, \alpha) = \inf_B \max_{\alpha \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}} L(B, \alpha) \quad (2.11)$$

для некоторого числа  $\mu > 0$ . При этом для любого элемента  $\alpha \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}$ , доставляющего максимум в равенстве (2.7), уравнение (2.10) имеет хотя бы одно решение  $B_\alpha \in \mathcal{L}(M, K)$ , и пара  $\{\alpha, B_\alpha\}$  является седловой точкой задачи (2.7).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $B_0$  — решение задачи (2.5), в паре с элементом (2.2) дающее решение исходной задачи 1.1. Тогда равенство (2.11) выполняется при  $\mu = \|B_0\|$ . Если  $\alpha_0$  — любой элемент, доставляющий максимум в (2.7), и  $\beta$  — общее значение минимакса и максимина, то пара  $\{B_0, \alpha_0\}$ , где  $B_0 = B_{\alpha_0}$ , образует седловую точку, т.е.  $L(B_0, \alpha) \leq \beta \leq L(B, \alpha_0)$  для любого  $B$  и любого  $\alpha \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}$ . Отсюда вытекает, что  $L(B_0, \alpha_0) = \beta = \min_B L(B, \alpha_0)$ . Следовательно, уравнение (2.10) разрешимо оператором  $B_0 \in \mathcal{L}(M, K)$  при  $\alpha = \alpha_0$ . Обратно, пусть условие (2.11) выполнено. Ввиду выпуклости и непрерывности функционала  $L(B, \alpha)$  по  $B \in \mathcal{L}(M, K)$ , этот функционал будет слабо\* полунепрерывным снизу. Значит, и  $\max_{\alpha \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}} L(B, \alpha)$  будет выпуклым и слабо\* полунепрерывным снизу. По теореме Банаха — Алаоглу [17] любой шар в пространстве, сопряженном к нормированному, будет слабо\* компактным. Отсюда следует, что нижняя грань на шаре в равенстве (2.11) достигается, причем  $\|B_0\| \leq \mu$  и  $L(B_0, \alpha) \leq \beta$ . Значит,  $B_0$  — решение задачи (2.5) и пара  $\{B_0, \alpha_0\}$ , где  $\alpha_0$  — любой элемент, доставляющий максимум в (2.7), является седловой точкой задачи (2.7).  $\square$

Отметим, что в теореме 2.12 существенно использован тот факт, что  $\mathcal{L}(M, K) = \mathbf{S}_1^*(M, K)$ , причем любой линейный непрерывный функционал  $f$  на пространстве  $\mathbf{S}_1(M, K)$  имеет вид  $f : A \rightarrow \text{tr}[B^*A] = \text{tr}[AB^*]$ , где  $A \in S_1(M, K)$ ,  $B \in \mathcal{L}(M, K)$ ,  $\|f\| = \|B\|$ . Используя результаты выпуклого анализа [19, 21], нетрудно проверить, что функционал  $L(B, \alpha)$  совпадает со своим вторым сопряженным по  $B$  (в смысле выпуклого анализа).

Приведем достаточные условия разрешимости задачи 1.1.

**Следствие 2.13.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.7 и для всех  $\alpha \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}$  уравнение (2.10) имеет решение  $B_\alpha \in \mathcal{L}(M, K)$ , такое, что  $\|B_\alpha\| \leq \mu$ , причем число  $\mu$  не зависит от  $\alpha$ . Тогда решение задачи 1.1 существует.*

Доказательство следствия 2.13 сводится к проверке равенства (2.11), которое, очевидно, выполняется при сделанных предположениях. Отметим еще, что требование разрешимости уравнения (2.10) эквивалентно ограниченности линейного оператора  $\Delta_\alpha \Gamma_\alpha^-$ , определенного на всюду плотном множестве  $R(\Gamma_\alpha) \oplus Z(\Gamma_\alpha)$ . Это следует из [14], где показано, что любой линейный оператор  $B$ , решающий уравнение  $B\Gamma = \Delta$  (индекс  $\alpha$  опущен), имеет вид  $B = \Delta\Gamma^- + N(I - \Gamma\Gamma^-)$ . Здесь  $N$  — любой линейный оператор с  $D(N) = R(\Gamma) \oplus Z(\Gamma)$ . Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения  $B\Gamma = \Delta$  каким-либо линейным оператором  $B$  (не обязательно ограниченным), имеющее вид  $\Delta(I - \Gamma^- \Gamma) = 0$ , в нашем случае всегда выполняется, так как  $Z(\Gamma) \subset Z(\Delta)$ .

Что касается условий единственности решения задачи 1.1, то они сводятся к проверке единственности решения уравнения (2.10). В свою очередь, эта единственность имеет место тогда и только тогда, когда  $I - \Gamma_\alpha \Gamma_\alpha^- = 0$ . Отсюда получаем следующее утверждение.

**Теорема 2.14.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.7. Тогда оператор  $B_0 \in \mathcal{L}(M, K)$  в паре с элементом (2.2) задает единственное решение в задаче 1.1 в том и только том случае, если для некоторого числа  $\mu > 0$  выполняется равенство (2.11) и для любого элемента  $\alpha \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}$ , доставляющего максимум в равенстве (2.7), верно, что  $I - \Gamma_\alpha \Gamma_\alpha^- \equiv 0$ ,  $\overline{\Delta_\alpha \Gamma_\alpha^-} \equiv B_0$ . Здесь  $\overline{\Delta_\alpha \Gamma_\alpha^-}$  — единственное расширение плотно определенного оператора  $\Delta_\alpha \Gamma_\alpha^-$ ,  $\|\Delta_\alpha \Gamma_\alpha^-\| \leq \mu$ , на все пространство  $M$  с сохранением нормы.*

### 3. Задача линейного оценивания в классе операторов Гильберта — Шмидта

Пусть задача 1.1 разрешима при  $U = I$ , но мы интересуемся этой задачей, когда  $U \in \mathbf{S}_\infty(H, K)$ . Обозначим через  $(B_0, b_0)$  какое-то решение задачи 1.1 при  $U = I$ . Тогда пара  $(UB_0, Ub_0)$  будет решением этой задачи при всяком  $U \in \mathbf{S}_\infty(H, K)$ . Сформулируем теперь минимаксную задачу в более узком классе операторов из  $\mathbf{S}_2(M, K)$  без предположения о разрешимости задачи 1.1 при  $U = I$ .

**Задача 3.1.** *Найти оператор  $B \in \mathbf{S}_2(M, K)$  и элемент  $b \in K$  так, чтобы*

$$\sup_{v, \Sigma} E \|By + b - Ux\|^2 \rightarrow \min_{B, b},$$

при условии, что

$$UT_i \in \mathbf{S}_\infty(H_i, K), \quad i = 1, 2. \quad (3.1)$$

Предположение 2.1 оставим в силе, а вместо предположения 2.4 примем более слабое

**Предположение 3.2.** *Множество  $\mathcal{A} = \mathcal{V} \times \mathcal{S}$  является ограниченным в пространстве  $\mathbf{S}_1(H_1) \times \mathbf{S}_1(H_2)$ . Эквивалентно, множества  $\mathcal{V}$  и  $\mathcal{S}$  являются ограниченными в своих пространствах.*

Отметим, что множество  $\mathcal{V}$  будет ограниченным в  $\mathbf{S}_1(H_1)$  тогда и только тогда, когда множество  $\mathbb{V}$  из включений (1.2) будет ограниченным. Покажем теперь, что предположение 3.2 вместе с условиями (3.1) и компактностью операторов  $\mathcal{M}_i$  также влечет выполнение минимаксного равенства (2.7). Справедлива

**Теорема 3.3.** *Пусть выполнены предположения 2.1 и 3.2. Кроме того, пусть  $\mathcal{M}_i \in \mathbf{S}_\infty(H_i, M)$ ,  $i = 1, 2$ , и имеют место включения (3.1). Тогда в задаче (2.5) справедливы равенства (2.7), где нижняя грань берется по всем операторам  $B \in \mathcal{L}(M, K)$ . Величина  $\inf_B L(B, \alpha)$  при любом  $\alpha \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}$  определяется формулой (2.9).*

**Доказательство.** Воспользуемся тем, что  $\mathbf{S}_\infty(H)^* = \mathbf{S}_1(H)$ , и теоремой Банаха — Алаоглу [17, 18]. Выражение  $f : A \mapsto \text{tr}[AB]$  дает общий вид непрерывного линейного функционала  $f$  на  $\mathbf{S}_\infty(H)$ , причем  $\|f\| = \|B\|_{\text{tr}}$ . В силу равенств  $\text{tr}[\Phi_\alpha] = \text{tr}[U^*U(\mathcal{T}_1V\mathcal{T}_1^* + \mathcal{T}_2\Sigma\mathcal{T}_2^*)] = \text{tr}[\mathcal{T}_1^*U^*U\mathcal{T}_1V + \mathcal{T}_2^*U^*U\mathcal{T}_2\Sigma]$ , аналогичных соотношений для  $\text{tr}[B\Gamma_\alpha B^*]$ ,  $\text{tr}[\Delta_\alpha B^*]$  и предположений теоремы, функционал  $L(B, \alpha)$  является слабо\* непрерывным и вогнутым по  $\alpha = \{V, \Sigma\}$  на слабо\* компактном и выпуклом множестве  $\overline{\text{co}}\mathcal{A}$ . Снова применяя теорему о минимаксе [20, стр. 144], условия которой выполнены, получаем заключение нашей теоремы. Доказательство равенства (2.9) полностью сохраняется.  $\square$

Переходя к задаче 3.1, получаем следующее аналогичное утверждение, в котором уже не требуется компактность операторов  $\mathcal{M}_i$ .

**Теорема 3.4.** Пусть выполнены предположения 2.1, 3.2 и имеют место включения (3.1). Тогда в задаче 3.1 справедливы равенства (2.7), где нижняя грань берется по всем операторам  $B \in \mathbf{S}_2(M, K)$ . Величина  $\inf_B(B, \alpha)$  при любом  $\alpha \in \overline{\text{co}}\mathcal{A}$  определяется формулой (2.9). Общие значения минимакса и максимина в задачах 3.1 и 1.1 при условии  $\mathcal{M}_i \in \mathbf{S}_\infty(H_i, M)$ ,  $i = 1, 2$ , совпадают.

**Доказательство.** Равенство (2.7) устанавливается аналогично предыдущей теореме. Определим линейное многообразие  $\mathcal{G}_{2\alpha} = \{G : G = B\Gamma_\alpha^{1/2}, B \in \mathbf{S}_2(M, K)\} \subset \mathbf{S}_2(M, K)$ ;  $\overline{\mathcal{G}}_{2\alpha}$  — его замыкание в указанном пространстве операторов. Рассмотрим ортогональное дополнение  $\mathcal{G}_{2\alpha}^\perp$ . Если  $A \in \mathcal{G}_{2\alpha}^\perp$ , то  $\text{tr}[AG^*] = \text{tr}[A\Gamma_\alpha^{1/2}B^*] \equiv 0$  для любого  $B \in \mathbf{S}_2(M, K)$ . Отсюда  $A\Gamma_\alpha^{1/2} = 0$  и, значит,  $\overline{\mathcal{G}}_{2\alpha} = \overline{\mathcal{G}}_\alpha$ , где  $\mathcal{G}_\alpha$  — линейное многообразие в  $\mathbf{S}_2(M, K)$ , определенное ранее перед формулой (2.8). Сама формула (2.8) сохраняется, и, следовательно, в соотношении (2.9) можно заменить многообразие  $\mathcal{G}_\alpha$  на  $\mathcal{G}_{2\alpha} \subset \mathcal{G}_\alpha$ . Поскольку выполняется равенство (2.7), общие значения минимакса и максимина в задачах 3.1 и 1.1 при условии  $\mathcal{M}_i \in \mathbf{S}_\infty(H_i, M)$ ,  $i = 1, 2$ , одинаковы.  $\square$

Перейдем к условиям существования и единственности. Если заменить условия теоремы 2.7 на условия теорем 3.3 или 3.4 в формулировках теорем 2.12, 2.14 и следствия 2.13, то эти утверждения остаются верными. В случае условий теоремы 3.4 следует заменить класс  $\mathcal{L}(M, K)$  на  $\mathbf{S}_2(M, K)$ , задачу 1.1 на задачу 3.1 и учесть, что слабая\* и слабая топологии тогда совпадают. Отметим, что в большинстве случаев приложений к оцениванию состояний дифференциальных уравнений, хотя операторы  $\mathcal{M}_i$  в уравнениях измерений и не оказываются компактными, удается доказать разрешимость уравнения (2.10) даже в классе  $\mathbf{S}_2(M, K)$ . Это позволяет установить совпадение оптимальных значений задач 1.1 и 3.1. При этом, решая задачу 3.1, следует воспользоваться более простым по сравнению с 2.4 предположением 3.2.

#### 4. Задача линейного оценивания для эволюционных систем

Рассмотрим эволюционную систему вида

$$x(t) = S_t x_0 + \int_0^t S_{t-s}(dw(s) + Qu(s)ds), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (4.1)$$

и уравнение измерения

$$y(t) = \int_0^t (Cx(s) + Fr(s))ds + \eta(t), \quad (4.2)$$

где  $S_t$  — сильно непрерывная полугруппа с инфинитезимальным замкнутым генератором  $A$ ,  $Ax = \lim_{t \rightarrow +0} t^{-1}(S_t - I)x$ , область определения  $D(A)$  которого плотна в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ ;  $w(t)$  — винеровский процесс в  $H$ ,  $\text{cov}(w(t) - w(s)) = (t - s)W$ ,

$W \in \mathcal{K}(H)$ . Пусть  $\bar{x}_0 = Ex_0 = Lq$ ,  $\text{cov}(x_0) = P_0 \in \mathcal{K}(H)$ ,  $L \in \mathcal{L}(H_0, H)$ ,  $Q \in \mathcal{L}(Z, H)$ , где  $H_0$  и  $Z$  — сепарабельные гильбертовы пространства. Начальное состояние  $x_0$  некоррелировано с  $w(t)$ . В уравнении измерения  $C \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^m)$ ,  $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$  — конечномерные операторы,  $\eta(t)$  — винеровский процесс, некоррелированный с  $w(t)$  и  $x_0$ ,  $\text{cov}(\eta(t) - \eta(s)) = (t - s)R$ ,  $R \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ . Неопределенные детерминированные величины  $u(\cdot)$ ,  $r(\cdot)$  стеснены неравенством

$$\delta \|q\|^2 + \int_0^{t_1} (\beta \|u(s)\|^2 + \gamma \|r(s)\|^2) ds \leq 1, \quad (4.3)$$

где параметры  $\delta, \beta, \gamma > 0$ , а точно неизвестные ковариационные операторы случайных элементов удовлетворяют включениям

$$W \in \mathcal{W} \subset \mathcal{K}(H), \quad P_0 \in \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{K}(H), \quad R \in \mathcal{R} \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^m), \quad (4.4)$$

где  $\mathcal{W}, \mathcal{P}_0, \mathcal{R}$  — выпуклые, замкнутые и ограниченные множества в соответствующих пространствах. Рассмотрим следующую задачу.

**Задача 4.1.** Для системы (4.1) с уравнением измерения (4.2) найти оценку вида

$$d_t(y(\cdot)) = \int_0^t G(t, s) dy(s), \quad G(t, s) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, K), \quad \int_0^t \|G(t, s)\|^2 ds < \infty, \quad (4.5)$$

такую, что  $\sup_{q, v(\cdot), r(\cdot), W, P_0, R} E \|Ux(t) - d_t(y(\cdot))\|^2 \rightarrow \min_{G(t, \cdot)}$ , где  $U \in \mathbf{S}_2(H, K)$ ,  $K$  — сепарабельное гильбертово пространство.

Покажем, что задача 4.1 — это задача типа 3.1 для соответствующих операторов, и найдем упомянутые операторы. Пусть  $H_1 = H_0 \times L_2([0, t_1], M) \times L_2^p(0, t_1)$ . Скалярное произведение в этом пространстве определим формулой  $(v_1, v_2)_{H_1} = \delta(q_1, q_2)_{H_0} + \int_0^{t_1} (\beta(u_1(s), u_2(s))_Z + \gamma(r_1(s), r_2(s))_{\mathbb{R}^p}) ds$ , где  $v_i = (q_i, u_i(\cdot), r_i(\cdot))$ . Тогда неравенство (4.3) задает множество  $\mathbb{V}$ , совпадающее с единичным шаром в пространстве  $H_1$  и ограничивающее неопределенные параметры  $v$ . Имеем

$$\mathcal{T}_1 v = S_t L q + \int_0^t S_{t-s} Q u(s) ds, \quad \mathcal{M}_1 v(t) = C(S_t L q + \int_0^t S_{t-\tau} Q u(\tau) d\tau) + F r(t). \quad (4.6)$$

Область значений оператора  $\mathcal{M}_1$  — это пространство  $M = L_2^m(0, t_1)$ . Поскольку винеровские процессы  $w(\cdot)$ ,  $\eta(\cdot)$  однозначно порождают винеровские меры  $dw$ ,  $d\eta$ , т. е. вероятностные распределения на пространствах  $L_2([0, t_1], M)$  и  $L_2^m(0, t_1)$ , а стохастический интеграл определяет линейный оператор, непрерывный относительно сходимости в среднем квадратичном, то можно считать, что случайный элемент  $\xi = \{\tilde{x}_0, dw(\cdot), d\eta(\cdot)\}$ , где  $\tilde{x}_0 = x_0 - \bar{x}_0$ , лежит в пространстве  $H_2 = H \times L_2([0, t_1], M) \times L_2^m(0, t_1)$ . Следовательно,

$$\mathcal{T}_2 \xi = S_t \tilde{x}_0 + \int_0^t S_{t-s} dw(s), \quad \mathcal{M}_2 \xi(t) = C(S_t \tilde{x}_0 + \int_0^t S_{t-\tau} dw(\tau)) + d\eta(t). \quad (4.7)$$

Здесь также область значений оператора  $\mathcal{M}_2$  — это пространство  $M = L_2^m(0, t_1)$ . Отметим, что в равенстве (4.7) реализации  $dw(\cdot)$ ,  $d\eta(\cdot)$  представляют собой произвольные элементы функциональных пространств, распределенные в соответствии с винеровскими мерами. Из представлений (4.6), (4.7) видно, что, вообще говоря, операторы  $\mathcal{M}_i$ ,  $i = 1, 2$ , не компактны. Отметим

также, что при фиксированном  $t$  в задаче 4.1 операторы наблюдения  $By(\cdot) = d_t(y(\cdot))$ , определенные по формуле (4.5), принадлежат пространству  $\mathbf{S}_2(L_2^m(0, t), K)$ .

Вычислим функционал задачи 4.1. Аналогично (2.1) с использованием свойств стохастических интегралов имеем

$$\begin{aligned} E\|Ux(t) - d_t(y(\cdot))\|^2 = & \operatorname{tr} \left[ \mathbb{G}(t, 0)P_0\mathbb{G}^*(t, 0) + \int_0^t (\mathbb{G}(t, s)W\mathbb{G}^*(t, s) \right. \\ & \left. + G(t, s)R\mathbb{G}^*(t, s))ds \right] + \left\| \mathbb{G}(t, 0)Lq + \int_0^t (\mathbb{G}(t, s)Qu(s) - G(t, s)Fr(s))ds \right\|^2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\mathbb{G}^*(t, s) = S_{t-s}^*U^* - \int_s^t S_{\tau-s}^*C^*G^*(t, \tau)d\tau. \quad (4.9)$$

Проведем максимизацию по  $v = \{q, u(\cdot), r(\cdot)\}$ . Правая часть выражения (4.8) состоит из двух слагаемых, первое из которых не зависит от  $v$ . Записав это выражение как максимум скалярного произведения, найдем максимальное по  $v$  значение, равное

$$\begin{aligned} \varkappa^2 = & \max_{l \in K, \|l\|=1} \left( l, \delta^{-1}\mathbb{G}(t, 0)LL^*\mathbb{G}^*(t, 0)l + \int_0^t [\beta^{-1}\mathbb{G}(t, s)QQ^*\mathbb{G}^*(t, s)l \right. \\ & \left. + \gamma^{-1}G(t, s)FF^*G^*(t, s)l]ds \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Введем линейные операторы

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\alpha 0} : \mathbb{G}^* & \mapsto P_0\mathbb{G}^* + \delta^{-1}LL^*\mathbb{G}^*V, & \mathbb{W}_{\alpha} : \mathbb{G}^* & \mapsto W\mathbb{G}^* + \beta^{-1}QQ^*\mathbb{G}^*V, \\ \mathbb{R}_{\alpha} : G^* & \mapsto RG^* + \gamma^{-1}FF^*G^*V, \end{aligned} \quad (4.11)$$

действующие в пространствах  $\mathbf{S}_2(K, H)$  и  $\mathbf{S}_2(K, \mathbb{R}^m)$  (для  $\mathbb{R}_{\alpha}$ ) соответственно. С учетом равенств (4.8)–(4.11) получаем, что задача 4.1 эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha} \{ & (\mathbb{P}_{\alpha 0}\mathbb{G}^*(t, 0), \mathbb{G}^*(t, 0))_{\text{HS}} + \int_0^t [(\mathbb{W}_{\alpha}\mathbb{G}^*(t, s), \mathbb{G}^*(t, s))_{\text{HS}} \\ & + (\mathbb{R}_{\alpha}G^*(t, s), G^*(t, s))_{\text{HS}}] ds \} \rightarrow \min_{G(t, \cdot)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $\alpha = \{V, W, P_0, R\} \in \mathcal{A} = \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times \mathcal{P}_0 \times \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{V} = \overline{\text{co}}\{l \circ l : \|l\| = 1\}$ .

Отметим, что здесь предположение о неопределенных параметрах  $\alpha \in \mathcal{A}$  заведомо выполнено. Выражение в фигурных скобках в формуле (4.12) — функционал задачи 4.1 — обозначим через  $J_t(G, \alpha)$ . Этот функционал служит аналогом функционала  $L(B, \alpha)$ . Здесь операторы наблюдения имеют специальный вид и образуют линейное многообразие в пространстве  $\mathbf{S}_2(M, K)$ . Примем

**Предположение 4.2.** Для любого  $\alpha = \{V, W, P_0, R\} \in \mathcal{A}$  оператор  $\mathbb{R}_{\alpha}$  коэрцитивен в пространстве  $\mathbf{S}_2(K, \mathbb{R}^m)$ :  $(\mathbb{R}_{\alpha}G^*, G^*)_{\text{HS}} \geq c\|G^*\|^2$ ,  $c > 0$ .

При сделанном предположении решение задачи на минимум функционала  $J_t(G, \alpha)$  при фиксированном  $\alpha$  хорошо известно и является единственным [16]. С другой стороны, аналогично теоремам 3.3 и 3.4 получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.3.** *Задача 4.1 эквивалентна задаче (4.12), и, кроме того, справедливо равенство*

$$\inf_G \max_{\alpha \in \mathcal{A}} J_t(G, \alpha) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \inf_G J_t(G, \alpha).$$

Проведем минимизацию функционала  $J_t(G, \alpha)$  по  $G$ . Отметим, что на гильбертовом пространстве  $\mathbf{S}_2(K, H)$  полугруппа  $S_t^*$  является сильно непрерывной. Согласно [16] минимум квадратичного функционала  $J_t(G, \alpha)$  для эволюционного уравнения (4.9) равен  $(\mathbb{P}_\alpha(t)U^*, U^*)$ , где самосопряженный и неотрицательный в  $\mathbf{S}_2(K, H)$  оператор  $\mathbb{P}_\alpha(t)$  служит единственным решением уравнения Риккати:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\mathbb{P}_\alpha(t)\mathbb{G}^*, \mathbb{F}^*)_{\text{HS}} + (\mathbb{P}_\alpha(t)\mathbb{G}^*, A^*\mathbb{F}^*)_{\text{HS}} + (A^*\mathbb{G}^*, \mathbb{P}_\alpha(t)\mathbb{F}^*)_{\text{HS}} + (\mathbb{W}_\alpha\mathbb{G}^*, \mathbb{F}^*)_{\text{HS}} \\ & = (\mathbb{P}_\alpha(t)C^*\mathbb{R}_\alpha^{-1}C\mathbb{P}_\alpha(t)\mathbb{G}^*, \mathbb{F}^*)_{\text{HS}}, \quad \mathbb{P}_\alpha(0) = \mathbb{P}_{\alpha 0}, \quad \mathbb{G}^*, \mathbb{F}^* \in D(A^*). \end{aligned} \quad (4.13)$$

При этом оптимальное ядро  $G^*(t, \tau) = \mathbb{R}_\alpha^{-1}C\mathbb{P}_\alpha(\tau)\mathbb{G}^*(t, \tau)$  в уравнении (4.9) выражается по принципу обратной связи. Поскольку оператор  $\mathbb{P}_\alpha(t)$  сильно непрерывен, то согласно [16, теорема 2.33] существует единственный мягкий эволюционный оператор  $\mathbf{G}(t, s)$ , удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{G}^*(t, s)U^* = S_{t-s}^*U^* - \int_s^t S_{t-\tau}^*C^*\mathbb{R}_\alpha^{-1}C\mathbb{P}_\alpha(\tau)\mathbf{G}^*(t, \tau)U^*d\tau \quad (4.14)$$

при  $0 \leq s \leq t \leq t_1$  для любого  $U^* \in \mathbf{S}_2(K, H)$ ,  $\mathbf{G}(t, t) = I$ . Поэтому  $\mathbb{G}^*(t, s) = \mathbf{G}^*(t, s)U^*$ . Справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \int_s^t \mathbf{G}^*(\tau, s)(A^* - C^*\mathbb{R}_\alpha^{-1}C\mathbb{P}_\alpha(\tau))U^*d\tau = \mathbf{G}^*(t, s)U^* - U^* \quad \forall U^* \in D(A^*), \\ & \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{G}^*(t, s)U^* = \mathbf{G}^*(t, s)(A^* - C^*\mathbb{R}_\alpha^{-1}C\mathbb{P}_\alpha(t))U^*, \quad \mathbf{G}^*(s, s) = I. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Оптимальная оценка, выраженная через оператор (4.14), с учетом равенств (4.15) для фиксированного  $\alpha$  имеет вид

$$d_t(y(\cdot)) = \int_0^t U\mathbf{G}(t, s)\mathbb{P}_\alpha(s)C^*\mathbb{R}_\alpha^{-1}dy(s). \quad (4.16)$$

Так как  $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{G}(t, s)h = (A - \mathbb{P}_\alpha(t)C^*\mathbb{R}_\alpha^{-1}C)\mathbf{G}(t, s)h$ , то  $\mathbf{G}(t, s)h = S_{t-s}h - \int_s^t S_{t-\tau}\mathbb{P}_\alpha(\tau)C^*\mathbb{R}_\alpha^{-1}C \times \mathbf{G}(\tau, s)hd\tau$ , поскольку  $\mathbf{G}(t, s)$  — возмущенный оператор. Отсюда получаем

$$d_t(y(\cdot)) = U\hat{x}(t), \quad \hat{x}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(t, s)\mathbb{P}_\alpha(s)C^*\mathbb{R}_\alpha^{-1}dy(s) = \int_0^t S_{t-s}\mathbb{P}_\alpha(s)C^*\mathbb{R}_\alpha^{-1}(dy(s) - C\hat{x}(s)ds). \quad (4.17)$$

В заключение сделаем замечание о возможности представления оценки в дифференциальной форме.

**З а м е ч а н и е 4.4.** Пусть выполнены следующие предположения:

а) операторы  $S_t\mathbb{P}_{\alpha 0}$  и  $S_t\mathbb{W}_\alpha$  отображают пространство  $\mathbf{S}_2(K, H)$  в  $D(A)$ ;

б)  $\int_0^{t_1} \|AS_t\mathbb{P}_{\alpha 0}f(t)\|^2 dt < \infty$  для всех функций  $f \in L(0, t_1; \mathbf{S}_2(K, H))$ ;

$$\text{в) } \int_0^{t_1} \|AS_t \mathbb{W}_\alpha f(t)\|^2 dt < \infty \text{ для всех функций } f \in L(0, t_1; \mathbf{S}_2(K, H)).$$

Тогда с учетом условий а) – в) аналогично [16] получаем, что величина  $\hat{x}(t)$  из (4.17) при фиксированном  $\alpha$  служит единственным сильным решением уравнения

$$d\hat{x}(t) = A\hat{x}(t)dt + \mathbb{P}_\alpha(t)C^*\mathbb{R}_\alpha^{-1}(dy(t) - C\hat{x}(t)dt), \quad \hat{x}(0) = 0. \quad (4.18)$$

Отметим еще, что в случае, когда  $U$  — линейный непрерывный функционал и множества во включениях (4.4) содержат максимальные элементы  $W^o$ ,  $P_0^o$ ,  $\mathbb{R}^o$ , максимизация по  $\alpha$  становится излишней.

## 5. Примеры

1) Рассмотрим численную процедуру для решения задачи 4.1 предыдущего пункта для одномерного уравнения теплопроводности  $x_t = x_{\xi\xi} + \dot{w}(t) + b(\xi, t)$  на  $[0, 1]$  с краевыми условиями  $x_\xi(0, t) = x_\xi(1, t) = 0$ . Здесь  $H = L_2(0, 1)$ ,  $Ah = \partial^2 h / \partial \xi^2$ . Область определения  $D(A) = \{x \in H : x_\xi, x_{\xi\xi} \in H, x_\xi(0, t) = x_\xi(1, t) = 0\}$  плотна в  $H$ . Пусть  $\phi_i(\xi) = \sqrt{2} \cos i\pi\xi$ ,  $i \geq 1$ , и  $\phi_0(\xi) \equiv 1$ . Эти функции образуют ортонормированную (неполную) систему в  $H$ . Пусть  $w(t)(\xi) = \sum_i \beta_i(t)\phi_i(\xi)$ , где  $\beta_i(t)$  — независимые между собой одномерные винеровские процессы,  $\text{cov}(\beta_i(t) - \beta_i(s)) = (t - s)\lambda_i$  и  $\sum_i \lambda_i < \infty$ . Функция  $b(\xi, t) = \sum_i b_i u_i(t)\phi_i(\xi)$ . Начальное состояние  $x(\xi, 0) = x_0 = \sum_i a_i \phi_i(\xi)$ , где  $a_i$  — независимые между собой и с  $\beta_i$  случайные величины с  $Ea_i = 0$ ,  $\text{cov}(a_i) = \mu_i$ ,  $\sum_i \mu_i < \infty$ . Полугруппа здесь аналитическая, и  $(S_t h)(\xi) = \sum_{n \geq 0} e^{-n^2 \pi^2 t} \phi_n(\xi) \int_0^1 \phi_n(z) h(z) dz$ . Выполняются условия  $S_t : H \rightarrow D(A)$  и  $AS_{t-s} \phi_n(\cdot) = -\pi^2 n^2 e^{-n^2 \pi^2 (t-s)} \phi_n(\cdot)$ . Задано одномерное уравнение наблюдения  $dy(t) = \int_0^1 c(\xi) x(\xi, t) d\xi dt + d\eta(t) + gr(t)dt$ , где  $c(\cdot) \in H$ . Для винеровского процесса  $\eta(t)$  имеем  $\text{cov}(\eta(t) - \eta(s)) = (t - s)\nu$ ,  $\nu \geq 0$ . Детерминированные возмущения стеснены неравенством  $\int_0^{t_1} (\beta \sum_{i \geq 0} u_i^2(t) + \gamma r^2(s)) ds \leq 1$ . Здесь  $L = 0$ . Оператор Риккати в уравнении (4.13) запишем как  $P(t)h = \sum_{i,j} p_{ij}(t)\phi_j(h, \phi_i)$ . Тогда

$$\dot{p}_{ij}(t) + \pi^2(i^2 + j^2)p_{ij}(t) - \bar{\lambda}_i \delta_{ij} + \sum_{m,n} p_{im}(t)p_{jn}(t)\alpha_{mn} = 0, \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}\mu_i,$$

где  $\alpha_{mn} = (C\phi_m)(C\phi_n)$ ,  $\bar{\lambda}_i = \lambda_i + b_i^2 \beta^{-1}$ . Если  $\sum_i (\bar{\lambda}_i + \mu_i^2) i^2 < \infty$ , то оценка  $\hat{x}(t) = \sum_i \hat{x}_i(t)\phi_i(\xi)$  может быть представлена в дифференциальном виде (4.18). Метод численного решения состоит в сохранении конечного числа  $N$  гармоник в представлении  $\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{x}_i(t)\phi_i(\xi)$  и последующей замене получающейся конечномерной системы дифференциальных уравнений многошаговой системой.

2) Рассмотрим уравнение с запаздываниями

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=0}^N A_i \xi(t + \theta_i) + \int_{-b}^0 A_{01}(\theta) \xi(t + \theta) d\theta + \dot{w}(t) + Bu(t), \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^n,$$

где  $-b \leq \theta_N < \dots < \theta_0 = 0$ . Введем гильбертово пространство  $H = \mathcal{M}_2^2(-b, 0)$  со скалярным

произведением  $\langle h, g \rangle = h'(0)g(0) + \int_{-b}^0 h'(\theta)g(\theta)d\theta$ . Решение системы можно записать по формуле Коши с помощью фундаментальной матрицы  $X(t)$ ;  $X(0) = I$ ,  $X(t) = 0$ ,  $t < 0$ . Отсюда следует представление полугруппы

$$(S_t h)(\theta) = X(t + \theta)h(0) + \begin{cases} \Phi_1(t + \theta)h(\cdot), & t + \theta \geq 0, \\ h(t + \theta), & t + \theta < 0, \end{cases}$$

где  $\Phi(t) : L_2(-b, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывный линейный оператор. Полугруппа имеет производящий оператор  $(Ah)(\theta)$ , область определения которого  $D(A) = AC_2^n(-b, 0)$ , где  $AC_2^n(-b, 0) \subset \mathcal{M}_2^n(-b, 0)$  — гильбертово пространство абсолютно непрерывных функций с соответствующим скалярным произведением. Уравнение наблюдения имеет вид

$$\dot{y}(t) = C_0\xi(t) + \int_{-b}^0 C_{01}(\theta)\xi(t + \theta)d\theta + \dot{\eta}(t) + Fr(t), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Пусть  $\Gamma : \mathcal{M}_2^n(-b, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  — проекция, сопоставляющая функции  $h(\cdot)$  значение  $h(0)$ . Тогда

$x(t) = S_t x_0 + \int_0^t S_{t-s} \Gamma^*(dw(s) + Qu(s)ds)$  есть представление решения в основном пространстве  $H$ . Ограничения на неопределенные величины берем в интегральном виде, как указано выше. Оператор  $U$  предполагается заданным в виде  $Ux = \langle u, x \rangle$ , где  $u \in \mathcal{M}_2^n(-b, 0)$ . Здесь  $K = R$ . В соответствии с общей теорией требуем, чтобы матрица  $R_\alpha = R + \gamma^{-1}FF'$  была невырожденной. Пусть  $P_{\alpha 0} = P_0 + \delta^{-1}LL^*$ ,  $W_\alpha = W + \beta^{-1}\Gamma^*QQ'\Gamma$ , где  $\alpha = (W, P_0, R)$  — совокупность неопределенных ковариационных матриц;  $C$  — оператор наблюдения, действующий

по формуле  $Ch = C_0h(0) + \int_{-b}^0 C_{01}(\theta)h(\theta)d\theta$  в пространстве  $H$ . Тогда наилучшая минимаксная

оценка в задаче наблюдения имеет вид  $d_t(y(\cdot)) = \langle u, \hat{x}(t) \rangle$ ,

$$\hat{x}(t) = \int_0^t S_{t-s} P_\alpha(s) C^* R_\alpha^{-1} (dy(s) - C\hat{x}(s)ds),$$

причем интегральное уравнение имеет здесь единственное решение. Оптимальное значение рассогласования оценки и состояния равно  $\sup_\alpha \langle u, P_\alpha u \rangle$ . Здесь  $P_\alpha(s) : H \rightarrow H$  — решение дифференциального уравнения Риккати:

$$d \langle P_\alpha(t)g, f \rangle / dt + \langle P_\alpha(t)g, A^*f \rangle + \langle A^*g, P_\alpha(t)f \rangle + \langle W_\alpha g, f \rangle = \langle P_\alpha(t)C^*R_\alpha^{-1}CP_\alpha(t)g, f \rangle, \quad P_\alpha(0) = P_{\alpha 0}, \quad g, f \in D(A^*).$$

Последнее уравнение должно выполняться для любых  $g, f \in D(A^*)$ . Уравнение Риккати имеет единственное решение, продолжимое на весь интервал  $(0, t_1)$  для любого  $t_1$ . Вопросам численного решения полученных уравнений будет посвящена отдельная работа.

Поступила 20.05.04

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калман Р.Е., Бьюси Р.С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания //Техническая механика (сб. переводов). Сер. Д. 1961. № 1. С. 123–136.

2. **Красовский Н.Н.** К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 1. С. 3–14.
3. **Johansen D.E.** Solution of a Linear Mean Square Estimation Problem when Process Statistics are Undefined // IEEE Trans. Automat. Contr. 1966. Vol. AC-11. P. 20–30.
4. **Александров В.М.** Минимаксный подход к решению задачи обработки информации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1966. № 5. С. 124–136.
5. **Иргер Д.С.** Об оптимальной фильтрации по минимаксному критерию // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1966. № 5. С. 137–144.
6. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
7. **Кац И.Я., Куржанский А.Б.** Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 79–87.
8. **Kurzhanskii A.B., Khapalov A.Yu.** An Observation Theory for Distributed-Parameter Systems // Journal of Math. Systems, Estimation and Control. 1991. V. 1, No 4. P. 389–440.
9. **Матасов А.И.** Введение в теорию гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МАИ, 1999.
10. **Дигаилова И.А.** Задача фильтрации со смешанной неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001, № 5. С. 16–24.
11. **Ананьев Б.И.** Минимаксные среднеквадратичные оценки в статистически неопределенных системах // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 8. С. 1291–1297.
12. **Ананьев Б.И.** Минимаксная линейная фильтрация многошаговых процессов с неопределенными распределениями возмущений // Автоматика и телемеханика. 1993. № 10. С. 131–139.
13. **Anan'ev B.I.** A Guaranteed Filtering Scheme for Hereditary Linear Systems // Journal of Math. Systems, Estimation and Control. 1998. V. 8, No 3. P. 365–368.
14. **Пытьев Ю.П.** Псевдообратный оператор. Свойства и применения // Матем. сборник. 1983. Т. 118(160), № 1(5). С. 19–49.
15. **Пытьев Ю.П.** Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М.: Физматлит, 2002.
16. **Curtain R.F., Pritchard A.J.** Infinite Dimensional Linear Systems Theory. Springer-Verlag, 1978.
17. **Рид М., Саймон Б.** Функциональный анализ. 1. М.: Мир, 1977.
18. **Шубин М.А.** Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.
19. **Лоран П.-Ж.** Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.
20. **Ниренберг Л.** Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977.
21. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

УДК 517. 977

## ПОИСК С ПРОТИВОДЕЙСТВИЕМ

В. Ю. Андрианов, Н. Н. Петров

В статье рассматриваются новые задачи гарантированного поиска на графах. Ставится вопрос о нахождении минимальной численности группы преследователей, способных успешно (в том или ином смысле) завершить поиск “невидимого” убегающего.

### Введение

Задачи подобного рода впервые были поставлены в работах [1, 2], в которых искомая величина в дальнейшем получила название реберно-поискового числа. В работе [3] была предложена модификация этой задачи, в которой искомая характеристика графа была названа вершинно-поисковым числом. С тех пор за рубежом было выполнено большое число исследований, посвященных различным поисковым числам (см., например, библиографию в [4]). В той же работе обсуждается важность задач подобного рода, обусловленная многочисленными приложениями. Среди них достаточно назвать построение моделей борьбы с компьютерным вирусом с помощью так называемых “программ-вакцин” и вычисление основных характеристик графа, возникающих в теории сверхбольших интегральных схем (СБИС).

В настоящей работе рассматриваются новые задачи поиска на графах, главной особенностью которых является активное противодействие убегающего команде преследователей, стремящейся его обнаружить. Противодействие состоит в том, что при определенных условиях убегающий может уничтожить одного из участников группы поиска, после чего преследование продолжается в уменьшенном составе. В момент уничтожения преследователя убегающий обнаруживает себя, что является своеобразной информационной компенсацией за “потерю бойца”. Кроме того, в настоящей работе рассматривается так называемый “шашечный” вариант. Дополнительное условие, определяющее этот вариант, состоит в том, что убегающий обязан уничтожить преследователя, если такая возможность ему предоставляется. Таким образом, в статье обсуждается одна из моделей конфликтного поиска с учетом “засад” и возможных потерь в команде преследователей.

### 1. Описание модели

Переходим к описанию этой модели. Местом действия является произвольный неориентированный связный граф  $G$ , содержащий, по крайней мере, одно ребро и не имеющий ни петель, ни кратных ребер. На этом графе рассматривается многошаговая игра преследования, участниками которой являются преследователи  $P_1, \dots, P_r$  и убегающий  $E$ . Всех участников игры будем называть *игроками*. Далее по понятным причинам предполагается, что  $r$  меньше числа вершин графа  $G$ . На каждом шаге игры все игроки располагаются в вершинах графа  $G$ , причем каждая вершина не может быть занята более чем одним игроком. *Ходом* игрока будем называть его переход в смежную вершину, который далее обозначается стрелкой  $\rightarrow$ . *Ходом команды* преследователей является, по определению, ход ровно одного из ее участников. Команда  $P$  преследователей и убегающий  $E$  делают ходы по очереди (начинают преследователи), при этом, как следует из сказанного, ни одна из сторон не может “пропустить” ход. Каждый

шаг в игре состоит из хода команды преследователей и ответного хода убегающего. Начальные позиции и дальнейшие ходы выбираются сторонами на основе поступающей им информации, о чем будет сказано ниже.

Если после хода одного из преследователей он окажется в вершине, занятой убегающим, то игра завершается в пользу преследователей (в этом случае говорят, что убегающий *пойман*). В свою очередь, если убегающий переходит в вершину, занятую преследователем, то этот преследователь *снимается* с графа, и игра продолжается. Цель команды преследователей — поймать убегающего, цель убегающего — помешать этому. Если убегающий достигает своей цели, то будем говорить, что имеет место *уклонение*.

Переходим теперь к описанию информации, которую получают стороны в течение игры. Убегающему на каждом шаге сообщается полная информация о расположении преследователей; более того, предполагается, что он до начала игры получает информацию о выбранной ими стратегии (точное определение приводится ниже). Таким образом, в данной формализации речь идет о задаче *гарантированного* поиска. Что касается преследователей, то на первом шаге начальное положение убегающего им неизвестно (они его “не видят”); он может находиться в любой вершине графа  $G$ , не занятой преследователями. На шаге с номером  $k \geq 2$  преследователи получают информацию одного из следующих трех видов:

- (1) на  $(k - 1)$ -ом шаге убегающий был пойман, в этом случае игра завершается;
- (2) на  $(k - 1)$ -ом шаге убегающий снял одного из преследователей, занял его вершину и стал “видимым” для преследователей (информацию о положении убегающего преследователи получают только после хода “со снятием”);
- (3) на  $(k - 1)$ -ом шаге убегающий сделал ход “без снятия”.

*Позицией* на шаге с номером  $k \geq 2$  будем называть информацию, полученную преследователями о всей “предыстории” игры, включая ход убегающего на  $(k - 1)$ -ом шаге, т.е. информацию о всех ходах участников для  $(k - 1)$ -го шага включительно. Аналогичное определение используется в шахматном кодексе: в понятие позиции включается не только расположение фигур, но и некоторые элементы предыстории, разрешающие или запрещающие рокировку или взятие “на проходе”.

*Стратегией* команды преследователей назовем тройку  $S = (m_0, D_0, U)$ , где  $m_0$  — число ходов в игре,  $D_0$  — начальная расстановка преследователей, т.е. множество всех вершин, занятых преследователями перед первым ходом, и  $U$  — отображение, которое каждой позиции ставит в соответствие ход.

Стратегия называется *выигрывающей*, если она приводит к поимке при любом поведении убегающего (информированного указанным выше образом).

Наименьшую численность команды преследователей, обладающей выигрывающей стратегией, будем называть  $\alpha$ -*поисковым числом* и обозначать  $\alpha(G)$ .

Поставленную задачу гарантированного поиска на графе  $G$  будем обозначать через  $A(G)$ . Далее будет рассматриваться задача  $A_0(G)$  с “обязательным” противодействием, которая отличается от  $A(G)$  тем, что на поведение убегающего накладывается дополнительное условие, а именно: убегающий *обязан* снять преследователя с графа, если такая возможность ему предоставляется. Если таких преследователей несколько, то можно снять любого. Наименьшую численность команды преследователей, обладающей выигрывающей стратегией в задаче  $A_0(G)$ , будем называть  $\alpha_0$ -*поисковым числом* и обозначать  $\alpha_0(G)$ . Нетрудно видеть, что для любого графа  $G$  справедливо неравенство  $\alpha(G) \geq \alpha_0(G)$ , поскольку в игре  $A_0(G)$  убегающий находится в худшем положении, чем в игре  $A(G)$ . Для некоторых графов величины  $\alpha(G)$  и  $\alpha_0(G)$  могут сильно отличаться. Например,  $\alpha$  и  $\alpha_0$ -поисковые числа для полного графа с  $n$  вершинами для  $n \geq 4$  равны  $n - 2$  и 2 соответственно.

Изучению  $\alpha$  и  $\alpha_0$ -поисковых чисел посвящены работы [5–8]. Задача нахождения этих характеристик для произвольного графа оказалась весьма трудной, и в настоящее время ее решение

удалось получить лишь в исключительных случаях. Даже случай циклов (подробно рассмотренный ниже) оказывается нетривиальным. Выяснилось, что с уменьшением числа вершин в цикле  $\alpha$  и  $\alpha_0$ -поисковые числа могут увеличиться (см. теорему 1). В общем случае может оказаться, что  $\alpha(H) > \alpha(G)$  для связного подграфа  $H$  графа  $G$  (см. замечание к теореме 1). Отметим еще одну особенность рассматриваемой формализации. Пока не удастся доказать в полной общности следующий “очевидный” факт: если некоторая команда преследователей имеет выигрывающую стратегию, то выигрывающую стратегию имеет и любая команда преследователей большей численности или, что то же, уклонение от  $k$  преследователей влечет за собой уклонение от  $s$  преследователей для любого  $s < k$ . Эти нарушения “монотонности” величин  $\alpha(G)$  и  $\alpha_0(G)$  существенно отличают их от ранее известных поисковых чисел (таких, как  $ns(G)$ ,  $es(G)$  и др.).

## 2. Основная теорема

В этом пункте будет доказан фрагмент основной теоремы о циклах из [7].

**Теорема 1.** Пусть  $C_n$  — цикл с  $n$  вершинами. Тогда для  $n \geq 13$

$$\alpha(C_n) = \alpha_0(C_n) = \begin{cases} 5, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 4, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Можно показать, что  $\alpha_0(C_{12}) = 4$ , но  $\alpha(C_{12}) = 5$ . Доказательство теоремы 1 основывается на леммах 1–3.

**Лемма 1.** Если  $n$  четно и  $n > 13$ , то  $\alpha_0(C_n) \geq 5$ .

Предположим, что существует выигрывающая стратегия  $S$  команды преследователей  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , занумерованных, например, по часовой стрелке в соответствии с их расположением на цикле. Можно считать, что  $S$  — выигрывающая стратегия с наименьшим числом шагов. Покажем, как убегающий может избежать поимки.

Нам понадобятся некоторые определения, касающиеся стратегии  $S$ .

*Моментом* (в стратегии  $S$ ) будем называть номер шага с указанием очередности хода.

В следующих определениях стратегия  $S$  и момент  $t$  игры будут фиксированы.

Назовем игрока *изолированным*, если обе вершины, смежные занятой им вершине, свободны от преследователей. Пусть  $H$  — четверка игроков.  $H$ -*расстановкой* называется множество всех вершин, занятых игроками из  $H$ .

Двух игроков будем называть *соседними* в некоторой  $H$ -расстановке, если занятые ими вершины можно соединить путем, свободным от остальных игроков из  $H$ .

*Четность* игрока в  $H$ -расстановке означает четность суммы расстояний между этим игроком и его “соседями”.

Будем называть  $H$ -расстановку *точной*, если все игроки из  $H$  имеют одну и ту же четность. В противном случае будем называть ее *неточной*.

Пусть  $H = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ . Нетрудно видеть, что после каждого хода команды  $P$  точная  $H$ -расстановка становится неточной и наоборот.

Покажем сначала, что убегающий может снять изолированного преследователя в некоторой неточной  $H$ -расстановке.

Пусть  $D_0$  — начальная  $H$ -расстановка в  $S$  и  $D_k$  —  $H$ -расстановка, получившаяся после  $k$ -го хода команды  $P$  для  $k \geq 1$ . Если  $D_1$  неточная, то в ней существует изолированный преследователь, который может быть снят убегающим на первом же шаге. В самом деле, если изолированный преследователь находится в вершине  $v \in D_1$ , то в начальный момент убегающий занимает вершину  $v_1 \notin D_1$ , смежную  $v$ , и делает ход:  $v_1 \rightarrow v$ .

Пусть теперь  $D_1$  точная. Обозначим через  $d$  максимальное расстояние между соседними преследователями и пусть  $l_1$  — путь длины  $d$ , соединяющий вершины, занятые этими преследователями в  $D_1$ . Так как  $n > 13$ ,  $d \geq 4$ . Обозначим вершины  $l_1$ , занумерованные по часовой стрелке, через  $v_0, v_1, \dots, v_d$  и предположим, что вершины  $v_0$  и  $v_d$  заняты в  $D_1$  преследователями  $P_1$  и  $P_2$  соответственно. Вершины цикла, следующие за  $v_d$ , будем обозначать через  $v_{d+1}, v_{d+2}, \dots$  и т.д. Пусть  $Q_0$  — множество всех вершин пути  $l_1$ , отстоящих от его концов на расстоянии не меньше 2. Ясно, что  $|Q_0| \geq 1$ .

Покажем, как убегающий может обеспечить уклонение, выбрав в начальный момент подходящую вершину из  $Q_0$ . Обозначим через  $l_k$  путь, соединяющий вершины, занятые преследователями  $P_1$  и  $P_2$  в  $D_k$ , свободный от других преследователей, и пусть  $Q_k$  — множество всех вершин пути  $l_k$ , отличных от его концов. Пути  $l_k$  и множества  $Q_k$  рассматриваются для тех  $k \geq 1$ , для которых определены множества  $D_k$ . Нетрудно доказать следующее утверждение: если  $Q_0 > 1$ , то для всякой вершины  $u \in Q_k$  ( $k \geq 1$ ) существует “траектория” убегающего

$$u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow u_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow u_{k-1} \longrightarrow u,$$

такая, что  $u_i \in Q_i$  для  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Всякую такую траекторию будем называть *допустимой*. Таким образом, на  $k$ -ом шаге убегающий может занять любую вершину из  $Q_k$ .

Рассмотрим сначала случай, когда  $P_1$  и  $P_2$  изолированы в  $D_1$ . Тогда один из них будет изолирован и в  $D_2$ , и убегающий может снять его на втором шаге. Таким образом, в этом случае убегающий снимает  $P_1$  или  $P_2$  в неточной  $H$ -расстановке  $D_2$ .

Предположим теперь, что в  $D_1$ , по крайней мере, один из преследователей  $P_1, P_2$  не является изолированным.

Пусть, для определенности, преследователи  $P_1$  и  $P_4$  занимают концы одного ребра. В этом случае  $d \geq 5$  и, следовательно,  $|Q_0| > 1$ . Если второй ход делает преследователь  $P_1$ :  $v_0 \longrightarrow v_1$ , то в  $H$ -расстановке  $D_2$  он оказывается изолированным. Тогда убегающий снимает  $P_1$  после

$$v_3 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_1.$$

Если же второй ход делает преследователь  $P_4$ , то убегающий снимает  $P_1$  после

$$v_2 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_0.$$

Предположим теперь, что второй ход делает  $P_3$ . Тогда в силу неточности  $D_2$  преследователь  $P_2$  в этой  $H$ -расстановке оказывается изолированным и может быть снят убегающим после

$$v_{d-2} \longrightarrow v_{d-1} \longrightarrow v_d.$$

Если же второй ход делает  $P_2$ :  $v_d \longrightarrow v_{d-1}$ , то убегающий может его снять после

$$v_{d-3} \longrightarrow v_{d-2} \longrightarrow v_{d-1}.$$

Нетрудно убедиться, что все указанные выше движения убегающего являются допустимыми.

Таким образом, осталось рассмотреть следующий случай: на втором ходу  $P_2$  переходит в вершину  $v_{d+1}$  и становится изолированным в  $D_2$  (в силу ее неточности). В этой ситуации, однако, убегающий не может снять ни одного из преследователей и, следовательно, он должен “просмотреть” 3 и 4 ходы команды  $P$  в стратегии  $S$ , после которых  $H$ -расстановка ( $D_4$ ) снова станет неточной.

Если третий ход делает  $P_1$  или  $P_4$ , то в точной  $H$ -расстановке  $D_3$  оказываются два изолированных преследователя ( $P_1$  и  $P_2$ ). В этом случае убегающий достигает цели так же, как и в аналогичной ситуации после первого хода команды  $P$ . А именно, он снимает изолированного  $P_2$ :

$$v_{d-3} \longrightarrow v_{d-2} \longrightarrow v_{d-1} \longrightarrow v_d \longrightarrow v_{d+1},$$

если четвертый ход сделал  $P_1$  или  $P_4$ . Если же четвертый ход сделал  $P_2$  или  $P_3$ , то  $E$  снимает изолированного  $P_1$ :

$$v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_0$$

(если третий ход сделал  $P_4$ ) или

$$v_3 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_1$$

(если третий ход сделал  $P_1$ ). Таким образом, осталось лишь рассмотреть случай, когда третий ход делает  $P_2$  или  $P_3$ .

Пусть третий ход делает  $P_3$ . Тогда, если четвертый ход делает также  $P_3$ , то  $P_2$  оказывается изолированным в  $D_4$  и, следовательно, может быть снят убегающим после

$$v_{d-3} \longrightarrow v_{d-2} \longrightarrow v_{d-1} \longrightarrow v_d \longrightarrow v_{d+1}.$$

Если же четвертый ход делает  $P_1$  или  $P_4$ , то  $P_1$  оказывается изолированным в  $D_4$  и, следовательно, может быть снят убегающим после

$$v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_0$$

(если четвертый ход сделал  $P_4$ ), или после

$$v_3 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_1$$

(если четвертый ход сделал  $P_1$ ).

Если же четвертый ход делает  $P_2 : v_{d+1} \longrightarrow v_d$ , то он оказывается изолированным в  $D_4$  и, следовательно, может быть снят убегающим после

$$v_{d-2} \longrightarrow v_{d-3} \longrightarrow v_{d-2} \longrightarrow v_{d-1} \longrightarrow v_d.$$

В случае, когда четвертый ход делает  $P_2 : v_{d+1} \longrightarrow v_{d+2}$ , ни один из преследователей не может быть снят. Что делать убегающему в этой ситуации, объясняется дальше.

Рассмотрим, наконец, случай, когда третий ход делает  $P_2$ . Если четвертый ход делает  $P_1$  или  $P_4$ , то  $P_1$  оказывается изолированным в  $D_4$  и может быть снят убегающим так, как показано выше. Если же четвертый ход делает  $P_3$ , то  $P_2$  оказывается изолированным в  $D_4$  и может быть снят убегающим после

$$v_{d-2} \longrightarrow v_{d-3} \longrightarrow v_{d-2} \longrightarrow v_{d-1} \longrightarrow v_d$$

(если на третьем ходу  $P_2$  перешел в вершину  $v_d$ ), или после

$$v_{d-2} \longrightarrow v_{d-1} \longrightarrow v_d \longrightarrow v_{d+1} \longrightarrow v_{d+2}$$

(если на третьем ходу  $P_2$  перешел в вершину  $v_{d+2}$ ).

Если же четвертый ход сделал также  $P_2$ , то возникают следующие 4 случая (приводятся все возможные третьи и четвертые ходы преследователя  $P_2$ ).

1.  $P_2 : v_{d+1} \longrightarrow v_d \longrightarrow v_{d-1}$ ;  
в этом случае  $P_2$  может быть снят убегающим после

$$v_{d-3} \longrightarrow v_{d-2} \longrightarrow v_{d-3} \longrightarrow v_{d-2} \longrightarrow v_{d-1}.$$

2.  $P_2 : v_{d+1} \longrightarrow v_{d+2} \longrightarrow v_{d+1}$ ;  
в этом случае  $P_2$  может быть снят убегающим после

$$v_{d-3} \longrightarrow v_{d-2} \longrightarrow v_{d-1} \longrightarrow v_d \longrightarrow v_{d+1}.$$

3.  $P_2: v_{d+1} \longrightarrow v_d \longrightarrow v_{d+1}$ ;  
такие ходы в выигрывающей стратегии с минимальным числом ходов невозможны.

4.  $P_2: v_{d+1} \longrightarrow v_{d+2} \longrightarrow v_{d+3}$ ;  
в этом случае ни один из преследователей не может быть снят. Нетрудно убедиться, что все указанные выше движения убегающего допустимы.

Таким образом, команде  $P$  удастся предотвратить снятие в (неточной)  $H$ -расстановке  $D_4$  только в случае 4 и в случае, когда третий ход делает  $P_3$ , а четвертый —  $P_2: v_{d+1} \longrightarrow v_{d+2}$ . Однако ситуация, возникшая после четвертого хода команды преследователей в этих двух случаях, вполне аналогична ситуации после их второго хода, увеличилось лишь расстояние между преследователями  $P_1$  и  $P_2$ . При этом  $|Q_4| = |Q_2| + 1$  или  $|Q_4| = |Q_2| + 2$ . Поэтому, “просматривая” 5 и 6 ходы команды  $P$ , убегающий может выбрать свою траекторию аналогичным образом, за исключением случая, когда  $|Q_6| = |Q_4| + 2$  или  $|Q_6| = |Q_4| + 1$ . В этом случае он “просматривает” 7 и 8 ходы команды  $P$  и т.д.

Поскольку расстояние между  $P_1$  и  $P_2$  не может все время возрастать, в некоторой неточной  $H$ -расстановке  $D_{2q}$  один из них (скажем,  $P_2$ ) будет снят, после чего  $D_{2q}$  становится  $H_1$ -расстановкой, где  $H_1 = \{P_1, E, P_3, P_4\}$ . Легко видеть, что после каждого хода убегающего  $H_1$ -расстановка становится неточной, а после каждого хода команды  $P$  — точной.

Покажем теперь, как должен действовать убегающий дальше, чтобы избежать поимки. Если на каждом шаге убегающий может стать изолированным (возможно, со снятием одного из преследователей), то уклонение очевидно. Предположим, что на  $m$ -ом ходу  $E$  не может этого сделать, т.е. он находится на расстоянии 2 от преследователей  $P_1$  и  $P_3$ . Так как получившаяся  $H_1$ -расстановка точная и убегающий — четный игрок, то и все преследователи — четные игроки, а значит, никакие два преследователя не могут находиться в смежных вершинах. В этом случае действия убегающего зависят от  $(m+1)$ -го хода преследователей. Напомним, что после своего  $m$ -го хода убегающий снова становится “невидимым”, т.е. преследователи перед своим  $(m+1)$ -ым ходом не знают, куда перешел убегающий на предыдущем ходу. Однако стратегия  $S$  в этой позиции диктует им единственный ход, информацию о котором убегающий может использовать при выборе своего  $m$ -го хода. Если  $(m+1)$ -й ход делает преследователь  $P_1$  ( $P_3$ ), то убегающий, двигаясь в направлении  $P_3$  ( $P_1$ ), на  $(m+1)$ -ом ходу его снимает. Из сказанного выше следует, что в этот момент преследователь  $P_3$  ( $P_1$ ) “не защищен” (т.е. является изолированным).

Если же  $(m+1)$ -й ход делает преследователь  $P_4$ , то в получившейся  $H_1$ -расстановке хотя бы один из преследователей  $P_1$ ,  $P_3$  оказывается изолированным. Его и снимает убегающий на своем  $(m+1)$ -ом ходу.

Оставшись против двух преследователей, убегающий придерживается той же тактики. Он либо занимает “изолированную” вершину, либо действует так, как указано выше. После “безнаказанного” снятия третьего преследователя уклонение становится очевидным.

Этим завершается доказательство уклонения против стратегии  $S$ .

Если численность команды преследователей (с начала игры) меньше 4, то доказательство уклонения существенно упрощается. Если, например, преследователей трое и  $v_1, v_2, v_3$  — занятые ими в начальный момент вершины, то существует такая вершина  $u \neq v_i, i = 1, 2, 3$ , что расстановка  $(v_1, v_2, v_3, u)$  является неточной и в этой расстановке вершина  $u$  изолирована. Выбрав в качестве начальной позиции вершину  $u$ , убегающий может обеспечить уклонение, действуя так, как указано выше.

**Лемма 2.** Если  $n$  — четно,  $n > 13$ , то

$$\alpha(C_n) = \alpha_0(C_n) = 5.$$

Опишем выигрывающую стратегию для преследователей  $P_1, \dots, P_5$ . Пусть  $v_1, \dots, v_5$  — такие вершины цикла, что  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5)$  являются ребрами и пусть в начальный

момент преследователи  $P_1, \dots, P_5$  занимают вершины  $v_1, \dots, v_5$ , соответственно. Пусть теперь преследователь  $P_1$  движется в направлении  $P_5$ . Далее предполагается, что убегающий не снимает “защищенного” преследователя. Тогда  $P_1$  ловит  $E$ , если расстояние между  $v_1$  и вершиной, занятой убегающим в начальный момент, нечетно. В противном случае  $E$  снимает  $P_1$  в некоторой вершине  $u$ . Если расстояние между  $u$  и  $v_5$  нечетно, то убегающего ловит преследователь  $P_5$ . В противном случае убегающего ловит преследователь  $P_2$ . Следовательно,  $\alpha(C_n) \leq 5$ . По лемме 1  $\alpha(C_n) \geq \alpha_0(C_n) \geq 5$  и, стало быть,  $\alpha(C_n) = \alpha_0(C_n) = 5$ .

**Лемма 3.** *Если  $n$  нечетно,  $n > 13$ , то*

$$\alpha(C_n) = \alpha_0(C_n) = 4.$$

Покажем, что  $\alpha_0(C_n) \geq 4$ . Предположим, что существует выигрывающая стратегия  $S$  для трех преследователей. Если после первого хода команды  $P$  в соответствии со стратегией  $S$  один из преследователей оказывается изолированным, он может быть снят убегающим на первом же шаге. В противном случае убегающий снимает одного из преследователей на втором шаге. Далее он действует так, как указано в лемме 1. Неравенство  $\alpha(C_n) \leq 4$  доказывается так же, как и аналогичная оценка в лемме 2. Таким образом,

$$4 \leq \alpha_0(C_n) \leq \alpha(C_n) \leq 4,$$

что и доказывает лемму 3.

Теорема 1 является следствием лемм 2 и 3.

**З а м е ч а н и е 1.** Неудача 4-х преследователей на цикле  $C_n$  с четным числом вершин большим 13 объясняется тем, что им никак не удастся “выиграть темп”. Ситуация изменится, если к одной из вершин этого цикла “подвесить” треугольник. Оказывается,  $\alpha$ -поисковое число полученного таким образом графа  $G_n$  равно 4, в то время как для его подграфа  $C_n$   $\alpha$ -поисковое число равно 5.

Покажем это. Пусть  $v_1, v_2, v_3, v_4$  — такие вершины цикла  $C_n$ , что пары  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_2, v_3)$ ,  $(v_3, v_4)$  являются его ребрами. Вершинами упомянутого выше треугольника являются  $u_1, u_2, v_2$ , т.е. треугольник подвешен к вершине  $v_2$ . Пусть в начальный момент преследователи  $P_1, P_2, P_3, P_4$  занимают вершины  $v_1, v_2, v_3, v_4$  соответственно. Опишем выигрывающую стратегию этой команды на  $G_n$ . Как и раньше, мы не будем рассматривать случай, когда убегающий снимает “защищенного” преследователя. Пусть преследователь  $P_1$  движется в направлении  $P_4$ . Если на цикле  $C_n$  убегающего нет (в чем команда  $P$  легко убеждается),  $P_1$  возвращается в  $v_1$ , после чего  $P_2$  переходит в одну из вершин треугольника (скажем, в  $u_1$ ). Если  $P_2$  не ловит  $E$ , то далее возможно одно из двух: либо убегающий делает ход без снятия:  $u_2 \rightarrow v_2$ , либо  $E$  снимает  $P_2$  в вершине  $u_1$ . В первом случае  $E$  ловится преследователем  $P_2$  после  $u_1 \rightarrow v_2$ , во втором — преследователем  $P_1$  после  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow u_2$ . Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда в начальный момент убегающий находился на цикле. Если преследователь  $P_1$ , двигаясь в направлении  $P_4$ , не ловит убегающего, то последний снимает его в некоторой вершине  $v$  цикла  $C_n$ . Если расстояния от  $v$  до  $v_2$  и  $v_4$  нечетные, то убегающий может быть пойман либо  $P_2$ , либо  $P_4$ . Если оба расстояния четные, преследователь  $P_2$  обходит треугольник, после чего расстояния от вершины, занятой убегающим, до  $v_2$  и  $v_4$  становятся нечетными. Подобный маневр под названием “королевский треугольник” используется в шахматах для того, чтобы при фиксированном расположении фигур “передать ход” противнику. Итак, доказано, что  $\alpha(G_n) \leq 4$ .

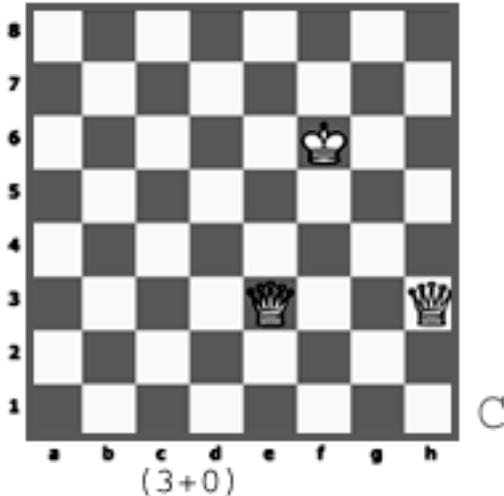
Предположим теперь, что существует выигрывающая стратегия для команды, состоящей из трех преследователей. Опишем действия убегающего, позволяющие ему уклониться от поимки. Он должен выбрать свое начальное положение на цикле с таким расчетом, чтобы снять впервые появившегося на цикле изолированного преследователя, после чего уклонение становится очевидным. Нетрудно убедиться, что если изолированный преследователь на цикле не появляется, то убегающему ничего не угрожает. Поэтому  $\alpha(G_n) \geq 4$ .

### 3. Шахматная задача

В этом пункте мы рассмотрим одну шахматную задачу с одиноким невидимым черным королем, составленную вторым автором и удостоенную специального приза на конкурсе, организованном журналом “Шахматная композиция” (1998–1999 гг).

На самом деле она является задачей поиска с противодействием при некоторых дополнительных условиях, определяемых шахматными правилами.

Рассмотрим новую версию этой задачи.



Мат в 5 ходов (одинокий черный король “невидим”).

Эта задача имеет трех близнецов:

- (a) Kpg7,
- (b) Kpg6,
- (c) Kpf7.

Приведем решение этих задач.

Во всех случаях первый ход 1. Фе8. Если ответный ход черных “без снятия”, то они получают “линейный мат”:

2.Фh3-d7. 3.Фe8-c8. 4.Фd7-b7. 5.Фc8-a8.

Если ответный ход черных 1. Кр : e8 (в близнеце (c) он невозможен), то в позиции на диаграмме белые матуют немедленно: 2.Фc8. В близнеце (a) к мату приводит

2.Фd3. 3.Фd5. 4.Кpf6. 5.Фf7(d8, a8) — мат.

В близнеце (b) решает

2.Фh7. 3.Фb7. 4.Фc7. 5.Фd8 — мат.

В близнеце (c) много решений, что для задач с невидимым черным королем не является серьезным дефектом.

Кроме 1. Фе8, решает 1.Фd7, 1.Фh4, 1.Фh8.

В последних двух случаях второй ход белых 2.Фd8 является “жертвой”.

В задаче имеются “ложные следы”. Укажем один из них:

Маневр: 1.Фh4. 2.Фh4-d4. 3.Фe3-c3. 4.Фd4-b4. 5.Фc3-a3 к цели не приводит, так как после четвертого хода белых черный король может быть запатован на поле a2.

Все решения в близнеце (c) были найдены с помощью компьютерной программы, составленной первым автором для решения широкого класса задач поиска с противодействием. Она принципиально отличается от известных шахматных программ. Решение близнеца c) потребовало перебора около 500 000 000 вариантов и 8 часов машинного времени для компьютера

(AMD K-7, 850, 128 Mb RAM), который авторы использовали в 2000 году. Буква С справа от диаграммы, как всегда, означает, что решения задач проверены с помощью компьютера.

Поступила 1.03.04

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Parsons T.D.** Pursuit-evasion in a graph // Lectures Notes in Math. 1978. V. 642. P. 426–441.
2. **Петров Н.Н.** Некоторые экстремальные задачи поиска на графах // Дифференц. уравнения. 1982. Т 18, № 8.
3. **Kirousis L.M., Papadimitriou C.H.** Searching and Pebbling // Theor. Comp. Scince. 1986. Т. 474. С. 205–218.
4. **Fomin F.V., Golovach P. A., Petrov N.N.** Search problems on 1-skeletons of regular polyhedrons // Int. Journal of Math., Game Theory, and Algebra. 1998. Vol. 7, № 2/3. P. 102–111.
5. **Капилевич В.О., Петров Н.Н.** Задачи поиска на графах с противодействием // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2003. № 4.
6. **Петров Н.Н., Чуманова А.В.** О некоторых проблемах поиска на графах с противодействием // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2004. № 1.
7. **Зеленевская А.Б., Петров Н.Н.** О некоторых задачах поиска на графах с противодействием // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2004. № 2.
8. **Петров Н.Н., Тетерятникова М.А.** О некоторых задачах поиска на графах с противодействием // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2004. № 2.

УДК УДК 518.9

## УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОНУСЕ В ОКРЕСТНОСТИ АНОРМАЛЬНОЙ ТОЧКИ<sup>1</sup>

А. В. Арутюнов

Рассматривается операторное уравнение, описываемое гладким нелинейным отображением, действующим в банаховых пространствах. Ищется решение этого уравнения, принадлежащее заданному выпуклому замкнутому конусу. Приводится условие 2-регулярности, при котором рассматриваемое уравнение в окрестности заданной точки имеет решение, удовлетворяющее линейно-корневой оценке. Введенное условие 2-регулярности существенно слабее известного условия Робинсона, являющегося условием регулярности первого порядка.

### Введение: постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства,  $K \subseteq X$  — выпуклый замкнутый конус,  $F: X \rightarrow Y$  — отображение, которое дважды непрерывно дифференцируемо по Фреше в окрестности заданной точки  $x_0 \in X$ , и  $y_0 = F(x_0)$ .

Рассмотрим уравнение  $F(x) = y$  относительно неизвестного  $x \in x_0 + K$  для элементов  $y$ , принадлежащих окрестности точки  $y_0$ . Наша цель — получить условия, гарантирующие разрешимость указанного уравнения. Для формулировки теоремы введем необходимые предположения и обозначения.

Далее предполагается, что в окрестности точки  $x_0$  отображение  $F''(\cdot)$  липшицево. Положим  $C = F'(x_0)(K)$ . Также предполагается, что подпространство  $Y_1 = \text{Lin } C$  замкнуто, топологически дополняемо, а  $\text{ri } C \neq \emptyset$ . Здесь  $\text{Lin } C$  — линейная оболочка конуса  $C$ , а  $\text{ri } C$  — относительная внутренность  $C$ . Эти предположения автоматически выполняются, если  $Y$  конечномерно. Обозначим через  $B_r(x) = \{\xi \in X: \|\xi - x\| \leq r\}$  замкнутый шар в  $X$  радиуса  $r$  с центром в точке  $x$ . Аналогичный шар в  $Y$  также будем обозначать через  $B_r(y)$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть

$$h \in K, \quad F'(x_0)h = 0, \quad (-F''(x_0)[h, h]) \in \text{ri } C. \quad (1)$$

Отображение  $F$  является 2-регулярным в точке  $x_0$  относительно  $K$  по направлению  $h$ , если

$$Y_1 + F''(x_0)[h, \text{Ker } F'(x_0) \cap K] = Y. \quad (2)$$

Через  $\rho(y, \tilde{C})$  обозначим расстояние от точки  $y$  до множества  $\tilde{C}$ . Отметим, что если  $\tilde{C}$  — выпуклый конус, то по теореме двойственности для задачи о кратчайшем расстоянии [1, гл. III, разд. 3.3]

$$\rho(y; \tilde{C}) = \sup\{\langle y^*, y \rangle, y^* \in \tilde{C}^0, \|y^*\| \leq 1\}. \quad (3)$$

Здесь  $\tilde{C}^0 = \{y^* \in Y^*: \langle y^*, y \rangle \leq 0 \forall y \in \tilde{C}\}$  — поляр конуса  $\tilde{C}$ .

**Теорема 1.** *Предположим, что для некоторого  $h$ , удовлетворяющего условию (1), отображение  $F$  является 2-регулярным в точке  $x_0$  относительно конуса  $K$  по направлению  $h$ .*

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00334).

Тогда для любого  $l \in \text{ri} C$  найдутся такие положительные  $\alpha$  и  $\beta$ , что каждому  $y \in Y$  с  $\|y - y_0\| \leq \alpha$  соответствует  $x = x(y) \in x_0 + K$  такое, что

$$F(x(y)) = y; \quad \|x(y) - x_0\| \leq \text{const} \left( \|y - y_0\| + \rho \left( y - y_0; \tilde{C} \right)^{1/2} \right), \quad \tilde{C} = Y_1 \cap \text{cone } B_\beta(l). \quad (4)$$

Здесь и ниже  $\text{const}$  обозначает некоторые, вообще говоря, различные константы,  $\text{cone } B = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha B$  — коническая оболочка множества  $B$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Пусть пространство  $Y$  конечномерно. Предположим, что  $h$  удовлетворяет условию (1) и отображение  $F$  является 2-регулярным в точке  $x_0$  относительно конуса  $K$  по направлению  $h$ . Тогда для любого замкнутого выпуклого конуса  $\tilde{C}$  с  $\tilde{C} \setminus \{0\} \subset \text{ri} C$  найдется положительное  $\alpha$ , для которого выполняется (4).

Утверждение теоремы 1 вытекает из результатов [6], если в точке  $x_0$  выполнено условие Робинсона  $F'(x_0)(K) = Y$ , являющееся условием регулярности первого порядка, а в случае, когда  $K = X$ , из результатов [7].

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие утверждения, к выводу которых мы переходим.

## 1. Предварительные сведения

Пусть  $A: X \rightarrow Y$  — линейный ограниченный оператор. Положим  $C = A(K)$ . Будем предполагать, что подпространство  $\text{Lin } C$  замкнуто и  $\text{ri} C \neq \emptyset$ .

**Теорема 2.** Для любого  $\bar{y} \in \text{ri} C$  существуют такие (зависящие от  $\bar{y}$ )  $\delta > 0$  и  $a > 0$ , что

$$\forall y \in C \cap \text{cone } B_\delta(\bar{y}) \exists x \in K: Ax = y, \quad \|x\| \leq a\|y\|.$$

Теорема 2 является обобщением на случай конусов теоремы Банаха об открытом отображении. Ее доказательство основано на следующей лемме, являющейся аналогом леммы из [2, гл. IV, разд. 5].

**Лемма 1.** Пусть  $B$  — замкнутый шар, лежащий в  $\text{int } C$ , и  $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha B$  — объединение множеств  $\alpha B$  по всем  $\alpha \in (0, 1]$ . Пусть множество  $D$  всюду плотно в  $\mathcal{B}$ . Тогда произвольный элемент  $y \in \text{int } B$ ,  $y \neq 0$ , можно разложить в ряд так, что

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i, \quad y_i \in D, \quad \|y_i\| \leq 3\|y\|2^{-i}.$$

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме, предложенной самим Банахом [3], и здесь не приводится.

**Следствие 1.** Пусть конус  $C$  содержит замкнутое подпространство  $Y'$ . Тогда  $\exists a > 0$ :  $\forall y \in Y' \exists x \in K: Ax = y, \quad \|x\| \leq a\|y\|$ .

**Следствие 2.** Пусть  $x_0 \in K: Ax_0 = y_0 \in \text{ri} C$ . Тогда существуют такие (зависящие от  $x_0$ )  $\delta > 0$  и  $a > 0$ , что

$$\forall \xi \in B_\delta(x_0) \cap K \forall y \in B_\delta(y_0) \cap C \exists x \in K: Ax = y, \quad \|x - \xi\| \leq a\|y - A\xi\|.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Возьмем  $\delta > 0$ , отвечающее  $y_0$  в силу теоремы 2. Выберем  $\varepsilon > 0$  так, что  $A(B_\varepsilon(x_0)) \subseteq B_\delta(y_0)$ . Для произвольных фиксированных  $y \in B_\delta(y_0)$ ,  $\xi \in B_\varepsilon(x_0)$  рассмотрим задачу минимизации по переменной  $x$ :

$$\|x - \xi\| \rightarrow \inf, \quad Ax = y, \quad x \in K$$

( $\xi, y$  — параметры). Инфимум в ней обозначим через  $p_\xi(y)$ . Каждая из функций  $p_\xi$  выпукла, и в силу теоремы 2 эти функции  $p_\xi$  ограничены равномерно по  $\xi \in B_\varepsilon(x_0)$  на некотором шаре  $B_\delta(y_0)$ . Поэтому (см. [4, гл. I, разд. 2.3]) в некоторой окрестности  $y_0$  все функции  $p_\xi$  удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой Липшица  $a$ . Из очевидных соотношений  $p_\xi(A\xi) = 0 \implies p_\xi(y) = |p_\xi(y) - p_\xi(A\xi)| \leq a\|y - A\xi\|$  получаем требуемое. Следствие доказано.

**Следствие 3.** Пусть пространство  $Y$  конечномерно. Тогда для любого замкнутого выпуклого конуса  $\tilde{C}$  такого, что  $\tilde{C} \setminus \{0\} \subset \text{ri } C$ , выполняется

$$\exists a > 0 : \forall y \in \tilde{C} \exists x \in K : Ax = y, \|x\| \leq a\|y\|.$$

Это есть следствие теоремы 2 и компактности единичной сферы конечномерного пространства.

**О п р е д е л е н и е 2.** Пусть  $\tilde{C}$  — выпуклый конус в  $Y$ . Отображение  $F$  линейно-квадратично накрывает в точке  $x_0$  относительно конусов  $K, \tilde{C}$ , если существуют такие  $b > 0, r_0 > 0$ , что для любого  $r \in [0, r_0]$  выполняется

$$F(x_0) + \left( (B_{br} \cap \tilde{C}) + B_{br^2} \right) \subseteq F(B_r(x_0) \cap (x_0 + K)). \quad (5)$$

Число  $b > 0$  называется коэффициентом накрывания.

Наряду с линейно-квадратичным накрыванием, определим еще один вид накрывания, который назовем линейным. А именно, скажем, что отображение  $F$  линейно накрывает в окрестности  $V$  точки  $x_0$  относительно конуса  $K$  с коэффициентом  $b$ , если

$$\exists r_0 > 0 : F(x) + B_{br} \subseteq F(B_r(x) \cap (x_0 + K)) \quad \forall r \in [0, r_0] \quad \forall x \in V \cap (x_0 + K).$$

Принципиальное отличие линейного накрывания от линейно-квадратичного накрывания заключается, в частности, в том, что в (5) участвуют окрестности только одной точки  $x_0$ , а в линейном накрывании — окрестности всех точек  $x \in V \cap (x_0 + K)$ .

**Предложение 1.** Пусть линейный непрерывный оператор  $A : X \rightarrow Y$  линейно накрывает в некоторой окрестности  $V$  точки  $x_0 \in K$  относительно конуса  $K$  с коэффициентом  $b > 0$ . Тогда существует такое  $r_0 > 0$ , что  $\forall r \in (0, r_0]$  и для любого отображения  $f : V \rightarrow Y$ , для которого  $\|f(x_0)\| < br/2$  и выполнено условие Липшица с константой  $b/2$ , уравнение  $Ax = Ax_0 + f(x)$  имеет решение  $x \in K \cap B_r(x_0)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Определим отображение  $F$  по формуле  $F(x) = Ax - Ax_0 - f(x) + f(x_0)$ . По теореме 1.3 из [5] отображение  $F$  линейно накрывает в некоторой, не зависящей от  $f$ , окрестности  $x_0$  относительно конуса  $K$  с коэффициентом  $b/2$ . Поэтому, в силу того, что  $F(x_0) = 0$ , существует такое, не зависящее от  $f$ , число  $r_0 > 0$ , что  $F(K \cap B_r(x_0)) \supseteq B_{\frac{br}{2}} \forall r \in (0, r_0]$ . Следовательно, эквивалентное исходному уравнение  $F(x) = f(x_0)$  имеет решение  $x \in K \cap B_r(x_0)$ . Предложение доказано.

**Теорема 3.** Предположим, что для некоторого  $h$ , удовлетворяющего условию (1), отображение  $F$  является 2-регулярным в точке  $x_0$  относительно конуса  $K$  по направлению  $h$ . Тогда для любого вектора  $l \in \text{ri } C$  найдется такое  $\delta > 0$ , что отображение  $F$  линейно-квадратично накрывает в точке  $x_0$  относительно конусов  $K$  и  $\tilde{C} = Y_1 \cap \text{cone } B_\delta(l)$ .

Доказательство. Соотношения (1) положительно однородны по  $h$ . Поэтому, не теряя общности, будем считать, что  $\|h\| < 1$ . Пусть, для удобства,  $F(x_0) = 0$ ,  $x_0 = 0$ . Положим  $Q = \frac{1}{2}F''(x_0)$ . По лемме Адамара в окрестности  $x_0$  справедливо представление  $F(x) = F'(x_0)x + Q[x, x] + R(x)[x, x]$ , где  $R(\xi)$  — квадратичное отображение при каждом фиксированном  $\xi$ , причем  $R(0) = 0$  и  $R(\cdot)$  липшицево в окрестности нуля.

По условию,  $l \in \text{ri}C$ . Поэтому по теореме 2 существуют такие  $a_1 > 0$ ,  $\delta > 0$ , что для  $\tilde{C} = Y_1 \cap \text{cone } B_\delta(l)$  выполняется

$$\forall \tilde{y} \in \tilde{C} \quad \exists \chi(\tilde{y}) \in K: \quad F'(x_0)\chi(\tilde{y}) = \tilde{y}, \quad \|\chi(\tilde{y})\| \leq a_1\|\tilde{y}\|. \quad (6)$$

Возьмем  $\tilde{y} \in \tilde{C}$ ,  $y \in Y$  и для  $\varepsilon > 0$  будем решать уравнение

$$F(x) = \varepsilon\tilde{y} + \varepsilon^2y, \quad x \in K.$$

Его решение будем искать в виде  $x = x(\varepsilon) = \varepsilon\hat{x}(\varepsilon, x_1, x_2, \tilde{y})$ , где

$$\hat{x}(\varepsilon, x_1, x_2, \tilde{y}) = h + \chi(\tilde{y}) + \varepsilon x_1 + x_2, \quad x_1 \in K, x_2 \in K_2.$$

Здесь  $K_2 = K \cap \text{Ker } L_1$ ,  $L_1 = F'(x_0)$ ,  $L_1: K \rightarrow Y_1$ .

Очевидно,  $x(\varepsilon) \in K$ . Имеем

$$F(\varepsilon h + \varepsilon\chi(\tilde{y}) + \varepsilon^2x_1 + \varepsilon x_2) = \varepsilon\tilde{y} + \varepsilon^2y. \quad (7)$$

Положим  $m = -Q[h, h]$ . Возьмем  $\bar{x}_1 \in K: L_1\bar{x}_1 = m$ . Нам достаточно доказать существование таких  $r_1, r_2, \varepsilon_0 > 0$ , что для любых  $y \in Y$ ,  $\tilde{y} \in \tilde{C}: \|y\| \leq r_2$ ,  $\|\tilde{y}\| \leq r_2$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , уравнение (7) имеет решение  $x_1 \in K$ ,  $x_2 \in K_2$ , для которого

$$\|x_1 - \bar{x}_1\| \leq r_1, \quad \|x_2\| \leq r_1, \quad \|\hat{x}(\varepsilon, x_1, x_2, \tilde{y})\| \leq 1.$$

Удовлетворяющие этим неравенствам элементы  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y$ ,  $\tilde{y}$  и число  $\varepsilon$  назовем допустимыми.

Как отмечалось выше,  $\|h\| < 1$ . Поэтому найдутся такие положительные  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\varepsilon_0$ , что  $a_1r_2 + \varepsilon_0(\|m\| + r_1) + r_2 < 1 - \|h\|$ . По условию,  $\bar{x}_1 \in K$  и  $L_1\bar{x}_1 = m \in \text{ri}C$ . Поэтому в силу следствия 2 к теореме 2 сужение отображения  $L_1$  на конус  $K$  линейно накрывает на пересечении  $K$  с некоторой окрестностью точки  $\bar{x}_1$ . Определим линейный оператор  $L_2: K_2 \rightarrow Y$  формулой  $L_2x_2 = 2Q[h, x_2]$ . Рассмотрим факторпространство  $Y/Y_1$  и факторотображение  $\pi: Y \rightarrow Y/Y_1$ . В силу (2),  $\pi L_2(K_2) = Y/Y_1$  и, значит, в силу следствия 1 к теореме 2 оператор  $\pi \circ L_2$  линейно накрывает на  $K_2$ . Из сказанного легко получаем, что линейный оператор  $A: K \times K_2 \rightarrow Y$ , определенный по формуле  $A(x_1, x_2) = L_1x_1 + L_2x_2$ , линейно накрывает в некоторой окрестности точки  $(\bar{x}_1, 0)$ .

Исследуем уравнение (7). Подставляя в (7) представление для  $F$  и учитывая (6), после деления на  $\varepsilon^2$  получаем

$$A(x_1, x_2) = m + f(x_1, x_2; \tilde{y}, y, \varepsilon). \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2; \tilde{y}, y, \varepsilon) &= y - 2Q[h, \varepsilon x_1] - Q[\varepsilon x_1 + x_2]^2 \\ &\quad - Q[2(h + \varepsilon x_1 + x_2) + \chi(\tilde{y}), \chi(\tilde{y})] - R(x(\varepsilon))[h + \chi(\tilde{y}) + \varepsilon x_1 + x_2]^2 \end{aligned}$$

и использовано обозначение  $Q[x]^2 = Q[x, x]$ .

В окрестности точки  $(\bar{x}_1, 0)$  отображение  $A$  линейно накрывает с некоторым коэффициентом  $b > 0$ . Уменьшая положительные  $r_1$ ,  $r_2$  и  $\varepsilon_0$ , в силу (6), используя явный вид функции  $f$ , добьемся того, что для любых допустимых  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\tilde{y}$ ,  $y$ ,  $\varepsilon$  выполняется  $\|f(\bar{x}_1, 0; \tilde{y}, y, \varepsilon)\| < br_1/2$  и при этом константа Липшица функций  $f(\cdot; \tilde{y}, y, \varepsilon)$  по переменным  $x_1, x_2$  на множестве  $\mathcal{X} = \{x_1 \in K, x_2 \in K_2: \|x_1 - \bar{x}_1\| + \|x_2\| \leq r_1\}$  не превышает  $b/2$ .

Таким образом, так как  $m = A(\bar{x}_1, 0)$ , для уравнения (8) в точке  $(\bar{x}_1, 0)$  выполнены все условия предложения 1. Из него вытекает, что для любых допустимых  $\tilde{y}$ ,  $y$ ,  $\varepsilon$  уравнение (8) имеет решение  $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ . При этом, по построению,  $\|\hat{x}(\varepsilon, x_1, x_2, \tilde{y})\| < 1$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 2.** Пусть пространство  $Y$  конечномерно. Предположим, что  $h$  удовлетворяет условию (1) и отображение  $F$  является 2-регулярным в точке  $x_0$  относительно конуса  $K$  по направлению  $h$ . Тогда для любого замкнутого выпуклого конуса  $\tilde{C}$  такого, что  $\tilde{C} \setminus \{0\} \subset \text{ri } C$ , отображение  $F$  линейно-квадратично покрывает в точке  $x_0$  относительно конусов  $K$  и  $\tilde{C}$ .

## 2. Доказательство теоремы 1

Используем обозначения, введенные при доказательстве теоремы 3. Возьмем  $\delta > 0$ , отвечающее векторам  $h, l$  в силу теоремы 3. Положим  $\tilde{C} = Y_1 \cap \text{cone } B_\beta(l)$ ,  $\beta = \frac{1}{3}\delta$ ,  $\rho(y) = \rho(y; \tilde{C})$ . По условию,  $l \in \text{ri } \tilde{C}$ . Поэтому  $\exists a_1 > 0: \langle y^*, l \rangle \leq -a_1 \forall y^* \in Y_1^* \cap \tilde{C}^0: \|y^*\| = 1$ . Покажем, что

$$y_1 + tl \in \tilde{C} \forall y_1 \in Y_1 \forall t \geq \tilde{\rho}(y_1) = a_1^{-1}\rho(y_1). \quad (9)$$

Действительно, пусть  $y \in Y_1$ . Тогда  $y \in \tilde{C} \Leftrightarrow \langle y^*, y \rangle \leq 0 \forall y^* \in Y_1^* \cap \tilde{C}^0$ . В то же время, для  $y^* \in Y_1^* \cap \tilde{C}^0$ ,  $\|y^*\| = 1$ , и  $t \geq \tilde{\rho}(y_1)$  имеем  $\langle y^*, y_1 + tl \rangle \leq \langle y^*, y_1 \rangle + \rho(y_1)a_1^{-1}\langle y^*, l \rangle \leq \langle y^*, y_1 \rangle - \rho(y_1) \leq 0$  в силу (3), что и доказывает (9).

Положим  $D = Y_1 \cap \text{cone } B_\delta(l)$ . По теореме 3 существуют такие  $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$ ,  $\varepsilon_0 \leq 1$ , что для любых  $y_2 \in Y$ ,  $\tilde{y} \in D: \|y_2\| \leq r_2$ ,  $\|\tilde{y}\| \leq r_2$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , уравнение

$$F(x) = y = \varepsilon\tilde{y} + \varepsilon^2 y_2 \quad (10)$$

имеет решение  $x \in x_0 + K$  такое, что  $\|x - x_0\| \leq \varepsilon r_1$ .

Обозначим через  $\pi_1$  и  $\pi_2$  непрерывные операторы проектирования  $Y$  на  $Y_1$  и на некоторое замкнутое подпространство  $Y_2$ , дополняющее  $Y_1$ , соответственно. Отображения  $\tilde{\rho}$ ,  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  непрерывны, и  $\tilde{\rho}(0) = 0$ . Поэтому существует  $\alpha > 0$  такое, что

$$(\tilde{\rho}(\pi_1 y) 2r_2^{-1} \|l\|)^{1/2} + 2r_2^{-1} \|\pi_1 y\| + (\|\pi_2 y\| 2r_2^{-1})^{1/2} \leq \varepsilon_0 \quad (11)$$

для всех  $y$  с  $\|y\| \leq \alpha$ . Взяв произвольный вектор  $y \in B_\alpha$ , представим его в виде

$$y = \varepsilon\tilde{y} + \varepsilon^2 y_2, \quad y_2 = -r_2(2\|l\|)^{-1}l + w, \quad (12)$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon(y) = \max \left\{ (\tilde{\rho}(\pi_1 y) 2r_2^{-1} \|l\|)^{1/2}, 2r_2^{-1} \|\pi_1 y\|, (\|\pi_2 y\| 2r_2^{-1})^{1/2} \right\}, \quad (13)$$

$$w = \varepsilon^{-2} \pi_2 y \in Y_2, \quad \tilde{y} = \varepsilon^{-1} (\pi_1 y + \varepsilon^2 r_2 (2\|l\|)^{-1} l).$$

При этом, если  $l = 0$ , то выражение  $l\|l\|^{-1}$  условимся считать равным нулю. Докажем, что

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \tilde{y} \in D, \quad \|\tilde{y}\| \leq r_2, \quad \|y_2\| \leq r_2. \quad (14)$$

Действительно, первое неравенство непосредственно вытекает из (11). Далее, если  $l \neq 0$ , то, в силу (13),  $\varepsilon^2 r_2 (2\|l\|)^{-1} \geq \tilde{\rho}(\pi_1 y)$ , откуда, в силу (9),  $\tilde{y} \in D$ . Если же  $l = 0$ , то  $D = Y_1 \Rightarrow \tilde{y} \in D$ . Далее, в силу (13),  $\|\pi_1 y\| \varepsilon^{-1} \leq r_2/2 \Rightarrow \|\tilde{y}\| \leq r_2/2 + \varepsilon r_2/2 \leq r_2$ . Наконец, в силу (13),  $\|\pi_2 y\| \varepsilon^{-2} \leq r_2/2 \Rightarrow \|w\| \leq r_2/2$ , что (см. (12)) дает последнее неравенство из (14).

Таким образом, в силу (12)–(14), уравнение (10) имеет решение  $x \in x_0 + K$  с  $\|x - x_0\| \leq \varepsilon r_1$ . Последнее неравенство в силу (13) и с учетом того, что  $\tilde{\rho}(\pi_1 y) \leq \tilde{\rho}(y) + \text{const} \|\pi_2 y\|$ ,  $\|\pi_2 y\| \leq \text{const} \rho(y) \forall y$ , доказывает оценку из (4). Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 3.** Пусть конус  $C$  есть прямая сумма конечнопорожденного конуса  $C_1$  и замкнутого подпространства  $Y'$ , т.е.  $C = C_1 + Y'$ , причем  $\|c_1\| \leq \text{const} \|c_1 + y'\| \forall c_1 \in C_1, y' \in Y'$ . Тогда теоремы 1 и 3 справедливы при  $\tilde{C} = C$ .

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
3. **Банах С.** Теория линейных операций. Москва, Ижевск: РХД, 2001.
4. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
5. **Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.** Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, вып. 6. С. 11–46.
6. **Robinson S.** Stability Theory for Systems of Inequalities, Part II: Differentiable Nonlinear Systems // SIAM J. Num. Anal. 1976. V. 13, No. 4. P. 497–513.
7. **Аваков Е.Р.** Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Матем. заметки. 1990. Т. 47, вып. 5. С. 3–13.

УДК 517.5

**К ВОПРОСУ О НАСЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ПОТЕНЦИАЛОВ****В. Д. Батухтин, С. И. Бигильдеев**

Работа посвящена проблеме обобщения понятия дифференцируемости функции. Установлена связь аппроксимационного градиента [1] с преобразованиями Рисса, потенциалами Бесселя, интегралом Пуассона, усреднением по Стеклову, производными Соболева, с дифференцированием в смысле  $L^p$  и гармоническими производными.

**1. Введение**

При исследовании на экстремум негладких и разрывных функций возникает необходимость обобщения понятия дифференцируемости функций. Один из возможных подходов к решению данной проблемы основан на понятии аппроксимационного градиента. В простейшем случае аппроксимационный градиент можно интерпретировать как градиент линейной функции, имеющей наименьшее среднеквадратическое отклонение от исследуемой функции вблизи рассматриваемой точки. В этом смысле в теории экстремальных задач он играет роль, аналогичную градиенту дифференцируемой функции [1].

В общем случае аппроксимационный градиент является интегральным оператором и зависит от того, по какой мере и по какой области осуществляется интегрирование. При стягивании области интегрирования в точку его предельное значение для дифференцируемой функции при определенных условиях определяется однозначно и совпадает с градиентом. Для недифференцируемой функции предельный переход может привести к многозначному отображению. И в этом случае, используя понятие аппроксимационного градиента, дифференциальные свойства функций можно характеризовать с единой точки зрения. Для этого вектор аппроксимационного градиента достаточно рассматривать как градиент некоторой функции, т.е. потенциала. При этом дифференциальные свойства потенциала в той или иной мере характеризуют субдифференциальные свойства исследуемой функции в результате упомянутого выше предельного перехода. В этом смысле можно говорить о наследовании функцией дифференциальных свойств потенциалов.

В классе дифференцируемых функций понятие субдифференциала связано с касательной гиперплоскостью к надграфику функции. Вектор-градиент однозначно ее определяет. Здесь касательные к потенциалам совпадают и осуществляется непосредственная передача дифференциальных свойств потенциалов “наследнику”.

Для выпуклых функций субдифференциал связан с опорными гиперплоскостями к надграфику функции, так как касательной может уже не быть. В этом случае множество потенциалов представлено функциями, касательные к которым в данной точке в пределе совпадают с опорными гиперплоскостями “наследника”.

Анализ дифференциальных свойств липшицевых функций основан на исследовании предельных положений касательных гиперплоскостей, так как опорной гиперплоскости уже может не быть. Здесь множество потенциалов еще богаче, так как дифференциальные свойства у локально липшицевых функций более размытые, чем у выпуклых. Потенциалы здесь представлены функциями с вполне определенными асимптотическими свойствами касательных гиперплоскостей, которые будут секущими для “наследника”.

В отличие от липшицевой функции, для локально суммируемой функции уже не удастся исследовать предельные положения касательных, но касательные можно определять как предельные положения секущих гиперплоскостей. Поэтому потенциалы локально суммируемых функций также связаны с секущими гиперплоскостями “наследника”. Для таких функций анализ экстремальных свойств невозможно осуществлять и с помощью производных Соболева [2,3]. В пространствах Соболева функции и их производные рассматриваются в целом, а не в каждой точке. Вопрос об анализе тонкой структуры дифференцирования, т.е. об определении дифференциальных свойств функций в каждой точке, здесь остается открытым.

Приведем несколько понятий, которые могут быть положены в основу анализа субдифференциальных свойств суммируемых функций.

Пусть  $f$  — функция с компактным носителем, суммируемая по мере Лебега на всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ , т.е.  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Обозначим через  $|s|$  евклидовую норму вектора  $s$ , а через  $B_r$  — шар радиуса  $r$  с центром в начале координат.

Рассмотрим функцию  $\tilde{p} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , которую в дальнейшем обозначим  $\tilde{p}(r, \alpha) = \tilde{p}_r(\alpha)$ . При этом будем считать, что  $\tilde{p}_r(\cdot)$  — измеримая функция.

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Функцию  $p_r(s) = \tilde{p}_r(|s|)$  назовем весовой, если

(1°) для  $\forall r > 0$   $p_r(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < d_r = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |s|^2 p_r(s) ds < \infty$  и  $p_r$  может иметь

особенность только в нуле, в том смысле, что  $p_r \in L^\infty(A)$  для любого измеримого множества  $A$ , для которого  $0 \notin \bar{A}$ ;

(2°) для любой суммируемой финитной функции  $\varphi$  ( $\text{supp } \varphi$  — компакт) [2] такой, что  $\varphi(s) = o(|s|)$  при  $|s| \rightarrow 0$ , выполняется соотношение

$$J_r = \frac{1}{d_r} \int_{\mathbb{R}^n} |s| |\varphi(s)| p_r(s) ds \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow +0.$$

Условие принадлежности весовой функции пространству  $L^\infty(A)$  в пункте 1° определения сужает множество весовых функций, но расширяет множество функций  $\varphi$ , для которых можно применять свертку с весовой функцией.

Нетрудно заметить, что пункт 2° будет выполнен, если  $\forall r > 0 \text{ supp } p_r \subseteq B_r$ . Более того, в [4] показано, что весовая функция удовлетворяет следующему критерию.

**Предложение 1.1.** Пусть функция  $p_r$  удовлетворяет условиям пункта 1° определения 1.1. Она будет весовой функцией тогда и только тогда, когда для любого не содержащего начала координат компакта  $A$

$$\frac{1}{d_r} \|p_r\|_{L^\infty(A)} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow +0.$$

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Аппроксимационным градиентом функции  $f$  в точке  $x$ , отвечающим весовой функции  $p_r(s)$ , называется следующий интегральный оператор свертки:

$$a_r(f)(x) = \frac{1}{d_r} \int_{\mathbb{R}^n} s f(x+s) p_r(s) ds.$$

**О п р е д е л е н и е 1.3.** Субдифференциалом по мере Лебега функции  $f$  в точке  $x$  называется множество

$$\partial_\tau f(x) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, u \rangle \leq \sup_P \limsup_{(y,r) \rightarrow (x,0)} \langle a_r(f)(y), u \rangle, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \right\},$$

где  $\sup_P$  подразумевает поиск супремума на множестве весовых функций, для которых

$$\frac{1}{nd_r} \int_{B_r} |s|^2 p_r(s) ds \rightarrow 1 \quad \text{при } r \rightarrow +0.$$

Следует отметить, что множество  $\partial_\tau f(x)$  характеризует локальные свойства функции. Оно задается таким образом, чтобы, подобно тому, как это делается в выпуклом анализе, построить обобщение дифференцируемости на класс суммируемых функций. Пункт 2° определения 1.1 фактически означает, что  $\partial_\tau f(x) = \{\nabla f(x)\}$  для любой локально суммируемой функции, дифференцируемой в точке  $x$ . В работе [5] показано, что если в качестве весовых функций  $p_r$  рассматривать только функции с компактным носителем в шаре радиуса  $r$ , то для локально липшицевых функций  $\partial_\tau f(x)$  совпадает с субдифференциалом Ф. Кларка [6]. Исследование экстремальных свойств с использованием субдифференциала по мере для более широких классов функций проводилось в работах [4, 7–10].

Далее будут рассмотрены различные примеры весовых функций и соответствующие им потенциалы аппроксимационного градиента функции  $f$ . Учитывая, что рассматриваемый субдифференциал характеризует только локальные свойства функции, и предполагая изучение именно этих свойств, в дальнейшем будем считать, что функция  $f$  задана в некоторой окрестности данной точки  $x$ , а за ее пределами продолжена нулем.

## 2. Аппроксимационный градиент и производные Соболева

Справедливо следующее утверждение.

**Предложение 2.1.** *Если  $f$  — из пространства Соболева  $L_1^p(O(x))$  и  $p_r$  — сосредоточенная в шаре  $B_r$  непрерывная весовая функция, то компоненты вектора аппроксимационного градиента  $a_r^{(i)}(f)(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) представляют собой усреднения по Стежлову [3] слабых производных Соболева:*

$$a_r^{(i)}(f)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} [f]_r = [f^{(i)}]_r.$$

При этом ядро усреднения  $\omega_r(\alpha) = 0$  при  $\alpha > r$ , а при  $0 \leq \alpha \leq r$  задается следующим образом:

$$\omega_r(\alpha) = \int_\alpha^r \tau \tilde{p}_r(\tau) d\tau.$$

**Доказательство.** Рассмотрим  $i$ -ю компоненту аппроксимационного градиента с весовой функцией указанного вида:

$$\begin{aligned} a_r^{(i)}(f)(x) &= \frac{1}{d_r} \int_{\mathbb{R}^n} s_i f(x+s) p_r(s) ds = \frac{1}{d_r} \int_{B_r} s_i f(x+s) \tilde{p}_r(|s|) ds \\ &= \frac{1}{d_r} \int_{B_r} f(x+s) \frac{s_i}{|s|} |s| \tilde{p}_r(|s|) ds = -\frac{1}{d_r} \int_{B_r} f(x+s) \frac{s_i}{|s|} \left( \int_{|s|}^r \tau \tilde{p}_r(\tau) d\tau \right)' ds. \end{aligned}$$

Осуществляя замену  $s = t - x$  в последнем интеграле, получим:

$$a_r^{(i)}(f)(x) = \frac{1}{d_r} \int_{B_r} f(t) \frac{x_i - t_i}{|x-t|} \omega_r'(\alpha)_{|\alpha=|x-t|} dt = \frac{1}{d_r} \int_{B_r} f(t) \frac{\partial \omega_r(|x-t|)}{\partial x_i} dt = \frac{V_r}{d_r} [f^{(i)}]_r,$$

где

$$[f^{(i)}]_r = \frac{\partial [f]_r}{\partial x_i}, \quad [f]_r = \frac{1}{V_r} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_r(|x-t|) f(t) dt = \frac{1}{V_r} \int_{B_r} \omega_r(|x-t|) f(t) dt$$

— усреднение по Стеклову функции  $f$ ,  $\omega_r$  — ядро усреднения, а

$$V_r = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_r(|t|) dt = \int_{B_r} \int_{|t|}^r \tau \tilde{p}_r(\tau) d\tau dt.$$

Для доказательства утверждения достаточно проверить, что  $V_r = d_r$ . Перейдем к полярным координатам:

$$t_1 = \varrho \cos \beta_1, \quad t_2 = \varrho \sin \beta_1 \cos \beta_2, \quad \dots, \\ t_{n-1} = \varrho \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2} \cos \beta_{n-1}, \quad t_n = \varrho \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2} \sin \beta_{n-1},$$

где  $t_1, \dots, t_n$  — компоненты вектора  $t$ .

Модуль якобиана этого преобразования равен  $\varrho^{n-1} \sin^{n-2} \beta_1 \sin^{n-3} \beta_2 \dots \sin \beta_{n-2}$ , и  $|t| = \varrho$ . Следовательно,

$$V_r = C \int_0^r \varrho^{n-1} \int_{\varrho}^r \tau \tilde{p}_r(\tau) d\tau d\varrho,$$

где  $C = \int_0^\pi \sin^{n-2} \beta_1 d\beta_1 \dots \int_0^\pi \sin \beta_{n-2} d\beta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\beta_{n-1}$ .

Изменяя порядок интегрирования, по теореме Фубини получим

$$V_r = C \int_0^r \int_0^\tau \varrho^{n-1} \tau \tilde{p}_r(\tau) d\varrho d\tau = C \int_0^r \tau \tilde{p}_r(\tau) \frac{\tau^n}{n} d\tau = \frac{C}{n} \int_0^r \tau^{n+1} \tilde{p}_r(\tau) d\tau.$$

Возвращаясь от полярных координат к исходным, получаем

$$V_r = \frac{C}{n} \int_0^r \varrho^{n+1} \tilde{p}_r(\varrho) d\varrho = \frac{1}{n} \int_{B_r} |t|^2 \tilde{p}_r(|t|) dt = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |t|^2 p_r(t) dt = d_r.$$

Утверждение доказано.

В силу доказанного утверждения функцию  $[f]_r$  можно назвать потенциалом Стеклова приближения “градиента” Соболева, т.е. аппроксимационного градиента функции  $f$ . Непрерывную весовую функцию, сосредоточенную в шаре  $B_r$ , назовем весовой функцией Стеклова — Соболева. Такой функцией является, например, следующая функция [2]:

$$p_r(s) = \begin{cases} e^{\frac{|s|^2}{|s|^2 - r^2}}, & \text{если } s \in B_r, \\ 0, & \text{если } s \notin B_r. \end{cases}$$

### 3. Аппроксимационный градиент и интеграл Пуассона

Покажем, что интеграл Пуассона является также потенциалом аппроксимационного градиента при соответствующем выборе весовой функции.

Интеграл Пуассона представляет собой свертку следующего вида [11]:

$$u(x, r) = \int_{\mathbb{R}^n} P_r(t) f(x - t) dt = P_r * f,$$

где  $r > 0$ ,  $P_r(t)$  — пуассоновское ядро,

$$P_r(t) = \frac{c_n r}{(|t|^2 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}},$$

$\Gamma$  — гамма-функция.

Интеграл Пуассона дает решение задачи Дирихле для  $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ : найти гармоническую функцию на  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  такую, что  $u(x, 0) = f(x)$ .

Свойства пуассоновского ядра детально изучены. Напомним некоторые из них [12]:

(1)  $P_r(t) > 0$ ;

(2)  $\int_{\mathbb{R}^n} P_r(t) dt = 1$ ;

(3)  $P_r \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ;

(4) если  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  при  $1 \leq p \leq \infty$ , то  $\Delta u = 0$ , т.е.  $u$  — гармоническая функция в  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ ;

(5)  $\lim_{r \rightarrow +0} u(x, r) = f(x)$  п.в. для  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ; если  $p < \infty$ , то  $\|u(x, r) - f(x)\|_{L^p} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ .

Осуществляя замену переменной интегрирования  $s = y - x$ , для интеграла Пуассона получим

$$u(x, r) = \int_{\mathbb{R}^n} P_r(s) f(x + s) ds = \int_{\mathbb{R}^n} P_r(y - x) f(y) dy.$$

Так как

$$\frac{\partial P_r(y - x)}{\partial x_i} = \frac{c_n r(n+1)}{(|y - x|^2 + r^2)^{\frac{n+3}{2}}} (y_i - x_i),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} s_i f(x + s) \frac{c_n r(n+1)}{(|s|^2 + r^2)^{\frac{n+3}{2}}} ds.$$

Покажем, что функция  $p_r(s) = \frac{c_n r(n+1)}{(|s|^2 + r^2)^{\frac{n+3}{2}}}$  является весовой. Она, очевидно, неотрицательная. Проверим, что для нее  $d_r = 1$ . Обозначим

$$\int_{\mathbb{R}^n} |s|^2 p_r(s) ds = c J_n,$$

где  $c = c_n r(n+1)$ ,  $J_n = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|s|^2}{(|s|^2 + r^2)^{\frac{n+3}{2}}} ds = \int_0^\infty \frac{\rho^2}{(\rho^2 + r^2)^{\frac{n+3}{2}}} \rho^{n-1} d\rho \int_S d\sigma$ ,  $d\sigma$  — мера Лебега на единичной сфере  $S = \{t \in \mathbb{R}^n : |t| = 1\}$  и  $\int_S d\sigma = \mu(S) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$  [13].

Для интеграла  $J_n$  получим

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} J_n = r^{-1} \int_0^\infty \frac{\tau^{n+1}}{(\tau^2 + 1)^{\frac{n+3}{2}}} d\tau = (2r)^{-1} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{n}{2}}}{(t+1)^{\frac{n+3}{2}}} dt = (2r)^{-1} \beta\left(\frac{n+2}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

где  $\beta(p, q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  — полная бета-функция.

Так как  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  и  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$ , то

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |s|^2 p_r(s) ds &= c J_n = \frac{c_n r(n+1) 2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} (2r)^{-1} \beta\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{(n+1)\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2} + 1)} = \frac{n+1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{n+1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})} = n \end{aligned}$$

и  $d_r = 1$ .

Чтобы доказать, что функция  $p_r(s) = \frac{c_n r(n+1)}{(|s|^2 + r^2)^{\frac{n+3}{2}}}$  является весовой, осталось проверить выполнение пункта 2° определения 1.1. Эта функция удовлетворяет условиям предложения 1.1. Действительно, при любом  $r > 0$  функция  $\tilde{p}_r(|s|)$  непрерывна и монотонно убывает по  $|s|$ . Для любого фиксированного  $a > 0$   $\tilde{p}_r(a) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +0$ , а  $d_r = 1$ . Следовательно, для любого измеримого множества  $A$  такого, что  $0 \notin \bar{A}$ , будет выполнено  $\frac{1}{d_r} \|p_r\|_{L^\infty(A)} = \tilde{p}_r(\inf_{s \in A} |s|) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +0$  в силу задания нормы в классе функций  $L^\infty$  [14].

Сомножители, не зависящие от  $s$ , в весовой функции могут быть отброшены. Функцию  $p_r(s) = (|s|^2 + r^2)^{-\frac{n+3}{2}}$  назовем пуассоновской весовой функцией.

#### 4. Аппроксимационный градиент и гармонические производные

Функция  $f \in L^p(O(x))$  имеет производную в точке  $x$  в смысле  $L^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) [15], если существует такая линейная функция  $\Lambda(s) = C + \sum_{j=1}^n \beta_j s_j$ , что

$$\left( r^{-n} \int_{B_r} |f(x+s) - \Lambda(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} = o(r)$$

при  $r \rightarrow +0$ .

Данное определение дает обобщение понятия дифференцируемости функции в обычном смысле на класс суммируемых функций. Такого рода обобщения стали возможны благодаря знаменитой теореме Данжуа, Радемахера и Степанова [16], дающей критерий дифференцируемости функции почти всюду.

Из дифференцируемости в обычном смысле следует дифференцируемость в смысле  $L^p$ , а из дифференцируемости в смысле  $L^p$  следует дифференцируемость и в смысле  $L^1$ . При этом соответствующие производные будут совпадать [11].

Если  $f$  дифференцируема в смысле  $L^p$ , то  $\beta \in \partial_r f$ , где  $\beta$  — введенный ранее вектор, фигурирующий в определении  $\Lambda(s)$ .

Выбирая в качестве весовой функцию

$$p_r(s) = \begin{cases} \frac{1}{|s|}, & \text{если } s \in B_r, \\ 0, & \text{если } s \notin B_r \end{cases}$$

и полагая  $\varepsilon(s) = f(x+s) - \Lambda(s)$ , получим

$$|a_r(f)(x) - \beta| = \frac{1}{d_r} \left| \int_{B_r} s \varepsilon(s) p_r(s) ds \right| \leq \frac{1}{d_r} \int_{B_r} |s| |\varepsilon(s)| p_r(s) ds = \frac{1}{d_r} \int_{B_r} |\varepsilon(s)| ds \rightarrow 0$$

при  $r \rightarrow +0$ .

Пусть  $K_\alpha(x) = \{(y, r) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : |y-x| < \alpha r\}$  — конус с вершиной в точке  $(x, 0)$ , а  $\alpha > 0$ . Напомним определение дифференцируемости функции в гармоническом смысле [11].

**О п р е д е л е н и е 4.1.** Функция  $u(y, r)$  имеет нетангенциальный предел, равный  $l$ , в точке  $(x, 0)$ , если для любого  $\alpha > 0$  существует

$$\lim_{\substack{(y, r) \rightarrow (x, 0) \\ (y, r) \in K_\alpha(x)}} u(y, r) = l.$$

**О п р е д е л е н и е 4.2.** Пусть  $f \in L^1(O(x))$ . Положим  $f = 0$  вне  $O(x)$ . Будем говорить, что  $f$  имеет гармоническую производную в точке  $x$ , если интеграл Пуассона  $u(y, r) = P_r * f$  и производные  $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , имеют нетангенциальные пределы. При этом

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(x) = \lim_{\substack{(y, r) \rightarrow (x, 0) \\ (y, r) \in K_\alpha(x)}} \frac{\partial u}{\partial y_i}(y, r).$$

Дифференцируемость в гармоническом смысле дает дальнейшее обобщение дифференцируемости функции, а именно: если  $f$  имеет производную в смысле  $L^p$ , то  $f$  имеет в этой точке производную в гармоническом смысле, и они совпадают. Известно, что функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  из пространства Соболева  $L_1^p(O(x))$  при  $1 \leq p < n$  будет дифференцируемой в смысле  $L^q$  п.в. в  $O(x)$  при  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ , а в случае  $n < p$  — эквивалентна дифференцируемой п.в. в  $O(x)$  функции [11].

Если  $f$  является дифференцируемой в точке  $x$  в гармоническом смысле и вектор гармонических производных равен  $\xi$ , то в силу рассматриваемых здесь построений  $\xi \in \partial_\tau f(x)$ . Вектор  $\xi$  будет получен как предел аппроксимационных градиентов с пуассоновской весовой функцией при стремлении  $(y, r) \rightarrow (x, 0)$  нетангенциально.

## 5. Аппроксимационный градиент и потенциалы Рисса и Бесселя

Преобразованиями Рисса [17] называются следующие интегральные операторы для функции  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  и  $1 \leq p < \infty$ :

$$R_j(f)(x) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y) dy,$$

где  $j = \overline{1, n}$ ,  $c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ .

При  $n = 1$  преобразование Рисса совпадает с преобразованием Гильберта [18]:

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

Преобразования Рисса представляют собой ограниченные линейные операторы для  $1 < p < \infty$ . Они не сохраняют классы ограниченных и суммируемых на всем пространстве функций [11].

Потенциалами Рисса ( $0 < \alpha < n$ ) называются следующие операторы свертки:

$$I_\alpha(f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-n+\alpha} f(y) dy,$$

где  $\gamma(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}$ .

Формальное дифференцирование потенциалов Рисса дает:

$$\frac{\partial I_\alpha(f)(x)}{\partial x_j} = \frac{n-\alpha}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j - x_j}{|x-y|^{n-\alpha+2}} f(y) dy = \frac{n-\alpha}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{s_j}{|s|^{n-\alpha+2}} f(x+s) ds.$$

Следовательно,  $\frac{\partial I_1(f)}{\partial x_j} = -R_j(f)$ , по крайней мере, для бесконечно дифференцируемой функции  $f$  с компактным носителем. При этом градиенты потенциалов Рисса схожи с аппроксимационными градиентами для функций  $p_r(s) = |s|^{-n+\alpha-2}$ .

Однако

$$\int_{\mathbb{R}^n} |s|^2 \frac{1}{|s|^{n-\alpha+2}} ds = \text{const} \int_0^\infty \rho^2 \rho^{-n-2+\alpha} \rho^{n-1} d\rho = \text{const} \rho^\alpha \Big|_0^\infty = \infty$$

для любого  $\alpha > 0$ , так как ядра потенциалов Рисса недостаточно быстро убывают на бесконечности.

Потенциалы Рисса приводят к очень элегантным и полезным формулам и обладают рядом замечательных свойств. Их важность прежде всего состоит в том, что они играют роль “сглаживающих операторов”. Однако медленное убывание ядер преобразований Рисса при  $|x| \rightarrow \infty$  порождает у них особенность не только в нуле, но и на бесконечности. Этого недостатка нет у бесселевых потенциалов, которые будут рассмотрены ниже.

С учетом сказанного, весовыми функциями Рисса — Гильберта назовем сосредоточенные в шаре  $B_r$  функции

$$p_r(s) = \begin{cases} |s|^{-n+\alpha-2}, & \text{если } s \in B_r, \\ 0, & \text{если } s \notin B_r, \end{cases}$$

для которых

$$\begin{aligned} d_r &= \frac{1}{n} \int_{B_r} |s|^2 |s|^{-n+\alpha-2} ds = \text{const} \int_0^r \rho^2 \rho^{n-1} \rho^{-n+\alpha-2} d\rho \\ &= r^{\alpha-1} \text{const} \int_0^1 t^{\alpha-1} dt = r^{\alpha-1} \text{const} < \infty. \end{aligned}$$

При  $\alpha = 1$  компоненты аппроксимационного градиента для рассматриваемой весовой функции будут отличаться только на отрицательный постоянный множитель от преобразований Рисса, если  $\text{supp } f \subseteq B_r(x)$ .

Бесселевы потенциалы [19] также представляют собой свертки  $\mathfrak{S}_\alpha(f) = G_\alpha * f$ ,  $\alpha > 0$ . Ядра потенциалов задаются следующей формулой:

$$G_\alpha(x) = (4\pi)^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi|x|^2}{\delta}} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta\left(\frac{-n+\alpha}{2}\right) \frac{d\delta}{\delta}.$$

Они обладают рядом замечательных свойств. Так, для любого  $\alpha > 0$   $G_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$  и  $\int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x) dx = 1$ . Они достаточно быстро убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ :

$$G_\alpha(x) = O\left(e^{-c|x|}\right),$$

где  $c > 0$ , а при  $|x| \rightarrow 0$  имеют такую же асимптотику, что и ядра потенциалов Рисса:

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} |x|^{-n+\alpha} + o(|x|^{-n+\alpha}).$$

Для ядра  $G_\alpha$  имеем

$$\frac{\partial G_\alpha\left(\frac{y-x}{r}\right)}{\partial x_j} = (4\pi)^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{2\pi}{r^2 \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} (y_j - x_j) \int_0^\infty e^{-\frac{\pi|y-x|^2}{\delta r^2}} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta\left(\frac{-n+\alpha}{2}\right) \frac{d\delta}{\delta^2}$$

и

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_\alpha}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} s_j f(x+s) p_r(s) ds,$$

где

$$p_r(s) = (4\pi)^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{2\pi}{r^2 \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi|s|^2}{\delta r^2}} e^{-\frac{\delta}{4\pi} \delta(\frac{-n+\alpha}{2})} \frac{d\delta}{\delta^2} = \frac{1}{r^2} \tilde{p}_1\left(\frac{|s|}{r}\right) > 0$$

для любых  $\alpha > 0$  и  $s \in \mathbb{R}^n$ .

При этом

$$s_j \tilde{p}_1(|s|) = -\frac{\partial G_\alpha(s)}{\partial s_j}$$

и

$$\begin{aligned} d_r &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |s|^2 p_r(s) ds = \int_{\mathbb{R}^n} s_j^2 \frac{1}{r^2} \tilde{p}_1\left(\frac{|s|}{r}\right) ds = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_j^2 p_1(\tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_j^2 p_1(\tau) d\tau_j \right) d\tau^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( - \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_j \frac{\partial G_\alpha(\tau)}{\partial \tau_j} d\tau_j \right) d\tau^{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( -\tau_j G_\alpha(\tau) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(\tau) d\tau_j \right) d\tau^{n-1}, \end{aligned}$$

где  $j$  любое число от 1 до  $n$ , а  $\tau^{n-1} = (\tau_1, \dots, \tau_{j-1}, \tau_j + 1, \dots, \tau_n)$ .

Учитывая нормировку и асимптотику бесселевых ядер, получим

$$d_r = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \tau_j O\left(e^{-c|\tau|}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(\tau) d\tau_j \right) d\tau^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(\tau) d\tau = 1.$$

Пункт 2° определения 1.1 для данной функции  $p_r(s)$  также выполняется в силу предложения 1.1. Это следует, как и в случае пуассоновского ядра, из монотонности  $\tilde{p}_r$  как функции от  $|s|$  и из асимптотики бесселевых ядер на бесконечности, которая будет совпадать с асимптотикой функции  $\tilde{p}_r$  при  $r \rightarrow 0$  и фиксированном  $|s|$ .

Сомножители, не зависящие от  $s$ , в весовой функции могут быть отброшены. Поэтому весовыми функциями Бесселя назовем следующие функции:

$$p_r(s) = \int_0^\infty e^{-\frac{\pi|s|^2}{\delta r^2}} e^{-\frac{\delta}{4\pi} \delta(\frac{-n+\alpha}{2})} \frac{d\delta}{\delta^2},$$

где  $\alpha > 0$ .

Таким образом, бесселевы потенциалы являются потенциалами аппроксимационного градиента функции  $f$  в случае весовых функций Бесселя.

## 6. Заключение

Предлагаемый в работе подход к обобщению понятия дифференцируемости функций на класс суммируемых функций объединяет многие из известных. Как отмечалось выше, в работах [5, 7] было показано, что субдифференциал Ф. Кларка [6], а значит, и субдифференциал выпуклой функции могут быть представлены в виде субдифференциала по мере. В настоящей работе установлено, что с этой же точки зрения может быть рассмотрено обобщенное

дифференцирование С.Л. Соболева и гармоническое дифференцирование, а значит, и дифференцирование в смысле  $L^p$ . Этот подход позволяет связать теорию сингулярных интегралов и гармонический анализ с теориями экстремальных задач и многозначных отображений, дает возможность проводить анализ экстремальных свойств разрывных функций. Построение субдифференциала по дискретным мерам представляется перспективным при разработке численных методов решения разрывных экстремальных задач.

В заключение предлагаемый подход проиллюстрируем на простом примере.

Пр и м е р 6.1.

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Данная функция суммируема на всем пространстве, и ее интеграл Пуассона имеет вид:

$$u(x, r) = \frac{x}{\pi} \left[ 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{r} + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{r} - \operatorname{arctg} \frac{1+x}{r} \right] + \frac{r}{2\pi} \ln \frac{[r^2 + (1-x)^2][r^2 + (1+x)^2]}{[r^2 + x^2]^2}.$$

При этом

$$u'_x(x, r) = v(x, r) + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{r},$$

где

$$v(x, r) = \frac{r}{\pi} \left[ \frac{1}{r^2 + (1+x)^2} - \frac{1}{r^2 + (1-x)^2} \right] + \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{1-x}{r} - \operatorname{arctg} \frac{1+x}{r} \right] \rightarrow 0$$

при произвольном стремлении  $x$  и  $r$  к нулю.

Следовательно,  $u'_x(x, r) \approx \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{r}$  при  $(x, r) \rightarrow (0, 0)$ . Поэтому в пределе мы можем получить любое число  $\xi \in [-1; 1]$ .

Рассматриваемая функция является локально липшицевой вблизи нуля, и субдифференциал  $\partial_\tau f(0)$  будет совпадать с субдифференциалом Ф. Кларка  $\partial_{\text{СЛ}} f(0) = [-1; 1]$ . Таким образом, с помощью только одного типа потенциалов — интеграла Пуассона — мы построили весь субдифференциал.

В то же время,  $u'_x(x, r)$  не имеет нетангенциальных пределов при  $(x, r) \rightarrow (0, 0)$  и функция  $f$  не будет дифференцируемой в точке  $x = 0$  в гармоническом смысле, а значит, и в смысле  $L^p$ . Ничего нельзя сказать и о ее слабой производной в этой точке.

Поступила 3.03.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батухтин В.Д., Майборода Л.А. Разрывные экстремальные задачи. С.-П.: Гиппократ, 1995.
2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
4. Батухтин В.Д., Бигильдеев С.И., Бигильдеева Т.Б. Оптимизация суммируемых функций. // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 3. С. 73–89.
5. Бигильдеев С.И., Рольщиков В.Е. Свойства аппроксимационного градиента в зависимости от весовой функции // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 89–94.
6. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
7. Бигильдеев С.И. Аппроксимационная производная как многозначное отображение // Вестн. Челябинского гос. ун-та. 1996. № 1(3). С. 21–33.

8. **Batukhtin V.D., Bigil'deev S.I., Bigil'deeva T.B.** Approximate gradient methods and the necessary conditions for the extremum of discontinuous functions // Nonsmooth and discontinuous problems of control and optimization. Proceeding of the IFAC Workshop (NDPCO'98) held in Chelyabinsk, June 17-20, 1998. Edited by V.D. Batukhtin, F.M. Kirillova and V.I. Ukhobotov. Published for the International Federation of Automatic Control (IFAC), Laxenburg; by Pergamon, New York, 1999. P. 25–34.
9. **Бигильдеев С.И.** Существенная оптимизация функций // Оптимизация численных методов: Труды международной научной конференции “Оптимизация численных методов”, посвященной 90-летию со дня рождения С.Л. Соболева (1908-1989). Часть 1 / Ответственный редактор М.Д. Рамазанов. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2000. С. 40–49.
10. **Бигильдеев С.И.** Оптимизация регулярно аппроксимируемых функций // Журнал на электронных носителях "Известия Челябинского научного центра" УрО РАН. 2001. № 3(12).
11. **Стейн И.М.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
12. **Stein E.M., Weiss G.** Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton, 1971.
13. **Мысовских И.П.** Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
14. **Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
15. **Calderon A.P., Zygmund A.** Local properties of solutions of elliptic partial differential equations // Studia Math. 1961. V. 20. P. 171–225.
16. **Сакс С.** Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
17. **Riesz M.** L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy // Acta Math. 1949. V. 81. P. 1–233.
18. **Weyl H.** Bemerkungen zum Begriff der Differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vier. Natur. Gesellschaft, Zurich. 1917. V. 62. P. 296–302.
19. **Aronszajn N., Smith K.T.** Theory of Bessel potentials. I // Ann. Inst. Fourier. 1961. V. 11. P. 385–475.

УДК 517.977

**О ЗАДАЧЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОБХОДА ОДНИМ НЕЛИНЕЙНЫМ  
ОБЪЕКТОМ ДВУХ ДВИЖУЩИХСЯ ТОЧЕК<sup>1</sup>****Ю. И. Бердышев**

Исследуется задача о наискорейшем последовательном обходе нелинейным управляемым объектом двух движущихся точек. При этом используется система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая простейшую модель движения самолета (автомобиля) в горизонтальной плоскости. Определяется структура оптимальных траекторий и предлагается алгоритм их построения.

**1. Введение**

Исследуется задача о последовательном обходе нелинейным объектом двух движущихся точек. Отличие этой задачи от рассматривавшихся ранее состоит в наличии не одной, а двух целевых точек, подлежащих последовательному во времени обходу. Сложность задачи состоит в том, что недостаточно разбить ее на две последовательно решаемые двухточечные задачи (двухточечной мы называем задачу, состоящую в переводе из одной точки в другую). Здесь при переходе из начального положения в первую точку необходимо учитывать информацию о второй точке, подлежащей обходу, так как игнорирование этой информации может привести к значительному увеличению суммарного времени обхода. Заметим, что принципиальных затруднений не возникает при переходе от задач с двумя целями к задачам с большим, чем две, количеством целей. Возникают лишь дополнительные трудности вычислительного характера.

Решение задачи основано на использовании необходимых условий оптимальности принципа максимума Л.С. Понтрягина [1] и временных параметров в форме выравнивания гамильтониана, полученных для нелинейных задач последовательного управления [2, 3].

В данной работе используется нелинейная система третьего порядка, описывающая простейшую модель движения самолета (автомобиля) в горизонтальной плоскости [4]. При этом самолет отождествляется с точкой на плоскости, имеющей постоянную величину скорости. Направление скорости в начальный момент задано, а в дальнейшем может меняться в зависимости от выбираемого управления. Условие, налагаемое на управление, определяет минимальный радиус разворота самолета. Рассматриваемая нелинейная система обладает весьма важным свойством: вспомогательная система уравнений, возникающая при использовании принципа максимума, имеет аналитическое решение. Это свойство существенно упрощает решение краевой задачи и обеспечивает успех решения исходной нелинейной задачи оптимального управления. Заметим, что случай, когда точка-цель единственна и неподвижна, полностью исследован в работах [5–7]: в [5] синтезировано оптимальное управление, в [6] построены области достижимости, а для более сложной системы четвертого порядка задача решена в работе [7]. В настоящей работе подлежат обходу две точки, которые равномерно движутся по заданным прямым. Задан порядок их обхода. Управляемый объект, осуществляющий обход, будем называть преследователем, а движущиеся точки — целями. Ранее [3] был исследован случай, при котором движущихся точек больше двух, но каждые две соседние при заданном порядке

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-01-00415, 04-01-96093) и гранта МО РФ Е02-1.0-232.

точки (включая точку с нулевым номером, в которой находится преследователь в начальный момент) находятся на достаточном удалении друг от друга. В этом случае оптимальная траектория состоит из дуг окружностей минимального радиуса и отрезков прямых. При этом, в точках стыковки отрезков и дуг, прямые и окружности, которые их соответственно содержат, касаются друг друга. В [3] показано, что никакая иная по структуре траектория не может удовлетворять принципу максимума и условию выравнивания.

В этой статье мы изучаем ранее не рассмотренный, наиболее интересный для практики и наиболее сложный для исследования случай, когда цели находятся вблизи друг от друга и в процессе движения преследователь принимает такое положение, из которого очередная цель не может быть достигнута по траектории, состоящей из дуги окружности и отрезка прямой. Такая неудобная для преследователя ситуация возникает тогда, когда очередная цель находится вблизи от преследователя, но не в направлении его вектора скорости. Заметим, что в игровой постановке преследуемые цели для оттягивания момента сближения, по-видимому, должны создавать именно такие ситуации.

Работа лежит в русле исследований школы Н.Н. Красовского по теории управления [8–12]. Следует заметить, что закономерности, присущие задачам последовательного управления, первоначально удалось выявить при исследовании линейных систем на основе общего принципа двойственности, установленного Н.Н. Красовским и сформулированного им в терминах проблемы моментов [8,9]. Последовательное управление фактически использовалось в работах А.Б. Куржанского и Ю.С. Осипова при исследовании линейных задач управления с фазовыми ограничениями [10,11]. В этом же направлении следует отметить работу А.И. Субботина [12]. С использованием общего принципа двойственности [8,9] задачи последовательного управления исследовались в работах А.Г. Ченцова и его учеников (см., например, [13–16]), где были описаны методы решения задач минимизации системы рассогласований между состоянием управляемого объекта в упорядоченные моменты времени и точками (множествами) в пространстве геометрических координат. Для нелинейных задач минимизации указанных рассогласований в [13, 15, 17] сформулированы принцип максимума и условия выравнивания, а также решена конкретная задача. Заметим, что близкие по постановке задачи рассматривались в работах В.А. Медведева, В.Н. Розовой, Г.К. Захарова при оптимизации так называемых ступенчатых и разрывных управляемых систем [18,19], а также в работе Л.Т. Ащепкова [20]. Вариационные задачи оптимизации процессов управления с функционалами, зависящими от промежуточных значений координат, в несколько иной постановке и при других ограничениях на управление исследовались В.А. Троицким [21].

В игровой постановке задачи последовательного управления рассматривались в работах А.Н. Красовского и Н.Н. Красовского [22] и Н.Н. Красовского и Н.Ю. Лукоянова [23].

## 2. Постановка задачи

Настоящая работа является продолжением работы [24]. Но если в [24] цели неподвижны, то здесь они движутся. Не оговаривая дополнительно, будем полагать, что  $i = 1, 2$ . Для упрощения вычислений будем полагать, что цели  $W_i(t)$  движутся по прямым с заданной постоянной скоростью, а их координаты  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$  в момент времени  $t$  определяются соотношениями

$$x_i(t) = x_{0i} + \nu_i(t - t_0) \cos \beta_i, \quad y_i(t) = y_{0i} + \nu_i(t - t_0) \sin \beta_i. \quad (2.1)$$

Здесь  $t_0$  — начальный момент времени,  $x_{0i}$ ,  $y_{0i}$ ,  $\beta_i$  — произвольные числа, а  $0 \leq \nu_i < 1$ . Таким образом, величина скорости  $\nu_i$  каждой целевой точки  $W_i(t)$  меньше скорости преследователя. Прямые, описываемые соотношениями (2.1), будем обозначать через  $l_i$ . Порядок обхода задаем соотношением  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t^0$ , т.е. цели обслуживаются в порядке возрастания их номеров. Пусть далее  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ .

Движение преследователя, как и в [24], описывается нелинейной системой уравнений

$$\dot{x} = \cos \alpha, \quad \dot{y} = \sin \alpha, \quad \dot{\alpha} = u; \quad |u| \leq 1. \quad (2.2)$$

Здесь  $x, y$  — координаты преследователя, отождествляемого с точкой на плоскости,  $\alpha$  — угол, составляемый вектором скорости  $\mathbf{V} = (\dot{x}, \dot{y})$  с осью  $x$ ,  $u$  — управляющий параметр, характеризующий скорость изменения угла  $\alpha$  и удовлетворяющий указанному ограничению. Состояние  $(x_0, y_0, \alpha_0)$  преследователя (2.2) в начальный момент времени  $t_0$  предполагается заданным:  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ ,  $\alpha(t_0) = \alpha_0$ . Без ограничения общности далее будем считать, что

$$x_0 = y_0 = \alpha_0 = t_0 = 0. \quad (2.3)$$

Для полноты изложения напомним некоторые определения, используемые в работе [24]. Пусть  $\mathbf{U}$  — множество всех измеримых по Борелю скалярных функций  $U : T \rightarrow \{u : |u| \leq 1\}$ . Каждое управление  $U \in \mathbf{U}$  порождает движение, исходящее из начальной позиции (2.3), которое будем обозначать через

$$(x_U, y_U, \alpha_U) = ((x_U(t), y_U(t), \alpha_U(t)), \quad t \in T).$$

Под траекторией системы (2.2), порожденной управлением  $U$ , понимаем множество  $((x_U(t), y_U(t)), t \in T)$  в плоскости  $Oxy$ .

Будем говорить, что управление  $U \in \mathbf{U}$  обеспечивает сближение системы (2.2) с движущимися точками  $W_i(t)$ , если найдутся такие моменты времени  $t_i$ , что

$$x_U(t_i) = x_i(t_i), \quad y_U(t_i) = y_i(t_i).$$

Временем сближения преследователя с целями  $W_i(t)$  будем считать момент  $t_i$ .

Задача состоит в определении управления  $U \in \mathbf{U}$ , обеспечивающего сближение системы (2.2) с движущимися точками  $W_i(t)$  за наименьшее время, а также в определении самих моментов времени (сближения)  $t_i$ .

Разбивая исходную задачу на две последовательно решаемые двухточечные задачи, используя соотношения  $\nu_1 < 1$ ,  $\nu_2 < 1$  и метод построения оптимальной траектории при одной подвижной цели (см. пункт 5), можно показать, что найдется управление  $U \in \mathbf{U}$ , обеспечивающее сближение системы (2.2), (2.3) с двумя движущимися целями. Поэтому принятые ограничения на управляемую систему (2.2), (2.3) и класс допустимых управлений  $\mathbf{U}$  обеспечивают существование оптимального управления в рассматриваемой задаче.

### 3. Необходимые условия оптимальности управлений и моментов времени

Если к системе (2.2) добавить уравнение

$$\dot{\tau} = 1, \quad \tau(0) = 0,$$

то рассматриваемая задача становится частным случаем задачи из [2]. При этом функцию  $\Phi_1 : T \times R^4 \rightarrow R$  из [2] полагаем тождественно равной нулю, функцию  $\Phi_2$  (см. [2]) полагаем равной  $\tau$ , компоненты  $K_{ij}$  ( $j = 1, 2$ ) вектор-функций  $K_i$  определим соотношениями  $K_{i1} = x - x_i(t)$ ,  $K_{i2} = y - y_i(t)$ .

В рассматриваемом случае вспомогательные функции  $\psi_{ij}(t)$ ,  $t \in [0, t_i]$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) (см. [2]) удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\psi}_{i1}(t) = 0, \quad \dot{\psi}_{i2}(t) = 0, \quad \dot{\psi}_{i3}(t) = \psi_{i1}(t) \dot{y} - \psi_{i2}(t) \dot{x}, \quad \dot{\psi}_{i4}(t) = 0, \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\psi_{i1}(t_i) = \Lambda_{i1}, \quad \psi_{i2}(t_i) = \Lambda_{i2}, \quad \psi_{i3}(t_i) = 0, \quad (3.2)$$

$$\psi_{i4}(t_i) = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ -1, & i = 2. \end{cases}$$

Здесь  $\Lambda_{ij}$  ( $j = 1, 2$ ) — постоянные интегрирования, подлежащие определению. Из (3.1), (3.2) видно, что при любом управлении  $U \in \mathbf{U}$  выполняется соотношение

$$\psi_{i3}(t) = \Lambda_{i1}(y_U(t) - y_i(t_i)) - \Lambda_{i2}(x_U(t) - x_i(t_i)). \quad (3.3)$$

Векторные функции, координатами которых являются  $\psi_{i1}(t), \dots, \psi_{i4}(t)$ ,  $t \in [0, t_i]$ , обозначим через  $\psi_i(t)$ . Пусть  $\bar{\psi}_k(t)$  ( $k = 1, 2$ ) — функции, определяемые на соответствующих отрезках  $[t_{k-1}, t_k]$  соотношениями

$$\bar{\psi}_2(t) = \psi_2(t), \quad \bar{\psi}_1(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t), \quad (3.4)$$

а  $\bar{\psi}_{kj}(t)$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) — их компоненты.

Из (3.1) – (3.4) имеем

$$\bar{\psi}_{21}(t) = \Lambda_{21}, \quad \bar{\psi}_{22}(t) = \Lambda_{22}, \quad \bar{\psi}_{23}(t) = \Lambda_{21}(y_U(t) - y_2(t_2)) - \Lambda_{22}(x_U(t) - x_2(t_2)), \quad \bar{\psi}_{24}(t) = -1,$$

$$\bar{\psi}_{11}(t) = \Lambda_{11} + \Lambda_{21}, \quad \bar{\psi}_{12}(t) = \Lambda_{12} + \Lambda_{22}, \quad \bar{\psi}_{14}(t) = -1,$$

$$\bar{\psi}_{13}(t) = (\Lambda_{11} + \Lambda_{21})y_U(t) - (\Lambda_{12} + \Lambda_{22})x_U(t) - [(\Lambda_{21}y_2(t_2) - \Lambda_{22}x_2(t_2)) + (\Lambda_{11}y_1(t_1) - \Lambda_{22}x_1(t_1))].$$

Пусть  $(\mathbf{t}, U)$  — решение исходной задачи,  $z_U(t) = (x_U(t), y_U(t), \alpha_U(t))$  ( $0 \leq t \leq t_2$ ). Тогда согласно теореме 6.1 [2] найдутся такие постоянные  $\Lambda_{ij}$  ( $j = 1, 2$ ), при которых функции Гамильтона  $H_k(t, z_U(t), \bar{\psi}_k(t), u)$ , определенные на соответствующих отрезках  $[t_{k-1}, t_k]$  формулами

$$H_k(t, z_U(t), \bar{\psi}_k(t), u) = \bar{\psi}_{k1}(t) \cos \alpha_u(t) + \bar{\psi}_{k2} \sin \alpha_u(t) + \bar{\psi}_{k3}(t)u + \bar{\psi}_{k4}(t) \quad (k = 1, 2),$$

будут на этих отрезках удовлетворять условию максимума

$$H_k(t, z_U(t), \bar{\psi}_k(t), U(t)) = \max_{u \in [-1, 1]} H_k(t, z_U(t), \bar{\psi}_k(t), u) \quad (3.5)$$

(см. (6.6) в [2]). При этом будет выполнено условие выравнивания (см. (6.7) в [2])

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_{21}(t_1) \cos \alpha_u(t_1) + \bar{\psi}_{22}(t_1) \sin \alpha_u(t_1) + |\bar{\psi}_{23}(t_1)| = \bar{\psi}_{11}(t_1) \cos \alpha_u(t_1) \\ & + \bar{\psi}_{12}(t_1) \sin \alpha_u(t_1) + |\bar{\psi}_{13}(t_1)| - [\nu_1 \Lambda_{11} \cos \beta_1 + \nu_1 \Lambda_{12} \sin \beta_1]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В случае неподвижных целевых точек выражение в квадратных скобках в последнем соотношении зануляется. Из условий (3.5) вытекают соотношения

$$U(t) = \text{sign } \bar{\psi}_{k3}(t), \quad \bar{\psi}_{k3}(t) \neq 0 \quad (t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2). \quad (3.7)$$

Определим структуру участка оптимальной траектории (ОТ) между точками  $W_1(t_1)$  и  $W_2(t_2)$ . Прямая

$$\Lambda_{21}(y - y_2(t_2)) - \Lambda_{22}(x - x_2(t_2)) = 0 \quad (3.8)$$

разбивает всю плоскость  $Oxy$  на две части, при движении в одной из которых (на отрезке времени  $[t_1, t_2]$ )  $U(t) = 1$ , а в другой части  $U(t) = -1$ . При любом из этих управлений (см. систему (2.2)) ОТ будет дугой окружности единичного (минимально возможного) радиуса. Возможно также движение по прямой (3.8) с управлением  $U(t) = 0$ . Последнее управление не противоречит принципу максимума, является особым и, в случае движения по прямой (3.8) к точке  $W_2(t_2)$ , является оптимальным [25]. Таким образом, на отрезке времени  $[t_1, t_2]$  у преследователя (2.2) одна цель — точка  $W_2(t)$ , а ОТ может состоят лишь из дуг окружностей единичного радиуса и отрезков прямых. Используя этот факт и результаты работы [25], можно показать, что исследуемый участок оптимальной траектории состоит либо из дуги окружности

и отрезка прямой (3.8), либо — из двух дуг окружностей. В точке соприкосновения дуги и отрезка прямая (3.8) касается той окружности, которая содержит дугу. В точке соприкосновения дуг касаются друг друга их содержащие окружности.

Определим структуру участка ОТ между точками  $W_0$  и  $W_1(t_1)$ . Прямая

$$(\Lambda_{11} + \Lambda_{21})y - (\Lambda_{12} + \Lambda_{22})x - [(\Lambda_{21}y_2(t_2) - \Lambda_{22}x_2(t_2)) + (\Lambda_{11}y_1(t_1) - \Lambda_{22}x_1(t_1))] = 0 \quad (3.9)$$

разбивает всю плоскость  $Oxy$  на две части, при движении в одной из которых (на отрезке времени  $[0, t_1]$ )  $U(t) = 1$ , а в другой части  $U(t) = -1$ . При любом из этих управлений (см. систему (2.2)) траектория также будет дугой окружности единичного (минимально возможного) радиуса. Возможно также движение по прямой (3.9) с управлением  $U(t) = 0$ . Таким образом, вся оптимальная траектория может состоять лишь из дуг окружностей единичного радиуса и отрезков прямых (3.8), (3.9).

#### 4. Возможные расположения точек встречи преследователя с целями

Вначале заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда  $y_1(t_1) \geq 0$ . Действительно, при  $y_1(t_1) < 0$  надо зеркально, относительно оси абсцисс, отобразить трассы целей, при этих измененных условиях найти ОТ, которую вновь надо зеркально отобразить относительно оси абсцисс. Последняя траектория будет оптимальной для исходных начальных условий.

Для единообразия начало координат плоскости движения будем обозначать через  $W_0$ . Далее, не оговаривая дополнительно, используем окружности только единичного радиуса. При этом используем следующие обозначения:  $C_1, C_2$  — окружности, касающиеся оси абсцисс в начале координат  $W_0$  и соответственно находящиеся выше и ниже этой оси;  $C_1^0, C_2^0$  — круги, ограниченные этими окружностями. Каково бы не было управление, обеспечивающее сближение (встречу) преследователя с первой целью, обозначим через  $\alpha_1$  угол между осью абсцисс и вектором скорости преследователя в точке встречи  $W_1(t_1)$ . Полагаем

$$d_+ = (x_1^2(t_1) + (y_1(t_1) + 1)^2)^{1/2}, \quad d_- = (x_1^2(t_1) + (y_1(t_1) - 1)^2)^{1/2}.$$

( $d_+, d_-$  — расстояние от точки  $W_1(t_1)$  соответственно до центров окружностей  $C_2, C_1$ ). Будем различать три случая местоположения точки  $W_1(t_1)$ :  $W_1(t_1) \notin C_1^0, W_1(t_1) \in C_1^0, W_1(t_1) \in C_1$ . Первый случай целесообразно разбить на три подслучая

$$(a) \quad d_- \geq 3, \quad (b) \quad d_- < 3 < d_+, \quad (c) \quad d_+ \leq 3. \quad (4.1)$$

Местоположение точки встречи  $W_2(t_2)$  будем различать в зависимости от того, по какую сторону от прямой

$$(x - x_1(t_1)) \sin \alpha_1 - (y - y_1(t_1)) \cos \alpha_1 = 0 \quad (4.2)$$

лежит эта точка и принадлежит она или не принадлежит двум кругам, построенным аналогично кругам  $C_1^0$  и  $C_2^0$  для позиции  $(x_1(t_1), y_1(t_1), \alpha_1)$  как для начальной.

#### 5. Алгоритм построения оптимальной траектории при одной подвижной целевой точке

Случай, когда целевая точка единственна и неподвижна, полностью рассмотрен в работе [5]. Если же целевая точка движется, то построение ОТ существенно усложняется, несмотря на то, что сама траектория будет иметь такую же структуру, как и в случае неподвижной целевой точки. Полагаем, что в каждый момент времени  $t, t \geq 0$ , координаты  $x_1(t), y_1(t)$  движущейся точки  $W_1(t)$  определяются соотношениями (2.1). Обозначаем через  $M_1$  точку с координатами  $x_{01}, y_{01}$ . Полагаем

$$h = |x_{01} \sin \beta_1 + (1 - y_{01}) \cos \beta_1|.$$

Вначале рассмотрим случай, когда  $y_{01} \geq 0$ ,  $M_1 \notin C_1^0$ . Здесь возможны два подслучая:

$$(h \geq 1) \vee [(h < 1) \wedge (-x_{01} \cos \beta_1 + (1 - y_{01}) \sin \beta_1 \leq 0)], \quad (5.1)$$

$$(h < 1) \wedge [-x_{01} \cos \beta_1 + (1 - y_{01}) \sin \beta_1 > 0]. \quad (5.2)$$

В случае (5.1) трасса цели не пересекает круга  $C_1^0$ , а в случае (5.2) пересекает этот круг. Исследуем подробнее случай (5.1), при котором точка встречи лежит вне круга  $C_1^0$ , а ОТ состоит из дуги длины  $\alpha$  окружности  $C_1$  и отрезка прямой. Если  $\beta_1 \neq \pi/2$  и  $\beta_1 \neq 3\pi/2$ , то полагаем  $k_1 = \operatorname{tg} \beta_1$ . Найдем ординату  $y_* = y_{01} + k_1(1 - x_{01})$  точки  $M_*$  пересечения прямых

$$x = 1, \quad y = y_{01} + k_1(x - x_{01}).$$

Полагаем

$$x_* = 1, \quad t_a = \alpha + ((x_* - x_b)^2 + (y_* - y_b)^2)^{1/2}, \quad t_w = |(x_* - x_{01})/(\cos \beta_1)| \nu_1. \quad (5.3)$$

Если имеет место соотношение

$$t_a - t_w = 0, \quad (5.4)$$

то точка  $M_*$  является точкой встречи. Если же равенство (5.4) при указанных  $x_*, y_*$  места не имеет, то, полагая  $k_2 = \operatorname{tg} \alpha$ ,

$$x_b = \sin \alpha, \quad y_b = 1 - \cos \alpha, \quad (5.5)$$

$$x_* = (y_{01} - y_b - k_1 x_{01} + k_2 x_b)/(k_2 - k_1), \quad y_* = y_{01} + k_1(x_* - x_{01}) \quad (k_1 \neq k_2) \quad (5.6)$$

и вновь используя (5.3), найдем длину дуги ОТ  $\alpha$  из соотношения (5.4). После определения угла  $\alpha$  координаты точки встречи  $M_*$  преследователя с движущейся целью определяются по формулам (5.6).

Рассмотрим подслучай (5.2), при котором трасса цели пересекает окружность  $C_1$ . Пусть это пересечение происходит в точках  $M, N$  ( $|M_1 M| < |M_1 N|$ ). Введем следующие обозначения:  $E = (0, 1)$  — центр круга  $C_1^0$ ,  $l_1$  — прямая, по которой движется цель,  $K$  — проекция точки  $E$  на прямую  $l_1$ ,  $s$  — длина отрезка  $M_1 K$ ,  $\vartheta$  — величина угла между векторами  $EK$ ,  $EM$ . Заметим, что величина  $d = x_{01} \sin \alpha_1 + (1 - y_{01}) \cos \beta_1$  определяет, по какую сторону от прямой  $l_1$  находится точка  $E$ . Здесь мы рассмотрим лишь случай, когда  $d \geq 0$ . Если при этом будет выполнено одно из следующих двух неравенств

$$(s - \sin \vartheta)/v_1 \geq \beta_1 - \vartheta, \quad (s + \sin \vartheta)/v_1 \leq \beta_1 + \vartheta, \quad (5.7)$$

то точка  $M_*$  встречи преследователя с целью будет лежать вне круга  $C_1^0$ . При первом неравенстве встреча произойдет на отрезке  $M_1 M$ . При втором неравенстве встреча произойдет после прохождения целью точки  $N$ . В обоих случаях длину  $\alpha$  дуги оптимальной траектории найдем из уравнения (5.4) с учетом соотношений (5.3), (5.5), а координаты точки встречи найдем затем по формулам (5.6).

Пусть теперь ни одно из неравенств (5.7) не выполняется. Тогда встреча преследователя с целью произойдет внутри круга  $C_1^0$ . Здесь предварительно найдем угол  $\gamma = \gamma_0$  как решение уравнения

$$h(\gamma) - 1 = 0, \quad (5.8)$$

где

$$h(\gamma) = |(y_a - y_{01}) \cos \beta_1 + (x_a - x_{01}) \sin \beta_1|, \quad x_a = 2 \sin \gamma, \quad y_a = 2 \cos \gamma - 1.$$

Геометрический смысл угла  $\gamma_0$  следующий: если  $E'$  — центр окружности  $C'$ , касающейся прямой  $l_1$  и окружности  $C_2$ , то угол  $\gamma_0$  равен углу  $EE_2E'$ , где  $E_2$  — центр окружности  $C_2$ . Пусть  $K_1$  — точка касания прямой  $l_1$  с  $C'$ ,  $r$  — длина отрезка  $M_1 K_1$ . Возможны три случая:

$$r/v_1 = 2\gamma_0 + \beta, \quad r/v_1 > 2\gamma_0 + \beta, \quad r/v_1 < 2\gamma_0 + \beta. \quad (5.9)$$

В первом случае точка встречи совпадает с точкой  $K_1$ , во втором случае — лежит на отрезке  $MK_1$ , в третьем случае — принадлежит отрезку  $K_1N$ . Во всех трех случаях оптимальная траектория будет состоять из дуги окружности  $C_2$  длины  $\gamma$  и дуги окружности  $C''$ , которая касается окружности  $C_2$  в точке с координатами  $x_r = -\sin \gamma$ ,  $y_r = -1 + \cos \gamma$ . Угол  $\gamma$  в первом случае равен  $\gamma_0$ , во втором и третьем случаях находится соответственно из уравнений

$$(r - \sin \mu)/v_1 - (2\gamma + \beta - \mu) = 0, \quad (r + \sin \mu)/v_1 - (2\gamma + \beta + \mu) = 0,$$

где  $\mu = \arccos h(\gamma)$  (см. (5.8)).

Исследование случая  $M_1 \in C_1^0$  здесь опускается ввиду того, что оно аналогично исследованию случая  $M_1 \notin C_1^0$ . Здесь ОТ будет состоять из дуги окружности  $C_1$  и отрезка прямой (если встреча происходит вне круга  $C_1^0$ ) или из дуги окружности  $C_2$  и дуги окружности, касающейся окружности  $C_2$  и проходящей через точку встречи (если встреча происходит внутри круга  $C_1^0$ ).

## 6. Алгоритм построения оптимальной траектории при двух подвижных целевых точках

Для уменьшения числа возможных случаев и упрощения вычислений будем полагать, что прямые  $l_i$ , по которым движутся цели, проходят через точку  $W_0 = (0, 0)$ . Напомним, что координаты  $x_i(t), y_i(t)$  цели  $W_i(t)$  в момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ , описываются формулами (2.1). Ввиду соотношений  $0 \leq \nu_i < 1$  цели удаляются от точки  $W_0$ .

Предлагается следующий алгоритм построения ОТ, обозначаемой далее через  $L^0$ . Вначале по методу, описанному в предыдущем пункте, без учета информации о второй цели определяем оптимальную траекторию сближения с первой целью. Момент встречи и точку встречи обозначим соответственно через  $t_1^*$  и  $W_1(t_1^*)$ . Принимая позицию преследователя в момент  $t_1^*$  за начальную, строим круги  $C_3^0$ ,  $C_4^0$ , аналогичные соответственно кругам  $C_1^0$  и  $C_2^0$ , а также ОТ сближения со второй целью. Пусть  $W_2(t_2^*)$  — точка встречи со второй целью. Ввиду того, что при построении первой части траектории не учитывалась информация о второй цели, траектория  $L^*$ , склеенная из двух указанных траекторий, не будет оптимальной. Используем траекторию  $L^*$  в качестве начального приближения при построении ОТ  $L^0$ . Структура последней будет зависеть от расположения точек  $W_1(t_1^*)$ ,  $W_2(t_2^*)$  и от того, какую структуру будет иметь ОТ в случае неподвижных целей.

Пусть реализовался один из наиболее сложных случаев, когда

$$W_1(t_1^*) \in C_1^0, \quad W_2(t_2^*) \in C_4^0. \quad (6.1)$$

Здесь вначале рассмотрим частный случай, когда цели неподвижны. Полагаем  $W_1 = W_1(t)$ ,  $W_2 = W_2(t)$ . В этом частном случае первый участок ОТ  $L^0$  между точками  $W_0$  и  $W_1$  состоит из трех дуг окружностей, касающихся друг друга. Первой окружностью является  $C_2$ . Вторую и третью окружности будем соответственно обозначать через  $C_r$  и  $C_l$ . Второй участок ОТ между точками  $W_1$  и  $W_2$  состоит из дуги окружности  $C_l$  и отрезка прямой, проходящей через точку  $W_2$  и касающейся окружности  $C_l$ . В некоторых случаях отрезок прямой может стягиваться в точку. Из условия выравнивания (3.6) следует, что точка касания окружностей  $C_r$  и  $C_l$  должна быть такой, чтобы точка  $W_1$  делила дугу ОТ, лежащую на окружности  $C_l$ , пополам, а если последнее невозможно, то окружность должна проходить через точки  $W_1$  и  $W_2$ . При использовании условия выравнивания (3.6) учитываем, что прямая (3.9) должна проходить через точки касания окружности  $C_r$  с окружностями  $C_2$  и  $C_l$ , а прямолинейный участок ОТ должен принадлежать прямой (3.8). Эти условия и соотношения (3.3), (3.4), (3.7) определяют постоянные  $\Lambda_{ij}$  ( $j = 1, 2$ ). Таким образом, принцип максимума (3.5) и условие выравнивания (3.6) в рассматриваемом случае однозначно определяют ОТ. Вид траекторий  $L^*$  и  $L^0$  изображен на рис. 1.

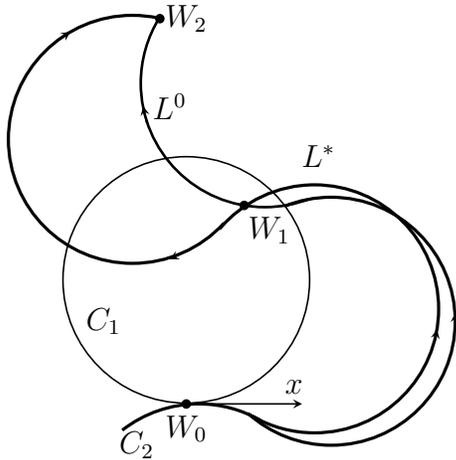


Рис. 1.

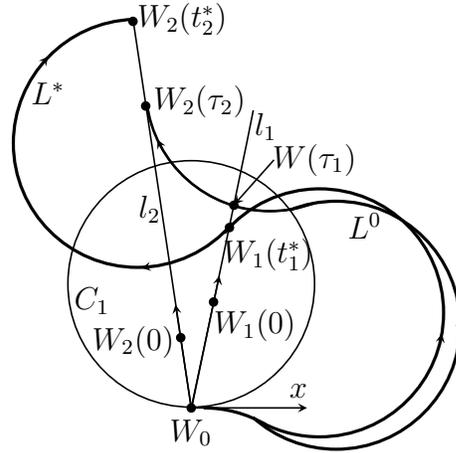


Рис. 2.

В случае подвижных целей первый участок ОТ, согласно (3.7), должен лежать либо на дуге окружности  $C_1$ , либо на оси абсцисс, либо на дуге окружности  $C_2$ . В первом случае встреча с первой подвижной целью возможна лишь вне круга  $C_1^0$ . Ввиду соотношения (3.7) и условий, налагаемых на скорость цели и ее начальное положение, первая цель не сможет прибыть в точку встречи преследователя с прямой  $l_1$  именно в тот момент, когда эта встреча произойдет. Поэтому первый случай невозможен. Во втором случае, ввиду соотношения (3.7), участок ОТ от точки  $W_0$  до точки  $W_1(\tau_1)$  должен состоять из отрезка оси абсцисс и дуги окружности, касающейся этой оси. Но нетрудно показать, что в этом случае траекторию можно улучшить. Остается третий случай, в котором, как и при неподвижных целях, участок ОТ от точки  $W_0$  до точки  $W_1(\tau_1)$  может состоять лишь из трех дуг окружностей, касающихся друг друга. Первой окружностью является  $C_2$ . Вторую и третью окружности будем снова соответственно обозначать через  $C_r$  и  $C_l$ . Участок ОТ между точками встречи  $W_1(\tau_1)$  и  $W_2(\tau_2)$  может состоять лишь из дуги окружности  $C_l$  и отрезка прямой, проходящей через точку  $W_2(\tau_2)$  и касающейся окружности  $C_l$ . В некоторых случаях отрезок прямой может стягиваться в точку. Точку касания окружностей  $C_r$  и  $C_l$  можно найти из условия выравнивания (3.6), но здесь мы предлагаем участок ОТ между точками  $W_0$  и  $W_1(\tau_1)$ , обозначаемый далее через  $L_0$ , строить следующим образом. Зададимся некоторым параметром  $\tau_1$ ,  $\tau_1 \geq t_1^*$ , являющимся моментом сближения преследователя с первой движущейся целью, и углом  $\gamma$ , определяющим координаты  $x_r = -\sin \gamma$ ,  $y_r = -1 + \cos \gamma$  точки касания окружностей  $C_2$ ,  $C_r$ . Окружность  $C_l$  касается окружности  $C_r$  и проходит через точку  $W_1(\tau_1)$ . Угол  $\gamma$ , определяющий окружность  $C_r$ , найдем из условия численного равенства момента  $\tau_1$  и длины участка  $L_0$ . Пусть  $x_1(\tau_1), y_1(\tau_1)$  — координаты точки  $W_1(\tau_1)$ . Считая позицию  $(x_1(\tau_1), y_1(\tau_1), \alpha_1)$  за начальную, по методу, описанному в предыдущем пункте, найдем момент  $\tau_2$  и точку  $W_2(\tau_2)$  встречи преследователя со второй целью. Параметр  $\tau_1$  находим из условия минимальности момента  $\tau_2$ . Построенная траектория является оптимальной в силу выбора ее структуры и момента времени  $\tau_2$ . Вид траекторий  $L^*$  и  $L^0$  в случае (6.1) приведен на рис. 2. Пусть теперь

$$W_1(t_1^*) \in C_1^0, \quad W_2(t_2^*) \in C_3^0. \quad (6.2)$$

Здесь в случае неподвижных целей вид ОТ  $L^0$  существенно отличается от вида  $L^*$  (см. рис. 3). При этом длина ОТ  $L^0$  существенно меньше длины траектории  $L^*$  (см. рис. 3). Здесь заключительный участок ОТ является дугой окружности, проходящей через точки  $W_1, W_2$ . Эту окружность обозначим через  $C_*$ , а ординату ее центра — через  $y_*$ . При  $y_* > 1$  ОТ состоит из дуги окружности  $C_1$ , отрезка прямой, касающейся окружности  $C_1$ , и дуги окружности  $C_*$ . При

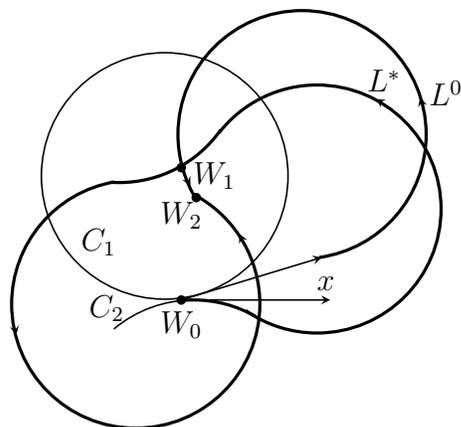


Рис. 3.

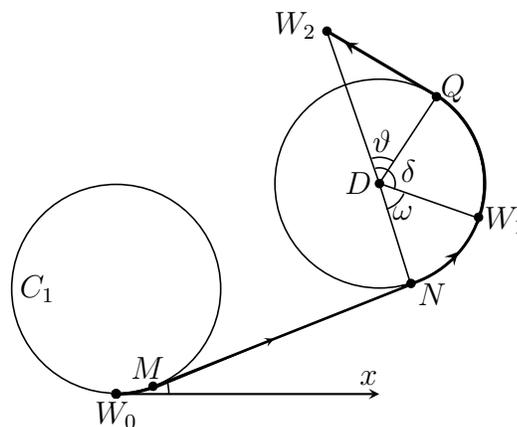


Рис. 4.

$y_* < 1$  ОТ состоит из дуги  $C_2$ , отрезка прямой, касающейся окружности  $C_2$ , и дуги окружности  $C_*$ . При подвижных целях структура ОТ такая же, как и при неподвижных целях. При построении ОТ вновь задаемся некоторым параметром  $\tau_1$  — моментом сближения преследователя с первой целью. Поскольку длина участка траектории между точками  $W_0, W_1(\tau_1)$  должна быть равной  $\tau_1$ , то этот момент при указанной структуре траектории однозначно определяет центр окружности  $C_*$ . Пусть  $W_*$  — точка пересечения  $C_*$  с  $l_2$ , а  $L_*$  — дуга окружности  $C_*$  между  $W_1(\tau_1)$  и  $W_*$ . Поскольку точка  $W_*$  должна быть точкой встречи преследователя со второй целью, то сумма длины дуги  $L_*$  и момента  $\tau_1$  должна быть равна моменту сближения второй цели с точкой  $W_*$ . Последнее условие однозначно определяет момент  $\tau_1$  и ОТ.

В заключение кратко опишем случай, когда  $W_1(t_1^*) \notin C_1^0$ , выполнено первое условие в (4.1) и точка  $W_2(t_2^*)$  лежит слева от прямой (4.2), если смотреть из точки  $W_1(t_1^*)$  в направлении вектора  $(\cos \alpha_1, \sin \alpha_1)$ . При неподвижных целях ОТ состоит из двух дуг окружностей и двух отрезков прямых (см. рис. 4). При этом точка  $W_1$ , ввиду условия выравнивания (3.6), делит вторую дугу пополам. При подвижных целях структура ОТ будет такой же, только точка  $W_1(t_1)$  будет делить вторую дугу в другой пропорции. Здесь при построении ОТ также задаемся параметром  $\tau_1$ ,  $\tau_1 \geq t_1^*$  — моментом сближения преследователя с первой движущейся целью. Через точку  $W_1(\tau_1)$  проводим окружность  $C_*$  так, чтобы длина участка траектории, состоящей из двух дуг окружностей  $C_1$  (или  $C_2$ ) и  $C_*$ , а также отрезка прямой, была равна величине  $\tau_1$ . Считая позицию  $(x_1(\tau_1), y_1(\tau_1), \alpha_1)$  за начальную, по методу, описанному в предыдущем пункте, найдем момент  $\tau_2$  и точку  $W_2(\tau_2)$  встречи преследователя со второй целью. Параметр  $\tau_1$  находим из условия минимальности момента  $\tau_2$ . Построенная траектория является оптимальной в силу выбора ее структуры и момента времени  $\tau_2$ .

Поступила 11.03.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
2. Бердышев Ю.И. Задача последовательного обхода нелинейным управляемым объектом совокупности гладких многообразий // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, вып. 11. С. 1451–1461.
3. Бердышев Ю.И. Об одной задаче последовательного сближения нелинейной системы третьего порядка с группой движущихся точек // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 5. С. 742–752.
4. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 497 с.

5. **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка. В кн.: Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления // Тр. ИММ УНЦ АН СССР, Свердловск, 1973. Вып.12. С. 91–101.
6. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия АН. Теория и системы управления. 2003. Вып. 3. С. 8–11.
7. **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 6. С. 985–994.
8. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
9. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
10. **Куржанский А.Б., Осипов Ю.С.** К задаче об управлении с ограниченными фазовыми координатами // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 2. С. 194–203.
11. **Куржанский А.Б., Осипов Ю.С.** К задаче об управлении при стесненных ограничениях // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 4. С. 705–719.
12. **Субботин А.И.** Об управлении движением квазилинейной системой // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, вып. 3. С. 1113–1118.
13. **Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г.** О некоторых задачах последовательной оптимизации управляемых систем. Свердловск. 1983. 98 с. (Деп. в ВИНТИ 05.01.83. 109–83 Деп.)
14. **Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация взвешенного критерия в одной задаче управления // Кибернетика. 1986. Вып. 1. С. 59–64.
15. **Бердышев Ю.И.** Об одной задаче последовательной оптимизации без декомпозиции во времени // Кибернетика. 1987. Вып. 4. С. 32–35.
16. **Морина С.И., Ченцов А.Г.** Дискретное управление в задачах математического программирования двойственных к задачам последовательной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 3. С. 47–56.
17. **Бердышев Ю.И.** Построение оптимального по быстродействию управления нелинейной системой в задаче обхода группы точек // Кибернетика. 1991. Вып. 6. С. 173–175.
18. **Медведев В.А., Розова В.Н.** Оптимальное управление ступенчатыми функциями // Автоматика и телемеханика. 1972. Вып. 3. С. 15–23.
19. **Захаров Г.К.** Оптимизация ступенчатых систем управления // Автоматика и телемеханика. 1986. Вып. 8. С. 2–9.
20. **Ащепков Л.Т.** Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение. 1987. 226 с.
21. **Троицкий В.А.** Вариационные задачи оптимизации процессов управления с функционалами, зависящими от промежуточных значений // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 6. С. 1003–1011.
22. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Boston etc.: Birkhäuser, 1995. 320 p.
23. **Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.** Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 885–900.
24. **Бердышев Ю.И.** О задаче обхода нелинейной управляемой системой третьего порядка двух точек // Известия Уральск. гос. ун-та, 2003, 26. Сер. матем. и мех., вып. 5. С. 24–33.
25. **Бердышев Ю.И.** Об оптимальном по быстродействию последовательном обходе нелинейной управляемой системой третьего порядка совокупности точек // Известия АН. Теория и системы управления. 2002. Вып. 3 С. 41–48.

УДК 517.917

ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ<sup>1</sup>

Т. С. Быкова, Е. Л. Тонков

Показано, что при естественных предположениях линейная система с последствием на всяком конечномерном подпространстве решений с конечными показателями Ляпунова асимптотически подобна системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробно исследована система с рекуррентной по времени правой частью, и построено семейство систем с последствием, пространство решений которых с конечными показателями Ляпунова конечномерно. Исследование опирается на концепцию Н. Н. Красовского [1], согласно которой системе с последствием ставится в соответствие некоторая динамическая система с бесконечномерным фазовым пространством и потоком на нем, порожденным решениями исходной системы с последствием.

## Введение

Линейная система с последствием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 dA(t, s)x(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \quad (0.1)$$

может иметь решения  $x(t)$ , обращающиеся в нуль по истечении конечного промежутка времени, либо не обращающиеся в нуль, но стремящиеся к нулю быстрее любой экспоненциальной функции [2, с. 87]:  $\lambda(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |x(t)|}{t} = -\infty$ .

Игнорируя такие решения, мы можем задать следующий вопрос: будет ли система (0.1), рассматриваемая только на множестве нетривиальных решений  $x(t)$  с конечными показателями Ляпунова  $\lambda(x)$ , асимптотически подобна некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений? Правда, может оказаться, что пространство решений с конечными показателями (дополненное нулем) бесконечномерно, а количество различных показателей этих решений счетно. Оказывается, однако, что при естественных предположениях относительно  $A(t, s)$  сужение системы (0.1) на любое конечномерное подпространство решений с конечными показателями Ляпунова асимптотически подобно некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Это важное свойство подобия обыкновенной системе полезно при изучении асимптотических инвариантов систем с последствием. Неявно оно отмечалось для систем с периодической по  $t$  матрицей  $A(t, s)$  (см. [3], [4, §17]), но в общей ситуации не исследовалось.

Изучению вопроса об асимптотическом подобии системы (0.1) на конечномерных подпространствах решений системе обыкновенных дифференциальных уравнений посвящена эта статья. Хорошо известно и общепризнано, что системе (0.1) отвечает некоторая динамическая система с фазовым пространством  $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  и потоком на нем  $t \rightarrow x_t$ , порожденным решениями системы (0.1). Такая концепция, предложенная Николаем Николаевичем Красовским [1], оказалась естественной и очень плодотворной при изучении асимптотического поведения системы (0.1), и здесь мы придерживаемся этой концепции.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00014) и конкурсного центра фундаментального естествознания (проект 02-1.0-100).

## 1. Основные обозначения и определения

Пусть  $\mathbb{R}^n$  — стандартное евклидово пространство размерности  $n$ ,  $|x| = \sqrt{x^*x}$  — норма в  $\mathbb{R}^n$  (звезда означает операцию транспонирования). Пространство  $\mathbb{M}(n, m)$  линейных операторов из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  будем отождествлять с пространством вещественных  $(n \times m)$ -матриц с евклидовой нормой  $|A| \doteq \max\{|Ax| : |x| = 1\}$  (если  $n = m$ , то пишем  $\mathbb{M}(n)$ ).

Рассмотрим систему уравнений с последействием (0.1), где  $\dot{x}(t) \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{-1}(x(t+\varepsilon) - x(t))$  — правая производная функции  $x(t)$ , интеграл Стильтеса рассматривается по переменной  $s$  при каждом фиксированном  $t$ . Будем предполагать, что  $r > 0$  и функция  $A: \mathbb{R} \times [-r, 0] \rightarrow \mathbb{M}(n)$  удовлетворяет перечисленным ниже условиям, которые мы будем называть *естественными условиями*: функция  $(t, s) \rightarrow A(t, s)$  ограничена в полосе  $\mathbb{R} \times [-r, 0]$ ; функция  $t \rightarrow A(t, 0)$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$ ;  $A(t, -r) \equiv 0$ ; вариация  $\text{Var}_{s \in [-r, 0]} a_{ij}(t, s)$  функций  $s \rightarrow a_{ij}(t, s)$ , являющихся элементами матрицы  $A(t, s)$ , ограничена на  $[-r, 0]$  равномерно относительно  $t \in \mathbb{R}$  и для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $|\tau| \leq \delta$  и всех  $t \in \mathbb{R}$  выполнено неравенство

$$\int_{-r}^0 |A(t + \tau, s) - A(t, s)| ds \leq \varepsilon.$$

Эти условия обеспечивают (см. [2, 4]) правостороннее существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решения задачи Коши для системы (0.1).

В дальнейшем систему (0.1) будем отождествлять с задающей ее функцией  $A$ , а пространство всех систем  $A$ , удовлетворяющих естественным условиям, обозначать  $\mathfrak{A}$ .

В качестве пространства начальных функций будем рассматривать пространство всех непрерывных функций  $u: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с равномерной нормой  $\|u\|_0 = \max_{t \in [-r, 0]} |u(t)|$ . Обозначим это пространство  $\mathfrak{S} \doteq C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ . Таким образом, для каждого момента времени  $t_0$  и любой непрерывной функции  $u \in \mathfrak{S}$  решением  $t \rightarrow x(t, t_0, u)$  задачи Коши

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 dA(t, s)x(t+s), \quad t \geq t_0, \quad x(t) = u(t-t_0), \quad t \in [t_0-r, t_0], \quad (1.1)$$

будем называть непрерывную на  $[t_0-r, \infty)$  функцию, совпадающую с функцией  $u(t-t_0)$  при  $t \in [t_0-r, t_0]$  и обращающую систему (1.1) в тождество при  $t \geq t_0$ .

Для произвольной непрерывной функции  $t \rightarrow x(t)$ , определенной на некотором интервале  $J \subseteq \mathbb{R}$ , и любой точки  $t$  такой, что  $[t-r, t] \subseteq J$ , запись  $x_t(\cdot)$  (или просто  $x_t$ ) означает функцию  $s \rightarrow x_t(s) \doteq x(t+s)$  переменного  $s \in [-r, 0]$  со значениями в  $\mathbb{R}^n$ , т.е. элемент пространства  $\mathfrak{S}$ .

Как показал Н. Н. Красовский [1], естественным фазовым пространством автономной системы с последействием  $\dot{x}(t) = v(x_t)$ , обладающей свойством непрерывной зависимости и глобальной правосторонней единственности решения задачи Коши, является пространство  $\mathfrak{S}$ , в котором движение  $t \rightarrow x_t(x_0)$  строится по решению  $t \rightarrow x(t, x_0)$  системы,  $x_t(x_0)|_{t=0} = x_0 \in \mathfrak{S}$ . Таким образом, автономной системе отвечает естественная динамическая система  $(\mathfrak{S}, g^t)$ , где полупоток  $g^t: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ ,  $t \geq 0$ , определяется равенством  $g^t(x_0) = x_t(x_0)$ . Если рассматриваемая система  $\dot{x}(t) = v(t, x_t)$  неавтономна, то  $\mathfrak{S}$  уже не будет фазовым пространством, но и в этом случае можно построить динамическую систему сдвигов, где фазовым пространством является “расширенное фазовое пространство”. Эта конструкция описана в работе [5]. Таким образом, система (0.1) порождает полупоток на некотором функциональном пространстве.

Перепишем задачу (1.1) в виде

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 dA(t, s)x_t(s), \quad x_t(s)|_{t=t_0} = u(s), \quad s \in [-r, 0], \quad t \geq t_0. \quad (1.2)$$

Пусть  $t \rightarrow x(t, t_0, u)$  — решение задачи (1.2). Всякое решение, определенное таким образом, порождает движение  $t \rightarrow x_t(\cdot, t_0, u) \doteq x_t(t_0, u)$  в пространстве  $\mathfrak{S}$ ,  $t \geq t_0$  (для краткости при  $t_0 = 0$  вместо  $x_t(\cdot, 0, u)$  будем писать  $x_t(u)$ ). Тогда, в силу единственности решения задачи Коши, для всех  $t \geq t_1 \geq t_0$  и любой начальной функции  $u \in \mathfrak{S}$  имеет место равенство

$$x_t(s, t_0, u) = x_t(s, t_1, x_{t_1}(\cdot, t_0, u)), \quad s \in [-r, 0]. \quad (1.3)$$

Таким образом, при любых фиксированных  $(t, \tau) \in \Delta_{t_0} \doteq \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 : t \geq \tau \geq t_0\}$ , для системы  $A \in \mathfrak{A}$  определен оператор Коши  $X(t, \tau) : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ , введенный Н. Н. Красовским [1]. Оператор Коши действует следующим образом: для всякой начальной точки  $u \in \mathfrak{S}$  решению  $t \rightarrow x(t, t_0, u)$  задачи (1.2) при каждом фиксированном  $t \geq t_0$  ставится в соответствие функция  $s \rightarrow x_t(s, t_0, u)$ ,  $s \in [-r, 0]$ . Тогда, с учетом обозначения  $x_t = x_t(\cdot, t_0, u)$  и равенства (1.3), имеет место равенство  $x_t = X(t, \tau)x_\tau$ . Таким образом, оператор Коши — это оператор сдвига вдоль движений, порожденных решениями системы (0.1). Напомним [2, гл. 6], что он является линейным, а при всех  $t > \tau + r$  — компактным оператором в  $\mathfrak{S}$ ; при всех  $t \geq \vartheta \geq \tau$  удовлетворяет равенству  $X(t, \tau) = X(t, \vartheta)X(\vartheta, \tau)$  и имеет ограниченный показатель Боля

$$\Omega_0(A) \doteq \overline{\lim}_{t-\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|X(t, \tau)\|_{\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}}}{t - \tau}.$$

Каждому  $u \in \mathfrak{S}$  поставим в соответствие показатель Боля

$$\beta(u, A) \doteq \overline{\lim}_{t-\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x_t(\cdot, \tau, u)\|_0}{t - \tau}, \quad \beta(0, A) \doteq -\infty, \quad (1.4)$$

системы  $A \in \mathfrak{A}$ . Непосредственно из этого определения следует, что:

- а)  $\beta(u, A) \leq \Omega_0(A)$  для всех  $u \in \mathfrak{S}$ ;
- б) если  $c \neq 0$ , то  $\beta(cu, A) = \beta(u, A)$ ;
- в)  $\beta(u + v, A) \leq \max\{\beta(u, A), \beta(v, A)\}$  и если  $\beta(u, A) > \beta(v, A)$ , то  $\beta(u + v, A) = \beta(u, A)$ ;
- г)  $\beta(u, A_{t_0}) = \beta(u, A)$ , где  $A_{t_0}(t, s) = A(t + t_0, s)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Из свойств б) и в) следует, что множество  $\mathfrak{S}^- \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \beta(u, A) = -\infty\}$  образует линейное подпространство в  $\mathfrak{S}$ . Пусть  $\mathfrak{S}^+$  — линейное подпространство в  $\mathfrak{S}$ , являющееся прямым дополнением подпространства  $\mathfrak{S}^-$  до пространства  $\mathfrak{S}$ , т. е.  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \oplus \mathfrak{S}^-$ . Тогда для всех ненулевых  $u \in \mathfrak{S}^+$  выполнено неравенство  $\beta(u, A) > -\infty$ .

## 2. Теорема о приводимости

Зафиксируем в  $\mathfrak{S}^+$  линейное подпространство  $\mathbb{S}_0^p$  размерности  $p$  и для каждого  $t \geq 0$  построим подпространство  $\mathbb{S}_t^p \doteq X(t, 0)\mathbb{S}_0^p$ . Тогда  $\dim \mathbb{S}_t^p = p$  при всех  $t \geq 0$ . Действительно, пусть  $u^1, \dots, u^p$  — произвольный базис в  $\mathbb{S}_0^p$ . Для каждого  $t \geq 0$  построим функции  $s \rightarrow x_t^i(s) \doteq x_t(s, 0, u^i)$ ,  $i = 1 \dots p$ . Если найдутся  $t_0$  и константы  $c_1 \dots c_p$ , не равные нулю одновременно, такие, что  $c_1 x_{t_0}^1(s) + \dots + c_p x_{t_0}^p(s) \equiv 0$ ,  $s \in [-r, 0]$ , то  $x_t(\cdot, 0, u) \equiv 0$  при всех  $t \geq t_0$ , где  $u = c_1 u^1 + \dots + c_p u^p \neq 0$ ; поэтому  $\beta(u, A) = -\infty$ . Это противоречит условию  $\mathbb{S}_0^p \subseteq \mathfrak{S}^+$ . Из сказанного следует, что при каждом  $t \geq 0$  подпространство  $\mathbb{S}_t^p$  изоморфно  $\mathbb{R}^p$ .

Зафиксируем в  $\mathfrak{S}$  конечномерное подпространство  $\mathbb{S}_0^p$  размерности  $p$ . Будем рассматривать сужение системы  $A$  на подпространство  $\mathbb{S}_0^p$ . Такое сужение обозначим  $(A, \mathbb{S}_0^p)$ . Наряду с системой  $(A, \mathbb{S}_0^p)$ , рассмотрим систему

$$\dot{y} = B(t)y, \quad t \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^p,$$

обыкновенных дифференциальных уравнений (отождествляемую далее с матрицей  $B$ , ее задающей) с непрерывной на  $\mathbb{R}_+$  функцией  $t \rightarrow B(t) \in \mathbb{M}(p)$ . По аналогии с подпространством  $\mathbb{S}_t^p$ , введем в рассмотрение линейное пространство  $\mathbb{R}_t^p$  размерности  $p$  с базисом  $y^1(t), \dots, y^p(t)$ , образующим столбцы матрицы Коши  $Y(t, 0)$  системы  $B$ . Тем самым, запись  $y(t) \in \mathbb{R}_t^p$  означает,

что  $y(t)$  — значение решения системы  $B$  в момент времени  $t$ , и поэтому  $y(t) = Y(t, 0)h$  при некотором  $h \in \mathbb{R}_0^p = \mathbb{R}^p$ .

Пусть  $\mathbb{L}_2$  — гильбертово пространство измеримых функций  $u : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с нормой  $\|u\|_{\mathbb{L}_2} \doteq \left( \int_{-r}^0 |u(s)|^2 ds \right)^{1/2} < \infty$ ,  $\mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$  — пространство линейных операторов из  $\mathbb{S}_t^p$  в  $\mathbb{R}_t^p$  с нормой  $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{R}^p}$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Функцию  $t \rightarrow L(t) \in \mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$  будем называть *обобщенным ляпуновским преобразованием* систем  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  и  $B$ , если при каждом  $t \geq 0$  оператор  $L(t)$  является гомеоморфизмом пространств  $\mathbb{S}_t^p$  и  $\mathbb{R}_t^p$  и выполнено неравенство

$$\sup_{t \geq 0} (\|L(t)\|_{\mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{R}^p} + \|L^{-1}(t)\|_{\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{L}_2}) < \infty.$$

Будем говорить также, что система  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  *приводима* ляпуновским преобразованием  $L$  к системе  $B$ , или что системы  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  и  $B$  *асимптотически подобны*.

Приведенное здесь определение обобщенного ляпуновского преобразования отличается от традиционного определения ляпуновского преобразования отсутствием условия ограниченности на полуоси производной по времени функции  $t \rightarrow L(t)$ . Мы не можем требовать выполнения этого условия, потому что разность  $L(t + \varepsilon) - L(t)$  может не иметь смысла при  $\varepsilon \neq 0$ , так как область определения  $\mathbb{S}_t^p$  преобразования  $L(t)$  зависит от времени  $t$ .

В [6] доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbb{S}_0^p \subseteq \mathfrak{S}^+$ . Тогда:

(а) найдется система  $B$  с непрерывной на  $\mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$  матрицей  $B(t)$  и обобщенное ляпуновское преобразование  $L$ , приводящее систему  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  к системе  $B$ ;

(б) в множестве  $\{B\}$  всех систем, асимптотически подобных системе  $(A, \mathbb{S}_0^p)$ , найдется система с непрерывной на  $\mathbb{R}_+$  верхней треугольной матрицей  $B(t)$ ;

(в) если в дополнение к высказанным ранее условиям всякое решение системы  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  “продолжаемо влево”, т. е. найдется константа  $\alpha > 0$  такая, что для каждого  $u \in \mathbb{S}_0^p$ , любого  $\tau \in [-r, 0]$  и всех  $t \in \mathbb{R}_+$  выполнено неравенство  $\|x_{t+\tau}(\cdot, u)\|_{\mathbb{L}_2} \leq \alpha \|x_t(\cdot, u)\|_{\mathbb{L}_2}$ , то в множестве  $\{B\}$  всех систем, асимптотически подобных системе  $(A, \mathbb{S}_0^p)$ , найдется система  $B$  с ограниченной на полуоси  $\mathbb{R}_+$  матрицей  $B(t)$  (а следовательно, с ограниченной на  $\mathbb{R}_+$  верхней треугольной матрицей  $B(t)$ );

(г) если  $A(t + T, s) = A(t, s)$  для всех  $(t, s) \in \mathbb{R} \times [-r, 0]$ , то найдется система  $B$  с вещественнозначной непрерывной  $T$ -периодической матрицей  $B(t)$  и  $T$ -периодическое по  $t$  ляпуновское преобразование  $L$ , приводящее  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  к  $B$ .

### 3. Рекуррентные системы с последствием и их приводимость

**О п р е д е л е н и е 2.** Функцию  $(t, s) \rightarrow A(t, s)$  (или, что эквивалентно, систему  $A \in \mathfrak{A}$ ), удовлетворяющую естественным условиям, будем называть *рекуррентной* (по переменной  $t$ ), если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $T > 0$  множество

$$\Theta_A(\varepsilon, T) \doteq \left\{ \vartheta \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leq T} \left( |A(t + \vartheta, 0) - A(t, 0)| + \int_{-r}^0 |A(t + \vartheta, s) - A(t, s)| ds \right) \leq \varepsilon \right\}$$

относительно плотно на  $\mathbb{R}$  (то есть найдется такое  $\alpha > 0$ , что  $[t_0, t_0 + \alpha] \cap \Theta_A(\varepsilon, T) \neq \emptyset$  для всех  $t_0 \in \mathbb{R}$ ).

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbb{S}_0^p \subseteq \mathfrak{S}^+$  и система  $A \in \mathfrak{A}$  рекуррентна. Тогда найдется система  $B$  с рекуррентной и непрерывной на  $\mathbb{R}$  верхней треугольной матрицей  $B(t)$  и обобщенное ляпуновское преобразование  $L$ , приводящее систему  $(A, \mathbb{S}_0^p)$  к системе  $B$ .

Доказательство сформулированной теоремы во многом повторяет доказательство теоремы 1, приведенное в [6]. Необходимые для доказательства утверждения, отсутствующие в [6], доказаны ниже.

**Лемма 1.** Пусть  $A \in \mathfrak{A}$ . Тогда каждому  $T > 0$  отвечает константа  $k(T)$  такая, что для любой  $u \in \mathfrak{S}$  и всех  $(t, t_0) \in \Delta(T) \doteq \{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leq t \leq t_0 + T\}$  выполнены неравенства

$$\|x_t(\cdot, t_0, u)\|_0 \leq k(T)\|u\|_0, \quad |\dot{x}_t(0, t_0, u)| \leq ak(T)\|u\|_0, \quad (3.1)$$

где  $a = \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{Var}_{s \in [-r, 0]} |A(t, s)|$ .

**Доказательство.** Докажем, что выполнено первое из неравенств (3.1).

А. Пусть сначала  $t \in [t_0, t_0 + r]$ . Тогда

$$x_t(s, t_0, u) = \begin{cases} u(s + t - t_0), & \text{если } -r \leq s \leq t_0 - t, \\ x_t(s, t_0, u), & \text{если } t_0 - t \leq s \leq 0. \end{cases}$$

Поэтому  $|x_t(s, t_0, u)| \leq \|u\|_0$  при  $s \in [-r, t_0 - t]$ . Далее,

$$\dot{x}_t(0, t_0, u) = \int_{-r}^0 dA(t, \tau)x_t(\tau, t_0, u) = f(t, u(\cdot)) + \int_{t_0-t}^0 dA(t, \tau)x_t(\tau, t_0, u), \quad (3.2)$$

где  $f(t, u(\cdot)) = \int_{-r}^{t_0-t} dA(t, \tau)u(\tau)$ . Интегрируя (3.2), получим равенство

$$x_t(0, t_0, u) - u(0) = g(t, u(\cdot)) + \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0-\xi}^0 d_\tau A(\xi, \tau)x_\xi(\tau, t_0, u) \right] d\xi, \quad (3.3)$$

где  $g(t, u(\cdot)) = \int_{t_0}^t f(\xi, u(\cdot)) d\xi$ . Так как для некоторой константы  $k_0$  при всех  $t \in [t_0, t_0 + r]$  выполнено неравенство  $|u(0)| + |g(t, u(\cdot))| \leq k_0\|u\|_0$ , то из (3.3) при всех  $s \in [t_0 - t, 0]$  имеем

$$|x_t(s, t_0, u)| \leq k_0\|u\|_0 + \left| \int_{t_0}^{t+s} \left[ \int_{t_0-\xi}^0 d_\tau A(\xi, \tau)x_\xi(\tau, t_0, u) \right] d\xi \right|. \quad (3.4)$$

Пусть  $v(t) = \max_{s \in [t_0-t, 0]} |x_t(s, t_0, u)|$ , тогда из (3.4) следуют неравенства

$$v(t) \leq k_0\|u\|_0 + a \int_{t_0}^{t+s} v(\xi) d\xi \leq k_0\|u\|_0 + a \int_{t_0}^t v(\xi) d\xi,$$

из которых, в силу леммы Гронуолла — Беллмана, получаем неравенство

$$v(t) = \max_{s \in [t_0-t, 0]} |x_t(s, t_0, u)| \leq k_0\|u\|_0 \exp(ar) = k_1\|u\|_0, \quad k_1 = k_0 \exp(ar).$$

Тем самым доказано, что

$$\|x_t(\cdot, t_0, u)\|_0 \leq k_1\|u\|_0, \quad t \in [t_0, t_0 + r]. \quad (3.5)$$

Б. Пусть  $t \in [t_0 + r, t_0 + T]$  и  $\tau \in [-r, 0]$ . Интегрируя по переменной  $t$  равенство

$$\frac{d}{dt}x_t(\tau, t_0, u) = \int_{-r}^0 d_s A(t + \tau, s)x_{t+\tau}(s, t_0, u), \quad \tau \in [-r, 0],$$

в пределах от  $t_0 + r$  до  $t$ , получим равенство

$$x_t(\tau, t_0, u) - x_{t_0+r}(\tau, t_0, u) = \int_{t_0+r}^t \left[ \int_{-r}^0 d_s A(\xi + \tau, s)x_{\xi+\tau}(s, t_0, u) \right] d\xi. \quad (3.6)$$

Из (3.6) при  $t \geq t_0 + r$  следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned} |x_t(\tau, t_0, u)| &\leq |x_{t_0+r}(\tau, t_0, u)| + a \int_{t_0+r}^t \max_{s \in [-r, 0]} |x_{\xi+\tau}(s, t_0, u)| d\xi \\ &\leq \|x_{t_0+r}(\cdot, t_0, u)\|_0 + a \int_{t_0+r+\tau}^{t+\tau} \|x_\xi(\cdot, t_0, u)\|_0 d\xi \leq k_1 \|u\|_0 + a \int_{t_0}^t \|x_\xi(\cdot, t_0, u)\|_0 d\xi. \end{aligned}$$

Поэтому, если  $t \in [t_0 + r, t_0 + T]$ , то с учетом (3.5) имеем

$$\|x_t(\cdot, t_0, u)\|_0 \leq k_1 \|u\|_0 \exp a(t - t_0) \leq k(T) \|u\|_0, \quad k(T) = k_1 \exp(aT),$$

что и доказывает первое неравенство в (3.1).

В. Второе из неравенств (3.1) автоматически следует из (0.1). Действительно, для всех  $t \in [t_0, t_0 + T]$  имеем:  $|\dot{x}(t, t_0, u)| \leq a \max_{s \in [-r, 0]} |x_t(s, t_0, u)| = a \|x_t(\cdot, t_0, u)\|_0 \leq ak(T) \|u\|_0$ .

**Лемма 2.** Если функция  $t \rightarrow A(t, s)$  рекуррентна, то для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $T > r$  и всякой непрерывно дифференцируемой на  $[-r, 0]$  начальной функции  $u \in \mathfrak{S}$  множество

$$\Xi_u(\varepsilon, T) \doteq \left\{ \vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t, t_0) \in \Delta_1(T)} \|x_{t+\vartheta}(\cdot, t_0 + \vartheta, u) - x_t(\cdot, t_0, u)\|_1 \leq \varepsilon \right\},$$

где  $\|u\|_1 = \max\{\|u\|_0, \|\dot{u}\|_0\}$ ,  $\Delta_1(T) \doteq \{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 + r \leq t \leq t_0 + T\}$ , относительно плотно на прямой  $\mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Интегрируя по переменной  $t$  равенства

$$\dot{x}(t, t_0, u) = \int_{-r}^0 dA(t, s)x_t(s, t_0, u) \quad \text{при } t \geq t_0,$$

$$\dot{x}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta, u) = \int_{-r}^0 dA(t + \vartheta, s)x_{t+\vartheta}(s, t_0 + \vartheta, u) \quad \text{при } t \geq t_0,$$

и почленно вычитая, получим

$$\begin{aligned} &x_{t+\vartheta}(0, t_0 + \vartheta, u) - x_t(0, t_0, u) \\ &= \int_{t_0}^t \left[ \int_{-r}^0 dA(\xi + \vartheta, s)x_{\xi+\vartheta}(s, t_0 + \vartheta, u) - \int_{-r}^0 dA(\xi, s)x_\xi(s, t_0, u) \right] d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^t \left[ \int_{-r}^0 d_s \left( A(\xi + \vartheta, s) - A(\xi, s) \right) x_{\xi + \vartheta}(s, t_0 + \vartheta, u) \right] d\xi \\
&+ \int_{t_0}^t \left[ \int_{-r}^0 dA(\xi, s) \left( x_{\xi + \vartheta}(s, t_0 + \vartheta, u) - x_{\xi}(s, t_0, u) \right) \right] d\xi = \int_{t_0}^t I_1(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t I_2(\xi) d\xi. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Для оценки интеграла  $I_1(\xi)$  воспользуемся следующим утверждением (см. [4, с. 322]): для любых  $\varepsilon_1 > 0$  и  $T > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что из неравенства

$$\max_{|\xi - t_0| \leq T} \left( |A(\xi + \vartheta, 0) - A(\xi, 0)| + \int_{-r}^0 |A(\xi + \vartheta, s) - A(\xi, s)| ds \right) \leq \delta \quad (3.8)$$

следует неравенство

$$\max_{t_0 \leq \xi \leq t_0 + T} |I_1(\xi)| = \max_{t_0 \leq \xi \leq t_0 + T} \left| \int_{-r}^0 d_s \left( A(\xi + \vartheta, s) - A(\xi, s) \right) x_{\xi + \vartheta}(s, t_0 + \vartheta, u) \right| \leq \varepsilon_1. \quad (3.9)$$

Поэтому, если  $\vartheta \in \Theta_A(\delta, T)$ , то  $\int_{t_0}^t |I_1(\xi)| d\xi \leq \int_{t_0}^{t_0 + T} |I_1(\xi)| d\xi \leq \varepsilon_1 T$  для любого  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

В свою очередь, для второго интеграла имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^t |I_2(\xi)| d\xi \leq a \int_{t_0}^t \|x_{\xi + \vartheta}(\cdot, t_0 + \vartheta, u) - x_{\xi}(\cdot, t_0, u)\|_0 d\xi.$$

Поэтому из (3.7) следует неравенство

$$|x_{t + \vartheta}(0, t_0 + \vartheta, u) - x_t(0, t_0, u)| \leq \varepsilon_1 T + a \int_{t_0}^t \|x_{\xi + \vartheta}(\cdot, t_0 + \vartheta, u) - x_{\xi}(\cdot, t_0, u)\|_0 d\xi,$$

меняя в котором  $t$  на  $t + s$ , где  $s \in [-r, 0]$ , получим при всех  $(t, t_0) \in \Delta_1(T)$  неравенства

$$\begin{aligned}
|x_{t + \vartheta}(s, t_0 + \vartheta, u) - x_t(s, t_0, u)| &\leq \varepsilon_1 T + a \int_{t_0}^{t + s} \|x_{\xi + \vartheta}(\cdot, t_0 + \vartheta, u) - x_{\xi}(\cdot, t_0, u)\|_0 d\xi \\
&\leq \varepsilon_1 T + a \int_{t_0}^t \|x_{\xi + \vartheta}(\cdot, t_0 + \vartheta, u) - x_{\xi}(\cdot, t_0, u)\|_0 d\xi.
\end{aligned}$$

Следовательно, если  $\vartheta \in \Theta_A(\delta, T)$ , то  $\|x_{t + \vartheta}(\cdot, t_0 + \vartheta, u) - x_t(\cdot, t_0, u)\|_0 \leq \varepsilon_1 T \exp(aT)$ .

Докажем теперь, что если  $(t, t_0) \in \Delta_1(T)$  и  $\vartheta \in \Theta_A(\delta, T)$ , где  $\delta > 0$  выбрано по заданному  $\varepsilon_1 > 0$ , то выполнено неравенство

$$\|\dot{x}_{t + \vartheta}(\cdot, t_0 + \vartheta, u) - \dot{x}_t(\cdot, t_0, u)\|_0 \leq \varepsilon_1 (1 + aT \exp(aT)). \quad (3.10)$$

Действительно, при  $t \geq t_0$  имеем

$$\dot{x}_{t + \vartheta}(0, t_0 + \vartheta, u) - \dot{x}_t(0, t_0, u) = \int_{-r}^0 d_{\tau} A(t + \vartheta, \tau) x_{t + \vartheta}(\tau, t_0 + \vartheta, u) - \int_{-r}^0 d_{\tau} A(t, \tau) x_t(\tau, t_0, u)$$

$$= \int_{-r}^0 d\tau \left( A(t + \vartheta, \tau) - A(t, \tau) \right) x_{t+\vartheta}(\tau, t_0 + \vartheta, u) + \int_{-r}^0 d\tau A(t, \tau) \left( x_{t+\vartheta}(\tau, t_0 + \vartheta, u) - x_t(\tau, t_0, u) \right).$$

Поэтому из (3.8) и (3.9) следует неравенство

$$|\dot{x}_{t+\vartheta}(0, t_0 + \vartheta, u) - \dot{x}_t(0, t_0, u)| \leq \varepsilon_1 + a \|x_{t+\vartheta}(\cdot, t_0 + \vartheta, u) - x_t(\cdot, t_0, u)\|_0,$$

из которого, в свою очередь, при замене  $t$  на  $t + s$ , где  $s \in [-r, 0]$ , получаем при  $(t, t_0) \in \Delta_1(T)$  неравенство (3.10).

Таким образом, если для заданных  $\varepsilon > 0$  и  $T > 0$  положительное число  $\varepsilon_1$  выбрано так, что  $\varepsilon_1(1 + aT \exp(aT)) \leq \varepsilon$ , и по  $\varepsilon_1$  построено  $\delta > 0$ , обеспечивающее при  $\vartheta \in \Theta_A(\delta, T)$  неравенство (3.9), то  $\|x_{t+\vartheta}(\cdot, t_0 + \vartheta, u) - x_t(\cdot, t_0, u)\|_1 \leq \varepsilon$ , что и доказывает лемму 2.

Зафиксируем в подпространстве  $\mathbb{S}_0^p$  ортонормированный базис  $u^1, \dots, u^p$ . Следовательно, если  $U(s) \doteq (u^1(s), \dots, u^p(s))$  — функциональная матрица, столбцами которой являются функции  $u^i : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то постоянная квадратная матрица  $\int_{-r}^0 U^*(s)U(s) ds$  порядка  $p$  совпадает с единичной матрицей. Предположим, кроме того, что функции  $s \rightarrow u^i(s)$  непрерывно дифференцируемы на  $[-r, 0]$ .

Далее, для каждого  $t_0 \in \mathbb{R}$ , любого  $t \geq t_0$  и всех  $s \in [-r, 0]$  построим  $(n \times p)$ -матрицу

$$V_t(s, t_0) \doteq (x_t^1(s, t_0), \dots, x_t^p(s, t_0)),$$

где  $x_t^i(s, t_0) = x_t(s, t_0, u^i)$ , и постоянную  $(p \times p)$ -матрицу

$$\Gamma(t, t_0) \doteq \int_{-r}^0 V_t^*(s, t_0) V_t(s, t_0) ds, \quad t \geq t_0.$$

При необходимости будем подчеркивать, что  $V_t(\cdot, t_0)$  зависит от  $U : V_t(\cdot, t_0, U)$ . Далее, в силу рекуррентности системы  $A$  и линейной независимости столбцов матрицы  $V_t(\cdot, t_0)$ , для всех  $t \geq t_0$  матрица  $\Gamma(t, t_0)$  определено положительна и имеют место неравенства

$$\det \Gamma(t, t_0) \geq d > 0, \quad |\Gamma(t, t_0)| \geq \gamma_0 > 0,$$

кроме того,  $\Gamma(t_0, t_0) = I_p$ , где  $I_p$  — единичная матрица порядка  $p$ .

**Лемма 3.** Для любых  $\varepsilon > 0$  и  $T > r$  множество

$$\Xi_\Gamma(\varepsilon, T) \doteq \left\{ \vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t, t_0) \in \Delta_1(T)} \left( |\Gamma(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \Gamma(t, t_0)| + |\dot{\Gamma}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{\Gamma}(t, t_0)| \right) \leq \varepsilon \right\},$$

где  $\Delta_1(T) \doteq \{(t, t_0) : t_0 + r \leq t \leq t_0 + T\}$ , относительно плотно на прямой  $\mathbb{R}$ .

Для доказательства этой леммы достаточно применить леммы 1 и 2 к равенствам

$$\begin{aligned} \Gamma(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \Gamma(t, t_0) &= \int_{-r}^0 \left[ V_{t+\vartheta}^*(s, t_0 + \vartheta) [V_{t+\vartheta}(s, t_0 + \vartheta) - V_t(s, t_0)] \right. \\ &\quad \left. + [V_{t+\vartheta}(s, t_0 + \vartheta) - V_t(s, t_0)]^* V_t(s, t_0) \right] ds, \\ \dot{\Gamma}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{\Gamma}(t, t_0) &= \int_{-r}^0 \left[ \dot{V}_{t+\vartheta}^*(s, t_0 + \vartheta) [V_{t+\vartheta}(s, t_0 + \vartheta) - V_t(s, t_0)] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [\dot{V}_{t+\vartheta}(s, t_0 + \vartheta) - \dot{V}_t(s, t_0)]^* V_t(s, t_0) \Big] ds + \int_{-r}^0 [V_{t+\vartheta}^*(s, t_0 + \vartheta) [\dot{V}_{t+\vartheta}(s, t_0 + \vartheta) - \dot{V}_t(s, t_0)] \\
& \quad + [V_{t+\vartheta}(s, t_0 + \vartheta) - V_t(s, t_0)]^* \dot{V}_t(s, t_0) \Big] ds.
\end{aligned}$$

При каждом  $t \geq t_0$  рассмотрим матричное уравнение

$$Z^* Z = \Gamma(t, t_0) \quad (3.11)$$

относительно  $(p \times p)$ -матрицы  $Z(t, t_0)$ .

**Лемма 4.** (см. [6], [8], [9, с. 141]). Для всех  $t \geq t_0$  существует единственная верхняя треугольная матрица  $Z(t, t_0)$  с положительными диагональными элементами  $z_{ii}(t, t_0)$ , являющаяся решением матричного уравнения (3.11) и удовлетворяющая условию  $Z(t_0, t_0) = I_p$ . Это решение непрерывно дифференцируемо по  $t$  при всех  $t \geq t_0 + r$ .

Заметим, что в силу леммы 3 матрицы  $\Gamma(t, t_0)$  и  $\dot{\Gamma}(t, t_0)$  ограничены в полосе  $\Delta_1(T)$ , а следовательно, ограничены в полосе  $\Delta_1(T)$  и решение  $Z(t, t_0)$  уравнения (3.11), и матрица  $Z^{-1}(t, t_0)$  (действительно,  $|Z(t, t_0)|^2 = |\Gamma(t, t_0)| \geq \gamma_0 > 0$ ).

**Лемма 5.** Пусть  $Z(t, t_0)$  — решение матричного уравнения (3.11), существование которого утверждается в лемме 4. Тогда для любых  $\varepsilon > 0$  и  $T > r$  множества

$$\begin{aligned}
\Xi_Z(\varepsilon, T) & \doteq \left\{ \vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t, t_0) \in \Delta_1(T)} \left( |Z(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - Z(t, t_0)| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + |\dot{Z}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{Z}(t, t_0)| \right) \leq \varepsilon \right\}, \\
\Xi_{Z^{-1}}(\varepsilon, T) & \doteq \left\{ \vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t, t_0) \in \Delta_1(T)} \left( |Z^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - Z^{-1}(t, t_0)| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + |\dot{Z}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{Z}^{-1}(t, t_0)| \right) \leq \varepsilon \right\},
\end{aligned}$$

где  $\Delta_1(T) \doteq \{(t, t_0) : t_0 + r \leq t \leq t_0 + T\}$ , относительно плотны на прямой  $\mathbb{R}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** При  $p = 1$  для решения  $z_{11}(t, t_0) = \sqrt{\gamma_{11}(t, t_0)}$  уравнения (3.11), в силу свойств матрицы  $\Gamma(t, t_0)$  справедливо неравенство  $z_{11}(t, t_0) \geq \sqrt{\gamma_0}$  при  $t \geq t_0$ , из которого следует, что  $|z_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - z_{11}(t, t_0)| \leq (2\sqrt{\gamma_0})^{-1} |\gamma_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \gamma_{11}(t, t_0)|$  и

$$\begin{aligned}
|z_{11}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - z_{11}^{-1}(t, t_0)| & = \frac{|z_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - z_{11}(t, t_0)|}{|z_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta)| |z_{11}(t, t_0)|} \\
& \leq (2\gamma_0 \sqrt{\gamma_0})^{-1} |\gamma_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \gamma_{11}(t, t_0)|.
\end{aligned}$$

Далее, так как  $\dot{z}_{11}(t, t_0) = \frac{\dot{\gamma}_{11}(t, t_0)}{2z_{11}(t, t_0)}$ ,  $\dot{z}_{11}^{-1}(t, t_0) = -\frac{\dot{\gamma}_{11}(t, t_0)}{2z_{11}^3(t, t_0)}$ , то для всех  $(t, t_0) \in \Delta_1(T)$  выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
|\dot{z}_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{z}_{11}(t, t_0)| & \leq (2\gamma_0)^{-1} (M_1 |\dot{\gamma}_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{\gamma}_{11}(t, t_0)| \\
& \quad + M_2 (2\sqrt{\gamma_0})^{-1} |\gamma_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \gamma_{11}(t, t_0)|), \\
|\dot{z}_{11}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{z}_{11}^{-1}(t, t_0)| & \leq (2\gamma_0^3)^{-1} (M_1^3 |\dot{\gamma}_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{\gamma}_{11}(t, t_0)| \\
& \quad + 3M_1^2 M_2 (2\sqrt{\gamma_0})^{-1} |\gamma_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \gamma_{11}(t, t_0)|),
\end{aligned}$$

где  $M_1 = \max_{(t,t_0) \in \Delta_1(T)} |z_{11}(t, t_0)|$ ,  $M_2 = \max_{(t,t_0) \in \Delta_1(T)} |\dot{\gamma}_{11}(t, t_0)|$ . Поэтому, если  $\vartheta \in \Xi_\Gamma(\varepsilon, T)$ , то

$$\max_{(t,t_0) \in \Delta_1(T)} \left( |z_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - z_{11}(t, t_0)| + |\dot{z}_{11}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{z}_{11}(t, t_0)| \right) \leq C\varepsilon,$$

$$\max_{(t,t_0) \in \Delta_1(T)} \left( |z_{11}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - z_{11}^{-1}(t, t_0)| + |\dot{z}_{11}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{z}_{11}^{-1}(t, t_0)| \right) \leq C_1\varepsilon,$$

где  $C$  и  $C_1$  — некоторые константы, и, следовательно, множества  $\Xi_Z(\varepsilon, T)$  и  $\Xi_{Z^{-1}}(\varepsilon, T)$  относительно плотны на прямой  $\mathbb{R}$ .

Допустим, что лемма доказана для каждого  $p = 2, \dots, k$ , т. е. решение  $Z_k(t, t_0)$  уравнения  $Z_k^* Z_k = \Gamma_k(t, t_0)$ , где  $\Gamma_k(t, t_0)$  — главный диагональный минор порядка  $k$  матрицы  $\Gamma(t, t_0)$ , обладает требуемыми свойствами. Это означает, что для любых  $\varepsilon > 0$  и  $T > r$  множества  $\Xi_{Z_k}(\varepsilon, T)$ ,  $\Xi_{Z_k^{-1}}(\varepsilon, T)$  относительно плотны на  $\mathbb{R}$ .

Решение  $Z_{k+1}(t, t_0)$  уравнения  $Z_{k+1}^* Z_{k+1} = \Gamma_{k+1}(t, t_0)$  состоит из следующих блоков:  $Z_k(t, t_0)$  — главный диагональный блок порядка  $k$ ,  $z = \text{col}(z_{1,k+1} \dots z_{k,k+1})$  — вектор-столбец, занимающий вместе с  $z_{k+1,k+1}$  последний столбец матрицы  $Z_{k+1}$ , причем

$$z^*(t, t_0) = \gamma(t, t_0) Z_k^{-1}(t, t_0),$$

где  $\gamma(t, t_0) = (\gamma_{1,k+1}(t) \dots \gamma_{k,k+1}(t))$  — строка, занимающая вместе с функцией  $\gamma_{k+1,k+1}(t, t_0)$  последнюю строку матрицы  $\Gamma_{k+1}(t, t_0)$ , а  $z_{k+1,k+1}(t, t_0) = \frac{\sqrt{\det \Gamma_{k+1}(t, t_0)}}{z_{11}(t, t_0) \dots z_{k,k}(t, t_0)}$ .

Таким образом, в силу относительной плотности множеств  $\Xi_\Gamma(\varepsilon, T)$  и  $\Xi_{Z_k^{-1}}(\varepsilon, T)$ , для любых  $\varepsilon > 0$  и  $T > r$  множества

$$\left\{ \vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t,t_0) \in \Delta_1(T)} \left( |z(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - z(t, t_0)| + |\dot{z}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{z}(t, t_0)| \right) \leq \varepsilon \right\},$$

$$\left\{ \vartheta \in \mathbb{R} : \max_{(t,t_0) \in \Delta_1(T)} \left( |z_{k+1,k+1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - z_{k+1,k+1}(t, t_0)| + |\dot{z}_{k+1,k+1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{z}_{k+1,k+1}(t, t_0)| \right) \leq \varepsilon \right\}$$

относительно плотны на прямой  $\mathbb{R}$ .

Далее, в силу ограниченности  $Z_{k+1}^{-1}(t, t_0)$  в полосе  $\Delta_1(T)$ , относительная плотность множества  $\Xi_{Z_{k+1}^{-1}}(\varepsilon, T)$  следует из равенств

$$Z_{k+1}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - Z_{k+1}^{-1}(t, t_0) = Z_{k+1}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) (Z_{k+1}(t, t_0) - Z_{k+1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta)) Z_{k+1}^{-1}(t, t_0),$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{k+1}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) - \dot{Z}_{k+1}^{-1}(t, t_0) &= (Z_{k+1}^{-1}(t, t_0) - Z_{k+1}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta)) \dot{Z}_{k+1}(t, t_0) Z_{k+1}^{-1}(t, t_0) \\ &\quad + Z_{k+1}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) (\dot{Z}_{k+1}(t, t_0) - \dot{Z}_{k+1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta)) Z_{k+1}^{-1}(t, t_0) \\ &\quad + Z_{k+1}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) \dot{Z}_{k+1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta) (Z_{k+1}^{-1}(t, t_0) - Z_{k+1}^{-1}(t + \vartheta, t_0 + \vartheta)). \end{aligned}$$

Таким образом, лемма полностью доказана.

Пусть  $Z(t, t_0)$  — решение матричного уравнения (3.11) (при фиксированном  $t_0$ ), существование которого утверждается в лемме 4. Обозначим  $B(t) = \dot{Z}(t, t_0) Z^{-1}(t, t_0)$ ,  $t \geq t_0$ . Тогда  $B(t)$  — верхняя треугольная матрица.

В силу леммы 5 функция  $t \rightarrow B(t)$  “положительно рекуррентна” на полуоси  $[t_0, \infty]$ , т. е. множество  $\{\vartheta \geq 0 : \max_{t_0 \leq t \leq T} |B(t + \vartheta) - B(t)| \leq \varepsilon\}$  относительно плотно на  $[0, \infty)$  для любых  $\varepsilon > 0$  и  $T > 0$ , а так как в соответствующей динамической системе сдвигов замыкание полутраектории минимально и совпадает с омега-предельным множеством, то  $B$  можно продолжить на всю числовую прямую  $\mathbb{R}$  с сохранением свойства рекуррентности.

Теперь несложно проверить, что при каждом  $t \geq t_0$  сужение оператора  $L(t) : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}^p$ , определенного равенством

$$L(t)u = Y(t, 0)\Gamma^{-1}(t, t_0) \int_{-r}^0 V_t^*(s, t_0)x_t(s, u) ds,$$

на подпространство  $\mathfrak{S}_t^p$ , является преобразованием Ляпунова, приводящим систему  $(A, \mathfrak{S}_0^p)$  с рекуррентной  $A(t, s)$  к системе  $B$  с рекуррентной  $B(t)$ .

#### 4. Системы с конечномерным пространством $\mathfrak{S}^+$

Приведем пример системы с конечномерным пространством  $\mathfrak{S}^+$ . Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_{-r}^0 dB(t, s)y_t(s), \\ \dot{y}(t) = C(t)x(t) + D(t)y(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ , функции  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(n)$ ,  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(m, n)$ ,  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(m)$  и  $B : \mathbb{R} \times [-r, 0] \rightarrow \mathbb{M}(n, m)$  удовлетворяют естественным условиям, перечисленным в разделе 1. Покажем, что пространство  $\mathfrak{S}^+$  имеет конечную размерность.

**Теорема 3.** *Для любой системы вида (4.1) размерность пространства  $\mathfrak{S}^+$  равна  $n + m$ .*

**Доказательство.** В силу теоремы Перрона [7, с. 261], найдется перроновское преобразование (т.е. преобразование  $p = P(t)q$  с ортогональной при каждом  $t$  матрицей  $P(t)$ ), приводящее систему

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} p$$

к системе  $\dot{q} = Q(t)q$  с ограниченной верхней треугольной матрицей  $Q(t)$ . Перроновское преобразование, являясь ляпуновским преобразованием, сохраняет показатели Ляпунова и основные асимптотические характеристики.

Применяя преобразование Перрона к системе (4.1), получим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)y(t) + \int_{-r}^0 dH(t, s)y_t(s), \\ \dot{y}(t) = K(t)y(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

с верхними треугольными матрицами  $F(t)$ ,  $K(t)$ , причем размерность пространства  $\mathfrak{S}^+$  системы (4.2) совпадает с размерностью аналогичного пространства для системы (4.1). Покажем, что для системы (4.2) имеет место равенство  $\dim \mathfrak{S}^+ = n + m$ .

Пусть  $(x(t), y(t))$  — решение системы (4.2) с начальным условием  $(u(\cdot), v(\cdot)) \in \mathfrak{S}$ , стремящееся к нулю быстрее любой экспоненты (здесь  $u(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}^m$ ). Тогда  $y(t) = X_K(t, 0)v(0)$  при  $t \geq 0$ , где  $X_K(t, s)$  — матрица Коши системы  $\dot{y} = K(t)y$ . Так как  $|X_K(t, 0)v(0)| = |y(t)|$  и  $\beta(u, v) = -\infty$  (см. (1.4)), то  $v(0) = 0$  и, следовательно,  $y(t) \equiv 0$  при всех  $t \geq 0$ . Поэтому, с учетом равенства

$$x(t) = X_F(t, 0) \left( u(0) + \int_0^t X_F(0, \xi) \int_{-r}^{-\xi} d_s H(\xi, s)v(\xi + s) d\xi \right),$$

верного при  $t \in [0, r]$ , получаем при всех  $t \geq r$  равенство  $x(t) = X_F(t, 0)h$ , где

$$h = u(0) + \int_0^r X_F(0, \xi) \int_{-r}^{-\xi} d_s H(\xi, s) v(\xi + s) d\xi.$$

Следовательно,  $h = 0$ .

Таким образом, пространство  $\mathfrak{S}^-$  для системы (4.1) задается  $n + m$  функционалами

$$\begin{cases} g_j(u, v) = e_j^* \left( u(0) + \int_0^r X_F(0, \xi) \int_{-r}^{-\xi} dH(\xi, s) v(\xi + s) d\xi \right), & j = 1, \dots, n, \\ f_i(u, v) = e_i^* v(0), & i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

где  $e_1 = \text{col}(1, 0, \dots, 0), \dots, e_k = \text{col}(0, \dots, 0, 1)$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^k$ .

Покажем, что функционалы  $g_1, \dots, g_n, f_1, \dots, f_m$  линейно независимы на пространстве  $\mathfrak{S}$ . Действительно, фиксируем вектор  $b = \text{col}(b_1, \dots, b_m) \neq 0$  и такую функцию  $(u, v) \in \mathfrak{S}$ , что

$$v(0) = b, u(0) = - \int_0^r X_F(0, \xi) \int_{-r}^{-\xi} d_s C(\xi, s) v(\xi + s) d\xi. \text{ Тогда при любых } a_1, \dots, a_n$$

$$\sum_{i=1}^n a_i g_i(u, v) + \sum_{j=1}^m b_j f_j(u, v) = |b|^2 > 0.$$

Если же  $b = 0$ , а  $a = \text{col}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ , то, выбрав функцию  $(u, v)$  следующим образом:  $v(s) \equiv 0, s \in [-r, 0], u(0) = a$ , получим

$$\sum_{i=1}^n a_i g_i(u) + \sum_{j=1}^m b_j f_j(u) = |a|^2 > 0.$$

Таким образом, в силу линейной независимости на пространстве  $\mathfrak{S}$  функционалов  $g_1, \dots, g_n, f_1, \dots, f_m$  получаем равенства  $\text{codim } \mathfrak{S}^- = \dim \mathfrak{S}^+ = n + m$ , доказывающие теорему.

Поступила 15.08.2004

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос. издат. физ.-матем. лит. 1959. 211 с.
2. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1984. 421 с.
3. **Шиманов С. Н.** Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием // В сб. "Пятая летняя матем. школа", Киев. 1968. С. 473–549.
4. **Мышкис А. Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука. 1972. 352 с.
5. **Тонков Е. Л.** Динамические задачи выживания // Вестник Пермского гос. технич. ун-та. Функционально-дифференциальные уравнения (спец. выпуск). 1997. № 4. С. 138–148.
6. **Быкова Т. С., Тонков Е. Л.** Ляпуновская приводимость линейной системы с последствием // Дифференц. уравнения 2003, Т. 39. № 6. С. 731–737.
7. **Былов Б. Ю., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука. 1966. 576 с.
8. **Тонков Е. Л.** Показатели Ляпунова и ляпуновская приводимость линейной системы с последствием // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Ижевск. 2001. № 3. С. 13–30.
9. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

УДК 517.911

**ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ<sup>1</sup>****О. И. Вдовина, А. Н. Сесекин**

Для нелинейной управляемой системы с линейно входящим импульсным интегрально ограниченным управлением предложен численный алгоритм построения множества достижимости, основанный на аппроксимации допустимых управлений линейными комбинациями дельта-функций Дирака и дискретизации пространства позиций системы. Получена оценка точности предложенного алгоритма. Приведен иллюстрирующий пример.

**1. Введение**

В монографии Н.Н. Красовского [1] предложена формализация задач импульсного оптимального управления для линейных систем и описываются методы их решения. В настоящей работе рассмотрен численный алгоритм построения множества достижимости (МД) нелинейной системы с импульсным управлением, подчиненным интегральному (ресурсному) ограничению. Знание множества достижимости дает максимальную информацию о возможностях системы и помогает находить оптимальные управления для различных функционалов. Необходимость исследования свойств пучков разрывных траекторий и их МД связана с тем, что в механике полета, электрофизике, медицине и экономике часто встречаются динамические объекты, допускающие разрывные траектории, порожденные импульсными управлениями. Оценки МД управляемых систем рассматривались в [2–4]. Алгоритмы численной аппроксимации МД, близкие к рассматриваемым в этой работе, для систем с непрерывными траекториями рассматривались в [5].

**2. Постановка задачи**

Пусть объект управления на отрезке  $[t_0, \vartheta]$  описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t)u(t), \quad (2.1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $f(t, x)$  —  $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных и липшицева по переменной  $x$  с константой  $L$ ,  $B(t)$  —  $n \times m$ -матрица-функция с непрерывными элементами,  $u(t) = \dot{v}(t)$  — управление. Также будем предполагать, что для всех допустимых  $t$  и  $x$  выполняется неравенство (с некоторой константой  $\beta_1$ )

$$\|f(t, x)\| \leq \beta_1(1 + \|x\|). \quad (2.2)$$

В силу непрерывности матрицы-функции  $B(t)$  на  $[t_0, \vartheta]$  существует постоянная  $\beta_2$  такая, что

$$\|B(t)\| \leq \beta_2 \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00722).

на  $[t_0, \vartheta]$ . Здесь  $\|y\| = \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^2\right)^{1/2}$ ,  $y \in \mathbb{R}^k$ , — евклидова норма,  $\|B\|$  — норма матрицы  $B$ , согласованная с евклидовой нормой.

Если  $v(t)$  — абсолютно непрерывная вектор-функция, то решение системы уравнений (2.1) понимается в смысле Каратеодори. Если  $v(t)$  —  $m$ -мерная вектор-функция ограниченной вариации, то производная  $\dot{v}(t)$  понимается в обобщенном смысле. В этом случае решением системы дифференциальных уравнений (2.1), удовлетворяющим начальному условию  $x(t_0) = x_0$ , будем называть функцию ограниченной вариации  $x(t)$ , являющуюся решением системы интегральных уравнений

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds + \int_{t_0}^t B(s) dv(s). \quad (2.4)$$

Последний интеграл в (2.4) понимается в смысле Римана — Стильеса. При сделанных предположениях, согласно [6], решение уравнения существует и единственно в классе функций ограниченной вариации на отрезке  $[t_0, \vartheta]$ .

Пусть  $U$  — множество допустимых управлений, первообразные которых  $v(t)$  — функции ограниченной вариации, удовлетворяющие условию  $\text{var}_{[t_0, \vartheta]} v(\cdot) \leq a$ . В случае, если  $v(t)$  — абсолютно непрерывная вектор-функция, это ограничение примет вид интегрального ограничения  $\int_{t_0}^{\vartheta} |\dot{v}(s)| ds \leq a$ . Обозначим через  $X(t, t_0, x_0)$  множество всех точек  $x(t)$  на траекториях системы (2.4), выпущенных из начальной точки  $x_0$  в момент  $t_0$ , порождаемых всевозможными управлениями из  $U$ . Свойства таких множеств подробно изучены в [6–9].

Пусть  $X^*(t, t_0, x_0, b)$  — множество всех точек  $x(t)$  на траекториях системы (2.4) с начальным условием  $x(t_0) = x_0$ , для которых ресурс управления  $\text{var}_{[t_0, t]} v(\cdot)$ , израсходованный к моменту  $t$ , равен  $b$ . Очевидно, что  $\bigcup_{b=0}^a X^*(t, t_0, x_0, b) = X(t, t_0, x_0)$ .

Заметим, что при сделанных выше предположениях все допустимые траектории окажутся в ограниченном множестве. В самом деле, из неравенства

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \beta_1 \int_{t_0}^t (1 + \|x(\tau)\|) d\tau + \beta_2 a,$$

которое получается из (2.4) с учетом предположений (2.2) и (2.3), в силу леммы Гронуолла [11, с. 151] следует оценка

$$\|x(t)\| \leq h(\vartheta) e^{\beta_1(\vartheta - t_0)}, \quad (2.5)$$

где

$$h(\vartheta) = \|x_0\| + \beta_1(\vartheta - t_0) + \beta_2 a.$$

Из (2.5) следует, что все допустимые траектории будут находиться в цилиндре

$$D = \{(t, x): (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m, \|x\| \leq r\},$$

где  $r = h(\vartheta) e^{\beta_1(\vartheta - t_0)}$ .

Целью данной работы является построение и обоснование алгоритма, позволяющего с наперед заданной точностью строить аппроксимацию множества  $X(\vartheta, t_0, x_0)$  с помощью конечного числа точек.

### 3. Численный алгоритм построения МД

В работе [12] установлено, что множество траекторий системы (2.1), порожденное импульсными управлениями вида

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^N \Delta_i \delta(t - t_i)$$

такими, что  $\sum_{i=1}^N \|\Delta_i\| \leq a$ , плотно в топологии поточечной сходимости в множестве траекторий системы (2.1), порожденных управлениями, удовлетворяющими условию  $\text{var}_{[t_0, \vartheta]} v(\cdot) \leq a$ .

Поэтому аппроксимирующее МД множество траекторий можно искать среди траекторий, порожденных чисто импульсными управлениями.

Предлагаемый алгоритм основан на дискретизации промежутка управления  $[t_0, \vartheta]$ , замене фазового пространства  $\mathbb{R}^n$  некоторой фиксированной  $\gamma$ -решеткой  $N_\gamma$ , дискретизации интенсивности управляющих импульсов и направлений их действия, а также на замене траектории между двумя последовательными импульсами отрезками прямых.

Обозначим через

$$\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_N = \vartheta\} \quad (3.1)$$

равномерное разбиение отрезка  $[t_0, \vartheta]$  ( $t_{i+1} - t_i = \frac{\vartheta - t_0}{N} = \Delta$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ). Отрезок  $[0, a]$  разобьем точками  $a_k$  так, что  $a_{k+1} - a_k = \delta = \text{const}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_p = a$ . Это разбиение

$$\Gamma^* = \{a_0, a_1, \dots, a_p = a\} \quad (3.2)$$

задает дискретность расходования ресурса управления в момент  $t_i$ . Пусть  $S_\alpha$  — сеть на единичной сфере в  $\mathbb{R}^m$ , у которой соседние узлы  $s_k$ ,  $s_{k+1}$  расположены на расстоянии не дальше, чем  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ).  $S_\alpha$  задает дискретное множество возможных направлений действия импульса.

Разобьем пространство  $\mathbb{R}^n$  на  $n$ -мерные кубы с центрами в точках  $x_j$  и вершинами, отстоящими от центров на величину  $\gamma$ . Далее будет показано, что для обеспечения сходимости алгоритма параметр алгоритма  $\gamma$  должен удовлетворять условию  $\gamma = o(\Delta)$ . Множество центров  $x_j$  назовем решеткой в  $\mathbb{R}^n$  и обозначим через  $N_\gamma$ .

Опишем рекуррентную процедуру построения множеств  $Z^*(t_i, t_0, x_0, b)$ , состоящих из точек решетки  $N_\gamma$ , которые будут аппроксимировать множества  $X^*(t_i, t_0, x_0, b)$ .

Положим  $Z^*(t_0, t_0, x_0, 0) = x_0$ . Пусть построены все множества  $Z^*(t_i, t_0, x_0, a_k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, p$ ). Опишем процедуру построения множества  $Z^*(t_{i+1}, t_0, x_0, a_q)$ . Для этого для каждой точки  $z_i \in Z^*(t_i, t_0, x_0, a_k)$  построим множество точек

$$z^*(t_{i+1}) = z_i + f(t_i, z_i)\Delta + B(t_i)s_\eta(q - k)\delta, \quad q - k \geq 0, \quad q \leq p,$$

получающееся в результате полного перебора  $s_\eta$  — элементов сети  $S_\alpha$ . После этого для каждой из полученных точек ищем точку, ближайшую в решетке  $N_\gamma$ . Если таких точек несколько, то в качестве элемента множества  $Z^*(t_{i+1}, t_0, x_0, a_q)$  выбираем любую. Объединение всех таких точек для  $k = 0, 1, 2, \dots, q$  и даст множество  $Z^*(t_{i+1}, t_0, x_0, a_q)$ . После того, как будут вычислены множества  $Z^*(\vartheta, t_0, x_0, a_q)$  для всех  $q = 0, 1, 2, \dots, p$ , вычислим объединение

$$Z(\vartheta, t_0, x_0) = \bigcup_{q=0}^p Z^*(\vartheta, t_0, x_0, a_q).$$

Согласно (2.2) и (2.5),

$$\|f(t, x)\| \leq Q = \beta_1 \left(1 + h(\vartheta)e^{\beta_1(\vartheta - t_0)}\right) \quad (3.3)$$

для  $(t, x) \in D$ , где  $D$  — ограниченное множество, в котором находятся все допустимые траектории.

Введем обозначения:

$$\varkappa^*(\Delta) = \max_{|t^* - t_*| \leq \Delta, \|x^* - x_*\| \leq \Delta} \|f(t^*, x^*) - f(t_*, x_*)\|; \quad (3.4)$$

$$\xi(\Delta) = \Delta \varkappa^*(\Delta) + LQ\Delta^2. \quad (3.5)$$

В силу равномерной непрерывности матрицы-функции  $B(t)$  на отрезке  $[t_0, \vartheta]$  существует непрерывная функция  $\phi(\Delta)$  такая, что для любых  $t^*$  и  $t_*$ , принадлежащих отрезку  $[t_0, \vartheta]$  и удовлетворяющих неравенству  $|t^* - t_*| \leq \Delta$ , имеем

$$\|B(t^*) - B(t_*)\| \leq \phi(\Delta). \quad (3.6)$$

В качестве  $\phi(\Delta)$ , например, можно взять функцию

$$\phi(\Delta) = \max_{|t^* - t_*| \leq \Delta} \|B(t^*) - B(t_*)\|.$$

#### 4. Оценка точности аппроксимации множества достижимости

Для предложенного алгоритма имеет место

**Теорема.** *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \rho(Z\vartheta, t_0, x(t_0)), X(\vartheta, t_0, x(t_0)) &\leq e^{L(\vartheta-t_0)}\phi(\Delta)a \\ &+ e^{L(\vartheta-t_0)}\beta_2\delta N + \alpha\beta_2ae^{L(\vartheta-t_0)} + \frac{e^{L(\vartheta-t_0)} - 1}{e^{L\Delta} - 1} (\xi(\Delta) + \gamma). \end{aligned} \quad (4.1)$$

**Доказательство.** Рассмотрим класс  $\hat{U}$  всевозможных импульсных управлений  $\hat{u}(\cdot)$  вида

$$\hat{u}(t) = \sum_{i=1}^N \Delta_i \delta(t - t_i), \quad (4.2)$$

где  $t_i$  суть точки разбиения  $\Gamma$  (3.1), таких, что  $\text{var}_{[t_0, \vartheta]} \hat{u}(\cdot) = \sum_{i=1}^N \|\Delta_i\| \leq a$  ( $\Delta_i \in \mathbb{R}^m$ ). Соответствующее множество достижимости обозначим через  $\hat{X}(t, t_0, x_0)$ . Так как  $\hat{U} \subset U$ , то, очевидно,  $\hat{X}(t, t_0, x_0) \subset X(t, t_0, x_0)$ .

Пусть  $x(t)$  — траектория, порожденная управлением  $u(t) = \dot{v}(t)$ , — решение уравнения (2.1), а  $\hat{x}(t)$  — решение уравнения

$$\hat{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \hat{x}(s)) ds + \sum_{t_i < t} B(t_i) \Delta_i \chi(t - t_i),$$

где

$$\|\Delta_i\| = \text{var}_{[t_{i-1}, t_i]} v(\cdot), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Заметим, что  $\hat{x}(t)$  — решение уравнения (2.1) с управлением (4.2). Справедливо неравенство

$$\|x(\vartheta) - \hat{x}(\vartheta)\| \leq L \int_{t_0}^{\vartheta} \|x(s) - \hat{x}(s)\| ds + \left\| \sum_{i=0}^{N-1} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(s) dv(s) - B(t_{i+1}) \Delta_{i+1} \right) \right\|. \quad (4.3)$$

Из (3.6) следует

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=0}^{N-1} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(s) dv(s) - B(t_{i+1}) \Delta_{i+1} \right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=0}^{N-1} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} (B(s) - B(t_{i+1})) dv(s) + B(t_{i+1}) \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} dv(s) - \Delta_{i+1} \right) \right) \right\| \leq \phi(\Delta) a. \end{aligned}$$

С учетом последнего неравенства из (4.3) следует

$$\|x(\vartheta) - \hat{x}(\vartheta)\| \leq L \int_{t_0}^{\vartheta} \|x(s) - \hat{x}(s)\| ds + \phi(\Delta) a.$$

Согласно лемме Гронуолла,

$$\|x(\vartheta) - \hat{x}(\vartheta)\| \leq \left(1 + Le^{L(\vartheta-t_0)}\right) \phi(\Delta) a.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\rho(X(\vartheta, t_0, x_0), \hat{X}(\vartheta, t_0, x_0)) \leq \left(1 + Le^{L(\vartheta-t_0)}\right) \phi(\Delta) a, \quad (4.4)$$

где  $\rho(M, P)$  — хаусдорфово расстояние между множествами  $M$  и  $P$ .

Пусть  $\Gamma^*$  — равномерное разбиение отрезка  $[0, a]$  (3.2). Введем класс  $\check{U}$  управлений вида (4.2), где  $\Delta_i$  таковы, что  $\|\Delta_i\|$  могут принимать значения лишь из разбиения  $\Gamma^*$ . Соответствующее множество достижимости обозначим через  $\check{X}(t, t_0, x_0)$ .

Пусть  $\hat{u}(\cdot)$  — управление из  $\check{U}$ , а  $\Delta_i, i = 1, 2, \dots, N$ , — соответствующий этому управлению набор импульсов. Положим

$$\check{\Delta}_i = \frac{\Delta_i}{\|\Delta_i\|} \check{M} \delta, \quad (4.5)$$

где  $\check{M} = \left\lceil \frac{\|\Delta_i\|}{\delta} \right\rceil$  (здесь  $[A]$  — целая часть числа  $A$ ); набор  $\check{\Delta}_i, i = 1, 2, \dots, N$ , определяет управление  $\check{u}(\cdot) \in \check{U}$ . Очевидно, что в этом случае  $\text{var}_{[t_0, \vartheta]} \check{u}(\cdot) \leq \text{var}_{[t_0, \vartheta]} \hat{u}(\cdot)$  и, следовательно,  $\check{u}(t)$  будет допустимым управлением.

Справедливо неравенство

$$\|\check{x}(\vartheta) - \hat{x}(\vartheta)\| \leq L \int_{t_0}^{\vartheta} \|\check{x}(s) - \hat{x}(s)\| ds + \left\| \sum_{i=0}^{N-1} B(t_{i+1}) (\check{\Delta}_{i+1} - \Delta_{i+1}) \right\|. \quad (4.6)$$

Из (2.3) и (4.5) следует, что

$$\left\| \sum_{i=0}^{N-1} B(t_{i+1}) (\check{\Delta}_{i+1} - \Delta_{i+1}) \right\| \leq \beta_2 \delta N. \quad (4.7)$$

С учетом (4.7) из (4.6) следует неравенство

$$\|\check{x}(\vartheta) - \hat{x}(\vartheta)\| \leq L \int_{t_0}^{\vartheta} \|\check{x}(s) - \hat{x}(s)\| ds + \beta_2 \delta N.$$

Применяя лемму Гронуолла, получим

$$\|\check{x}(\vartheta) - \hat{x}(\vartheta)\| \leq \left(1 + Le^{L(\vartheta-t_0)}\right) \beta_2 \delta N.$$

Следовательно,

$$\rho\left(\tilde{X}(\vartheta, t_0, x_0), \hat{X}(\vartheta, t_0, x_0)\right) \leq \left(1 + Le^{L(\vartheta-t_0)}\right) \beta_2 \delta N. \quad (4.8)$$

Пусть  $\tilde{U}$  — множество управлений вида

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=1}^N y_{k_i} s_{k_i} \delta(t - t_i),$$

отвечающее всевозможным  $y_{k_i} \in \Gamma^*$ ,  $s_{k_i} \in S_\alpha$ . Очевидно, что  $\tilde{U} \subset \check{U}$  и  $\tilde{X}(\vartheta, t_0, x_0) \subset \check{X}(\vartheta, t_0, x_0)$ , где  $\check{X}(\vartheta, t_0, x_0)$  — множество достижимости системы (2.1), порожденное управлениями из  $\check{U}$ .

В неравенстве

$$\|\tilde{x}(\vartheta) - \check{x}(\vartheta)\| \leq L \int_{t_0}^{\vartheta} \|\tilde{x}(s) - \check{x}(s)\| ds + \left\| \sum_{i=0}^{N-1} B(t_{i+1})(y_{k_{i+1}} s_{k_{i+1}} - \check{\Delta}_{i+1}) \right\|$$

$y_{k_{i+1}}$  выбираем равным  $|\check{\Delta}_{i+1}|$ . Тогда

$$y_{k_{i+1}} s_{k_{i+1}} - \check{\Delta}_{i+1} = y_{k_{i+1}} \left( s_{k_{i+1}} - \frac{\check{\Delta}_{i+1}}{|\check{\Delta}_{i+1}|} \right).$$

Поскольку  $\frac{\check{\Delta}_{i+1}}{|\check{\Delta}_{i+1}|}$  принадлежит единичной сфере в  $\mathbb{R}^m$ , можно выбрать  $s_{k_{i+1}}$  так, чтобы

$$\left| s_{k_{i+1}} - \frac{\check{\Delta}_{i+1}}{|\check{\Delta}_{i+1}|} \right| < \alpha.$$

В итоге справедливо неравенство

$$\|\tilde{x}(\vartheta) - \check{x}(\vartheta)\| \leq L \int_{t_0}^{\vartheta} \|\tilde{x}(s) - \check{x}(s)\| ds + \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \|B(t_{i+1})\|,$$

из которого в силу (2.3) следует

$$\|\tilde{x}(\vartheta) - \check{x}(\vartheta)\| \leq L \int_{t_0}^{\vartheta} \|\tilde{x}(s) - \check{x}(s)\| ds + \alpha \beta_2 N.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла, получим

$$\|\tilde{x}(\vartheta) - \check{x}(\vartheta)\| \leq \alpha \beta_2 N e^{L(\vartheta-t_0)},$$

из чего следует, что

$$\rho(\tilde{X}(\vartheta, t_0, x_0), \check{X}(\vartheta, t_0, x_0)) \leq \alpha \beta_2 N e^{L(\vartheta-t_0)}. \quad (4.9)$$

Траекторию  $z(t)$  на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  будем строить следующим образом. На полуинтервале  $[t_i, t_{i+1})$

$$z(t) = z(t_i) + f(t_i, z(t_i))(t - t_i). \quad (4.10)$$

В момент  $t_{i+1}$  траектория претерпевает разрыв  $B(t_{i+1})\Delta_{i+1}$  под действием импульса. В качестве точки  $z(t_{i+1})$  мы выбираем в решетке  $N_\gamma$  (см. пункт 3) центр, ближайший к точке  $z(t_i) + f(t_i, z(t_i))(t_{i+1} - t_i) + B(t_{i+1})\Delta_{i+1}$ . Объединение всех точек  $z(t_{i+1})$ , построенных по такому алгоритму, будем обозначать через  $Z(t_{i+1}, t_0, x_0)$ . Множество  $Z(\vartheta, t_0, x_0)$  аппроксимирует множество  $\tilde{X}(\vartheta, t_0, x_0)$ .

Для доказательства этого факта сначала оценим величину  $\|z(t_1) - \tilde{x}(t_1)\|$ . Согласно (4.10),

$$\begin{aligned} \|z(t_1) - \tilde{x}(t_1)\| &\leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(t_0, x(t_0)) - f(\tau, \tilde{x}(\tau))\| d\tau + \gamma \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(t_0, x(t_0)) - f(\tau, x(t_0))\| d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \|f(\tau, x(t_0)) - f(\tau, \tilde{x}(\tau))\| d\tau + \gamma. \end{aligned}$$

С учетом липшицевости вектор-функции  $f(t, x)$  по  $x$  и условия (3.4) справедливо неравенство

$$\|z(t_1) - \tilde{x}(t_1)\| \leq \Delta \varkappa^*(\Delta) + L \int_{t_0}^{t_1} \|x(t_0) - \tilde{x}(\tau)\| d\tau + \gamma. \quad (4.11)$$

Принимая во внимание оценку (3.3) и оценивая в (4.11)

$$\|x(t_0) - \tilde{x}(\tau)\| \leq Q\Delta,$$

получим

$$\|z(t_1) - \tilde{x}(t_1)\| \leq \xi(\Delta) + \gamma, \quad (4.12)$$

где  $\xi(\Delta)$  определяется согласно (3.5). Теперь оценим сверху величину  $\|z(t_2) - \tilde{x}(t_2)\|$ . Согласно (4.10) и (4.12), справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|z(t_2) - \tilde{x}(t_2)\| &\leq \|z(t_1) - \tilde{x}(t_1)\| + \int_{t_1}^{t_2} \|f(t_1, z(t_1)) - f(\tau, \tilde{x}(\tau))\| d\tau + \gamma \\ &\leq \xi(\Delta) + \gamma + \Delta \varkappa^*(\Delta) + L \int_{t_1}^{t_2} \|z(t_1) - \tilde{x}(\tau)\| d\tau + \gamma \\ &\leq \xi(\Delta) + \gamma + \Delta \varkappa^*(\Delta) + L(\xi(\Delta) + \gamma + Q\Delta)\Delta + \gamma \\ &\leq (2 + L\Delta)(\xi(\Delta) + \gamma). \end{aligned}$$

С учетом неравенства  $1 + L\Delta \leq e^{L\Delta}$  имеем

$$\|z(t_2) - \tilde{x}(t_2)\| \leq (1 + e^{L\Delta})(\xi(\Delta) + \gamma).$$

Аналогичным образом нетрудно доказать неравенство

$$\|z(t_3) - \tilde{x}(t_3)\| \leq (1 + e^{L\Delta} + e^{2L\Delta})(\xi(\Delta) + \gamma).$$

В результате  $N$ -кратного применения таких оценок получим

$$\|z(\vartheta) - \tilde{x}(\vartheta)\| \leq \left(1 + e^{L\Delta} + e^{2L\Delta} + \dots + e^{(N-1)L\Delta}\right)(\xi(\Delta) + \gamma).$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии и учитывая, что  $N\Delta = \vartheta - t_0$ , получим

$$\|z(\vartheta) - \tilde{x}(\vartheta)\| \leq \frac{e^{L(\vartheta-t_0)} - 1}{e^{L\Delta} - 1}(\xi(\Delta) + \gamma).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\rho(Z(\vartheta, t_0, x(t_0)), \tilde{X}(\vartheta, t_0, x(t_0))) \leq \frac{e^{L(\vartheta-t_0)} - 1}{e^{L\Delta} - 1} (\xi(\Delta) + \gamma). \quad (4.13)$$

В силу свойства хаусдорфова расстояния

$$\begin{aligned} \rho(Z(\vartheta, t_0, x(t_0)), X(\vartheta, t_0, x(t_0))) &\leq \rho(X(\vartheta, t_0, x(t_0)), \hat{X}(\vartheta, t_0, x(t_0))) \\ &+ \rho(\hat{X}(\vartheta, t_0, x(t_0)), \check{X}(\vartheta, t_0, x(t_0))) + \rho(\check{X}(\vartheta, t_0, x(t_0)), \tilde{X}(\vartheta, t_0, x(t_0))) \\ &+ \rho(Z(\vartheta, t_0, x(t_0)), \tilde{X}(\vartheta, t_0, x(t_0))). \end{aligned}$$

Принимая во внимание оценки (4.4), (4.8), (4.9) и (4.13), получим требуемое неравенство (4.1). Доказательство теоремы закончено.

Задав произвольное  $\varepsilon > 0$ , мы можем подобрать параметры предложенного алгоритма так, чтобы обеспечить неравенство

$$\rho(Z(\vartheta, t_0, x(t_0)), X(\vartheta, t_0, x(t_0))) \leq \varepsilon.$$

Например, сначала подберем  $\Delta$  и  $\gamma$  так, чтобы

$$e^{L(\vartheta-t_0)} \phi(\Delta) a \leq \frac{\varepsilon}{6}$$

и

$$\frac{e^{L(\vartheta-t_0)} - 1}{e^{L\Delta} - 1} (\xi(\Delta) + \gamma) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Очевидно, это всегда можно сделать, так как  $\phi(\Delta) \rightarrow 0$  при  $\Delta \rightarrow 0$  и  $\xi(\Delta) = o(\Delta)$  согласно (3.5). Отсюда, в частности, следует, что для обеспечения сходимости алгоритма необходимо потребовать, чтобы  $\gamma = o(\Delta)$ . Затем  $\alpha$  и  $\delta$  выбираем из условий

$$e^{L(\vartheta-t_0)} \beta_2 \delta N \leq \frac{\varepsilon}{6}, \quad \alpha \beta_2 a e^{L(\vartheta-t_0)} \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

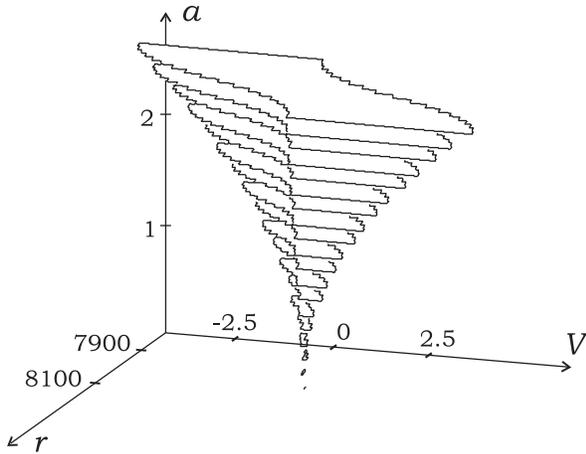


Рис. 1.

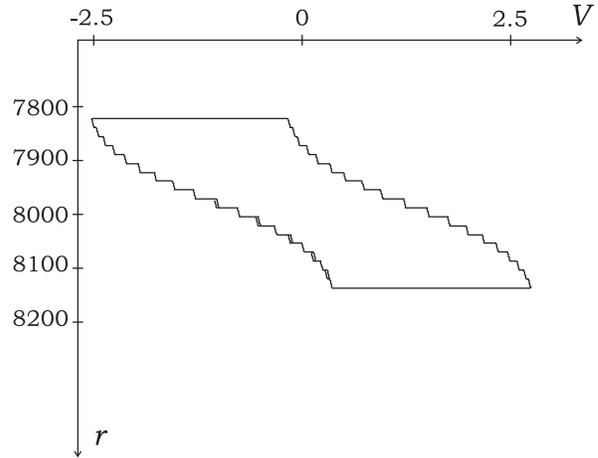


Рис. 2.

**Пример.** Пусть объект управления описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{r} = V, \\ \dot{V} = -\frac{\mu}{r^2} + \dot{v}. \end{cases}$$

Начальные условия:  $r(0) = 8000$ ,  $V(0) = 2.5$ ; промежуток управления  $[t_0, \vartheta] = [0, 20]$ . На импульсное управление наложено ограничение  $\text{var}_{[0, 20]} v(\cdot) \leq 2.5$ . На рис. 1 показаны множества  $Z^*(20; 8000; 2.5; a_k)$ ,  $a_k = 0.025k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 20$ . На рис. 2 показано множество  $Z(20; 8000; 2.5)$ , которое получается в результате проектирования ранее перечисленных множеств на плоскость  $r, V$  и их объединения. Математическое моделирование алгоритма для данного примера проведено М.Е. Коршуновым.

Поступила 15.04.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. **Kurzhanski A.V., Vályi I.** Ellipsoidal techniques for dynamic systems // Dynamics and Control. 1991. V. 1. P. 357–378.
3. **Черноусько Ф.Л.** Эллипсоидальные оценки области достижимости управляемой системы. // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, вып. 1. С. 11–19.
4. **Константинов Г.Н.** Нормирование воздействий на динамические системы. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та. 1983. 188 с.
5. **Гусейнов Х.Г., Незнахин А.А., Ушаков В.Н.** Приближенное построение множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями на управление // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 4. С. 580–590.
6. **Халанай А., Векслер Д.** Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 310 с.
7. **Сесекин А.Н.** Свойства множества достижимости динамической системы с импульсным управлением // Автоматика и телемеханика. 1994. № 2. С. 52–59.
8. **Сесекин А.Н.** О множествах разрывных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1994. № 6. С. 83–89.
9. **Сесекин А.Н.** О связности множества разрывных решений нелинейной динамической системы с импульсным управлением // Изв. вузов. Математика. 1996. № 11. С. 85–93.
10. **Zavalishchin S.T., Sesekin A.N.** Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht etc. 1997. 268 p.
11. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
12. **Миллер Б.М.** Задача нелинейного импульсного управления объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями с мерой. I, II // Автоматика и телемеханика. 1978. № 1. С. 75–85; № 3. С. 34–42.

УДК 517.977

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ВХОДЫ В ЗАДАЧАХ ГАРАНТИРОВАННОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ<sup>1</sup>

М. И. Гусев

Рассматривается задача оптимального выбора входов при идентификации параметров управляемых систем по результатам измерений. Предполагается, что априорная информация о неопределенных параметрах и ошибках измерения исчерпывается указанием допустимых пределов их изменения. Какая-либо статистическая информация отсутствует, задача идентификации исследуется в рамках минимаксного (гарантированного) подхода. Оптимальный выбор входов призван обеспечить наилучшее качество идентификации, в качестве критерия оптимальности рассматривается интеграл от информационной функции системы.

### Введение

Проблема выбора оптимальных входов при идентификации параметров управляемой системы относится к задачам планирования эксперимента. Типичным примером подобной задачи является выбор закона отклонения руля высоты самолета с целью обеспечения наиболее точной оценки параметров правой части дифференциального уравнения, описывающего его движение [1]. В теории планирования эксперимента широко используются стохастические модели ошибок измерения и неопределенных параметров системы. Наряду с вероятностным подходом, в задачах идентификации все большее распространение получает гарантированный подход, основанный на представлении априорной информации о неизвестных параметрах (возмущениях) при помощи задания множеств, содержащих эти параметры. Исследования в области гарантированного оценивания были инициированы работами Н.Н. Красовского [2, 3], посвященными задачам априорного оценивания. В рамках теории апостериорного гарантированного оценивания [4–6] оценки состояний (параметров) динамических систем с неопределенными возмущениями по данным наблюдений формируются апостериори по ходу процесса наблюдения в виде функций (вообще говоря, многозначных) от наблюдаемого сигнала. Ключевым здесь является понятие информационного множества, определяемого как множество всех возможных состояний системы, совместимых с результатами измерения и априорными ограничениями на неизвестные возмущения и ошибки измерений. В качестве оценки состояния (параметров системы) принимается либо само множество, либо формируемые на его основе точечные минимаксные оценки.

Задачи оптимального планирования эксперимента в рамках теории гарантированного оценивания рассматриваются как в априорной, так и в апостериорной постановках. В первом случае оптимальный план эксперимента (вход системы) выбирается с целью минимизации максимальной возможной ошибки оценивания величины некоторой скалярной функции неизвестных параметров системы [7]. Во втором — в качестве критерия оптимальности выбирается некоторый функционал, определенный на информационных множествах системы, а сама задача выбора оптимальных входов превращается в задачу оптимального управления информационными множествами [8–10]. В качестве критериев оптимальности рассматриваются, например, объем, диаметр или чебышевский радиус информационного множества.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00663) и гранта Н.Ш. 1889.2003.1.

Отметим, что построение даже единичного экземпляра информационного множества представляет собой весьма трудоемкую в вычислительном плане процедуру, особенно в случае нелинейных систем [11,12]. В [13,14] была предложена схема построения информационных множеств в виде множеств уровня так называемой информационной функции, представляющей собой функцию цены некоторой вспомогательной экстремальной задачи (задачи оптимального управления). Данный подход дает возможность использовать при построении информационных множеств методы теории оптимального управления, в частности, теорию динамического программирования, для получения рекуррентных соотношений, описывающих динамику множеств.

В данной работе рассматривается задача построения оптимального входа при идентификации параметров нелинейной управляемой системы. В качестве критерия оптимальности предлагается выбирать интеграл от информационной функции системы по множеству априорных ограничений на параметры. Это позволяет в процессе нахождения оптимального входа избежать непосредственного построения информационных множеств. В предположении, что ошибки измерения удовлетворяют интегральным квадратичным ограничениям, показано, что рассматриваемая задача трансформируется в задачу оптимального управления, в которой уравнения системы зависят от параметра, а в функционал входит интеграл по параметру. Получены условия оптимальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина и формула для градиента функционала. Рассмотрено несколько примеров численного решения задачи.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, q, x, u(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.1)$$

( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ ), правая часть которой зависит от неизвестного векторного параметра  $q \in \mathbb{R}^m$ . Будем далее предполагать, что априорная информация о  $q$  задана включением

$$q \in Q, \quad (1.2)$$

$Q$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$ . Допустимым управлением будем называть измеримую ограниченную вектор-функцию  $u: [t_0, t_1] \rightarrow U$ , где  $U \subset \mathbb{R}^r$ .

Будем предполагать, что вектор-функция  $f(t, q, x, u)$  определена, непрерывна и имеет непрерывные производные по  $x$  на  $[t_0, t_1] \times Q \times \mathbb{R}^n \times U$ . Для любого значения параметра  $q \in Q$  и допустимого управления  $u(t)$  существует единственная абсолютно непрерывная вектор-функция  $x(t)$ , удовлетворяющая равенству (1.1) для почти всех  $t$  из некоторой окрестности точки  $t_0$ , будем ее обозначать через  $x(t, q)$  (или  $x(t, q, u(\cdot))$  в тех случаях, когда необходимо подчеркнуть ее зависимость от управления). Кроме того, будем считать, что выполнены условия, обеспечивающие продолжимость решения на промежуток  $[t_0, t_1]$ .

Пусть на промежутке  $[t_0, t_1]$  измерению доступен вектор

$$y(t) = g(t, x(t)) + \xi(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.3)$$

где  $g: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^k$  — непрерывная функция,  $\xi(t)$  — ошибка измерений, априорная информация о которой исчерпывается включением

$$\xi(\cdot) \in \Xi, \quad (1.4)$$

$\Xi$  — ограниченное множество в пространстве  $L_2^k[t_0, t_1]$ . Далее будем предполагать, что

$$\Xi = \{\xi(\cdot): W(\xi(\cdot)) \leq 1\},$$

где  $W$  — заданный неотрицательный функционал. Примерами таких функционалов являются

$$W(\xi(\cdot)) = \langle \xi(\cdot), \xi(\cdot) \rangle := \int_{t_0}^{t_1} \xi^\top(t) R \xi(t) dt,$$

$$W(\xi(\cdot)) = \alpha \operatorname{esssup}\{\|\xi(t)\|: t \in [t_0, t_1]\},$$

где  $R$  — положительно определенная матрица,  $\alpha$  — заданное положительное число. Пусть  $y(t)$  — реализовавшийся сигнал в системе, порожденный неизвестным “истинным” значением параметра  $q^* \in Q$ , управлением  $u(t)$  и ошибкой измерения  $\xi(t)$ . Информационной функцией задачи (1.1), (1.3) будем называть функцию  $q \rightarrow V(q, y(\cdot), u(\cdot))$ , определенную следующим образом:

$$V(q, y(\cdot), u(\cdot)) = W(y(\cdot) - g(\cdot, x(\cdot, q))).$$

Информационным множеством системы, отвечающим сигналу  $y(\cdot)$ , называется множество всех возможных значений параметра  $q \in Q$ , совместимых с результатами измерения (1.3) и априорными ограничениями на ошибки измерения. Из приведенных определений следует, что информационное множество, обозначаемое далее как  $Q(y(\cdot), u(\cdot))$ , может быть определено следующим образом<sup>2</sup>:

$$Q(y(\cdot), u(\cdot)) = Q \cap \{q: V(q, y(\cdot), u(\cdot)) \leq 1\}.$$

Неизвестное истинное значение  $q^*$  принадлежит информационному множеству.

Множество  $Q(y(\cdot), u(\cdot))$ , вообще говоря, невыпукло даже в случае линейных по  $x$  систем, оно может быть несвязным, и задача вычисления его характеристик, таких, например, как объем, диаметр или чебышевский радиус, может оказаться весьма трудоемкой. Вместо использования подобных критериев будем характеризовать точность оценивания величиной интеграла от информационной функции

$$I(y(\cdot), u(\cdot)) = \int_Q V(q, y(\cdot), u(\cdot)) d\mu(q), \quad (1.5)$$

где  $\mu$  — неотрицательная мера, определенная на  $\sigma$ -алгебре измеримых по Лебегу подмножеств  $Q$ , такая, что  $\mu(Q) = 1$ . Если  $Q$  имеет ненулевую меру Лебега, то в качестве  $\mu$  можно рассматривать меру, определенную равенством

$$\mu(E) = \int_E \alpha(q) dq,$$

где  $\alpha$  — заданная неотрицательная функция (весовая функция), интеграл от которой по множеству  $Q$  равен 1. Другой пример доставляется мерой  $\mu$ , сосредоточенной в точках заданного конечного подмножества  $Q$ . Это подмножество может состоять из точек некоторой регулярной сетки на  $Q$ , либо формироваться случайным образом. Наконец, в приведенных далее примерах рассматривается случай, когда мера сосредоточена в относительно небольшом числе точек множества  $Q$  (крайних точках  $Q$ ).

Функционал  $I$  неотрицателен, его величина может служить характеристикой точности оценивания, бóльшая величина функционала отвечает более точной оценке. Заметим, что информационная функция определяется, вообще говоря, неоднозначно. Если  $\nu(x)$  — монотонно возрастающая, неотрицательная функция, определенная при  $x \geq 0$ , такая, что  $\nu(1) = 1$ , то

<sup>2</sup>Обычно информационная функция определяется так, чтобы информационное множество было ее множеством уровня во всем пространстве неопределенных параметров, т.е. априорные ограничения на параметры учитываются при определении функции. Нам далее удобнее работать с приведенным определением.

$V_1(q, y(\cdot), u(\cdot)) = \nu(V(q, y(\cdot), u(\cdot)))$  — также информационная функция. Функцию  $\nu(x)$  можно выбрать таким образом, чтобы интеграл от нее был близок к мере множества  $Q \setminus Q(y(\cdot), u(\cdot))$ .

Интеграл (1.5) зависит не только от  $u(\cdot)$ , но и от реализации измеренного сигнала. В свою очередь,  $y(t) = y^*(t) + \xi(t)$ , где  $y^*(t) = g(t, x(t, q^*, u(\cdot)))$ , а  $\xi(t)$  — реализовавшаяся ошибка измерения. В наихудшем для наблюдателя случае значение функционала  $I$  равно величине

$$J(u(\cdot)) = \inf_{W(\xi(\cdot)) \leq 1} \int_Q V(q, y(\cdot) + \xi(\cdot), u(\cdot)) d\mu(q). \quad (1.6)$$

В случае, когда  $W(\xi(\cdot))$  — интегральный квадратичный функционал, величина минимума по  $\xi(\cdot)$  в (1.6) может быть найдена явно.

Действительно, определим скалярное произведение в  $L_2^k[t_0, t_1]$ , полагая

$$\langle \xi(\cdot), \eta(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \xi^\top(t) R \eta(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\xi(t), \eta(t))_R dt,$$

тогда

$$J(u(\cdot)) = \inf_{\langle \xi(\cdot), \xi(\cdot) \rangle \leq 1} \int_Q \int_{t_0}^{t_1} (y^*(t) + \xi(t) - \bar{g}(t, q), y^*(t) + \xi(t) - \bar{g}(t, q))_R dt d\mu(q),$$

где обозначено  $\bar{g}(t, q) = g(t, x(t, q, u(\cdot)))$ ,  $(x, y)_R = x^\top R y$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^k$ . Меняя порядок интегрирования по  $t$  и  $q$ , получим

$$J(u(\cdot)) = \inf_{\langle \xi(\cdot), \xi(\cdot) \rangle \leq 1} \{c + 2\langle \xi(\cdot), b(\cdot) \rangle + \langle \xi(\cdot), \xi(\cdot) \rangle\},$$

где

$$c = \int_{t_0}^{t_1} c(t) dt,$$

$$c(t) = \int_Q (y^*(t) - \bar{g}(t, q), y^*(t) - \bar{g}(t, q))_R d\mu(q), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$b(t) = \int_Q (y^*(t) - \bar{g}(t, q)) d\mu(q), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J(u(\cdot)) &= \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \min_{\langle \xi(\cdot), \xi(\cdot) \rangle = \alpha^2} \{c + 2\langle \xi(\cdot), b(\cdot) \rangle + \langle \xi(\cdot), \xi(\cdot) \rangle\} \\ &= \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \{c - 2\alpha \|b(\cdot)\| + \alpha^2\} = c + \phi(\|b(\cdot)\|^2), \end{aligned}$$

где  $\|b(\cdot)\| = \langle b(\cdot), b(\cdot) \rangle^{1/2}$ , а непрерывно дифференцируемая функция  $\phi(x)$  определена следующим образом:

$$\phi(x) = \begin{cases} -x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - 2\sqrt{x} & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

В итоге, учитывая, что  $y^*(t) = g(t, x(t, q^*, u(\cdot)))$ , получим следующую формулу для величины функционала в рассматриваемой задаче оптимального управления:

$$J(u(\cdot)) = \Psi(I_1(u(\cdot)), I_2(u(\cdot))),$$

где функция двух переменных  $\Psi$  определена равенством  $\Psi(z_1, z_2) = z_1 + \phi(z_2)$ ,

$$I_1(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \int_Q (g(t, x(t, q^*)) - g(t, x(t, q)))^\top R (g(t, x(t, q^*)) - g(t, x(t, q))) d\mu(q) dt,$$

$$I_2(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \int_Q (g(t, x(t, q^*)) - g(t, x(t, q)))^\top d\mu(q) R \int_Q (g(t, x(t, q^*)) - g(t, x(t, q))) d\mu(q) dt.$$

## 2. Условия оптимальности в задаче оптимального управления с функционалом, содержащим интеграл по параметру

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы (1.1) при ограничениях на неопределенные параметры  $q$  и управление  $u(t)$ , указанные в предыдущем разделе. Пусть  $F_i(t, x, y^i, u)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , — непрерывные функции, имеющие непрерывные производные по  $x, y^i$  на  $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k_i} \times U$ ,  $h_i(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , — непрерывные по  $t$  и непрерывно дифференцируемые по  $x$  на  $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$  отображения. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u(\cdot)) = \Psi(I_1, \dots, I_p), \quad (2.1)$$

где  $\Psi(z_1, \dots, z_p)$  — заданная дифференцируемая функция  $p$  переменных, функционалы  $I_i(u(\cdot))$  определены следующими равенствами:

$$I_i(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F_i(t, x(t, q^*), \int_Q h_i(t, x(t, q)) d\mu(q), u(t)) dt, \quad i = 1, \dots, p,$$

$q^* \in Q$  — заданный вектор. Пусть  $u(\cdot)$  — допустимое управление,  $x(t, q)$  — отвечающее этому управлению и параметру  $q$  решение системы. Определим обычным образом игольчатую вариацию управления в окрестности правильной точки  $\tau \in (t_0, t_1)$ , полагая

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u(t) & \text{при } t \notin (\tau - \varepsilon, \tau), \\ v & \text{при } t \in (\tau - \varepsilon, \tau), \end{cases}$$

где  $v$  — произвольный вектор из  $U$ ,  $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число. Через  $x_\varepsilon(t, q)$  обозначим решение системы (1.1), отвечающее управлению  $u_\varepsilon(t)$ . При фиксированном  $q$  вариация траектории при переходе от  $u(\cdot)$  к  $u_\varepsilon$  описывается следующим образом [15]:

$$x_\varepsilon(t, q) = x(t, q) + \varepsilon y(t, q) + o_q(\varepsilon), \quad t \geq \tau,$$

где  $y(t, q)$  — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, q, x(t, q), u(t))y$$

с краевым условием

$$y(\tau, q) = f(\tau, q, x(\tau, q), v) - f(\tau, q, x(\tau, q), u(\tau)), \quad (2.2)$$

а  $o_q(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Нетрудно показать, что сходимость к нулю здесь равномерна по  $q \in Q$ .

Приращение функционала  $I_i$  представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta I_i &= I_i(u_\varepsilon(\cdot)) - I_i(u(\cdot)) \\ &= \varepsilon \left( w^i + \int_{\tau}^{t_1} \eta^{i\top}(t) y(t, q^*) dt + \int_{\tau}^{t_1} \int_Q \zeta^{i\top}(t, q) y(t, q) d\mu(q) dt + o_q(\varepsilon) \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} w^i &= F_i \left( \tau, x(\tau, q^*), \int_Q h_i(\tau, x(\tau, q)) d\mu(q), v \right) - F_i \left( \tau, x(\tau, q^*), \int_Q h_i(\tau, x(\tau, q)) d\mu(q), u(\tau) \right), \\ \zeta^i(t, q) &= \frac{\partial h_i^\top}{\partial x}(t, x(t, q)) \frac{\partial F_i}{\partial y^i} \left( t, x(t, q^*), \int_Q h_i(t, x(t, q)) d\mu(q), u(t) \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\eta^i(t) = \frac{\partial F_i}{\partial x} \left( t, x(t, q^*), \int_Q h_i(t, x(t, q)) d\mu(q), u(t) \right). \quad (2.5)$$

Пусть  $\psi(t, q, \theta(\cdot, q))$  — решение следующей линейной системы дифференциальных уравнений с правой частью, зависящей от параметра  $q \in Q$ :

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial f^\top}{\partial x}(t, q, x(t, q), u(t))\psi + \theta(t, q), \quad \psi(t_1, q) = 0, \quad (2.6)$$

где  $\theta(t, q)$  — заданная измеримая интегрируемая по  $t$  и непрерывная по  $q$  вектор-функция. Имеем

$$\frac{d\psi^\top}{dt}(t, q, \theta(\cdot, q))y(t, q) = \theta^\top(t, q)y(t, q),$$

откуда, с учетом равенства  $\psi(t_1, q) = 0$ , получим

$$\psi^\top(\tau, q, \theta(\cdot, q))y(\tau, q) = \int_{\tau}^{t_1} \theta^\top(t, q)y(t, q) dt. \quad (2.7)$$

Предположим, что управление  $u(\cdot)$  доставляет минимум функционалу  $J$ , тогда

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u_\varepsilon(\cdot)) - J(u(\cdot))}{\varepsilon} \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{\partial \Psi}{\partial z_i} \left[ w^i + \int_{\tau}^{t_1} \eta^{i\top}(t) y(t, q^*) dt + \int_{\tau}^{t_1} \int_Q \zeta^{i\top}(t, q) y(t, q) d\mu(q) dt \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя равенство (2.7) и выражение для  $w^i$ , представим неравенство в (2.8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^p \frac{\partial \Psi}{\partial z_i} \left[ F_i \left( \tau, x(\tau, q^*), \int_Q h_i(\tau, x(\tau, q)) d\mu(q), v \right) - F_i \left( \tau, x(\tau, q^*), \int_Q h_i(\tau, x(\tau, q)) d\mu(q), u(\tau) \right) \right. \\ &\quad \left. - \psi^\top(\tau, q^*, \eta^i(\cdot))y(\tau, q^*) - \int_Q \psi^\top(\tau, q, \zeta^i(\cdot, q))y(\tau, q) d\mu(q) \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь частные производные  $\partial\Psi/\partial z_i$  вычисляются в точке  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_p)$  с координатами

$$\bar{z}_i = \int_{t_0}^{t_1} F_i \left( t, x(t, q^*), \int_Q h_i(t, x(t, q)) d\mu(q), u(t) \right) dt, \quad i = 1, \dots, p.$$

Рассмотрим следующий функционал (обобщенный гамильтониан задачи):

$$\begin{aligned} H(\tau, q, x, x(\cdot), \psi(\cdot), u) &= - \sum_{i=1}^p \frac{\partial\Psi}{\partial z_i}(\bar{z}) F_i(\tau, x, y^i, u) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial\Psi}{\partial z_i}(\bar{z}) \psi^\top(\tau, q, \eta^i(\cdot)) f(\tau, q, x, u) \\ &+ \sum_{i=1}^p \frac{\partial\Psi}{\partial z_i}(\bar{z}) \int_Q \psi^\top(\tau, q, \zeta^i(\cdot, q)) f(\tau, q, x(\tau, q), u) d\mu(q), \end{aligned}$$

где  $y^i = \int_Q h_i(\tau, x(\tau, q)) d\mu(q)$ ,  $i = 1, \dots, p$ . С учетом введенного обозначения из неравенства (2.9) вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $u(\cdot)$  — оптимальное управление в задаче (1.1), (2.1),  $x(t, q)$  — отвечающее данному управлению решение системы (1.1),  $\psi$  — решение системы (2.6), и функции  $\zeta^i(t, q)$ ,  $\eta^i(t)$  определены равенствами (2.4), (2.5). Тогда при почти всех  $\tau \in [t_0, t_1]$  имеет место равенство

$$H(\tau, q^*, x(\tau, q^*), x(\cdot), \psi(\cdot), u(\tau)) = \max_{v \in U} H(\tau, q^*, x(\tau, q^*), x(\cdot), \psi(\cdot), v). \quad (2.10)$$

Приведем далее без доказательства формулу для градиента функционала  $J$ , предполагая, что функции  $f, F_i$  определены для всех  $u \in \mathbb{R}^r$  и непрерывно дифференцируемы по  $u$ . Пусть  $\delta u(t)$  — измеримая ограниченная функция на  $[t_0, t_1]$ . Приращение функционала  $J$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta J = J(u(\cdot) + \delta u(\cdot)) - J(u(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i=1}^p \frac{\partial\Psi}{\partial z_i}(\bar{z}) \frac{\partial F_i}{\partial u}(t, x(t, q^*), y_i(t), u(t)) \right. \\ &- \sum_{i=1}^p \frac{\partial\Psi}{\partial z_i}(\bar{z}) \psi^\top(t, q^*, \eta^i(\cdot)) \frac{\partial f}{\partial u}(t, q^*, x(t, q^*), u(t)) \\ &\left. - \sum_{i=1}^p \frac{\partial\Psi}{\partial z_i}(\bar{z}) \int_Q \psi^\top(t, q, \zeta^i(\cdot, q)) \frac{\partial f}{\partial u}(t, q, x(t, q), u(t)) d\mu(q) \right] \delta u(t) dt + o(\|\delta u(\cdot)\|_{L_2^k}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t)), \quad y_i(t) = \int_Q h_i(t, x(t, q)) d\mu(q).$$

Равенство (2.11) представляет собой аналог известной формулы

$$\Delta J = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), \psi(t), u(t)) \delta u(t) dt + o(\|\delta u(\cdot)\|_{L_2^k}),$$

выражающей градиент функционала задачи оптимального управления через ее гамильтониан.

Вернемся к задаче оптимального выбора входов при интегральных ограничениях на помехи. Очевидно, что рассматриваемая задача имеет вид (2.1), где  $\Psi(z_1, z_2) = -z_1 - \phi(z_2)$ ,

$$k_1 = k + 1, k_2 = k, h_1^\top(t, x) = (g^\top(t, x), g^\top(t, x)Rg(t, x)), h_2(t, x) = g(t, x),$$

$$F_1(t, x, y, u) = g^\top(t, x)Rg(t, x) - 2g^\top(t, x)Ry(1 : k) + y_{k+1}, \quad y \in \mathbb{R}^{k+1}, \quad y(1 : k) = (y_1, \dots, y_k)^\top,$$

$$F_2(t, x, y, u) = g^\top(t, x)Rg(t, x) - 2g^\top(t, x)Ry + y^\top Ry, \quad y \in \mathbb{R}^k.$$

Функции  $F_1, F_2$  в данном случае от  $u$  явно не зависят. Функции  $\zeta^i, \eta^i, i = 1, 2$ , определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \zeta^1(t, q) &= \frac{\partial g^\top}{\partial x}(t, x(t, q)) \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(g^\top(t, x(t, q))Rg(t, x(t, q)))^\top \\ &= -2 \frac{\partial g^\top}{\partial x}(t, x(t, q))Rg(t, x(t, q)) + \frac{\partial}{\partial x}(g^\top(t, x(t, q))Rg(t, x(t, q)))^\top = 0, \end{aligned}$$

$$\eta^1(t) = \frac{\partial F_1}{\partial x} = 2 \frac{\partial g^\top}{\partial x}(t, x(t, q^*))R(g(t, x(t, q^*))) - \int_Q g(t, x(t, q)) d\mu(q),$$

$$\zeta^2(t, q) = \frac{\partial g^\top}{\partial x}(t, x(t, q)) \frac{\partial F_2}{\partial y} = -2 \frac{\partial g^\top}{\partial x}(t, x(t, q))Rg(t, x(t, q)) + \int_Q g(t, x(t, q)) d\mu(q),$$

$$\eta^2(t) = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2 \frac{\partial g^\top}{\partial x}(t, x(t, q^*))R(g(t, x(t, q^*))) - \int_Q g(t, x(t, q)) d\mu(q).$$

Гамильтониан задачи здесь равен

$$\begin{aligned} H &= F_1 + \frac{\partial \phi}{\partial z}(z_2)F_2 + \left[ \psi(\tau, q, \eta^1(\cdot)) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(z_2)\psi(\tau, q, \eta^2(\cdot)) \right]^\top f(\tau, q, x, u) \\ &\quad + \int_Q \frac{\partial \phi}{\partial z}(z_2)\psi(\tau, q, \zeta^2(\cdot))^\top f(\tau, q, x(\tau, q), u) d\mu(q). \end{aligned}$$

В силу этого принцип максимума принимает более простой вид, чем в общем случае:

$$\begin{aligned} &\psi(\tau, q^*, \eta^1(\cdot)) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(z_2)\eta^2(\cdot)^\top f(\tau, q^*, x(\tau, q^*), u(\tau)) \\ &+ \frac{\partial \phi}{\partial z}(z_2) \int_Q \psi(\tau, q, \zeta^2(\cdot))^\top f(\tau, q, x(\tau, q), u(\tau)) d\mu(q) = \max_{v \in U} \left[ \psi(\tau, q^*, \eta^1(\cdot)) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(z_2)\eta^2(\cdot)^\top \right. \\ &\quad \left. \times f(\tau, q^*, x(\tau, q^*), v) + \int_Q \frac{\partial \phi}{\partial z}(z_2)\psi(\tau, q, \zeta^2(\cdot))^\top f(\tau, q, x(\tau, q), v) d\mu(q) \right]. \end{aligned}$$

Градиент функционала в предположении о дифференцируемости по  $u$  правой части системы (1.1) может быть представлен следующим образом:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \psi(\tau, q^*, \eta^1(\cdot)) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(z_2)\eta^2(\cdot)^\top \frac{\partial f}{\partial u}(\tau, q^*, x(\tau, q^*), u(\tau)) \right]$$

$$+ \int_Q \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z}(z_2) \psi(\tau, q, \zeta^2(\cdot))^\top \frac{\partial f}{\partial u}(\tau, q, x(\tau, q), v) d\mu(q) \right] \delta u(\tau) d\tau.$$

Соотношения (2.10), (2.11) служат основой для построения численных методов решения задачи о выборе оптимальных входов. В следующем параграфе приведены несколько примеров, в которых для отыскания оптимальных входов использовался метод условного градиента. В этих примерах  $q$  — двумерный вектор, множество  $Q$  — квадрат. В качестве меры  $\mu$  выбиралась мера, сосредоточенная в достаточно большом числе случайных векторов, равномерно распределенных на  $Q$ . В этом случае соответствующая задача оптимального управления имеет довольно большую размерность, пропорциональную  $nk$ , где  $n$  — размерность исходной системы, а  $k$  — число точек в носителе меры. Наряду с таким способом выбора  $\mu$ , рассматривалась мера, сосредоточенная в вершинах квадрата  $Q$ . Подобный выбор меры существенно снижает размерность задачи оптимального управления, не приводя в рассмотренных примерах к существенному изменению в структуре оптимальных входов.

Отметим также, что при достаточно большом числе  $k$  основной вклад в величину функционала  $J(u(\cdot))$  вносит  $I_1(u(\cdot))$ , поэтому вместо  $J(u(\cdot))$  можно с самого начала брать  $I_1(u(\cdot))$ .

### 3. Примеры

**Пример 1.** Рассмотрим задачу идентификации коэффициентов линейной управляемой системы 2-го порядка, описывающей в первом приближении продольные коротко-периодические колебания самолета в окрестности заданного положения равновесия. Система рассматривается на промежутке  $[0, 4]$ . Уравнения системы имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= q_1 x_1 + q_2 x_2 - 1.66u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 0.737x_2 + 0.005u, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $t \in [0, 4]$ . Здесь  $x_1$  — угол атаки,  $x_2$  — угловая скорость тангажа,  $u$  — угол отклонения руля высоты (в градусах),  $t$  — время (в секундах). Коэффициенты  $q_1$ ,  $q_2$  неизвестны и подлежат идентификации по результатам измерения величины  $y(t) = x_1(t)$  на отрезке  $[0, 4]$ . Априорные ограничения на ошибку измерения заданы неравенством  $\int_0^4 \xi^2(t) dt \leq 1$ . Априорные ограничения на вектор  $q = (q_1, q_2)$  имеют вид  $q \in Q$ , где

$$Q = \{q: \max_i |q_i - \hat{q}_i| \leq 0.4\}$$

— квадрат с центром в точке  $\hat{q} = (-1.25, -0.75)$ . Пусть фактическое значение вектора  $q$  равно  $q^* = (-1.588; -0.562)$ . Ограничения на управление имеют вид  $|u| \leq 10$ .

В качестве меры  $\mu$  будем рассматривать меру, сосредоточенную в вершинах квадрата  $Q$  и принимающую в них равные значения.

Оптимальное управление равно 10 на промежутке  $[0, 2.9]$  и  $-10$  на  $[2.9, 4]$ . Отвечающее ему значение функционала равно 242.75. Отметим, что оптимальный вход для этой же системы, когда в качестве критерия рассматривается минимакс ошибки оценивания скалярного линейного функционала от  $q$ , имеет две точки переключения [7]. На рис. 1 показан вид информационных множеств для оптимального входа (граница множества обозначена толстой линией) и для управления  $u(t)$ , равного  $-10$  на  $[0, 1]$  и  $10$  на  $[1, 4]$  (граница — тонкая линия), величина критерия для данного управления — 73.64.

Прямолинейные участки границы множеств лежат на одной из сторон квадрата  $Q$ , задающего априорные ограничения.

Для этого же примера найдены оптимальные входы в предположении, что мера  $\mu$  сосредоточена на подмножестве  $Q$ , состоящем из 20 (100) случайных векторов, равномерно распределенных на  $Q$ . Оптимальное управление в этом случае также имеет одну точку переключения,

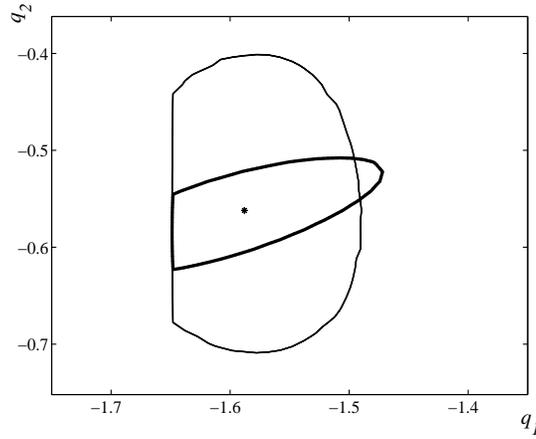


Рис. 1. Информационные множества в примере 1.

которая мало отличается от точки переключения для рассмотренного выше оптимального входа.

**Пример 2.** Рассмотрим нелинейную управляемую систему, описываемую уравнением Дуффинга [16]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= q_1 x_1 + q_2 x_1^3 + u, \end{aligned} \tag{3.2}$$

которое моделирует поведение нелинейной жесткой пружины под действием внешней силы  $u$ .

Измеряется величина  $y(t) = x_2(t)$  на отрезке  $[0, 4]$ . Априорные ограничения на ошибку измерения заданы неравенством  $\int_0^4 \xi^2(t) dt \leq \frac{1}{10}$ . Коэффициенты  $q_1, q_2$  неизвестны, априорные ограничения на вектор  $q = (q_1, q_2)$  имеют вид  $q \in Q$ , где  $Q$  — квадрат со стороной длины 1 и центром в точке  $\hat{q} = (-1, -2)$ . Пусть неизвестное истинное значение вектора  $q$  равно  $q^* = (-1.25; -1.75)$ . Ограничения на управление имеют вид  $|u| \leq 3$ .

В качестве меры  $\mu$  рассматриваем меру, сосредоточенную в вершинах квадрата  $Q$  и принимающую в них равные значения. В качестве функционала задачи рассмотрим  $I_1(u(\cdot))$ .

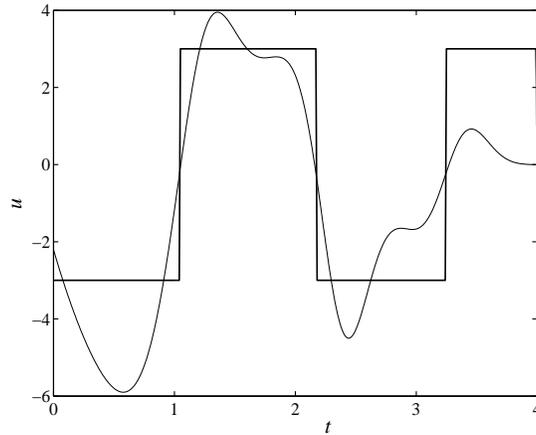


Рис. 2. Оптимальный вход и градиент функционала в примере 2.

Оптимальное управление имеет здесь три точки переключения, как показано на рис. 3, где тонкой линией изображен график функции, определяющей градиент функционала задачи на оптимальной траектории. Разметка по оси ординат графика приведена для  $u(t)$ .

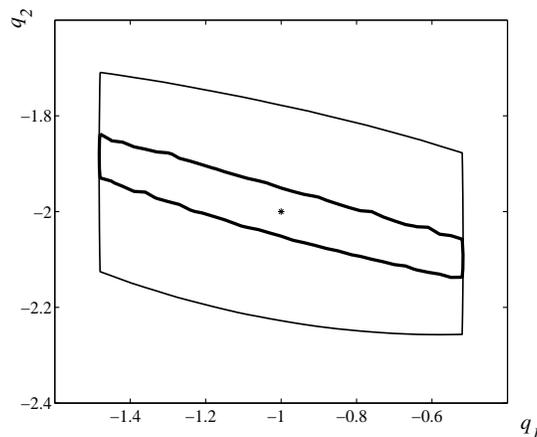


Рис. 3. Информационные множества в примере 2.

Вид информационных множеств, отвечающих оптимальному входу (граница множества обозначена толстой линией) и входу  $u(t)$ , который тождественно равен 3 (граница — тонкая линия), показан на рис. 3. Прямолинейные участки границы отвечают сторонам квадрата  $Q$ .

Поступила 17.07.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mehra R.K. Optimal inputs signals for parameter estimation in dynamic systems— Survey and new results // IEEE Trans. on Automat. Control. 1974. Vol. AC-19, no. 6. P. 753–768.
2. Красовский Н.Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикл. математика и механика, 1964. Т. 28, № 1. С. 3–14.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М: Наука, 1968.
4. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
5. Schweppe F.C. Uncertain Dynamic Systems. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
6. Куржанский А.Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3–26.
7. Гусев М.И. Планирование эксперимента в задачах гарантированного оценивания и идентификации // Оценивание и идентификация неопределенных систем: Сб. тр. ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1992. С. 50–82 / Деп. в ВИНТИ 26.05.92. № 1754-B92.
8. Kurzhanski A.V., Pschenichnyi V.N., and Pokotilo V.G. Optimal inputs for guaranteed identification // Problems of control and information theory. 1991. Vol. 20, № 1. P. 13–23.
9. Покотило В.Г. Оптимизация априорных наблюдений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 2. С. 312–315.
10. Гусев М.И. О задаче оптимизации измерений в условиях неопределенности // Эволюционные системы в задачах оценивания. Изд-во УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985. С. 21–30.
11. Veres S.M., Norton J.P. Identification of Nonlinear State-Space Models by Deterministic Search // Bounding Approaches to System Identification / M. Milanese et al., eds. Plenum Press, New York, 1996. P. 317–332.
12. Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета // Труды ИММ УрО РАН. 2000. Т. 6, № 2. С. 413–434.
13. Baras J.S., Kurzhanski A.V. Nonlinear filtering: the set-membership (bounding) and the  $H_\infty$  techniques // Proc. 3th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems Design. Pergamon Press, Oxford, 1995. P. 409–418.
14. Kurzhanski A.V., Vályi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Birkhäuser, Boston, 1997. 321 p.
15. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
16. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.

УДК 517.929

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В ЗАДАЧЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ<sup>1</sup>****Ю. Ф. Долгий**

В линейных периодических системах с последствием движение асимптотически устойчиво, если все собственные числа оператора монодромии по модулю меньше единицы. Конструктивные процедуры построения характеристического уравнения оператора монодромии связаны с конечномерными аппроксимациями этого оператора. Характеристическое уравнение задается на комплексной плоскости целой функцией. Для ядерных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве эта функция равномерно аппроксимируется полиномами в любой ограниченной замкнутой области комплексной области. В работе получены условия ядерности оператора монодромии, сопряженного к нему оператора и регуляризованного оператора монодромии.

**1. Функциональные пространства состояний**

Рассмотрим линейную периодическую систему дифференциальных уравнений с последствием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^0 d\eta(t, s) x(t + s), \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad (1.1)$$

где  $x: [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , матричная функция  $\eta$  периодична по первому аргументу, с периодом  $\omega$ ,  $0 < r \leq \omega$ ,  $\eta(\cdot, 0) = 0$ . Полагаем, что функция  $\eta$  измерима по Лебегу на множестве  $[0, \omega] \times [-r, 0]$ , при фиксированном  $t \in [0, \omega]$  функция  $\eta(t, \cdot)$  имеет ограниченную вариацию на  $[-r, 0]$  и  $\text{Var}_{[-r, 0]} \eta(t, \cdot)$ ,  $t \in [0, \omega]$ , является интегрируемой по Лебегу функцией на  $[0, \omega]$ .

При указанных выше условиях система дифференциальных уравнений (1.1) для начального момента  $t_0 = 0$  и произвольной начальной функции  $\varphi \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  имеет единственное решение  $x(\cdot, \varphi): [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющее начальному условию  $x(s, \varphi) = \varphi(s)$  при  $s \in [-r, 0]$ . Качественное поведение системы (1.1), следуя Н. Н. Красовскому, будем описывать в функциональном пространстве состояний  $\mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , выбирая в качестве элементов решения функции  $x_t(\vartheta, \varphi) = x(t + \vartheta, \varphi)$ ,  $\vartheta \in [-r, 0]$ ,  $t \geq 0$  [1, гл. 6, § 28].

Устойчивость решений рассматриваемой системы с последствием можно описывать в терминах спектра линейного вполне непрерывного оператора монодромии, действующего в пространстве  $\mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  и определяемого формулой  $U\varphi = x_\omega(\cdot, \varphi)$  [2]. Для асимптотической устойчивости движений необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа оператора монодромии по модулю были меньше единицы [2]. Обратные величины  $z_j = \rho_j^{-1}$  ненулевых собственных чисел  $\rho_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) оператора  $U$  имеют единственную предельную точку на бесконечности, поэтому существует целая функция  $D(z)$ , для которой числа  $z_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) и только они являются ее нулями. Представление целой функции  $D(z)$ ,  $z \in \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K}$  — множество комплексных чисел), зависит от скорости убывания собственных чисел оператора  $U$  и определяется формулой Вейерштрасса [3, гл. 9, § 2, формула (1)]. При известной функции  $D(z)$ ,  $z \in \mathbb{K}$ , ненулевые собственные числа оператора  $U$  находятся как обратные величины корней уравнения  $D(z) = 0$ . Последнее уравнение называется характеристическим.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований № 15 Президиума РАН “Математические методы в нелинейной механике”.

Методы нахождения характеристического уравнения разработаны только для отдельных классов периодических систем. При решении указанной задачи используются следующие подходы: метод решений Флоке [4]; метод преобразований Лапласа [5, гл. 6, § 6.8, следствие 6.1]; метод параметрических передаточных функций [6, гл. 7, § 5]; метод производящих функций [7, гл. 2, § 3, теорема 2.5]; метод краевых задач [8,9]; метод аппроксимации систем дифференциальных уравнений с последействием обыкновенными дифференциальными уравнениями [10–12] и метод конечномерных аппроксимаций оператора монодромии [13–15]. Последний подход в статьях [13, 14] разрабатывался для систем с сосредоточенными запаздываниями, а в [15] — для систем с распределенными запаздываниями. Настоящая статья продолжает исследования работы [15] и устанавливает, что при построении характеристического уравнения полезно заменять оператор монодромии на сопряженный или регуляризованный оператор монодромии.

Теория конечномерных аппроксимаций хорошо разработана для вполне непрерывных операторов в сепарабельных гильбертовых пространствах [16, часть 3, гл. 15, § 15.5]. Для систем дифференциальных уравнений с последействием сепарабельное гильбертово пространство ввел Н. Н. Красовский [1, гл. 6, § 27]. Оно строится как расширение пространства  $\mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ . Для элементов  $\varphi$  и  $\psi$  расширенного пространства  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  скалярное произведение определяется формулой [15]  $(\varphi, \psi) = \psi^\tau(0) \varphi(0) + \int_{-r}^0 \psi^\tau(s) \varphi(s) ds$ , где значок  $\tau$  используется для обозначения операции транспонирования.

Пространство  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  будем называть пространством состояний системы дифференциальных уравнений с последействием, если отображения  $\varphi \rightarrow x_t(\cdot, \varphi)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , допускают непрерывные продолжения с  $\mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  на  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ . Полученные элементы  $x_t(\cdot, \varphi) \in \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  будем называть элементами обобщенного решения системы (1.1).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + A_1(t)x([t-1]), \quad (1.2)$$

где  $x: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A$  и  $A_1$  — 1-периодические вещественные матричные функции, интегрируемые на  $[0, 1]$ ,  $[a]$  — целая часть числа  $a$ .

Для начальной функции  $\varphi \in \mathbb{C}([-1, 0], \mathbb{R}^n)$  находим на  $(0, 1)$  решение системы (1.2)

$$x(t, \varphi) = X(t) \left( \varphi(0) + \int_0^t X^{-1}(s) A_1(s) ds \varphi(-1) \right),$$

где  $X$  — фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $dx/dt = A(t)x$ . Полученное решение показывает, что пространство  $\mathbb{H}([-1, 0], \mathbb{R}^n)$  не является пространством состояний системы (1.2). Эта система принадлежит к классу систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами [17]. Последний, в свою очередь, включается в класс систем дифференциальных уравнений с последействием и с конечномерными операторами монодромии [18].

**Теорема 1.** Пусть матричная функция  $\int_s^t \eta(\xi, s - \xi) d\xi$  дифференцируема по  $s$ , а функция

$$P(t, s) \triangleq \frac{\partial}{\partial s} \int_s^t \eta(\xi, s - \xi) d\xi, \quad t \geq s \geq -r, \quad (1.3)$$

удовлетворяет условию  $\text{vrai} \sup_{s \in [-r, \cdot]} |P(\cdot, s)| \in L_\infty^{\text{loc}}(0, +\infty)$ . Тогда пространство  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  является пространством состояний системы (1.1). Здесь  $|C|$  обозначает евклидову норму матрицы  $C$  размерности  $n \times n$ .

Доказательство. Для  $\varphi \in \mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  решение системы (1.1) определяется формулой [19, гл. 6, § 6.3, теорема 6.3.2]

$$x(t, \varphi) = V(t, 0) \varphi(0) + \int_{-r}^{-0} d_s \int_0^t V(t, \xi) \eta(\xi, s - \xi) d\xi \varphi(s), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.4)$$

Здесь матричная функция  $V(\cdot, \cdot)$  при каждом фиксированном значении второго аргумента  $s \in [0, +\infty)$  локально абсолютно непрерывна по первому аргументу  $t$  на  $[s, +\infty)$ , при каждом фиксированном значении первого аргумента  $t \in (0, +\infty)$  имеет конечную вариацию по второму аргументу  $s$  на  $[0, t]$ . Она удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial V(t, s)}{\partial t} = \int_{-r}^0 d\eta(t, \tau) V(t + \tau, s), \quad 0 \leq s \leq t < \infty, \quad (1.5)$$

$$V(t, s) = I_n - \int_s^t V(t, \tau) \eta(\tau, s - \tau) d\tau, \quad 0 \leq s \leq t < \infty, \quad (1.6)$$

и начальным условиям:  $V(t, s) = 0$  при  $t \in [s - r, s)$ ,  $V(s, s) = I_n$ ,  $s \in \mathbb{R}^+$ . При каждом фиксированном значении  $\tau \in [0, +\infty)$ , с помощью формулы  $\eta(\tau, z) = \eta(\tau, -r)$ , определены значения функции  $\eta$  при  $z \in (-\infty, -r]$ . Для единичной матрицы размерности  $n \times n$  используется обозначение  $I_n$ .

Рассмотрим матричное уравнение Вольтерра второго рода

$$\Psi(t, s) = -P(t, s) + \int_s^t \Psi(t, \tau) P(\tau, s) d\tau, \quad t \geq s \geq 0. \quad (1.7)$$

Это уравнение имеет единственное решение, удовлетворяющее условию  $\text{vrai sup}_{s \in [0, \cdot]} |\Psi(\cdot, s)| \in \mathbb{L}_{\infty}^{\text{loc}}(0, +\infty)$  [20, гл. 5, § 6, теорема 6.2]. Для него справедливо тождество

$$\begin{aligned} I_n + \int_s^t \Psi(t, s_1) ds_1 &\equiv I_n + \int_s^t \eta(\xi, s - \xi) d\xi \\ &+ \int_s^t \int_{s_1}^t \Psi(t, \tau) \frac{\partial}{\partial s_1} \int_{s_1}^{\tau} \eta(\xi, s_1 - \xi) d\xi d\tau ds_1, \quad t \geq s \geq 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Преобразуем второй интеграл в правой части этого тождества

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{s_1}^t \Psi(t, \tau) \frac{\partial}{\partial s_1} \int_{s_1}^{\tau} \eta(\xi, s_1 - \xi) d\xi d\tau ds_1 &\equiv - \int_s^t \Psi(t, \tau) \int_s^{\tau} \eta(\xi, s - \xi) d\xi d\tau \\ &\equiv \int_s^t \int_s^{\tau} \Psi(t, s_1) ds_1 \eta(\tau, s - \tau) d\tau, \quad t \geq s \geq 0. \end{aligned}$$

Учитывая полученный результат, преобразуем (1.8) к виду

$$I_n + \int_s^t \Psi(t, s_1) ds_1 \equiv I_n + \int_s^t \left( I_n + \int_s^{\tau} \Psi(t, s_1) ds_1 \right) \eta(\tau, s - \tau) d\tau, \quad t \geq s \geq 0.$$

В результате находим связь между решениями уравнений (1.6) и (1.7):

$$V(t, s) \equiv I_n + \int_s^t \Psi(t, s_1) ds_1, \quad t \geq s \geq 0.$$

Следовательно, получаем  $\text{vrai sup}_{s \in [0, \cdot]} |\partial V(\cdot, s)/\partial s| \in \mathbb{L}_\infty^{\text{loc}}(0, +\infty)$ .

В формуле (1.4) преобразуем интеграл

$$\int_0^t V(t, \xi) \eta(\xi, s - \xi) d\xi = \int_0^t \eta(\xi, s - \xi) d\xi - \int_0^t \frac{\partial V(t, \xi)}{\partial \xi} \int_0^\xi \eta(\tau, s - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^+, s \in [-r, 0].$$

Полученное представление интеграла показывает, что можно ввести матричную функцию

$$K(t, s) \triangleq \frac{\partial}{\partial s} \int_0^t V(t, \xi) \eta(\xi, s - \xi) d\xi, \quad t \in \mathbb{R}^+, s \in [-r, 0]. \quad (1.9)$$

Учитывая (1.3), представление функции  $K$  преобразуем к виду

$$K(t, s) = \tilde{P}(t, s) - \int_0^t \frac{\partial V(t, \xi)}{\partial \xi} \tilde{P}(\xi, s) d\xi, \quad t \in \mathbb{R}^+, s \in [-r, 0], \quad (1.10)$$

где  $\tilde{P}(t, s) = P(t, s) - P(0, s)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $s \in [-r, 0]$ . Отсюда следует, что  $\text{vrai sup}_{s \in [-r, 0]} |K(\cdot, s)| \in \mathbb{L}_\infty^{\text{loc}}(0, +\infty)$ .

В результате формула (1.4) принимает вид

$$x(t, \varphi) = V(t, 0) \varphi(0) + \int_{-r}^0 K(t, s) \varphi(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.11)$$

При каждом фиксированном  $t \in \mathbb{R}^+$  полученное представление решений системы (1.1) позволяет продолжить по непрерывности отображение  $\varphi \rightarrow x(t, \varphi)$  с пространства  $\mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  на  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  и определить функцию  $x(t, \varphi)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi \in \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , с помощью формулы (1.11). Функциональные элементы  $x_t(\cdot, \varphi)$ ,  $\varphi \in \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  принадлежат пространству  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ . Следовательно, построенное решение является обобщенным.  $\square$

Для системы (1.2) находим

$$\eta(\xi, s - \xi) = - \begin{cases} A(\xi), & [\xi - 1] < s, \\ A(\xi) + A_1(\xi), & s \leq [\xi - 1] \end{cases}$$

при  $\xi \in (s, t)$ ,  $-1 \leq s \leq t$ . Для  $t \in (1, 2)$  имеем

$$\eta(\xi, s - \xi) = - \begin{cases} A(\xi), & \xi \in (s, 1), \\ A(\xi) + A_1(\xi), & \xi \in [1, t), \end{cases}$$

если  $s \in (-1, 0]$ , и  $\eta(\xi, s - \xi) = -A(\xi)$ ,  $\xi \in (s, t)$ , если  $s \in (0, 1)$ . Тогда

$$\int_s^t \eta(\xi, s - \xi) d\xi = - \int_s^t A(\xi) d\xi - \int_1^t A_1(\xi) d\xi, \quad s \in (-1, 0], \quad \int_s^t \eta(\xi, s - \xi) d\xi = - \int_s^t A(\xi) d\xi, \quad s \in (0, 1).$$

Если  $\int_1^t A_1(\xi) d\xi \neq 0$  при некотором значении  $t \in (1, 2)$ , то непрерывная зависимость функции  $\int_s^t \eta(\xi, s - \xi) d\xi$  нарушается при  $s = 0$ . Здесь не удовлетворяются условия теоремы 1 и система (1.2) не имеет рассматриваемых обобщенных решений в пространстве  $\mathbb{H}([-1, 0], \mathbb{R}^n)$ .

Рассмотрим непрерывный оператор  $S: \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{L}_2([0, T], \mathbb{R}^n)$  ( $T$  — произвольное положительное число), определяемый формулой  $(S\varphi)(t) = \int_{-r}^0 K(t, s)\varphi(s) ds$ ,  $t \in [0, T]$ . При каждом  $\tau \in [-r, 0)$  отображение  $t \rightarrow \int_{\tau}^0 K(t, s) ds$  непрерывно на  $[0, T]$ , т.к.  $\int_{\tau}^0 K(t, s) ds = \int_0^t V(t, \xi) (\eta(\xi, -\xi) - \eta(\xi, \tau - \xi)) d\xi$ ,  $t \in [0, T]$ . Поэтому область значений оператора  $S$  принадлежит пространству  $\mathbb{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$  [21]. Следовательно, определяемая формулой (1.11) функция  $x(t, \varphi)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi \in \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , непрерывно зависит от  $t$ . В случае ее локальной абсолютной непрерывности на  $\mathbb{R}^+$  она определяет обычное решение.

Из (1.3) следует, что функция  $P$  удовлетворяет условиям:  $P(t, s) = P(s+r, s)$  при  $t > s+r$ ,  $P(t+\omega, s+\omega) = P(t, s)$ ,  $t \geq s \geq -r$ . Поэтому можно между функциями  $P$  и  $\eta$  установить взаимно однозначное соответствие, при котором  $\eta(t, z) = \left( \partial \int_s^t P(t, s_1) ds_1 / \partial t \right)_{s=t+z}$ ,  $z \in [-r, 0)$ ,  $t \in (s, s+r)$ .

Конкретизируем условия теоремы 1 для отдельных классов систем с последствием (1.1).

Для стационарных систем  $\eta$  явно не зависит от  $t$ . Используя (1.3), находим функцию  $P(t, s) = -\eta(s-t)$ ,  $-r \leq s \leq t \leq s+r$ . Условия теоремы 1 выполнены. Следовательно,  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  является пространством состояний стационарной системы.

Рассмотрим абсолютно непрерывную меру Стильеса

$$\eta(t, s) = -A(t) - \int_s^0 B(t, s_1) ds_1, \quad s \in [-r, 0], \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.12)$$

где  $A$  и  $B$  —  $\omega$ -периодические матричные функции аргумента  $t$ , элементы матрицы  $A$  принадлежат пространству  $\mathbb{L}_{\infty}([0, \omega], \mathbb{R}^n)$ ,  $\text{vrai sup}_{s \in [-r, 0]} |B(\cdot, s)| \in \mathbb{L}_1[0, \omega]$ . Используя (1.3), находим

$$P(t, s) = A(s) + \int_s^t B(\xi, s - \xi) d\xi, \quad -r \leq s \leq t \leq s+r.$$

Условия теоремы 1 выполнены. Используя (1.9), находим

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \int_0^t V(t, \xi) B(\xi, s - \xi) d\xi, \quad 0 < t \leq s+r, \\ K(t, s) &= \int_0^{s+r} V(t, \xi) B(\xi, s - \xi) d\xi, \quad t > s+r, \quad s \in [-r, 0]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В данном случае функция  $K$  абсолютно непрерывна по первому аргументу и обобщенные решения системы (1.1) являются обычными решениями.

Рассмотрим дискретную меру Стильеса

$$\eta(t, s) = -A(t) - \sum_{k=1}^m A_k(t) \chi_{(-\infty, -\tau_k(t))}(s), \quad (1.14)$$

где  $\chi_E(\cdot)$  — индикатор множества  $E$ ;  $A$ ,  $A_k$ ,  $\tau_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) —  $\omega$ -периодические функции; элементы матрицы  $A$  принадлежат пространству  $\mathbb{L}_1[0, \omega]$ , элементы матриц  $A_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) принадлежат пространству  $\mathbb{L}_\infty[0, \omega]$ ;  $0 < \tau_k(t) \leq \omega$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $t \in [0, \omega]$ ;  $\tau_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) — кусочно-непрерывные функции с конечным числом точек разрыва первого рода на отрезке  $[0, \omega]$ . Множество точек разрыва дополним точками  $0, \omega$ . На числовой оси упорядочиваем точки полученного множества:  $0 = \alpha_{k0} < \alpha_{k1} < \dots < \alpha_{k(m_k-1)} < \alpha_{km_k} = \omega$ ,  $k = \overline{1, m}$ . Введем функции  $h_k(t) = t - \tau_k(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $k = \overline{1, m}$ . Предположим, что на каждом интервале  $(\alpha_{k(j-1)}, \alpha_{kj})$ ,  $j = \overline{1, m_k}$ , функция  $h_k$  непрерывно дифференцируема и ее производная не обращается в нуль, а также существуют односторонние конечные ненулевые производные  $h'_k(\alpha_{k(j-1)} + 0)$ ,  $h'_k(\alpha_{kj} - 0)$ ,  $j = \overline{1, m_k}$ ,  $k = \overline{1, m}$ .

Используя (1.3), найдем матричную функцию  $\tilde{P}$  при  $s \in [-r, t]$ ,  $t \in [0, \omega]$ . Имеем

$$\int_0^t \eta(\xi, s - \xi) d\xi = - \int_0^t A(\xi) d\xi - \sum_{k=1}^m \int_0^t A_k(\xi) \chi_{(-\infty, -\tau_k(\xi))}(s - \xi) d\xi.$$

Для каждого  $k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) преобразуем интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^t A_k(\xi) \chi_{(-\infty, -\tau_k(\xi))}(s - \xi) d\xi &= \int_0^t A_k(\xi) \chi_{(-\infty, h_k(\xi))}(s) d\xi \\ &= \sum_{j=1}^{m_k} \int_{\alpha_{k(j-1)}}^{\alpha_{kj}} \chi_{(0, t)}(\xi) \chi_{(-\infty, h_k(\xi))}(s) A_k(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Числа  $h_k(\alpha_{kj})$ ,  $j = \overline{1, m_k}$ , разбивают отрезок  $[-r, \omega]$  на конечное число отрезков, для которых введем обозначения  $[\beta_{k(i-1)}, \beta_{ki}]$ ,  $i = \overline{1, n_k}$ .

Введем множества:

$$\begin{aligned} J_k^+ &= \left\{ j: h'_k(\xi) > 0, \xi \in (\alpha_{k(j-i)}, \alpha_{kj}), j = \overline{1, m_k} \right\}, \\ J_k^- &= \left\{ j: h'_k(\xi) < 0, \xi \in (\alpha_{k(j-i)}, \alpha_{kj}), j = \overline{1, m_k} \right\}, \\ J_{ki}^{+-} &= \left\{ j: h_k(\alpha_{kj} - 0) \leq \beta_{k(i-1)}, j \in J_k^+ \right\}, \\ J_{ki}^{++} &= \left\{ j: \beta_{ki} \leq h_k(\alpha_{k(j-1)} + 0), j \in J_k^+ \right\}, \\ J_{ki}^{--} &= \left\{ j: h_k(\alpha_{k(j-1)} + 0) \leq \beta_{k(i-1)}, j \in J_k^- \right\}, \\ J_{ki}^{-+} &= \left\{ j: \beta_{ki} \leq h_k(\alpha_{kj} - 0), j \in J_k^- \right\}, \\ J_{ki}^{+0} &= \left\{ j: (\beta_{k(i-1)}, \beta_{ki}) \subseteq (h_k(\alpha_{k(j-1)} + 0), h_k(\alpha_{kj} - 0)), j \in J_k^+ \right\}, \\ J_{ki}^{-0} &= \left\{ j: (\beta_{k(i-1)}, \beta_{ki}) \subseteq (h_k(\alpha_{kj} - 0), h_k(\alpha_{k(j-1)} + 0)), j \in J_k^- \right\}. \end{aligned}$$

Пусть  $s$  принадлежит некоторому интервалу  $(\beta_{k(i-1)}, \beta_{ki})$ ,  $i = \overline{1, n_k}$ . Продолжим преобразование интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^t A_k(\xi) \chi_{(-\infty, h_k(\xi))}(s) d\xi &= \sum_{j \in J_{ki}^{++}} \int_{\alpha_{k(j-1)}}^{\alpha_{kj}} \chi_{(0, t)}(\xi) A_k(\xi) d\xi + \sum_{j \in J_{ki}^{-+}} \int_{\alpha_{k(j-1)}}^{\alpha_{kj}} \chi_{(0, t)}(\xi) \\ &\times A_k(\xi) d\xi + \sum_{j \in J_{ki}^{+0}} \int_{h_k^{-1}(s)}^{\alpha_{kj}} \chi_{(0, t)}(\xi) A_k(\xi) d\xi + \sum_{j \in J_{ki}^{-0}} \int_{\alpha_{kj}}^{h_k^{-1}(s)} \chi_{(0, t)}(\xi) A_k(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.16)$$

На каждом интервале  $(\beta_{k(i-1)}, \beta_{ki})$ ,  $i = \overline{1, n_k}$ , функция  $\int_0^t A_k(\xi) \chi_{(-\infty, -\tau_k(\xi))}(s - \xi) d\xi$  дифференцируема по  $s$ , и ее производная на этом интервале ограничена в существенном. Непосредственно проверяется, что эта функция непрерывна на  $[0, t]$ . Тогда матричная функция  $\tilde{P}$  ограничена в существенном на множестве  $\{(t, s) : -r \leq s \leq t, t \in [0, \omega]\}$ .

Так как  $P(t, s) = \tilde{P}(t, s)$  при  $0 \leq s \leq t \leq \omega$  и  $P(t, s) = \tilde{P}(t, s) + P(\omega, s + \omega)$  при  $-r \leq s < 0$ ,  $0 \leq t \leq \omega$ , то функция  $P$  удовлетворяет условиям теоремы 1.

При сделанных предположениях рассматриваемая дискретная мера порождает систему дифференциальных уравнений с последствием, для которой  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  является пространством состояний.

Если мера Стильеса представима в виде суммы абсолютно непрерывной и дискретной мер, удовлетворяющих описанным выше условиям, то для соответствующей системы (1.1)  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  является пространством состояний.

## 2. Условия ядерности оператора монодромии и сопряженного к нему оператора

Оператор монодромии в сепарабельном гильбертовом пространстве  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  определяется формулой

$$(U\varphi)(\vartheta) = V(\vartheta, 0)\varphi(0) + \int_{-r}^0 K(\omega + \vartheta, s)\varphi(s) ds, \quad \vartheta \in [-r, 0]. \tag{2.1}$$

**Утверждение 1.** *В случае определяемой формулой (1.12) абсолютно непрерывной меры оператор монодромии является ядерным, если существует ограниченная в существенном производная  $\partial B(t, s)/\partial s$ ,  $s \in [-r, 0]$ ,  $t \in [0, \omega]$ .*

**Доказательство.** Из представления (1.13) функции  $K$  следует, что существует ограниченная в существенном производная  $\partial K(t, s)/\partial s$ ,  $s \in [-r, 0]$ ,  $t \in [0, \omega]$ . Используя достаточное условие ядерности интегрального оператора [22, гл. 3, § 10, п. 4, предложение 3], показываем ядерность оператора  $U_1: \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , определяемого формулой

$$(U_1\varphi)(\vartheta) = \int_{-r}^0 K(\omega + \vartheta, s)\varphi(s) ds, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Тогда из (2.1) следует ядерность оператора монодромии. □

Для ядерного оператора целую функцию  $D(z)$ , задающую характеристическое уравнение, можно определить формулой  $D(z) = \prod_{j=1}^{+\infty} (1 - z\rho_j)$ , где  $\rho_j$ ,  $j = \overline{1, +\infty}$ , — собственные числа оператора монодромии. Рассмотрим ортонормированный базис  $\|\varphi_k\|_1^{+\infty}$  пространства  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  и полиномы  $D_m(z) = \det \|\delta_{jk} - z(U\varphi_j, \varphi_k)\|_1^m$ ,  $m \geq 1$ , где  $\delta_{jk}$  ( $j, k = \overline{1, m}$ ) — символы Кронекера. Согласно [22, гл. 4, § 1, п. 3, предложение 2], в произвольной замкнутой ограниченной области комплексной плоскости функция  $D(z)$  может быть найдена как равномерный предел полиномов

$$D(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} D_m(z).$$

Таким образом, мы получаем конструктивную процедуру построения характеристического уравнения оператора монодромии. При реализации этой процедуры ортонормированный базис пространства  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  можно заменить на базис замыкания области значений оператора  $U$ .

Учитывая связь спектров оператора  $U$  и его сопряженного  $U^*$ , можно заменить задачу нахождения характеристического уравнения оператора  $U$  на аналогичную задачу для оператора  $U^*$ . Используя (2.1), находим представление сопряженного оператора

$$(U^*\varphi)(0) = V^\tau(0, 0)\varphi(0) + \int_{-r}^0 V^\tau(s, 0)\varphi(s) ds,$$

$$(U^*\varphi)(\vartheta) = K^\tau(\omega, \vartheta)\varphi(0) + \int_{-r}^0 K^\tau(\omega + s, \vartheta)\varphi(s) ds, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Условия ядерности оператора  $U^*$  и  $U_1^* : \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , определяемого формулой

$$(U_1^*\varphi)(\vartheta) = \int_{-r}^0 K^\tau(\omega + s, \vartheta)\varphi(s) ds, \quad \vartheta \in [-r, 0],$$

совпадают.

**Утверждение 2.** В случае абсолютно непрерывной меры, определяемой формулой (1.12), сопряженный оператор  $U^*$  является ядерным.

**Доказательство.** Из представления (1.13) функции  $K$  следует, что существует ограниченная в существенном производная  $\partial K(t, s)/\partial t$ ,  $s \in [-r, 0]$ ,  $t \in [0, \omega]$ . Используя достаточное условие ядерности интегрального оператора [22, гл. 3, § 10, п. 4, предложение 3], получим, что оператор  $U_1^*$  является ядерным.  $\square$

**Утверждение 3.** В случае дискретной меры, определяемой формулой (1.14), сопряженный оператор  $U^*$  является ядерным, если  $\omega \geq 2r$ .

**Доказательство.** Используя (1.10), находим

$$K(\omega + \vartheta, s) = \tilde{P}(s + r, s) - \int_0^{\omega + \vartheta} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, \xi)}{\partial \xi} \tilde{P}(\xi, s) d\xi, \quad \vartheta, s \in [-r, 0].$$

Пусть  $s$  принадлежит некоторому интервалу  $(\beta_{k_{(i-1)}}, \beta_{k_i})$ ,  $i = \overline{1, n_k}$ . Используя (1.16), находим

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^\xi A_k(s_1) \chi_{(-\infty, -\tau_k(s_1))}(s - s_1) ds_1 = -N_k \chi_{(0, \xi)}(h_k^{-1}(s)) A_k(h_k^{-1}(s)) \dot{h}_k^{-1}(s) (N_k - \text{целое число}).$$

Учитывая определение функции  $\tilde{P}$ , имеем  $\tilde{P}(\xi, s) = \sum_{k=1}^m N_k \chi_{(0, \xi)}(h_k^{-1}(s)) A_k(h_k^{-1}(s)) \dot{h}_k^{-1}(s)$ ,  $\xi \in [0, \omega + \vartheta]$ , и

$$\int_0^{\omega + \vartheta} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, \xi)}{\partial \xi} \tilde{P}(\xi, s) d\xi = \sum_{k=1}^m N_k \chi_{(0, \omega + \vartheta)}(h_k^{-1}(s)) \int_{h_k^{-1}(s)}^{\omega + \vartheta} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, \xi)}{\partial \xi} d\xi A_k(h_k^{-1}(s)) \dot{h}_k^{-1}(s)$$

$$= \sum_{k=1}^m N_k \chi_{(0, \omega)}(h_k^{-1}(s)) \left( I_n - V(\omega + \vartheta, h_k^{-1}(s)) \right) A_k(h_k^{-1}(s)) \dot{h}_k^{-1}(s), \quad \vartheta, s \in [-r, 0].$$

Следовательно, функция  $K(\omega + \vartheta, s)$ ,  $\vartheta, s \in [-r, 0]$ , допускает производную по  $\vartheta$ , ограниченную в существенном на множестве  $[-r, 0] \times [-r, 0]$ . Тогда оператор  $U_1^*$  является ядерным.  $\square$

Доказанные утверждения показывают, что оператор  $U^*$  является ядерным при меньших ограничениях на функцию  $\eta$ , чем оператор  $U$ . Учитывая связь их собственных значений, задачу нахождения характеристического уравнения для оператора  $U$  можно заменять аналогичной задачей для оператора  $U^*$ .

### 3. Регуляризованный оператор монодромии

Рассмотрим оператор  $\Omega: \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , определяемый формулой

$$(\Omega\psi)(\vartheta) = \psi(0) - \int_{\vartheta}^0 \psi(z) dz, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Область значений этого оператора совпадает с пространством  $\mathbb{W}_2^1([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , которое является также областью определения оператора  $\Omega^{-1}: \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , где  $(\Omega^{-1}\varphi)(\vartheta) = d\varphi(\vartheta)/d\vartheta$ ,  $\vartheta \in [-r, 0)$ ,  $(\Omega^{-1}\varphi)(0) = \varphi(0)$ .

**Теорема 2.** *Регуляризованный оператор  $\tilde{U} = \Omega^{-1}U\Omega$  является вполне непрерывным оператором в пространстве  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ .*

**Доказательство.** Находим представление оператора  $U\Omega$  в  $\mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ . Для произвольной функции  $\psi \in \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^{-0} dt \left( \int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta, s) \eta(s, t-s) ds \left( \psi(0) - \int_t^0 \psi(z) dz \right) \right) \\ = & \int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta, s) \eta(s, -s-0) ds \psi(0) - \int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta, s) \eta(s, -r-s) ds \left( \psi(0) - \int_{-r}^0 \psi(z) dz \right) \\ & - \int_{-r}^0 \int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta, s) \eta(s, t-s) ds \psi(t) dt \\ = & \int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta, s) \left( \eta(s, -s-0) - \eta(s, -r) \right) ds \psi(0) \\ & + \int_{-r}^0 \int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta, s) \left( \eta(s, -r) - \eta(s, t-s) \right) ds \psi(t) dt, \quad \vartheta \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Учитывая этот результат, находим

$$\begin{aligned} (U\Omega\psi)(\vartheta) = & \left( V(\omega+\vartheta, 0) + \int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta, s) \left( \eta(s, -s-0) - \eta(s, -r) \right) ds \right) \psi(0) \\ & + \int_{-r}^0 \int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta, s) \left( \eta(s, -r) - \eta(s, t-s) \right) ds \psi(t) dt, \quad \vartheta \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Последняя формула позволяет оператор  $U\Omega$  продолжить по непрерывности на пространство  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ . Для произвольной функции  $\psi \in \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  вычислим значение  $\Omega^{-1}U\Omega\psi$ . Получим

$$\begin{aligned} (\Omega^{-1}U\Omega\psi)(0) = & \left( V(\omega, 0) + \int_0^{\omega} V(\omega, s) (\eta(s, -s-0) - \eta(s, -r)) ds \right) \psi(0) \\ & + \int_{-r}^0 \int_0^{\omega} V(\omega, s) (\eta(s, -r) - \eta(s, t-s)) ds \psi(t) dt, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
(\Omega^{-1}U\Omega\psi)(\vartheta) &= \left( \frac{\partial V(\omega + \vartheta, 0)}{\partial \vartheta} + \eta(\omega + \vartheta, -\omega - \vartheta - 0) - \eta(\omega + \vartheta, -r) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\omega + \vartheta} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, s)}{\partial \vartheta} (\eta(s, -s - 0) - \eta(s, -r)) ds \right) \psi(0) \\
&\quad + \int_{-r}^0 \left( \eta(\omega + \vartheta, -r) - \eta(\omega + \vartheta, t - \omega - \vartheta) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\omega + \vartheta} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, s)}{\partial \vartheta} (\eta(s, -r) - \eta(s, t - s)) ds \right) \psi(t) dt, \quad \vartheta \in [-r, 0]. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Определяемый формулами (3.1), (3.2) оператор  $\Omega^{-1}U\Omega$  действует в пространстве  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  и является вполне непрерывным.  $\square$

Условия ядерности оператора  $\tilde{U}$  и  $\tilde{U}_1: \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , определяемого формулой

$$\begin{aligned}
(\tilde{U}_1\psi)(\vartheta) &= \int_{-r}^0 \left( \eta(\omega + \vartheta, -r) - \eta(\omega + \vartheta, t - \omega - \vartheta) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\omega + \vartheta} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, s)}{\partial \vartheta} (\eta(s, -r) - \eta(s, t - s)) ds \right) \psi(t) dt, \quad \vartheta \in [-r, 0],
\end{aligned}$$

совпадают. При  $\omega \geq 2r$  последний оператор определяется формулой

$$(\tilde{U}_1\psi)(\vartheta) = \int_{-r}^0 \int_0^{\omega + \vartheta} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, s)}{\partial \vartheta} (\eta(s, -r) - \eta(s, t - s)) ds \psi(t) dt, \quad \vartheta \in [-r, 0]. \tag{3.3}$$

Для системы (1.2) оператор монодромии в пространстве  $\mathbb{C}([-1, 0], \mathbb{R}^n)$  определяется формулой

$$(U\varphi)(\vartheta) = X(1 + \vartheta) \left( \varphi(0) + \int_0^{1 + \vartheta} X^{-1}(s) A_1(s) ds \varphi(-1) \right), \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Он не допускает непрерывное расширение на пространство  $\mathbb{H}([-1, 0], \mathbb{R}^n)$ . Построим регуляризованный оператор монодромии

$$\begin{aligned}
(\tilde{U}\psi)(0) &= X(1) \left( I_n - \int_0^1 X^{-1}(s) A_1(s) ds \right) \psi(0) + X(1) \int_0^1 X^{-1}(s) A_1(s) ds \int_{-1}^0 \psi(z) dz, \\
(\tilde{U}\psi)(\vartheta) &= \left( A(\vartheta) X(1 + \vartheta) \left( I_n - \int_0^{1 + \vartheta} X^{-1}(s) A_1(s) ds \right) - A_1(\vartheta) \right) \psi(0) \\
&\quad + \left( A(\vartheta) X(1 + \vartheta) \int_0^{1 + \vartheta} X^{-1}(s) A_1(s) ds + A_1(\vartheta) \right) \int_{-1}^0 \psi(z) dz, \quad \vartheta \in [-1, 0].
\end{aligned}$$

Последний оператор действует в пространстве  $\mathbb{H}([-1, 0], \mathbb{R}^n)$  и является вполне непрерывным.

**Утверждение 4.** В случае абсолютно непрерывной меры, определяемой формулой (1.12), регуляризованный оператор монодромии является ядерным.

*Доказательство.* Обозначим через  $\tilde{K}_1(\vartheta, t)$ ,  $\vartheta, t \in [-r, 0]$ , ядро интегрального оператора  $\tilde{U}_1$ . Для доказательства утверждения достаточно показать, что существует производная  $\partial \tilde{K}_1(\vartheta, t)/\partial t$ ,  $\vartheta, t \in [-r, 0]$ , ограниченная в существенном в указанной области. В случае  $\omega \geq 2r$  ядро интегрального оператора  $\tilde{U}_1$  определяется формулой

$$\tilde{K}_1(\vartheta, t) \triangleq \int_0^{t+r} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, 0)}{\partial \vartheta} (\eta(s, -r) - \eta(s, t-s)) ds, \quad \vartheta, t \in [-r, 0].$$

Для абсолютно непрерывной меры преобразуем это представление ядра

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1(\vartheta, t) &= - \int_0^{t+r} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, s)}{\partial \vartheta} \int_{-r}^{t-s} B(s, s_1) ds_1 ds \\ &= - \int_{-r}^t \int_0^{t-s_1} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, s)}{\partial \vartheta} B(s, s_1) ds ds_1, \quad \vartheta, t \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Следовательно, существует производная  $\partial \tilde{K}_1/\partial t$ , ограниченная в существенном в замкнутой области  $[-r, 0] \times [-r, 0]$ .

В случае  $r \leq \omega < 2r$ , ядро интегрального оператора  $\tilde{U}_1$  определяется формулами

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1(\vartheta, t) &\triangleq \tilde{K}_{11}(\vartheta, t) + \tilde{K}_{12}(\vartheta, t), \\ \tilde{K}_{11}(\vartheta, t) &\triangleq \eta(\omega + \vartheta, -r) - \eta(\omega + \vartheta, t - \omega - \vartheta), \\ \tilde{K}_{12}(\vartheta, t) &\triangleq \int_0^{\omega+\vartheta} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, s)}{\partial \vartheta} (\eta(s, -r) - \eta(s, t-s)) ds, \quad \vartheta, t \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Для абсолютно непрерывной меры преобразуем представления функций  $\tilde{K}_{11}$  и  $\tilde{K}_{12}$ . Находим  $\tilde{K}_{11}(\vartheta, t) = 0$  при  $t \in [-r, 0]$ ,  $\vartheta \in [-\omega + r, 0]$  и  $t \in [-r, \omega - r + \vartheta]$ ,  $\vartheta \in [-r, -\omega + r]$ ;  $\tilde{K}_{11}(\vartheta, t) = \int_0^{t-\omega-\vartheta} B(\omega + \vartheta, s_1) ds_1$  при  $t \in (\omega - r + \vartheta, 0]$ ,  $\vartheta \in [-r, -\omega + r]$ ; а также

$$\tilde{K}_{12}(\vartheta, t) = - \int_{-r}^t \int_0^{t-s_1} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, s)}{\partial \vartheta} B(s, s_1) ds ds_1$$

при  $t \in [-r, 0]$ ,  $\vartheta \in [-\omega + r, 0]$  и  $t \in [-r, \omega - r + \vartheta]$ ,  $\vartheta \in [-r, -\omega + r]$ ;

$$\tilde{K}_{12}(\vartheta, t) = - \int_{-r}^{t-\omega-\vartheta} \int_0^{\omega+\vartheta} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, s)}{\partial \vartheta} B(s, s_1) ds ds_1 - \int_{t-\omega-\vartheta}^t \int_0^{t-s_1} \frac{\partial V(\omega + \vartheta, s)}{\partial \vartheta} B(s, s_1) ds ds_1$$

при  $t \in (\omega - r + \vartheta, 0]$ ,  $\vartheta \in [-r, -\omega + r]$ . Полученные формулы показывают, что существуют производные  $\partial \tilde{K}_{11}/\partial t$  и  $\partial \tilde{K}_{12}/\partial t$ , ограниченные в существенном в замкнутой области  $[-r, 0] \times [-r, 0]$ .  $\square$

**Утверждение 5.** В случае дискретной меры, определяемой формулой (1.14), регуляризованный оператор является ядерным, если  $\omega \geq 2r$ .

**Доказательство.** Используя (1.5) и (1.14), доказываем существование ограниченной в существенном производной  $\partial^2 V(\omega + \vartheta, s)/\partial \vartheta \partial s$ ,  $\vartheta, s \in [-r, 0]$ . Тогда справедливость утверждения следует из (3.3).  $\square$

Переход от оператора монодромии к регуляризованному оператору монодромии позволяет, без дополнительных ограничений на меру Стильеса  $\eta$ , изучать последний оператор в пространстве  $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ . Доказанные утверждения показывают, что регуляризованный оператор является ядерным при меньших ограничениях на  $\eta$ . Из определения оператора  $\tilde{U}$  следует, что собственные значения операторов  $U$  и  $\tilde{U}$  совпадают. Поэтому задачу построения характеристического уравнения для  $U$  можно заменить на аналогичную задачу для оператора  $\tilde{U}$ .

Поступила 3.03.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.
3. **Привалов И.И.** Введение в теорию функций комплексных переменных. М.: Физматгиз, 1960.
4. **Зверкин А.М.** К теории дифференциально-разностных уравнений с запаздываниями соизмеримыми с периодом коэффициентов // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 9. С. 1481–1492.
5. **Беллман Р., Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
6. **Розенвассер Е.Н.** Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления. М.: Наука, 1977.
7. **Шильман С.В.** Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1973.
8. **Гасилов Г.Л.** О характеристическом уравнении системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием // Известия вузов. Математика. 1972. № 4. С. 60–66.
9. **Долгий Ю.Ф.** Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург. УрГУ, 1986.
10. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
11. **Куржанский А.Б.** К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2094–2107.
12. **Долгий Ю.Ф., Сажина С.Д.** Оценка экспоненциальной устойчивости систем с запаздыванием методом аппроксимирующих систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 12. С. 2046–2052.
13. **Долгий Ю.Ф.** Представление оператора монодромии в виде суммы конечномерного и вольтеррова операторов // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 2. С. 138–141.
14. **Долгий Ю.Ф.** Конечномерные аппроксимации оператора монодромии для периодических систем дифференциальных уравнений с запаздываниями // Функционально-дифференциальные уравнения. Вестник ПГТУ. 2002. С. 118–130.
15. **Долгий Ю.Ф.** Характеристическое уравнение в задаче устойчивости периодических систем с последействием // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10 (Математика и механика. Вып. 1). С. 34–43.
16. **Пич А.** Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
17. **Сооке К.Л., Виенер Ж.** Retarded differential equations with piecewise constant delays // J. Math. Anal. and Appl. 1984. V. 99. P. 265–297.
18. **Долгий Ю.Ф., Тарасян В.С.** Условия конечномерности оператора монодромии для периодических систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 2003. № 4. С. 27–39.
19. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
20. **Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др.** Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
21. **Радон И.** О линейных функциональных преобразованиях и функциональных уравнениях // Успехи мат. наук. 1936. Т. 1. С. 200–227.
22. **Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

УДК 517.9

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ<sup>1</sup>

А. М. Ильин, М. А. Меленцов

Для одночастотной системы дифференциальных уравнений с малым возмущением исследуется возможность построения и обоснования асимптотического разложения решения при больших временах. При дополнительных ограничениях доказывается, что асимптотическое решение, построенное по известному методу разделения переменных, приближает истинное решение на отрезке времени  $[0, \varepsilon^{-k}]$  с точностью до любой фиксированной степени малого параметра. Другое построение и обоснование асимптотики проводится с помощью двухмасштабного разложения на фазовой плоскости. Для классического уравнения Ван-дер-Поля проведены расчеты, показывающие неприменимость обычного метода двух масштабов на временах порядка  $t^{-2}$  и дающие хорошее приближение на этих временах по рассмотренному здесь методу.

### Введение

В работе изучается асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым возмущением:

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon F(I, \varphi, \varepsilon) \\ \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon G(I, \varphi, \varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1, \end{cases} \quad (0.1)$$

где  $F, G$  — бесконечно дифференцируемые функции, определенные для всех  $I$  и  $\varphi$ , периодические по  $\varphi$  с постоянным периодом  $\Phi$ , а  $\omega(I)$  — бесконечно дифференцируемая положительная функция. В частности, к системе данного вида с помощью замены переменных сводится дифференциальное уравнение

$$u'' + \omega^2 u = \varepsilon f(u, u'). \quad (0.2)$$

Основной проблемой является построение асимптотического решения данной системы при больших временах. К уравнению (0.2) для нахождения асимптотического решения при больших временах может быть применен метод двух масштабов [2]. Асимптотика, получаемая этим методом, обоснована на временном интервале  $[0, l\varepsilon^{-1}]$ . Ряд, построенный таким методом, не является асимптотическим разложением решения для больших значений времени. В §3 для уравнения Ван-дер-Поля  $u'' + \omega^2 u = \varepsilon(1 - u^2)u'$  выписана асимптотика решения, полученная по методу двух масштабов. Из явного вида данного ряда видно, что существует  $L > 0$  такое, что ряд уже не имеет асимптотического характера при временах больших, чем  $L\varepsilon^{-2}$ . В данной работе рассмотрены два метода, которые для любого  $k \in \mathbb{N}$  дают приближение решения системы (0.1) с точностью до любой степени  $\varepsilon$  при  $t < \varepsilon^{-k}$ .

В §1 рассматривается метод разделения переменных, который дает формальную асимптотику решения с точностью до любой степени  $\varepsilon$ . Этот метод хорошо известен (см., например, [1, §5]). Тем не менее вопрос, какова длина временного интервала, на котором справедливо данное асимптотическое разложение, до сих пор не был исследован.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-01008) и гранта Н.Ш. 1446.2003.1.

В §2 рассматривается метод двух масштабов в задаче о возмущении одночастотного колебания [3], где равномерная асимптотика была построена на фазовой плоскости. При переходе к решению системы (0.1) для любого  $k \in \mathbb{N}$  равномерная асимптотика получается при  $t < \varepsilon^{-k}$ .

## 1. Обоснование асимптотики, полученной методом разделения переменных

В данном параграфе показано, что при некоторых достаточных условиях приближенное решение, полученное этим методом, аппроксимирует искомое решение начальной задачи для  $t < \varepsilon^{-k}$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ .

Обоснование асимптотики будет проведено для случая, когда функции  $F$  и  $G$  не зависят от  $\varepsilon$ . Исследования в общем случае отличаются лишь несущественными деталями.

Итак, рассмотрим начальную задачу:

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon F(I, \varphi), \\ \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon G(I, \varphi), \\ I(0) = a_0, \quad \varphi(0) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

При построении решения методом разделения переменных для нахождения  $I(t, \varepsilon)$ ,  $\varphi(t, \varepsilon)$  производится замена искомых функций:

$$\begin{cases} I = J + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(J, \psi), \\ \varphi = \psi + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(J, \psi), \end{cases} \quad (1.2)$$

где функции  $J$  и  $\psi$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \dot{J} = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k F_k(J), \\ \dot{\psi} = \omega(J) + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k G_k(J), \\ J(0) = a_0, \quad \psi(0) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь и далее все бесконечные ряды считаются формальными асимптотическими рядами.

Если подставить выражения (1.2), (1.3) в систему (1.1), то получатся равенства рядов по степеням  $\varepsilon$ . Отсюда вытекают уравнения для определения  $F_k(J)$ ,  $G_k(J)$ ,  $u_k(J, \psi)$ ,  $v_k(J, \psi)$  (см., например, [1]).

В частности, первое уравнение имеет вид

$$F_0(J) + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega(J) = F(J, \psi),$$

и, исходя из периодичности функции  $u_1(J, \psi)$  по  $\psi$ , получаем

$$F_0(J) = \frac{1}{\Phi} \int_0^{\Phi} F(J, \psi) d\psi. \quad (1.4)$$

Далее можно определить все функции  $F_k(J)$ ,  $G_k(J)$ ,  $u_k(J, \psi)$ ,  $v_k(J, \psi)$  так, чтобы ряды (1.2) формально удовлетворяли системе (1.1). Функции  $u_k(J, \psi)$ ,  $v_k(J, \psi)$  периодичны по  $\psi$  с периодом  $\Phi$ .

Для построения приближенного решения системы (1.1) в равенствах (1.3) следует заменить ряды на частичные суммы. Тогда простым интегрированием находятся решения соответствующих начальных задач  $J_n(t)$ ,  $\psi_n(t)$ , а из формул (1.2), где вместо рядов также записаны частичные суммы, находятся  $I_n(t)$  и  $\varphi_n(t)$ .

Легко видеть, что построенные таким образом  $I_n(t)$  и  $\varphi_n(t)$  являются хорошими приближениями истинных решений задачи (1.3) при малых значениях  $t$ . Однако для больших значений времени такое утверждение, вообще говоря, несправедливо. Для построения и обоснования асимптотики при больших значениях времени требуется наложить дополнительное условие на функцию  $F(I, \varphi)$ .

Итак, предположим, что выполняются следующие условия:

(A)  $F, G$  — бесконечно дифференцируемые, периодические по  $\varphi$  функции с периодом  $\Phi$ ;

(B)  $\omega(I) > 0$  и  $\omega(I) \in C^\infty$  для любого  $I$ ;

(C) для  $F$  выполнено условие устойчивости: существует  $a$  такое, что выполняются соотношения  $\int_0^\Phi F(a, \psi) d\psi = 0$ ;  $\int_0^\Phi \frac{\partial F(a, \psi)}{\partial I} d\psi < -\gamma < 0$ .

Переходим к построению и обоснованию асимптотического приближения решения системы (1.1).

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{J} = \varepsilon \sum_{k=0}^n \varepsilon^k F_k(J), \\ \dot{\psi} = \omega(J) + \varepsilon \sum_{k=0}^n \varepsilon^k G_k(J), \\ J(0) = a_0, \quad \psi(0) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Обозначим

$$\begin{cases} I_n = J + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k u_k(J, \psi), \\ \varphi_n = \psi + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k v_k(J, \psi), \end{cases} \quad (1.6)$$

где  $(J, \psi)$  — решение задачи (1.5).

**Теорема 1.** Если выполнены условия (A), (B), (C) и начальное данное  $a_0$  близко к  $a$ , то при  $t \in [0, \infty)$  существует решение  $(J, \psi)$  системы (1.5). На временном промежутке  $[0, \varepsilon^{-l}]$   $\{I_n, \varphi_n\}$  будет отличаться от точного решения  $\{I, \varphi\}$  задачи (1.1) на величину порядка  $O(\varepsilon^{n-l+1})$ .

Для доказательства теоремы 1 сформулируем вспомогательное утверждение.

**Лемма.** Пусть выполнены условия (A)–(C) и  $|a_0 - a| < \delta$ . Тогда для любых достаточно малых  $\delta$  и  $\varepsilon$  при всех  $t \geq 0$  справедливо равенство  $I_n(t) = a + O(\varepsilon) + O(\delta)$ , где  $I_n(t)$  — решение задачи (1.5)–(1.6).

**Доказательство.** Представим начальное данное  $a_0$  в виде  $a + \alpha$  и обозначим решение начальной задачи для первого уравнения системы (1.5) через  $J(t, \alpha, \varepsilon)$ . Тогда

$$\begin{cases} \dot{J}(t, \alpha, \varepsilon) = \varepsilon F_0(J(t, \alpha, \varepsilon)) + \varepsilon^2 \tilde{F}(J(t, \alpha, \varepsilon), \varepsilon), \\ J(0, \alpha, \varepsilon) = a + \alpha, \end{cases} \quad (1.7)$$

где  $\tilde{F}(J, \varepsilon)$  — непрерывная функция.

Из условий (C) и (1.4) следует, что  $F_0(a) = 0$ ,  $F_0'(a) < -\gamma < 0$ . Следовательно, в окрестности точки  $a$   $F_0'(J) < -\gamma/2$ . Поэтому при достаточно малых  $\delta$  и  $\varepsilon$   $F_0'(J) + \varepsilon \tilde{F}(J, \varepsilon) < -\gamma/2$ .

Отсюда вытекает, что при  $|a - a_0| < \delta$  для достаточно малых  $\delta$  и  $\varepsilon$  существует стационарное решение уравнения, и функция  $J(t, \alpha, \varepsilon)$  монотонно стремится к нему.

Следовательно,  $J(t, \alpha, \varepsilon) = a + O(\varepsilon) + O(\delta)$ . Из первого соотношения (1.6) вытекает заключение леммы.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Подставим в систему (1.1) решение  $I_n, \varphi_n$ , полученное из решения задачи (1.5), (1.6) по методу разделения переменных. По построению все слагаемые с  $\varepsilon^j$ , где  $j < n$ , уничтожатся.

Поэтому, подставив решение  $(I_n, \varphi_n)$  в систему (1.1) и учитывая, что функция  $J(t, \varepsilon)$  ограничена, а функции  $F, G, u_i, v_j$ , где  $i, j \in \overline{1, n}$ , гладкие, периодичные по  $\psi$ , получим, что

$$\begin{cases} \dot{I}_n - \varepsilon F(I_n, \varphi_n) = O(\varepsilon^{n+1}), \\ \dot{\varphi}_n - \omega(I_n) - \varepsilon G(I_n, \varphi_n) = O(\varepsilon^{n+1}) \end{cases} \quad (1.8)$$

для любого момента времени  $t \in [0, \infty)$ .

Введем обозначение

$$W(I, \varphi, \varepsilon) = \frac{F(I, \varphi)}{\omega(I) + \varepsilon G(I, \varphi)}.$$

Согласно лемме функция  $I_n(t)$  ограничена для всех  $t \geq 0$ . Пусть  $|I_n(t)| \leq A$ , где можно считать, что  $A > |a| + 1$ .

Пусть  $t^* > \Phi$  таково, что  $|I(t)| < A + 1$  при  $t < t^*$ , где  $I(t)$  — первая компонента решения задачи (1.1). Начальное условие (1.1) гарантирует, что такое  $t^*$  существует. Дальнейшие оценки будем проводить на интервале  $[0, t^*)$ .

Из системы (1.1) следует, что

$$\begin{cases} \frac{dI}{d\varphi} = \varepsilon W(I, \varphi, \varepsilon), \\ I(0) = a_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

По доказанному выше функция  $I_n$  является решением системы

$$\begin{cases} \frac{dI_n}{d\varphi_n} = \varepsilon W(I_n, \varphi_n, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \\ I_n(0) = a_0. \end{cases} \quad (1.10)$$

В уравнениях (1.9), (1.10) функции  $I$  и  $I_n$  зависят от разных аргументов. Но сначала мы рассмотрим решения соответствующих уравнений при одинаковых аргументах. Пусть  $I(x)$  — решение задачи

$$\frac{dI}{dx} = \varepsilon W(I, x, \varepsilon), \quad I(0) = a_0,$$

а  $I_n(x)$  — решение задачи

$$\frac{dI_n}{dx} = \varepsilon W(I_n, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad I_n(0) = a_0.$$

Обозначим невязку  $I(x) - I_n(x)$  через  $h(x)$ . Тогда функция  $h(x)$  является решением начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dh}{dx} = \varepsilon(W(I, x, \varepsilon) - W(I_n, x, \varepsilon)) + O(\varepsilon^{n+1}), \\ h(0) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Для уменьшения громоздкости формул иногда будем опускать обозначение аргумента  $\varepsilon$  у функции  $W(I, \varphi, \varepsilon)$ .

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} h(x) - h(x - \Phi) &= \int_{x-\Phi}^x \varepsilon(W(I(y), y) - W(I_n(y), y)) dy + O(\varepsilon^{n+1}) \\ &= \int_{x-\Phi}^x \varepsilon \left( \frac{\partial W}{\partial I}(I_n(y), y) h(y) + \frac{\partial^2 W}{\partial I^2}(I^*(y), y) \frac{h^2(y)}{2} \right) dy + O(\varepsilon^{n+1}), \end{aligned}$$

где  $I^* \in [I, I_n]$ .

Отсюда следует оценка

$$\left| h(x) - h(x - \Phi) - \int_{x-\Phi}^x \varepsilon \frac{\partial W}{\partial I}(I_n(y), y) h(y) dy \right| \leq \varepsilon M_2 h^2(y^*) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где  $y^* \in [x - \Phi, x]$ .

Данная оценка справедлива в силу непрерывности  $\frac{\partial^2 W}{\partial I^2}$  по обоим аргументам и ограниченности  $I, I_n$ . Следовательно,

$$h(x) \leq \left| h(x - \Phi) + \int_{x-\Phi}^x \varepsilon \frac{\partial W}{\partial I}(I_n(y), y) h(y) dy \right| + \varepsilon M_2 h^2(y^*) + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (1.12)$$

Из уравнения (1.11) следует, что

$$h(y) = h(x - \Phi) + \varepsilon \int_{x-\Phi}^y \frac{\partial W}{\partial I}(\tilde{I}(\tau), \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Итак,

$$|h(x)| \leq \left| h(x - \Phi) \left( 1 + \int_{x-\Phi}^x \varepsilon \frac{\partial W}{\partial I}(I_n(y), y) dy \right) \right| + \varepsilon M_2 h^2(y^*) + O(\varepsilon^{n+1}) + h(y^{**}) O(\varepsilon^2),$$

где  $y^*, y^{**} \in [x - \Phi, x]$ .

Из леммы следует, что

$$\frac{\partial W}{\partial I}(I_n(y), y) = \frac{\partial W}{\partial I}(a + O(\varepsilon) + O(\delta), y).$$

Заметим, что из условия (C) вытекает неравенство

$$\int_0^\Phi \frac{\partial}{\partial I} \left[ \frac{F(I, \psi)}{\omega(I)} \right] d\psi \Big|_{I=a} < -\frac{\gamma}{\omega(a)} < 0.$$

Отсюда и из определения  $W(I, \varphi, \varepsilon)$  следует, что при малых  $\varepsilon$

$$\int_{x-\Phi}^x \varepsilon \frac{\partial W}{\partial I}(I_n(y), y, \varepsilon) dy < -\gamma_1.$$

Для получения окончательной оценки осталось оценить  $h(y^*)$  и  $h(y^{**})$ . Из уравнения (1.11) имеем

$$|h(y)| \leq |h(x - \Phi)| + \widetilde{M}_1 \int_{x-\Phi}^y \varepsilon |h(y)| dy + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (1.13)$$

при  $y \in [x - \Phi, x]$ . Из этого неравенства следует оценка

$$|h(y)| \leq M_1 h(x - \Phi) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Таким образом, при достаточно малом  $\varepsilon$  для всех  $x > \Phi$  таких, что  $0 \leq x < t^*$ , из (1.12) вытекает неравенство

$$|h(x)| \leq |h(x - \Phi)(1 - \varepsilon\gamma_1)| + \varepsilon M_3 h^2(x - \Phi) + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (1.14)$$

Докажем, что при всех  $x$   $h(x) = O(\varepsilon^{n+1})$ . Обозначим  $q_n = |h(n\Phi)|$  и докажем, что  $q_n < r\varepsilon^{n+1}$  для всех  $n$  при достаточно малых  $\varepsilon$  и при фиксированном большом  $r$ . Действительно,  $q_0 < \mu\varepsilon^n < A$ , а  $q_{n-1} \leq q_n(1 - \varepsilon\gamma_1) + M_5\varepsilon^{n+1} < r\varepsilon^n$  для всех  $x < t^*$ . Так как  $r\varepsilon^n < A$ , то  $t^*$  можно считать сколь угодно большим. Отсюда и из равенства (1.11) следует, что  $I(x) - I_n(x) = O(\varepsilon^{n+1})$  для всех  $x > 0$ .

Теперь покажем, что  $\varphi(t) - \varphi_n(t) = O(\varepsilon^{n-l})$  при  $t = O(\varepsilon^{-l})$ .

Из второго уравнения системы (1.6) получаем

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = \omega(I_n(\varphi_n)) + \varepsilon G(I_n(\varphi_n), \varphi_n) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где  $O(\varepsilon^n)$  равномерно по  $t$ . Так как  $I(\varphi_n) - I_n(\varphi_n) = O(\varepsilon^{n+1})$ , то  $\frac{d\varphi_n}{dt} = \omega(I(\varphi_n)) + \varepsilon G(I(\varphi_n), \varphi_n) + O(\varepsilon^n)$ . Из исходной задачи (1.1) следует, что  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega(I(\varphi)) + \varepsilon G(I(\varphi), \varphi)$ . Проинтегрируем полученные уравнения:

$$\int_0^{\varphi_n} \frac{1}{\omega(I(\psi)) + \varepsilon G(I(\psi), \psi)} d\psi = t + \int_0^t O(\varepsilon^{n+1}) dt = t + O(\varepsilon^{n-l+1}),$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{1}{\omega(I(\psi)) + \varepsilon G(I(\psi), \psi)} d\psi = t.$$

Отсюда, в силу ограниченности функции  $G(I(\psi), \psi)$ , непрерывности  $\omega(I(\psi))$  и в силу условия  $\omega(I) > 0$  имеем

$$|\varphi - \varphi_n| \leq M \left| \int_{\varphi}^{\varphi_n} \frac{1}{\omega(a) + O(\varepsilon) + O(\delta)} d\psi \right| = O(\varepsilon^{n-l+1})$$

при  $t \leq \varepsilon^{-l}$ .

Осталось показать, что  $(I - I_n)(t)$  мало. Заметим, что

$$I(\varphi) - I_n(\varphi_n) = [I(\varphi) - I(\varphi_n)] + [I(\varphi_n) - I_n(\varphi_n)] = I(\varphi) - I(\varphi_n) + O(\varepsilon^n).$$

Из задачи (1.9) следует, что

$$|I(\varphi) - I(\varphi_n)| = \left| \int_{\varphi}^{\varphi_n} \varepsilon W(I(\bar{\varphi}), \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} \right| = O(\varepsilon^{n+2-l}).$$

Итак, при  $t \approx \varepsilon^{-l}$

$$|I(t) - I_n(t)| = O(\varepsilon^{n+2-l}),$$

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| = O(\varepsilon^{n-l+1}),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1 доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** Заметим, что при построении асимптотики решения системы (1.1) можно находить не точное, а приближенное решение системы (1.5). Это следует из (1.6) в силу ограниченности и гладкости функций  $u_i(J, \psi)$ ,  $v_j(J, \psi)$  как функций от  $t$ .

Для того чтобы построить приближенное решение системы (1.5), удобно перейти к медленному времени  $\tau = \varepsilon t$ .

Представим решение в виде суммы формального ряда:

$$J(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i J_i(\tau), \quad \tau = \varepsilon t. \quad (1.15)$$

Подставив данное выражение в первое уравнение системы (1.3), получим систему для нахождения  $J_i$ :

$$\begin{cases} \frac{dJ_0}{d\tau} = F_0(J_0), & J_0(0) = a_0, \\ \frac{dJ_1}{d\tau} = \frac{dF_0}{dJ}(J_0(\tau))J_1 + F_1(J_0(\tau)), & J_1(0) = 0, \\ \dots \end{cases} \quad (1.16)$$

Если постоянная  $a_0$  близка к  $a$ , то из условия (C) и из равенства (1.4) вытекает существование решений  $J_0(\tau)$ , а следовательно, и для всех  $J_k(\tau)$  при всех  $\tau \geq 0$ .

Пусть

$$\begin{cases} J_n(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i J_i(\tau), \\ \dot{\psi}_n = \omega(J_n) + \varepsilon \sum_{k=0}^n \varepsilon^k G_k(J_n), \\ \psi_n(0) = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Обозначим

$$\begin{cases} \hat{I}_n = J_n + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k u_k(J_n, \psi_n), \\ \hat{\varphi}_n = \psi_n + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k v_k(J_n, \psi_n). \end{cases} \quad (1.18)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда на временном интервале  $[0, \varepsilon^{-l}]$   $\{\hat{I}_n, \hat{\varphi}_n\}$  будет отличаться от точного решения  $\{I, \varphi\}$  задачи (1.1) на величину порядка  $O(\varepsilon^{n-l+1})$ .

**Доказательство.** Точное решение первого уравнения системы (1.5) удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} \dot{J} = \varepsilon F_0(J) + \varepsilon^2 F_1(J) + \dots + \varepsilon^{n+1} F_n(J), \\ J(0) = a_0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Функция  $J_n(t, \varepsilon)$ , построенная по формуле (1.17), удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} \dot{\tilde{J}} = \varepsilon F_0(\tilde{J}) + \varepsilon^2 F_1(\tilde{J}) + \dots + \varepsilon^{n+1} F_n(\tilde{J}) + \varepsilon^{n+2} f(t), \\ \tilde{J}(0) = a_0, \end{cases} \quad (1.20)$$

где при достаточно малых  $\varepsilon$  функция  $f(t)$  ограничена и непрерывна на промежутке  $[0, \infty)$ .

Докажем, что решение задачи (1.19) отличается от решения задачи (1.20) на величину  $O(\varepsilon^{n+2})$ .

Обозначим  $\rho(t) = J(t) - \tilde{J}(t)$ .

Функция  $\rho(t)$  является решением задачи

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{d(\varepsilon F_0 + \varepsilon^2 F_1 + \dots + \varepsilon^{n+1} F_n)}{dJ}(J^*) \rho + O(\varepsilon^{n+2}), \\ \rho(0) = 0, \end{cases}$$

где  $J^* \in [J, \tilde{J}]$ .

Из условия (C) следует, что

$$\frac{dF_0}{dJ}(J^*) = \int_0^\Phi \frac{\partial F}{\partial I}(a + O(\varepsilon) + O(\delta), y) dy \leq -\gamma_2.$$

Значит, при малых  $\varepsilon$  выполняется неравенство

$$\frac{d(\varepsilon F_0 + \varepsilon^2 F_1 + \dots + \varepsilon^{n+1} F_n)}{dJ}(J^*) < -\varepsilon\gamma_3.$$

Отсюда следует, что  $\rho(t) = O(\varepsilon^{n+1})$ .

Из второго уравнения системы (1.17) получаем, что

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \psi^n + O(\varepsilon^{n+1}), \\ \psi(0) = \psi^n(0), \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\psi = \int_0^t \omega(J^n) + \varepsilon G_0(J^n) + \varepsilon^2 G_1(J^n) + \dots + \varepsilon^{n+1} G_n(J^n) dt + O(\varepsilon^{n+1-l})$$

при  $t \leq \varepsilon^{-l}$ .

Из замечания к теореме 1 вытекает заключение теоремы 2.

**З а м е ч а н и е 2.** Все изложенные в данной работе методы применимы только к случаю, когда период функций постоянный, не зависящий от медленной переменной  $I$ .

Нетрудно проверить, что даже для простейшей системы

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon F(I, \varphi), \\ \dot{\varphi} = 1, \end{cases}$$

где  $F(I, \varphi)$  — периодическая по  $\varphi$  функция с непостоянным периодом  $\Phi(I)$ , вообще говоря, нереализуема схема получения формального асимптотического решения, предложенная в методе разделения переменных, так как фигурирующая в нем функция  $\frac{\partial F}{\partial I}(I, \varphi)$  в общем случае не является периодической по  $\varphi$ .

## 2. Метод двух масштабов в задаче о возмущении одночастотного колебания

Асимптотика решения системы (0.1) на любом наперед заданном временном интервале с любой точностью может быть построена и методом двух масштабов. Будем рассматривать систему

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = 1 - \varepsilon H(\rho, \varphi, \varepsilon), \\ \frac{d\rho}{d\varphi} = \varepsilon Q(\rho, \varphi, \varepsilon), \\ \varphi(0, \varepsilon) = 0, \quad \rho(0, \varepsilon) = a_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $H, Q \in C^\infty$  — функции,  $2\pi$ -периодические по  $\varphi$ .

Изложим метод двух масштабов для нахождения равномерной асимптотики на отрезке времени от 0 до  $\varepsilon^{-N}$ , где  $N$  — любое наперед заданное натуральное число. Рассмотрим исходную

систему на фазовой плоскости  $\rho, \varphi$ . На фазовой плоскости имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\varphi} = \varepsilon Q(\rho, \varphi, \varepsilon), \\ \rho(0, \varepsilon) = a_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Асимптотика, равномерная при  $\varphi \in [0, \infty)$ , для данной задачи получена и обоснована в [3]. Приведем формулировки соответствующих теорем.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (A)–(C). Тогда для всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  существует  $2\pi$ -периодическое решение  $z(\varphi, \varepsilon)$  уравнения (2.2), для которого при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливо асимптотическое разложение

$$z(\varphi, \varepsilon) = a + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k r_k(\varphi).$$

**Теорема 4.** Если выполнены условия (A)–(C) и значение  $a_0$  близко к  $a$ , то решение  $\rho(\varphi, \varepsilon)$  начальной задачи (2.2) разлагается в равномерно асимптотический ряд на полупрямой  $[0, \infty)$ :

$$\rho(\varphi, \varepsilon) = \sum_0^{\infty} \varepsilon^k \rho_k(\varphi, \varepsilon\varphi), \quad (2.3)$$

где  $\rho_k(\varphi, \theta) \in C^\infty$  — функции,  $2\pi$ -периодические по  $\varphi$ .

**З а м е ч а н и е 3.** При  $\theta \rightarrow \infty$   $\rho_k(\varphi, \theta)$  экспоненциально стремятся к  $r_k(\varphi)$  для любого  $k$ .

Изложим метод построения формальной асимптотики. Введем обозначение  $\theta = \varepsilon\varphi$ . Подставляя в уравнение (2.2) формальный ряд  $\sum_0^{\infty} \varepsilon^k \rho_k(\varphi, \varepsilon\varphi)$  и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем рекуррентную систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} = Q_0(\rho_0, \varphi), \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} = Q_1(\rho_0, \varphi) + \frac{\partial Q_0(\rho_0, \varphi)}{\partial r} \rho_1, \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho_2}{\partial \theta} = Q_2(\rho_0, \varphi) + \frac{\partial Q_1(\rho_0, \varphi)}{\partial r} \rho_1 + \frac{\partial Q_0(\rho_0, \varphi)}{\partial r} \rho_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q_0(\rho_0, \varphi)}{\partial r^2} \rho_1^2, \\ \dots \end{cases}$$

Таким образом,  $\rho_0$  зависит лишь от  $\theta$ . Из второго уравнения системы и условия периодичности  $\rho_1$  по  $\varphi$  вытекает, что  $\int_0^{2\pi} \frac{d\rho_0}{d\theta}(\theta) d\varphi = \int_0^{2\pi} Q_0(\rho_0, \varphi) d\varphi$ . Из начального условия  $\rho_0(0) = a_0$  однозначно определяется коэффициент  $\rho_0(\theta)$ . Из второго уравнения найдется  $\rho_1(\varphi, \theta)$  с точностью до  $\tilde{\rho}_1(\theta)$ , которое мы определим из условия периодичности  $\rho_2$  по  $\varphi$  и начального условия  $\rho_1(0, 0) = 0$ . Продолжая этот процесс далее, можно построить все  $\rho_k(\varphi, \theta)$ .

Из теорем 3, 4 следует, что построенный ряд является равномерно асимптотическим по  $\varphi$  для решения системы (2.2).

**З а м е ч а н и е 4.** Из доказанных теорем следует ограниченность решения задачи (2.2), а также ограниченность  $\rho_k$  для любых  $\varphi$  и  $k$ .

Далее изложим теорию получения асимптотического решения задачи (2.1) для любого  $t \in [0, L\varepsilon^{-M}]$ , где  $M$  — наперед заданное натуральное число.

Вспомним, что  $\varphi$  и  $t$  связаны уравнением (2.1). Из равномерной асимптотики решения  $\rho(\varphi)$  не следует равномерная для любого  $t$  асимптотика решения  $(\rho(\varphi(t)), \varphi(t))$  задачи (2.1). Однако можно получить равномерную асимптотику для решения задачи (2.1) на отрезке  $[0, L\varepsilon^{-M}]$ .

Будем строить разложение на этом отрезке. Проинтегрируем первое уравнение системы (2.1):

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{1}{1 - \varepsilon H(\rho(\psi), \psi, \varepsilon)} d\psi$$

$$= \int_0^{\varphi} \left( 1 + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i H^i(\rho(\psi), \psi, \varepsilon) + \varepsilon^{N+1} H^{N+1}(\rho(\psi), \psi, \varepsilon) \frac{1}{(1 - \varepsilon H(\rho(\psi), \psi, \varepsilon))} \right) d\psi.$$

Так как  $H(\rho, \phi) - 2\pi$ -периодическая по  $\phi$  функция, а  $\rho(\phi) -$  ограничена, то слагаемое  $\varepsilon^{N+1} H^{N+1}(\rho(\psi), \psi, \varepsilon) \frac{1}{(1 - \varepsilon H(\rho(\psi), \psi, \varepsilon))}$  есть  $O(\varepsilon^{N+1})$  равномерно по  $\phi$ .

Подставим частичную сумму ряда (2.3) в данное уравнение. Получим

$$t = \varphi + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \int_0^{\varphi} H^i \left( \sum_0^N \varepsilon^k \rho_k(\psi, \varepsilon\psi) + O(\varepsilon^{N+1}), \psi, \varepsilon \right) d\psi + O(\varepsilon^{N+1-M}).$$

Разложим подынтегральные функции в ряд по  $\varepsilon$ , считая  $\rho_k$  независимыми от  $\varepsilon$ . В результате получим представление

$$t = \varphi + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \int_0^{\varphi} G_i(\psi, \varepsilon\psi) d\psi + O(\varepsilon^{N+1-M}).$$

Функции  $G_i - 2\pi$ -периодические по первому аргументу и ограниченные.

Задача свелась к нахождению асимптотики интеграла  $\int_0^{\varphi} S(\xi, \varepsilon\xi) d\xi$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  на отрезке  $[0, L\varepsilon^{-M}]$ , где  $S(\xi, \theta) - 2\pi$ -периодична по  $\xi$ , а по  $\theta$  экспоненциально стремится к функции, периодичной по  $\xi$  при  $\theta \rightarrow +\infty$ .

Представим  $\varphi = (\tilde{N} - 1)2\pi + \phi$ , где  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Тогда

$$\int_0^{\varphi} S(\xi, \varepsilon\xi) d\xi = \sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} S(\xi, \varepsilon\xi) d\xi + \int_{2\pi\tilde{N}}^{\varphi} S(\xi, \varepsilon\xi) d\xi.$$

Для  $k$ -го интеграла сделаем замену  $\eta = \xi - 2\pi k$ . В силу периодичности функции  $S(\xi, \theta)$  получается

$$\int_0^{\varphi} S(\xi, \varepsilon\xi) d\xi = \sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} \int_0^{2\pi} S(\eta, \varepsilon\eta + 2\pi\varepsilon k) d\eta + \int_0^{\phi} S(\eta, \varepsilon\eta + 2\pi\varepsilon\tilde{N}) d\eta,$$

где  $\tilde{N} \in [0, \frac{L}{2\pi}\varepsilon^{-M}]$ .

Асимптотика для  $\int_0^{\phi} S(\eta, \varepsilon\eta + 2\pi\varepsilon\tilde{N}) d\eta$  получается из разложения функции  $S$  по степеням  $\varepsilon$  по формуле Тейлора, так как  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

Из теоремы 4 следует, что функция  $S(\xi, \theta)$  может быть представлена как  $\tilde{S}(\xi) + \bar{S}(\xi, \theta)$ , где  $\bar{S}(\xi, \theta)$  экспоненциально стремится к нулю при  $\theta \rightarrow +\infty$ , обе функции периодичны по  $\xi$ . Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} \int_0^{2\pi} S(\eta, \varepsilon\eta + 2\pi\varepsilon k) d\eta = \sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\eta, \varepsilon\eta + 2\pi\varepsilon k) d\eta + (\tilde{N} - 1) \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\eta) d\eta.$$

Далее без ограничения общности будем считать, что  $S \rightarrow 0$  при  $\theta \rightarrow \infty$ .

Сумма

$$\sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} \int_0^{2\pi} S(\eta, \varepsilon\eta + 2\pi\varepsilon k) d\eta$$

может быть представлена с точностью до  $O(\varepsilon^P)$ , где  $P$  — любое натуральное число, следующим образом:

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} \int_0^{2\pi} S(\eta, \varepsilon\eta + 2\pi\varepsilon k) d\eta = \varepsilon \sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} s(2\pi\varepsilon k, \varepsilon).$$

Разложим функцию  $s(x, \varepsilon)$  по  $\varepsilon$  в ряд Тейлора до необходимого порядка точности:

$$s(x, \varepsilon) = s_0(x) + \varepsilon s_1(x) + \dots + O(\varepsilon^Q).$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} s(2\pi\varepsilon k, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{j=0}^{Q-1} \varepsilon^j s_j(2\pi\varepsilon k) + O(\varepsilon^{Q-M}).$$

Значит, далее без ограничения общности можем считать, что функция  $s$  не зависит от  $\varepsilon$ , а зависит только от  $x$ :

$$\sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} s(2\pi\varepsilon k) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi(\tilde{N}-1)\varepsilon} \check{S}(x) dx,$$

где  $\check{S}(x) = s(2\pi k\varepsilon)$ ,  $x \in [2\pi k\varepsilon, 2\pi\varepsilon(k+1)]$ .

Из формулы Тейлора следует

$$s(x) = s(2\pi k\varepsilon) + \frac{ds}{dx}(2\pi k\varepsilon)(x - 2\pi k\varepsilon) + \dots + \frac{1}{P!} \frac{d^P s}{dx^P}(2\pi k\varepsilon)(x - 2\pi k\varepsilon)^P + O(\varepsilon^{P+1})$$

при  $x \in [2\pi k\varepsilon, 2\pi\varepsilon(k+1)]$ .

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi(\tilde{N}-1)\varepsilon} \check{S}(x) dx &= \int_0^{2\pi(\tilde{N}-1)\varepsilon} s(x) dx - \sum_{k=0}^{\tilde{N}-2} \int_{2\pi k\varepsilon}^{2\pi(k+1)\varepsilon} \left( \frac{ds}{dx}(2\pi k\varepsilon)(x - 2\pi k\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{1}{P!} \frac{d^P s}{dx^P}(2\pi k\varepsilon)(x - 2\pi k\varepsilon)^P + h_p(x, k, \varepsilon) \right) dx. \end{aligned}$$

В силу экспоненциального стремления функции  $s$  к нулю при  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\int_0^{2\pi(\tilde{N}-1)\varepsilon} h_p(x, k, \varepsilon) dx = O(\varepsilon^{P+1}).$$

Значит,

$$\begin{aligned} 2\pi\varepsilon \sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} s(2\pi\varepsilon k) &= \int_0^{2\pi(\tilde{N}-1)\varepsilon} \check{S}(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi(\tilde{N}-1)\varepsilon} s(x) dx - \sum_{k=0}^{\tilde{N}-2} [S_1(2\pi k\varepsilon)\varepsilon^2 + \dots + S_P(2\pi k\varepsilon)\varepsilon^{P+1}] + O(\varepsilon^{P+1}). \end{aligned}$$

Далее с суммами  $\sum_{k=0}^{\tilde{N}-2} S_i(2\pi k\varepsilon, \varepsilon) \varepsilon^{i+1}$  нужно поступить аналогично, только разлагать  $S_i$  в ряды Тейлора не до порядка  $P$ , а до порядка  $P - i$ .

Таким образом, получено разложение интеграла  $\int_0^\varphi S(\xi, \varepsilon\xi) d\xi$  с точностью  $O(\varepsilon^{P+1})$ , где  $P$  — произвольное натуральное число.

Отсюда сразу следует, что получена асимптотика для  $\sum_{i=1}^N \varepsilon^i \int_0^\varphi H_i(\psi, \varepsilon\psi) d\psi$  с точностью  $O(\varepsilon^{N-M})$ .

Итак, построено асимптотическое разложение  $t$  в ряд по степеням  $\varepsilon$  с любой точностью  $O(\varepsilon^{N-M})$  на отрезке  $[0, L\varepsilon^{-M}]$ , где коэффициентами ряда являются ограниченные функции от  $\varphi$ . Чтобы получить асимптотическое разложение  $\varphi$ , нужно воспользоваться полученным выражением  $\varphi = t - \sum_{k=1}^N R_k(\varphi) \varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1})$ . Отсюда стандартным способом получается асимптотическое представление  $\varphi(t, \varepsilon)$ .

### 3. Пример асимптотики на больших временах, полученной различными методами

В качестве примера рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$u'' + u = \varepsilon(1 - u^2)u',$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Перед тем, как выписать асимптотические представления для решения данного уравнения, примем обозначения

$$\alpha = \sqrt{\frac{4e^{\varepsilon t}}{e^{\varepsilon t} + 3}}, \quad p = \frac{4 - \alpha^2}{3\alpha^2}.$$

Заметим, что  $t = \ln p$ . По методу двух масштабов для уравнения второго порядка на временном интервале  $[0, K\varepsilon^{-1}]$  получаем решение

$$u(t, \alpha) = u_0(t, \alpha) + \varepsilon u_1(t, \alpha) + \varepsilon^2 u_2(t, \alpha) + \varepsilon^3 u_3(t, \alpha) + O(\varepsilon^4),$$

$$u_0(t, \alpha) = \alpha \cos t,$$

$$u_1(t, \alpha) = -\frac{1}{64}\alpha(-8\ln\alpha + 11 + 7\alpha^2 + 4\ln p)\sin t - \frac{1}{32}\alpha^3\sin 3t,$$

$$u_2(t, \alpha) = \left( -\frac{1}{512}(\ln^2 p)\alpha - \frac{1}{73728}\alpha(-576\ln\alpha - 72\alpha^2 + 3096)\ln p \right.$$

$$\left. - \frac{1}{73728}\alpha(-891\alpha^4 + 9730\alpha^2 - 11551 + 576\ln^2\alpha + (3024 - 2160\alpha^2)\ln\alpha) \right) \cos t$$

$$+ \left( \frac{1}{2048}\alpha^3(-12\ln p + 24\ln\alpha - 23\alpha^2 - 49) \right) \cos 3t - \frac{5}{3072}\alpha^5 \cos 5t,$$

$$u_3(t, \alpha) = \left( \frac{1}{24576}\alpha \ln^3 p + \left( \frac{75}{32768}\alpha - \frac{1}{4096}\alpha \ln\alpha - \frac{9}{32768}\alpha^3 \right) \ln^2 p \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{2048} \alpha \ln^2 \alpha + \left( -\frac{11}{8192} \alpha - \frac{7}{8192} \alpha^3 \right) \ln \alpha - \frac{435}{131072} \alpha^5 - \frac{3295}{1179648} \alpha + \frac{10697}{589824} \alpha^3 \right) \ln p \\
& - \frac{1}{3072} \alpha \ln^3 \alpha + \left( \frac{23}{8192} \alpha^3 - \frac{53}{8192} \alpha \right) \ln^2 \alpha + \frac{84353}{4718592} \alpha + \left( -\frac{237}{65536} \alpha^5 + \frac{967}{294912} \alpha^3 \right. \\
& + \left. \frac{29023}{589824} \alpha \right) \ln \alpha - \frac{35483}{1572864} \alpha^3 - \frac{16751}{4718592} \alpha^7 + \frac{11175}{524288} \alpha^5 \Big) \sin t + \left( \frac{9}{16384} (\ln^2 p) \alpha^3 \right. \\
& + \left. \left( -\frac{9}{4096} \alpha^3 \ln \alpha + \frac{243}{32768} \alpha^3 + \frac{45}{32768} \alpha^5 \right) \ln p + \frac{9}{4096} \alpha^3 \ln^2 \alpha \right. \\
& + \left. \left( -\frac{93}{16384} \alpha^5 - \frac{51}{16384} \alpha^3 \right) \ln \alpha + \frac{9473}{393216} \alpha^5 - \frac{7741}{786432} \alpha^3 - \frac{151}{262144} \alpha^7 \right) \sin 3t \\
& + \frac{5}{589824} \alpha^5 (-120 \ln \alpha + 60 \ln p + 111 \alpha^2 + 277) \sin 5t + \frac{7}{73728} \alpha^7 \sin 7t.
\end{aligned}$$

Из явного вида данного разложения следует, что оно теряет асимптотический характер при временах порядка  $\varepsilon^{-2}$ , так как функции  $u_i(t, \alpha)$  имеют порядок  $(\ln p)^i = O(\varepsilon^{-i})$ .

После замены переменных  $u(t) = I \cos \varphi$ ,  $u'(t) = -I \sin \varphi$  уравнение Ван-дер-Поля переходит в систему

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon I (1 - I^2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi, \\ \dot{\varphi} = 1 + \varepsilon (1 - I^2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi \sin \varphi. \end{cases}$$

Выпишем решение, полученное по методу разделения переменных:

$$I(J, \psi) = J + \varepsilon u_1(J, \psi) + \varepsilon^2 u_2(J, \psi),$$

$$\varphi(J, \psi) = \psi + \varepsilon v_1(J, \psi) + \varepsilon^2 v_2(J, \psi).$$

На временном интервале  $[0, K\varepsilon^{-2}]$  данное разложение аппроксимирует решение задачи Ван-дер-Поля с точностью  $O(\varepsilon^3)$ . Здесь

$$u_1(J, \psi) = -\frac{1}{4} (\sin 2\psi) J + \frac{1}{32} (\sin 4\psi) J^3,$$

$$v_1(J, \psi) = -\frac{1}{2} (\cos 2\psi) \left( -\frac{1}{4} J^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{32} (\cos 4\psi) J^2 + \frac{3}{32},$$

$$\begin{aligned}
u_2(J, \psi) &= \frac{1}{128} \frac{1}{2} J (-12 - 19J^2 + 4J^4) \cos(2\psi) + \frac{1}{64} \frac{1}{4} J (4 + J^2) \cos(4\psi) \\
&+ \frac{1}{128} \frac{1}{6} J^3 (-3 + 4J^2) \cos(6\psi) + \frac{1}{512} \frac{1}{8} J^5 \cos(8\psi) + \frac{1037}{12288},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2(J, \psi) &= \left( -\frac{1}{16} J^2 + \frac{3}{32} - \frac{1}{64} J^4 \right) \frac{1}{2} \sin(2\psi) + \left( -\frac{3}{128} J^4 - \frac{1}{64} J^2 - \frac{1}{8} \right) \frac{1}{4} \sin(4\psi) \\
&- \frac{1}{64} J^2 (-3 + 2J^2) \frac{1}{6} \sin(6\psi) - \frac{1}{256} J^4 \frac{1}{8} \sin(8\psi),
\end{aligned}$$

$$J = \alpha + \varepsilon^2 \left( -\frac{755}{9216} \alpha^3 + \frac{43}{4096} \alpha^5 + \frac{359}{2304} \alpha - \frac{1037}{12288} + \left( \frac{1}{128} \alpha^3 - \frac{1}{32} \alpha \right) \ln \left( \frac{4 - \alpha^2}{3} \right) \right),$$

$$\psi = t + \left( \frac{11}{64} (\alpha^2 - 1) + \frac{1}{16} \ln p - \frac{1}{8} \ln \alpha \right) \varepsilon + \left( \left( -\frac{3}{256} \alpha^2 - \frac{5}{3072} + \frac{11}{4096} \alpha^4 \right) \ln p \right.$$

$$+ \left( -\frac{3}{128}\alpha^2 + \frac{11}{2048}\alpha^4 - \frac{29}{1536} \right) \ln \alpha + \frac{3691}{589824}\alpha^6 - \frac{3187}{73728}\alpha^4 + \frac{1025}{12288}\alpha^2 - \frac{27395}{589824} \Big) \varepsilon^3.$$

Выпишем решение, полученное по методу двух масштабов:

$$I(\varphi, \alpha) = \alpha + \varepsilon B(\varphi, \alpha) + \varepsilon^2 C(\varphi, \alpha).$$

Точность и временной интервал, на котором справедливо данное разложение, такие же, как и в случае разложения, полученного по методу двух масштабов. При  $t \in [0, K\varepsilon^{-2}]$  точность равна  $O(\varepsilon^3)$ , а  $B(\varphi, \alpha)$ ,  $C(\varphi, \alpha)$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} B(\varphi, \alpha) &= -\frac{1}{4}\alpha(\sin 2\varphi) + \frac{1}{32}\alpha^3(\sin 4\varphi), \\ C(\varphi, \alpha) &= \left( \frac{1}{64}(\ln p)\alpha^3 - \frac{1}{16}(\ln p)\alpha + \frac{123}{4096}\alpha^5 - \frac{1349}{9216}\alpha^3 + \frac{305}{2304}\alpha \right) \\ &+ \frac{1}{256}\alpha(32 + 6\alpha^4 - 37\alpha^2)(\cos 2\varphi) + \frac{1}{256}\alpha(-12 + \alpha^4 + 2\alpha^2)(\cos 4\varphi) \\ &- \frac{1}{768}\alpha^3(2\alpha^2 - 15)(\cos 6\varphi) - \frac{7}{4096}\alpha^5(\cos 8\varphi), \\ t = \varphi + \varepsilon &\left( -3\frac{-\cos^4 \varphi + 1}{e^{\varepsilon\varphi} + 3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi - \frac{1}{16}\ln \frac{e^{\varepsilon\varphi} + 3}{4e^{\varepsilon\varphi}} + \frac{63}{64}\frac{1 - e^{\varepsilon\varphi}}{e^{\varepsilon\varphi} + 3} \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left( \frac{19}{6}\sin \varphi \cos^5 \varphi - \frac{7}{24}\cos^3 \varphi \sin \varphi + \frac{1}{16}\cos \varphi \sin \varphi + \frac{1}{16}\varphi - 3\sin \varphi \cos^7 \varphi \right. \\ &- \frac{3}{8}((-9 - 6\cos^2 \varphi + 16\cos^4 \varphi)(e^{\varepsilon\varphi} + 2) + 16\cos^4 \varphi) \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{(e^{\varepsilon\varphi} + 3)^2} \\ &- 48 \left( -\frac{3}{16}\sin \varphi \cos^7 \varphi + \frac{7}{96}\sin \varphi \cos^5 \varphi + \frac{11}{384}\cos^3 \varphi \sin \varphi \right. \\ &\left. \left. + \frac{11}{256}\cos \varphi \sin \varphi \right) e^{-\varepsilon\varphi} \frac{2 + 3e^{-\varepsilon\varphi}}{(1 + 3e^{-\varepsilon\varphi})^2} \right) - \frac{5}{3072}\varphi\varepsilon^4. \end{aligned}$$

Расчеты показывают, что все эти представления совпадают между собой на временном интервале  $[0, K\varepsilon^{-1}]$  с точностью  $O(\varepsilon^3)$ , а последние два разложения совпадают с той же точностью на интервале  $[0, K\varepsilon^{-2}]$ .

Поступила 07.08.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.** Метод разделения переменных // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные науки. Том 3. Математические аспекты классической небесной механики (Москва, 1985). Глава 4, Раздел 3.1.
2. **Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А.** Метод возмущений в теории распространения волн // Теория распространения волн в неоднородных и нелинейных средах. М., 1979 С. 28–143.
3. **Ильин А.М.** О методе двух масштабов в задаче о возмущении одночастотного колебания // Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 118, № 3. С. 383–389.

## К ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ<sup>1</sup>

А. В. Ким, С. С. Рублева, Е. С. Чой

Работа содержит обзор и обобщения методов нахождения явных решений обобщенных уравнений Риккати в задаче аналитического конструирования регуляторов для систем с последствием в фазовых переменных.

### 1. Введение

Настоящая статья посвящена дальнейшей разработке теории аналитического конструирования регуляторов (АКОР) для систем с последствием, основы которой были заложены Н.Н. Красовским [1, 2]. В отмеченных и последующих работах была разработана процедура построения оптимального стабилизирующего управления на основе функциональной трактовки решений систем с последствием и использования метода функционалов Ляпунова — Красовского [3–8]. Было показано, что для линейных стационарных систем с последствием и квадратичного критерия качества оптимальное стабилизирующее управление является линейным непрерывным функционалом на пространстве непрерывных функций, а также были выведены соотношения, описывающие коэффициенты оптимального стабилизирующего управления.

Отметим, что для конечномерных систем теория аналитического конструирования регуляторов, разработанная А.М. Летовым [9, 10] и Р. Калманом [11], благодаря ясной постановке и конструктивным результатам, играет особую роль среди различных подходов к синтезу управлений. Вычисление коэффициентов матрицы усиления (стабилизирующего) управления на основе теории АКОР сводится к решению матричного алгебраического уравнения Риккати (АУР), причем соответствующее управление, если оно существует, стабилизирует систему.

В силу бесконечномерной природы систем с последствием, синтез управления в таких системах требует нахождения решений специальной системы обобщенных уравнений Риккати (ОУР), представляющей собой систему алгебраических уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными.

Задача нахождения решений ОУР является одной из основных трудностей, сдерживающих практическое использование теории АКОР в задачах синтеза управления для систем с последствием. При этом к настоящему времени не разработано эффективных численных процедур решения системы ОУР. Поэтому уже в первых работах [13, 14], где были получены ОУР, в рамках теории АКОР для систем с последствием были сформулированы две задачи:

*Задача А:* нахождение явных решений ОУР;

*Задача В:* разработка методов исследования стабилизирующих свойств управлений, соответствующих явным решениям ОУР.

Следует особо подчеркнуть, что решение *Задачи А* не является самоцелью, а позволяет построить синтез управления в явном виде.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00330, проект 05-01-00732) и Фонда содействия отечественной науке.

Также отметим, что для систем с последствием, в отличие от конечномерных систем, линейное управление с обратной связью, построенное на основе решения ОУР, не всегда является стабилизирующим. Поэтому выделение исследования устойчивости замкнутой системы в отдельную Задачу В представляется естественным.

К настоящему времени теоретические аспекты АКОР для систем с последствием разработаны с достаточной полнотой (см., например, [1, 2, 13–29] и ссылки в них); однако, в силу бесконечномерной природы систем с последствием, практическое применение теории наталкивается на ряд принципиальных трудностей. В частности, как уже отмечалось выше, предложенные приближенные методы решения ОУР (см., например, [12–15, 17, 19]) являются сложными для практической реализации, поэтому в настоящее время задача нахождения явных решений ОУР имеет принципиальный характер.

В данной работе развивается подход к построению явных решений ОУР в случае квадратичного функционала качества специального вида.

Сделаем несколько общих замечаний относительно рассматриваемых задач.

#### Явные решения ОУР (Задача А).

Описываемый в настоящей работе подход к построению явных решений ОУР основывается на идее введения дополнительных (функциональных) слагаемых в квадратичный функционал качества.

Для конечномерных систем модификация функционала качества в теории АКОР была предложена в работах А.А. Красовского [30, 31]. Введение дополнительного квадратичного слагаемого в функционал качества позволило упростить матричные уравнения, описывающие коэффициенты оптимального стабилизирующего управления: в рамках такого подхода для ОДУ оптимальное стабилизирующее управление определяется матрицей усиления, являющейся решением не АУР, а более простого уравнения Ляпунова. Соответствующая процедура называется *аналитическим конструированием по критерию обобщенной работы*, так как добавочное слагаемое в функционале качества может быть интерпретировано как “энергия” (обобщенная работа) оптимального управления.

Обобщение данного подхода на системы с последствием было реализовано в статье [25], в которой разработан алгоритм построения точных решений ОУР на основе включения в квадратичный критерий качества дополнительных функциональных составляющих. Такое обобщение увеличивает число свободных параметров в системе и, при соответствующем их выборе, позволяет построить специальную процедуру нахождения явных решений ОУР. Трудности реализации данного метода связаны с необходимостью нахождения неустойчивых полюсов разомкнутой системы и построения специальной вспомогательной системы функций.

В работах [28, 29] удалось преодолеть эти трудности за счет подходящего выбора коэффициентов обобщенного функционала качества и разработать подход, позволяющий найти явный вид решений ОУР. При этом для нахождения решения полной системы ОУР достаточно решить либо классическое АУР, либо специальные экспоненциальные матричные уравнения. Соответствующие алгоритмы позволяют решить Задачу А нахождения явных решений ОУР.

Отметим, что в рамках разрабатываемого подхода обобщенный квадратичный функционал качества не может быть произвольно заданным, а определяется в соответствии с некоторыми правилами и имеет специальную структуру. Однако наличие подобного рода ограничений на функционал качества можно считать естественным, так как в задачах стабилизации критерий качества не обязательно связан с физической природой объекта управления, а его структура и параметры определяются исходя из инженерных требований (простоты вычислений, времени переходного процесса и т.д.). В нашем случае таким требованием является нахождение явных решений ОУР и построение синтеза управления в явной форме.

#### Проверка стабилизирующих свойств управлений (Задача В).

В рамках теории АКОР для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) основной метод проверки стабилизирующих свойств управлений состоит в применении метода функций

Ляпунова, модернизированного в соответствии с принципами динамического программирования. В рамках такого подхода, позволяющего в случае ОДУ получить конструктивные условия устойчивости, принципиальными являются положительная определенность подынтегральной квадратичной формы в критерии качества и положительная определенность оптимального значения (являющегося квадратичной формой начального вектора) функционала качества.

В случае систем с последствием использование обобщенного квадратичного функционала качества позволяет найти решения ОУР в явной форме, однако обобщенные квадратичные функционалы, соответствующие явным решениям ОУР, вообще говоря, не являются знакоопределенными. В этом случае построенное управление может стабилизировать систему, но, вообще говоря, не минимизировать функционал качества. Однако это управление решает поставленную задачу, так как основная цель состоит в построении стабилизирующего управления, а оптимизация дополнительного критерия качества является вспомогательным требованием.

Вообще говоря, отсутствие знакоопределенности у квадратичного функционала качества не создает принципиальных трудностей при исследовании стабилизирующих свойств управления, так как нахождение синтеза управления в явном виде (на основе решения Задачи А) позволяет свести исследование стабилизирующих свойств управления к анализу устойчивости замкнутой системы. В свою очередь, эффективная проверка асимптотической устойчивости замкнутой системы с последствием может быть осуществлена на основе конструктивного критерия [32, 33], основанного на анализе свойств фундаментальной матрицы системы.

Тем не менее получение условий знакоопределенности обобщенного функционала качества, соответствующего явным решениям ОУР, представляет интерес с точки зрения получения новых условий стабилизации.

Разработанные методы и алгоритмы реализованы в пакете прикладных программ *Time-delay System Toolbox* [34] (веб-сервер <http://matlab.fde.uran.ru>).

## 2. Постановка задачи стабилизации

Предметом дальнейшего исследования являются линейные управляемые системы с последствием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 G(s)x(t+s)ds + Bu, \quad (2.1)$$

где  $A$ ,  $A_\tau$ ,  $B$  — постоянные матрицы размерностей  $(n \times n)$ ,  $(n \times n)$  и  $(n \times r)$ , соответственно;  $G(s)$  —  $(n \times n)$ -матрица с непрерывными на  $[-\tau, 0]$  коэффициентами;  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $u \in \mathbb{R}^r$ . Здесь  $\mathbb{R}^n$  — евклидово пространство  $n$ -мерных векторов  $x = (x_1, \dots, x_n)'$  (штрих обозначает транспонирование) с нормой  $\|x\|$ .

В качестве фазового пространства системы (2.1) будем рассматривать  $H = \mathbb{R}^n \times Q[-\tau, 0)$ , где  $Q[-\tau, 0)$  — пространство  $n$ -мерных функций  $y(s)$ ,  $-\tau \leq s < 0$ , со свойствами:

- (1)  $y(\cdot)$  непрерывна на полуинтервале  $[-\tau, 0)$ , исключая, возможно, конечное число точек разрыва первого рода (в которых  $y(\cdot)$  непрерывна справа);
  - (2) существует конечный левый предел  $\lim_{s \rightarrow -0} y(s)$ ;
- (норма в  $Q[-\tau, 0)$  определяется формулой  $\|y(\cdot)\|_\tau = \sup_{-\tau \leq s < 0} \|y(s)\|$ ).

Элементами пространства  $H$  являются пары  $h = \{x, y(\cdot)\}$ , а норма определяется как  $\|h\|_H = \max \{ \|x\|, \|y(\cdot)\|_\tau \}$ .

### 2.1. Допустимые управления

Регулирование системы (2.1) может осуществляться управлениями двух типов:

- 1) Программным управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $t \geq 0$ , априори заданным на интервале функционирования системы. В дальнейшем будем предполагать программные управления  $u(\cdot)$  определенными и непрерывными всюду на  $[0, \infty)$ , исключая, возможно, не более чем счетное множество точек разрыва первого рода, в которых функция  $u(\cdot)$  непрерывна справа. В случае счетного множества точек разрыва, они не имеют конечных предельных.
- 2) Линейным управлением с обратной связью

$$u(x, y(\cdot)) = Cx + \int_{-\tau}^0 L(s)y(s)ds, \quad (2.2)$$

реализующим воздействие на систему в зависимости от ее текущего (функционального) состояния. Здесь  $C$  — постоянная  $(r \times n)$ -матрица,  $L(s)$  —  $(r \times n)$ -матрица с кусочно-непрерывными на  $[-\tau, 0]$  коэффициентами.

Для заданного программного управления  $u(\cdot)$ , начальной позиции  $\hat{h} \doteq \{x^0, y^0(\cdot)\} \in H$  и начального момента времени  $t_0 = 0$  соответствующее движение  $x(t) = x(t; \hat{h})$ ,  $t \geq 0$ , системы (2.1) является решением линейной неоднородной системы с последствием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 G(s)x(t + s)ds + Bu(t)$$

с начальными условиями:  $x(0) = x^0$ ;  $x(s) = y^0(s)$ ,  $-\tau \leq s < 0$ .

Управлению с обратной связью (2.2) соответствует замкнутая система

$$\dot{x}(t) = (A + BC)x(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 (G(s) + BL(s))x(t + s)ds, \quad (2.3)$$

получаемая подстановкой управления (2.2) в (2.1) и группировкой соответствующих слагаемых.

Если  $x(t) = x(t; \hat{h})$ ,  $t \geq 0$ , является некоторым решением замкнутой системы (2.3) с начальной позицией  $\hat{h} \in H$ , то функцию

$$u(t) = Cx(t) + \int_{-\tau}^0 L(s)x(t + s)ds \quad (2.4)$$

будем называть соответствующим программным управлением, так как при подстановке управления (2.4) в систему (2.1) решением этого уравнения (с начальным условием  $\hat{h}$ ) будет  $x(t; \hat{h})$ .

Если зафиксировано некоторое управление с обратной связью (2.2), то через **DP** будем обозначать множество пар  $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$ , в которых  $x(\cdot)$  является решением замкнутой системы (2.3), а  $u(\cdot)$  является программным управлением, определяемым (2.4).

## 2.2. Задача стабилизации

В данной работе рассматривается задача нахождения (конструирования) параметров управления с обратной связью (2.2), при которых замкнутая система (2.3) будет асимптотически устойчивой. Управления, делающие систему асимптотически устойчивой, называются *стабилизирующими*, поэтому данная задача называется задачей стабилизации и может быть сформулирована следующим образом:

Задача С. Для заданной системы (2.1) найти управление с обратной связью (2.2), стабилизирующее систему.

Отметим, что поиск стабилизирующего управления в форме линейного отображения (2.2) определяется следующими причинами:

- (1) при линейном управлении (2.2) тип замкнутой системы не меняется, то есть замкнутая система также является линейной системой с последствием;
- (2) как показано в работе Н.Н. Красовского [1], в рамках классического линейно-квадратичного подхода для систем с последствием, линейное управление (2.2) дает решение задачи стабилизации в классе (нелинейных) управлений  $\hat{u}(x, y(\cdot))$ , удовлетворяющих условию Липшица.

Следует отметить, что не каждая система с последствием может быть стабилизирована [7].

### 2.3. Задача оптимальной стабилизации

Задача стабилизации может быть решена на основе различных подходов. Рассматриваемый в данной работе подход основан на построении управлений, минимизирующих квадратичный функционал качества

$$\begin{aligned}
 J[x(\cdot), u(\cdot)] = & \int_0^{\infty} \left\{ x'(t) \Phi_0 x(t) + 2 x'(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) x(t+s) ds \right. \\
 & + \int_{-\tau}^0 x'(t+s) \Phi_2(s) x(t+s) ds + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x'(t+s) \Phi_3(s, \nu) x(t+\nu) ds d\nu \\
 & \left. + x'(t-\tau) \Phi_4 x(t-\tau) + u'(t) N u(t) \right\} dt
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

на траекториях системы (2.1). Здесь  $\Phi_0$  и  $\Phi_4$  — постоянные симметричные  $(n \times n)$ -матрицы;  $\Phi_1(s)$  —  $(n \times n)$ -матрица с кусочно-непрерывными на  $[-\tau, 0]$  коэффициентами;  $\Phi_2(s)$  — симметричная  $(n \times n)$ -матрица с кусочно-непрерывными на  $[-\tau, 0]$  коэффициентами;  $\Phi_3(s, \nu)$  —  $(n \times n)$ -матрица с кусочно-непрерывными на  $[-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$  коэффициентами;  $N$  — симметричная положительно определенная  $(r \times r)$ -матрица.

В формуле (2.5) функция  $u(t)$  представляет собой программную реализацию управления с обратной связью (2.2), вычисленного вдоль траектории системы.

Задача оптимальной стабилизации. Для заданной системы (2.1) найти управление с обратной связью (2.2), стабилизирующее систему и минимизирующее функционал качества (2.5) на траекториях замкнутой системы.

В рамках такой оптимизационной задачи может быть получена специальная система уравнений, описывающая коэффициенты управления с обратной связью.

Целесообразность введения функционала качества (2.5) связана со следующими соображениями:

- (1) Если система (2.1) может быть стабилизирована, то класс стабилизирующих управлений бесконечен. В этом случае задача минимизации функционала качества позволяет получить некоторые условия, определяющие единственное управление.

- (2) Квадратичный функционал качества (2.5) может рассматриваться как мера уклонения системы от требуемого движения (положения). При этом за счет выбора его коэффициентов может быть реализована “настройка” замкнутой системы.

Весовой функционал качества в (2.5) является квадратичным функционалом вида

$$\begin{aligned} Z[x, y(\cdot)] = & x' \Phi_0 x + 2x' \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) y(s) ds + \int_{-\tau}^0 y'(s) \Phi_2(s) y(s) ds \\ & + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 y'(s) \Phi_3(s, \nu) y(\nu) ds d\nu + y'(-\tau) \Phi_4 y(-\tau), \end{aligned} \quad (2.6)$$

определенным на  $H = \mathbb{R}^n \times Q[-\tau, 0)$ . Следовательно, функционал качества (2.5) может быть записан в следующей компактной форме:  $J = \int_0^{\infty} \{Z[x_t] + u'(t) N u(t)\} dt$ , где  $x_t = \{x(t); x(t+s), -\tau \leq s < 0\} \in H$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Отметим, что во многих работах рассматривается квадратичный критерий качества  $J_* = \int_0^{\infty} \{x'(t) \Phi_0 x(t) + u'(t) N u(t)\} dt$ , однако, принимая во внимание определенный произвол в выборе матриц  $\Phi_0, \Phi_1(s), \Phi_2(s), \Phi_3(s, \nu)$  и  $\Phi_4$ , задача (2.1), (2.5) имеет больше “степеней свободы”.

### 3. Обобщенные уравнения Риккати

Обозначим через  $W[x, y(\cdot)]$  минимальное значение функционала качества (2.5) для задачи оптимальной стабилизации (2.1), (2.5) в позиции  $\{x, y(\cdot)\} \in H$ , т.е.

$$W[x, y(\cdot)] = \inf_{\{x(\cdot), u(\cdot)\} \in \mathbf{DP}} J[x(\cdot), u(\cdot)]. \quad (3.1)$$

При построении синтеза управления на основе теории АКОР основным является нахождение решений системы ОУР, описывающей коэффициенты управления. Система ОУР получается на основе необходимых условий разрешимости задачи оптимальной стабилизации в терминах минимума функционала качества. Приведенный ниже результат является обобщением результатов работ [1, 13, 25, 28], связанным с рассмотрением более общего функционала качества.

**Теорема 1.** *Если*

- (1) *система (2.1) может быть стабилизирована управлением вида*

$$u(x, y(\cdot)) = -N^{-1} B' \left[ \hat{P} x + \int_{-\tau}^0 \hat{D}(s) y(s) ds \right]$$

*( $\hat{P}, \hat{D}(\cdot)$  —  $(n \times n)$ -матрицы);*

- (2) *в задаче оптимальной стабилизации (2.1), (2.5) функционал (3.1) имеет вид*

$$W[x, y(\cdot)] = x' P x + 2x' \int_{-\tau}^0 D(s) y(s) ds$$

$$+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 y'(s) R(s, \nu) y(\nu) ds d\nu + \int_{-\tau}^0 y'(s) \Pi(s) y(s) ds,$$

где  $P$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица;  $D(\cdot)$  и  $\Pi(\cdot)$  —  $(n \times n)$ -матрицы с непрерывно-дифференцируемыми на  $[-\tau, 0]$  коэффициентами;  $R(\cdot, \cdot)$  —  $(n \times n)$  матрица, элементы которой непрерывны на  $[-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$  и непрерывно-дифференцируемы в областях

$$\Omega_1 = \left\{ (s, \nu) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0]: s - \nu < 0 \right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{ (s, \nu) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0]: s - \nu > 0 \right\},$$

то

(a)  $P$ ,  $D(\cdot)$ ,  $\Pi(\cdot)$  и  $R(\cdot, \cdot)$  удовлетворяют системе обобщенных уравнений Риккати

$$P A + A' P + D(0) + D'(0) + \Pi(0) + \Phi_0 = P K P, \quad (3.2)$$

$$\frac{dD(s)}{ds} + [P K - A'] D(s) - P' G(s) = R(0, s) + \Phi_1(s), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial R(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial \nu} = D'(s) G(\nu) + G'(s) D(\nu) - D'(s) K D(\nu) + \Phi_3(s, \nu), \quad (3.4)$$

$$\frac{d\Pi(s)}{ds} = \Phi_2(s) \quad (3.5)$$

с граничными условиями

$$D(-\tau) = P A_\tau, \quad R(-\tau, s) = A'_\tau D(s), \quad \Pi(-\tau) = \Phi_4 \quad (3.6)$$

и условиями симметрии

$$P = P', \quad R(s, \nu) = R'(\nu, s)$$

при  $-\tau \leq s \leq 0$ ,  $-\tau \leq \nu \leq 0$ ;

$$K = B N^{-1} B'; \quad (3.7)$$

(b)  $\hat{P} = P$ ,  $\hat{D}(\cdot) = D(\cdot)$ .

Доказательство теоремы проводится аналогично [1, 13, 19, 25, 28].

### 3.1. Специальные решения обобщенных уравнений Риккати

В данном параграфе описан подход к нахождению явных решений ОУР (3.2)–(3.6), основанный на подходящем выборе матриц  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$  в функционале качества (2.6).

В рамках такого подхода матрицы  $\Phi_0, \dots, \Phi_4$  представляются через матрицы  $P$ ,  $D(s)$  и  $R(s, \nu)$  таким образом, чтобы упростить систему ОУР и получить ее решение в явном виде. Приводимые далее теоремы являются обобщением результатов работ [28, 29].

В первом варианте для нахождения явных решений ОУР необходимо решить алгебраическое уравнения Риккати.

**Теорема 2.** Пусть

(1) матрица  $P$  является решением матричного уравнения

$$P A + A' P + M = P K P,$$

где  $M$  — симметричная  $(n \times n)$ -матрица;

(2) матрицы  $D(s)$  и  $R(s, \nu)$  имеют вид

$$D(s) = e^{-[PK-A'](s+\tau)} P A_\tau, \quad s \in [-\tau, 0], \quad (3.8)$$

$$R(s, \nu) = \begin{cases} Q(s) D(\nu) & \text{при } (s, \nu) \in \Omega_1, \\ D'(s) Q'(\nu) & \text{при } (s, \nu) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (3.9)$$

где

$$Q(s) = A'_\tau e^{[PK-A'](s+\tau)}, \quad s \in [-\tau, 0]; \quad (3.10)$$

(3)  $\Pi(s)$  является  $(n \times n)$ -матрицей с непрерывно дифференцируемыми на  $[-\tau, 0]$  элементами.

Тогда матрицы  $P$ ,  $D(s)$ ,  $R(s, \nu)$  и  $\Pi(s)$  являются решениями ОУР (3.2)–(3.6) с матрицами

$$\Phi_0 = M - (D(0) + D'(0)) - \Pi(0), \quad \Phi_1(s) = P' G(s) - R(0, s),$$

$$\Phi_3(s, \nu) = D'(s) K D(\nu) - D'(s) G(\nu) - G'(s) D(\nu),$$

$$\Phi_2(s) = \frac{d\Pi(s)}{ds}, \quad \Phi_4 = \Pi(-\tau).$$

**З а м е ч а н и е 2.** Из теоремы 2 следует, что  $\Phi_1(s) = -D'(0) Q'(s)$ .

Второй вариант нахождения явных решений ОУР основан на решении специального экспоненциального матричного уравнения.

**Теорема 3.** Пусть

(1) матрица  $P$  является решением экспоненциального матричного уравнения (ЭМУ)

$$P A + A' P + e^{-[PK-A']\tau} P A_\tau + A'_\tau P e^{-[PK-A']\tau} + M = P K P,$$

где  $M$  — симметричная  $(n \times n)$ -матрица;

(2) матрицы  $D(s)$  и  $R(s, \nu)$  имеют вид (3.8)–(3.10);

(3)  $\Pi(s)$  —  $(n \times n)$ -матрица с непрерывно дифференцируемыми на  $[-\tau, 0]$  элементами.

Тогда матрицы  $P$ ,  $D(s)$ ,  $R(s, \nu)$  и  $\Pi(s)$  являются решениями ОУР (3.2)–(3.6) с матрицами

$$\Phi_0 = M - \Pi(0), \quad \Phi_1(s) = P' G(s) - R(0, s),$$

$$\Phi_3(s, \nu) = D'(s) K D(\nu) - D'(s) G(\nu) - G'(s) D(\nu).$$

$$\Phi_2(s) = \frac{d\Pi(s)}{ds}, \quad \Phi_4 = \Pi(-\tau).$$

### 3.2. Общие решения системы обобщенных уравнений Риккати

В данном разделе рассматриваются случаи, когда матрицы  $\Phi_0, \dots, \Phi_4$  зависят дополнительно от некоторых произвольных матриц и функций. Это позволяет получить более общий вид явных решений ОУР и исследовать, в ряде случаев, знакоопределенность соответствующих квадратичных функционалов<sup>2</sup>.

Рассмотрим квадратичный функционал качества (2.5) с весовыми матрицами  $\Phi_0, \dots, \Phi_4$ , имеющими следующую структуру:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= C_0, \\ \Phi_1(s) &= -R(0, s) + C_1 D(s) - P G(s) + \varphi_1(s), \\ \Phi_2(s) &= \varphi_2(s), \\ \Phi_3(s, \nu) &= D'(s) C_2 D(\nu) - D'(s) G(\nu) - G'(s) D(\nu) + \varphi_3(s, \nu), \\ \Phi_4 &= C_3,\end{aligned}\tag{3.11}$$

где  $C_0, C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные  $(n \times n)$ -матрицы;  $\varphi_1(s), \varphi_2(s)$  — произвольные  $(n \times n)$ -матрицы с непрерывными на  $[-\tau, 0]$  элементами;  $\varphi_3(s, \nu)$  — произвольная  $(n \times n)$  матрица с непрерывными на  $[-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$  элементами.

Система ОУР (3.2)–(3.7), соответствующая весовым матрицам (3.11), имеет вид

$$P A + A' P + D(0) + D'(0) + \Pi(0) + C_0 = P K P,\tag{3.12}$$

$$\frac{dD(s)}{ds} = \left( C_1 - [P K - A'] \right) D(s) + \varphi_1(s),\tag{3.13}$$

$$\frac{\partial R(s, \nu)}{\partial s} + \frac{\partial R(s, \nu)}{\partial \nu} = D'(s) (C_2 - K) D(\nu) + \varphi_3(s, \nu),\tag{3.14}$$

$$\frac{d\Pi(s)}{ds} = \varphi_2(s),\tag{3.15}$$

с граничными условиями

$$D(-\tau) = P A_\tau, \quad R(-\tau, s) = A'_\tau D(s), \quad \Pi(-\tau) = C_3,\tag{3.16}$$

и условиями симметрии

$$P = P', \quad R(s, \nu) = R'(\nu, s),\tag{3.17}$$

при  $-\tau \leq s \leq 0, -\tau \leq \nu \leq 0$ .

**Теорема 4.** Пусть в системе (3.12)–(3.17)  $C_0, C_2, C_3$  — произвольные постоянные симметричные  $(n \times n)$ -матрицы,  $C_1$  — произвольная постоянная  $(n \times n)$ -матрица;  $\varphi_2(s)$  — произвольная симметричная  $(n \times n)$ -матрица с кусочно-непрерывными на  $[-\tau, 0]$  элементами;  $\varphi_1(\cdot) \equiv \varphi_3(\cdot, \cdot) \equiv 0$ . Пусть  $(n \times n)$ -матрица  $P$  является решением матричного уравнения

$$P A + A' P + e^{-(PK-A'-C_1)\tau} P A_\tau + A'_\tau P e^{-(PK-A'-C_1)'\tau} + \int_{-\tau}^0 \varphi_2(\nu) d\nu + C_3 + C_0 = P K P,$$

а матрицы  $D(s), R(s, \nu)$  и  $\Pi(s)$  заданы формулами

$$D(s) = e^{-(PK-A'-C_1)(s+\tau)} P A_\tau, \quad s \in [-\tau, 0],$$

$$R(s, \nu) = \begin{cases} Q(s) D(\nu) + D'(s) M D(\nu), & (s, \nu) \in \Omega_1, \\ D'(s) Q'(\nu) + D'(s) M D(\nu), & (s, \nu) \in \Omega_2, \end{cases}$$

<sup>2</sup>Вопросы знакоопределенности полученных функционалов будут рассмотрены в отдельной статье.

$$\Pi(s) = \int_{-\tau}^s \varphi_2(\nu) d\nu + C_3, \quad s \in [-\tau, 0],$$

где

$$Q(s) = A'_\tau (E - P M) e^{(PK - A' - C_1)(s+\tau)}, \quad s \in [-\tau, 0],$$

матрица  $M$  является решением матричного уравнения Ляпунова

$$(PK - A' - C_1)' M + M(PK - A' - C_1) = K - C_2.$$

Тогда матрицы  $P$ ,  $D(s)$ ,  $R(s, \nu)$ ,  $\Pi(s)$  являются решением ОУР (3.12)–(3.17).

### 3.3. Стационарное решение системы ОУР

Справедлива следующая теорема, в которой получены стационарные решения ОУР.

**Теорема 5.** Пусть  $(n \times n)$ -матрица  $P$  является решением матричного уравнения

$$P(A + A_\tau) + (A' + A'_\tau)P + C_0 + \int_{-\tau}^0 \varphi_2(\nu) d\nu + C_3 = P K P, \quad (3.18)$$

где  $C_0$ ,  $C_3$  — постоянные симметричные  $(n \times n)$ -матрицы,  $\varphi_2(\cdot)$  — симметричная  $(n \times n)$ -матрица с кусочно-непрерывными на  $[-\tau, 0]$  элементами, а матрицы  $D(s)$ ,  $R(s, \nu)$  и  $\Pi(s)$  заданы по формулам

$$D(s) \equiv P A_\tau, \quad R(s, \nu) \equiv A'_\tau P A_\tau, \quad \Pi(s) = \int_{-\tau}^s \varphi_2(\nu) d\nu + C_3.$$

Тогда матрицы  $P$ ,  $D(s)$ ,  $R(s, \nu)$ ,  $\Pi(s)$  являются решением ОУР (3.12)–(3.17).

Теорема 5 следует из теоремы 4 при  $C_1 = PK - A'$ ,  $C_2 = K$ ,  $M = 0$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Если взять, например,  $C_0 = q^2 K - q(A + A_\tau) - q(A' + A'_\tau) - \Pi(0)$ , где  $q$  — произвольное положительное число, то матричное уравнение (3.18) имеет решение  $P = qE$  ( $E$  — единичная  $(n \times n)$ -матрица), являющееся положительно определенной симметричной матрицей.

Поступила 11.04.04

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора для систем с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26. С. 39–51.
2. **Krasovskii N.N.** Optimal Processes in Systems with Time Lag // Proc. 2nd IFAC Congress, Basel, 1963. Butterwoths, London, 1964.
3. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1959.
4. **Красовский Н.Н.** О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 3. С. 315–327.
5. **Красовский Н.Н.** Об асимптотической устойчивости систем с последствием // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. С. 513–518.
6. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
7. **Осипов Ю.С.** Стабилизация управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 463–473.

8. **Осипов Ю.С.** О стабилизации нелинейных управляемых систем с запаздыванием в критическом случае одного нулевого корня // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 7. С. 908–922.
9. **Летов А.М.** Аналитическое конструирование регуляторов, I–IV // Автоматика и телемеханика, 1960. № 4. С. 436–441; 1960. № 5. С. 561–568; 1960. № 6. С. 661–665; 1961. № 4. С. 425–435.
10. **Летов А.М.** Динамика полета и управление. М., 1969. 360 с.
11. **Kalman R.E.** Contribution to the Theory of Optimal Control // Bull. Soc. Mat. Mech. 1960. Vol. 5, № 1. P. 102–119.
12. **Маркушин Е.М., Шиманов С.Н.** Приближенное решение задачи аналитического конструирования для систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1963. № 3. С. 3–8.
13. **Ross D.W., Flugge-Lotz I.** An Optimal Control Problem for Systems with Differential-difference Equation Dynamics // SIAM J. Control. 1969. Vol. 7, № 4. P. 609–623.
14. **Ross D.W.** Controller Design for Time Lag Systems via Quadratic Criterion // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. Vol. 16. P. 664–672.
15. **Eller D.H., Aggarwal J.K., Banks H.T.** Optimal control of linear time-delay systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1969. Vol. 14. P. 678–687.
16. **Kushner H.J., Barnea D.I.** On the Control of a Linear Functional-differential Equation with Quadratic Cost // SIAM J. Control. 1970. Vol. 8, № 2. P. 257–275.
17. **Soliman M.A., Ray W.H.** Optimal feedback control for linear-quadratic system having time delay // Int. J. Control. 1972. Vol. 15, № 4. P. 609–627.
18. **Vinter R.B., Kwong R.H.** The Infinite Quadratic Control Problem for Linear Systems with State and Control Delays: An Evolution Equation Approach // SIAM J. Contr. Optimiz. 1981. Vol. 19, № 1. P. 139–153.
19. **Колмановский В.Б., Майзенберг Т.Л.** Оптимальное управление стохастическими системами с последствием // Автоматика и телемеханика. 1973. № 1. С. 47–62.
20. **Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D.** Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.
21. **Янушевский Р.Т.** Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 416 с.
22. **Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K.** Stability and the Infinite Time Quadratic Cost Problem for Linear Hereditary Differential Systems // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, № 1. P. 48–88.
23. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control and Optimization. 1983. Vol. 21. P. 95–135.
24. **Lee E.B.** Generalized quadratic optimal controller for linear hereditary systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1980. Vol. 25. P. 528–531.
25. **Uchida K., Shimemura E., Kubo T., Abe N.** The linear-quadratic optimal control approach to feedback control design for systems with delay // Automatica. 1988. Vol. 24, № 6. P. 773–780.
26. **Ким А.В.** *i*-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.
27. **Kim A.V.** Functional Differential Equations. Application of *i*-Smooth Calculus. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
28. **Ким А.В., Ложников А.Б.** Линейно-квадратичные задачи управления для систем с последствием. Точные решения // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 15–31.
29. **Kim A.V., Han S.H., Kwon W.H., Pimenov V.G.** Explicit numerical methods and LQR control algorithms for time-delay systems // Proceedings of the International Conference on Electrical Engineering. Kyungju, Korea, July 21–25, 1998.
30. **Красовский А.А.** Интегральные оценки моментов и синтез линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1967. № 10. С. 53–71.
31. **Красовский А.А.** Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М. 1973. 558 с.
32. **Ким А.В., Ложников А.Б.** Критерий устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений и его практическая реализация // Дифференц. уравнения. 2004. № 1. С. 271–273.
33. **Kim A.V., Lozhnikov A.B.** Practical criterion for stability verification of linear systems with delays // Stability Analysis and Control: Theory and Applications. 2000. Vol. 3, № 2. P. 111–116.
34. **Ким А.В., Пименов В.Г.** *i*-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 256 с.

УДК 519.6

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА<sup>1</sup>

А. И. Короткий

Исследуются обратные задачи о восстановлении априори неизвестных параметров динамической системы, описываемой краевой задачей для системы уравнений Навье — Стокса, на основании той или иной допустимой информации о движении динамической системы (решении соответствующей краевой задачи). Первая из рассматриваемых задач представляет собой ретроспективную обратную задачу, состоящую в восстановлении априори неизвестного начального состояния динамической системы по ее известному финальному состоянию. Эта задача, как и многие другие подобные задачи, является некорректной. Для ее решения привлекаются идеи так называемого стартового управления. Реализация этих идей позволяет свести исходную некорректную задачу к серии прямых корректных задач, решаемых в прямом направлении времени при соответствующих заданных начальных условиях. Рассматриваются также различные модификации и регуляризации предлагаемого метода решения задачи, опирающиеся на ту или иную априорную информацию об искомом решении. Вторая из обсуждаемых задач представляет собой обратную задачу динамики, состоящую в динамическом восстановлении априори неизвестной правой части системы, характеризующей плотность внешних массовых сил, по результатам приближенных измерений текущих состояний системы. Эта задача также является некорректной. Для ее решения предлагается динамический позиционный регуляризирующий алгоритм, обладающий свойством физической осуществимости и способный работать в режиме реального времени. Построение алгоритма опирается на конструкции и методы теории позиционного управления и методы регуляризации некорректных задач.

## 1. Восстановление начального состояния

Опишем содержательную сторону задачи. Пусть имеется некоторая сплошная среда, состояние которой в каждый момент времени  $t$  из заданного временного промежутка  $[t_0, \vartheta]$ ,  $-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty$ , характеризуется векторной функцией  $u = u(t, \cdot) = u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))$ , определенной в ограниченной области  $\Omega$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^2$ . Динамика состояний среды описывается следующей краевой задачей для системы уравнений Навье — Стокса:

$$u_t + (u \nabla) u - \nu \Delta u = -\nabla p + f, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} u(t, x) = \partial u_1(t, x)/\partial x_1 + \partial u_2(t, x)/\partial x_2 = 0, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u(t, x) = 0, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.3)$$

где  $\nu$  — некоторая заданная положительная константа, характеризующая вязкость среды;  $p$  — давление;  $f$  — некоторая заданная функция, характеризующая плотность внешних массовых сил, действующих на среду. Краевая задача (1.1)–(1.3) описывает плоско-параллельное течение вязкой несжимаемой жидкости в области  $\Omega$ , вектор  $u = (u_1, u_2)$  есть вектор скорости текущей жидкости в точках области  $\Omega$ .

Пусть некоторая функция  $u_\vartheta = u_\vartheta(x)$ ,  $x \in \Omega$ , характеризует известное состояние среды в момент времени  $\vartheta$ . Требуется определить, учитывая динамику состояний среды (1.1)–(1.3), каково было состояние среды в момент времени  $t_0$ . С содержательной точки зрения ретроспективная обратная задача состоит в определении состояния среды в прошлом по ее состоянию в настоящем. С математической точки зрения нужно найти решение краевой задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющее финальному условию

$$u(\vartheta, x) = u_\vartheta(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.4)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00098) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

и затем взять от этого решения след

$$u^0(x) = u(t_0, x), \quad x \in \Omega. \quad (1.5)$$

Поставленная ретроспективная обратная задача (1.1)–(1.5) некорректна: она разрешима не для всякого финального состояния  $u_{\vartheta}$ ; даже в том случае, когда задача окажется разрешимой, она может быть неустойчивой относительно малых возмущений наблюдаемого финального состояния  $u_{\vartheta}$ . Более того, операция взятия следа (1.5) налагает некоторые дополнительные ограничительные условия на обратную краевую задачу (1.1)–(1.4). Эти условия должны обеспечивать корректность операции взятия следа. Из разрешимости в том или ином смысле обратной краевой задачи (1.1)–(1.4), вообще говоря, еще не следует, что след (1.5) будет существовать и принадлежать соответствующему функциональному пространству. Из разрешимости или даже корректности этой задачи, вообще говоря, еще не следует разрешимости или корректности ретроспективной обратной задачи (1.1)–(1.5) в целом. Кроме того, исследование и решение поставленной задачи существенно отягощается ее нелинейностью. Все это исключает сколь угодно простое аналитическое или численное решение рассматриваемой задачи и требует для ее решения привлечения методов регуляризации некорректных задач.

Для решения поставленной задачи предлагается предварительно свести ее к задаче стартового управления [1–5], т. е. к задаче, в которой начальное состояние является управляющим параметром. Реализация этой идеи приводит к некоторой регуляризации исходной задачи. Исходная задача фактически будет сведена к серии вспомогательных прямых краевых задач. Каждая прямая краевая задача будет состоять в нахождении решения задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющего начальному условию

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.6)$$

где  $u_0 = u_0(x)$  — некоторое подходящее начальное состояние системы. Вспомогательные прямые краевые задачи вида (1.1)–(1.3), (1.6) допускают устойчивую численную реализацию [6–8].

Прежде чем перейти к описанию методов решения поставленной задачи и формулировке основных результатов, уточним содержательную сторону задачи и укажем основные свойства ее математической модели. Начнем с понятия решения соответствующей краевой задачи.

Под решением прямой краевой задачи (1.1)–(1.3), (1.6) будем понимать её слабое решение (см., например, [6, гл. 6], [7, гл. 3], [8, гл. 1]), которое определяется как элемент  $u$ , принадлежащий функциональным пространствам [6–8]  $W_{2,0}^{0,1}((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$ ,  $L_4((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$ ,  $C([t_0, \vartheta]; \overset{\circ}{J}(\Omega))$  и при любом  $t \in [t_0, \vartheta]$  удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} u(t, x) v(t, x) dx - \int_{\Omega} u_0(x) v(0, x) dx = \int_{t_0}^t \int_{\Omega} (u v_t - \nu u_{x_i} v_{x_i} - u_i u_{x_i} v + f v) dx dt, \quad (1.7)$$

каков бы ни был при этом элемент  $v \in W_{2,0}^{1,1}((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$ ,  $\operatorname{div} v(t, \cdot) = 0$  для почти всех  $t \in [t_0, \vartheta]$ .

Под решением обратной краевой задачи (1.1)–(1.4) будем также понимать ее слабое решение, которое определяется как элемент  $u$ , принадлежащий тем же самым функциональным пространствам, и при любом  $t \in [t_0, \vartheta]$  удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} u_{\vartheta}(x) v(\vartheta, x) dx - \int_{\Omega} u(t, x) v(t, x) dx = \int_t^{\vartheta} \int_{\Omega} (u v_t - \nu u_{x_i} v_{x_i} - u_i u_{x_i} v + f v) dx dt, \quad (1.8)$$

каков бы ни был при этом элемент  $v \in W_{2,0}^{1,1}((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$ ,  $\operatorname{div} v(t, \cdot) = 0$  для почти всех  $t \in [t_0, \vartheta]$ .

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, производные понимаются в

обобщенном смысле. Отметим, что гильбертово пространство  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  представляет собой замыкание в норме пространства  $L_2(\Omega)^2$  множества всех гладких соленоидальных финитных в  $\Omega$  функций. Имеет место ортогональное разложение Вейля пространства  $L_2(\Omega)^2$  в прямую сумму его подпространств  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  и  $G(\Omega)$ :

$$L_2(\Omega)^2 = \overset{\circ}{J}(\Omega) \oplus G(\Omega), \quad G(\Omega) = \{ \nabla g : g \in W_2^1(\Omega) \}. \quad (1.9)$$

Ортогональность подпространств  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  и  $G(\Omega)$  позволяет исключить из рассмотрения давление  $p$ . Давление  $p$ , при желании, можно найти из интегрального тождества (1.7) или (1.8). Без ограничения общности рассуждений можно считать, что функция  $f$  для почти всех  $t \in [t_0, \vartheta]$  принадлежит  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ . В противном случае, воспользовавшись разложением (1.9), градиентную часть этой функции [6,7] можно добавить к  $\nabla p$ . Подпространство гильбертова пространства  $L_2((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$ , состоящее из всех функций, которые при почти всех  $t \in [t_0, \vartheta]$  принадлежат  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ , далее будем обозначать символом  $L_2([t_0, \vartheta]; \overset{\circ}{J}(\Omega))$ . Однако теперь равенство  $f = 0$  с содержательной точки зрения будет означать, что внешние массовые силы, действующие на жидкость, не равны нулю, а являются потенциальными.

Для любых функций  $u_0 \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$  и  $f \in L_2([t_0, \vartheta]; \overset{\circ}{J}(\Omega))$  прямая задача (1.1)–(1.3), (1.6) имеет единственное слабое решение (см., например, [6, гл. 6, § 6], [7, гл. 3, § 3], [8, гл. 1, § 6]), которое при любом  $t \in [t_0, \vartheta]$  удовлетворяет энергетическому равенству

$$\|u(t, \cdot)\|^2 + 2\nu \int_{t_0}^t [\|u_{x_1}(\tau, \cdot)\|^2 + \|u_{x_2}(\tau, \cdot)\|^2] d\tau = \|u_0\|^2 + 2 \int_{t_0}^t \langle f(\tau, \cdot), u(\tau, \cdot) \rangle d\tau \quad (1.10)$$

и при любых  $t_1 \in [t_0, \vartheta]$ ,  $t_2 \in [t_1, \vartheta]$  удовлетворяет неравенствам

$$\|u(t_2, \cdot)\| \leq \|u(t_1, \cdot)\| + \int_{t_1}^{t_2} \|f(\tau, \cdot)\| d\tau, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} & \|u(t_2, \cdot)\|^2 + 2\nu \int_{t_1}^{t_2} [\|u_{x_1}(\tau, \cdot)\|^2 + \|u_{x_2}(\tau, \cdot)\|^2] d\tau \\ & \leq \|u(t_1, \cdot)\|^2 + 2\|u(t_1, \cdot)\| \int_{t_1}^{t_2} \|f(\tau, \cdot)\| d\tau + 2\left(\int_{t_1}^{t_2} \|f(\tau, \cdot)\| d\tau\right)^2, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $\|\cdot\|$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначают соответственно норму и скалярное произведение в  $L_2(\Omega)^2$ .

Поскольку далее будет важна зависимость решения прямой задачи от начальных данных, то это решение иногда будем обозначать символом  $u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0)$ . Решение обратной задачи иногда будем обозначать символом  $u = u(\cdot, \cdot; \vartheta, u_\vartheta)$ . Прямая задача поставлена корректно, и ее решение непрерывно зависит от начальных данных в следующем смысле: если  $u_0^{(k)} \rightarrow u_0$  сильно в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ , то имеет место сильная сходимость  $u^{(k)} = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0^{(k)}) \rightarrow u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0)$  при  $k \rightarrow \infty$  в каждом из пространств  $C([t_0, \vartheta]; \overset{\circ}{J}(\Omega))$ ,  $W_{2,0}^{0,1}((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$ ,  $L_4((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$ . Это утверждение следует из указанных ниже неравенств, приведенных, например, в [6, гл. 6, § 6], [7, гл. 3, § 3], [8, гл. 1, § 6] и справедливых при любом  $t \in [t_0, \vartheta]$ :

$$\|u^{(k)}(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|^2 \leq \|u_0^{(k)} - u_0\|^2 \exp\left(\frac{2}{\nu} \int_{t_0}^t [\|u_{x_1}(\tau, \cdot)\|^2 + \|u_{x_2}(\tau, \cdot)\|^2] d\tau\right), \quad (1.13)$$

$$\nu \int_{t_0}^t \left[ \|u_{x_1}^{(k)}(\tau, \cdot) - u_{x_1}(\tau, \cdot)\|^2 + \|u_{x_2}^{(k)}(\tau, \cdot) - u_{x_2}(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau \leq \|u_0^{(k)} - u_0\|^2 \quad (1.14)$$

$$+ 4 \operatorname{mes}(\Omega) \nu^{-1} \max_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u^{(k)}(\tau, \cdot) - u(\tau, \cdot)\|^2 \int_{t_0}^t \left[ \|u_{x_1}(\tau, \cdot)\|^2 + \|u_{x_2}(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau, \\ \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \left[ \|u_{x_1}^{(k)} - u_{x_1}\|^2 + \|u_{x_2}^{(k)} - u_{x_2}\|^2 \right] dx d\tau \quad (1.15)$$

$$\leq 4 \max_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u^{(k)}(\tau, \cdot) - u(\tau, \cdot)\|^2 \int_{t_0}^t \left[ \|u_{x_1}^{(k)}(\tau, \cdot) - u_{x_1}(\tau, \cdot)\|^2 + \|u_{x_2}^{(k)}(\tau, \cdot) - u_{x_2}(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau.$$

Из определения слабого решения прямой краевой задачи и неравенств (1.10)–(1.12) несложно выводится также следующее утверждение: если  $u_0^{(k)} \rightarrow u_0$  слабо в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ , то при  $k \rightarrow \infty$  имеют место сходимости  $u^{(k)} \rightarrow u$  сильно в  $L_4((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$ ,  $u^{(k)} \rightarrow u$  слабо в  $W_{2,0}^{0,1}((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$ ,  $u^{(k)}(t, \cdot) \rightarrow u(t, \cdot)$  слабо в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  равномерно по  $t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $u^{(k)}(t, \cdot) \rightarrow u(t, \cdot)$  сильно в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  при любом фиксированном  $t \in (t_0, \vartheta]$ .

Последнее из указанных свойств означает полную непрерывность нелинейного оператора

$$A: \overset{\circ}{J}(\Omega) \ni u_0 \rightarrow Au_0 = u(\vartheta, \cdot; t_0, u_0) \in \overset{\circ}{J}(\Omega).$$

Поскольку обратная краевая задача (1.1)–(1.4) может иметь не более одного решения, то для оператора  $A$  существует обратный оператор  $A^{-1}$ , определенный на области значений  $R_A = \{u(\vartheta, \cdot; t_0, u_0) : u_0 \in D_A\}$  оператора  $A$  с областью определения  $D_A = \overset{\circ}{J}(\Omega)$ . Из полной непрерывности оператора  $A$  следует, что обратный оператор  $A^{-1}$  не может быть непрерывным оператором

$$A^{-1}: \overset{\circ}{J}(\Omega) \supset R_A \ni u_\vartheta \rightarrow u(t_0, \cdot; \vartheta, u_\vartheta) \in D_A = \overset{\circ}{J}(\Omega).$$

Отсюда следует, что обратная краевая задача разрешима в указанном выше смысле только для финальных состояний  $u_\vartheta \in R_A$  и не является корректно поставленной задачей в том смысле, что не обладает непрерывной зависимостью решений от финальных данных. Это означает, что если  $u_\vartheta^* \approx u_\vartheta$  и имеют смысл элементы  $u_0 = u(t_0, \cdot; \vartheta, u_\vartheta)$  и  $u_0^* = u(t_0, \cdot; \vartheta, u_\vartheta^*)$ , то элемент  $u_0^*$  не следует принимать в качестве приближения к точному решению  $u_0$  ретроспективной обратной задачи, отвечающему точным данным  $u_\vartheta$  [9–11].

Из описанных свойств решений прямой и обратной краевых задач следует, что пространство  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  естественно принять в качестве пространства состояний среды (фазового пространства динамической системы (1.1)–(1.3)). В этом пространстве и будет рассматриваться эволюция во времени состояний среды. При этом для любого  $u_\vartheta \in R_A$  решение  $u(\cdot, \cdot; \vartheta, u_\vartheta)$  обратной краевой задачи (1.1)–(1.4) будет иметь след  $u(t_0, \cdot; \vartheta, u_\vartheta) = u^0 \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ . Отметим также, что множество  $R_A$ , из элементов которого разрешима обратная задача, имеет довольно сложное строение и не поддается сколько-нибудь простому описанию. По крайней мере, легко проверить, что множество  $R_A$  не является линейным многообразием и состоит из функций более гладких, чем функции из пространства  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ . Далее, чтобы не ограничиваться постоянными оговорками относительно принадлежности финального состояния  $u_\vartheta$  тому или иному множеству, всюду будем считать, что при рассмотрении обратных краевой или ретроспективной задач имеет место включение  $u_\vartheta \in R_A$ .

Приступим теперь к решению ретроспективной обратной задачи. Сведем ее к задаче стартового управления [1–5] следующим образом. Введем в рассмотрение некоторое подходящее

множество  $U$  возможных состояний среды в начальный момент времени  $t_0$  (не исключается случай, когда это множество совпадает со всем пространством  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  возможных состояний среды в начальный момент времени) и некоторый подходящий функционал  $I$ , определенный на множестве  $U$ . Множество  $U$  будет представлять собой множество допустимых стартовых управлений, а функционал  $I$  — функционал качества управления. Ожидается, что управление, или одно из управлений, минимизирующее функционал  $I$  на множестве  $U$ , доставит решение рассматриваемой задаче, т.е.  $u(\vartheta, \cdot; t_0, u_0) = u_\vartheta$  для какого-нибудь управления  $u_0 \in \operatorname{argmin}\{I(w): w \in U\}$ . Таким образом, в случае достаточных на то оснований, исходную ретроспективную обратную задачу можно сформулировать как задачу стартового управления, состоящую в нахождении подходящего управления, минимизирующего функционал качества  $I$  на множестве допустимых управлений  $U$ :

$$I(w) \rightarrow \min: w \in U. \quad (1.16)$$

Выберем в данном конкретном случае

$$I(w) = \|u(\vartheta, \cdot; t_0, w) - u_\vartheta\|^2, \quad U = \overset{\circ}{J}(\Omega). \quad (1.17)$$

Легко заметить, что этот функционал непрерывен и даже слабо непрерывен на  $U$ , но не является выпуклым на этом множестве. Минимальное нулевое значение функционала на  $U$  достигается на единственном элементе  $u_0 = u(t_0, \cdot; \vartheta, u_\vartheta)$ :

$$I_0^* = \min\{I(w): w \in U\} = 0, \quad U_0^* = \operatorname{argmin}\{I(w): w \in U\} = \{u_0\}.$$

Для решения задачи оптимального управления (1.16) воспользуемся каким-нибудь из градиентных методов (см., например, [12–14]). Построение соответствующей итерационной последовательности, как будет показано ниже, фактически сведется к решению серии прямых задач, которые являются корректно поставленными задачами и допускают устойчивую численную реализацию. Вычислим сначала градиент функционала (1.17).

Зафиксируем произвольный элемент  $w \in U$  и дадим ему приращение  $h \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ . Пусть  $u = u(\cdot, \cdot; t_0, w)$  и  $\tilde{u} = u(\cdot, \cdot; t_0, w + h)$ , тогда разность  $z = \tilde{u} - u$  является слабым решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} z_t + (z \nabla) z = \nu \Delta z - (u \nabla) z - (z \nabla) u, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} z(t, x) = 0, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ z(t, x) = 0, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \partial\Omega, \\ z(t_0, x) = h(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Приращение функционала можно представить в виде

$$I(w + h) - I(w) = 2\langle u(\vartheta, \cdot) - u_\vartheta, z(\vartheta, \cdot) \rangle + \|z(\vartheta, \cdot)\|^2.$$

Покажем, что

$$2\langle u(\vartheta, \cdot) - u_\vartheta, z(\vartheta, \cdot) \rangle = \langle \psi(t_0, \cdot), h \rangle - \int_{t_0}^{\vartheta} \langle \psi, z_i z_{x_i} \rangle dt,$$

где  $\psi = \psi(\cdot, \cdot) = \psi(\cdot, \cdot; w)$  — решение следующей линейной краевой задачи, которую далее будем называть сопряженной задачей к краевой задаче (1.1)–(1.3):

$$\begin{cases} \psi_t = -\nu \Delta \psi - u_i \psi_{x_i} + \psi_i \nabla u_i, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \psi(t, x) = 0, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ \psi(t, x) = 0, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \partial\Omega, \\ \psi(\vartheta, x) = 2(u(\vartheta, x) - u_\vartheta(x)), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 & 2\langle u(\vartheta, \cdot) - u_\vartheta, z(\vartheta, \cdot) \rangle = \langle \psi(\vartheta, \cdot), z(\vartheta, \cdot) \rangle \\
 & = \langle \psi(t_0, \cdot), h \rangle + \int_{t_0}^{\vartheta} \int_{\Omega} \left[ z \psi_t - \nu z x_i \psi x_i - z_i z x_i \psi - u_i z x_i \psi - z_i u x_i \psi \right] dx dt \\
 & = \langle \psi(t_0, \cdot), h \rangle + \int_{t_0}^{\vartheta} \int_{\Omega} \left[ \psi_t z - \nu z x_i \psi x_i + u_i \psi x_i z - \psi_i \nabla u_i z - z_i z x_i \psi \right] dx dt \\
 & = \langle \psi(t_0, \cdot), h \rangle - \int_{t_0}^{\vartheta} \langle \psi, z_i z x_i \rangle dt.
 \end{aligned}$$

Из неравенств (1.13)–(1.15) вытекают следующие оценки

$$\|z(\vartheta, \cdot)\|^2 \leq C_1 \|h\|^2, \quad \left| \int_{t_0}^{\vartheta} \langle \psi, z_i z x_i \rangle dt \right| \leq C_2 \|h\|^2, \quad (1.18)$$

$$C_1 = C_1(w) = \exp\left(\frac{2}{\nu} \int_{t_0}^{\vartheta} (\|u x_1\|^2 + \|u x_2\|^2) dt\right),$$

$$C_2 = C_2(w) = \left(\int_{t_0}^{\vartheta} \|\psi\|^2 dt\right)^{1/2} \sqrt{\frac{4\text{mes}(\Omega)C_1}{\nu} (1 + \ln C_1)}.$$

Из этих оценок следует, что

$$I(w+h) - I(w) = \langle \psi(t_0, \cdot), h \rangle + o(\|h\|),$$

значит, функционал  $I$  дифференцируем по Фреше в каждой точке  $w \in U$  [12–14] и

$$I'(w) = \psi(t_0, \cdot) = \psi(t_0, \cdot; w) \in \overset{\circ}{J}(\Omega).$$

Из (1.18) следует, что  $o(\|h\|) \leq (C_1 + C_2)\|h\|^2$ , причем  $C_1 \geq 1$ .

Отметим, что вычисление градиента  $I'(w)$  сводится к последовательному выполнению следующих действий: решению прямой задачи и нахождению ее решения  $u = u(\cdot, \cdot; t_0, w)$ ; решению сопряженной задачи и нахождению ее решения  $\psi = \psi(\cdot, \cdot) = \psi(\cdot, \cdot; w)$ ; взятию следа  $\psi(t_0, \cdot)$ , который и является искомым градиентом. Сопряженная задача решается в обратном направлении времени, тем не менее, она является корректно поставленной задачей, поскольку в правой части уравнения оператор Лапласа стоит со знаком минус.

Поскольку каждый из этапов вычисления градиента представляет собой в определенном смысле корректную задачу, то функционал  $I$  является непрерывно дифференцируемым на  $U$ . Более того, градиент этого функционала слабо непрерывен на  $U$ : если  $U \ni w^{(k)} \rightarrow w \in U$  слабо в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ , то  $I'(w^{(k)}) \rightarrow I'(w)$  в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ . Градиент удовлетворяет на  $U$  локальному условию Липшица: для любого ограниченного множества  $W \subset U$  существует число  $L \geq 0$  такое, что для любых элементов  $w_1$  и  $w_2$  из  $W$  выполняется неравенство

$$\|I'(w_1) - I'(w_2)\| \leq L \cdot \|w_1 - w_2\|.$$

Функционал  $I$  не имеет на  $U$  других точек минимума, кроме точки  $u_0$ . Действительно, если он имеет в некоторой точке  $w_0 \in U$  локальный или глобальный минимум, то в ней

$I'(w_0) = 0$  [12–14]. Поскольку  $I'(w_0) = \psi(t_0, \cdot; w_0)$ , то из условия  $\psi(t_0, \cdot; w_0) = 0$ , в силу единственности решения начально-краевой задачи для сопряженного уравнения и единственности решения обратной краевой задачи (1.1)–(1.4), вытекает, что  $\psi(\vartheta, \cdot; w_0) = 0$ , значит,  $u(\vartheta, \cdot; t_0, w_0) = u_\vartheta$  и  $w_0 = u_0$ . Отсюда, в частности, следует, что градиент обращается в нуль только в точке  $u_0$ . Отметим, что привлечение для решения задачи необходимого условия минимума функционала  $I'(u_0) = \psi(t_0, \cdot; u_0) = 0$ , бесполезно, поскольку приводит к исходному условию  $u(\vartheta, \cdot; t_0, u_0) = u_\vartheta$ , вытекающему из равенства  $\psi(\vartheta, \cdot; u_0) = 2(u(\vartheta, \cdot; t_0, u_0) - u_\vartheta) = 0$ , которое следует из необходимого условия экстремума  $\psi(t_0, \cdot; u_0) = 0$  в силу единственности решения сопряженной задачи.

Рассмотрим градиентный итерационный процесс

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} - \gamma_k I'(u_0^{(k)}), \quad u_0^{(0)} \in U, \quad 0 < \gamma_k < 1/C^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.19)$$

где  $C^{(k)} = C_1(u_0^{(k)}) + C_2(u_0^{(k)})$ , а величины  $C_1 = C_1(\cdot)$  и  $C_2 = C_2(\cdot)$  определены выше.

**Теорема 1.1.** *Каково бы ни было начальное приближение  $u_0^{(0)} \in U$ , последовательность значений функционала качества  $\{I(u_0^{(k)})\}$ , где последовательность  $\{u_0^{(k)}\}$  определена соотношениями (1.19), монотонно убывает и сходится к некоторому числу  $I_0 \geq 0$ . Если выбор параметра  $\gamma_k$  подчинить дополнительному условию  $\delta_1/C^{(k)} < \gamma_k < \delta_2/C^{(k)}$ ,  $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ , то  $\|I'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$  и  $\|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Если при некотором  $v \in U$  множество уровня  $M(v) = \{w \in U: I(w) \leq I(v)\}$  является ограниченным и  $u_0^{(0)} \in M(v)$ , то при выборе параметра  $\gamma_k$  из того же самого дополнительного условия получим также, что последовательность  $\{u_0^{(k)}\}$  является минимизирующей, имеет место сходимость  $u_0^{(k)} \rightarrow u_0$  слабо в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ , и если, к тому же, для некоторой константы  $d > 0$  на множестве  $M(v)$  выполняется неравенство  $I(w) \leq d \|I'(w)\|$ , то справедлива следующая оценка скорости сходимости для функционала:*

$$0 \leq I(u_0^{(k)}) \leq C_0/k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad C_0 = \text{const} \geq 0.$$

**Доказательство.** Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что  $I'(u_0^{(k)}) \neq 0$  при всех  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . В противном случае, если бы при некотором  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  оказалось  $I'(u_0^{(k)}) = 0$ , то из (1.19) получили бы стационарную последовательность  $u_0^{(k)} = u_0^{(k+1)} = \dots = u_0$ , и тогда утверждение теоремы стало бы очевидным. Из (1.18) и (1.19) следуют неравенства

$$I(u_0^{(k+1)}) - I(u_0^{(k)}) \leq -\gamma_k \|I'(u_0^{(k)})\|^2 + C^{(k)} \gamma_k^2 \|I'(u_0^{(k)})\|^2 < 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

обеспечивающие монотонное убывание последовательности  $\{I(u_0^{(k)})\}$ . Поскольку она еще ограничена снизу нулем, то она сходится к некоторому числу  $I_0 \geq 0$ .

Пусть теперь выполняется дополнительное условие  $\delta_1/C^{(k)} < \gamma_k < \delta_2/C^{(k)}$ . Покажем, что  $\|I'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Если бы это было не так, то существовали бы некоторое число  $\varepsilon > 0$  и подпоследовательность  $\{k_m\} \subseteq \{k\}$  такие, что  $\|I'(u_0^{(k_m)})\| \geq \varepsilon$ . Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что это неравенство выполняется для самой последовательности. Тогда из неравенства

$$I(u_0^{(k)}) - I(u_0^{(k+1)}) \geq \|I'(u_0^{(k)})\|^2 \left( \gamma_k - \gamma_k^2 C^{(k)} \right) \quad (1.20)$$

следует, что  $\|I'(u_0^{(k)})\|^2 \left( \gamma_k - \gamma_k^2 C^{(k)} \right) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  в силу того, что последовательность  $\{I(u_0^{(k)})\}$  является сходящейся и  $I(u_0^{(k)}) - I(u_0^{(k+1)}) \rightarrow 0$ . Учитывая неравенства  $\|I'(u_0^{(k)})\| \geq \varepsilon$

и  $(\gamma_k - \gamma_k^2 C^{(k)}) \geq \delta_1 (1 - \delta_2)/C^{(k)}$ , получаем  $C^{(k)} \rightarrow \infty$  и  $\gamma_k \rightarrow 0$ . Суммируя неравенства (1.20), получим сходящиеся ряды

$$\infty > I(u_0^{(0)}) - I_0 \geq \sum_{k=0}^{\infty} \|I'(u_0^{(k)})\|^2 (\gamma_k - \gamma_k^2 C^{(k)}) \geq \varepsilon (1 - \delta_2) \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \|I'(u_0^{(k)})\|.$$

Тогда из (1.19) получим неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \|I'(u_0^{(k)})\| < \infty,$$

из которого вытекает фундаментальность и ограниченность последовательности  $\{u_0^{(k)}\}$  в пространстве  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ . Из ее ограниченности вытекает ограниченность последовательности  $\{C^{(k)}\}$ , что противоречит свойству  $C^{(k)} \rightarrow \infty$ . Полученное противоречие показывает, что  $\|I'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Теперь из неравенства

$$\|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \leq \gamma_k \|I'(u_0^{(k)})\| \leq \|I'(u_0^{(k)})\|$$

и свойства  $\|I'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$  получаем  $\|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Пусть теперь при некотором  $v \in U$  множество уровня  $M(v)$  ограничено и  $u_0^{(0)} \in M(v)$ . Тогда  $\{u_0^{(k)}\} \subset M(v)$  и последовательность  $\{u_0^{(k)}\}$  ограничена в пространстве  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ , поэтому имеет слабо сходящуюся в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  подпоследовательности, и пусть  $\{u_0^{(k_m)}\}$  — любая из таких слабо сходящихся подпоследовательностей. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что слабо сходится сама последовательность и элемент  $u_* \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$  является ее слабым пределом. В силу слабой непрерывности функционала и его градиента, получаем  $I(u_0^{(k)}) \rightarrow I(u_*)$  и  $I'(u_0^{(k)}) \rightarrow I'(u_*)$  в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ . Учитывая сходимости  $\|I'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$ , имеем  $I'(u_*) = 0$ ,  $u_* = u_0$ ,  $I(u_*) = I_0^* = I_0 = 0$ . Получили, что любая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности  $\{u_0^{(k)}\}$  сходится к одному и тому же элементу  $u_0$ . Значит, сама последовательность  $\{u_0^{(k)}\}$  слабо сходится к элементу  $u_0$ .

Выведем оценку скорости сходимости функционала. Из ограниченности множества  $M(v)$  следует ограниченность множества чисел  $\{C^{(k)}\}$ . Поэтому существует некоторое число  $C > 1$  такое, что  $1 \leq C^{(k)} \leq C$  для любого  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Тогда, в силу выбора параметра  $\gamma_k$  из дополнительного условия, получаем неравенства

$$I(u_0^{(k)}) - I(u_0^{(k+1)}) \geq \|I'(u_0^{(k)})\|^2 (\gamma_k - \gamma_k^2 C^{(k)}) \geq \|I'(u_0^{(k)})\|^2 \delta_1 (1 - \delta_2)/C.$$

Учитывая неравенство  $I(w) \leq d \|I'(w)\|$ , имеем

$$I(u_0^{(k)}) - I(u_0^{(k+1)}) \geq \left( \frac{\delta_1 (1 - \delta_2)}{C d^2} \right) I(u_0^{(k)})^2.$$

Отсюда и из леммы 2.6.4 из [12, гл. 2, § 6] следует искомая оценка скорости сходимости функционала. Теорема доказана.

Отметим, что неравенство  $I(w) \leq d \|I'(w)\|$  заведомо выполняется, когда функционал  $I$  является выпуклым на каком-нибудь выпуклом множестве, включающем ограниченное множество уровня  $M(v)$ . Действительно, обозначив через  $d$  диаметр множества  $M(v)$ , имеем

$$I(w) = I(w) - I(u_0) \leq \langle I'(w), w - u_0 \rangle \leq \|I'(w)\| \|w - u_0\| \leq d \|I'(w)\|.$$

Исследуем возможности решения ретроспективной обратной задачи при регуляризации исходного функционала качества [9–11]. Регуляризованный функционал качества управления возьмем в виде  $T_\alpha(w) = I(w) + \alpha \cdot \|w\|^2$  и рассмотрим задачу оптимального управления

$$T_\alpha(w) \rightarrow \min : w \in U. \quad (1.21)$$

Пусть параметр  $\alpha$  пока фиксирован. Регуляризованный функционал является растущим, любое его множество уровня ограничено, он слабо полунепрерывен снизу на  $U$ , множество  $U_\alpha^* = \operatorname{argmin} \{T_\alpha(w) : w \in U\}$  минимизирующих элементов задачи (1.21) не пусто, любая минимизирующая последовательность задачи (1.21) сходится сильно в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  ко множеству  $U_\alpha^*$ , т.е. расстояние от элемента последовательности до множества  $U_\alpha^*$  стремится к нулю. Функционал  $T_\alpha$  дифференцируем по Фреше и локально липшицев на  $U$ , причем

$$T_\alpha'(w) = I'(w) + 2\alpha w.$$

Из рассмотрения минимумов функционалов  $I$  и  $T_\alpha$  на  $U$  для любого элемента  $w_\alpha \in U_\alpha^*$  имеют место следующие свойства [9,10]:

$$\begin{aligned} I(u_0) = 0 \leq I(w_\alpha), \quad 0 \leq T_\alpha^* = T_\alpha(w_\alpha) \leq T_\alpha(u_0), \quad \alpha \|w_\alpha\|^2 + I(w_\alpha) \leq \alpha \|u_0\|^2, \\ I(w_\alpha) \leq \alpha \|u_0\|^2, \quad \|w_\alpha\|^2 \leq \|u_0\|^2, \quad \alpha \|u_0\|^2 = T_\alpha(u_0), \quad T_\alpha'(w_\alpha) = I'(w_\alpha) + 2\alpha w_\alpha = 0, \\ I(w_\alpha) \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим градиентный итерационный процесс

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} - \gamma_k T_\alpha'(u_0^{(k)}), \quad u_0^{(0)} \in U, \quad 0 < \gamma_k < 1/C_\alpha^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.22)$$

где  $C_\alpha^{(k)} = \alpha + C^{(k)}$ , величина  $C^{(k)}$  определена выше.

**Теорема 1.2.** *Каково бы ни было начальное приближение  $u_0^{(0)} \in U$ , последовательность значений функционала качества  $\{T_\alpha(u_0^{(k)})\}$ , где последовательность  $\{u_0^{(k)}\}$  определена соотношениями (1.22), монотонно убывает и сходится к некоторому числу  $T_\alpha^0 \geq T_\alpha^*$ . Если выбор параметра  $\gamma_k$  подчинить дополнительному условию  $\delta_1/C_\alpha^{(k)} < \gamma_k < \delta_2/C_\alpha^{(k)}$ ,  $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ , то дополнительно получим  $\|T_\alpha'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$  и  $\|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \rightarrow 0$ , причем последовательность  $\{u_0^{(k)}\}$  будет сильно сходиться в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  ко множеству  $S_\alpha^* = \{w \in M_\alpha(u_0^{(0)}) : T_\alpha'(w) = 0\}$  стационарных точек функционала  $T_\alpha$  из множества уровня  $M_\alpha(u_0^{(0)}) = \{w \in U : T_\alpha(w) \leq T_\alpha(u_0^{(0)})\}$ . Если, кроме того, для некоторой константы  $d > 0$  на множестве  $M_\alpha(u_0^{(0)})$  выполняется неравенство  $T_\alpha(w) - T_\alpha^* \leq d \|T_\alpha'(w)\|$ , то последовательность  $\{u_0^{(k)}\}$  является минимизирующей,  $T_\alpha(u_0^{(k)}) \rightarrow T_\alpha^*$ , и сходится сильно в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  ко множеству  $U_\alpha^*$ ; также справедлива следующая оценка скорости сходимости функционала:*

$$0 \leq T_\alpha(u_0^{(k)}) - T_\alpha^* \leq C_\alpha/k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad C_\alpha = \operatorname{const} \geq 0.$$

**Доказательство.** Проверим только сходимость  $u_0^{(k)} \rightarrow S_\alpha^*$ , другие утверждения теоремы доказываются аналогично доказательствам подобных утверждений в теореме 1.1. Поскольку последовательность  $\{T_\alpha(u_0^{(k)})\}$  является монотонно убывающей, то последовательность  $u_0^{(k)}$  содержится в ограниченном множестве уровня  $M_\alpha(u_0^{(0)})$  и является ограниченной. Из ее ограниченности следует, что она имеет слабо сходящиеся в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  подпоследовательности; выберем любую из них. Можем считать, что подпоследовательность совпадает с самой последовательностью и сама последовательность слабо сходится к некоторому элементу  $u_* \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ . Поскольку  $I'(u_0^{(k)}) \rightarrow I'(u_*)$  в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ , имеем слабую сходимость в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ :

$$T_\alpha'(u_0^{(k)}) = I'(u_0^{(k)}) + 2\alpha u_0^{(k)} \rightarrow T_\alpha'(u_*) = I'(u_*) + 2\alpha u_*.$$

С другой стороны,  $T_\alpha'(u_0^{(k)}) \rightarrow 0$  в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ , значит,  $T_\alpha'(u_0^{(k)}) \rightarrow T_\alpha'(u_*) = 0$  в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  и  $u_* \in S_\alpha^*$ . Отсюда получаем сильную сходимость в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ :

$$u_0^{(k)} = (T_\alpha'(u_0^{(k)}) - I'(u_0^{(k)}))/2\alpha \rightarrow u_* = (T_\alpha'(u_*) - I'(u_*))/2\alpha.$$

Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности  $\{u_0^{(k)}\}$  сходится сильно в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  к некоторому элементу из множества  $S_\alpha^*$ . Это означает, что сама последовательность сходится в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  ко множеству  $S_\alpha^*$ . Теорема доказана.

Относительно неравенства  $T_\alpha(w) - T_\alpha^* \leq d \|T_\alpha'(w)\|$  заметим, что оно выполняется, например, когда функционал  $T_\alpha$  является выпуклым на каком-нибудь выпуклом множестве, содержащем в себе множество уровня  $M_\alpha(u_0^{(0)})$ .

Теорема 1.2 показывает, что задача (1.21), по сравнению с задачей (1.16), обладает лучшими свойствами в отношении сходимости градиентного метода. Кроме того, задача (1.21) обладает большим запасом практической устойчивости. Воспользуемся этими фактами, чтобы построить сильно сходящиеся приближения к решению задачи (1.16). Рассмотрим последовательность  $\{u_0^{(k)}\}$  из  $\varepsilon_k$ -оптимальных управлений задачи (1.21) при каком-нибудь фиксированном  $\alpha = \alpha_k > 0$  (считаем, что управление  $u_0^{(k)}$  находится каким-нибудь известным методом, например, одним из градиентных методов):

$$T_\alpha^* \leq T_\alpha(u_0^{(k)}) \leq T_\alpha^* + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = \text{const} \geq 0, \quad \alpha = \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Теорема 1.3.** Пусть числовые последовательности  $\{\varepsilon_k\}$  и  $\{\alpha_k\}$  удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$\varepsilon_k \alpha_k^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad \alpha_k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$I(u_0^{(k)}) \rightarrow I_0^*, \quad u_0^{(k)} \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \overset{\circ}{J}(\Omega) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 9.4.1 из [12, гл. 9, § 4, с. 641].

Рассмотрим теперь некоторые методы решения ретроспективной обратной задачи, которые учитывают ту или иную дополнительную информацию об искомом решении. Рассмотрим здесь несколько различных вариантов.

Пусть дополнительная информация об искомом решении ретроспективной обратной задачи состоит в том, что априори известно о принадлежности искомого начального состояния (управления)  $u_0$  некоторому известному шару  $B(u^*, r)$ . Воспользуемся этой информацией при нахождении решения задачи следующим образом. Положим  $U = B(u^*, r)$  и для нахождения  $u_0$  воспользуемся методом проекции градиента [12–14].

Рассмотрим итерационный процесс метода проекции градиента

$$u_0^{(k+1)} = \text{Pr}\left(u_0^{(k)} - \gamma_k I'(u_0^{(k)})\right), \quad u_0^{(0)} \in U, \quad \sigma_1 \leq \gamma_k \leq 2/(L + 2\sigma_2), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.23)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — положительные числа, являющиеся параметрами метода;  $L$  — константа Липшица градиента  $I'$  на шаре  $U$ ;  $\text{Pr}$  — оператор проектирования на  $U$ , в данном случае

$$\text{Pr}(w) = w, \quad \text{если } w \in U,$$

$$\text{Pr}(w) = u^* + r (w - u^*) \|w - u^*\|^{-1}, \quad \text{если } w \notin U.$$

**Теорема 1.4.** Каково бы ни было начальное приближение  $u_0^{(0)} \in U$ , последовательность  $\{u_0^{(k)}\}$  метода (1.23) является релаксационной, сходящейся слабо в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  ко множеству  $S_0 = \{u \in M_0(u_0^{(0)}): \langle I'(u), v - u \rangle \geq 0 \forall v \in U\}$  стационарных точек задачи минимизации, и

$$\langle I'(u_0^{(k)}), u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)} \rangle \rightarrow 0, \quad \|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Если при некотором  $v_* \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$  имеет место включение  $u_0^{(0)} \in M(v_*) \subseteq U$ , то дополнительно имеем  $I'(u_0^{(k)}) \rightarrow 0$  сильно в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ ,  $u_0^{(k)} \rightarrow u_0$  слабо в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ ,  $I(u_0^{(k)}) \rightarrow I_0^* = 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Если, кроме того, для некоторой константы  $d > 0$  на  $M(u_0^{(0)})$  выполняется неравенство  $I(w) \leq d \|I'(w)\|$ , то справедлива следующая оценка скорости сходимости для функционала:

$$0 \leq I(u_0^{(k)}) \leq C^0 k^{-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad C^0 = \text{const} \geq 0.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теорем 1.1, 1.2 или 8.4.1, 8.4.2 из [12].

Если известно, что искомое решение ретроспективной обратной задачи  $u_0$  содержится в известном выпуклом компактном множестве  $U \subset \overset{\circ}{J}(\Omega)$ , то итерационный процесс (1.23) приводит к последовательности управлений  $\{u_0^{(k)}\}$ , которая обладает всеми свойствами, указанными в теореме 1.4, а также обладает свойством сильной сходимости в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ .

Обратимся теперь к дополнительной априорной информации иного рода. Пусть известно, что при некотором  $t_* < t_0$  имеет место включение

$$u_0 \in U = \{ u(t_0, \cdot; t_*, v) : v \in V \}, \quad (1.24)$$

содержательный смысл которого состоит в том, что состояние  $u_0$  является финальным для решения  $u(\cdot, \cdot; t_*, v)$  краевой задачи

$$\begin{cases} u_t + (u \nabla) u - \nu \Delta u = -\nabla p + f_*, & t_* \leq t \leq t_0, & x \in \Omega, \\ \text{div } u(t, x) = 0, & t_* \leq t \leq t_0, & x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t_* \leq t \leq t_0, & x \in \partial \Omega, \end{cases}$$

с какой-нибудь функцией  $f_* \in L_2([t_*, t_0]; \overset{\circ}{J}(\Omega))$  и некоторым начальным, для момента времени  $t_*$ , состоянием  $v \in V \subset \overset{\circ}{J}(\Omega)$ . Множество  $V$  может совпадать со всем пространством  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ . Из свойств решений прямой краевой задачи вытекает, что множество  $U$  относительно компактно в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ .

Воспользуемся этой дополнительной априорной информацией следующим образом. Рассмотрим вспомогательную ретроспективную обратную задачу на промежутке  $t_* \leq t \leq \vartheta$ . Эту задачу сформулируем снова как задачу стартового управления

$$\tilde{I}(v) = \|y(\vartheta, \cdot; t_*, v) - u_\vartheta\|^2 \rightarrow \min : v \in V, \quad (1.25)$$

где  $y = y(\cdot, \cdot; t_*, v)$  — решение следующей прямой начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} y_t + (y \nabla) y - \nu \Delta y = -\nabla p + f^*, & t_* \leq t \leq \vartheta, & x \in \Omega, \\ \text{div } y(t, x) = 0, & t_* \leq t \leq \vartheta, & x \in \Omega, \\ y(t, x) = 0, & t_* \leq t \leq \vartheta, & x \in \partial \Omega, \\ y(t_*, x) = v(x), & & x \in \Omega, \end{cases}$$

здесь  $f^*(t, \cdot) = f_*(t, \cdot)$  при  $t_* \leq t < t_0$  и  $f^*(t, \cdot) = f(t, \cdot)$  при  $t_0 \leq t \leq \vartheta$ .

Допустим, что каким-то способом, например, одним из описанных выше способов, найдена сходящаяся слабо в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  минимизирующая последовательность управлений  $\{v^{(k)}\}$  задачи (1.25), т.е.  $\tilde{I}(v^{(k)}) \rightarrow 0$ ,  $v^{(k)} \rightarrow v_*$  слабо в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ ,  $y(\vartheta, \cdot; t_*, v_*) = u_\vartheta$ . Тогда, учитывая относительную компактность множества  $U$  в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ , имеем  $u_0^{(k)} = y(t_0, \cdot; t_*, v^{(k)}) \rightarrow u_0 = y(t_0, \cdot; t_*, v_*)$  сильно в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  и  $I(u_0^{(k)}) \rightarrow I(u_0) = 0$ . Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

**Теорема 1.5.** Пусть об исходной ретроспективной обратной задаче известна априорная информация (1.24), и пусть  $\{v^{(k)}\}$  есть слабо сходящаяся в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  к некоторому элементу  $v_* \in$

$\overset{\circ}{J}(\Omega)$  минимизирующая последовательность управлений вспомогательной задачи стартового управления (1.25). Тогда последовательность  $\{u_0^{(k)}\}$ , где  $u_0^{(k)} = y(t_0, \cdot; t_*, v^{(k)})$ , сильно в  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$  сходится к решению  $u_0 = u^0$  исходной ретроспективной обратной задачи (1.1)–(1.5).

## 2. Восстановление плотности внешних массовых сил

Обсудим содержательную сторону задачи. Пусть в некоторой ограниченной области  $\Omega$  с непроницаемой теплоизолированной границей  $\partial\Omega$  происходит движение вязкой несжимаемой жидкости под действием некоторых внешних массовых сил с плотностью  $f$ . Это движение наблюдается в течение какого-нибудь произвольного конечного отрезка времени  $[t_0, \vartheta]$ ,  $-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty$ , и в отдельные текущие моменты времени  $t_i \in [t_0, \vartheta]$  приблизительно измеряется состояние жидкости (в данном случае скорость)  $u(t_i, x)$ ,  $x \in \Omega$ . Требуется по ходу процесса по результатам этих приближенных измерений приблизительно восстановить динамику плотности  $f = f(t, x)$ ,  $t_0 \leq t \leq \vartheta$ ,  $x \in \Omega$ , той силы, которая порождает наблюдаемое движение жидкости. При этом восстановление должно быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений и чем чаще производятся замеры состояния жидкости. Порождающие движение силы заранее неизвестны, известны лишь их некоторые априорные оценки, известны также уравнения динамики процесса. Хорошо известно, что поставленная задача, как и многие другие подобные задачи, является некорректной [15–31, 33] и требует для своего решения привлечения методов регуляризации некорректных задач [9–11].

Приступим к формализации задачи. Пусть для простоты  $\Omega$  является ограниченной областью евклидова пространства  $\mathbb{R}^2$  и динамика состояний среды описывается начально-краевой задачей (1.1)–(1.3), (1.6) для системы уравнений Навье–Стокса. В системе уравнений коэффициент вязкости  $\nu$  считается известным. Начальное состояние  $u_0$ , плотность  $f$  внешних массовых сил и давление  $p$  априори неизвестны. Давление  $p$  далее будет исключено из рассмотрения (соответствующие пояснения имеются, например, в [6–8] и в первом разделе данной работы). Пусть известно лишь, что начальное состояние  $u_0$  и плотность  $f$  стеснены ограничениями  $u_0 \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$  и  $f \in F$ , где  $F$  — множество всех измеримых отображений  $[t_0, \vartheta] \rightarrow \overset{\circ}{J}(\Omega) \cap L_3(\Omega)^2$ , которые при почти всех  $t \in [t_0, \vartheta]$  принимают значения из известного выпуклого ограниченно замкнутого множества  $P \subset \overset{\circ}{J}(\Omega) \cap L_3(\Omega)^2$ . Известно [6–8], что для любых  $u_0 \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$  и  $f \in F$  существует единственное слабое решение  $u = u(u_0, f)$  начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), (1.6). Понятие слабого решения описано для полноты изложения в первом разделе, там же указаны функциональные пространства, которым принадлежит такое решение. Символом  $U$  обозначим множество всех возможных слабых решений рассматриваемой начально-краевой задачи,

$$U = \left\{ u = u(u_0, f): u_0 \in \overset{\circ}{J}(\Omega), f \in F \right\}.$$

Легко проверить, что движение  $u^* \in U$  может порождаться только одной парой элементов  $(u_0^*, f^*)$ ,  $u_0^* \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ ,  $f^* \in F$ , т.е.  $u^* = u(u_0^*, f^*)$ . Будем считать, что в каждый момент времени  $t \in [t_0, \vartheta]$  возможно измерение текущего состояния наблюдаемого движения  $u^*(t, \cdot)$  и результат измерения  $\tilde{u}(t) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$  удовлетворяет условию

$$\|\tilde{u}(t) - u^*(t, \cdot)\| \leq \delta, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad 0 \leq \delta \leq \delta_0. \quad (2.1)$$

Множество всех допустимых измерений  $\tilde{u}$  для наблюдаемого движения  $u^*$  обозначим через  $V(u^*, \delta)$ , оно состоит из всех отображений  $\tilde{u}: [t_0, \vartheta] \rightarrow \overset{\circ}{J}(\Omega)$ , которые при любом  $t \in [t_0, \vartheta]$  удовлетворяют неравенству (2.1),

$$V(u^*, \delta) = \left\{ \tilde{u} \in \{v: [t_0, \vartheta] \rightarrow \overset{\circ}{J}(\Omega)\}: \|\tilde{u}(t) - u^*(t, \cdot)\| \leq \delta, t_0 \leq t \leq \vartheta \right\}.$$

Промежуточная задача состоит в построении алгоритма, который в динамике (по ходу процесса) по любым допустимым измерениям текущих состояний наблюдаемого движения жидкости приближенно восстанавливает ее начальное состояние и плотность внешних массовых сил, порождающих движение. Вопрос о восстановлении начального состояния  $u_0^*$  в данном случае не имеет принципиального значения, поскольку на основании доступной для решения задачи информации он решается достаточно просто. Действительно, на основании доступной информации всегда имеем  $\|\tilde{u}(t_0) - u_0^*\| \leq \delta$ , поэтому в качестве приближения к начальному состоянию  $u_0^*$  естественно выбрать измерение  $\tilde{u}(t_0)$ . Далее вопрос о восстановлении начального состояния системы опустим и сосредоточимся на восстановлении только плотности внешних массовых сил.

Искомый промежуточный алгоритм отождествим с семейством отображений

$$D_\delta = \{ D_\delta^t, t_0 \leq t \leq \vartheta \}, \quad D_\delta^t: \overset{\circ}{J}(\Omega) \times \overset{\circ}{J}(\Omega) \rightarrow P.$$

Функцию  $f_\delta^* = f_\delta^*(\cdot; \tilde{u}): [t_0, \vartheta] \rightarrow P$ , определенную равенством

$$f_\delta^*(t; \tilde{u}) = D_\delta^t(\tilde{u}(t), z(t)), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta,$$

назовем реализацией промежуточного алгоритма  $D_\delta$  на измерении  $\tilde{u} \in V(u^*, \delta)$  и обозначим символом  $D_\delta(\tilde{u})$ . Переменная  $z$ , участвующая в нахождении значений функции  $f_\delta^*(\cdot; \tilde{u})$ , является внутренней переменной алгоритма  $D_\delta$ . Ее значение  $z = z(t)$  в момент времени  $t$  однозначно формируется на основании сложившейся к этому моменту времени доступной информации  $\tilde{u}(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t$ . Конкретные правила формирования переменной  $z = z(t)$  сформулируем ниже, когда речь пойдет о конкретных способах построения алгоритма  $D_\delta$ .

Исходную задачу теперь можно сформулировать так: требуется построить алгоритм  $D = \{ D_\delta, 0 \leq \delta \leq \delta_0 \}$ , представляющий собой семейство промежуточных алгоритмов, который на любом наблюдаемом движении  $u^* \in U$  обладает регуляризующим свойством

$$r_\delta(u^*) = \sup \left\{ \int_{t_0}^{\vartheta} \| D_\delta(\tilde{u})(t, \cdot) - f^*(t, \cdot) \|^q dt: \tilde{u} \in V(u^*, \delta) \right\} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

где  $f^* \in F$  есть плотность внешних массовых сил, которая вместе с соответствующим начальным состоянием  $u_0^* \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$  порождает наблюдаемое движение системы  $u^*$ ,  $1 \leq q < \infty$ .

Приступим к построению алгоритма, решающего поставленную задачу. Для построения искомого алгоритма воспользуемся методом динамической регуляризации с моделью [15–31, 33], который сочетает в себе идеи и конструкции теории позиционного управления [2, 15] и методы регуляризации некорректных задач [9–11]. В построениях будет участвовать модель исходной системы. С помощью этой модели и будут формироваться значения вспомогательной внутренней переменной для соответствующего алгоритма. Модель может быть реализована на компьютере.

Для любых  $t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $\delta \in [0, \delta_0]$ ,  $w \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ ,  $z \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$  определим значение отображения  $D_\delta^t$  в точке  $(w, z)$  по правилу

$$D_\delta^t(w, z) = \eta \in P: \quad H(\eta) \leq \min \left\{ H(s): s \in P \right\} + \varepsilon(\delta), \quad (2.3)$$

$$H(s) = 2 \langle z - w, s \rangle + \alpha(\delta) \|s\|^2, \quad (2.4)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  и  $\alpha = \alpha(\delta)$  — положительные параметры регуляризации, зависящие от  $\delta$ .

Значение  $z(t)$  вспомогательной внутренней переменной  $z$  для момента времени  $t \in [t_0, \vartheta]$  определим как значение в этот момент времени слабого решения системы-модели

$$y_t + (y \nabla) y - \nu \Delta y = f_\delta^*(\tau; \tilde{u}), \quad t_0 \leq \tau \leq t, \quad x \in \Omega, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} y(\tau, x) = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t, \quad x \in \Omega, \quad (2.6)$$

$$y(\tau, x) = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.7)$$

$$y(t_0, x) = \tilde{u}(t_0, x), \quad x \in \Omega. \quad (2.8)$$

Решение начально-краевой задачи (2.5)–(2.8) с вычислительной точки зрения удобно осуществлять в дискретной по времени схеме, подобно тому как решение обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется по схеме Эйлера [2]. В связи с этим опишем функционирование алгоритма восстановления в динамике в дискретной по времени схеме.

До начала наблюдения за процессом движения жидкости задаются какие-либо величины  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  и  $\alpha = \alpha(\delta)$  и какое-либо разбиение  $\Sigma$  отрезка  $[t_0, \vartheta]$  на промежутки  $[t_0, t_1), \dots, [t_i, t_{i+1}), \dots, [t_{m-1}, \vartheta]$  точками  $t_i, i = 0, \dots, m$ ,

$$\Sigma: \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \vartheta.$$

Диаметр  $h = \max\{t_{i+1} - t_i: i = 0, \dots, m-1\}$  разбиения  $\Sigma$  будет выбираться в зависимости от точности измерений  $\delta$ ,  $h = h(\delta)$ . Построение в динамике реализации алгоритма  $D_\delta(\tilde{u})$  опишем индуктивно по шагам  $i = 0, \dots, m-1$ .

Шаг  $i = 0$ . В начальный момент времени  $t_0$  наблюдателю поступает информация в виде измерения  $\tilde{u}(t_0)$ . Положив  $w = \tilde{u}(t_0)$  и  $z = \tilde{u}(t_0)$ , наблюдатель по правилу (2.3), (2.4) определяет элемент  $D_\delta^{t_0}(w, z)$ . Постоянная по времени функция

$$f_\delta^{(0)}(t, \cdot) = D_\delta^{t_0}(w, z), \quad t_0 \leq t < t_1,$$

принимается за приближение к искомой плотности  $f^*$  на промежутке времени  $t_0 \leq t < t_1$ . Затем для промежутка  $[a, b] = [t_0, t_1]$  решается краевая задача

$$y_t + (y \nabla) y - \nu \Delta y = g, \quad a \leq t \leq b, \quad x \in \Omega, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{div} y(t, x) = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad x \in \Omega, \quad (2.10)$$

$$y(t, x) = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.11)$$

с правой частью  $g = f_\delta^{(0)}$  и начальным условием  $y(a, \cdot) = z$ . После решения этой начально-краевой задачи запоминается состояние  $y(b, \cdot)$  ее решения.

Шаг  $i = 1$ . В момент времени  $t_1$  наблюдателю поступает информация в виде измерения  $\tilde{u}(t_1)$ . Положив  $w = \tilde{u}(t_1)$  и  $z = y(t_1, \cdot)$ , он по правилу (2.3), (2.4) определяет элемент  $D_\delta^{t_1}(w, z)$ . Постоянная по времени функция

$$f_\delta^{(1)}(t, \cdot) = D_\delta^{t_1}(w, z), \quad t_1 \leq t < t_2,$$

принимается за приближение к искомой плотности  $f^*$  на промежутке времени  $t_1 \leq t < t_2$ . Затем для промежутка  $[a, b] = [t_1, t_2]$  решается краевая задача (2.9)–(2.11) с правой частью  $g = f_\delta^{(1)}$  и начальным условием  $y(a, \cdot) = z$ , и запоминается состояние  $y(b, \cdot)$  этого решения.

Следующие шаги для  $i = 2, \dots, m-1$  выполняются аналогично. Таким образом, последовательно по ходу процесса (в динамике) к конечному моменту времени  $t_m = \vartheta$  будет получена кусочно-постоянная по времени реализация промежуточного алгоритма:

$$D_\delta(\tilde{u}) = f_\delta^*(t; \tilde{u}) = f_\delta^{(i)}(t), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (2.12)$$

**Теорема 2.1.** Пусть величины  $\alpha = \alpha(\delta)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ ,  $h = h(\delta)$  выбраны в зависимости от точности измерений  $\delta \in [0, \delta_0]$  таким образом, что выполняются согласования

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \frac{h(\delta)^{1/3}}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Тогда алгоритм  $D$ , реализации которого определяются соотношением (2.12), является регуляризирующим и доставляет решение исходной задаче восстановления плотности внешних массовых сил.

**Доказательство.** Для доказательства теоремы достаточно показать, что каковы бы ни были элемент  $u^* \in U$ , числовая последовательность  $\{\delta_k\} \subset [0, \delta_0]$  ( $\delta_k \rightarrow 0$ ) и последовательность элементов  $\{\tilde{u}_k\} \subset V(u^*, \delta_k)$ , будет иметь место сходимость  $D_{\delta_k}(\tilde{u}_k) \rightarrow f^*$  при  $k \rightarrow \infty$  в пространстве  $L_q([t_0, \vartheta]; \overset{\circ}{J}(\Omega))$ , где  $f^*$  — тот единственный элемент, который в паре с некоторым начальным состоянием  $u_0^*$  порождает движение  $u^*$ . Действительно, в этом случае будет иметь место (2.2). Принимая во внимание правило формирования реализации алгоритма  $f_k = D_{\delta_k}(\tilde{u}_k)$ , можно получить следующую оценку для вспомогательного функционала:

$$\Lambda_k(t) \equiv \|u^*(t, \cdot) - y_k(t, \cdot)\|^2 + \alpha(\delta_k) \int_{t_0}^t \left[ \|f_k(\tau, \cdot)\|^2 - \|f^*(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau \leq \eta_k,$$

$$\eta_k = C \left[ \delta_k + \varepsilon(\delta_k) + h(\delta_k)^{1/3} \right],$$

где  $C$  — некоторая положительная константа, которая не зависит от  $k$  и определяется по априори известным данным о системе и задаче;  $y_k$  — движение системы-модели, порожденное начальным состоянием  $\tilde{u}_k(t_0)$  и плотностью  $f_k$  (построение этого движения подробно по шагам описано выше). Из этой оценки следуют два неравенства

$$\max \left\{ \|u^*(t, \cdot) - y_k(t, \cdot)\|^2 : t \in [t_0, \vartheta] \right\} \leq \eta_k + 2 \alpha(\delta_k) (\vartheta - t_0) \max \left\{ \|w\|^2 : w \in P \right\}, \quad (2.13)$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \|f_k(\tau, \cdot)\|^2 d\tau \leq \int_{t_0}^{\vartheta} \|f^*(\tau, \cdot)\|^2 d\tau + \eta_k / \alpha(\delta_k). \quad (2.14)$$

Учитывая слабую компактность множества  $F$  в гильбертовом пространстве  $L_2([t_0, \vartheta]; \overset{\circ}{J}(\Omega))$ , не нарушая общности рассуждений, можем считать, что для некоторого элемента  $f_* \in F$

$$f_k \rightharpoonup f_* \text{ слабо в } E = L_2([t_0, \vartheta]; \overset{\circ}{J}(\Omega)). \quad (2.15)$$

Тогда при любом  $t \in [t_0, \vartheta]$  имеем

$$y_k(t, \cdot) = y_k(t, \cdot; \tilde{u}_k(t_0), f_k) \rightarrow u(t, \cdot; u_0^*, f_*) \text{ сильно в } \overset{\circ}{J}(\Omega). \quad (2.16)$$

Из (2.13) и (2.16) получаем тогда равенства

$$u^*(t, \cdot) = u(t, \cdot; u_0^*, f^*) = u(t, \cdot; u_0^*, f_*), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta,$$

из которых следует, что

$$f_* = f^*.$$

Из свойств (2.14), (2.15) и равенства  $f_* = f^*$  получаем цепочку неравенств

$$\|f^*\|_E \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_E \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_E \leq \|f^*\|_E,$$

из которой следует сходимость норм в гильбертовом пространстве  $E$

$$\|f_k\|_E \rightarrow \|f^*\|_E.$$

Если учесть теперь (2.15), то получим сходимость в  $E$

$$f_k \rightarrow f^* \text{ сильно в } E.$$

В силу ограниченности множества  $F$  в пространстве  $L_\infty([t_0, \vartheta]; \overset{\circ}{J}(\Omega))$  имеем также сильную сходимость  $f_k \rightarrow f^*$  в пространстве  $L_q([t_0, \vartheta]; \overset{\circ}{J}(\Omega))$  при любом  $q \in [1, \infty)$ . Теорема доказана.

Поступила 12.02.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Латгес Р., Лионс Ж.-Л.** Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.
4. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 418 с.
5. **Фурсиков А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 351 с.
6. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. 204 с.
7. **Темам Р.** Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
8. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
9. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
10. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
11. **Лаврентьев М.М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1962. 92 с.
12. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
13. **Сea Ж.** Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244 с.
14. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
15. **Osipov Yu.S., Kryazhinskii A.V.** Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, London, 1995. 586 p.
16. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
17. **Ким А.В., Короткий А.И., Осипов Ю.С.** Обратные задачи динамики параболических систем // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, № 5. С. 754–759.
18. **Осипов Ю.С., Короткий А.И.** Динамическое моделирование параметров в гиперболических системах // Известия АН СССР. Тех. кибернетика. 1991. № 2. С. 154–164.
19. **Osipov Yu.S., Korotkii A.I.** On dynamical restoration of parameters of elliptic systems // Ill-Posed Problems in Natural Sciences. Ed. A.N. Tikhonov. VSP/TVP, Moscow, 1992. P. 108–117.
20. **Короткий А.И.** Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11 (402). С. 101–124.
21. **Короткий А.И.** О восстановлении местоположения и интенсивности источников возмущений // Труды ИММ УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 219–227.
22. **Короткий А.И., Цепелев И.А.** Верхняя и нижняя оценки точности в задаче динамического определения параметров // Труды ИММ УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 228–238.
23. **Короткий А.И.** Восстановление множества управлений по измерениям состояний эволюционной системы // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 3. С. 440–446.
24. **Короткий А.И.** Восстановление управлений и параметров динамических систем при неполной информации // Изв. вузов. Математика. 1998. № 11. С. 47–55.
25. **Короткий А.И.** Восстановление управлений в условиях неполной информации о динамике системы // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 4. С. 566–575.
26. **Вдовин А.Ю.** Оценки погрешности в задаче восстановления управления // В кн.: Задачи позиционного моделирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 3–11.

27. **Максимов В.И.** О моделировании управлений в параболических вариационных неравенствах // Дифференц. уравнения 1991. Т. 27, № 9. С. 1603–1609.
28. **Короткий А.И.** О динамической реконструкции управлений и параметров в условиях неполной информации о системе // Дифференц. уравнения 1999. Т. 35, № 11. С. 1482–1486.
29. **Короткий А.И.** Динамическое восстановление управлений в условиях неопределенности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 21–24.
30. **Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Цепелев И.А.** Трехмерное моделирование обратной ретроспективной задачи тепловой конвекции // Журн. вычисл. матем. и математической физики. 2003. Т. 43, № 4. С. 614–626.
31. **Korotkii A.I., Tsepelev I.A.** Solution of a retrospective inverse problem for one nonlinear evolutionary model // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 2. 2003. P. 80–94.
32. **Ismail-Zadeh A., Tsepelev I., Talbot C., Korotkii A.** Three-dimensional forward and backward modelling of diapirism: Numerical approach and its applicability to the evolution of salt structures in the Pricaspian basin // Tectonophysics. 2004. V. 387, №1–4. P. 81–103.
33. **Ismail-Zadeh A.T., Schubert G., Tsepelev I.A., Korotkii A.I.** Inverse Problem of Thermal Convection: Numerical Approach and Application to Mantle Plume Restoration // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 2004. V. 145. P. 99–114.

## ВЫСОКОТОЧНАЯ НАВИГАЦИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ ПО РАДИОЛОКАЦИОННЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ<sup>1</sup>

А. В. Костоусов, В. Б. Костоусов

Статья посвящена задаче навигации движущегося объекта по радиолокационным изображениям. Приводится упрощенная математическая модель процесса формирования радиолокационного изображения, формулируется задача навигации по точечным ориентирам, описывается алгоритм сравнения эталонного и текущего (измеренного в процессе движения) изображений, и приводятся оценки информативности точечных изображений.

### 1. Введение

Проблемы, связанные с задачами механики, с устойчивостью движения и с управлением сложными динамическими системами, многие годы служат предметом исследований Свердловской школы механики и математической теории процессов управления. В работах Н.Н. Красовского и его учеников были сформированы научные направления, определившие тематику и методы исследований в широком круге задач динамики и управления. Традиционной особенностью выполняемых по этой тематике работ является постоянное внимание, уделяемое прикладным аспектам теории. Наряду с исследованиями фундаментального характера, закладывающими основы для будущих приложений, широкое развитие получили теоретические и прикладные работы, направленные на создание системных средств и разработку адекватного математического аппарата для анализа конкретных классов задач управления.

Актуальность этих задач связана с развитием возможностей управления объектами, с широким использованием бортовой вычислительной техники и новых принципов для решения навигационных задач.

Одним из наиболее перспективных путей достижения высокой точности решения навигационных задач для движущихся объектов (самолет, ракета, надводное или подводное судно, робот в помещении или в агрессивной среде, луноход и т.п.) на сегодняшний день является использование методов коррекции навигационных ошибок по наблюдениям физических полей окружающей среды или подстилающей поверхности. Такими полями могут быть поле высот рельефа местности (известная система "Тегсом"), магнитное или гравитационное поле Земли, поля оптического, радиолокационного или радиотеплового контрастов естественных покровов и искусственных ландшафтов и др.

Суть рассматриваемой проблемы можно описать следующим образом. При навигации объекта управляющие воздействия формируются по принципу обратной связи в виде функций от измеряемых величин. Во время движения в системе координат — в инерциальной навигационной системе, построенной на гироскопах и акселерометрах, накапливаются большие погрешности. Поэтому построенное управление и реализующаяся траектория могут значительно отличаться от желаемых. Эффективным средством коррекции накопленных ошибок является отказ от автономности управления и использование информации о внешних физических полях, наблюдаемых в процессе движения. При этом применяется корреляционно-экстремальный

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-01-00419, 04-07-90120).

подход, который основан на сравнении полученных измерений поля с априорной (эталонной) информацией о нем, хранящейся в памяти бортового вычислительного устройства.

Данный подход приводит к необходимости решения обратной задачи: восстановить координаты движущегося объекта по измеренным с ошибками значениям некоторых функций (операторов), связанных с траекторией объекта. С точки зрения общей теории, это обычная задача наблюдения-управления. Необычность ее заключается в том, что в процессе решения задачи наблюдения зачастую приходится заниматься обработкой изображений, распознаванием образов, численной минимизацией функции большого числа переменных с одновременной фильтрацией весьма больших по уровню ошибок с неизвестными статистическими свойствами. Все это надо делать в реальном времени с очень жесткими временными ограничениями — на решение в бортовом вычислителе отводятся сотые и даже тысячные доли секунды. При этом требуется получать решение с предельно возможной точностью. Таким образом, бортовой алгоритм должен быть максимально эффективным по времени, надежности и точности, то есть речь идет о создании систем коррекции навигационных ошибок, устойчивых по отношению к большим начальным отклонениям по координатам и скоростям объекта, к высокому уровню систематических и случайных ошибок (измерений, картографирования навигационного поля и т.д.) с произвольными статистическими свойствами. Алгоритмы должны обеспечивать предельно достижимую в данных условиях точность коррекции параметров движения и быть эффективными в вычислительном отношении.

На основе огромного опыта разработки конкретных систем навигации по геофизическим полям и большого фактического материала натуральных экспериментов, В.Л. Гасиловым и его сотрудниками были сформулированы и обоснованы основные алгоритмические принципы построения таких систем (см. [1]). Для реализации системы коррекции ошибок навигации необходимо наличие информативных относительно выбранного поля участков вдоль маршрута движения (зон коррекции), эталонных карт поля (предварительно записанных в память бортового вычислителя), датчиков-измерителей интенсивности поля, алгоритмов сравнения измеренных значений поля и наборов измерений, составленных с помощью карты, алгоритмов фильтрации ошибок, бортовой вычислительной машины для определения поправок координат, аппаратуры для формирования управления, корректирующего траекторию.

Поле радиолокационного контраста естественных и искусственных земных покровов является одним из геофизических полей, часто используемых в системах высокоточной навигации [2]. Это обусловлено следующими факторами:

- (1) потенциально высокой информативностью (в том числе на равнинных участках местности, где рельеф не информативен);
- (2) технической проработанностью основных компонент измерителей;
- (3) возможностью построения кадрового измерителя поля с малым временем наблюдения.

Однако практическое внедрение корреляционно-экстремальных систем навигации по полю радиолокационного контраста осложняется рядом обстоятельств. Среди них главные — нестабильность поля радиолокационного контраста (зависимость от погодных, сезонных условий и т.д.), проблема низкой угловой разрешающей способности реального луча и сложность построения эталона поля. Трудность построения эталона поля обусловлена, в основном, сильной зависимостью интенсивности принятого сигнала от условий визирования (в частности, углов визирования) и характеристик самого датчика — диаграммы направленности антенны, шумов приемника и т.п.. С учетом указанных обстоятельств особое значение приобретают экспериментальные и статистические методы исследования отражающих характеристик земных покровов и их зависимости от различных факторов. Первым шагом в этом направлении является построение математических моделей датчиков (различной степени подробности) и их отработка (идентификация) по результатам летных испытаний реальных приборов.

Статья посвящена развитию упомянутых выше принципов в задаче навигации движущегося объекта по радиолокационным изображениям и является продолжением исследования [3]. Сначала приводится упрощенная математическая модель процесса формирования радиолока-

ционного изображения, затем формулируется задача навигации по точечным ориентирам и описывается алгоритм сравнения эталонного и текущего (измеренного в процессе движения) изображений.

## 2. Моделирование радиолокационных изображений

Рассмотрим радиолокационную систему навигации и наведения движущегося объекта. Измерительным элементом такой системы является радиолокатор, который, обзревая пространство в районе цели, дает дальностно-угловой портрет  $I(\varphi, r)$  или дальностный портрет  $I(r)$  визируемого участка [4]. Дальностный портрет представлен набором отсчетов интенсивности  $I(r_j)$  отраженного сигнала, соответствующих значениям  $r_j$  наклонной дальности, в диапазоне от  $r_{\min}$  до  $r_{\max}$  с шагом  $\Delta r$ . Дальностно-угловой (в частности, дальностно-азимутальный) портрет представляет собой матрицу  $I(\varphi_i, r_j)$  интенсивностей, отвечающих углам (азимут)  $\varphi_i$  и наклонным дальностям  $r_j$ . В результате обработки и анализа дальностно-углового или дальностного портрета в системе определяется дальность и азимут (или в случае измерения дальностного портрета только дальность) цели. В конечном итоге в сочетании с другими параметрами, такими, как угол места, угловые скорости и скорость сближения с целью, радиолокационный визир выдает в систему управления набор измеренных параметров, которые должны обеспечить требуемые точности управления.

Система моделирования процесса навигации по радиолокационным изображениям опирается на геометрическую модель трехмерной сцены (3D-сцена) [3]. Сцена состоит из объектов, которые объединены в единую иерархическую структуру — дерево объектов, в котором каждый объект имеет ссылки на свои подобъекты. Дерево объектов определяет иерархию геометрических преобразований; это означает, что при изменении положения главного объекта соответствующим образом изменяется положение каждого его подобъекта. Объекты сцены могут быть трех типов: отражающие объекты, источники и приемники излучения. Источники могут совмещаться с приемниками (например, в случае моделирования радиолокатора), или быть разнесенными в пространстве (как в случае моделирования пассивных датчиков). Геометрия отражающего объекта задается набором примитивов (простых геометрических фигур), таких, как плоскость, треугольник, параллелограмм, трапеция, конус, сфера, параллелепипед и т.п.

Качество моделирования можно увеличить за счет более подробного представления пространственной сцены. Но для представления все более мелких объектов сцены требуется вводить в сцену новые примитивы. Увеличение числа примитивов существенно увеличивает затраты времени на вычисления. Поэтому мы использовали наложение специальных “радиолокационных” текстур на поверхность примитивов — этот подход хорошо известен в компьютерной графике. Теперь мелкие детали, например, окна на кирпичной стене дома, это всего лишь “рисунок” на прямоугольном примитиве, а не отдельные примитивы-окна или примитивы-кирпичи.

Для моделирования отражающих свойств каждый примитив содержит ссылки на записи в специальной базе данных отражающих свойств поверхностей, из которых строятся радиолокационные текстуры. База была разработана ранее [3] и наполнена информацией из справочной литературы (более 700 экспериментальных зависимостей удельной эффективной поверхности рассеяния различных поверхностей, измеренных при разных условиях).

В основе моделирования лежит алгоритм обратной трассировки лучей [5]. Этот алгоритм был взят за основу ввиду высокого качества результата его работы при относительной простоте реализации. Алгоритм трассировки позволяет просто и качественно моделировать такие эффекты, как отражение, преломление, затухание при распространении излучения в среде. Эти эффекты могут внести достаточно большой вклад в результат. Например, в морской радиолокации очень часто имеет место отражение радиоволн от водной поверхности, в результате возникают мнимые изображения объектов. Единственным недостатком алгоритма трассировки является низкая скорость работы ввиду того, что необходимо производить большой объем

вычислений. Однако имеется много способов оптимизации его работы, среди них — выбор подходящей организации пространственной сцены и распараллеливание вычислений.

Рассмотрим моделирование радиолокационного изображения (т.е. дальностно-углового портрета  $I(\varphi, r)$ ) в режиме, когда дальностно-угловой портрет формируется за счет поворота оси антенны. Сканирование оси антенны производится в азимутальной плоскости в секторе  $[-45^\circ, 45^\circ]$ , и строятся дальностные портреты  $I(r)$  для каждого положения антенны. Для построения очередного дальностного портрета в пространственном секторе  $\Omega = [\varphi_0, \varphi_1] \times [\theta_0, \theta_1]$  выпускается пучок из  $N_\varphi \times N_\theta$  элементарных лучей. Весь пространственный сектор разбивается по углу  $\varphi$  на  $N_\varphi$  и по углу  $\theta$  на  $N_\theta$  частей. В каждую такую часть случайным образом выпускается элементарный луч, который взаимодействует со сценой и в результате этого взаимодействия пополняет текущий дальностный портрет. Считается, что дальностный портрет будет полностью сформирован в результате взаимодействия всего пучка лучей со сценой. Пусть элементарный луч выпущен в направлении  $(\varphi_i, \theta_j)$ , тогда его вес определяется диаграммой направленности  $G(\varphi_i, \theta_j)$  антенны для этого направления. Затем луч трассируется до ближайшего пересечения с объектами сцены. Если пересечения не произошло, то луч не вносит энергию в дальностный портрет, и тогда производится трассировка следующего луча. Если луч пересек объект сцены в точке  $p$  на расстоянии  $r$ , то возвращенная энергия  $E$  (эта энергия будет добавлена к  $I(r)$ ) вычисляется по известной в радиолокации формуле:

$$E = \frac{PG^{\text{rad}}(p)T(s, p, n, p^{\text{rad}}, p^{\text{rec}})G^{\text{rec}}(p)}{(r^{\text{rad}})^2(r^{\text{rec}})^2}. \quad (2.1)$$

Здесь  $P$  — мощность излучателя;  $G^{\text{rad}}(p)$  — весовой коэффициент диаграммы направленности антенны излучателя в направлении точки  $p$ ;  $G^{\text{rec}}(p)$  — весовой коэффициент диаграммы направленности антенны приемника в направлении точки  $p$ ;  $r^{\text{rec}}$  — расстояние от приемника до точки  $p$ ;  $r^{\text{rad}}$  — расстояние от излучателя до точки  $p$ ;  $T(s, p, n, p^{\text{rad}}, p^{\text{rec}})$  — функция отражающих свойств поверхности. Эта функция при заданных текстурных свойствах  $s$  поверхности в точке  $p$  с нормалью  $n$  в этой точке, положении излучателя в точке  $p^{\text{rad}}$  и положении приемника в точке  $p^{\text{rec}}$  возвращает коэффициент ослабления энергии, отражающейся в сторону приемника.

Модель диаграммы направленности антенны имеет вид

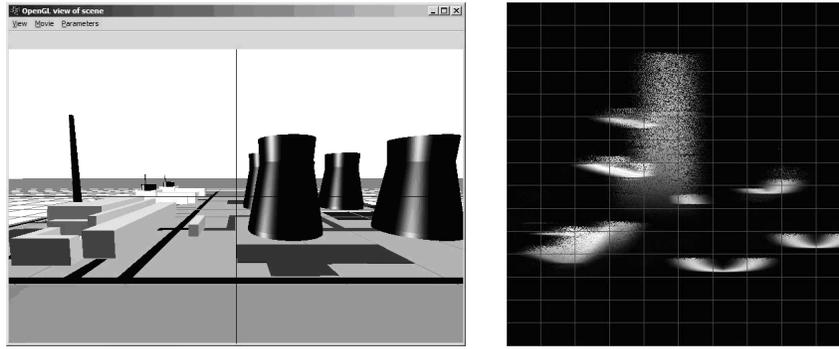
$$G(p) = G(\varphi, \theta) = \left( \frac{\sin(K\varphi)}{K\varphi} \frac{\sin(K\theta)}{K\theta} \right)^\rho, \quad (2.2)$$

где  $(\varphi, \theta)$  — направление из точки положения антенны в точку  $p$ ,  $K$  и  $\rho$  — некоторые константы.

В предлагаемой модели радиолокационного изображения легко учитываются множественные отражения луча от объектов сцены. Для этого по закону геометрической оптики вычисляется направление зеркально-отраженного луча, а по формуле (2.1) учитывается его вклад в конечный результат с учетом расстояния от антенны до точки  $p$ . Имеется также возможность ввести приборные шумы.

На рисунке представлен результат моделирования радиолокационного изображения на типовой сцене при типичных значениях параметров датчика и при нулевых приборных шумах. Слева представлено изображение сцены, полученное с использованием функций OpenGL; справа — дальностно-угловой портрет, полученный при следующих значениях параметров модели: ширина главного луча диаграммы направленности антенны —  $2^\circ$ , дальность до ближайшего объекта сцены — 200 м. На представленном изображении нанесена сетка с шагом 100 м по дальности и  $10^\circ$  по углу.

По указанным выше причинам (изменчивость и т.п.), использование в системе навигации радиолокационного изображения как такового не представляется возможным. Согласно опыту применения поля радиолокационного контраста [1, 3], более предпочтительными являются



Типовая сцена и ее радиолокационное изображение.

методы навигации, использующие устойчивые, наиболее яркие структурные элементы изображений. В первую очередь к таким элементам относятся точечные ориентиры — яркие изолированные точечные объекты на изображении. Преимущества точечных ориентиров — это относительная простота их выделения на изображении и возможность построения быстрых алгоритмов сопоставления точечных изображений (см. следующий раздел). Однако у точечных ориентиров есть и недостатки. Во-первых, они могут резко менять свое положение или даже вовсе пропадать при изменении угла визирования, во-вторых, весьма вероятно появление “ложных” ориентиров за счет малоразмерных зеркальных элементов наблюдаемой сцены. Другими структурными элементами для ориентирования могут выступать отрезки границ перепадов яркости или границ изменения текстурных свойств изображения [1], но их исследование выходит за рамки данной статьи. Заметим лишь, что, хотя границы сложнее выделять и сопоставлять, они более стабильны по сравнению с точечными ориентирами.

### 3. Задача навигации по точечным ориентирам

В данном разделе рассматривается задача навигации по точечным ориентирам, которые наблюдаются на получаемых в процессе движения радиолокационных изображениях. При этом предполагается, что визирование осуществляется при малых (не более нескольких градусов) углах места (угол отклонения оси антенны от горизонтальной плоскости). При этом условии и с учетом того, что радиолокационное изображение представляет собой усредненный по высоте образ сцены, можно допустить, что имеющиеся вариации оси визирования в вертикальной плоскости почти не влияют на изображения. Поэтому далее будем рассматривать задачу навигации на горизонтальной плоскости в следующей форме.

**Постановка задачи.** Пусть точечный датчик движется по плоскости и наблюдает точечные объекты (сцену), находящиеся в этой же плоскости. Состояние датчика характеризуется положением на плоскости и направлением оси обзора. Формируемое датчиком изображение сцены представляет собой набор точек, заданных координатами  $(\varphi, r)$ , где  $(\varphi$  — угол, отсчитываемый от оси обзора датчика, а  $r$  — расстояние от датчика до объекта;  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ , причем положительный угол имеют объекты, наблюдаемые датчиком справа от оси обзора;  $r \in [0, +\infty)$ . Пусть имеются два точечных изображения одной сцены, полученные датчиком из различных положений (для определенности назовем их  $I_1$  и  $I_2$ ); каждое из них задано набором точек — набором пар координат (для каждого изображения система координат своя). Пусть эти изображения заданы с погрешностями таким образом, что ошибка локализации каждой точки не превышает  $\delta$  (то есть, истинное положение точки находится в евклидовой  $\delta$ -окрестности заданного положения). Если изображение  $I_1$  было получено при известном положении и угловой ориентации движущегося объекта, то оно играет роль эталонного изображения, а по изображению  $I_2$  требуется определить новое положение и ориентацию; в таком случае  $I_2$  — текущее

изображение. Задача навигации по точечным ориентирам состоит из двух последовательно решаемых задач.

**Задача 1. Поиск соответственных точек.** Требуется найти такое положение  $I_2$  относительно  $I_1$  (значит указать координаты  $(X_0, Y_0)$  центра системы координат  $I_2$  в системе координат  $I_1$ ), при котором возможно указать максимальное число соответствий между точками  $I_1$  и  $I_2$  (точка  $I_2$  считается соответственной для точки  $I_1$  при данном положении  $I_2$  относительно  $I_1$ , если расстояние между точкой  $I_1$  и точкой  $I_2$ , переведенной в систему координат  $I_1$ , не больше  $\delta$ ).

Отметим, что фактически для поиска соответствий  $I_2$  с  $I_1$  мы используем только параллельный перенос одного изображения по отношению к другому и не рассматриваем такие преобразования, как поворот и масштабирование. Мотивацией для такого подхода могут служить следующие соображения: во-первых, большие различия по углу и масштабу между  $I_1$  и  $I_2$  могут быть устранены при помощи предварительной обработки с использованием информации о дальностях до ориентиров и информации о траектории от навигационной системы; во-вторых, после того, как смещение  $I_2$  относительно  $I_1$  и соответствие между их точками установлено, уточненные взаимное положение и ориентация  $I_2$  относительно  $I_1$  могут быть найдены, исходя из восстановленных навигационных параметров с помощью изложенного ниже метода (см. решение задачи 2).

Также отметим, что в случае, если есть несколько возможных положений  $I_2$  относительно  $I_1$ , дающих одинаковое число соответственных точек, предпочтительным считается то положение, для которого сумма квадратов разностей координат соответственных точек минимальна.

**Задача 2. Определение навигационных параметров по точечным ориентирам.** Для заданного соответствия между точками изображений требуется определить смещение датчика  $(\Delta x, \Delta y)$  и поворот оси обзора  $(\Delta \varphi)$ , повлекших переход первого изображения во второе;  $\Delta y$  — это смещение датчика вдоль начального положения оси обзора;  $\Delta x$  — это смещение датчика перпендикулярно начальному положению оси обзора (положительное смещение соответствует движению вправо);  $\Delta \varphi$  — это угол отклонения конечного положения оси обзора датчика относительно оси обзора в начальном положении; он может принимать значения от  $-\pi$  (поворот влево) до  $+\pi$  (поворот вправо).

**Алгоритм решения задачи 1.** Суть алгоритма заключается в переборе каким-либо образом полученных вариантов положения  $I_2$  относительно  $I_1$ , оценке их качества (путем построения соответствия между точками изображений) и выборе наилучшего в указанном смысле.

Для определения предварительного положения  $I_2$  относительно  $I_1$  можно использовать различные методы. Например, можно искать  $(X_0, Y_0)$  перебором, дискретизировав область их возможных значений с шагом  $\delta$ ; однако такой подход представляется очень неэффективным по времени. Другой вариант заключается в совмещении одной точки  $I_2$  с одной из точек  $I_1$ ; его недостатками являются относительно большая погрешность предварительного положения, и, как и в первом случае, его использование приводит к рассмотрению большого количества заведомо неверных вариантов. Для уменьшения количества рассматриваемых вариантов предварительного положения  $I_2$  относительно  $I_1$  и снижения указанной погрешности предлагается искать соответствия между парами точек  $I_2$  и  $I_1$ , а затем совмещать середины отрезков, составленных из этих пар.

Далее описывается процедура построения соответствия между точками  $I_2$  и  $I_1$  при заданном предварительном положении  $I_2$ . Эту задачу также можно решать по-разному. В частности, можно применить “жадный” алгоритм: после перевода, исходя из предварительного положения, координат точек  $I_2$  в систему координат  $I_1$  назначить в соответствие каждой точке  $I_2$  ближайшую точку  $I_1$ , попавшую в  $\delta$ -окрестность этой точки. Однако для данного алгоритма легко построить контрпример, когда он выдаст не лучшее в определенном выше смысле решение.

Ниже описывается несколько более трудоемкий алгоритм, лишенный недостатков “жадного”. Введем понятие *линка* — это структура данных, включающая указатель на точку  $I_2$ , указатель на точку  $I_1$  и расстояние  $d$  между ними при данном предварительном положении; кроме того, с каждой точкой свяжем счетчик линков, которые на нее ссылаются.

Перебирая все точки  $I_2$  и  $I_1$ , формируем список линков, у которых расстояние  $d$  не превосходит  $\delta$  (это все линки, потенциально способные войти в искомое соответствие). Ясно, что построение соответствия сводится к выбору наибольшего числа линков из этого списка так, что на каждую точку  $I_2$  и  $I_1$  ссылается не более одного линка из этого набора; кроме того, для выбора между равномошными наборами линков используется информация о расстоянии, содержащаяся в линках — чем сумма расстояний по всему набору линков меньше, тем лучше. Для дальнейших рассуждений важно, что мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между точками, т.е. если мы поставили одной точке  $I_2$  в соответствие точку  $I_1$ , то другой точке  $I_2$  ту же точку  $I_1$  мы в соответствие уже поставить не можем (и наоборот).

Пока список линков не пуст, повторяем следующие действия:

1. Сортируем список линков таким образом, что в начало попадают линки, ссылающиеся на точки так, что хотя бы у одной из них счетчик линков равен 1; эта первая группа упорядочивается по возрастанию суммы счетчиков линков у точек, на которые линки ссылаются (при равенстве этого показателя раньше в списке идет тот линк, у которого меньше расстояние); остальные линки упорядочиваются по возрастанию расстояния.
2. Если в начале списка оказался линк такой, что у обеих точек, на которые он ссылается, счетчики линков больше 1, добавляем этот линк к соответствию, помечаем обе точки как “использованные” и переходим к пункту 4.
3. Иначе, идем по списку, пока есть линки, такие, что хотя бы у одной из точек, на которые они ссылаются, счетчик линков равен 1; если обе точки, на которые ссылается текущий линк, еще не помечены как “использованные”, добавляем этот линк к соответствию и помечаем обе точки как “использованные”.
4. Сокращаем список линков: проходим по списку и, если хотя бы одна из точек, на которые ссылается текущий линк, помечена как “использованная”, удаляем его из списка и уменьшаем на 1 счетчики линков точек, на которые он ссылался.

После того, как соответствие между точками изображений установлено, можно уточнить положение  $I_2$  относительно  $I_1$ . Для этого в каждом изображении  $I_1$  и  $I_2$  вычисляются средние точки — точки, координаты которых являются средними арифметическими координат соответствующих точек. Затем эти средние точки совмещаются.

Численный эксперимент показал, что приведенный алгоритм работает устойчиво и корректно. В качестве  $I_1$  рассматривался равномерно распределенный по площади набор из 100 точек, в качестве  $I_2$  — фрагмент изображения  $I_1$  с линейным размером в 0.2 от размера  $I_1$  (туда попадало 4 точки);  $\delta$  выбиралось в диапазоне от 0.05 до 0.25 линейного размера  $I_2$ . При таких исходных данных в достаточно длинной серии экспериментов алгоритм находил не менее 75% истинных соответствий.

**Решение задачи 2.** Сначала выпишем прямые формулы преобразования координат точек изображения, показывающие, как отдельные точки получаемого датчиком изображения сцены реагируют на его перемещение и поворот:

$$\begin{cases} r' = \sqrt{(r \sin \varphi - \Delta x)^2 + (r \cos \varphi - \Delta y)^2}, \\ \varphi' = \arctan \left( \frac{r \sin \varphi - \Delta x}{r \cos \varphi - \Delta y} \right) - \Delta \varphi. \end{cases}$$

Однако для того чтобы решить поставленную задачу аналитически, вместо использования полярных координат  $\varphi$  и  $r$  удобно перейти к декартовым координатам  $x, y$  по формулам:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi, \\ y = r \cos \varphi. \end{cases} \quad (3.1)$$

Для новых координат прямые формулы имеют вид:

$$\begin{cases} x' = (x - \Delta x) \cos \Delta \varphi - (y - \Delta y) \sin \Delta \varphi, \\ y' = (x - \Delta x) \sin \Delta \varphi + (y - \Delta y) \cos \Delta \varphi. \end{cases} \quad (3.2)$$

Поскольку преобразование координат (3.1) взаимно однозначно, для оценки близости двух изображений можно использовать следующий функционал:

$$F = \sum_{i=1}^m \{ (x'_i - x_i)^2 + (y'_i - y_i)^2 \}, \quad (3.3)$$

где  $(x'_i, y'_i)$  — это координаты  $i$ -й точки одного изображения,  $(x_i, y_i)$  — координаты соответственной  $i$ -й точки другого изображения, а  $m$  — это количество соответственных точек.

Решение поставленной задачи заключается в поиске минимума функционала (3.3) по переменным  $\Delta x, \Delta y, \Delta \varphi$ , где в качестве координат точек первого изображения берутся преобразованные по формулам (3.2) координаты точек начального снимка, а в качестве координат точек второго — координаты точек конечного:

$$\begin{aligned} F(\Delta x, \Delta y, \Delta \varphi) = \sum_{i=1}^m \{ & [(x_i^0 - \Delta x) \cos \Delta \varphi - (y_i^0 - \Delta y) \sin \Delta \varphi - x_i]^2 \\ & + [(x_i^0 - \Delta x) \sin \Delta \varphi + (y_i^0 - \Delta y) \cos \Delta \varphi - y_i]^2 \} \longrightarrow \min. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь  $(x_i^0, y_i^0)$  соответствуют точкам начального изображения, а  $(x_i, y_i)$  — точкам конечного.

Дифференцируя функционал (3.4) по  $\Delta x, \Delta y$  и  $\Delta \varphi$ , приравнявая полученные производные к 0 и решая полученную систему уравнений, находим:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \arctan \left( \frac{\overline{x_0 y} - \bar{x}_0 \bar{y} - \overline{y_0 x} + \bar{y}_0 \bar{x}}{\overline{x_0 x} - \bar{x}_0 \bar{x} + \overline{y_0 y} - \bar{y}_0 \bar{y}} \right), \\ \Delta x &= \bar{x}_0 - \bar{x} \cos \Delta \varphi - \bar{y} \sin \Delta \varphi, \\ \Delta y &= \bar{y}_0 + \bar{x} \sin \Delta \varphi - \bar{y} \cos \Delta \varphi, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i^0, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i, \quad \bar{y}_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i^0, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i, \\ \overline{x_0 y} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i^0 y_i, \quad \overline{y_0 x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i^0 x_i, \\ \overline{x_0 x} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i^0 x_i, \quad \overline{y_0 y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i^0 y_i. \end{aligned}$$

**Оценка погрешностей.** Следуя описанной в [1] схеме, оценим влияние ошибок во входных данных на решение (3.5).

Пусть ошибки внесены как в начальное, так и в конечное изображение:

$$\begin{aligned} x_i^{0\varepsilon} &= x_i^0 + \varepsilon_{ix}^0, \quad y_i^{0\varepsilon} = y_i^0 + \varepsilon_{iy}^0, \\ x_i^\varepsilon &= x_i + \varepsilon_{ix}, \quad y_i^\varepsilon = y_i + \varepsilon_{iy}. \end{aligned}$$

Решение, полученное по зашумленным данным, имеет вид

$$\Delta\varphi^\varepsilon = \arctan \left( \frac{\overline{x_0^\varepsilon y^\varepsilon} - \overline{x_0^\varepsilon} \overline{y^\varepsilon} - \overline{y_0^\varepsilon x^\varepsilon} + \overline{y_0^\varepsilon} \overline{x^\varepsilon}}{\overline{x_0^\varepsilon x^\varepsilon} - \overline{x_0^\varepsilon} \overline{x^\varepsilon} + \overline{y_0^\varepsilon y^\varepsilon} - \overline{y_0^\varepsilon} \overline{y^\varepsilon}} \right),$$

$$\Delta x^\varepsilon = \overline{x_0^\varepsilon} - \overline{x^\varepsilon} \cos \Delta\varphi^\varepsilon - \overline{y^\varepsilon} \sin \Delta\varphi^\varepsilon,$$

$$\Delta y^\varepsilon = \overline{y_0^\varepsilon} + \overline{x^\varepsilon} \sin \Delta\varphi^\varepsilon - \overline{y^\varepsilon} \cos \Delta\varphi^\varepsilon.$$

Выпишем линейную часть разложения по степеням  $\varepsilon_{ix}^0, \varepsilon_{iy}^0, \varepsilon_{ix}, \varepsilon_{iy}$  разности между решением, полученным по зашумленным данным, и решением, найденным по точным данным:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^\varepsilon - \Delta\varphi &= \frac{1}{m(u^2 + v^2)} \\ &\times \left[ \sum_{i=1}^m \{-v(y_i^0 - \overline{y_0}) - u(x_i^0 - \overline{x_0})\} \varepsilon_{ix} + \sum_{i=1}^m \{v(x_i^0 - \overline{x_0}) - u(y_i^0 - \overline{y_0})\} \varepsilon_{iy} \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^m \{v(y_i - \overline{y}) - u(x_i - \overline{x})\} \varepsilon_{ix}^0 + \sum_{i=1}^m \{-v(x_i - \overline{x}) - u(y_i - \overline{y})\} \varepsilon_{iy}^0 \right], \\ \Delta x^\varepsilon - \Delta x &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ix}^0 - \frac{\cos \Delta\varphi}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ix} - \frac{\sin \Delta\varphi}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{iy} \\ &\quad - (\overline{x} \sin \Delta\varphi + \overline{y} \cos \Delta\varphi) (\Delta\varphi^\varepsilon - \Delta\varphi), \\ \Delta y^\varepsilon - \Delta y &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{iy}^0 + \frac{\sin \Delta\varphi}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ix} - \frac{\cos \Delta\varphi}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{iy} \\ &\quad + (\overline{x} \cos \Delta\varphi + \overline{y} \sin \Delta\varphi) (\Delta\varphi^\varepsilon - \Delta\varphi), \end{aligned}$$

где

$$u = \overline{x_0 y} - \overline{x_0} \overline{y} - \overline{y_0 x} + \overline{y_0} \overline{x},$$

$$v = \overline{x_0 x} - \overline{x_0} \overline{x} + \overline{y_0 y} - \overline{y_0} \overline{y}.$$

При условии малости  $\varepsilon_{ix}^0, \varepsilon_{iy}^0, \varepsilon_{ix}$  и  $\varepsilon_{iy}$  можно считать, что это и есть ошибка решения.

Если рассматривать все  $\varepsilon_{ix}^0, \varepsilon_{iy}^0, \varepsilon_{ix}$  и  $\varepsilon_{iy}$  как независимые и одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$ , мы можем найти дисперсию ошибки решения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta\varphi}^2 &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{m(u^2 + v^2)} \sum_{i=1}^m \frac{(x_i^0 - \overline{x_0})^2 + (y_i^0 - \overline{y_0})^2 + (x_i - \overline{x})^2 + (y_i - \overline{y})^2}{m}, \\ \sigma_{\Delta x}^2 &= \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{m} + \sigma_{\Delta\varphi}^2 (\overline{x} \sin \Delta\varphi + \overline{y} \cos \Delta\varphi)^2, \\ \sigma_{\Delta y}^2 &= \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{m} + \sigma_{\Delta\varphi}^2 (\overline{x} \cos \Delta\varphi + \overline{y} \sin \Delta\varphi)^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для нулевого решения ( $\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta\varphi = 0$ ) имеем:  $x_i = x_i^0, y_i = y_i^0, u = 0$ . Поэтому (3.6) преобразуется к особенно простому виду:

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{mv_0}, \quad \sigma_{\Delta x}^2 = \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{m} \left\{ 1 + \frac{\overline{y_0}^2}{v_0} \right\}, \quad \sigma_{\Delta y}^2 = \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{m} \left\{ 1 + \frac{\overline{x_0}^2}{v_0} \right\},$$

где

$$v_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i^0 - \overline{x_0})^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i^0 - \overline{y_0})^2.$$

Приведем результаты численного эксперимента для  $m = 11$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1$ ,  $\bar{y}_0 = 10000$ ,  $\bar{x}_0 = 500$ . Вычисления СКО ошибок по приведенным формулам дали результаты:  $\sigma_{\Delta\varphi} = 0.15^\circ$ ,  $\sigma_{\Delta x} = 22$ ,  $\sigma_{\Delta y} = 0.4$ . Статистический эксперимент при 100 испытаниях привел к следующим оценкам тех же СКО:  $\hat{\sigma}_{\Delta\varphi} = 0.1^\circ$ ,  $\hat{\sigma}_{\Delta x} = 15$ ,  $\hat{\sigma}_{\Delta y} = 0.3$ , что согласуется с теоретическими результатами.

**Закключение.** В результате исследования построен программный комплекс моделирования процесса навигации движущихся объектов по радиолокационным изображениям. Разработана подсистема моделирования пространственных сцен, реализованы некоторые конкретные сцены. Построена модель радиолокационного визира и проведено моделирование радиолокационных изображений. Решена задача определения параметров движения на основе сопоставления точечных изображений. Получены оценки информативности точечных сцен. Из этих оценок, в частности, следует, что информативность сцены тем выше, чем больше количество точек сцены  $m$  и больше величина  $v$  (сумма дисперсий величин  $x_i^0$  и  $y_i^0$  в случае нулевого решения).

Поступила 15.03.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гасилов В.Л., Костоусов В.Б.** Задача идентификации параметров движения объекта на основе обработки изображения внешнего информационного поля // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 78–86.
2. **Андреев Г.А., Потапов А.А.** Активные системы ориентации по геофизическим полям // Зарубежная радиоэлектроника. 1988. № 9. С. 62–85.
3. **Koustousov V.B., Koustousov A.V., Onuchin I.G.** Simulation of moving objects guidance by radar images // Materials of the 10th St.-Petersburg International Conference on Integrated Navigational Systems. CSRI “Electropribor”. 2003. P. 121–127.
4. **Ширман Я.Д., Горшков С.А. и др.** Методы радиолокационного распознавания и их моделирование // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1996. № 11.
5. **Роджерс Д.** Алгоритмические основы машинной графики. М.: Мир. 1989.

УДК 62.50

**ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ В ЗАДАЧЕ ПРОВОДКИ САМОЛЕТА ПРИ ВЕТРОВОМ ВОЗМУЩЕНИИ<sup>1</sup>****С. И. Кумков, В. С. Пацко, С. Г. Пятко, А. А. Федотов**

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений четвертого порядка, в упрощенном виде описывающая управляемое движение самолета в горизонтальной плоскости при наличии ветрового возмущения. Векторное управляющее воздействие имеет две компоненты, ограниченные по модулю. Одна компонента влияет на величину скорости, другая определяет изменение угла направления вектора скорости. Оговорен уровень максимального ветрового возмущения. Исследуется задача о возможности гарантированного перевода самолета из начального состояния на заданное терминальное множество в фиксированный момент времени с соблюдением фазовых ограничений в промежуточные моменты времени. На основе методов теории дифференциальных игр предложен алгоритм понятного построения множества разрешимости задачи о гарантированном переводе. Приведены результаты численного построения множеств разрешимости.

**Введение**

В системах предотвращения столкновений воздушных судов актуальной является задача приведения самолета из начального состояния в заданную область в назначенный момент времени. При этом в некоторые промежуточные моменты времени траектория должна проходить через другие заданные области пространства. Последовательность таких моментов и соответствующих областей вдоль траектории стандартного маневра задаются диспетчером службы управления воздушным движением с целью обеспечения безопасного расхождения конфликтующих судов.

Полезно иметь быстрый вычислительный алгоритм, позволяющий ответить на вопрос о возможности проведения самолета через заданные области, но уже при наличии ветровых возмущений.

В работе такой алгоритм предлагается для случая движения самолета в горизонтальной плоскости. Относительно ветрового возмущения считается известным лишь интервал возможных значений его скорости. Движение самолета описывается при помощи системы дифференциальных уравнений четвертого порядка, где две фазовые координаты имеют смысл геометрического положения самолета, третья координата — угол направления вектора скорости и четвертая — величина скорости. Таким образом, построения проводятся в четырехмерном фазовом пространстве.

Рассматриваемая задача трактуется как задача о нахождении множества разрешимости дифференциальной игры наведения [1, 2] на терминальное множество в фиксированный момент окончания при наличии фазовых ограничений, оговоренных в промежуточные моменты времени. Для решения задачи используется понятная процедура, основу которой составляют алгоритмы построения множеств достижимости, операции пересечения множеств и построения выпуклых оболочек. Подобная процедура (но только в прямом времени) использовалась ранее [3, 4] для построения информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости при неточных замерах его геометрического положения.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке компании “Новые информационные технологии в авиации” и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 04-01-96099).

## 1. Постановка задачи

Считаем, что движение самолета в горизонтальной плоскости (рис. 1) описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \varphi + v_1, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi + v_2, \\ \dot{\varphi} &= \frac{ku}{V}, \\ \dot{V} &= w, \end{aligned} \quad V \geq c > 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $x, y$  — координаты геометрического положения;  $v_1, v_2$  — компоненты вектора  $v$  ветрового возмущения;  $\varphi$  — угол между вектором скорости самолета и осью  $OX$ ;  $V$  — величина скорости (в невозмущенной среде);  $k$  — максимальное боковое ускорение;  $u, w$  — управляющие воздействия. Предполагаем, что управления  $u, w$ , а также помеха  $v$  стеснены геометрическими ограничениями

$$|u| \leq 1, \quad |w| \leq \mu, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^2,$$

где  $Q$  — выпуклое компактное множество.

Система (1.1), хотя и является упрощенной (отсутствуют факторы, связанные с влиянием ветровой помехи на аэродинамику движения), широко используется (см., например, [5, стр. 81–82]) в навигационных расчетах для построения опорных траекторий, составления полетных планов и т.д. Известны математические работы [6, 7], где система (1.1) применялась при  $v = 0$  для решения задач оптимального управления, связанных с движением самолета или автомобиля.

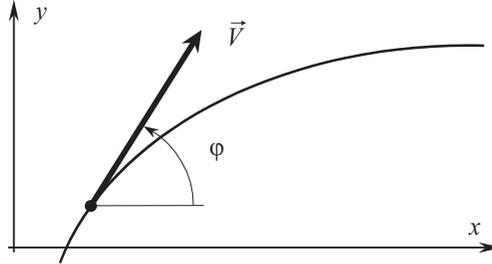


Рис. 1. Система координат.

Условимся, что значения координаты  $\varphi$ , отличающиеся на величину, кратную  $2\pi$ , отождествляются. Положим  $\mathbb{R}_c = \{V: V \geq c\}$ . Пусть

$$\Phi = \mathbb{R}^2 \times [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}_c$$

— фазовое пространство задачи.

Будем говорить, что управляющие воздействия  $u, w$  принадлежат первому игроку, а векторное мешающее воздействие  $v$  — второму.

Цель первого игрока — привести фазовый вектор системы (1.1) в фиксированный момент времени  $T$  на заданное множество  $M \subset \Phi$  с соблюдением в оговоренные моменты времени  $\tilde{t}_j, j = \overline{1, \omega}$ , фазовых ограничений  $H(\tilde{t}_j) \subset \Phi$ , как бы ни действовал второй игрок. Считаем, что

$$\begin{aligned} M &= M^\# \times M^\diamond, \\ t_0 \leq \tilde{t}_1 &< \dots < \tilde{t}_j < \dots < \tilde{t}_\omega \leq T, \end{aligned}$$

$$H(\tilde{t}_j) = H^\#(\tilde{t}_j) \times H^\diamond(\tilde{t}_j), \quad j = \overline{1, \omega}.$$

Здесь  $M^\#$  и  $H^\#(\tilde{t}_j)$  — выпуклые компактные множества на плоскости  $x, y$ ;  $M^\diamond, H^\diamond(\tilde{t}_j) \subset [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}_c$  — выпуклые компакты на плоскости  $\varphi, V$ .

Требуется построить в пространстве  $[t_0, T] \times \Phi$  максимальное множество  $W$ , из которого такое наведение возможно.

Используя терминологию книги [1], можно сказать, что  $W$  — максимальный стабильный мост в дифференциальной игре наведения на терминальное множество  $M$ .

Поясним возможное применение вычислительной программы построения множества  $W$ . Предположим, что диспетчер службы управления воздушным движением принял решение об изменении маршрута одного из самолетов. Выбирается типовой маневр на плоскости  $x, y$ . Например, на рис. 2 изображен типичный  $S$ -образный маневр (сплошная линия). Диспетчер оценивает, как можно осуществить выбранный маневр, двигаясь из начального положения  $(x_0, y_0)$  в момент  $t_0$  с начальным направлением  $\varphi_0$  вектора скорости и величиной скорости  $V_0$ . Расчет ведется с учетом ограничений  $|u(t)| \leq 1, |w(t)| \leq \mu$ , и в предположении об отсутствии ветрового возмущения. Далее, на проложенной траектории диспетчер задает терминальное множество  $M$ , отнесенное к моменту времени  $T$ , а также фазовые ограничения  $H(\tilde{t}_j), j = \overline{1, \omega}$ . Тем самым устанавливаются допуски на отклонение самолета от стандартной траектории. На рис. 2 пунктиром показаны проекции  $H^\#(\tilde{t}_j)$  множеств  $H(\tilde{t}_j)$  и проекция  $M^\#$  терминального множества  $M$  на плоскость  $x, y$ .

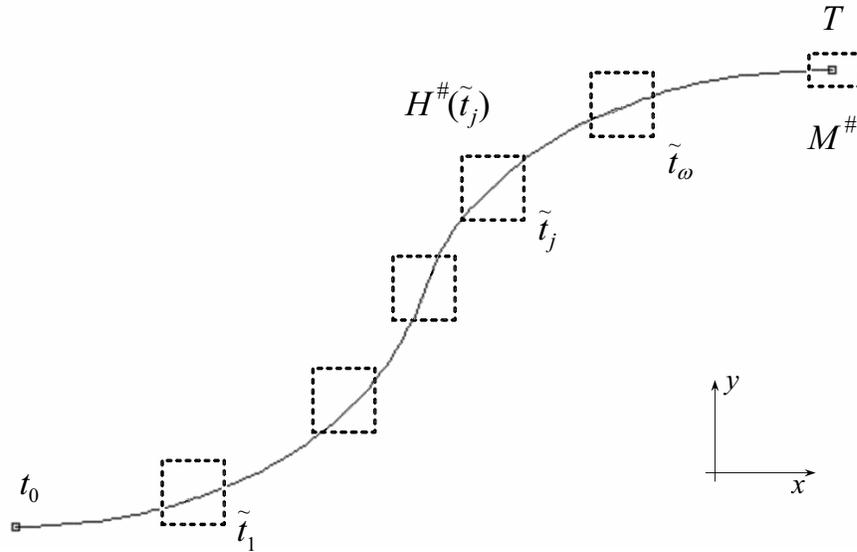


Рис. 2. Опорная траектория, фазовые ограничения и терминальное множество в проекции на плоскость  $x, y$ .

Диспетчера интересует вопрос о возможности прохождения самолета вблизи заданной траектории, но уже при наличии ветрового возмущения. Задав ограничение  $Q$  на ветровое возмущение (например, в виде  $|v| \leq \nu$ ), он при помощи вычислительной программы просчитывает множество  $W$ . Если сечение  $W(t_0)$  множества  $W$ , соответствующее начальному моменту  $t_0$ , содержит точку  $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$ , то маневр самолета выбран правильно. В противном случае выбранный маневр удовлетворительным не является и его нужно изменить.

## 2. Попятные процедуры построения множества разрешимости. Общие соображения

В теории дифференциальных игр накоплен значительный опыт [8–19] численного построения множеств разрешимости игровой задачи наведения на заданное множество  $M$  в фиксированный момент времени  $T$ . Как было отмечено в разделе 1, множество разрешимости называется также максимальным стабильным мостом. Разработаны алгоритмы попятного построения максимальных стабильных мостов как для линейных задач, так и для задач с нелинейной динамикой (см., например, [12–15, 18, 19]).

Размерность фазового вектора системы (1.1) равна четырем. Для такой размерности реализация алгоритмов общего характера наталкивается на существенные трудности. Учет специфики системы (1.1) позволяет обойти их.

Опишем схему применяемой попятной процедуры. Численное построение сечений  $W(t_i)$  максимального стабильного моста  $W$  проводится на заданной сетке моментов времени  $t_i$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_N = T$ . Удобно считать, что набор моментов  $\{\tilde{t}_j\}$ , в которые заданы фазовые ограничения, включается в набор  $\{t_i\}$ . Переход от сечения  $W(t_{i+1})$  к сечению  $W(t_i)$  осуществляется при помощи следующих операций:

(А) построение множества достижимости  $G(t_i; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v)$  рассматриваемой системы в обратном времени на момент  $t_i$  при начальном моменте  $t_{i+1}$ , начальном множестве  $W(t_{i+1})$  и при фиксированном постоянном управлении  $v$  второго игрока;

(Б) пересечение полученных множеств по  $v \in Q$  и пересечение с фазовым ограничением  $H(t_i)$ :

$$W(t_i) = \left( \bigcap_{v \in Q} G(t_i; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v) \right) \bigcap H(t_i). \quad (2.1)$$

Здесь считаем, что  $H(t_i) = \mathbb{R}^4$ , если в момент  $t_i$  фазового ограничения нет, т.е.  $t_i \notin \{\tilde{t}_j\}$ .

Если бы исследуемая система была линейной по фазовой переменной, то, опираясь на выпуклость терминального множества  $M$  и выпуклость фазовых ограничений  $H(\tilde{t}_j)$ ,  $j = \overline{1, \omega}$ , получили бы выпуклость множеств достижимости  $G(t_i; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v)$ ,  $v \in Q$ . Таким образом, пришлось бы иметь дело с операциями пересечения выпуклых множеств. Пересечение выпуклых множеств — существенно более простая операция, по сравнению с операцией пересечения невыпуклых множеств. Более того, при отсутствии фазового ограничения, в задачах с линейной динамикой пересекаем множества  $G(t_i; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v)$ ,  $v \in Q$ , отличающиеся друг от друга лишь сдвигом, обусловленным различием  $v \in Q$ . Это также позволяет существенно упростить процедуру пересечения.

Нелинейная система (1.1) обладает спецификой, позволяющей в значительной степени использовать перечисленные выше упрощения, характерные для линейных систем.

## 3. Попятная процедура построения множества разрешимости задачи наведения для системы (1.1)

Специфика системы (1.1) состоит в том, что переменные  $x$  и  $y$ , характеризующие геометрическое положение объекта, не входят в правую часть системы. Это позволяет при интегрировании движения системы рассматривать два последних уравнения независимо от двух первых. Кроме того, при фиксированных функциях  $\varphi(\cdot)$  и  $V(\cdot)$  два первых уравнения представляют собой весьма простой вариант линейной динамики. Управление первого игрока здесь отсутствует. Если задать на промежутке времени от момента  $t_{i+1}$  до момента  $t_i$  управление второго игрока в виде функции времени  $v(\cdot)$  (в частности, постоянное управление), то множество состояний на плоскости  $x, y$ , оговоренное для момента  $t_{i+1}$ , жестко перенесется на некоторый вектор — результат интегрирования правой части при оговоренных функциях  $\varphi(\cdot)$ ,  $V(\cdot)$  и управляющем воздействии  $v(\cdot)$ .

Сечения  $W(t_i)$  максимального стабильного моста  $W$  будем строить на сетке моментов времени  $t_i$  с достаточно малым шагом  $\Delta = t_{i+1} - t_i$ ,  $t_i < t_{i+1}$ . Множество  $Q$  при этом заменяем выпуклым многоугольником с конечным числом вершин. Множества  $M^\#$ ,  $M^\diamond$  и  $H^\#(\tilde{t}_j)$ ,  $H^\diamond(\tilde{t}_j)$  также заменяются выпуклыми многоугольниками.

За счет введения дискретизации сечения  $W(t_i)$  строятся приближенно. Кроме того, в процессе построения очередного сечения будем использовать овыпукление некоторых множеств, тем самым закругляя сверху выстраиваемое сечение. (Тщательный компьютерный анализ влияния дополнительной процедуры овыпукления показывает, что вносимое закругление “не слишком велико”.) Чтобы подчеркнуть приближенность построений и применение операций, закругляющих результат сверху, будем употреблять символ  $\mathbf{W}(t_i)$  вместо  $W(t_i)$  для обозначения сечений, выстраиваемых по предлагаемому в работе алгоритму.

### 3.1. Представление четырехмерных множеств

Описание алгоритма построения множеств  $\mathbf{W}(t_i)$  начнем с изложения принятого способа представления четырехмерных множеств.

На плоскости  $\varphi$ ,  $V$  вводим прямоугольную сетку узлов  $\{\varphi_n\} \times \{V_m\}$ , не зависящую от времени. По координате  $\varphi$  сетка строится в диапазоне  $[-\pi, \pi]$ . По координате  $V$  интервал расположения узлов сетки задается на основе множества  $M^\diamond$  с учетом грубого оценивания возможного изменения величины скорости  $V$ .

Пусть

$$L(T) = \{(n, m): (\varphi_n, V_m) \in M^\diamond \cap H^\diamond(T)\},$$

$$F_{n,m}(T) = M^\# \cap H^\#(T), \quad (n, m) \in L(T),$$

Видно, что множество  $F_{n,m}(T)$  одно и то же для каждого  $(n, m) \in L(T)$ .

Множество узлов  $(\varphi_n, V_m)$ ,  $(n, m) \in L(T)$ , вместе с относящимися к ним множествами  $F_{n,m}(T)$  примем за множество  $\mathbf{W}(T)$ . Таким образом,

$$\mathbf{W}(T) = \bigcup_{(n,m) \in L(T)} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times F_{n,m}(T)).$$

В аналогичном виде будем задавать множества  $\mathbf{W}(t_i)$ : совокупность узлов  $(\varphi_n, V_m)$ ,  $(n, m) \in L(t_i)$ , на плоскости  $\varphi$ ,  $V$  вместе с относящимися к ним выпуклыми множествами  $F_{n,m}(t_i)$  на плоскости  $x, y$ . Рекуррентная процедура построения множеств  $\mathbf{W}(t_i)$  описывается в следующем пункте.

### 3.2. Переход от множества $\mathbf{W}(t_{i+1})$ к множеству $\mathbf{W}(t_i)$

Пусть множество  $\mathbf{W}(t_{i+1})$  построено. Оно представлено в виде

$$\mathbf{W}(t_{i+1}) = \bigcup_{(n,m) \in L(t_{i+1})} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times F_{n,m}(t_{i+1})),$$

где  $F_{n,m}(t_{i+1})$  — выпуклые множества.

(А) *Приближенное построение множеств  $G(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v)$ .*

1. Рассмотрим произвольный узел  $(\varphi_n, V_m)$  такой, что  $(n, m) \in L(t_{i+1})$ . Пусть

$$B(\varphi_n, V_m) = \left\{ \text{Pr} \left( \varphi_n - \frac{ku}{V_m} \Delta, V_m - w\Delta \right); u \in \{-1, 0, 1\}, w \in \{-\mu, 0, \mu\} \right\}.$$

Здесь  $\text{Pr}(\varphi, V)$  — узел сетки  $\{\varphi_n\} \times \{V_m\}$ , ближайший к  $(\varphi, V)$ . Множество  $B(\varphi_n, V_m)$  приближает узлами сетки  $\{\varphi_n\} \times \{V_m\}$  множество достижимости системы

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{ku}{V}, \\ \dot{V} &= w, \quad |u| \leq 1, \quad |w| \leq \mu, \end{aligned} \quad (3.1)$$

из точки  $(\varphi_n, V_m)$  на момент  $t_i = t_{i+1} - \Delta$ . При этом шаг  $\Delta$  согласован с параметрами сетки.

2. Символом  $D_{n,m}(t_i)$  обозначим номера тех узлов с момента  $t_{i+1}$ , которые переходят в узел  $(\varphi_n, V_m)$ , т.е.

$$D_{n,m}(t_i) = \{(n^*, m^*) \in L(t_{i+1}): (\varphi_n, V_m) \in B(\varphi_{n^*}, V_{m^*})\}.$$

Пусть

$$K(t_i) = \{(n, m): D_{n,m}(t_i) \neq \emptyset\}.$$

Совокупность узлов  $(\varphi_n, V_m)$ ,  $(n, m) \in K(t_i)$ , представляет собой в сеточной аппроксимации множество достижимости системы (3.1) на момент  $t_i$  при начальном множестве в момент  $t_{i+1}$ , составленном из узлов  $(\varphi_n, V_m)$ ,  $(n, m) \in L(t_{i+1})$ .

3. Каждому узлу  $(\varphi_n, V_m)$ ,  $(n, m) \in K(t_i)$ , поставим в соответствие объединение

$$A_{n,m}(t_i, 0) = \bigcup_{(n^*, m^*) \in D_{n,m}(t_i)} (F_{n^*, m^*}(t_{i+1}) - \Delta V_{m^*}(\cos \varphi_{n^*}, \sin \varphi_{n^*})').$$

Здесь верхний индекс штрих означает транспонирование. Множество  $A_{n,m}(t_i, 0)$  приближает сечение четырехмерного множества достижимости  $G(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0)$  системы (1.1) при  $\varphi = \varphi_n$  и  $V = V_m$  (для случая  $v = 0$ ). Поскольку каждое множество  $F_{n^*, m^*}(t_{i+1})$  на плоскости  $x, y$  является выпуклым, то  $A_{n,m}(t_i, 0)$  есть объединение выпуклых множеств на плоскости.

Строим выпуклую оболочку

$$S_{n,m}(t_i, 0) = \text{conv } A_{n,m}(t_i, 0). \quad (3.2)$$

Пусть

$$\mathbf{G}(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0) = \bigcup_{(n, m) \in K(t_i)} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times S_{n,m}(t_{i+1}, 0)).$$

Множество  $\mathbf{G}(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0)$  оценивает сверху (с учетом погрешностей дискретизации) множество достижимости  $G(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0)$ .

4. Отмеченные выше специфические свойства системы (1.1) позволяют легко построить аналогичное множество  $\mathbf{G}(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v)$  для любого постоянного  $v \in Q$ . А именно,

$$\mathbf{G}(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v) = \bigcup_{(n, m) \in K(t_i)} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times S_{n,m}(t_{i+1}, v)),$$

где

$$S_{n,m}(t_i, v) = S_{n,m}(t_{i+1}, 0) - \Delta v.$$

(Б) Построение множества  $\mathbf{W}(t_i)$ .

5. Чтобы найти пересечение  $\bigcap_{v \in Q} \mathbf{G}(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v)$ , достаточно построить для каждого  $(n, m) \in K(t_i)$  пересечение

$$E_{n,m}(t_i) = \bigcap_{v \in Q} S_{n,m}(t_i, v).$$

Выполнение этой операции сводится к нахождению положительно-однородной функции

$$\gamma_{n,m}(\ell, t_i) = \min_{v \in Q} \rho(\ell, S_{n,m}(t_i, v)), \quad \ell \in \mathbb{R}^2, \quad (3.3)$$

где  $\rho(\cdot, S_{n,m}(t_i, v))$  — опорная функция множества  $S_{n,m}(t_i, v)$ , и последующему построению выпуклой оболочки  $\text{conv } \gamma_{n,m}(\cdot, t_i)$ . Таким образом, получаем опорную функцию

$$\rho(\cdot, E_{n,m}(t_i)) = \text{conv } \gamma_{n,m}(\cdot, t_i)$$

множества  $E_{n,m}(t_i)$ . При реализации операции минимума в (3.3) перебираем лишь вершины многоугольника, аппроксимирующего множество  $Q$ .

6. Пусть

$$L(t_i) = \{(n, m) \in K(t_i): (\varphi_n, V_m) \in H^\diamond(t_i)\},$$

$$F_{n,m}(t_i) = E_{n,m}(t_i) \cap H^\#(t_i), \quad (n, m) \in L(t_i).$$

Учитывая (2.1) и принятый способ представления четырехмерных множеств, имеем

$$\mathbf{W}(t_i) = \bigcup_{(n,m) \in L(t_i)} (\{\varphi_n, V_m\} \times F_{n,m}(t_i)).$$

Подчеркнем, что именно за счет операции овыпукления, присутствующей в формуле (3.2), получаем выпуклость множеств  $F_{n,m}(t_i)$ . Последнее, наряду с использованием сетки по координатам  $\varphi, V$ , определяет простоту реализации попятной процедуры. Операция овыпукления несколько расширяет выстраиваемую трубку множества разрешимости, по сравнению с действительной.

Алгоритм, состоящий из шагов 1–6, во многом аналогичен тому, что был разработан [3, 4] для построения информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости. В работах [3, 4] приведено сравнение точных множеств достижимости системы (1.1) с множествами, полученными при помощи операции построения выпуклой оболочки объединения выпуклых множеств. Показано, что возникающие ошибки не являются существенными с практической точки зрения.

**З а м е ч а н и е.** Построение управления по принципу обратной связи, удерживающего движение самолета в условиях ветрового возмущения внутри множества разрешимости, является самостоятельной задачей и в данной работе не рассматривается.

#### 4. Результаты моделирования

Для моделирования работы описанного алгоритма были выбраны следующие числовые данные:

- максимальное боковое ускорение самолета  $k = 4 \text{ м/с}^2$ ;
- максимальное управляющее продольное ускорение  $\mu = 2 \text{ м/с}^2$ ;
- ограничение на ветровое возмущение задавалось в виде  $|v| \leq \nu$ ; значение параметра  $\nu$  бралось из диапазона  $16 \text{ м/с} \div 22 \text{ м/с}$ ;
- начальный момент времени  $t_0 = 0 \text{ с}$ ;
- общее время движения  $T = 120 \text{ с}$ ;
- начальная позиция самолета:  $x_0 = 0 \text{ м}$ ,  $y_0 = 0 \text{ м}$ ,  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $V_0 = 200 \text{ м/с}$ ;
- координаты опорной терминальной точки в момент  $T$ :  $x_T = 15216 \text{ м}$ ,  $y_T = 8543 \text{ м}$ ,  $\varphi_T = 0^\circ$ ,  $V_T = 200 \text{ м/с}$ ;

- опорная фазовая траектория между начальной позицией и опорной терминальной точкой строилась при помощи программных управлений (с “запасом” на неизвестные возмущения)  $u = 0.8$ ,  $w = -1.5$  м/с<sup>2</sup> на интервале времени  $[0, 60]$  с и  $u = -0.8$ ,  $w = 1.5$  м/с<sup>2</sup> на интервале  $[60, 120]$  с;
- терминальное множество  $M$  имело размер  $\pm 300$  м по координате  $x$ ,  $\pm 300$  м по координате  $y$ ,  $\pm 20^\circ$  по углу  $\varphi$  и  $\pm 20$  м/с по скорости  $V$ ; центры данных интервалов совмещены с соответствующими значениями параметров опорной терминальной точки;
- моменты времени, для которых заданы фазовые ограничения:  $\tilde{t}_1 = 20$ ,  $\tilde{t}_2 = 40$ ,  $\tilde{t}_3 = 60$ ,  $\tilde{t}_4 = 80$ ,  $\tilde{t}_5 = 100$  с;
- фазовые ограничения  $H(\tilde{t}_j)$ ,  $j = \overline{1, 5}$ , имели размер  $\pm 300$  м по координате  $x$ ,  $\pm 300$  м по координате  $y$ ,  $\pm 20^\circ$  по углу  $\varphi$  и  $\pm 40$  м/с по скорости  $V$ ; центры данных интервалов совмещены с соответствующими значениями параметров опорной траектории в заданные моменты времени;
- шаг  $\Delta$  попятных построений — 1 с; размер сетки на плоскости  $\varphi, V$  —  $720 \times 64$ ; множества на плоскости  $x, y$  представляются выпуклыми многоугольниками на равномерной фиксированной сетке нормалей (24 нормали).

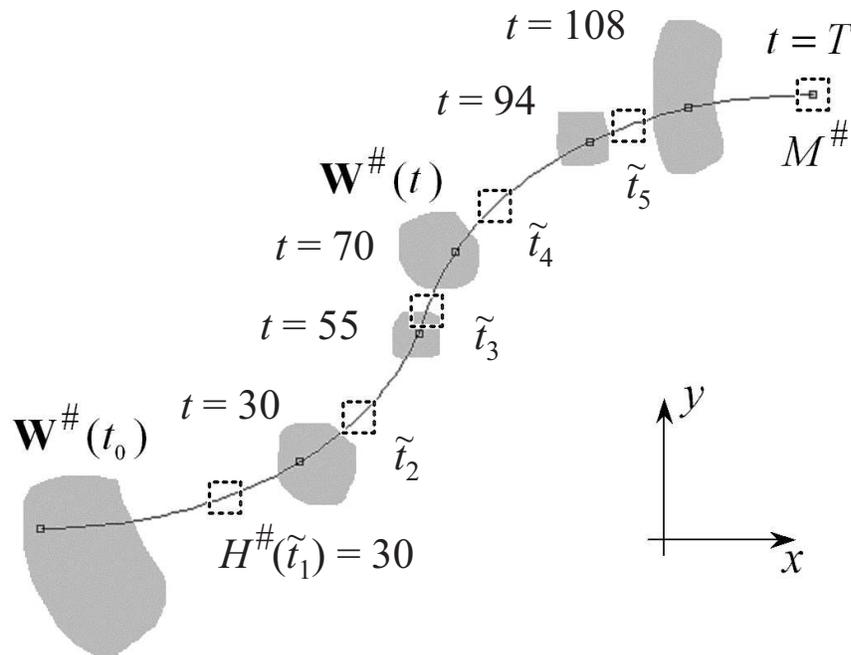


Рис. 3. Динамика изменения во времени множества  $\mathbf{W}^\#(t)$ .

Динамика изменения во времени множества  $\mathbf{W}(t)$  для случая  $\nu = 16$  м/с показана на рис. 3.: серой заливкой изображены проекции  $\mathbf{W}^\#(t)$  четырехмерных множеств  $\mathbf{W}(t)$  на плоскость  $x, y$ . Видно, что при отходе в обратном времени от терминального множества размер

проекция сечения увеличивается. После пересечения с фазовым ограничением сечение сокращается. Далее процесс протекает аналогично. В момент времени  $t_0 = 0$  построенное сечение  $\mathbf{W}(t_0)$  моста содержит начальную позицию самолета.

Структура сечения  $\mathbf{W}(t_0)$  максимального стабильного моста в момент времени  $t_0 = 0$  показана на рис. 4. Здесь сплошной линией отмечена начальная часть опорной траектории в проекции на плоскость  $x, y$ , черным квадратиком обозначено положение самолета в начальный момент, пунктирным квадратом указано первое фазовое ограничение в момент  $\tilde{t}_1$ . Слабой заливкой показана проекция  $\mathbf{W}^\#(t_0)$  четырехмерного множества  $\mathbf{W}(t_0)$  на плоскость геометрических координат  $x, y$ . Виден ее полный контур. Внутри этой проекции белой заливкой отмечена проекция трехмерного слоя, который соответствует узлу сетки  $\{V_m\}$ , максимально близкому к начальной скорости самолета  $V_0 = 200$  м/с. Внутри проекции трехмерного слоя темной заливкой выделен двумерный слой, соответствующий узлу сетки  $\{\varphi_n\}$ , ближайшему к начальному значению угла  $\varphi_0 = 0^\circ$ .

На рис. 5 приведены изображения трехмерных слоев четырехмерного множества  $\mathbf{W}(t_0)$ . Слои соответствуют пяти различным значениям скорости и отмечены заливкой с различной интенсивностью.

Влияние уровня  $\nu$  максимального значения ветрового возмущения на размеры проекции  $\mathbf{W}^\#(t_0)$  иллюстрируется на рис. 6. Здесь сплошной линией отмечена начальная часть опорной траектории, черным квадратиком — положение самолета в начальный момент, пунктирным квадратом — фазовое ограничение в контрольный момент  $\tilde{t}_1$ .

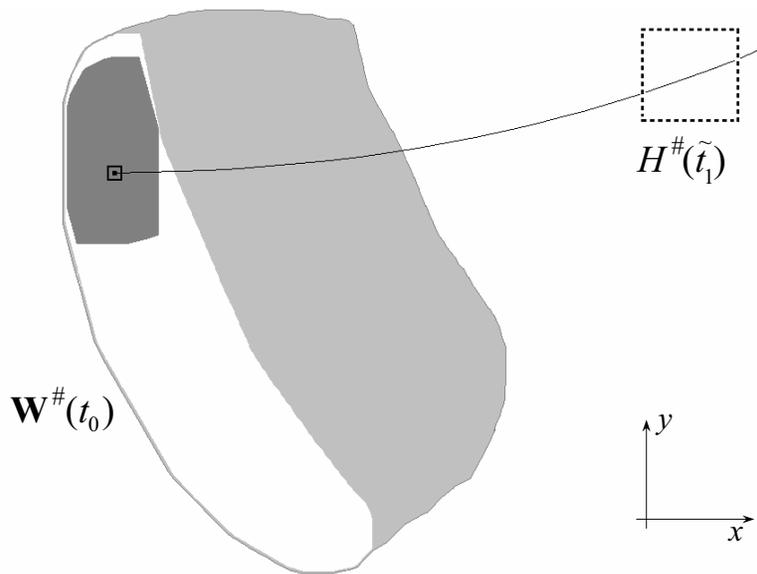


Рис. 4. Структура четырехмерного множества  $\mathbf{W}(t_0)$  по слоям  $V$  и  $\varphi$  (в проекции на плоскость  $x, y$ ), уровень ограничения на ветер  $\nu = 16$  м/с.

На рис. 7 для тех же данных показана проекция  $\mathbf{W}^\#(t_0)$  множества  $\mathbf{W}(t_0)$  на плоскость  $\varphi, V$ .

Как было отмечено выше, начальная позиция самолета принадлежит множеству  $\mathbf{W}(t_0)$  при ограничении  $\nu = 16$  м/с (рис. 6а, 7а). Следовательно, задача перевода самолета на терминальное множество разрешима при таком ограничении на ветровое возмущение. При ограничении  $\nu = 20$  м/с (рис. 6б, 7б) сечение моста не “дотягивается” до начальной позиции самолета. В этом случае перевод самолета на заданное терминальное множество не является гарантированным. При ограничении  $\nu = 21$  м/с (рис. 6в, 7в) сечение  $\mathbf{W}(t_0)$  моста еще более отстоит от

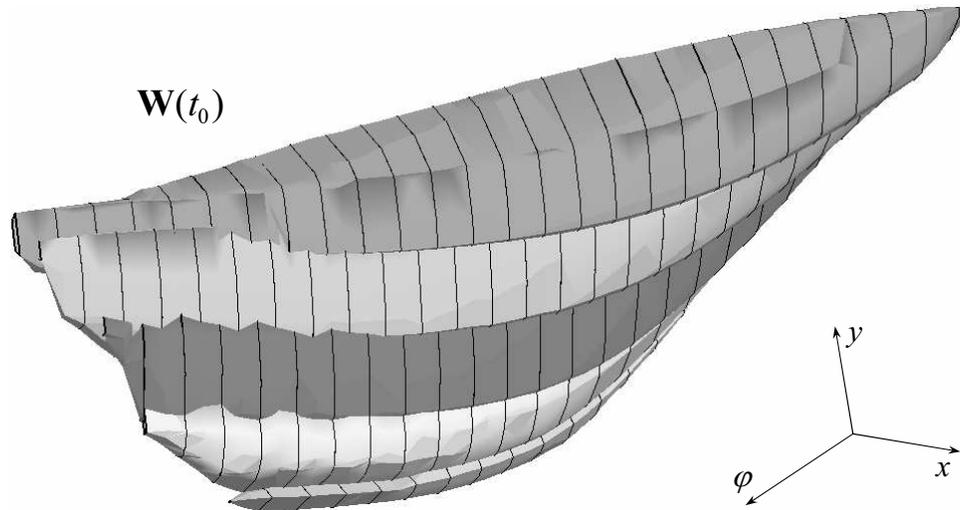


Рис. 5. Трехмерное изображение четырехмерного множества  $\mathbf{W}(t_0)$ , уровень ограничения на ветер  $\nu = 16$  м/с.

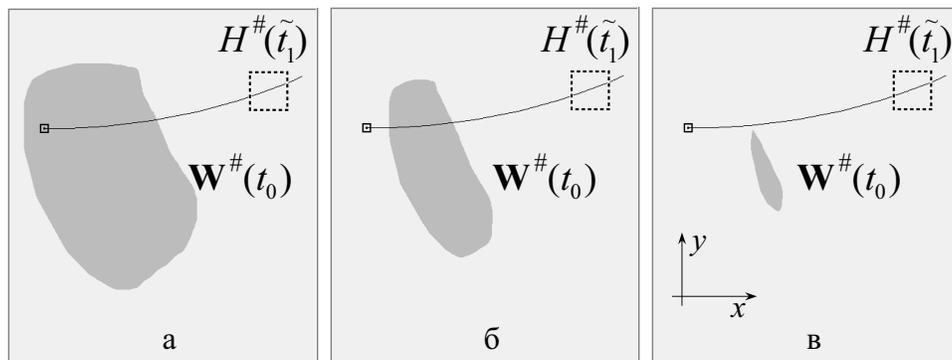


Рис. 6. Сравнение множеств  $\mathbf{W}^\#(t_0)$  для различных ограничений на возмущение: а)  $\nu = 16$  м/с, б)  $\nu = 20$  м/с, в)  $\nu = 21$  м/с.

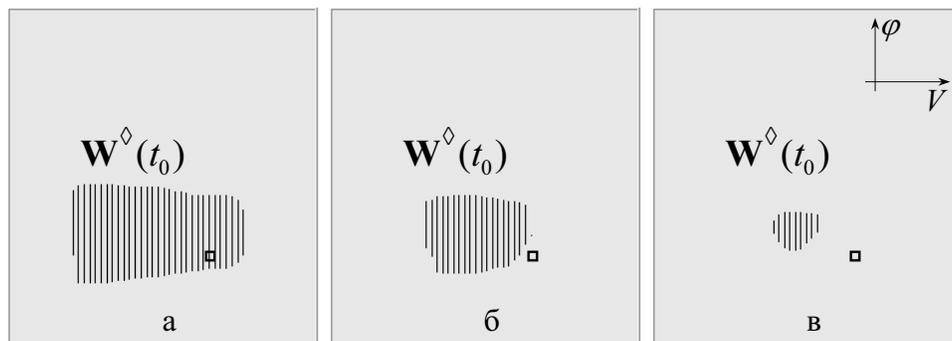


Рис. 7. Сравнение множеств  $\mathbf{W}^\diamond(t_0)$  для различных ограничений на возмущение: а)  $\nu = 16$  м/с, б)  $\nu = 20$  м/с, в)  $\nu = 21$  м/с.

начальной позиции самолета и, кроме того, начинает существенно сокращаться в размерах. При дальнейшем увеличении ограничения  $\nu$  множество  $\mathbf{W}(t_0)$  становится пустым.

Размеры и структура множества  $\mathbf{W}(t_0)$  существенно зависят также от моментов времени, в которые заданы фазовые ограничения, и от размеров этих ограничений.

Авторы благодарят Л.В. Камневу за ценные замечания.

Поступила 04.03.2004

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-Theoretical Control Problems. Springer-Verlag, New York, 1988.
3. **Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. 2000. Т. 6, № 2. С. 413–434.
4. **Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Решетов В.М., Федотов А.А.** Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. С. 51–61.
5. **Анодина Т.Г., Мокшанов В.И.** Моделирование процессов в системе управления воздушным движением. М.: Радио и связь, 1993.
6. **Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В.** Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Тр. Второго Междунар. симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства, Вена, Австрия, сентябрь 1967. Управление космическими аппаратами и кораблями / Под ред. Б.Н. Петрова, И.С. Уколова. М.: Наука. 1971. С. 410–418.
7. **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 6. С. 985–994.
8. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
9. **Никольский М.С.** Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сборник. 1981. Т. 116, № 1. С. 136–144.
10. **Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.** Дифференциальные игры с фиксированным временем // Кибернетика. 1971. Т. 6, № 1. С. 72–80.
11. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
12. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И. Субботина, В.С. Пацко. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984.
13. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.** Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 216–222.
14. **Григоренко Н.Л., Киселев Ю.Н., Лагунова Н.В., Силин Д.Б., Тринько Н.Г.** Методы решения дифференциальных игр // Мат. моделирование. 1993. С. 296–316.
15. **Kurzhanski A.V., Valyi I.** Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Birkhäuser, Boston. 1997.
16. **Bardi M., Dolcetta I.C.** Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Birkhäuser, Boston. 1997.
17. **Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P.** Set-Valued Numerical Analysis for Optimal Control and Differential Games // Annals of the International Society of Dynamic Games. V. 4 / M. Bardi, T.E. Raghavan, T. Parthasarathy, eds. 1999. P. 177–247.
18. **Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В.** Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 95–122.
19. **Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Конструирование стабильных мостов в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 5. С. 771–783.

УДК 517.977, 519.63

## О РЕКОНСТРУКЦИИ ГРАНИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ: СЛУЧАЙ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НЕЙМАНА<sup>1</sup>

В. И. Максимов

Рассматривается задача динамического восстановления граничных возмущений в нелинейном параболическом уравнении. В случае, когда возмущение сосредоточено в краевых условиях Неймана, описываются два алгоритма решения, являющиеся устойчивыми к информационным помехам и погрешностям вычислений.

### 1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается параболическое уравнение

$$x_t(t, \eta) - \Delta_L x(t, \eta) = \Phi(x(t, \eta)) \quad \text{в } T \times \Omega = Q, \quad T = [0, \vartheta], \quad (1)$$

с начальным

$$x(0, \eta) = x_0(\eta) \quad \text{в } \Omega \quad (2)$$

и граничным

$$\left. \frac{\partial x}{\partial n} \right|_{\Sigma} = Bu \quad \text{в } (0, \vartheta] \times \Gamma = \Sigma \quad (3)$$

условиями. Здесь  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — открытая ограниченная область с достаточно гладкой границей  $\Gamma$ ;  $\Delta_L$  — оператор Лапласа, т.е.  $\Delta_L x(\eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x(\eta)}{\partial \eta_i^2}$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ,  $x_0(\eta) \in L_2(\Omega)$ ;  $\Phi(\cdot)$  — липшицева функция;  $u(\cdot) \in L_2(T; U)$  — возмущение;  $U$  — гильбертово пространство (пространство возмущений);  $B$  — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства  $U$  в пространство  $L_2(\Gamma)$ , т.е.  $B \in \mathcal{L}(U; L_2(\Gamma))$ ; символ  $\partial x / \partial n$  означает производную по внешней нормали. Подобные уравнения широко используются для описания тепловых и диффузионных процессов. Возмущение  $u(\cdot)$  неизвестно. В дискретные достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in T, \quad \tau_i = \tau_{i+1} + \delta, \quad i \in [1 : m - 1], \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_m = \vartheta$$

замеряются (с ошибкой) фазовые состояния,  $x(\tau_i, \eta) = x(\tau_i; x_0, u(\cdot)) \in H = L_2(\Omega)$ , системы (1)–(3). Здесь и далее символ  $x(\cdot; x_0, u^*(\cdot)) \in C(T; H)$  означает решение уравнения (1) с начальным (2) и граничным (3) условиями, а также возмущением  $u(\cdot) = u^*(\cdot)$ . Точное определение решения будет дано ниже. Результаты измерений — элементы  $\xi_i^h = \xi^h(\tau_i) \in Z \subset H$  — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_Z \leq h, \quad i \in [0 : m - 1], \quad (4)$$

где  $h$  — параметр точности измерения,  $Z$  — некоторое нормированное пространство (пространство измерений). Требуется указать алгоритм восстановления неизвестного входного воздействия  $u^*(\cdot) \in U_T = L_2(T; U)$ , порождающего неизвестный выход  $x(\cdot)$ , т.е. требуется найти

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 04-01-00059) и Программы поддержки фундаментальных исследований № 15 Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

$u^*(\cdot)$  такое, что отвечающее этому возмущению решение  $x(\cdot; x_0, u^*(\cdot))$  совпадает с  $x(\cdot)$ . Такова содержательная постановка рассматриваемой в данной работе задачи.

Поставленная задача относится к классу обратных задач и, в более общем контексте, к классу некорректных задач (см. [1–5]). Подобные задачи в апостериорной постановке исследовались многими авторами. В [6] был предложен метод динамического восстановления входа конечномерной динамической системы, аффинной по возмущению, в случае, когда задано множество  $P \subset \mathbb{R}^m$  “мгновенных” ограничений на  $u(t)$ , т.е.  $u(t) \in P$  при  $t \in T$ . Затем этот метод был развит в ряде работ (по поводу этих работ см. [7–9], а также обзорную статью [10], где приведены соответствующие ссылки) для систем, описываемых различными типами дифференциальных уравнений. Метод основывается на идеях теории позиционного управления (см. [11]) и методах сглаживающего функционала и невязки, известных в теории некорректных задач (см. [12, 13]). В настоящей работе метод динамической регуляризации применяется для решения задачи восстановления граничного возмущения, входящего в краевые условия Неймана. Случай краевых условий Дирихле рассмотрен, например, в работах [9, 14, 15].

## 2. Описание метода решения задачи

Изложим основные конструкции используемого в настоящей работе метода решения рассматриваемой задачи.

Пусть  $U(x(\cdot))$  — множество всех входов  $u(\cdot) \in L_2(T; U)$ , совместимых с  $x(\cdot)$ , т.е.

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in U_T: x(\cdot; x_0, u(\cdot)) = x(\cdot)\}, \quad (5)$$

$\Xi_T$  — множество измерений, т.е. множество всех кусочно-постоянных функций  $\xi(\cdot): T \rightarrow Z$ ,  $\Xi(x(\cdot), h)$  — множество всех  $h$ -точных результатов измерений, т.е. множество всех функций  $\xi^h(\cdot) \in \Xi_T$ , удовлетворяющих (4).

Вводится вспомогательная система  $M$ , называемая моделью, которая описывается некоторым уравнением (его вид уточним ниже). Траектория модели зависит от управления  $v^h(\cdot)$ , подлежащего формированию. Эта траектория обозначается символом

$$w^h(\cdot) = w^h(\cdot; w_0^h, v^h(\cdot)) \in C(T; H). \quad (6)$$

Пусть известно, что начальное состояние модели принадлежит множеству  $X_0$ . (Если начальное состояние  $x_0$  известно, то естественно считать  $X_0 = \{x_0\}$ .) Начальное состояние модели  $w_0^h$  выбирается по результату измерения  $\xi_0^h$  в начальный момент, согласно правилу  $\mathcal{W}_h$ , фиксированному априори:

$$w_0^h = \mathcal{W}_h(\xi_0^h) \in X_0 \subset H. \quad (7)$$

Правило выбора управления  $v^h(\cdot)$  (при каждом  $h \in (0, 1)$ ) в модели отождествляется с парой  $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$ , где

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h} \quad (8)$$

— разбиение отрезка  $T$  на полуинтервалы  $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$ ,  $\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta$ ,  $\delta = \delta(h)$ ,  $\tau_{h,0} = 0$ ,  $\tau_{h,m_h} = \vartheta$ ,  $\mathcal{U}_h$  — отображение, ставящее в соответствие каждой тройке  $(\tau_i, p_i^h, w^h(\tau_i))$ ,  $i \in [0 : m_h - 1]$ , называемой позицией, функцию

$$v_{\tau_i, \tau_{i+1}}^h(\cdot) = \mathcal{U}_h(\tau_i, p_i^h, w^h(\tau_i)) \in L_2([\tau_i, \tau_{i+1}]; U). \quad (9)$$

Здесь  $\tau_i = \tau_{h,i}$ ,  $w^h(\tau_i) = w^h(\tau_i; w_0^h, v^h(\cdot))$ ,  $p_i^h = (\xi_0^h, \xi_1^h, \dots, \xi_i^h)$ ,  $\xi_i^h = \xi^h(\tau_i)$ ,  $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$ , символ  $v_{a,b}(\cdot)$  означает сужение функции  $v(\cdot)$  на полуинтервал  $[a, b)$ . Таким образом, четверка  $(M, \mathcal{W}_h, \Delta_h, \mathcal{U}_h)$  для каждого  $h \in (0, 1)$  определяет некоторый алгоритм  $D_h$  на пространстве измерений ( $D_h: \Xi_T \mapsto U_T$ ), формирующий, согласно принципу обратной связи (6)–(9), выход  $v^h(\cdot) = D_h \xi(\cdot)$ . Этот алгоритм в дальнейшем отождествляется с четверкой  $(M, \mathcal{W}_h, \Delta_h, \mathcal{U}_h)$ .

Пусть выполнено следующее условие.

**У с л о в и е 1.** Множество  $U_*(x(\cdot))$  всех входов минимальной  $L_2(T; U)$ -нормы, порождающих решение  $x(\cdot)$ , состоит из одного элемента:  $U_*(x(\cdot)) = \{u_*(\cdot; x(\cdot))\}$ .

Таким образом,

$$u_*(\cdot; x(\cdot)) = \arg \min\{|u(\cdot)|_{L_2(T; U)} : u(\cdot) \in U(x(\cdot))\}.$$

Семейство операторов  $D_h$ ,  $h \in (0, 1)$ , действующих из  $\Xi_T$  в  $U_T$ , называется *регуляризирующим*, если оно обладает следующим свойством:

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \{|D_h \xi^h(\cdot) - u_*(\cdot; x(\cdot))|_{L_2(T; U)} : \xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)\} = 0.$$

Наша цель — построение регуляризирующего семейства алгоритмов

$$D_h = (M, \mathcal{W}_h, \Delta_h, \mathcal{U}_h), \quad h \in (0, 1), \quad (10)$$

вида (6)–(9). Такое семейство еще называют *семейством позиционных алгоритмов моделирования* [7–9].

После того как модель (6) и ее начальное состояние (7) выбраны, работа алгоритма  $D_h$  осуществляется по следующей схеме. До начального момента  $t_0 = 0$  фиксируются погрешность  $h$ , а также разбиение  $\Delta = \Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ , ( $\tau_i = \tau_{h,i}$ ) (8) отрезка  $T$ . На  $i$ -ом шаге алгоритма, осуществляемом на промежутке времени  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ , выполняются следующие операции. Сначала измеряется (с ошибкой) фазовое состояние  $x(\tau_i)$ , т.е. находится элемент  $\xi_i^h \in H$  со свойством (4). Затем, по правилу (9), определяется управление в модели. После этого вместо траектории  $w^h(t)$ ,  $t \in [t_0, \tau_i]$ , формируется фазовая траектория  $w^h(t)$ ,  $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ , т.е. осуществляется корректировка памяти.

Правило построения семейства алгоритмов  $D_h$  основано на теореме 1, приведенной ниже. Пусть на декартовом произведении  $C(T; H) \times C(T; H)$  задан функционал  $\Lambda^0(\cdot, \cdot)$ .

**О п р е д е л е н и е 1** ([8, 9]). Семейство  $D_h$ ,  $h \in (0, 1)$ , позиционных алгоритмов моделирования называется  $\Lambda^0$ -устойчивым, если существуют функции  $k_1(\cdot)$ ,  $k_2(\cdot)$ ,  $k_3(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  такие, что

$$k_1(h) \rightarrow 1, \quad k_2(h) \rightarrow 0, \quad k_3(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0,$$

и для всякого измерения  $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$  выполняются неравенства

$$|v^h(\cdot)|_{L_2(T; U)} \leq k_1(h)|u_*(\cdot; x(\cdot))|_{L_2(T; U)} + k_2(h), \quad (11)$$

$$\Lambda^0(x(\cdot), w^h(\cdot)) \leq k_3(h). \quad (12)$$

Здесь  $v^h(\cdot) = D_h \xi^h(\cdot)$ ,  $w^h(\cdot)$  — траектория модели, порожденная алгоритмом  $D_h$  и измерением  $\xi^h(\cdot)$ .

**Теорема 1** ([8, 9]). Пусть выполнено условие 1 и пусть семейство  $D_h$  позиционных алгоритмов моделирования (а)  $\Lambda^0$ -устойчиво, (б) для любых  $h_k > 0$  ( $h_k \rightarrow +0$  при  $k \rightarrow \infty$ ),  $\xi^{h_k}(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h_k)$ ,  $w^{h_k}(\cdot) = w^{h_k}(\cdot; w_0^{h_k}, v^{h_k}(\cdot))$ ,  $v^{h_k}(\cdot) = D_{h_k} \xi^{h_k}(\cdot)$  условия

$$v^{h_k}(\cdot) \rightarrow v(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T; U), \quad \Lambda^0(x(\cdot), w^{h_k}(\cdot)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty$$

влекут включение  $v(\cdot) \in U(x(\cdot))$ . Тогда семейство алгоритмов  $D_h$ ,  $h \in (0, 1)$ , является регуляризирующим.

Как известно, решение параболического уравнения типа (1), (2) с граничным управлением (3) определяется различными способами. Это может быть классическое решение [16] (существование такого решения возможно при довольно жестких требованиях как к области  $\Omega$ , так и к начальному состоянию  $x_0$ , а также управлению  $u$ ) или обобщенное решение, используемое, как правило, в теории управления. Последнее, в свою очередь, может быть введено поразному. Чаще других для определения обобщенного решения используют подход, развитый, например, в работах [17, 18] (иногда его называют “функционально-аналитический” подход), а также довольно активно пропагандируемый в последние годы полугрупповой подход [19–23], восходящий к работе [24]. В данной статье мы будем использовать оба подхода к определению решения.

### 3. Алгоритм решения. Полугрупповой подход

Прежде чем переходить к описанию алгоритма решения сформулированной выше задачи, дадим строгое определение обобщенного решения уравнения (1). Введем отображение Неймана  $\mathcal{N}$

$$\mathcal{N}v = z \iff \begin{cases} \Delta_L z - z = 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = v. \end{cases} \quad (13)$$

Иначе говоря,  $\mathcal{N}v$  — обобщенное решение эллиптического уравнения (13), т.е. функция со следующими свойствами:

$$\mathcal{N}v \in L_2(\Omega), \quad \frac{\partial(\mathcal{N}v)}{\partial n} \in L_2(\Gamma),$$

$$\int_{\Omega} (\mathcal{N}v)(\eta) \{ \Delta\psi(\eta) + \psi(\eta) \} d\eta = \int_{\Gamma} \psi(\sigma) \frac{\partial(\mathcal{N}v)(\sigma)}{\partial n} d\sigma \quad \forall \psi \in H_2(\Omega).$$

Рассмотрим отображение

$$t \rightarrow p(t; \cdot, \cdot, \cdot): H \times L_2(T; U) \times C(T; H) \rightarrow C(T; H),$$

$$p(t; x_0, u(\cdot), z(\cdot)) = S(t)x_0 + A \int_0^t S(t-\tau) \mathcal{N}Bu(\tau) d\tau + \int_0^t S(t-\tau) \Phi_1(z(\tau)) d\tau, \quad t \in T.$$

Здесь

$$Ah = \Delta_L h - h, \quad h \in \mathcal{D}(A) = \left\{ z \in H_2(\Omega): \frac{\partial z}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\},$$

$A$  — инфинитезимальный генератор аналитической сжимающей полугруппы линейных непрерывных операторов  $\{S(t); t \geq 0\}$  на  $H$ ,  $\Phi_1(x) = \Phi(x) + x$ . В дальнейшем мы, как это принято обычно [19–22], отождествляем  $A$  с его изоморфным расширением  $A: H \rightarrow \mathcal{D}^*(A)$ . Как известно, все собственные значения оператора  $A$  расположены в области  $(0, +\infty)$ . Последнее обеспечивает ограниченную обратимость оператора  $A$ , т.е.  $A^{-1} \in \mathcal{L}(H; H)$  [21, 22]. Из результатов [22] следует также, что  $\mathcal{N}$  — непрерывное отображение пространства  $L_2(\Gamma)$  в пространство  $H^{3/2}(\Omega) \subset H^{3/2-2\varepsilon}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{3/4-\varepsilon}) \forall \varepsilon > 0$ . Кроме того [20, 23], верны включения

$$\mathcal{N} \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma); H^{s+3/2}(\Omega)) \quad \text{для любого } s \in \mathbb{R}, \quad A^{-l} \in \mathcal{L}(H^{2\alpha}(\Omega); H^{2\alpha+2l}(\Omega))$$

для любых неотрицательных целых  $l$  и любых  $\alpha \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ . Символы  $H^\alpha(\Omega)$  и  $H^s(\Gamma)$  означают стандартные соболевские пространства (см., например, [25]). Под решением задачи (1)–(3), отвечающим управлению  $u(\cdot) \in L_\infty(T; U)$ , будем, следуя [19], понимать единственную функцию  $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, u(\cdot)) \in C(T; H)$ , удовлетворяющую равенству

$$x(t) = p(t; x_0, u(\cdot), x(\cdot)) \quad \forall t \in T.$$

Пусть  $\varphi_x(\cdot)$  — модуль непрерывности функции  $t \rightarrow \Phi_1(x(t)) \in H$  на  $T$ , т.е.  $\varphi_x(\delta) = \sup\{|\Phi_1(x(t_1)) - \Phi_1(x(t_2))|_H: t_1, t_2 \in T, |t_1 - t_2| < \delta\}$ ,  $U(x(\cdot))$  — множество всех управлений, совместимых с выходом  $x(\cdot)$  (см. (5)). Иными словами,

$$\begin{aligned} U(x(\cdot)) &= \{u(\cdot) \in U_T: x(t) - S(t)x_0 - \int_0^t S(t-\tau)\Phi_1(x(\tau)) d\tau \\ &= A \int_0^t S(t-\tau)\mathcal{N}Bu(\tau) d\tau \quad \forall t \in T\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что это множество выпукло, ограничено и замкнуто в  $L_2(T; U)$ . Поэтому оно содержит единственный элемент  $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$  минимальной  $L_2(T; U)$ -нормы. Таким образом, условие 1 выполнено.

Ниже считаем фиксированным некоторое ограниченное множество  $X_0 \subset H$  (множество начальных состояний) такое, что  $x_0 \in X_0$ .

Опишем алгоритм восстановления  $u^*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$ .

Будем полагать, что пространство измерений совпадает с  $H$ . Таким образом, неравенства (4) принимают вид

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_H \leq h.$$

Пусть выбраны семейство  $\{\Delta_h\}$  разбиений отрезка  $T$  вида (8), а также функции  $\alpha(h): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  и  $d(h): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} \alpha(h) \rightarrow 0, \quad \delta(h) \rightarrow 0, \quad d(h) \rightarrow +\infty, \\ d(h)(h + \varphi_x(\delta(h)))\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0, \quad \delta(h)d^2(h)\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (14)$$

Функция  $\alpha(h)$  играет роль регуляризатора по А.Н. Тихонову [12,13]. Всюду ниже для простоты полагаем  $h, \delta, \alpha \in (0, 1)$ . В качестве модели  $M$  возьмем линейное уравнение

$$\begin{aligned} w_t(t, \eta) - \Delta_L w(t, \eta) &= v_0^h(t, \eta) \quad \text{в } T \times \Omega, \\ w(0, \eta) &= w_0^h(\eta) \quad \text{в } \Omega \end{aligned} \quad (15)$$

с граничным условием Неймана

$$\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\Sigma} = Bv_1^h \quad \text{в } \Sigma.$$

Решением уравнения (15), отвечающим управлениям  $v_1^h(\cdot) \in L_\infty(T; U)$  и  $v_0^h(\cdot) \in L_2(T; H)$ , называется функция  $w^h(\cdot) = w(\cdot; w_0^h, v^h(\cdot)) \in C(T; H)$ ,  $v^h(\cdot) = \{v_0^h(\cdot), v_1^h(\cdot)\}$ , определяемая равенством [20, 21]

$$w^h(t) = S(t)w_0^h + A \int_0^t S(t-\tau)\mathcal{N}Bv_1^h(\tau) d\tau + \int_0^t S(t-\tau)v_0^h(\tau) d\tau, \quad t \in T.$$

Правило выбора начального состояния модели  $\mathcal{W}_h$  определим согласно (7), где положим

$$w_0^h \in B(\xi_0^h) = \{x \in X_0: |\xi_0^h - x|_H \leq h\}. \quad (16)$$

Пусть закон выбора управления в модели  $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$  задается формулами (8), (9), в которых

$$\mathcal{U}_h(\tau_i, p_i^h, w^h(\tau_i)) = \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)) = \{v_0^h(t), v_1^h(t): t \in \delta_i\}, \quad (17)$$

$$v_0^h(t) = \Phi_1(\xi_i^h), \quad v_1^h(t) = v_i \quad \text{при почти всех } t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad (18)$$

где

$$2(s_i^*, \mathcal{N}Bv_i)_{L_2(\Omega)} + \alpha(h)|v_i|_U^2 \leq \inf\{2(s_i^*, \mathcal{N}Bv)_{L_2(\Omega)} + \alpha(h)|v|_U^2 : v \in S(d(h))\} + h,$$

$$s_i^* = A^{-1}(w^h(\tau_i) - \xi_i^h), \quad S(d) = \{u \in U : |u|_U \leq d\}.$$

Таким образом, в данном случае память не требуется и в качестве позиции берется тройка  $(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i))$ .

Введем функционал  $\Lambda^0$  (см. определение 1) следующего вида:

$$\Lambda^0(x(\cdot), w^h(\cdot)) = \sup_{t \in T} |A^{-1}(w^h(t) - x(t))|_H.$$

Справедлива

**Теорема 2.** Пусть  $u_*(\cdot) \in L_\infty(T; U)$ . Тогда любое семейство позиционных алгоритмов моделирования  $D_h$  (10) вида (7)–(9), (16)–(18) удовлетворяет условиям теоремы 1 и является регуляризирующим.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем три вспомогательных утверждения.

**Лемма 1.** Можно указать такое число  $c = c(x_0, L)$ , что для любых  $t \in T$  и  $u(\cdot) \in L_\infty(T; U)$  верна оценка

$$|x(t; x_0, u(\cdot))|_H \leq c(x_0, L)\{1 + |u(\cdot)|_{L_\infty(T; U)}\}.$$

Здесь  $L$  — постоянная Липшица функции  $\Phi(\cdot)$ . Справедливость леммы вытекает из липшицевости функции  $\Phi$ ,

$$|AS(t)\mathcal{N}Bv|_H \leq C(t)|v|_U, \quad t > 0, \quad v \in U, \quad C(\cdot) \in L_2(T; R), \quad (19)$$

неравенства (3.22) [26], сжимаемости полугруппы  $\{S(t); t \geq 0\}$  и неравенства Гронуолла [27].

Аналогично лемме 1 доказывается

**Лемма 2.** Можно указать такое число  $d^* = d^*(x_0, c)$ , что для любых  $t \in T$ ,  $w_0 \in H$ ,  $|w_0 - x_0|_H \leq c$ ,  $v_1^h(\cdot) \in L_\infty(T; U)$  и  $v_0^h(\cdot) \in L_\infty(T; H)$  верна оценка

$$|w^h(t; w_0, v_1^h(\cdot), v_0^h(\cdot))|_H \leq d^*(x_0, c)\{1 + |v_0^h(\cdot)|_{L_\infty(T; H)} + |v_1^h(\cdot)|_{L_\infty(T; U)}\}.$$

Пусть фиксированы ограниченные множества  $Q_0 \subset L_2(T; H)$  и  $Q_1 \subset L_2(T; U)$ . Символом  $W(X_0, Q_0, Q_1)$  обозначим пучок решений уравнения (15), отвечающих всем начальным состояниям  $w_0 \in X_0$  и управлениям  $v(\cdot) = \{v_0(\cdot), v_1(\cdot)\} \in Q_0 \times Q_1$ , т.е.  $W(X_0, Q_0, Q_1) = \{w(\cdot; w_0, v^h(\cdot)) : w_0 \in X_0, v^h(\cdot) \in Q_0 \times Q_1\} \subset C(T; H)$ .

Введем обозначение

$$A^{-1}W(X_0, Q_0, Q_1) = \{\tilde{w}(\cdot) : \tilde{w}(t) = A^{-1}w(t), \forall t \in T, w(\cdot) \in W(X_0, Q_0, Q_1)\} \subset C(T; H).$$

**Лемма 3.** Множество  $A^{-1}W(X_0, Q_0, Q_1)$  равномерно ограничено и равномерно непрерывно в пространстве  $C(T; H)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Равномерная ограниченность множества  $A^{-1}W(X_0, Q_0, Q_1)$  следует из включений  $A^{-1} \in \mathcal{L}(H; H)$ ,  $\mathcal{N}B \in \mathcal{L}(U; H)$ , сжимаемости полугруппы  $\{S(t); t \geq 0\}$  и равенства

$$A^{-1}w^h(t; w_0, v_0(\cdot), v_1(\cdot)) = S(t)A^{-1}w_0 + \int_0^t S(t-\tau)\mathcal{N}Bv_1(\tau) d\tau + A^{-1} \int_0^t S(t-\tau)v_0(\tau) d\tau. \quad (20)$$

Докажем его равностепенную непрерывность. Возьмем произвольные  $0 < t_1 < t_2 < \vartheta$ ,  $v_0(\cdot) \in Q_0$ ,  $v_1(\cdot) \in Q_1$ . Легко видеть, что справедливо равенство

$$(S(t_2) - S(t_1))A^{-1}x = \int_{t_1}^{t_2} S(\tau)A(A^{-1}x) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} S(\tau)x d\tau \quad \forall x \in H. \quad (21)$$

Снова воспользовавшись сжимаемостью полугруппы  $\{S(t); t \geq 0\}$ , а также ограниченностью множества  $X_0 \subset H$ , получим

$$\sup_{x \in X_0} |(S(t_2) - S(t_1))A^{-1}x|_H \leq c_1(t_2 - t_1). \quad (22)$$

Далее, заметим, что верно включение (см. [26])

$$S(t)\mathcal{N}Bu \in D(A), \quad t > 0.$$

В таком случае,

$$\begin{aligned} (S(t_2 - t_1) - I) \int_0^{t_1} S(t_1 - \tau)\mathcal{N}Bv_1(\tau) d\tau &= \int_0^{t_2 - t_1} S(t) \left( A \int_0^{t_1} S(t_1 - \tau)\mathcal{N}Bv_1(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_0^{t_2 - t_1} S(t) \left( \int_0^{t_1} AS(t_1 - \tau)\mathcal{N}Bv_1(\tau) d\tau \right) dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Однако (см. (19))

$$\left| \int_0^{t_1} AS(t_1 - \tau)\mathcal{N}Bv_1(\tau) d\tau \right|_H \leq \int_0^{t_1} C(\tau)|v_1(\tau)|_U d\tau \leq \left( \int_0^{t_1} |C(\tau)|^2 d\tau \int_0^{t_1} |v_1(\tau)|_U^2 d\tau \right)^{1/2} \leq c_2. \quad (24)$$

Кроме того,

$$\left| \int_0^{t_2 - t_1} S(t)x dt \right|_H \leq (t_2 - t_1)|x|_H. \quad (25)$$

В таком случае, из (23)–(25) получаем

$$\left| (S(t_2 - t_1) - I) \int_0^{t_1} S(t_1 - \tau)\mathcal{N}Bv_1(\tau) d\tau \right|_H \leq (t_2 - t_1)c_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{t_2} S(t_2 - \tau)\mathcal{N}Bv_1(\tau) d\tau - \int_0^{t_1} S(t_1 - \tau)\mathcal{N}Bv_1(\tau) d\tau \right|_H \\ &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} S(t_2 - \tau)\mathcal{N}Bv_1(\tau) d\tau \right|_H + c_3(t_2 - t_1) \leq c_4(t_2 - t_1 + (t_2 - t_1)^{1/2}). \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично устанавливается оценка

$$\left| A^{-1} \left( \int_0^{t_2} S(t_2 - \tau)v_0(\tau) d\tau - \int_0^{t_1} S(t_1 - \tau)v_0(\tau) d\tau \right) \right|_H \leq \omega(t_2 - t_1), \quad (27)$$

где  $\omega(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Равностепенная непрерывность множества  $A^{-1}W(X_0, Q_0, Q_1)$  следует из (20), (22), (26), (27). Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Покажем, что семейство  $D_h$  (7), (9), (16)–(18)  $\Lambda^0$ -устойчиво. Пусть  $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$ ,  $v^h(\cdot) = D_h \xi^h(\cdot)$ ,  $w^h(\cdot)$  — траектория модели (6), порожденная алгоритмом  $D_h$ . Рассмотрим величину

$$\varepsilon_h(t) = \Lambda(t, x(\cdot), w^h(\cdot)) + \alpha(h) \int_0^t \{|v_1^h(\tau)|_U^2 - |u_*(\tau)|_U^2\} d\tau.$$

Здесь

$$\Lambda(t, x(\cdot), w^h(\cdot)) = |A^{-1}(w^h(t) - x(t))|_H^2.$$

Легко заметить, что верно неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} &= \left| A^{-1} \{ S(\delta)(w^h(\tau_i) - x(\tau_i)) + A \int_0^\delta S(\delta - \tau) \mathcal{N}B(v_1^h(\tau_i + \tau) - u_*(\tau_i + \tau)) d\tau \right. \\ &+ \left. \int_0^\delta S(\delta - \tau) [v_0^h(\tau_i + \tau) - \Phi_1(x(\tau_i + \tau))] d\tau \right|_H^2 + \alpha(h) \int_0^{\tau_{i+1}} \{|v_1^h(s)|_U^2 - |u_*(s)|_U^2\} ds \\ &\leq \sum_{j=1}^4 J_{ji} + \alpha(h) \int_0^{\tau_{i+1}} \{|v_1^h(s)|_U^2 - |u_*(s)|_U^2\} ds, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} J_{1i} &= |s_i|_H^2, \quad s_i = A^{-1}S(\delta)(w^h(\tau_i) - x(\tau_i)), \\ J_{2i} &= 2 \left( s_i, \int_0^\delta S(\delta - \tau) \mathcal{N}B(v_1^h(\tau_i + \tau) - u_*(\tau_i + \tau)) d\tau \right)_H, \\ J_{3i} &= 2 \left( s_i, A^{-1} \int_0^\delta S(\delta - \tau) \{v_0^h(\tau_i + \tau) - \Phi_1(x(\tau_i + \tau))\} d\tau \right)_H, \\ J_{4i} &= 2 \left\{ \left| \int_0^\delta S(\delta - \tau) \mathcal{N}B(v_1^h(\tau_i + \tau) - u_*(\tau_i + \tau)) d\tau \right|_H^2 \right. \\ &+ \left. \left| A^{-1} \int_0^\delta S(\delta - \tau) \{v_0^h(\tau_i + \tau) - \Phi_1(x(\tau_i + \tau))\} d\tau \right|_H^2 \right\}. \end{aligned}$$

Так как полугруппа  $\{S(t); t \geq 0\}$  сжимающая, оператор  $A^{-1}$  коммутирует с  $S(\delta)$ , а функция  $\Phi_1(\cdot)$  липшицева, то справедливы неравенства

$$J_{1i} \leq |A^{-1}(w^h(\tau_i) - x(\tau_i))|_H^2, \quad (29)$$

$$|v_0^h(\tau_i + \tau) - \Phi_1(x(\tau_i + \tau))|_H \leq L(h + \varphi_x(\delta)), \quad \tau \in [0, \delta].$$

Далее, в силу (18) и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} |v_0^h(t)|_H &= |\Phi_1(\xi_i^h)|_H \leq |\Phi_1(0)|_H + L|\xi_i^h|_H \leq |\Phi_1(0)|_H + L\{|x(\tau_i)|_H + h\} \\ &\leq |\Phi_1(0)|_H + L\{1 + d(x_0, L)(1 + l_u)\} \leq c_1 \quad \text{при } t \in \delta_i, \quad i \in [0 : m - 1], \end{aligned}$$

$$|v_1^h(t)|_U \leq d(h) \quad \text{при } t \in T.$$

Здесь

$$l_u = |u_*(\cdot)|_{L_\infty(T;U)}.$$

В таком случае из леммы 2 следует оценка

$$|w^h(t)|_H \leq c_2(1 + d(h)).$$

Здесь и далее символом  $c_j$  обозначаются постоянные, не зависящие от  $\xi^h(\cdot)$ ,  $v^h(\cdot)$ , которые могут быть выписаны в явном виде. Рассмотрим величину  $J_{3i}$ . Имеем

$$J_{3i} \leq 2\delta a_1 L |(w^h(\tau_i) - x(\tau_i))|_H (h + \varphi_x(\delta)) \leq c_3 \delta (h + \varphi_x(\delta)) (1 + d(h)), \quad (30)$$

где

$$a_1 = |A^{-1}|_{\mathcal{L}(H;H)}^2.$$

Кроме того, в силу включений  $A^{-1} \in \mathcal{L}(H;H)$ ,  $\mathcal{N} \in \mathcal{L}(L_2(\Gamma);H)$  верно неравенство

$$J_{4i} \leq c_4 \delta^2 (1 + d(h))^2. \quad (31)$$

Заметим, что [20, стр. 314]

$$A \int_0^t S(t-s)x ds = S(t)x - x \quad \forall x \in H.$$

Поэтому, учитывая сжимаемость полугруппы  $S(t)$ , получаем

$$|A^{-1}\{S(t)x - x\}|_H \leq t|x|_H. \quad (32)$$

Далее, в силу (4), лемм 1 и 2, а также (32) верны оценки

$$\begin{aligned} |s_i - \tilde{s}_i|_H &= |A^{-1}\{S(\delta)(w^h(\tau_i) - x(\tau_i)) - (w^h(\tau_i) - x(\tau_i))\}|_H \\ &\leq \delta |w^h(\tau_i) - x(\tau_i)|_H \leq c_5 \delta (1 + d(h)), \\ |\tilde{s}_i - s_i^*|_H &\leq c_6 h, \quad \tilde{s}_i = A^{-1}(w^h(\tau_i) - x(\tau_i)). \end{aligned} \quad (33)$$

Следовательно, учитывая самосопряженность полугруппы  $\{S(t); t \geq 0\}$  и неравенство (33), получим

$$\begin{aligned} J_{2i} &\leq 2 \left( \tilde{s}_i, \int_0^\delta S(\delta - \tau) \mathcal{N} B (v_1^h(\tau_i + \tau) - u_*(\tau_i + \tau)) d\tau \right)_H + c_6 \delta^2 (1 + d(h))^2 \\ &= 2 \int_0^\delta \left( A^{-1} S(\delta - \tau) (w^h(\tau_i) - x(\tau_i)), \mathcal{N} B (v_1^h(\tau_i + \tau) - u_*(\tau_i + \tau)) \right)_H d\tau + c_6 \delta^2 (1 + d(h))^2 \\ &\leq 2 \int_0^\delta \left( A^{-1} (w^h(\tau_i) - x(\tau_i)), \mathcal{N} B (v_1^h(\tau_i + \tau) - u_*(\tau_i + \tau)) \right)_H d\tau + c_7 \delta^2 (1 + d(h))^2 \\ &\leq 2 \int_0^\delta \left( s_i^*, \mathcal{N} B (v_1^h(\tau_i + \tau) - u_*(\tau_i + \tau)) \right)_H d\tau + c_8 \delta (\delta + h) (1 + d(h))^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая включение  $u_*(\cdot; x(\cdot)) \in L_\infty(T; U)$ , приходим к выводу: найдется такое число  $h^* \in (0, 1)$ , что при всех  $h \in (0, h^*)$  имеем  $u_*(t; x(\cdot)) \in S(d(h))$  для почти всех  $t \in T$ . Таким образом, из (34) при  $h \in (0, h^*)$  получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 & J_{2i} + \alpha(h) \int_0^{\tau_{i+1}} \{|v_1^h(s)|_U^2 - |u_*(s)|_U^2\} ds \\
 & \leq \alpha(h) \int_0^{\tau_i} \{|v_1^h(s)|_U^2 - |u_*(s)|_U^2\} ds + 2 \int_0^\delta \left( s_i^*, \mathcal{N}B(v_1^h(\tau_i + s) \right. \\
 & \left. - u_*(\tau_i + s)) \right)_H ds + \alpha(h) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|v_1^h(s)|_U^2 - |u_*(s)|_U^2\} ds + c_8 \delta (\delta + h) (1 + d(h))^2 \\
 & \leq c_9 \delta (\delta + h) (1 + d(h)) + \alpha(h) \int_0^{\tau_i} \{|v_1^h(s)|_U^2 - |u_*(s)|_U^2\} ds, \quad i \in [0 : m - 1]. \quad (35)
 \end{aligned}$$

Объединив оценки (28)–(31) и (35) и учитывая (7), (16), получим

$$\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon_i + c_8 \delta (1 + d(h)) \{h + \varphi_x(\delta) + \delta(1 + d(h))\} \leq c_9 \nu(h, \delta),$$

где

$$\nu(h, \delta) = h + (1 + d(h))(h + \varphi_x(\delta)) + \delta(1 + d(h))^2.$$

Таким образом, неравенство (11) верно (при замене  $v^h(\cdot)$  на  $v_1^h(\cdot)$ ), если

$$k_1(h) = 1, \quad k_2(h) = c_9 \nu(h, \delta(h)) \alpha^{-1}(h).$$

Кроме того, в силу условия согласования параметров (14),  $k_2(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Неравенство (12) следует из леммы 3. Справедливость условия (b) теоремы 1 проверяется аналогично [9]. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** Теорема 2 также справедлива, если  $U$  — равномерно выпуклое банахово пространство.

**З а м е ч а н и е 2.** Введем сопряженный оператор  $\mathcal{N}^* \in \mathcal{L}(H; L_2(\Gamma))$ :

$$(\mathcal{N}v, y)_H = (v, \mathcal{N}^*y)_{L_2(\Gamma)} \quad \forall v \in L_2(\Gamma), \quad y \in H.$$

Тогда в силу формулы Грина имеем

$$\mathcal{N}^*y = (\Delta_L^{-1}y)|_\Gamma \quad \forall y \in H.$$

**З а м е ч а н и е 3.** Пусть оператор  $B$  имеет следующий вид:

$$Bu = \sum_{j=1}^m \nu_j u_j, \quad \nu_j \in L_2(\Gamma), \quad u_j \in \mathbb{R},$$

$\nu_j$  — известные функции,  $u = \{u_1, \dots, u_m\} \in \mathbb{R}^m$ . В этом случае естественно на каждом временном шаге  $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$  вычислять  $v_i$  по правилу

$$\begin{aligned}
 v_i^h = (v_{1i}^h, \dots, v_{mi}^h) = \arg \min \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} v_j + \alpha \sum_{j=1}^m |v_j|^2 : -d(h) \leq v_j \leq d(h) \right\}, \\
 \gamma_{ij} = (A^{-1}(w^h(\tau_i) - \xi_i^h), \mathcal{N}\nu_j)_H,
 \end{aligned}$$

т.е. полагать

$$v_{ij}^h = \begin{cases} -d(h), & \text{если } \gamma_{ij} \alpha^{-1} > d(h), \\ -\gamma_{ij} \alpha^{-1}, & \text{если } \gamma_{ij} \alpha^{-1} \in [-d(h), d(h)], \\ d(h), & \text{если } \gamma_{ij} \alpha^{-1} < -d(h). \end{cases}$$

#### 4. Алгоритм решения. Функционально-аналитический подход

В настоящем разделе мы укажем другой алгоритм решения описанной выше задачи. Всюду ниже  $V = H^1(\Omega)$ , символ  $y(\sigma)$  означает след функции  $y(\eta) \in H^1(\Omega)$ , символ  $\nabla x$  означает градиент  $x$ , т.е.  $\nabla x = \{\partial x/\partial \eta_1, \dots, \partial x/\partial \eta_n\}$ , а символ  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — двойственность между  $V$  и  $V^*$ . Будем полагать, что пространство измерений  $Z$  совпадает с пространством  $V$ . Таким образом, неравенства (4) принимают вид

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_V \leq h.$$

В этом случае решением уравнения (1)–(3), отвечающим управлению  $u(\cdot) \in L_\infty(T; U)$ , будем, следуя [17, 18], называть единственную функцию  $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, u(\cdot)) \in W(T; V)$  такую, что

$$\begin{aligned} & d(x(t), y)/dt + \int_{\Omega} \nabla x(t, \eta) \nabla y(\eta) d\eta + \int_{\Gamma} Bu(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \Phi(x(t, \eta)) y(\eta) d\eta \quad \forall y \in H^1(\Omega) \quad \text{для почти всех } t \in T. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь  $W(T; V) = \{w(\cdot) \in L_2(T; V): w_t(\cdot) \in L_2(T; V^*)\}$ . Существование и единственность решения с указанными свойствами следует, например, из предложения 1 [28, стр. 129].

Заметим, что при подобном определении решения множество  $U(x(\cdot))$  всех входов  $u(\cdot) \in L_2(T; U)$ , совместимых с  $x(\cdot)$ , есть совокупность тех  $u(\cdot)$  из  $L_2(T; U)$ , для которых выполняется вариационное равенство (36) при  $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, u(\cdot))$ . Нетрудно заметить, что это множество выпукло и замкнуто в пространстве  $L_2(T; U)$ . Поэтому выполнено условие 1.

Обратимся к случаю, когда

$$x(\cdot) \in W^{1,2}(T; V) = \{x(\cdot) \in L_2(T; V): x_t(\cdot) \in L_2(T; V)\}.$$

Опишем алгоритм восстановления  $u^*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$ . Пусть выбраны: семейство  $\{\Delta_h\}$  разбиений отрезка  $T$  вида (8); семейство функций  $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty \subset V$  таких, что  $|\omega_j|_V = 1$  и линейные комбинации  $\omega_j$  образуют всюду плотное в  $V$  множество;

$$0 < \alpha_j < 1, \quad \alpha_j \rightarrow 0, \quad \sum_{j=1}^\infty \alpha_j^2 \leq \infty;$$

а также функции  $\alpha(h): \mathbb{R}^+ = [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $d(h): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} & \alpha(h) \rightarrow 0, \quad \delta(h) \rightarrow 0, \quad d(h) \rightarrow +\infty, \\ & \delta(h)\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0, \quad h^2\delta^{-1}(h)\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (37)$$

Пусть  $|\cdot|_\alpha$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$  —  $\alpha$ -норма и отвечающее ей скалярное произведение в  $V^*$  [8, 9, 29]:

$$|y|_\alpha = \left( \sum_{j=1}^\infty \alpha_j^2 \langle y, \omega_j \rangle^2 \right)^{1/2}, \quad \langle x, y \rangle_\alpha = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j^2 \langle y, \omega_j \rangle \langle x, \omega_j \rangle \quad \forall x, y \in V^*.$$

Некоторые свойства  $\alpha$ -нормы приведены, например, в работе [9]. В частности, верно неравенство

$$|B_1 v|_\alpha \leq K_1 |v|_U \quad \forall v \in U,$$

где постоянная  $K_1$  не зависит от  $v$  и  $\alpha_j$ . Введем оператор  $B_1 \in \mathcal{L}(U; V^*)$ :

$$\langle B_1 u, y \rangle = \int_{\Gamma} (Bu)(\sigma) y(\sigma) d\sigma \quad \forall y \in V.$$

В качестве модели  $M$  возьмем в пространстве  $V^*$  вспомогательную управляемую систему

$$\dot{w}^h(t) = B_1 v^h(t), \quad t \in T.$$

Правило выбора начального состояния модели  $\mathcal{W}_h$  определим согласно (7), где положим

$$w_0^h = 0 \in V^*. \quad (38)$$

Пусть закон выбора управления в модели  $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$  задается формулами (9), в которых

$$\mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_0^h, \dots, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h, w^h(\tau_i)) = v^h(t): t \in \delta_i, \quad (39)$$

$$v^h(t) = v_i^h = \arg \min \{2\langle s_i^0, B_1 v \rangle_\alpha + \alpha |v|_U^2 : v \in S(d(h))\}, \quad (40)$$

$$s_i^0 = w^h(\tau_i) - \xi_i^{(1)}.$$

Здесь элемент  $\xi_i^{(1)} \in V^*$  определяется по правилу

$$\langle \xi_i^{(1)}, \omega_j \rangle = (\xi_i^h - \xi_0^h, \omega_j)_H + \sum_{j=0}^{i-1} \delta \int_{\Omega} \{\nabla \xi_j^h(\eta) \nabla \omega_j(\eta) + \Phi_1(\xi_i^h(\eta)) \omega_j(\eta)\} d\eta \quad \forall j \in [1 : \infty).$$

Заметим, что

$$\langle s_i^0, B_1 v \rangle_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \langle s_i^0, \omega_j \rangle \langle B_1 v, \omega_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \langle s_i^0, \omega_j \rangle (Bv, \omega_j|_{\Gamma})_{L_2(\Gamma)} = (v, \varrho_i)_U,$$

где

$$\varrho_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \langle s_i^0, \omega_j \rangle B^* \omega_j|_{\Gamma}.$$

Здесь  $B^* \in \mathcal{L}(L_2(\Gamma); U)$  — сопряженный оператор, т.е.

$$(Bu, v)_{L_2(\Gamma)} = (u, B^*v)_U \quad \forall u \in U, v \in L_2(\Gamma).$$

Таким образом, для определения элемента  $v_i^h$  нет необходимости знать  $\xi_i^{(1)} \in V^*$ , достаточно уметь вычислять элементы  $\varrho_i \in U$ .

Введем функционал

$$\Lambda^0(x(\cdot), w^h(\cdot)) = \sup_{t \in T} \left| \int_0^t B_1 \{v^h(\tau) - u_*(\tau; x(\cdot))\} d\tau \right|_{\alpha}^2.$$

**Теорема 3.** Пусть  $u_*(\cdot) \in L_{\infty}(T; U)$ . Тогда семейство позиционных алгоритмов моделирования  $D_h$  (10) вида (7)–(9), (38)–(40) удовлетворяет условиям теоремы 1 и является регуляризирующим.

Справедливость теоремы следует из лемм 2.1 и 2.6 [9], а также доказываемой ниже леммы.

**Лемма 4.** Можно указать такие постоянные  $d_j$  ( $j \in [1 : 4]$ ) и  $h_* > 0$ , не зависящие от  $h, \delta, \alpha$ , что, если  $\delta \alpha^{-1} \in (0, d_*^{-1})$ ,  $d_* = 4K_1^2$ , то при всех  $h \in (0, h_*)$  верны неравенства

$$|v^h(\cdot)|_{L_2(T; U)}^2 \leq d_1 \frac{1 + \delta \alpha^{-1}}{1 - d_* \delta \alpha^{-1}} |u_*(\cdot)|_{L_2(T; U)}^2 + d_2 \frac{h + \delta \alpha^{-1} + h^2 \delta^{-1} \alpha^{-1}}{1 - d_* \delta \alpha^{-1}}, \quad i \in [1 : m_h - 1], \quad (41)$$

$$\begin{aligned} R(v^h(\cdot), u_*(\cdot), \delta) &= \max_{i \in [0 : m_h]} \left| \int_0^{\tau_i} B_1 \{v^h(\tau) - u_*(\tau)\} d\tau \right|_{\alpha}^2 \\ &\leq d_3 (h^2 \delta^{-1} + \delta) + d_4 \delta \int_0^{\vartheta} \{|v^h(\tau)|_U^2 + (1 + \alpha \delta^{-1}) |u_*(\tau)|_U^2\} d\tau. \end{aligned} \quad (42)$$

Доказательство. Оценим изменение величины

$$\lambda_i^h = \lambda^h(\tau_i) = \left| \int_0^{\tau_i} B_1 \{v^h(\tau) - u_*(\tau)\} d\tau \right|_\alpha^2, \quad i \in [1 : m_h - 1].$$

Получим

$$\lambda_{i+1}^h = |w_{i+1}^h - x_{i+1}^{(1)}|_\alpha^2 = \lambda_i^h + I_{1,i}^h + I_{2,i}^h, \quad (43)$$

где

$$I_{1,i}^h = 2 \langle w_i^h - x_i^{(1)}, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B_1 \{v^h(\tau) - u_*(\tau)\} d\tau \rangle_\alpha,$$

$$I_{2,i}^h = \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B_1 \{v^h(\tau) - u_*(\tau)\} d\tau \right|_\alpha^2, \quad w_i^h = w^h(\tau_i).$$

Элемент  $x_i^{(1)} \in V^*$  определяется следующим образом:

$$\langle x_i^{(1)}, \omega_j \rangle = (x(\tau_i) - x_0, \omega_j)_H + \int_0^{\tau_i} \int_\Omega \{ \nabla x(t, \eta) \nabla \omega_j(\eta) + \Phi_1(\xi_i^h(\eta)) \omega_j(\eta) \} d\eta dt \quad \forall j \in [1 : \infty).$$

Заметим, что

$$\langle x_i^{(1)}, \omega_j \rangle = \int_0^{\tau_i} \langle B_1 u_*(\tau), \omega_j \rangle d\tau.$$

Таким образом,

$$\left\langle \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B_1 u_*(\tau) d\tau, \omega_j \right\rangle = \langle x_{i+1}^{(1)} - x_i^{(1)}, \omega_j \rangle, \quad (44)$$

$$\left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B_1 u_*(\tau) d\tau - x_{i+1}^{(1)} + x_i^{(1)} \right|_\alpha = 0.$$

Пусть  $\xi^h(t) = \xi_i^h$  при  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ . В силу (4) имеем

$$|x(t) - \xi^h(t)|_V \leq |x(\tau_i) - \xi_i^h|_V + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}(t)|_V dt \leq h + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}(t)|_V dt, \quad t \in \delta_i.$$

В таком случае,

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - \xi^h(\cdot)\|_{L_2(T; V)} &\leq \left( \delta \sum_{i=0}^{m_h-1} \left( h + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}(t)|_V dt \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( 2\delta \sum_{i=0}^{m_h-1} \left( h^2 + \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}(t)|_V^2 dt \right) \right)^{1/2} \leq c_0(h + \delta). \end{aligned}$$

(Здесь и далее символом  $c_j$  обозначены постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.) Отсюда вытекает неравенство

$$|x_i^{(1)} - \xi_i^{(1)}|_\alpha \leq \nu = c_1(h + \delta). \quad (45)$$

Следовательно,

$$I_{1,i}^h \leq I_{3,i}^h + \beta_{h,i}, \quad \beta_{h,i} = \nu(I_{2,i})^{1/2} \leq \nu^2 + I_{2,i}, \quad (46)$$

где

$$I_{3,i}^h = 2 \left\langle w_i^h - \xi_i^{(1)}, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B_1 \{v^h(\tau) - u_*(\tau)\} d\tau \right\rangle_{\alpha}.$$

Кроме того,

$$\left| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} B_1 u_*(\tau) d\tau - \xi_i^{(1)} + \xi_{i-1}^{(1)} \right|_{\alpha} \leq 2c_1(h + \delta).$$

Последнее неравенство является следствием (44), (45). Введем функцию

$$L_i(v) = 2 \left\langle w_i^h - \xi_i^{(1)}, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B_1 \{v - u_*(\tau)\} d\tau \right\rangle_{\alpha} + \alpha \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|v|_{\bar{U}}^2 - |u_*(\tau)|_{\bar{U}}^2\} d\tau.$$

В силу условия  $u_*(\cdot; x(\cdot)) \in L_{\infty}(T; U)$  следует существование такого  $h_*$ , что при  $h \in (0, h_*)$  верно включение  $u_*(t; x(\cdot)) \in S(d(h))$  для почти всех  $t \in T$ . По определению управления  $v_i^h$  (см. (40)), в таком случае, при  $h \in (0, h_*)$  имеем

$$L_i(v_i^h) \leq h\delta. \quad (47)$$

Из (43), (46), (47) получаем

$$\varepsilon_{i+1}^h \equiv \lambda_{i+1}^h + \alpha \int_0^{\tau_{i+1}} \{|v^h(\tau)|_{\bar{U}}^2 - |u_*(\tau)|_{\bar{U}}^2\} d\tau \leq \varepsilon_i + \nu^2 + 2I_{2,i} + h\delta. \quad (48)$$

В таком случае,

$$I_{2,i}^h \leq (\tau_{i+1} - \tau_i) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B_1(v_i^h - u_*(\tau))|_{\alpha}^2 d\tau \leq 2(\tau_{i+1} - \tau_i) K_1^2 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|v_i^h|_{\bar{U}}^2 + |u_*(\tau)|_{\bar{U}}^2\} d\tau. \quad (49)$$

Суммируя по  $i$  правую и левую части (48) и учитывая (43), (49), получим при  $h \in (0, h_*)$

$$\varepsilon_{j+1}^h \leq \varepsilon_0^h + (\nu^2 + h\delta)j + 4\delta K_1^2 \left\{ \int_0^{\tau_{j+1}} \{|v^h(\tau)|_{\bar{U}}^2 + |u_*(\tau)|_{\bar{U}}^2\} d\tau \right\}. \quad (50)$$

Заметив, что  $\lambda_j^h \geq 0 \forall j \in [0 : m]$ ,  $\varepsilon_0^h = 0$ , из (50) выводим

$$\alpha \int_0^{\vartheta} \{|v^h(\tau)|_{\bar{U}}^2 - |u_*(\tau)|_{\bar{U}}^2\} d\tau \leq (\nu^2 + h\delta)(m - 1) + 4K_1^2 \delta \left\{ \int_0^{\vartheta} |v^h(\tau)|_{\bar{U}}^2 d\tau + \int_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|_{\bar{U}}^2 d\tau \right\},$$

откуда в силу (45) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\vartheta} |v^h(\tau)|_{\bar{U}}^2 d\tau &\leq \left( \{c_1^2(h + \delta)^2 + h\delta\} \vartheta \delta^{-1} + (\alpha + 4K_1^2 \delta) \int_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|_{\bar{U}}^2 d\tau \right) (\alpha - 4K_1^2 \delta)^{-1} \\ &= \left( 2c_1^2 \vartheta (h^2 \delta^{-1} \alpha^{-1} + \delta \alpha^{-1}) + h\vartheta + (1 + 4K_1 \delta \alpha^{-1}) \int_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|_{\bar{U}}^2 d\tau \right) (1 - 4K_1^2 \delta \alpha^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (41) установлено. Как нетрудно заметить, можно считать  $d_1 = \max\{1, 4K_1^2\}$ ,  $d_2 = \vartheta \max\{1, 2c_1^2\}$ . Из (50) получаем неравенство

$$\left| \int_0^{\tau_i} B_1 \{v^h(\tau) - u_*(\tau)\} d\tau \right|_{\alpha, h} \leq c_1^2 \vartheta (h + \delta)^2 \delta^{-1} + h\vartheta \quad (51)$$

$$+ 4K_1^2 \delta \int_0^{\vartheta} |v^h(\tau)|_{U}^2 d\tau + (\alpha + 4K_1^2 \delta) \int_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|^2 d\tau.$$

Неравенство (42) является следствием (51) при соответствующем выборе констант. Лемма доказана.

**З а м е ч а н и е 4.** Пусть взята совокупность натуральных чисел  $N(h)$  таких, что  $N(h) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow 0$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 < h$ . Введем “ $h$ -срезку”  $\alpha$ -нормы

$$|y|_{\alpha, h} = \left( \sum_{j=1}^{N(h)} \alpha_j^2 \langle y, \omega_j \rangle^2 \right)^{1/2}$$

и отвечающее ей “скалярное произведение”

$$\langle y, z \rangle_{\alpha, h} = \sum_{j=1}^{N(h)} \alpha_j^2 \langle y, \omega_j \rangle \langle z, \omega_j \rangle, \quad y, z \in V^*.$$

В качестве модели вместо уравнения в банаховом пространстве  $V^*$  удобнее брать  $N(h)$ -мерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{w}_j^h(t) = \int_{\Gamma} (Bv^h(t))(\sigma) \omega_j(\sigma) d\sigma, \quad j \in [1 : N(h)], \quad t \in T.$$

Правило выбора начального состояния модели  $\mathcal{W}_h$  определим согласно (7), где положим

$$w_0^h = \{w_{1,0}^h, \dots, w_{N(h),0}^h\} = 0 \in \mathbb{R}^{N(h)}.$$

Пусть закон выбора управления в модели  $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$  задается формулами (9), в которых  $v_0^h(t)$  определяется согласно (40) и

$$v_i^h = \arg \min \left\{ 2 \left( \sum_{j=1}^{N(h)} \alpha_j^2 (w^h(\tau_i) - \xi_i^{(1)}, \omega_j) B^* \omega_j \Big|_{\Gamma}, v \right)_U + \alpha |v|_U^2 : v \in S(d(h)) \right\}.$$

При таком выборе семейства операторов  $D_h$  утверждение теоремы 3 останется справедливым.

## 5. Заключение

В работе для нелинейного уравнения теплопроводности исследована задача динамической реконструкции граничных управлений, входящих в краевые условия Неймана. В предположении наблюдаемости (с ошибкой) в достаточно частые моменты времени фазового состояния предложено два итерационных вольтерровых алгоритма решения задачи, ядром которых является вспомогательная позиционно управляемая система, часто называемая “моделью”. В условиях отсутствия какой-либо априорной информации о входном воздействии, за исключением принадлежности пространству существенно ограниченных функций, предложены процедуры формирования управлений в модели, служащих приближениями (в среднеквадратичном) экстремального входа. При этом управления вычисляются на каждом шаге временной

итерации в явном виде по принципу обратной связи. Как известно, обобщенное решение уравнения теплопроводности с граничным управлением определяется различными способами. В первом алгоритме при определении обобщенного решения используется полугрупповой подход, развитый Фатторини (Fattorini), Ласецкой (Lasiecka), Триджиани (Triggiani). Во втором — функционально-аналитический подход, восходящий к работам Ладыженской, Лионса и др.

Среди преимуществ первого алгоритма — более “слабые” требования, предъявляемые к результатам измерений  $\xi_i^h$  фазовых состояний  $x(\tau_i)$  ( $\xi_i^h \in H = L_2(\Omega)$ , в то время как во втором алгоритме —  $\xi_i^h \in V = H^1(\Omega)$ ). Кроме того, закон выбора управления в модели в узлах сетки  $\Delta = \{\tau_i\}$  в первом алгоритме “чисто” позиционный ( $\mathcal{U}_h = \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i))$ ) (см. (17)), а во втором — использующий предысторию процесса ( $\mathcal{U}_h = \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_i^h, \dots, \xi_i^h, w^h(\tau_i))$ ) (см. (39)). К преимуществам второго алгоритма следует отнести более “простую” структуру модели (см., например, замечание 4).

Поступила 19.03.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
2. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука. СО, 1980.
3. **Прилепко А.И., Соловьев В.В.** О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента при младшей производной в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 136–143.
4. **Гусев М.И., Куржанский А.Б.** Обратные задачи динамики управляемых систем // Механ. и научно-техн. прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 187–195.
5. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
6. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
7. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
8. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. Свердловск: Изд-во Института математики и механики УрО РАН, 1991.
9. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во Института математики и механики УрО РАН, 2000.
10. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Обратные задачи динамики для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 5. С. 579–597.
11. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
12. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978.
13. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
14. **Maksimov V.I., Pandolfi L.** Dynamical reconstruction of inputs for contraction semigroup systems: the boundary input case. Politecnico di Torino, Dipartimento di Matematica. Rapporto interno No. 2. 1999 (J. Optimization Theory and Applications. 1999. Vol. 103, No. 2).
15. **Osipov Yu.S., Pandolfi L., Maksimov V.I.** Problems of dynamic reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2001. Vol. 9, No. 2. P. 149–162.
16. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
17. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
18. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
19. **Lasiecka I., Triggiani R.** Exact controllability of semilinear abstract systems with application to waves and plates boundary control problems // Appl. Math. and Optim. 1991. Vol. 23, No. 2. P. 109–154.

20. **Lasiecka I.** Boundary control of parabolic systems: regularity of optimal solutions // *Appl. Math. and Optim.* 1978. Vol. 4, No. 4. P. 301–328.
21. **Lasiecka I.** Unified theory for abstract parabolic boundary problems—a semigroup approach // *Appl. Math. and Optim.* 1980. Vol. 6, No. 4. P. 287–334.
22. **Lasiecka I., Triggiani R.** Differential and algebraic Riccati equations with applications to boundary/point control problems: continuous theory and approximation theory // *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Springer-Verlag. Vol. 164. 1991.
23. **Tröltzsch F.** On convergence of semidiscrete Ritz–Galerkin schemes applied to the boundary control of parabolic equations with non-linear boundary condition // *ZAMM (Z. angew. Math. Mech.)*. 1992. Vol. 72, No. 7. P. 291–301.
24. **Fattorini H.** Ordinary differential equations in linear topological spaces. I and II // *J. Different. Equations*. 1968. Vol. 5. P. 72–105; 1969. Vol. 6. P. 50–70.
25. **Байокки К., Капело А.** Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
26. **Barbu V.** Boundary control problems with convex cost criterion // *SIAM J. Control Optim.* 1980. Vol. 18, No. 2. P. 227–243.
27. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Мир, 1977.
28. **Barbu V.** Optimal control of variational inequalities. London, Pitman. 1984.
29. **Осипов Ю.С., Охезин С.П.** К теории дифференциальных игр в параболических системах // *ДАН СССР*. 1976. Т. 226, № 6. С. 1267–1270.

УДК 539.3

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ ОДНОСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В. Н. Тарасов

Рассматриваются задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. Эти задачи сводятся к нахождению точек бифуркации негладких функционалов или к определению параметров, при которых некоторая вариационная задача при наличии ограничений в виде неравенств имеет нетривиальное решение. Решается задача устойчивости прямоугольной пластины, прогибы которой ограничены с одной стороны жесткими ребрами.

### 1. Введение

Для исследования устойчивости упругих систем часто применяют вариационный метод. Предположим, что полная потенциальная энергия системы определяется функционалом

$$\Phi(\lambda, w) = F(w) - \lambda G(w),$$

где функционалы  $F(w)$  и  $G(w)$  представляют соответственно упругую энергию и работу внешних сил. Требуется найти параметр  $\lambda$  (который на практике обычно имеет смысл критической нагрузки), при котором вариационная задача

$$\Phi(\lambda, w) \rightarrow \min_w$$

имеет нетривиальное решение. При решении задачи на устойчивость обычно используют квадратичное приближение для функционала полной потенциальной энергии и лишь для определения закритического поведения системы после потери устойчивости используют точное выражение для полной энергии. В случае квадратичного приближения параметр  $\lambda$  можно найти путем решения задачи

$$F(w) \rightarrow \min_w \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$G(w) = 1. \tag{1.2}$$

Однако для практики инженерного проектирования актуальной является проблема устойчивости упругих систем при наличии односторонних ограничений на перемещения. Влияние односторонних связей выражается в том, что функция  $w$  в задаче (1.1), (1.2) должна удовлетворять некоторым неравенствам. В этом случае вариационная задача с учетом квадратичности рассматриваемых функционалов принимает следующий вид.

Пусть  $A, Q$  — самосопряженные ограниченные линейные операторы, определенные в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ . Предполагается, что  $A$  — положительно определенный оператор,  $Q$  — неотрицательно определенный компактный оператор. Таким образом, для любого  $w \in H$  выполняются неравенства

$$(Aw, w) \geq c_0 \|w\|^2, \quad \text{где } c_0 > 0, \tag{1.3}$$

$$(Qw, w) \geq 0. \tag{1.4}$$

Рассмотрим задачу

$$f(w) = \frac{1}{2}(Aw, w) \rightarrow \min_w \quad (1.5)$$

при ограничениях

$$g(w) = \frac{1}{2}(Qw, w) = 1, \quad w \in K, \quad (1.6)$$

где  $K$  — выпуклый замкнутый конус в  $H$ . Здесь и далее  $\|w\|$ ,  $(u, v)$  — норма и скалярное произведение в  $H$ .

Решение задачи (1.5)–(1.6) существует.

Действительно, если  $w_n$  — минимизирующая последовательность, то в силу условия (1.3) можно считать, что она ограничена и слабо сходится к некоторому  $w$ . Из компактности  $Q$  следует, что  $Qw_n \rightarrow Qw$ . Так как

$$g(w_n) = g(w) + \frac{1}{2} \left[ (Qw_n, w_n - w) + (Q(w_n - w), w) \right],$$

то  $g(w_n) \rightarrow g(w)$  при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно,  $g(w) = 1$ . Учитывая, что конус  $K$  секвенциально слабо замкнут, получим, что  $w$  удовлетворяет условию (1.6). Так как функционал  $f(w)$  является выпуклым и, следовательно, слабо полунепрерывным снизу,  $w$  — решение задачи (1.5), (1.6).

## 2. Цилиндрическая оболочка в жесткой обойме

К исследованию задачи (1.5)–(1.6) может быть сведен расчет на устойчивость упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. Рассмотрим, например, задачу об устойчивости сжимаемой продольной силой цилиндрической оболочки, прогибы которой с одной стороны ограничены жестким препятствием, экспериментальному и численному исследованию которой посвящена работа [1]. В осесимметричном случае при граничных условиях жесткой заделки нахождение критической нагрузки сводится к определению силы  $P$ , при которой вариационная задача

$$\tilde{J}(w) = \frac{1}{2} \int_0^l (Dw''^2 + Cw^2 - Pw'^2) dx \rightarrow \min_{w \in H}, \quad (2.1)$$

$$w(0) = w(l) = w'(0) = w'(l) = 0, \quad (2.2)$$

$$w(x) \geq 0, \quad x \in [0, l], \quad (2.3)$$

имеет нетривиальное решение. Здесь  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  — цилиндрическая жесткость оболочки,  $C = Eh/R^2(1 - \nu^2)$ ,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $R$  — радиус оболочки,  $h$  — толщина. Так как функция  $w(x)$ , являющаяся нетривиальным решением (2.1)–(2.3), определяется с точностью до постоянного множителя, то критическую силу  $P$  можно найти из решения задачи

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^l (Dw''^2 + Cw^2) dx \rightarrow \min_{w \in H} \quad (2.4)$$

при ограничениях (2.3) и

$$J_1(w) = \frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx = 1. \quad (2.5)$$

В данном случае  $H = W_2^2[0, l]$  — пространство функций Л.С. Соболева, имеющих обобщенные суммируемые с квадратом первую и вторую производные (первая производная абсолютно непрерывна) и удовлетворяющих граничным условиям (2.2).

Введем несколько более общие, чем (2.4)–(2.5), функционалы и рассмотрим задачу

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^l (qw''^2 + q_1w'^2 + q_2w^2) dx \rightarrow \min_{w \in H} \quad (2.6)$$

при ограничениях (2.3) и

$$J_1(w) = \frac{1}{2} \int_0^l (rw'^2 + r_1w^2) dx = 1. \quad (2.7)$$

Функции  $q(x), q_1(x), q_2(x), r(x), r_1(x)$  удовлетворяют следующим условиям:  $q(x) \geq \alpha_0$ ,  $\alpha_0 > 0$ ;  $q_1(x), q_2(x), r(x), r_1(x)$  — неотрицательные функции;  $q(x)$  дважды непрерывно дифференцируема,  $q_1(x), r(x)$  — непрерывно дифференцируемые функции,  $r_1(x), q_2(x)$  — непрерывные функции. При этих условиях функционалы (2.6), (2.7) и соответствующие дифференциальные операторы удовлетворяют условиям, указанным во введении, поэтому решение задачи (2.3), (2.6), (2.7) существует и имеет (см. [3]) абсолютно непрерывную первую производную.

Пусть  $w(x)$  — решение задачи (2.3), (2.6), (2.7). Если функция  $w(x) > 0$  для всех  $x \in (l_1, l_2)$ ,  $w(l_1) = w(l_2) = 0$ , то она на этом интервале является решением уравнения Эйлера

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( q \frac{d^2w}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left( q_1 \frac{dw}{dx} \right) + q_2w - \lambda \left( r_1w - \frac{d}{dx} \left( r \frac{dw}{dx} \right) \right) = 0. \quad (2.8)$$

Если в некоторых точках  $w(x) = 0$ , тогда очевидно, что в этих точках  $w'(x) = 0$ . Предположим, что  $w(x) \neq 0$  вне интервала  $[l_1, l_2]$ . Определим функции

$$w_1(x) = \begin{cases} w(x), & x \in [l_1, l_2], \\ 0, & x \notin [l_1, l_2], \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [l_1, l_2], \\ w(x), & x \notin [l_1, l_2]. \end{cases}$$

Ясно, что  $w_1(x), w_2(x) \in H$ . Пусть  $a = J(w_1)$ ,  $b = J(w_2)$ ,  $\gamma^2 = J_1(w_1)$ ,  $\beta^2 = J_1(w_2)$ . Из определения функций  $w_1$  и  $w_2$  следует равенство  $\gamma^2 + \beta^2 = 1$ . Обозначим  $\tilde{w}_1 = \gamma^{-1}w_1$ ,  $\tilde{w}_2 = \beta^{-1}w_2$ . Если  $\gamma^{-2}a \leq \beta^{-2}b$ , то  $a(1 - \gamma^2) \leq \gamma^2b$ , откуда следует неравенство  $\gamma^{-2}a = J(\tilde{w}_1) \leq a + b = J(w)$ ; если же  $\gamma^{-2}a \geq \beta^{-2}b$ , то  $J(\tilde{w}_2) \leq J(w)$ . Таким образом, решение задачи (2.3), (2.6), (2.7) можно искать среди функций, отличных от нуля на некотором интервале  $(l_1, l_2)$ ,  $0 \leq l_1 < l_2 \leq l$ , и тождественно равных нулю вне этого интервала.

Если  $w(x) > 0$  для всех  $x \in (0, l_2)$ , то  $l_2$  либо совпадает с  $l$ , либо находится из решения задачи

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} (qw''^2 + q_1w'^2 + q_2w^2) dx \rightarrow \min_{w \in H, l_2 \in [0, l]} \quad (2.9)$$

при ограничениях

$$J_1(w) = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} (rw'^2 + r_1w^2) dx = 1. \quad (2.10)$$

Из условия минимума по  $l_2$  функционала  $J(w)$  с учетом того, что  $w(l_2) = 0$ ,  $w'(l_2) = 0$ , получаем еще одно граничное условие  $w''(l_2) = 0$ . Таким образом, функция  $w(x)$  удовлетворяет граничным условиям

$$w(0) = w'(0) = w(l_2) = w'(l_2) = w''(l_2) = 0. \quad (2.11)$$

Аналогично, если  $w(x) > 0$  для  $x \in (l_1, l_2)$  при  $0 < l_1 < l_2 < l$  и  $w(x) \equiv 0$  вне этого интервала, то она должна удовлетворять граничным условиям

$$w(l_1) = w'(l_1) = w''(l_1) = w(l_2) = w'(l_2) = w''(l_2) = 0. \quad (2.12)$$

Таким образом, во всех случаях функция  $w(x)$  имеет непрерывную вторую производную.

Рассмотрим задачу (2.3)–(2.5). Для этого в уравнении (2.8) следует положить  $q = D$ ,  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = C$ ,  $r = 1$ ,  $r_1 = 0$ . Покажем, что  $\lambda$  в (2.8) имеет смысл критической нагрузки. Умножим (2.8) на  $w(x)$  и проинтегрируем полученное равенство от  $l_1$  до  $l_2$ . Учитывая граничные условия (2.11) или (2.12) и то, что  $w(x) = 0$  вне интервала  $(l_1, l_2)$ , получаем равенство  $J(w) = \lambda$ . Пусть  $P < \lambda$ . Тогда для любой неотрицательной функции  $u \in W_2^2[0, l]$ , удовлетворяющей ограничению (2.5), имеем

$$\tilde{J}(w) = \frac{1}{2} \int_0^l (Dw''^2 + Cw^2 - Pw'^2) dx > J(w) - P = \lambda - P > 0.$$

Если  $P = \lambda$ , то, очевидно, существует нетривиальное решение задачи (2.3)–(2.5).

В рассматриваемом случае уравнение (2.8) будет совпадать с уравнением равновесия стержня постоянной жесткости на изгиб, находящегося в однородной упругой среде и сжимаемого продольной силой. Общее решение этого уравнения имеет вид [2]

$$w(x) = c_1 \sin(m_1 x) + c_2 \sin(m_2 x) + c_3 \cos(m_1 x) + c_4 \cos(m_2 x), \quad (2.13)$$

где

$$m_1 = \sqrt{\frac{\rho^2}{2} + \sqrt{\frac{\rho^4}{4} - d}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{\rho^2}{2} - \sqrt{\frac{\rho^4}{4} - d}}, \quad \rho^2 = \frac{\lambda}{D}, \quad d = \frac{C}{D}. \quad (2.14)$$

(Нетрудно установить, что для существования нетривиального решения уравнения (2.8) необходимо выполнение неравенства  $\rho^2 > 2\sqrt{d}$ .) Подставляя (2.13) в граничные условия (2.11) и вводя обозначения  $y = m_1 l_2$ ,  $z = m_2 l_2$ , получаем систему уравнений относительно произвольных постоянных  $c_1$ – $c_4$  и  $l_2$ :

$$\begin{aligned} c_3 + c_4 &= 0, & m_1 c_1 + m_2 c_2 &= 0, \\ c_1 \sin y + c_2 \sin z + c_3 \cos y + c_4 \cos z &= 0, \\ c_1 m_1 \cos y + c_2 m_2 \cos z - c_3 m_1 \sin y - c_4 m_2 \sin z &= 0, \\ c_1 m_1^2 \sin y + c_2 m_2^2 \sin z + c_3 m_1^2 \cos y + c_4 m_2^2 \cos z &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Рассматривая первые четыре уравнения относительно  $c_1$ – $c_4$  и приравнявая определитель матрицы коэффициентов к нулю, получаем, что для существования нетривиального решения необходимо, чтобы

$$2zy(1 - \cos z \cos y) - (z^2 + y^2) \sin z \sin y = 0. \quad (2.16)$$

Если же рассмотреть первое, второе, третье и пятое уравнение системы (2.15), то приходим к уравнению

$$z \cos z \sin y - y \sin z \cos y = 0. \quad (2.17)$$

Следует искать решения этих уравнений, удовлетворяющие условию  $y > z > 0$ . Уравнения (2.16) и (2.17) можно переписать в виде

$$\begin{cases} 2(1 - \cos z \cos y) - (zy^{-1} + z^{-1}y) \sin z \sin y = 0, \\ zy^{-1} = \cos y \sin z (\sin y \cos z)^{-1}. \end{cases}$$

Подставляя второе уравнение последней системы в первое, приходим к уравнению

$$2 \cos z \cos y - 2 \cos^2 z \cos^2 y - \sin^2 z \cos^2 y - \cos^2 z \sin^2 y = 0,$$

откуда, после очевидных преобразований, получаем  $\cos z = \cos y$ . Таким образом, все решения системы уравнений (2.16) и (2.17) будут иметь вид

$$\begin{aligned} y = 0, \quad z \in \mathbb{R}; \quad z = 0, \quad y \in \mathbb{R}; \quad z = -y, \quad y, z \in \mathbb{R}; \quad z = y, \quad z, y \in \mathbb{R}; \\ z = 2\pi j, \quad y = 2\pi i \quad i, j \in \mathbb{Z}; \quad z = \pi + 2\pi j, \quad y = \pi + 2\pi i, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(Здесь  $\mathbb{R}$  — множество вещественных,  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел.) Окончательно получаем, что всем условиям удовлетворяют решения

$$y = m_1 l_2 = \pi(1 + 2i), \quad z = m_2 l_2 = \pi(1 + 2j), \quad i > j, \quad (2.18)$$

или

$$y = m_1 l_2 = 2\pi i, \quad z = m_2 l_2 = 2\pi j, \quad i > j. \quad (2.19)$$

Подставляя  $y$  и  $z$  в систему (2.15), получаем  $c_3 = c_4 = 0$ ,  $c_2 = -m_1 m_2^{-1} c_1$ , и выражение для прогиба будет иметь вид

$$w(x) = c_1 \left( \sin(m_1 x) - \frac{m_1}{m_2} \sin(m_2 x) \right). \quad (2.20)$$

Обозначим через  $\alpha$  величину  $m_1 m_2^{-1}$ , тогда либо  $\alpha = (1 + 2i)(1 + 2j)^{-1}$ , либо  $\alpha = i/j$ . Из (2.14) получаем  $m_1^2 + m_2^2 = \rho^2$ ,  $m_2^2(1 + \alpha^2) = \rho^2$ ,  $m_2^2(\alpha^2 - 1) = 2\sqrt{\rho^4/4 - d}$ , откуда находим

$$\rho^2 = \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \sqrt{d}. \quad (2.21)$$

Необходимо подобрать целые положительные числа  $i, j$  ( $i > j$ ) в формулах (2.18) или (2.19) таким образом, чтобы  $\rho^2$ , определяемое формулой (2.21), было как можно меньше, а с другой стороны, функция  $w(x)$ , определяемая формулой (2.20), была бы положительной на интервале  $0 \leq m_1 x \leq \pi(1 + 2i)$ , если  $m_1 l_2, m_2 l_2$  определяются формулами (2.18), или на интервале  $0 \leq m_1 x \leq 2\pi i$ , если  $m_1 l_2, m_2 l_2$  определяются формулами (2.19). Для минимального  $\rho$  числа  $m_1 l_2, m_2 l_2$  определяются формулами (2.18) при  $i = 1, j = 0$ ; в этом случае  $\alpha = 3$ . Тогда

$$\rho^2 = \frac{10}{3} \sqrt{d}, \quad l_2 = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt[4]{d}}. \quad (2.22)$$

Если число  $l_2$ , определяемое формулой (2.22), будет больше  $l$ , то критическая сила находится из уравнения (2.16), где следует положить  $y = m_1 l, z = m_2 l$ .

Так как  $\sin(3m_2 x) = 3\sin(m_2 x) - 4\sin^3(m_2 x)$ , то в (2.20)  $c_1 < 0$ , и если число  $l_2$ , определяемое формулой (2.22), меньше  $l$ , то выражение для прогиба принимает вид

$$w(x) = c \sin^3(m_2 x) H(l_2 - x), \quad x \in [0, l], \quad (2.23)$$

где  $c = -4c_1$ ,  $m_2 = \sqrt[4]{d}/\sqrt{3}$ ,  $H(t)$  — функция Хевисайда.

### 3. Численные методы

При исследовании задач на устойчивость конструкций с односторонними связями аналитическое решение удается получить лишь в редких случаях.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$f(u) = \frac{1}{2}(Au, u) \rightarrow \min_{u \in \mathbb{R}^n} \quad (3.1)$$

при ограничениях

$$g(u) = \frac{1}{2}(Qu, u) = 1, \quad (3.2)$$

$$(b_j, u) \leq 0, \quad j \in I = 1 : m. \quad (3.3)$$

Здесь  $A$  — положительно определенная,  $Q$  — неотрицательно определенная квадратные матрицы порядка  $n$ ,  $b_j \in \mathbb{R}^n$ . Задача (3.1)–(3.3) получается в результате конечномерной аппроксимации задачи (1.5)–(1.6). Обозначим через  $\Gamma$  конус, определяемый неравенствами (3.3). Пусть  $u^*$  — решение задачи (3.1)–(3.3). По теореме Куна — Таккера найдутся множители Лагранжа  $\mu_j \geq 0$ ,  $j \in 1 : m$ , и  $\lambda^*$  такие, что

$$\begin{cases} Au^* - \lambda^*Qu^* + \sum_{j=1}^m \mu_j b_j = 0, \\ g(u^*) = 1, \\ \mu_j(b_j, u^*) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Точки  $u^*$ , удовлетворяющие (3.4), будем называть стационарными.

Введем обозначение  $B(\lambda) = A - \lambda Q$ . Как и выше, можно показать, что для любых  $\lambda \leq \lambda^*$   $(B(\lambda)u, u) \geq 0$  для всех  $u \in \Gamma$  и, напротив, если  $\lambda > \lambda^*$ , то найдется вектор  $\bar{u} \in \Gamma$  такой, что  $(B(\lambda)\bar{u}, \bar{u}) < 0$ . Очевидно также, что  $\lambda^* = f(u^*)$ . Таким образом, матрица  $B(\lambda)$  при  $\lambda \leq \lambda^*$  будет условно положительно определенной на конусе  $\Gamma$ . Вопросы идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах рассматривались в работах [4, 5]. Там получены критерии условной положительной определенности квадратичных форм в важном частном случае, когда  $\Gamma = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u_j \geq 0, \quad j \in 1 : n\}$ . Их применение сводится к вычислению большого количества определителей (в общем случае  $2^n$ ), и в этом отношении является крайне неэкономичным.

Задача (3.1)–(3.3) является задачей невыпуклого нелинейного программирования и является многоэкстремальной. Матрицы  $A$  и  $Q$  невырожденным линейным преобразованием можно привести к диагональному виду. Пусть  $T$  — матрица такого преобразования,  $T^*$  — транспонированная матрица. Сделаем замену переменных  $u = Tz$ . Тогда  $T^*AT = \text{diag}[l_1, l_2, \dots, l_n]$ ,  $T^*QT = \text{diag}[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$ . В новых переменных задача (3.1)–(3.3) превращается в задачу сепарабельного программирования

$$f_1(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l_i z_i^2 \rightarrow \min_z, \quad g_1(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \gamma_i z_i^2 = 1, \quad (T^*b_j, z) \leq 0, \quad j \in J.$$

Для решения последней может быть использован метод ветвей и границ [6]. Однако при расчете реальных упругих систем на устойчивость размерность  $n$  пространства переменных является большой, и применение метода ветвей и границ (равно как и других методов глобальной оптимизации) становится затруднительным. Ниже формулируется алгоритм, который сходится, вообще говоря, к локальному минимуму функции  $f(x)$  на множестве, определяемом ограничениями (3.2), (3.3).

Пусть  $u_0 \in \Gamma$ ,  $g(u_0) = 1$ , — некоторое начальное приближение. Пусть уже получена точка  $u_k \in \Gamma$ ,  $g(u_k) = 1$ . Обозначим

$$\tilde{\Gamma}_k = \{u \in \Gamma \mid (Qu_k, u - u_k) = 0\}. \quad (3.5)$$

Найдем точку  $\tilde{u}_k \in \tilde{\Gamma}_k$  такую, что

$$\frac{1}{2}(A\tilde{u}_k, \tilde{u}_k) = \min_{u \in \tilde{\Gamma}_k} \frac{1}{2}(Au, u). \quad (3.6)$$

Далее полагаем

$$u_{k+1} = s_k^{-1} \tilde{u}_k, \quad \text{где } s_k = \sqrt{g(\tilde{u}_k)}. \quad (3.7)$$

Поскольку  $\tilde{u}_k$  — решение задачи минимизации (3.6), то найдутся множители Лагранжа  $\mu_{k,j} \geq 0$  и  $\lambda_k$  такие, что

$$\begin{cases} A\tilde{u}_k - \lambda_k Qu_k + \sum_{j=1}^m \mu_{k,j} b_j = 0, \\ (Qu_k, \tilde{u}_k - u_k) = 0, \quad \mu_{k,j}(b_j, u) = 0. \end{cases}$$

Можно показать, что последовательность  $\{\lambda_k\}$  монотонно убывает, ограничена снизу, и любая предельная точка последовательности  $\{u_k\}$  является стационарной. Обозначим предел последовательности  $\{\lambda_k\}$  через  $\lambda_*$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Предлагаемый метод является локальным, и он сходится к решению задачи (3.1)–(3.3), если удачно выбрано начальное приближение. После того, как получено  $\lambda_*$ , можно воспользоваться методом ветвей и границ для проверки условной неотрицательной определенности матрицы  $A - \lambda_* Q$  на конусе  $\Gamma$ . Обычно в реальных задачах матрица  $A - \lambda_* Q$  имеет небольшое число отрицательных собственных чисел, а трудоемкость метода ветвей и границ в задачах невыпуклого квадратичного программирования оценивается числом отрицательных собственных чисел матрицы. Если же применять метод ветвей и границ непосредственно к задаче (3.1)–(3.3), то объем вычислительной работы будет зависеть от размерности пространства переменных. Иногда для проверки неотрицательной определенности квадратичных форм на конусах проще воспользоваться критериями, приведенными в работах [7, 8].

**З а м е ч а н и е 2.** На каждом шаге предлагаемого алгоритма требуется решать задачу минимизации выпуклой квадратичной функции при линейных ограничениях (задачу выпуклого квадратичного программирования). Последняя значительно проще исходной.

**З а м е ч а н и е 3.** Если  $I = \emptyset$ , т. е.  $\Gamma = \mathbb{R}^n$ , и  $Q$  — единичная матрица, то предлагаемый алгоритм превращается в известный метод Келлога для поиска минимального собственного числа матрицы  $A$ .

Для проверки эффективности приведенного численного алгоритма решалась задача (2.3) – (2.5). На интервале  $[0, l]$  вводилась равномерная сетка, число точек сетки  $n = 60$ . Заменяя производные по формулам конечных разностей и вычисляя интегралы по формуле трапеций, вместо задачи (2.3)–(2.5) получаем задачу нелинейного программирования (3.1)–(3.3). Для решения последней применялся метод (3.5)–(3.7). Для величин  $l_2$  (длины наибольшего интервала, на котором  $w(x) > 0$ ) и  $\rho^2$  и их приближенных значений  $\tilde{l}_2$ ,  $\tilde{\rho}^2$ , вычисленных по формуле (2.22), были получены следующие результаты.

При  $d = 16$ :  $l_2 = 2.727$ ,  $\rho^2 = \frac{10}{3}\sqrt{16} = 13.33$ ,  $\tilde{l}_2 = 2.518$ ,  $\tilde{\rho}^2 = 13.368$ ; при  $d = 169$ :  $l_2 = 1.509$ ,  $\rho^2 = \frac{10}{3}\sqrt{169} = 43.33$ ,  $\tilde{l}_2 = 1.421$ ,  $\tilde{\rho}^2 = 43.814$ ; при  $d = 900$ :  $l_2 = 0.933$ ,  $\rho^2 = \frac{10}{3}\sqrt{900} = 100$ ,  $\tilde{l}_2 = 0.811$ ,  $\tilde{\rho}^2 = 108.9$ .

Как обычно, нетрудно показать, что конечномерные аппроксимации позволяют построить минимизирующую последовательность для задачи (1.5)–(1.6), как это делается при обосновании метода Ритца. Что же касается сходимости к самому решению задачи, то тут возникают некоторые трудности. Доказательство сходимости последовательности минимизирующих функций зависит от того, каким образом производится конечномерная аппроксимация. По поводу доказательства сходимости численных аппроксимаций см. [9].

#### 4. Устойчивость прямоугольной пластины при односторонних ограничениях на перемещения

Пусть прямоугольная пластина нагружена по краям  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $0 \leq y \leq b$  нормальными усилиями  $\sigma$  и по всем краям касательными усилиями  $\tau$ . Обозначим через  $w(x, y)$ ,  $0 \leq x \leq a$ ,

$0 \leq y \leq b$ , прогиб пластины. Потенциальная энергия деформации пластины имеет вид [2]

$$U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left( (\Delta w)^2 - (1 - \nu)L(w, w) \right) dx dy, \quad (4.1)$$

где

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad L(w, w) = 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right).$$

Работа внешних сил может быть вычислена по формуле

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \sigma \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4.2)$$

Далее будем предполагать, что пластина находится над двумя жесткими ребрами, расположенными вдоль оси  $x$  так, что прогиб пластины удовлетворяет неравенствам

$$w(x, b_0) \geq 0, \quad w(x, b_1) \geq 0, \quad (4.3)$$

где  $0 < b_0 < b_1 < b$ , или над одним жестким ребром так, что прогиб пластины должен удовлетворять неравенству

$$w\left(x, \frac{b}{2}\right) \geq 0. \quad (4.4)$$

Считаем, что прогиб на границе пластины равен нулю. Тогда выражение (4.1) для упругой энергии упрощается, ибо в этом случае

$$\int_0^a \int_0^b L(w, w) dx dy = 0.$$

Критические нагрузки  $\sigma^*$  и  $\tau^*$  можно найти следующим образом. Зафиксируем какие-либо значения  $\sigma$  и  $\tau$  и рассмотрим задачи

$$U \rightarrow \min_w \quad \text{при ограничениях } V = 1, \quad (4.5)$$

где минимум берется по функциям  $w(x, y)$ , удовлетворяющим либо неравенствам (4.3), либо неравенствам (4.4). Как и выше, решение поставленных задач существует в гильбертовом пространстве  $H$  функций, имеющих обобщенные, суммируемые с квадратом производные второго порядка включительно и удовлетворяющих соответствующим краевым условиям. (По поводу свойств функционалов (4.1), (4.2) см. [3]).

Пусть  $w^*$  — решение задачи (4.5) и  $\lambda = U(w^*)$ . Тогда критические нагрузки вычисляются по формулам

$$\sigma^* = \lambda\sigma, \quad \tau^* = \lambda\tau. \quad (4.6)$$

Нетрудно показать, что  $\lambda = D\lambda^*/b^2$ , где  $\lambda^* = \lambda^*(\alpha)$  — функция от безразмерного параметра  $\alpha = ab^{-1}$ , поэтому, не ограничивая общности задачи, можно положить  $a = 1$ ,  $D = 1$ .

Пусть по краям  $y = 0$ ,  $y = b$  выполнены граничные условия шарнирного опирания

$$w(x, 0) = w(x, b) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w(x, b)}{\partial y^2} = 0, \quad (4.7)$$

а по краям  $x = 0$ ,  $x = 1$  выполнены граничные условия жесткой заделки

$$w(0, y) = w(1, y) = 0, \quad \frac{\partial w(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial w(1, y)}{\partial x} = 0.$$

В данном случае граничные условия будут выполнены, если прогиб  $w(x, y)$  искать в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right), \quad (4.8)$$

где функции  $w_k(x)$  должны удовлетворять соответствующим граничным условиям. Подставляя (4.8) в формулы для упругой энергии (4.1) и работы внешних сил (4.2), с учетом граничных условий получим

$$U = \frac{b}{4} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left( w_k''^2 - 2 \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 w_k'' w_k + \left( \frac{k\pi}{b} \right)^4 w_k^2 \right) dx, \quad (4.9)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{2} \sigma w_k'^2 + 2\tau \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} d_{kj} w_k' w_j' \right) dx, \quad (4.10)$$

где

$$d_{kj} = \begin{cases} \frac{kj}{(k-j)(k+j)} [(-1)^{k+j} - 1], & \text{если } k \neq j, \\ 0, & \text{если } k = j. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала задачу об устойчивости пластины без ограничений на перемещения при предположении, что  $\tau = 0$ . В этом случае поиск критической нагрузки сводится к решению вариационной задачи изопериметрического типа

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left( w_k''^2 - 2 \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 w_k'' w_k + \left( \frac{k\pi}{b} \right)^4 w_k^2 \right) dx \rightarrow \min_{w_k} \quad (4.11)$$

при ограничениях

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} w_k'^2 dx = 1. \quad (4.12)$$

При всяком  $k$  уравнение Эйлера для задачи (4.11), (4.12) имеет вид

$$w_k^{(4)} + \left( \frac{k\pi}{b} \right)^4 w_k + \rho^2 w_k'' = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.13)$$

где  $\rho^2 = \lambda_k - 2(k\pi b^{-1})^2$ ,  $\lambda_k$  — множитель Лагранжа. Минимальное  $\lambda_k$ , при котором существует нетривиальное решение одного из уравнений (4.13), соответствует случаю  $k = 1$ . Общее решение уравнения (4.13) определяется формулами (2.13), (2.14), где следует положить  $D = 1$ ,  $d = \pi^4/b^4$ . Произвольные постоянные  $c_1 - c_4$  должны удовлетворять первым четырем уравнениям системы (2.15), где следует положить  $l_2 = 1$ ; при этом  $\rho = \rho(b)$  является минимальным положительным корнем уравнения (2.16), которое в данном случае приобретает вид

$$2 \frac{\pi^4}{b^4} (1 - \cos m_1 \cos m_2) - \rho^2 \sin m_1 \sin m_2 = 0. \quad (4.14)$$

Выражение для прогиба определяется формулой

$$w_1(x) = c_2 \left( \sin(m_2 x) - \frac{m_2}{m_1} \sin(m_1 x) - c_4 (\cos(m_2 x) - \cos(m_1 x)) \right), \quad (4.15)$$

где

$$x \in [0, 1], \quad c_4 = \frac{m_1 \sin m_2 - m_2 \sin m_1}{m_1 (\cos m_1 - \cos m_2)}.$$

Прогиб  $w_1(x)$ , определяемый формулой (4.15), принимает значения разных знаков при  $b < 1/\sqrt{3}$ . Предположим теперь, что пластина находится над одним жестким ребром, расположенным посередине пластины вдоль оси  $x$ . Таким образом, получаем задачу минимизации функционала (4.3) при ограничениях (4.12) и (4.4). Ограничение (4.4) в данном случае приобретает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) \sin \frac{k\pi}{2} \geq 0. \quad (4.16)$$

Если в формулах (4.11), (4.12) ограничиться только одним слагаемым, то получаем в точности задачу (2.3)–(2.5). Используя формулу (2.22), получаем

$$\lambda_1 = \rho^2 + 2 \frac{\pi^2}{b^2} = \frac{16\pi^2}{3b^2}, \quad l_2 = \sqrt{3}b. \quad (4.17)$$

Тогда  $l_2 = 1$  при  $b = 1/\sqrt{3}$  и  $l_2 < 1$  при  $b < 1/\sqrt{3}$ , при этом форма потери устойчивости пластины (если учитывается только одна гармоника по  $y$ ) определяется формулой

$$w(x, y) = c \sin^3(\pi x/\sqrt{3}b) H(\sqrt{3}b - x) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right). \quad (4.18)$$

Для конечномерной аппроксимации задачи (4.11), (4.12), (4.16) ограничимся некоторым конечным числом слагаемых  $M$  и введем на интервале  $[0, 1]$  равномерную сетку, число точек которой обозначим через  $m$ .

Введем в рассмотрение векторы  $z_j = (z_{j,1}, z_{j,2}, \dots, z_{j,m}) \in \mathbb{R}^m$ ,  $z_{j,i} = w_j(x_i)$ ,  $i \in 1:m$ ,  $j \geq 1$ , и обозначим  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_M) \in \mathbb{R}^{m \cdot M}$ . Заменяя производные конечными разностями и вычисляя интегралы по формуле трапеций, приходим к следующей задаче конечномерной оптимизации, аппроксимирующей задачу (4.1)–(4.3) или (4.1), (4.2), (4.4):

$$f(Z) \rightarrow \min_Z, \quad g(Z) = 1. \quad (4.19)$$

Ограничения (4.3) и (4.4) принимают вид

$$-\sum_{j=1}^M z_{j,i} \sin \frac{k\pi b_j}{b} \leq 0, \quad i \in 1:m, \quad (4.20)$$

где  $j \in 0:1$ , если прогиб пластины ограничен двумя ребрами,  $j = 0$ ,  $b_0 = b/2$ , если прогиб пластины ограничен одним ребром.

Для решения задачи минимизации функции (4.19) при ограничениях (4.20) применялся метод (3.5)–(3.7). Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1

$b$	1 / 3	1 / 4
$\sigma$	391.4	669.0
$\sigma_1$	472.8	840.0
$\sigma_2$	450.3	825.9
$\tilde{\sigma}$	462.7	838.9
$\sigma^*$	473.7	842.2

Во второй строке таблицы приведены значения критических сил без ограничений на перемещения; в третьей — с ограничениями, задаваемыми одним ребром, расположенным посередине пластины, при этом  $M = 1$ ; в четвертой — при ограничениях, задаваемых одним ребром и  $M = 5$ ; в пятой строке — при ограничениях, задаваемых двумя жесткими ребрами ( $b_0 = (3 - \sqrt{5})b/2$ ,  $b_1 = (\sqrt{5} - 1)b/2$ ,  $M = 5$ ); в последней строке  $\sigma^*$  вычисляется по формуле (4.17).

Если ограничения на прогиб задаются одним ребром, то вторая и более высокие “гармоники по  $y$ ” оказывают некоторое влияние на критическую силу, если же ограничения заданы двумя ребрами, то имеет значение лишь первая гармоника. Поэтому формулы (4.17)–(4.18) дают решение рассматриваемой задачи при ограничениях  $w(x, y) \geq 0$ ,  $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ .

Гораздо сложнее решить задачу об устойчивости пластины в случае, когда граничные условия на краях пластины  $y = 0$  и  $y = b$  отличны от условий шарнирного опирания. В области

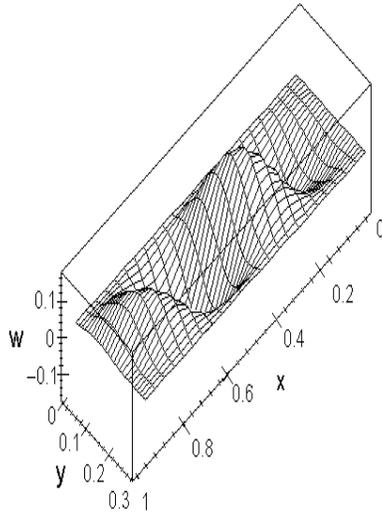


Рис. 1

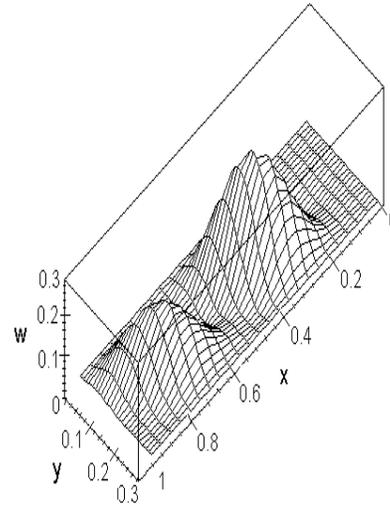


Рис. 2

$\Omega = [0, 1] \times [0, b]$  введем равномерную сетку  $T = T_x \times T_y$ , обозначим через  $N$  число точек сетки вдоль оси  $x$ ,  $K$  — вдоль оси  $y$ . При произвольных граничных условиях для конечномерной аппроксимации задачи (4.1)–(4.3) прогиб пластины  $w(x, y)$  будем приближать интерполяционными кубическими сплайнами двух переменных.

Пусть  $w_{ij} = w(x_i, y_j)$ ,  $i \in 0 : N$ ,  $j \in 0 : K$ , — значения прогиба пластины в точках сетки.

Заменяя функцию  $w(x, y)$  интерполяционным кубическим сплайном и вычисляя интегралы (4.1), (4.2), получим значение потенциальной энергии пластины  $f(w_{ij})$  и работы внешних сил  $g(w_{ij})$ . Очевидно, функции  $f(w_{ij})$  и  $g(w_{ij})$  являются квадратичными формами от переменных  $w_{ij}$ .

Таким образом, вместо задачи (4.5) получаем задачу нелинейного программирования (3.1)–(3.3). В таблице 2 приведены результаты вычислений при следующих значениях параметров:  $a = 1$ ,  $b = 0.2$ ,  $N = 20$ ,  $K = 10$ .

Таблица 2

$\tau$	1	1	0	1	2	3	4	5
$\sigma$	3	2	1	1	1	1	1	1
$\lambda_{огр}^{без}$	313.0	444.6	988.4	723.6	492.1	366.1	290.3	240.1
$\lambda_*$	357.4	515.7	1107	871.0	599.6	443.2	351.0	288.7
$\lambda^*$	357.2	514.9	1106	869.2	607.6	449.0	354.7	293.1
$\lambda_{огр}^{без}$	551.0	775.7	1757	1237	827	611.5	482.5	399.2
$\lambda_*$	750.2	1049	2384	1640	1079	790.5	623.6	513.7

В третьей строке таблицы указаны значения параметра  $\lambda$  для шарнирно опертой по всему контуру пластины при условии, что на прогиб пластины не наложено никаких ограничений; в четвертой строке — значения  $\lambda$  при ограничениях на прогиб, задаваемых двумя жесткими ребрами ( $b_0 = b/3$ ,  $b_1 = 2b/3$ ), причем прогиб пластины аппроксимировался сплайнами; в пятой строке таблицы — значения  $\lambda$ , полученные в результате решения задачи (4.19), (4.20) (аппроксимация рядом Фурье (4.8),  $M = 8$ ,  $m = 60$ ). В шестой и седьмой строках приведены соответствующие результаты для пластины, жестко закрепленной по всем кромкам.

Различие в формах потери устойчивости иллюстрируется на рисунках 1 и 2. На рис. 1 приведена форма потери устойчивости жестко закрепленной пластины без ограничений на

перемещения ( $\tau = 3$ ,  $\sigma = 1$ ), на рис. 2 — при ограничениях, задаваемых двумя жесткими ребрами.

Для вычисления критических сил следует использовать формулы (4.6). Результаты вычислений критических сил при отсутствии ограничений на прогиб пластины с точностью до трех значащих цифр совпадают с результатами, приведенными в работе [10]. Некоторые задачи устойчивости упругих систем при наличии неудерживающих связей рассматривались в работах [1, 11, 12]. Закритическое поведение упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения изучалось ранее в работах [13, 14].

Поступила 17.09.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алфутов Н.А., Еремчиев А.Н.** Влияние односторонних связей на устойчивость оболочек при осевом сжатии // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. С. 179–188.
2. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
3. **Бергер М.** Теория бифуркаций в случае нелинейных эллиптических систем // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974.
4. **Крепс В.Л.** О квадратичных формах, неотрицательных на ортанте // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 4. С. 497–503.
5. **Рапопорт Л.Б.** Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе // Прикл. математика и механика. 1986. Т.50, вып. 4. С. 674–679.
6. **Сухарев А.Г.** Глобальный экстремум и методы его отыскания // Математические методы в исследовании операций. М.: Изд-во МГУ, 1983.
7. **Артюнов А.В., Тынянский Н.Т.** Знакоопределенность квадратичных форм на конусе // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, вып. 2(236). С. 133–134.
8. **Gaddum J.** Linear inequalities and quadratic forms // Pacific J. of Math. 1958. No. 8. P. 411–414.
9. **Гловински Р, Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.** Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
10. **Фридман А.З.** Устойчивость заземленных по контуру прямоугольных пластин под действием комбинированных нагрузок. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1988. № 5. С. 148–151.
11. **Тарасов В.Н.** К решению задач на собственные значения для положительно однородных операторов // Труды Второй международной научно технической конференции “Актуальные проблемы фундаментальных наук”. М.: Техносфера-Информ, 1994. Т. 2. Часть 2. С. в-8–в-11.
12. **Tarasov V.N., Kholmogorov D.V.** Some problem of a stability and supercritical behaviour of elastic systems with one-sided connections // Strength problems of deformed bodies. Trans. St. Petersburg. Acad. Sci. Strength Probl. V. 1. St. Petersburg, 1997. P. 175–188.
13. **Феодосьев В.И.** Избранные задачи по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967.
14. **Михайловский Е.И., Тарасов В.Н., Холмогоров Д.В.** Закритическое поведение продольно сжатого стержня с жесткими ограничениями на прогиб // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып.1. С. 156–160.

УДК 517.977

## ПРИНЦИП РЕЛЕЙНОСТИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА<sup>1</sup>

А. А. Толстоногов

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается нелинейная эволюционная управляемая система с эволюционными операторами, являющимися субдифференциалами зависящей от времени собственной, выпуклой, полунепрерывной снизу функции. Управление подчинено ограничению, которое представляет собой выпуклое, замкнутое, ограниченное множество из сепарабельного рефлексивного банахова пространства. Показано, что любая траектория управляемой системы, соответствующая измеримому управлению, с любой степенью точности равномерно по времени может быть аппроксимирована траекториями, соответствующими ступенчатым управлениям, значениями которых являются крайние точки ограничения на управление. Полученные результаты проиллюстрированы на примере управляемой системы с разрывной нелинейностью.

### 1. Постановка задачи

Пусть  $T = [0, 1]$  — отрезок числовой прямой с мерой Лебега  $\mu$ ,  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$  — расширенная числовая прямая. Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство  $H$  с нормой  $\|\cdot\|$  и скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и пространство  $C(T, H)$  всех непрерывных функций из  $T$  в  $H$  с топологией равномерной сходимости. Функция  $\varphi : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  называется собственной, если ее эффективная область

$$\text{dom } \varphi = \{x \in H : \varphi(x) < +\infty\}$$

не пуста и  $\varphi(x) > -\infty$  для всех  $x \in H$ .

Множество всех функций  $\varphi : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , которые являются собственными, выпуклыми и полунепрерывными снизу, мы будем обозначать через  $\Gamma_0(H)$ . Субдифференциалом  $\partial\varphi(x)$  функции  $\varphi \in \Gamma_0(H)$  в точке  $x \in H$  называется множество

$$\partial\varphi(x) = \{v \in H : \langle v, y - x \rangle \leq \varphi(y) - \varphi(x) \forall y \in H\}.$$

Известно [1], что  $x \rightarrow \partial\varphi(x)$  является максимальным монотонным оператором и

$$\text{dom } \partial\varphi = \{x \in H : \partial\varphi(x) \neq \emptyset\} \subset \text{dom } \varphi,$$

$$\overline{\text{dom}(\partial\varphi)} = \overline{\text{dom } \varphi},$$

где черта означает замыкание в  $H$ .

Рассмотрим сепарабельное рефлексивное банахово пространство  $Y$  и  $\mathcal{L}(Y, H)$  — пространство непрерывных линейных операторов из  $Y$  в  $H$  с операторной нормой.

Пусть  $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$ ,  $t \in T$ ,  $A : T \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$ .

Рассмотрим управляемую систему

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + A(t, x(t))u(t) + g(t, x(t)), \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант 2000-0015), РФФИ — ГФЕН Китая (грант 02-01-39006) и РФФИ (грант 03-01-00203).

$$x(0) = x_0 \in \text{dom } \varphi^0,$$

с ограничением на управление

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (1.2)$$

где  $U \subset Y$  — замкнутое, выпуклое, ограниченное множество.

Наряду с ограничением (1.2) рассмотрим ограничение

$$u(t) \in \text{ext } U, \quad t \in T, \quad (1.3)$$

где  $\text{ext } U$  — совокупность всех крайних точек множества  $U$ . Напомним, что точка  $u$  называется крайней, если ее нельзя представить как середину отрезка с различными концами, принадлежащими множеству  $U$ . Так как  $U$  является выпуклым, слабо компактным подмножеством пространства  $Y$ , то согласно теореме Крейна — Мильмана множество  $\text{ext } U$  не пусто и  $\overline{\text{ext } U} = U$ , где  $\overline{\text{ext } U}$  означает замкнутую выпуклую оболочку множества  $\text{ext } U$ .

Под решением управляемой системы (1.1) с ограничением (1.2) понимается пара  $(x(\cdot), u(\cdot))$ , где  $x: T \rightarrow H$ ,  $x(0) = x_0$ , — абсолютно непрерывная функция,  $x(t) \in \text{dom } \partial\varphi^t$  почти всюду, и  $u: T \rightarrow Y$  — измеримая функция, почти всюду удовлетворяющие включениям (1.1), (1.2).

Если  $(x(\cdot), u(\cdot))$  — решение системы (1.1), то  $x(\cdot)$  называется траекторией, соответствующей управлению  $u(\cdot)$ . Множество траекторий управляемой системы (1.1) с ограничением (1.2) мы будем обозначать  $Tr_U(x_0)$ .

Через  $Tr_{\text{ext } U}(x_0)$  мы будем обозначать множество траекторий управляемой системы (1.1), соответствующих ступенчатым (кусочно-постоянным) управлениям  $u(t)$ , удовлетворяющим включению (1.3).

При достаточно общих предположениях мы доказываем, что

$$Tr_U(x_0) = \overline{Tr_{\text{ext } U}(x_0)}, \quad (1.4)$$

где черта сверху означает замыкание в  $C(T, H)$ .

Если  $Y$  — конечномерное пространство и  $U$  — выпуклый многогранник, то  $\text{ext } U$  — это множество всех вершин многогранника. В этом случае равенство (1.4) говорит, что любую траекторию управляемой системы (1.1) с ограничением (1.2) с любой степенью точности равномерно по  $t$  можно аппроксимировать траекториями этой системы, соответствующими ступенчатым управлениям, значениями которых являются вершины многогранника  $U$ . Этим и объясняется термин “принцип релейности” (“bang-bang principle”).

## 2. Основные обозначения и предварительные результаты

Пусть  $Z$  — сепарабельное метрическое пространство с метрикой  $d_Z(\cdot, \cdot)$ . Расстояние от точки  $z \in Z$  до множества  $B \subset Z$  мы будем обозначать  $d_Z(z, B)$ . Метрика Хаусдорфа на пространстве замкнутых, ограниченных подмножеств из  $Z$  определяется как

$$D_Z(B, C) = \max\{\sup_{x \in B} d_Z(x, C), \sup_{y \in C} d_Z(y, B)\},$$

где  $B, C$  — замкнутые, ограниченные подмножества из  $Z$ .

Пусть  $X$  — сепарабельное банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|$ .

Вообще говоря, мы считаем, что пространство  $X$  и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией, но символ  $\omega\text{-}X_1$  для подмножества  $X_1$  пространства  $X$  означает, что  $X_1$  наделено топологией, индуцированной слабой  $\sigma(X, X^*)$ -топологией [2], где  $X^*$  — пространство, топологически сопряженное к  $X$ .

На пространстве  $L^2(T, Y)$  для элементов  $v(\cdot) \in L^2(T, Y)$  наряду со стандартной нормой мы рассмотрим норму

$$\|v(\cdot)\|_\omega = \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\| \int_t^{t'} v(s) ds \right\|. \quad (2.1)$$

Функция  $u: T \rightarrow Y$  называется ступенчатой, если существует конечная последовательность точек  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  такая, что на каждом из интервалов  $(t_{i-1}, t_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , функция  $u(t)$  постоянна. Никаких дополнительных предположений относительно значений функции  $u(t)$  в самих точках  $t_i$  не требуется.

Функция  $\omega: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  называется функцией Камке, если:

- (1)  $\omega(t, r)$  является функцией Каратеодори, интегрально ограниченной на ограниченных подмножествах из  $\mathbb{R}^+$ ;
- (2)  $\omega(t, 0) = 0$  почти всюду;
- (3) единственной непрерывной функцией  $r: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ , удовлетворяющей интегральному неравенству

$$r(t) \leq \int_0^t \omega(s, r(s)) ds, \quad t \in T,$$

является функция  $r(t)$ , тождественно равная нулю.

Типичным примером функции Камке является функция  $\omega(t, r) = k(t)r$ , где  $k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ . Другие примеры функций Камке можно найти в [3].

Введем следующие предположения.

*Предположения  $\Gamma(\varphi)$ .* Мы говорим, что функции  $\varphi^t$  удовлетворяют предположениям  $\Gamma(\varphi)$ , если  $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$ ,  $t \in T$ , и

- (i) для каждого  $r \geq 0$  существуют абсолютно непрерывные функции  $a_r, b_r: T \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что производная  $\dot{a}_r(\cdot)$  принадлежит  $L^2(T, \mathbb{R})$ , и для любых  $s, t \in T$ ,  $s \leq t$ , и  $x \in \text{dom } \varphi^s$  с  $\|x\| \leq r$  найдется элемент  $y \in \text{dom } \varphi^t$ , удовлетворяющий неравенствам

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq |a_r(t) - a_r(s)| \cdot (|\varphi^s(x)|^{\frac{1}{2}} + 1), \\ \varphi^t(y) - \varphi^s(x) &\leq |b_r(t) - b_r(s)| \cdot (|\varphi^s(x)| + 1); \end{aligned}$$

- (ii) для любых  $t \in T$  и  $r > 0$  множество  $\{x \in H; \|x\| \leq r, |\varphi^t(x)| \leq r\}$  относительно компактно в  $H$ .

Всюду в дальнейшем, не оговаривая специально, считаем, что предположения  $\Gamma(\varphi)$  выполняются.

*Предположения  $\Gamma(A)$ .* Оператор  $A: T \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$  удовлетворяет условиям:

- (1) отображение  $t \rightarrow A(t, x)u$  измеримо для любых  $(x, u) \in H \times Y$ ;
- (2) отображение  $x \rightarrow A^*(t, x)h$  почти всюду непрерывно для любых  $h \in H$ , где  $A^*(t, x)$  — оператор, сопряженный к  $A(t, x)$ ;
- (3) существуют  $m(\cdot), n(\cdot) \in L^\infty(T, \mathbb{R})$  такие, что почти всюду выполняется неравенство

$$\|A(t, x)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq m(t) + n(t)\|x\|, \quad m(t), n(t) \geq 0, \quad t \in T. \quad (2.2)$$

*Предположение  $\Gamma(g)$ .* Функция  $g: T \times H \rightarrow H$  является функцией Каратеодори, удовлетворяющей почти всюду неравенству

$$\|g(t, x)\| \leq m(t) + n(t)\|x\|. \quad (2.3)$$

*Предположение  $H(\omega)$ .* Для любого  $M > 0$  существует функция  $\omega_M(t, r)$  Каратеодори такая, что для любых  $x, y \in H$ ,  $\|x\| \leq M$ ,  $\|y\| \leq M$  и любых  $u \in U$  неравенство

$$\langle x - y, A(t, x)u - A(t, y)u \rangle + \langle x - y, g(t, x) - g(t, y) \rangle + \omega_M(t, \|x - y\|) \cdot \|x - y\| \geq 0 \quad (2.4)$$

имеет место почти всюду.

Из предположений  $\Gamma(A)$  следует, что для любого  $h \in H$  функция  $\langle h, A(t, x)u \rangle = \langle A^*(t, x)h, u \rangle$  измерима по  $t$  и непрерывна по  $(x, u)$  при почти каждом  $t$ . Следовательно, для любых  $x \in C(T, H)$ ,  $u \in L^2(T, Y)$  функция  $t \rightarrow A(t, x(t))u(t)$  скалярно измерима [4, с. 764]. Так как пространство  $H$  сепарабельно, то функция  $t \rightarrow A(t, x(t))u(t)$  измерима. Поэтому из предположения  $\Gamma(g)$  и неравенства (2.2) следует, что для любой измеримой функции  $u(t) \in U$  и любой непрерывной функции  $x: T \rightarrow H$  функция

$$t \rightarrow A(t, x(t))u(t) + g(t, x(t))$$

является элементом пространства  $L^2(T, H)$ .

Пусть

$$S(U) = \{u(\cdot) : u : T \rightarrow Y \text{ измерима и } u(t) \in U \text{ п.в.}\}. \quad (2.5)$$

Так как пространство  $L^2(T, Y)$  является сепарабельным и рефлексивным, то множество  $S(U)$  является выпуклым, компактным, метризуемым подмножеством пространства  $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ . Поэтому мы можем рассмотреть оператор  $F: C(T, H) \times S(U) \rightarrow L^2(T, H)$ , определенный по правилу

$$F(x, u)(t) = A(t, x(t))u(t) + g(t, x(t)), \quad t \in T. \quad (2.6)$$

**Лемма 1.** *Оператор  $(x, u) \rightarrow F(x, u)$  как оператор из  $C(T, H) \times \omega\text{-}S(U)$  в  $\omega\text{-}L^2(T, H)$  непрерывен.*

Доказательство леммы с достаточно очевидными видоизменениями повторяет доказательство аналогичной леммы в [5].

Известно, что множество  $U \subset Y$  является выпуклым, метризуемым, компактным подмножеством пространства  $\omega\text{-}Y$ . Пусть  $Z = \omega\text{-}U$  и  $d_Z(\cdot, \cdot)$  — метрика на  $Z$ , индуцированная топологией пространства  $\omega\text{-}Y$ .

Возьмем в  $\text{ext } U$  счетное плотное (в топологии пространства  $Z$ ) подмножество  $\{y_i\}_{i \geq 1}$ . Пусть  $Z_0$  — замыкание в  $Z$  множества  $\text{ext } U$  и

$$Z_n = \bigcup_{i=1}^n y_i, \quad n \geq 1. \quad (2.7)$$

Следующая теорема является основополагающей в наших исследованиях и имеет самостоятельное значение.

**Теорема 1.** *Для любой измеримой функции  $u(t) \in U$ ,  $t \in T$ , существует последовательность ступенчатых функций  $u_n(t) \in \text{ext } U$ ,  $t \in T$ ,  $n \geq 1$ , сходящаяся к  $u(t)$  в топологии пространства  $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ .*

**Доказательство.** Доказательство теоремы разобьем на 3 шага.

Шаг 1. Для любой измеримой функции  $u(t) \in U$ ,  $t \in T$ , существует последовательность измеримых функций  $u_n(t) \in \text{ext } U$ ,  $t \in T$ ,  $n \geq 1$ , сходящаяся к  $u(t)$  в топологии пространства  $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ . Как указывалось выше, множество  $S(U)$  (см. (2.5)) является выпуклым компактным подмножеством пространства  $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ . Поэтому множество  $\text{ext } S(U)$  крайних точек  $S(U)$  не пусто. Так как  $u(\cdot) \in S(U)$ , то согласно теореме 0.1 [6] существует последовательность  $u_n(\cdot) \in \text{ext } S(U)$ ,  $n \geq 1$ , сходящаяся к  $u(\cdot)$  по норме (2.1). Воспользовавшись леммой 2.3 [5], мы получаем, что последовательность  $u_n(\cdot)$ ,  $n \geq 1$ , сходится к  $u(\cdot)$  в топологии пространства  $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ . Известно [7], что  $u_n(\cdot) \in \text{ext } S(U)$  тогда и только тогда, когда  $u_n(t) \in \text{ext } U$  почти всюду. Тем самым утверждение шага 1 доказано.

Шаг 2. Для любой измеримой функции  $u(t) \in \text{ext } U$ ,  $t \in T$ , существует последовательность измеримых функций  $u_n(t) \in Z_n$  (см. (2.7)),  $t \in T$ ,  $n \geq 1$ , сходящаяся к  $u(t)$  в топологии пространства  $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ .

Поскольку  $Z_n$ ,  $n \geq 1$ , является возрастающей по включению последовательностью компактных множеств из компактного пространства  $Z = \omega\text{-}U$ , то она сходится в метрике Хаусдорфа  $D_Z(\cdot, \cdot)$  к множеству  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n}$  [8], где черта сверху означает замыкание в топологии пространства  $Z$ . Из определения множеств  $Z_n$  следует, что  $Z_0 = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n}$ . Возьмем измеримую функцию  $u(t) \in \text{ext } U$ ,  $t \in T$ . Тогда  $u(t) \in Z_0$ ,  $t \in T$ . Так как  $u(t)$  является измеримой функцией и в топологии пространства  $Z$ , а  $Z_n$ ,  $n \geq 1$ , сходится к  $Z_0$  в метрике Хаусдорфа  $D_Z(\cdot, \cdot)$ , то существует последовательность  $u_n(t) \in Z_n$ ,  $t \in T$ ,  $n \geq 1$ , измеримых в топологии пространства  $Z$  функций, удовлетворяющих равенству

$$d_Z(u(t), u_n(t)) = d_Z(u(t), Z_n), \quad t \in T.$$

Из этого равенства следует, что

$$u_n(t) \rightarrow u(t), \quad t \in T, \quad \text{в } Z.$$

Последнее означает, что для любого  $y^* \in Y^*$

$$\langle u_n(t), y^* \rangle_Y \rightarrow \langle u(t), y^* \rangle_Y, \quad t \in T, \quad (2.8)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$  — каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между пространством  $Y$  и его топологически сопряженным  $Y^*$ . Воспользовавшись (2.8), мы получаем, что для любой ступенчатой функции  $y^*: T \rightarrow Y^*$

$$\langle u_n(t), y^*(t) \rangle_Y \rightarrow \langle u(t), y^*(t) \rangle_Y, \quad t \in T. \quad (2.9)$$

Из измеримости функции  $u_n(t)$  в топологии пространства  $Z$  следует, что она скалярно измерима и, следовательно, измерима. Теперь из (2.9), ограниченности множества  $U$  и теоремы Лебега об ограниченной сходимости вытекает, что для любой ступенчатой функции  $y^*: T \rightarrow Y^*$

$$\int_T \langle u_n(t), y^*(t) \rangle_Y dt \rightarrow \int_T \langle u(t), y^*(t) \rangle_Y dt. \quad (2.10)$$

Так как пространство  $L^2(T, Y^*)$ , наделенное нормированной топологией, является рефлексивным и сепарабельным, то множество всех ступенчатых функций  $y^*: T \rightarrow Y^*$  является плотным подмножеством пространства  $L^2(T, Y^*)$ . Тогда из ограниченности множества  $U$  следует, что соотношение (2.10) имеет место и для любой функции  $y^*(\cdot) \in L^2(T, Y^*)$ . Последнее означает, что последовательность  $u_n(t) \in Z_n$ ,  $t \in T$ , сходится к  $u(t) \in \text{ext } U$ ,  $t \in T$ , в топологии пространства  $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ . Тем самым утверждение шага 2 доказано.

Шаг 3. Для любой измеримой функции  $u(t) \in Z_n$ ,  $t \in T$ ,  $n \geq 1$ , и любого  $\varepsilon > 0$  существует ступенчатая функция  $v(t) \in Z_n$ ,  $t \in T$ ,  $n \geq 1$ , удовлетворяющая неравенству

$$\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{L^2(T, Y)} \leq \varepsilon. \quad (2.11)$$

Для простоты изложения, не нарушая общности, рассмотрим случай  $n = 2$ . В этом случае функция  $u(t) \in Z_2$ ,  $t \in T$ , принимает два значения  $y_1, y_2 \in Z_2$ .

Воспользовавшись теоремой Лузина, мы получаем, что для  $\delta > 0$  существует замкнутое множество  $T_\delta \subset (0, 1)$  такое, что  $\mu(T \setminus T_\delta) \leq \delta$  и функция  $u(t)$  непрерывна на  $T_\delta$ . Пусть  $\mathcal{T}_i = \{t \in T_\delta; u(t) = y_i\}$ ,  $i = 1, 2$ . Так как функция  $u(t)$  непрерывна на  $T_\delta$ , то множества  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$  замкнуты, не пересекаются и  $T_\delta = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ . Возможны два случая: либо одно из множеств  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$  пусто, либо оба не пусты. Мы рассмотрим второй случай, так как доказательство утверждения шага 3 в первом случае проводится аналогично. Во втором случае существуют непересекающиеся

открытые множества  $V_1, V_2 \subset (0, 1)$  такие, что  $\mathcal{T}_1 \subset V_1$ ,  $\mathcal{T}_2 \subset V_2$ . Согласно теореме Витали — Каратеодори о покрытиях [9], существуют последовательности  $\{T_m^1\}_{m \geq 1}$ ,  $\{T_m^2\}_{m \geq 1}$  попарно непересекающихся отрезков  $T_m^1, T_m^2$ ,  $m \geq 1$ , таких что  $T_m^i \subset V_i$ ,  $m \geq 1$ ,  $i = 1, 2$ , и

$$\mu \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m^i \right) = \mu(\mathcal{T}_i), \quad (2.12)$$

$$\mu(\mathcal{T}_i) = \mu \left( \mathcal{T}_i \cap \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m^i \right) \right), \quad i = 1, 2, \quad m \geq 1. \quad (2.13)$$

Тогда существует номер  $m_0$  такой, что

$$\mu \left( \mathcal{T}_i \cap \left( \bigcup_{m=m_0+1}^{\infty} T_m^i \right) \right) \leq \delta, \quad i = 1, 2. \quad (2.14)$$

Пусть  $\mathcal{T} = (0, 1) \setminus \left( \left( \bigcup_{m=1}^{m_0} T_m^1 \right) \cup \left( \bigcup_{m=1}^{m_0} T_m^2 \right) \right)$ . Поскольку множества  $T_m^i$ ,  $m = 1, \dots, m_0$ ,  $i = 1, 2$ , являются попарно непересекающимися отрезками, то  $\mathcal{T}$  представляет из себя объединение конечного числа попарно непересекающихся интервалов. Определим функцию  $v: T \rightarrow Z_2$  следующим образом: в точках  $t = 0$ ,  $t = 1$  и  $t \in \mathcal{T}$  функция  $v(t)$  принимает одно из значений  $y_1$  или  $y_2$ :  $v(t) = y_1$  при  $t \in \bigcup_{m=1}^{m_0} T_m^1$  и  $v(t) = y_2$  при  $t \in \bigcup_{m=1}^{m_0} T_m^2$ . Ясно, что  $v(t)$  является ступенчатой функцией.

Пусть  $Q = T_\delta \cap \left( \left( \bigcup_{m=1}^{m_0} T_m^1 \right) \cup \left( \bigcup_{m=1}^{m_0} T_m^2 \right) \right)$ . Из (2.12), (2.13), (2.14) следует, что

$$\mu(T_\delta \setminus Q) \leq 2\delta.$$

Поэтому

$$\mu(T \setminus Q) \leq 3\delta. \quad (2.15)$$

Пусть

$$c = \sup\{\|y\|_Y : y \in U\}. \quad (2.16)$$

Поскольку на множестве  $Q$  функции  $u(t)$  и  $v(t)$  совпадают, то из (2.15), (2.16) вытекает, что

$$\int_T \|u(t) - v(t)\|^2 dt \leq 3\delta \cdot (2c)^2. \quad (2.17)$$

Если  $u(t) \in Z_n$ ,  $t \in T$ , то по аналогии с (2.17) мы получим, что существует ступенчатая функция  $v(t) \in Z_n$ ,  $t \in T$ , удовлетворяющая неравенству

$$\int_T \|u(t) - v(t)\|^2 dt \leq (n+1)\delta \cdot (2c)^2. \quad (2.18)$$

Выбирая в (2.18)  $\delta > 0$  достаточно малым, мы придем к неравенству (2.11). Теперь утверждение теоремы непосредственно вытекает из утверждений шагов 1–3. Теорема доказана.

### 3. Основные результаты

Рассмотрим включение

$$-\dot{y}(t) \in \partial\varphi^t(y(t)) + f(t), \quad f(\cdot) \in L^2(T, H), \quad (3.1)$$

$$y(0) = x_0 \in \text{dom } \varphi^0.$$

Хорошо известно [10], что при выполнении предположений  $\Gamma(\varphi)$  существует единственная абсолютно непрерывная функция  $y: T \rightarrow H$ ,  $y(0) = x_0$ , с производной  $\dot{y}(\cdot) \in L^2(T, H)$ , почти

всюду удовлетворяющая включениям  $y(t) \in \text{dom } \partial\varphi^t$  и (3.1). Пусть  $y_0(t)$  — решение включения (3.1) с  $f(t) \equiv 0$ . Тогда, используя монотонность оператора  $\partial\varphi^t$  и неравенства (2.2), (2.3), с помощью известных рассуждений (см., например, [11]) мы получим, что для любого  $x(\cdot) \in \mathcal{T}r_U(x_0)$  имеет место оценка

$$\|x(t)\| \leq l + \int_0^t (1+c)(m(s) + n(s)\|x(s)\|)ds, \quad t \in T, \quad (3.2)$$

где  $c$  — константа из (2.16),  $l = \max\{\|y_0(t)\|: t \in T\}$ .

Из этого неравенства следует, что существует константа  $M > 0$  такая, что

$$\|x(t)\| \leq M, \quad t \in T, \quad x(\cdot) \in \mathcal{T}r_U(x_0). \quad (3.3)$$

Пусть

$$B = \{x \in H: \|x\| \leq M\}. \quad (3.4)$$

Обозначим через  $p_r: H \rightarrow B$  оператор проектирования на множество  $B$ , который каждой точке  $x \in H$  ставит в соответствие единственную точку  $p_r x \in B$  такую, что  $\|p_r x - x\| = \min\{\|y - x\|: y \in B\}$ .

Хорошо известно, что

$$\|p_r x - p_r y\| \leq \|x - y\|. \quad (3.5)$$

Тогда из (2.2), (2.3), (3.4), (3.5) следует, что для любых  $x \in H$ ,  $u \in U$  будут иметь место неравенства

$$\|A(t, p_r x)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq m(t) + n(t)\|x\|, \quad (3.6)$$

$$\|g(t, p_r x)\| \leq m(t) + n(t)\|x\|, \quad (3.7)$$

$$\|A(t, p_r x)u + g(t, p_r x)\| \leq (1+c)(m(t) + n(t) \cdot M). \quad (3.8)$$

Рассмотрим управляемую систему

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + A(t, p_r x(t))u(t) + g(t, p_r x(t)), \quad (3.9)$$

$$x(0) = x_0 \in \text{dom } \varphi^0,$$

с ограничением (1.2). Если  $x(t)$  — траектория управляемой системы (1.1) с ограничением (1.2), то она удовлетворяет неравенству (3.3) и поэтому является траекторией управляемой системы (3.9) с ограничением (1.2). Если  $x(t)$  — траектория управляемой системы (3.9) с ограничением (1.2), то, воспользовавшись (3.6), (3.7), мы получим, что для нее имеет место неравенство (3.2) и, следовательно, она удовлетворяет оценке (3.3). Поэтому множества траекторий управляемых систем (1.1) и (3.9) с ограничением (1.2) совпадают.

Пусть

$$S^* = \left\{ f(\cdot) \in L^2(T, H); \|f(t)\| \leq (1+c)(m(t) + n(t) \cdot M) \right\}. \quad (3.10)$$

Тогда  $S^*$  является выпуклым, метризуемым, компактным подмножеством пространства  $\omega$ - $L^2(T, H)$ .

Рассмотрим оператор  $\mathcal{T}: L^2(T, H) \rightarrow C(T, H)$ , который каждому элементу  $f(\cdot) \in L^2(T, H)$  ставит в соответствие единственное решение  $x(\cdot)$  включения (3.1).

**Лемма 2.** *Оператор  $f(\cdot) \rightarrow \mathcal{T}(f)$  является непрерывным из  $\omega$ - $S^*$  в  $C(T, H)$ .*

Доказательство леммы 2 проводится по аналогии с теоремой 3.1 [11] с использованием предположения  $\Gamma(\varphi)$  (ii).

Рассмотрим оператор  $F^*: C(T, H) \times S(U) \rightarrow L^2(T, H)$ , определенный по правилу

$$F^*(x, u)(t) = A(t, p_r x(t))u(t) + g(t, p_r x(t)), \quad t \in T. \quad (3.11)$$

**Лемма 3.** Оператор  $(x, u) \rightarrow F^*(x, u)$  является непрерывным из  $C(T, H) \times \omega\text{-}S(U)$  в  $\omega\text{-}L^2(T, H)$ .

Из (3.5) следует, что оператор  $A(t, p_r x)$  и отображение  $g(t, p_r x)$  наследуют все свойства оператора  $A(t, x)$  и отображения  $g(t, x)$ , сформулированные в предположениях  $\Gamma(A)$  и  $\Gamma(g)$ . Поэтому лемма 3 является перефразировкой леммы 1.

Теперь мы подготовлены к доказательству основных результатов.

**Теорема 2.** Пусть выполняются предположения  $\Gamma(A)$ ,  $\Gamma(g)$ . Тогда множество  $\mathcal{T}r_U(x_0)$  является непустым компактным подмножеством пространства  $C(T, H)$ .

**Доказательство.** Пусть  $u_*(t) \in U$ ,  $t \in T$ , — фиксированная измеримая функция. Согласно леммам 2, 3 оператор  $f(\cdot) \rightarrow F^*(\mathcal{T}(f), u_*)$  является непрерывным из  $\omega\text{-}S^*$  в  $\omega\text{-}L^2(T, H)$ . Воспользовавшись (3.8), (3.11), мы получаем

$$\|F^*(\mathcal{T}(f), u_*)(t)\| \leq (1+c)(m(t) + n(t) \cdot M), \quad t \in T.$$

Последнее неравенство и (3.10) говорят, что отображение  $f(\cdot) \rightarrow F^*(\mathcal{T}(f), u_*)$  является непрерывным из выпуклого компакта  $\omega\text{-}S^*$  в себя. Поэтому по теореме Шаудера существует неподвижная точка  $f_*(\cdot)$  отображения  $F^*(\mathcal{T}(f), u_*)$ , т.е.

$$f_*(\cdot) = F^*(\mathcal{T}(f_*), u_*). \quad (3.12)$$

Положим  $x_*(\cdot) = \mathcal{T}(f_*)$ . Тогда из (3.12) и (3.11) следует, что

$$-\dot{x}_*(t) \in \partial\varphi(x_*(t)) + f_*(t) \quad \text{п.в.}, \quad (3.13)$$

$$f_*(t) = A(t, p_r x_*(t))u_*(t) + g(t, p_r x_*(t)) \quad \text{п.в.} \quad (3.14)$$

Из (3.13), (3.14) вытекает, что  $x_*(t)$  является траекторией управляемой системы (3.9). Поэтому  $x_* \in \mathcal{T}r_U(x_0)$  и, следовательно, множество  $\mathcal{T}r_U(x_0)$  не пусто.

Покажем, что любая траектория  $x_*(\cdot) \in \mathcal{T}r_U(x_0)$ , соответствующая управлению  $u_*(t)$ , может быть представлена как решение включения (3.1) с

$$f_*(t) = A(t, x_*(t))u_*(t) + g(t, x_*(t)), \quad t \in T. \quad (3.15)$$

Из леммы 1 следует, что функция  $f_*(t)$ , определенная по формуле (3.15), является элементом пространства  $L^2(T, H)$ . Поэтому при  $f_*(t)$  включение (3.1) имеет решение  $y_*(\cdot)$ . Воспользовавшись монотонностью оператора  $\partial\varphi^t$  и определением траектории управляемой системы (1.1), мы получим

$$\langle \dot{x}_*(t) - \dot{y}_*(t), x_*(t) - y_*(t) \rangle \leq \langle f_*(t) - A(t, x_*(t))u_*(t) - g(t, x_*(t)), x_*(t) - y_*(t) \rangle, \quad t \in T.$$

Из этого неравенства и (3.15) следует, что  $x_*(t) = y_*(t)$ ,  $t \in T$ . Используя этот факт, покажем что множество  $\mathcal{T}r_U(x_0)$  является компактом в  $C(T, H)$ .

Пусть

$$\mathcal{T}r(S^*) = \{x(\cdot) \in C(T, H): x(\cdot) = \mathcal{T}(f), f(\cdot) \in S^*\}.$$

Тогда согласно лемме 2 множество  $\mathcal{T}r(S^*)$  является компактом в  $C(T, H)$ . Воспользовавшись (3.3), (3.8), (3.10), мы получаем, что  $\mathcal{T}r_U(x_0) \subset \mathcal{T}r(S^*)$ . Следовательно, множество  $\mathcal{T}r_U(x_0)$  является относительно компактным в  $C(T, H)$ . Для завершения доказательства теоремы нам осталось показать, что множество  $\mathcal{T}r_U(x_0)$  замкнуто в  $C(T, H)$ .

Пусть  $x_n(\cdot) \in \mathcal{T}r_U(x_0)$ ,  $n \geq 1$ , — последовательность траекторий, соответствующих управлениям  $u_n(t) \in U$ ,  $t \in T$ , — сходится в  $C(T, H)$  к  $y(\cdot)$ . Так как  $u_n(\cdot) \in S(U)$ ,  $n \geq 1$ , (см. (2.5)) и  $S(U)$  является выпуклым, компактным, метризуемым подмножеством пространства

$\omega\text{-}L^2(T, Y)$ , то, переходя к подпоследовательности, если необходимо, мы можем считать, что  $u_n(\cdot) \rightarrow u(\cdot) \in S(U)$  в  $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ . Пусть

$$f_n(t) = A(t, x_n(t))u_n(t) + g(t, x_n(t)), \quad n \geq 1, \quad (3.16)$$

$$f(t) = A(t, y(t))u(t) + g(t, y(t)). \quad (3.17)$$

Воспользовавшись леммой 1, мы получаем, что последовательность  $f_n(\cdot)$ ,  $n \geq 1$ , сходится к  $f(\cdot)$  в  $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ . Как было установлено выше,  $x_n(\cdot) = \mathcal{T}(f_n)$ ,  $n \geq 1$ , где  $f_n(\cdot)$  определены по формуле (3.16). Поскольку  $f_n(\cdot) \in S^*$ ,  $n \geq 1$ , то согласно лемме 2 имеет место равенство

$$y(\cdot) = \mathcal{T}(f). \quad (3.18)$$

Теперь из (3.17), (3.18) следует, что  $y(\cdot) \in \mathcal{T}r_U(x_0)$ . Тем самым теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть выполняются предположения  $\Gamma(A)$ ,  $\Gamma(g)$  и  $\Gamma(\omega)$ . Тогда справедливо равенство (1.4).

**Доказательство.** Пусть  $x(\cdot) \in \mathcal{T}r_U(x_0)$  — траектория, соответствующая измеримому управлению  $u(t) \in U$ ,  $t \in T$ . Согласно теореме 1 существует последовательность ступенчатых функций  $u_n(t) \in \text{ext } U$ ,  $t \in T$ ,  $n \geq 1$ , сходящаяся к  $u(t)$  в пространстве  $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ . Пусть  $x_n(\cdot) \in \mathcal{T}r_{\text{ext } U}(x_0)$ ,  $n \geq 1$  — последовательность траекторий, соответствующих управлениям  $u_n(t)$ . Тогда  $x_n(\cdot)$ ,  $n \geq 1$ , может быть представлена в виде

$$x_n(\cdot) = \mathcal{T}(f_n), \quad (3.19)$$

где  $f_n(\cdot)$  определяется по формуле (3.16).

Поскольку множество  $\mathcal{T}r_U(x_0)$  является компактом в  $C(T, H)$ , то, не нарушая общности, мы можем считать, что  $x_n(\cdot)$ ,  $n \geq 1$ , сходится к  $y(\cdot) \in C(T, H)$ . Тогда согласно леммам 1, 2 справедливо равенство (3.18) с  $f(\cdot)$ , определенной по формуле (3.17). Следовательно,  $y(\cdot) \in \mathcal{T}r_U(x_0)$ . Воспользовавшись монотонностью оператора  $\partial\varphi^t$  и определением решения управляемой системы (1.1), мы получим

$$\langle \dot{x}(t) - \dot{y}(t), x(t) - y(t) \rangle \leq \langle A(t, y(t))u(t) + g(t, y(t)) - A(t, x(t))u(t) - g(t, x(t)), x(t) - y(t) \rangle.$$

Из этого неравенства, (3.3) и предположения  $H(\omega)$  непосредственно вытекает

$$\frac{1}{2} \|x(t) - y(t)\|^2 \leq \int_0^t \omega_M(s, \|x(s) - y(s)\|) \|x(s) - y(s)\| ds, \quad t \in T. \quad (3.20)$$

Так как функция  $t \rightarrow \omega_H(t, \|x(t) - y(t)\|)$  интегрируема, то в соответствии с леммой А.5 [1] и (3.20)

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_0^t \omega_M(s, \|x(s) - y(s)\|) ds.$$

Последнее неравенство говорит, что  $x(t) = y(t)$ ,  $t \in T$ . Таким образом, мы показали, что для любого  $x(\cdot) \in \mathcal{T}r_U(x_0)$  существует последовательность  $x_n(\cdot) \in \mathcal{T}r_{\text{ext } U}(x_0)$ ,  $n \geq 1$ , сходящаяся к  $x(\cdot)$  в  $C(T, H)$ . Теперь равенство (1.4) вытекает из компактности множества  $\mathcal{T}r_U(x_0)$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пусть выполняются предположения  $\Gamma(A)$  (1), (3),  $\Gamma(g)$  и для любого  $M > 0$  существует функция  $l_M(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$  такая, что для любых  $x, y \in H$ ,  $\|x\| \leq M$ ,  $\|y\| \leq M$ , почти всюду имеют место неравенства

$$\|A(t, x) - A(t, y)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq l_M(t) \|x - y\|, \quad (3.21)$$

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq l_M(t) \|x - y\|. \quad (3.22)$$

Тогда справедливы утверждения теорем 2 и 3.

Из неравенства (3.21) вытекает, что предположение  $\Gamma(A)$  (2) имеет место. Воспользовавшись (3.21), (3.22), мы получаем, что неравенство (2.4) выполняется с функцией

$$\omega_M(t, r) = (1 + c)l_M(t) \cdot r. \quad (3.23)$$

Теперь следствие вытекает из теорем 2, 3.

#### 4. Приложение

В этом параграфе в качестве одного из возможных приложений полученных результатов мы рассмотрим управляемую систему с разрывной нелинейностью.

Пусть движение системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= -f_1(x_2) - bx_2 - g_1(x_1, x_2) - a(x_1, x_2)u, \\ x_1(0) &= x_0^1, & x_2(0) &= x_0^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

с ограничением на управление

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}. \quad (4.2)$$

В механических системах  $b > 0$  играет роль коэффициента вязкого трения, а  $f_1(x_2)$  — разрывная нелинейность, характеризующая сухое трение. Обычно функция  $f_1(x)$  имеет следующий вид:  $f_1(x) = d \exp(-\nu|x|) \operatorname{sgn} x$ , где  $d > 0$ ,  $\nu > 0$ ,  $\operatorname{sgn} x$  — разрывная в точке  $x = 0$  функция, и  $\operatorname{sgn} x = -1$ , если  $x < 0$ ,  $\operatorname{sgn} x = 1$ , если  $x > 0$ . Функция  $g_1(x_1, x_2)$  характеризует нагрузку.

Если мы возьмем фиксированную измеримую функцию  $u(t)$ ,  $u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$ ,  $t \in T$ , то движение системы будет описываться уравнениями (4.1) с разрывной нелинейностью  $f_1(x)$ . При фиксированном управлении  $u(t)$  под решением уравнений (4.1) с разрывной нелинейностью мы будем понимать решение в смысле А.Ф. Филиппова [12]. Поэтому в точке  $x = 0$  функцию  $f_1(x)$  мы должны доопределить, полагая  $f_1(x) = [-d, d]$ . В дальнейшем мы считаем, что такое доопределение произведено.

Представим функцию  $f_1(x_2)$  в виде  $f_1(x_2) = d \operatorname{sgn} x_2 + f_2(x_2)$ , где

$$f_2(x_2) = \begin{cases} -d(1 - \exp(-\nu x_2)), & \text{если } x_2 > 0, \\ d(1 - \exp(\nu x_2)), & \text{если } x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что  $f_2(x_2)$  является липшицевой функцией, удовлетворяющей неравенству

$$|f_2(x_2)| \leq d + |x_2|. \quad (4.3)$$

С учетом сказанного выше, система (4.1) запишется в виде дифференциального включения

$$\begin{aligned} -\dot{x}_1(t) &= -x_2(t), \\ -\dot{x}_2(t) &\in d \operatorname{sgn} x_2(t) + a(x_1(t), x_2(t))u(t) + bx_2(t) + f_2(x_2(t)) + g_1(x_1(t), x_2(t)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Пусть  $y = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Рассмотрим собственную выпуклую функцию  $\varphi(y) = \varphi(x_1, x_2) = d|x_2|$ . Тогда  $\operatorname{dom} \varphi = \mathbb{R}^2$  и [1]

$$\partial\varphi(y) = (0, d \operatorname{sgn} x_2). \quad (4.5)$$

Очевидно, что функция  $\varphi(y)$  удовлетворяет предположению  $\Gamma(\varphi)$ . Рассмотрим вектора  $A(y)$ ,  $g(y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$A(y) = (0, a(x_1, x_2)), \quad (4.6)$$

$$g(y) = (-x_2, bx_2 + f_2(x_2) + g_1(x_1, x_2)), \quad (4.7)$$

и множество  $U = [u_{\min}, u_{\max}]$ . Тогда, с учетом (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), система (4.1) в абстрактной форме запишется в виде (1.1) с ограничением (1.2) на управление  $u$ . Ограничение (1.3)

будет иметь вид  $\text{ext } U = \{u_{\min}, u_{\max}\}$ , где  $\{u_{\min}, u_{\max}\}$  — множество, состоящее из двух точек  $u_{\min}$  и  $u_{\max}$ .

Предположим, что имеют место неравенства

$$|a(x_1, x_2)| \leq m + n(|x_1| + |x_2|),$$

$$|g_1(x_1, x_2)| \leq m + n(|x_1| + |x_2|), \quad m > 0, n \geq 0. \quad (4.8)$$

Для конкретизации остальных предположений относительно функций  $a(x_1, x_2)$ ,  $g(x_1, x_2)$  мы рассмотрим два случая.

Случай I.  $u_{\min} = 0$ ,  $a(x_1, x_2) = a(x_2) = \frac{x_2}{\sqrt{|x_2|}}$ , и функция  $g(x_1, x_2)$  является локально липшицевой. Непосредственно из (4.3), (4.8) вытекают неравенства вида (2.2), (2.3).

Учитывая, что любая локально липшицева функция является липшицевой на любом компактном множестве и функция  $r \rightarrow \frac{r}{\sqrt{|r|}}$  является неубывающей, т.е.  $\langle r_1 - r_2, \frac{r_1}{\sqrt{|r_1|}} - \frac{r_2}{\sqrt{|r_2|}} \rangle \geq 0$ ,  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ , мы получаем, что для оператора  $A(y)$  и функции  $g(y)$  выполняются предположения  $\Gamma(A)$ ,  $\Gamma(g)$  и неравенство (2.4) с функцией  $\omega_M(r)$  вида (3.23). Следовательно, в этом случае для управляемой системы (4.1) с ограничением (4.2) справедливы утверждения теорем 2, 3.

Случай II.  $g(x_1, x_2) = g(x_2) = \frac{x_2}{\sqrt{|x_2|}}$  и  $a(x_1, x_2)$  является локально липшицевой, в частности,  $a(x_1, x_2)$  может быть линейной функцией. В этом случае для оператора  $A(y)$  и функции  $g(y)$  будут выполняться предположения  $\Gamma(A)$  и  $\Gamma(g)$  и неравенство (2.4) с функцией  $\omega_M(r)$  вида (3.23). Следовательно, и в этом случае для управляемой системы (4.1) имеют место утверждения теорем 2, 3. Формулировки этих утверждений применительно к системе 4.1 мы не приводим ввиду их очевидности.

Начиная с классической работы А.Ф. Филиппова [13], наряду с традиционными условиями роста (2.2), (2.3), основными предположениями, при которых имеет место равенство (1.4), является требование липшицевости соответствующих отображений (см., например, следствие 1). Поскольку функция  $r \rightarrow \frac{r}{\sqrt{|r|}}$  не является локально липшицевой, то приведенный пример показывает, что предположение  $\Gamma(\omega)$  является менее ограничительным, чем предположение липшицевости соответствующих отображений. Предположение  $\Gamma(\omega)$  позволяет расширить класс систем, для которых справедливо равенство (1.4) без предположений липшицевости. Другой отличительной особенностью нашей работы является то, что для системы (1.1) с ограничениями (1.3) в качестве допустимых управлений мы рассматриваем ступенчатые функции, а не измеримые, как это обычно предполагается, что имеет определенный физический смысл для механических систем.

В заключение отметим, что в качестве других приложений полученных результатов могут быть рассмотрены управляемые системы, описываемые параболическими уравнениями в частных производных в нецилиндрических областях, вариационные неравенства, процессы выметания (sweeping processes) и т.д.

Поступила 1.03.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brézis H.** Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Mathematical Studies, No. 5. Notas de Matemática (50). North-Holland, Amsterdam, 1973.
2. **Бурбаки Н.** Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
3. **Толстоногов А.А.** Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986.

4. Эдвардс Р.Э. Функциональный анализ: теория и приложения. М.: Мир, 1969.
5. Толстоногов А.А. Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 11. С. 135–160.
6. Tolstonogov A.A., Tolstonogov D.A. Lp-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: relaxation theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 237–269.
7. Tolstonogov A.A., Tolstonogov D.A. Lp-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 173–203.
8. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
9. Камке Э. Интеграл Лебега — Стильтьеса. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.
10. Kenmochi N. On the quasi-linear heat equation with time-dependent obstacles // Nonlinear Anal., Theory, Meth., Appl. 1981. V. 5, No. 1. P. 71–80.
11. Толстоногов А.А. Аппроксимация множеств достижимости эволюционного включения субдифференциального типа // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 883–904.
12. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
13. Филиппов А.Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика. 1967. № 3. С. 16–26.

УДК 517.977

## ПОСТРОЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

В. И. Ухоботов, С. А. Никитина

В работе рассматривается задача построения гарантированного управления квазилинейной системой, обеспечивающего удержание фазовой траектории вблизи заданного семейства замкнутых множеств  $W(t)$ . Отклонение фазовой траектории от этого семейства оценивается с помощью некоторой функции. Найдены условия, при выполнении которых обеспечивается удержание траектории в семействе множеств. Подробно разобран случай, когда вектограмма управления  $U(t)$  и множества  $W(t)$  являются многогранниками специального вида для каждого  $t$ . Приведены примеры.

### 1. Постановка задачи

В пространстве  $\mathbb{R}^n$  движение вектора  $z$  происходит по правилу

$$\dot{z} = -u + v + \gamma f(t, z), \quad t \leq p. \quad (1.1)$$

Здесь  $u$  — вектор управления,  $v$  — вектор помехи,  $p$  — заданный момент окончания процесса управления,  $\gamma$  — малый параметр.

На возможные значения управления и помехи налагаются геометрические ограничения

$$u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^n, \quad v(t) \in V(t) \subset \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

**Предположение 1.1.** Многочисленная функция  $V: (-\infty, p] \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  является измеримой по Лебегу, а ее значение  $V(t)$  (вектограмма помехи) при каждом  $t \leq p$  является замкнутым ограниченным множеством, содержащимся в шаре  $g(t)S$ . Здесь  $g(t) \geq 0$  — интегрируемая на каждом отрезке функция, а  $S = \{z \in \mathbb{R}^n: \|z\| \leq 1\}$  — евклидов шар единичного радиуса.

Из этого предположения следует [1], что при любых  $\tau, t, \tau < t \leq p$ , интеграл  $\int_{\tau}^t V(r) dr$  является выпуклым компактом в  $\mathbb{R}^n$ .

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Допустимым управлением назовем всякую функцию  $u: (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , значения  $u(t, z)$  которой при любых  $t \leq p$  и  $z \in \mathbb{R}^n$  удовлетворяют включению

$$u(t, z) \in U(t). \quad (1.3)$$

Пусть выбрано допустимое управление (1.3) и задано начальное состояние  $z(t_0), t_0 < p$ . Возьмем разбиение

$$\omega: t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = p \quad (1.4)$$

с диаметром

$$d(\omega) = \max_{0 \leq i \leq k} (t_{i+1} - t_i).$$

Построим “ломаную”

$$z_{\omega}(t) = z_{\omega}(t_i) + (t - t_i) (-u(t_i, z_{\omega}(t_i)) + \gamma f(t_i, z_{\omega}(t_i))) + \xi(t), \quad (1.5)$$

здесь  $z_\omega(t_0) = z(t_0)$ , а  $\xi(t)$  — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\xi(t) \in \int_{t_i}^t V(r) dr$$

при  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ,  $i \in \overline{0, k}$ .

Рассматривается следующая задача. При каждом  $t \leq p$  задано непустое замкнутое множество  $W(t) \subset \mathbb{R}^n$ . Требуется построить управление (1.3), которое для любого начального состояния  $z(t_0) \in W(t_0)$  и для любой ломаной (1.5) обеспечивает выполнение условия

$$\max_{0 \leq i \leq k+1} \rho(z_\omega(t_i), W(t_i)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad d(\omega) \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

Здесь символом  $\rho(z, W)$  обозначено расстояние от точки  $z$  до множества  $W$ .

## 2. Построение управления

При построении управления (1.3), обеспечивающего выполнение условия (1.6), будем считать, что функция  $f(t, z)$ , вектограмма управления  $U(t)$  и семейство множеств  $W(t)$  удовлетворяют ряду ограничений.

**Предположение 2.1.** *Существует интегрируемая по Риману на каждом отрезке функция  $F(t) \geq 0$  такая, что*

$$\|f(t, z)\| \leq F(t), \quad t \leq p, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

**Предположение 2.2.** *При каждом  $t \leq p$  множество  $U(t)$  (1.2) является выпуклым, замкнутым и ограниченным.*

**Предположение 2.3.** *При всех  $t, \tau$ ,  $t < \tau \leq p$ , определена функция  $D(t, \tau) \geq 0$  такая, что*

$$U(t) \subset U(\tau) + D(t, \tau)S. \quad (2.1)$$

**З а м е ч а н и е 2.1.** Обозначим символом  $\langle x, z \rangle$  скалярное произведение двух векторов  $x$  и  $z$  из  $\mathbb{R}^n$ , а через

$$c(\psi; X) = \max_{x \in X} \langle \psi, x \rangle$$

— опорную функцию выпуклого, замкнутого и ограниченного множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда включение (2.1) будет выполнено для функции

$$D(t, \tau) = \max \left( 0; \max_{\|\psi\|=1} (c(\psi; U(t)) - c(\psi; U(\tau))) \right).$$

**Предположение 2.4.** *Для каждого момента времени  $t_0 < p$  существует число  $D > 0$  такое, что для любого разбиения  $\omega$  (1.4) выполнено неравенство*

$$\sum_{j=0}^k D(t_j, t_{j+1}) \leq D.$$

Зафиксируем числа  $t, \tau, t < \tau \leq p$ , и через  $\varphi(t, \tau)$  обозначим инфимум множества чисел  $\varphi \geq 0$ , для каждого из которых выполнено включение

$$W(\tau) + (\tau - t)U(\tau) + \varphi S \supset W(t) + \int_t^\tau V(r)dr. \quad (2.2)$$

Из замкнутости множеств, фигурирующих во включении (2.2), следует, что оно будет выполнено и при  $\varphi = \varphi(t, \tau)$ . В определенном смысле эта функция характеризует меру отклонения семейства  $W(t)$  от стабильного моста [2] для конфликтно-управляемой системы (1.1) при  $\gamma = 0$ .

**Предположение 2.5.** Для любого момента времени  $t_0 < p$  выполнено условие

$$\sum_{j=0}^k \varphi(t_j, t_{j+1}) \rightarrow 0 \quad \text{при } d(\omega) \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Управление (1.3), обеспечивающее выполнение условия (1.6), будем строить по схеме, предложенной в работе [3], применительно к рассматриваемому классу задач управления.

При любых  $t \leq p$  и  $z \in \mathbb{R}^n$  обозначим

$$\varepsilon(t, z) = \inf \{ \varepsilon \geq 0: (z + \varepsilon U(t)) \cap (W(t) + \varepsilon U(t) + \varepsilon S) \neq \emptyset \}.$$

Из замкнутости множеств  $W, U$  и  $S$  следует, что при некоторых  $u^*(t, z), u(t, z) \in U(t)$  выполнено включение

$$z + \varepsilon(t, z)u^*(t, z) \in W(t) + \varepsilon(t, z)u(t, z) + \varepsilon(t, z)S. \quad (2.4)$$

Функция  $\varepsilon(t, z)$  используется для оценки сверху расстояния от точки  $z$  до множества  $W(t)$ . Из включения (2.4) следует неравенство

$$\rho(z; W(t)) \leq (1 + 2Q(t))\varepsilon(t, z), \quad Q(t) = \max_{u \in U(t)} \|u\|. \quad (2.5)$$

**Лемма 2.1.** Пусть числа  $a \geq 0, b \geq 0, \delta \geq 0$  таковы, что

$$z + (a - b)u^{(3)} + bu^{(2)} - au^{(1)} \in W(t) + \delta S \quad (2.6)$$

при некоторых  $u^{(i)} \in U(t), i = 1, 2, 3$ . Тогда

$$\varepsilon(t, z) \leq \max(a; b; \delta). \quad (2.7)$$

**Доказательство.** Обозначим  $m = \max(a; b)$ . Покажем, что существуют  $u, u_*$  из множества  $U(t)$  такие, что

$$z + mu_* \in W(t) + mu + \delta S. \quad (2.8)$$

Действительно, если  $b = m$ , то берем

$$u_* = u^{(2)}, \quad u = \frac{a}{b}u^{(1)} + \frac{b-a}{b}u^{(3)} \in U(t),$$

а если  $a = m$ , то

$$u_* = \frac{a-b}{a}u^{(3)} + \frac{b}{a}u^{(2)} \in U(t), \quad u = u^{(1)}.$$

Таким образом, включение (2.8) доказано. Тогда существуют  $u, u_* \in U(t)$  такие, что

$$z + m'u_* \in W(t) + m'u + m'S,$$

где  $m' = \max(a; b; \delta)$ . Действительно, если  $\delta \leq m$ , то берем те же  $u, u_*$ , что и в (2.8). Если же  $m < \delta$ , то возьмем то же  $u_*$ , а  $u$  заменим на

$$\frac{m}{\delta}u + \frac{\delta - m}{\delta}u_* \in U(t).$$

Таким образом, включение (2.8) будет выполнено при некоторых  $u, u_*$  из множества  $U(t)$ , если в нем заменить  $m$  и  $\delta$  на  $m'$ . Отсюда и из определения функции  $\varepsilon(t, z)$  следует требуемое неравенство (2.7).

**Теорема 2.1.** *Управление  $u(t, z)$ , удовлетворяющее включению (2.4), обеспечивает выполнение условия (1.6) для любого начального состояния  $z(t_0) \in W(t_0)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Подставим управление  $u(t, z)$  в формулу для ломаной (1.5). Обозначим  $z_\omega(t_i) = z_i$ ,  $u(t_i, z_i) = u_i$ ,  $u^*(t_i, z_i) = u_i^*$ ,  $\varepsilon(t_i, z_i) = \varepsilon_i$ ,  $f(t_i, z_i) = f_i$ .

Согласно включению (2.1) и предположению 2.4 значение функции  $Q$  (2.5) в точке  $t_i$  удовлетворяет неравенству  $Q(t_i) \leq Q(p) + D$ . Поэтому из неравенства (2.5) следует, что условие (1.6) будет выполнено, если

$$\max_{0 \leq i \leq k+1} \varepsilon_i \rightarrow 0 \text{ при } d(\omega) \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Покажем вначале, что при каждом  $i = 0, 1, \dots, k$  выполнено неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leq (1 + 2D(t_i, t_{i+1})) \max(\varepsilon_i; t_{i+1} - t_i) + \varphi(t_i, t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)\gamma F(t_i). \quad (2.10)$$

В самом деле, из формулы (2.4) следует включение

$$z_i - \varepsilon_i u_i \in W(t_i) - \varepsilon_i u_i^* + \varepsilon_i S.$$

Подставим сюда равенство

$$z_i = z_{i+1} + (t_{i+1} - t_i)u_i - v_i - (t_{i+1} - t_i)\gamma f_i,$$

которое следует из формулы (1.5). Получим

$$z_{i+1} + (t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u_i + \varepsilon_i u_i^* \in W(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} V(r)dr + (t_{i+1} - t_i)\gamma f_i + \varepsilon_i S.$$

Отсюда и из включений (2.2) и  $f_i \in F(t_i)S$  имеем включение

$$z_{i+1} + (t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u_i + \varepsilon_i u_i^* - (t_{i+1} - t_i)u^{(1)} \in W(t_{i+1}) + (\varepsilon_i + \varphi(t_i, t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)\gamma F(t_i)) S$$

при некотором  $u^{(1)} \in U(t_{i+1})$ .

Далее, используя включение (2.1), получаем  $u_i^* = u^{(2)} + D(t_i, t_{i+1})s$ ,  $u_i = u^{(3)} + D(t_i, t_{i+1})s_*$ . Здесь  $u^{(3)}, u^{(2)} \in U(t_{i+1})$ , а  $s, s_* \in S$ . Следовательно,

$$z_{i+1} + (t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u^{(3)} + \varepsilon_i u^{(2)} - (t_{i+1} - t_i)u^{(1)} \in W(t_{i+1}) + \delta_i S,$$

где

$$\delta_i = \varepsilon_i + D(t_i, t_{i+1}) (|t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i| + \varepsilon_i) + \varphi(t_i, t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)\gamma F(t_i).$$

Применяя лемму 2.1, получаем неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leq \max(t_{i+1} - t_i; \varepsilon_i; \delta_i) = \max(t_{i+1} - t_i; \delta_i).$$

Отсюда и из неравенства

$$\max(c; a + b) \leq \max(c; a) + b \quad \text{при } b \geq 0, \quad (2.11)$$

будем иметь

$$\varepsilon_{i+1} \leq \max(\varepsilon_i; t_{i+1} - t_i) + D(t_i, t_{i+1})(|t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i| + \varepsilon_i) + \varphi(t_i, t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)\gamma F(t_i).$$

В итоге, используя неравенство

$$\max(\varepsilon_i, t_{i+1} - t_i) + D(t_i, t_{i+1})(|t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i| + \varepsilon_i) \leq (1 + 2D(t_i, t_{i+1})) \max(\varepsilon_i; t_{i+1} - t_i),$$

получим (2.10).

Учитывая неравенства (2.10), (2.11) и применяя математическую индукцию, получаем неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leq \left[ \max\left(\varepsilon_0; \max_{0 \leq j \leq i} (t_{j+1} - t_j)\right) + \sum_{j=0}^i \varphi(t_j, t_{j+1}) + \gamma \sum_{j=0}^i (t_{j+1} - t_j) F(t_j) \right] e^{2 \sum_{j=0}^i D(t_j, t_{j+1})}.$$

Отсюда, используя предположение 2.4 и равенство  $\varepsilon_0 = 0$ , получаем

$$\max_{0 \leq i \leq k+1} \varepsilon_i \leq \left[ d(\omega) + \sum_{j=0}^k \varphi(t_j, t_{j+1}) + \gamma \sum_{j=0}^k (t_{j+1} - t_j) F(t_j) \right] e^{2D}.$$

Согласно предположениям 2.1 и 2.5 выражение, стоящее в правой части последнего неравенства, стремится к нулю при  $d(\omega) \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow 0$ . Следовательно, условие (2.9), а вместе с ним и теорема доказаны.

**З а м е ч а н и е 2.2.** Пусть задано семейство множеств  $\Phi(t, y) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \leq p$ ,  $y \in \mathbb{R}^l$ . Семейство множеств, удовлетворяющих условию (1.6), будем искать в виде  $W(t) = \Phi(t, y(t))$ ,  $t \leq p$ . Тогда (2.3) служит условием для определения функции  $y(t)$  такой, что порождаемая ею система множеств  $W(t)$  образует стабильный мост [2].

### 3. Случай многогранной вектограммы управления

В этом параграфе исследуются задачи гарантированного управления, в которых вектограмма управления есть многогранник вида  $C(t)A(y)$ .

Здесь  $C(t)$  — невырожденная  $(n \times n)$ -матрица с непрерывно-дифференцируемыми элементами;  $A(y)$  — многогранник, задаваемый с помощью фиксированного набора векторов  $x_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, l$ , системой линейных неравенств

$$A(y) = \{z \in \mathbb{R}^n: \langle x_j, z \rangle \leq y_j, \quad j = 1, \dots, l\}. \quad (3.1)$$

Известно [4, теорема IV.1.13], что многогранник (3.1) непуст тогда и только тогда, когда  $y \in K$ , где  $K$  — конус,

$$K = \left\{ y = (y_1, \dots, y_l) \in \mathbb{R}^l: \sum_{j=1}^l \lambda_j y_j \geq 0 \quad \forall \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, l, \quad \sum_{j=1}^l \lambda_j x_j = 0 \right\}. \quad (3.2)$$

**Предположение 3.1.** Вектограмма  $U(t)$  представлена в виде

$$U(t) = C(t)A(\alpha(t)), \quad (3.3)$$

где функция  $\alpha(t)$  удовлетворяет включению  $\alpha(t) \in K$  при  $t \leq p$  и условию Липшица на  $[t_0, p]$ .

Относительно многогранника (3.1) сделаем два предположения.

**Предположение 3.2.** При каждом  $y \in K$  множество  $A(y)$  является ограниченным.

Для этого [4, теорема IV.1.14] необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^n: z = \sum_{j=1}^l \lambda_j x_j, \quad \lambda_j \geq 0 \right\} = \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

**Предположение 3.3.** Для любых  $y, y^* \in K$  выполнено равенство

$$A(y + y^*) = A(y) + A(y^*). \quad (3.5)$$

Приведем два примера [6] многогранников, удовлетворяющих условиям ограниченности (3.4) и аддитивности (3.5).

**Пример 3.1.** Пусть многогранник (3.1) является параллелепипедом,

$$A(y) = \{z \in \mathbb{R}^n: \langle x_j, z \rangle \leq y_j, \quad \langle -x_j, z \rangle \leq y_{n+j}, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Здесь векторы  $x_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , линейно независимы. Конус (3.2) имеет вид

$$K = \{y = (y_1, \dots, y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}: y_j + y_{n+j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

**Пример 3.2.** Пусть многогранник (3.1) является симплексом,

$$A(y) = \{z \in \mathbb{R}^n: \langle x_j, z \rangle \leq y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, n+1\}.$$

Здесь векторы  $x_1, \dots, x_n$  образуют базис в  $\mathbb{R}^n$ , а  $x_{n+1} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ , причем все  $a_i < 0$ . Конус (3.2) в этом случае имеет вид

$$K = \left\{ y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}: y_{n+1} - \sum_{j=1}^n y_j a_j \geq 0 \right\}.$$

Из предположения 3.2 следует [5], что существует число  $P > 0$ , определяемое векторами  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , такое, что для любого  $y \in K$  выполнено включение

$$A(y) \subset \sigma(y)PS, \quad \sigma(y) = \max_{1 \leq j \leq l} \max(0; y_j). \quad (3.6)$$

Из этого включения и условия (3.5) следует [5], что

$$y, y^* \in K \Rightarrow A(y) + \sigma(y^* - y)PS \supset A(y^*). \quad (3.7)$$

Ниже для произвольной матрицы  $B = (b_{ij})$  обозначим  $|B| = (\sum b_{ij}^2)^{1/2}$ .

**Лемма 3.1.** Для любых  $y, y^* \in K$  и  $t, \tau$ ,  $t \leq \tau \leq p$ , выполнено включение

$$C(t)A(y^*) \subset C(\tau)A(y) + \delta(t, \tau, y^*, y)S, \quad (3.8)$$

где

$$\delta(t, \tau, y^*, y) = (\sigma(y) |C(t) - C(\tau)| + \sigma(y^* - y) \cdot |C(t)|) P. \quad (3.9)$$

**Доказательство.** Умножим включение (3.7) на невырожденную матрицу  $C(t)$ . Тогда, учитывая включение  $C(t)S \subset |C(t)|S$ , получим

$$\begin{aligned} C(t)A(y^*) &\subset C(t)A(y) + \sigma(y^* - y)P|C(t)|S \\ &\subset C(\tau)A(y) + (C(t) - C(\tau))A(y) + \sigma(y^* - y)P|C(t)|S. \end{aligned}$$

Отсюда, используя включение (3.6), получим соотношения (3.8), (3.9).

**Лемма 3.2.** Вектограмма (3.3) удовлетворяет условиям, сформулированным в предположениях 2.2, 2.3 и 2.4.

**Доказательство.** Множество (3.2) является выпуклым, замкнутым и, согласно предположению 3.2, ограниченным. Из леммы 3.1 следует включение (2.1) с функцией

$$D(t, \tau) = (\sigma(\alpha(t)) |C(t) - C(\tau)| + \sigma(\alpha(\tau) - \alpha(t)) \cdot |C(t)|) P.$$

Матрица  $C(t)$  является непрерывно дифференцируемой. Следовательно, ее элементы удовлетворяют условию Липшица на отрезке  $[t_0, p]$ . По предположению 3.1 условию Липшица удовлетворяет и функция  $\alpha(t)$ . Поэтому существует число  $L > 0$  такое, что для любого разбиения  $\omega$  (1.4) выполнено неравенство

$$\sum_{j=0}^k D(t_j, t_{j+1}) \leq (p - t_0)L.$$

Рассмотрим семейство непустых множеств  $W(t) = C(t)A(y(t))$ , где  $y(\cdot): [t_0, p] \rightarrow K$  — заданная функция.

При  $y \in K$  и  $j = 1, \dots, l$  обозначим значения опорной функции множества  $A(y)$  на векторах  $x_j$  через  $m_j(y)$ . Можем записать

$$m_j(y) = \max_z \langle x_j, z \rangle, \quad \langle x_i, z \rangle \leq y_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.10)$$

$$m(y) = (m_1(y), m_2(y), \dots, m_l(y)).$$

**Лемма 3.3.** Выполнены соотношения

$$m(y) \in K \iff y \in K \quad \text{и} \quad A(m(y)) = A(y).$$

**Доказательство.** Из (3.10) следуют неравенства  $m_j(y) \leq y_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Отсюда и из формул (3.1) и (3.2) следует, что, если  $m(y) \in K$ , то  $y \in K$  и  $A(m(y)) \subset A(y)$ . Пусть  $y \in K$ . Возьмем любую точку  $z \in A(y)$ . Тогда, согласно формулам (3.10),  $\langle x_j, z \rangle \leq m_j(y)$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Стало быть,  $z \in A(m(y))$  и, следовательно,  $m(y) \in K$ .

С учетом доказанной леммы семейство множеств  $W$  запишем в следующем виде:

$$W(t) = C(t)A(m(y(t))), \quad y: [t_0, p] \rightarrow K. \quad (3.11)$$

**Теорема 3.1.** Пусть функция  $y: [t_0, p] \rightarrow K$  такова, что  $m(y(t)) \in \text{int } K$ . Тогда для семейства множеств (3.11) функция  $\varphi(t, \tau)$  удовлетворяет равенству

$$\varphi(t, \tau) = (\tau - t)\chi(t, \tau), \quad (3.12)$$

где

$$\chi(t, \tau) = |C(\tau)| \sigma \left( \frac{m(t, \tau, y(t)) - m(y(\tau))}{\tau - t} - \alpha(\tau) + \frac{1}{\tau - t} \int_t^\tau \beta(\tau; r) dr \right),$$

$m(t, \tau, y)$ ,  $\beta(\tau; r)$  — векторы с координатами

$$m_j(t, \tau, y) = c(x_j; C^{-1}(\tau)C(t)A(y)), \quad \beta_j(\tau; r) = c(x_j; C^{-1}(\tau)V(r)) \quad (3.13)$$

( $t \leq \tau \leq p$ ,  $y \in K$ ,  $j = 1, \dots, l$ ).

Доказательство. Геометрическая разность

$$Z \overset{*}{-} X = \bigcap_{x \in X} (Z - x)$$

двух множеств  $Z \subset \mathbb{R}^n$  и  $X \subset \mathbb{R}^n$  удовлетворяет [7] свойству  $(Z + Y) \overset{*}{-} X \supset Z \overset{*}{-} X + Y$ . Поэтому включение (2.2) будет выполнено, если

$$(W(\tau) + (\tau - t)U(\tau)) \overset{*}{-} \int_t^\tau V(r)dr + \varphi S \supset W(t). \quad (3.14)$$

Из формул (3.2) и (3.11), используя условие (3.5), получим

$$W(\tau) + (\tau - t)U(\tau) = C(\tau)A(m(y(\tau)) + (\tau - t)\alpha(\tau)). \quad (3.15)$$

В случае замкнутого ограниченного множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  верна формула [6]

$$A(y) \overset{*}{-} X = A(y - y^*), \quad y_j^* = c(x_j; X), \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.16)$$

Поскольку  $m(y(t)) \in \text{int } K$ , то существует число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $t, \tau \in [t_0, p]$ ,  $t \leq \tau \leq t + \delta$ , выполнено включение

$$m(y(\tau)) + (\tau - t)\alpha(\tau) - \int_t^\tau \beta(\tau; r)dr \in K.$$

Отсюда, используя формулы (3.15) и (3.16), запишем включение (3.14) в следующем виде:

$$C(\tau)A\left(m(y(\tau)) + (\tau - t)\alpha(\tau) - \int_t^\tau \beta(\tau; r)dr\right) + \varphi S \supset C(t)A(m(y(t))). \quad (3.17)$$

Покажем, что

$$A(m(t, \tau, y(t))) \supset C^{-1}(\tau)C(t)A(m(y(t))). \quad (3.18)$$

В самом деле, пусть точка  $z$  принадлежит множеству, стоящему в правой части включения. Тогда, используя лемму 3.3 и обозначение (3.13), получаем неравенства

$$\langle x_j, z \rangle \leq m_j(t, \tau, y(t)), \quad j = 1, \dots, l.$$

Отсюда следует, что точка  $z$  принадлежит множеству, стоящему в левой части, что доказывает включение (3.18).

Из (3.18) следует, что включение (3.17) и, следовательно, (3.14) будет выполнено, если

$$C(\tau)A\left(m(y(\tau)) + (\tau - t)\alpha(\tau) - \int_t^\tau \beta(\tau; r)dr\right) + \varphi S \supset C(\tau)A(m(t, \tau, y(t))). \quad (3.19)$$

Из включения (3.7) имеем

$$\begin{aligned} A(m(t, \tau, y(t))) &\subset A\left(m(y(\tau)) + (\tau - t)\alpha(\tau) - \int_t^\tau \beta(\tau; r)dr\right) \\ &+ \sigma\left(m(t, \tau, y(t)) - m(y(\tau)) - (\tau - t)\alpha(\tau) + \int_t^\tau \beta(\tau; r)dr\right)S. \end{aligned}$$

Умножим это включение на матрицу  $C(\tau)$  и учтем, что  $C(\tau)S \subset |C(\tau)|S$ . Получим, что включение (3.19) выполняется при  $\varphi = (\tau - t)\chi(t, \tau)$ . Таким образом, включение (2.2) и поэтому равенство (3.12) доказаны.  $\square$

Обозначим при  $y \in K$ ,  $t \leq \tau \leq p$  и  $j = 1, \dots, l$

$$a_j(t, \tau, y) = \{z \in A(y) : m_j(t, \tau, y) = \langle x_j, C^{-1}(\tau)C(t)z \rangle\}. \quad (3.20)$$

**Теорема 3.2.** Пусть каждая из функций  $\beta_j(\tau, r)$  непрерывно зависит от своих аргументов, а непрерывная функция  $y: [t_0, p] \rightarrow K$  такова, что функции  $m_j(y(t))$  являются непрерывно-дифференцируемыми и удовлетворяют при  $t_0 \leq t \leq p$ ,  $j = 1, \dots, l$  неравенствам

$$-\frac{d}{dt}m_j(y(t)) - \min_{z \in a_j(y(t))} \langle x_j, \dot{C}(t)C^{-1}(t)z \rangle - \alpha_j(t) + \beta_j(t) \leq 0, \quad (3.21)$$

где  $a_j(y) = a_j(t, t, y)$ ,  $\beta_j(t) = c(x_j; C^{-1}(t)V(t))$ . Тогда функция  $\varphi(t, \tau)$  удовлетворяет условию (2.3).

**Доказательство.** Нужно доказать, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что при всех  $t, \tau$ ,  $t_0 \leq t < \tau \leq t + \delta$ ,  $\tau \leq p$ , функция  $\chi$  (3.12) удовлетворяет неравенству  $\chi(t, \tau) < \varepsilon$ .

Допустим противное. Тогда существуют число  $\varepsilon > 0$  и последовательности точек  $\{t_i\}$  и  $\{\tau_i\}$ ,  $t_i < \tau_i$ , из отрезка  $[t_0, p]$ , сходящиеся к некоторой точке  $t \in [t_0, p]$ , такие, что  $\chi(t_i, \tau_i) \geq \varepsilon$ . Поскольку  $|C(\tau_i)| \rightarrow |C(t)| > 0$ , то из формулы (3.12) следует, что существуют номер  $j = 1, \dots, l$  и число  $\varepsilon_1 > 0$  такие, что для бесконечного числа номеров выполнены неравенства

$$\frac{m_j(t_i, \tau_i, y(t_i)) - m_j(y(\tau_i))}{\tau_i - t_i} - \alpha_j(\tau_i) + \frac{1}{\tau_i - t_i} \int_{t_i}^{\tau_i} \beta_j(\tau_i; r) dr \geq \varepsilon_1. \quad (3.22)$$

Поскольку матрица  $C(t)$  является непрерывно дифференцируемой, то

$$C^{-1}(\tau_i)C(t_i) = E - (\tau_i - t_i)C^{-1}(t_i)\dot{C}(t_i) + (\tau_i - t_i)A(t_i, \tau_i),$$

где матрица  $A(t_i, \tau_i) \rightarrow 0$  при  $t_i \rightarrow t$ ,  $\tau_i \rightarrow t$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} m_j(t_i, \tau_i, y(t_i)) &= \langle x_j, C^{-1}(\tau_i)C(t_i)z_i \rangle \\ &= \langle x_j, z_i \rangle - (\tau_i - t_i) \langle x_j, C^{-1}(t_i)\dot{C}(t_i)z_i \rangle + (\tau_i - t_i) \langle x_j, A(t_i, \tau_i)z_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь  $z_i \in a_j(t_i, \tau_i, y(t_i))$ .

Из включения (3.7) следует, что расстояние по Хаусдорфу  $h(A(y); A(y^*))$  удовлетворяет неравенству

$$h(A(y); A(y^*)) \leq \left( \sum_{j=1}^l (y_j - y_j^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}} P.$$

Отсюда следует [4, лемма V.3.1], что функция (3.13) непрерывно зависит от своих аргументов, а многозначное отображение  $a_j(t, \tau, y)$  (3.20) полунепрерывно сверху относительно своих переменных.

Поэтому можно считать, что  $z_i \rightarrow z \in a_j(t, t, y(t)) = a_j(y(t))$ . Поскольку  $\langle x_j, z_i \rangle \leq m_j(y(t_i))$ , то, учитывая равенство (3.23), получим, что выражение, стоящее в левой части неравенства (3.22), не превосходит

$$\frac{m_j(y(t_i)) - m_j(y(\tau_i))}{\tau_i - t_i} - \langle x_j, C^{-1}(t_i)\dot{C}(t_i)z_i \rangle + \langle x_j, A(t_i, \tau_i)z_i \rangle - \alpha(\tau_i) + \frac{1}{\tau_i - t_i} \int_{t_i}^{\tau_i} \beta_j(\tau_i; r) dr.$$

Это выражение стремится к левой части неравенства (3.21). Получили противоречие.

**З а м е ч а н и е 3.1.** Неравенства (3.21) выполняются, если функция  $y: [t_0, p] \rightarrow K$  является решением системы уравнений

$$\frac{d}{dt}m_j(y(t)) = - \min_{z \in A(y(t))} \langle G(t)x_j, z \rangle - \alpha_j(t) + \beta_j(t), \quad (3.24)$$

где  $G(t)$  — результат транспонирования матрицы  $\dot{C}(t)C^{-1}(t)$ .

**З а м е ч а н и е 3.2.** Подставим  $u = C(t)x, u^* = C(t)x^*$ . Тогда процедуру построения управления (2.4) можно записать в виде решения следующей задачи на условный экстремум:

$$\begin{aligned} \varepsilon \rightarrow \min, \quad \varepsilon \geq 0, \quad \|s\| \leq 1, \quad \langle x_j, x^* \rangle \leq \alpha_j(t), \quad \langle x_j, x \rangle \leq \alpha_j(t), \\ \langle x_j, C^{-1}(t)z \rangle + \varepsilon \langle x_j, x^* - x \rangle + \varepsilon \langle x_j, C^{-1}(t)s \rangle \leq y_j(t), \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

#### 4. Примеры

Для базиса  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  будем обозначать через  $x_1^+, \dots, x_n^+$  его сопряженный, то есть

$$\langle x_i, x_j^+ \rangle = 1 \text{ при } i = j \quad \text{и} \quad \langle x_i, x_j^+ \rangle = 0 \text{ при } i \neq j.$$

**П р и м е р 4.1.** Параллелепипед из примера 3.1 представим в следующем виде:

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n: z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\lambda_i(y_i + y_{n+i}) + (y_i - y_{n+i})) x_i^+, \quad |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Для любого вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  значение опорной функции равно

$$c(x; A(y)) = \sum_{i=1}^n ((y_i - y_{n+i}) \langle x, x_i^+ \rangle) + \sum_{i=1}^n ((y_i + y_{n+i}) |\langle x, x_i^+ \rangle|).$$

Здесь учтено, что  $y_i + y_{n+i} \geq 0$  при  $y \in K$ .

Отсюда следует, что  $m_j(y) = y_j$  при  $j = 1, \dots, l$ , а система уравнений (3.24) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_s(t) &= \sum_{i=1}^n (a_{si}(t)y_i(t) + b_{si}(t)y_{n+i}(t)) - a_s(t) + b_s(t), \\ \dot{y}_{n+s}(t) &= \sum_{i=1}^n (b_{si}(t)y_i(t) + a_{si}(t)y_{n+i}(t)) - a_{n+s}(t) + b_{n+s}(t). \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$a_{si}(t) = \langle G(t)x_s, x_i^+ \rangle + |\langle G(t)x_s, x_i^+ \rangle|,$$

$$b_{si}(t) = - \langle G(t)x_s, x_i^+ \rangle + |\langle G(t)x_s, x_i^+ \rangle|.$$

**П р и м е р 4.2.** Симплекс из примера 3.2 имеет  $n + 1$  крайнюю точку  $z_j$ , каждая из которых является решением системы уравнений [4, теорема I.4.2]

$$\langle z_j, x_1 \rangle = y_1, \quad \dots, \quad \langle z_j, x_{i-1} \rangle = y_{j-1}, \quad \langle z_j, x_{i+1} \rangle = y_{j+1}, \quad \dots, \quad \langle z_j, x_{n+1} \rangle = y_{n+1}.$$

Решение этой системы имеет вид

$$z_j(y) = \sum_{s=1}^n \varphi_{js}(y)x_s^+, \quad j = 1, \dots, n + 1,$$

где

$$\varphi_{ss}(y) = (y_{n+1} - \sum_{i=1}^n y_i F_i + y_s F_s) F_s^{-1}, \quad s = 1, \dots, n,$$

и  $\varphi_{js}(y) = y_s$  во всех остальных случаях.

Представим симплекс в виде

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n: z = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \sum_{s=1}^n \varphi_{js}(y) x_s^+, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Для любого вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  значение опорной функции равно

$$c(x; A(y)) = \max_{1 \leq j \leq n+1} \sum_{s=1}^n \varphi_{js}(y) \langle x, x_s^+ \rangle.$$

Отсюда получим, что  $m_j(y) = y_j$  при любом  $j = 1, \dots, n + 1$ , а система уравнений (3.24) примет вид

$$y_j(t) = - \min_{1 \leq j \leq n+1} \sum_{s=1}^n \varphi_{is}(t) \langle G(t)x_j, x_s^+ \rangle - \alpha_j(t) + \beta_j(t).$$

Поступила 12.02.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 195–252.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Ухоботов В.И.** Непрерывная игра в пространстве с неполной линейной структурой // Теория и системы управления. 1997. № 2. С. 107–109.
4. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
5. **Ухоботов В.И., Титов О.Ю.** Моделирование гарантированного управления с многогранной областью значений // Вестн. Челяб. ун-та. Серия 3. Математика. Механика. Информатика. 2002. № 1(6). С. 155–164.
6. **Ухоботов В.И.** Построение цены игры в некоторых дифференциальных играх с фиксированным временем // Прикл. матем. и мех. 1981. Т. 45, вып. 6. С. 994–1000.
7. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. 1 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1280.

УДК 518.9

**ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ИМПУЛЬСНЫМ  
УПРАВЛЕНИЕМ ИГРОКОВ<sup>1</sup>****А. А. Чикрий, И. И. Матичин**

Рассматриваются игры преследования, в которых игроки (преследователь, убегающий или оба) используют импульсные управления, что выражается при помощи дельта-функции Дирака. Изучаются линейные динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, траектории которых терпят разрывы в дискретные моменты времени. Такие системы представляют собой разновидность гибридных систем. В основу исследования положены основные идеи метода разрешающих функций. Последовательно рассмотрены следующие случаи: импульсное управление преследователя; импульсное управление убегающего; импульсное управление обоих игроков. Для каждого из трех случаев изучается задача сближения с цилиндрическим терминальным множеством, получены достаточные условия разрешимости указанной задачи. Теоретические результаты иллюстрируются на примере игры преследования с простым движением.

В данной работе изучаются линейные дифференциальные игры, в которых управляющее воздействие одного или обоих игроков имеет импульсный характер, что выражается при помощи дельта-функции Дирака.

Следует заметить, что импульсные управления рассматривались в основополагающей монографии Н.Н. Красовского [1] и ряде других работ. Изучению игровых задач посвящены фундаментальные труды [2–6].

Для данного класса дифференциальных игр ставится задача сближения с терминальным множеством и последовательно рассматриваются три случая: импульсное управление преследователя, импульсное управление убегающего, а также импульсное управление обоих игроков. В каждом из трех случаев получены достаточные условия разрешимости задачи сближения. Теоретические результаты иллюстрируются на примере игры преследования с простым движением. Основой для исследования указанных задач является *метод разрешающих функций* [7].

**1. Постановка задачи**

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему, эволюция которой описывается уравнением

$$\dot{z} = Az + u - v, \quad z \in \mathbb{R}^m. \quad (1.1)$$

Здесь  $A$  — квадратная матрица порядка  $m$ ,  $u = u(t)$  — управление игрока  $P$  (*преследователя*),  $v = v(t)$  — управление игрока  $E$  (*убегающего*). Структура управлений игроков будет оговорена ниже в каждом из рассматриваемых случаев.

Задача преследователя состоит в том, чтобы, определенным образом выбирая управление  $u$ , за конечное время вывести траекторию системы (1.1) на цилиндрическое терминальное множество  $M^*$ , которое имеет вид

$$M^* = M^0 + M, \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (договор № Ф7/306-2001, проект 01.07/013), а также Научно-технического центра Украины (проект 1746).

где  $M^0$  — линейное подпространство из  $\mathbb{R}^m$ , а  $M$  — непустой компакт из ортогонального дополнения  $L$  к  $M^0$  в пространстве  $\mathbb{R}^m$ . Задача убегающего противоположна — избежать встречи с терминальным множеством  $M^*$ .

## 2. Импульсное управление преследователя

Пусть  $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$  — последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, удовлетворяющая следующему условию.

**Условие 2.1.** *Любой компактный отрезок  $[a, b]$  содержит конечное число точек последовательности.*

Предположим, что преследователь может воздействовать на систему (1.1) только в моменты  $\{\tau_i\}$  и его воздействие в эти моменты имеет импульсный характер, что выражается при помощи дельта-функции Дирака [8]:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \quad (2.1)$$

где векторы скачков  $u_i$  выбираются из некоторого компактного множества  $U$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Здесь и далее  $\delta(t)$  обозначает дельта-функцию. Предположим также, что управление убегающего  $v(t)$  представляет собой измеримую функцию времени со значениями из некоторого компакта  $V$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$ .

Таким образом, в правую часть системы (1.1) аддитивно входят обобщенные функции. Согласно [9] при выбранных управлениях игроков решение системы (1.1) существует при любом начальном условии

$$z_0 = z(0), \quad (2.2)$$

оно единственно и абсолютно непрерывно на интервалах  $(\tau_{i-1}, \tau_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , где  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел,  $\tau_0 = 0$ .

Назовем предысторией управления убегающего в момент  $t$ ,  $t \geq 0$ , функцию

$$v_t(\cdot) = \{v(s) : v(s) \in V, s \in [0, t], v(s) \text{ — измерима}\}.$$

Мы будем полагать, что в каждый момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ , преследователь располагает информацией о начальном состоянии  $z_0$  и о предыстории управления убегающего  $v_t(\cdot)$  [7].

Обозначим через  $\pi$  оператор ортогонального проектирования из  $\mathbb{R}^m$  на  $L$ , а через  $e^{At}$  фундаментальную матрицу однородной системы  $\dot{z} = Az$ . Рассмотрим множества

$$W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{A(\tau_n - \tau_i)} U - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_n - \vartheta)} v(\vartheta) d\vartheta, \quad (2.3)$$

$$W_i(n) = \bigcap_{v(\cdot) \in V[\tau_{i-1}, \tau_i]} W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{A(\tau_n - \tau_i)} U - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_n - \vartheta)} V d\vartheta, \quad (2.4)$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $v(\cdot) \in V[\tau_{i-1}, \tau_i]$ . Здесь и далее будем обозначать через  $V[a, b]$  множество измеримых на  $[a, b]$  функций со значениями в  $V$ , а через  $X \overset{*}{-} Y = \{x : x + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y} (X - y)$  — геометрическую разность (разность Минковского). Интеграл в определении множеств  $W_i(n)$  следует понимать как интеграл от многозначного отображения  $F(\vartheta) = \pi e^{A(\tau_n - \vartheta)} V$  [10]. Следующее условие представляет собой аналог требования, известного в теории дифференциальных игр как условие Понтрягина [6].

**Условие 2.2.** Множества  $W_i(n)$  непусты при всех  $n, i, n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n$ .

В силу условия 2.2 мы можем выбрать из каждого множества  $W_i(n)$  некоторый элемент  $w_i(n)$ . Зафиксируем некоторый набор  $\omega = \omega(n) = \{w_i(n)\}_{i=1}^n$  и положим

$$\xi(n, z, \omega) = \pi e^{A(\tau_n - \tau_0)} z + \sum_{i=1}^n w_i(n). \quad (2.5)$$

Введем функции

$$\tilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), \omega) = \sup \left\{ \alpha \geq 0 : \alpha [M - \xi(n, z, \omega)] \cap [W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)] \neq \emptyset \right\}. \quad (2.6)$$

Обозначим

$$k = k(n, z, v(\cdot), \omega) = \min \left\{ j \in \{1, \dots, n\} : \sum_{i=1}^j \tilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), \omega) \geq 1 \right\}, \quad (2.7)$$

если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном  $j, j \in \{1, \dots, n\}$ , положим  $k = n + 1$ . Определим разрешающие функции [7]

$$\alpha_i(n, z, v(\cdot), \omega) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), \omega), & i = 1, \dots, k-1, \\ 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\alpha}_j(n, z, v(\cdot), \omega), & i = k, \\ 0, & i = k+1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.8)$$

**Лемма 2.1.** Пусть для системы (1.1), (1.2) при импульсном управлении преследователя (2.1) выполнено условие 2.2, множества  $M$  и  $U$  выпуклы, а  $w_i(n) \in W_i(n), n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\alpha_i(n, z, v(\cdot), \omega) (M - \xi(n, z, \omega)) \cap (W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)) \neq \emptyset \quad (2.9)$$

для всех  $n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n, z \in \mathbb{R}^m, v(\cdot) \in V[\tau_{i-1}, \tau_i]$ .

**Доказательство.** Пусть  $i = 1, \dots, k-1$ , тогда согласно (2.8)  $\alpha_i(n, z, v(\cdot), \omega) = \tilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), \omega)$ , и утверждение леммы следует из определения функции (2.6). При  $i = k+1, \dots, n$  имеем  $\alpha_i(n, z, v(\cdot), \omega) = 0$ , и соотношение (2.9) выполняется, поскольку множества  $W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)$  содержат нулевой вектор.

Пусть теперь  $i = k$ . Рассмотрим множество  $\mathcal{A} = \{\alpha \geq 0 : \alpha [M - \xi(n, z, \omega)] \cap [W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)] \neq \emptyset\}$ . В силу предположений леммы множества  $M - \xi(n, z, \omega)$  и  $W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)$  выпуклы. Пусть  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}, x_1 \in \alpha_1 [M - \xi(n, z, \omega)] \cap [W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)], x_2 \in \alpha_2 [M - \xi(n, z, \omega)] \cap [W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)]$ . В силу выпуклости множеств  $M - \xi(n, z, \omega)$  и  $W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)$  для любого  $\lambda \in [0, 1]$  выполняется соотношение  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in (\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2) [M - \xi(n, z, \omega)] \cap [W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)]$ , откуда следует, что  $\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2 \in \mathcal{A}$  и множество  $\mathcal{A}$  выпукло. Выпуклость множества  $\mathcal{A}$  означает, что  $\alpha [M - \xi(n, z, \omega)] \cap [W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)] \neq \emptyset$  для всех  $\alpha$  таких, что  $0 \leq \alpha \leq \tilde{\alpha}_k(n, z, v(\cdot), \omega)$ . Согласно (2.7), (2.8)  $\alpha_k(n, z, v(\cdot), \omega) \leq \tilde{\alpha}_k(n, z, v(\cdot), \omega)$ , поэтому утверждение леммы справедливо при  $i = k$ .  $\square$

Введем также функцию

$$N(z, \omega) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n \inf_{v(\cdot) \in V[\tau_{i-1}, \tau_i]} \alpha_i(n, z, v(\cdot), \omega) = 1 \right\}. \quad (2.10)$$

Если равенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном  $n$ , положим  $N(z, \omega) = +\infty$ .

**Теорема 2.1.** Если для системы (1.1) при импульсном управлении преследователя (2.1) выполнено условие 2.2, множества  $M$  и  $U$  выпуклы и  $N(z_0, \omega) < +\infty$  для начального состояния  $z_0$  и некоторого набора  $\omega$ , то траектория системы (1.1) может быть приведена из начального состояния  $z_0$  на терминальное множество (1.2) в момент  $\tau_{N(z_0, \omega)}$ .

**Доказательство.** Положим  $N = N(z_0, \omega)$  и зафиксируем некоторую функцию  $v(\cdot)$ ,  $v(\cdot) \in V[\tau_0, \tau_N]$ .

Рассмотрим вначале случай, когда  $\xi(N, z_0, \omega) \notin M$ . Пусть  $K = k(N, z_0, v(\cdot), \omega)$ , согласно (2.7), (2.8)

$$\sum_{i=1}^K \alpha_i(N, z_0, v(\cdot), \omega) = 1.$$

Для  $i = 1, \dots, K$  будем выбирать векторы скачков  $u_i$  так, чтобы выполнялось включение

$$\pi e^{A(\tau_N - \tau_i)} u_i - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_N - \vartheta)} v(\vartheta) d\vartheta - w_i(N) \in \alpha_i(N, z_0, v(\cdot), \omega) [M - \xi(N, z_0, \omega)]. \quad (2.11)$$

В силу соотношений (2.4), (2.6), условия 2.2 и леммы 2.1 эти включения имеют решения. Для  $i = K + 1, \dots, N$  в качестве векторов скачков  $u_i$  будем выбирать решения уравнений

$$\pi e^{A(\tau_N - \tau_i)} u_i - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_N - \vartheta)} v(\vartheta) d\vartheta = w_i(N). \quad (2.12)$$

Данные уравнения имеют решения в силу условия 2.2. Из формулы Коши для системы (1.1) и свойств дельта-функции следует представление

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_N) &= \pi e^{A(\tau_N - \tau_0)} z_0 + \int_{\tau_0}^{\tau_N} \pi e^{A(\tau_N - \vartheta)} (u(\vartheta) - v(\vartheta)) d\vartheta \\ &= \pi e^{A(\tau_N - \tau_0)} z_0 + \sum_{i=1}^N \pi e^{A(\tau_N - \tau_i)} u_i - \int_{\tau_0}^{\tau_N} \pi e^{A(\tau_N - \vartheta)} v(\vartheta) d\vartheta \\ &= \pi e^{A(\tau_N - \tau_0)} z_0 + \sum_{i=1}^N \left[ \pi e^{A(\tau_N - \tau_i)} u_i - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{A(\tau_N - \vartheta)} v(\vartheta) d\vartheta \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Прибавим и вычтем из правой части равенства (2.13) величину  $\sum_{i=1}^N w_i(N)$ . Тогда, учитывая выпуклость множества  $M$  и законы выбора управления преследователем (2.11)–(2.12), получим включение

$$\pi z(\tau_N) \in \xi(N, z_0, \omega) \left[ 1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i(N, z_0, v(\cdot), \omega) \right] + \sum_{i=1}^N \alpha_i(N, z_0, v(\cdot), \omega) M = M.$$

Последнее равносильно включению  $z(\tau_N) \in M^*$ .

Пусть теперь  $\xi(N, z_0, \omega) \in M$ . В качестве векторов скачков  $u_i$  для всех  $i = 1, \dots, N$  будем выбирать решения уравнения (2.12). В таком случае из представления (2.13) немедленно следует включение  $\pi z(\tau_N) \in M$ .  $\square$

### 3. Импульсное управление убегающего

Пусть теперь управление игрока преследователя представляет собой измеримую функцию времени со значениями из компакта  $U$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Убегающий, в свою очередь, может воздействовать на систему (1.1) лишь в моменты  $\{\tau_i\}$ , и его управление имеет вид:

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \delta(t - \tau_i), \quad (3.1)$$

где векторы скачков  $v_i$  принадлежат некоторому компакту  $V$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\tau_0 = 0$ .

Согласно [9] в данном случае, как и в предыдущем, решение системы (1.1) при выбранных управлениях игроков существует при любом начальном условии (2.2); оно единственно и абсолютно непрерывно на интервалах  $(\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Введем функцию  $n(t) = \max \{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \tau_i \leq t\}$  и рассмотрим множества

$$W_i(t, v) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{A(t-\vartheta)} U d\vartheta - \pi e^{A(t-\tau_i)} v, \quad i = 0, 1, \dots, n(t) - 1, \quad (3.2)$$

$$W_{n(t)}(t, v) = \int_{\tau_{n(t)}}^t \pi e^{A(t-\vartheta)} U d\vartheta - \pi e^{A(t-\tau_{n(t)})} v,$$

$$W_i(t) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{A(t-\vartheta)} U d\vartheta - \pi e^{A(t-\tau_i)} V, \quad i = 0, 1, \dots, n(t) - 1, \quad (3.3)$$

$$W_{n(t)}(t) = \int_{\tau_{n(t)}}^t \pi e^{A(t-\vartheta)} U d\vartheta - \pi e^{A(t-\tau_{n(t)})} V.$$

Интеграл в определении множеств  $W_i(t, v)$  и  $W_i(t)$  следует понимать как интеграл от многозначного отображения.

Обозначим  $\mathfrak{T} = \{t \geq 0 : W_i(t) \neq \emptyset, i = 0, \dots, n(t)\}$ .

Следует отметить, что, как правило,  $\tau_i \notin \mathfrak{T}$  для всех  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , поскольку множества  $W_i(\tau_i)$  непусты, только если множество  $\pi V$  состоит из одной точки.

**Условие 3.1.** Множество  $\mathfrak{T}$  непусто.

Для любого момента времени  $t$ ,  $t \in \mathfrak{T}$ , зафиксируем набор векторов  $\omega = \omega(t) = \{w_i(t) : w_i(t) \in W_i(t), i = 0, \dots, n(t)\}$ . Положим

$$\xi(t, z, \omega) = \pi e^{A(t-\tau_0)} z + \sum_{i=0}^{n(t)} w_i(t). \quad (3.4)$$

Введем функции

$$\tilde{\alpha}_i(t, z, v, \omega) = \sup \{ \alpha \geq 0 : \alpha (M - \xi(t, z, \omega)) \cap (W_i(t, v) - w_i(t)) \neq \emptyset \}. \quad (3.5)$$

Обозначим

$$k = k(t, z, v, \omega) = \min \left\{ j \in \{1, \dots, n(t)\} : \sum_{i=1}^j \tilde{\alpha}_i(t, z, v, \omega) \geq 1 \right\}; \quad (3.6)$$

если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном  $j$ ,  $j \in \{1, \dots, n(t)\}$ , положим  $k = n(t) + 1$ . Определим разрешающие функции [7]

$$\alpha_i(t, z, v, \omega) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i(t, z, v, \omega), & i = 1, \dots, k-1, \\ 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\alpha}_j(t, z, v, \omega), & i = k, \\ 0, & i = k+1, \dots, n(t), \end{cases} \quad (3.7)$$

где  $t \in \mathfrak{T}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n(t)$ ,  $z \in \mathbb{R}^m$ ,  $v \in V$ .

Можно показать, что если множество  $M$  выпукло, то для определенных таким образом разрешающих функций при  $t \in \mathfrak{T}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n(t)$ ,  $z \in \mathbb{R}^m$ ,  $v \in V$ ,  $w_i(t) \in W_i(t)$ , справедливы соотношения

$$\alpha_i(t, z, v, \omega) (M - \xi(t, z, \omega)) \cap (W_i(t, v) - w_i(t)) \neq \emptyset. \quad (3.8)$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству леммы 2.1. При этом для доказательства выпуклости множеств  $W_i(t, v)$  следует использовать тот факт, что интеграл от равномерно ограниченного компактнозначного отображения представляет собой выпуклый компакт (*теорема Ауманна* [11]).

Рассмотрим множество

$$T(z, \omega) = \left\{ t \in \mathfrak{T} : \sum_{i=0}^{n(t)} \inf_{v \in V} \alpha_i(t, z, v, \omega) = 1 \right\}. \quad (3.9)$$

Если равенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном  $t \in \mathfrak{T}$ , положим  $T(z, \omega) = \emptyset$ .

**Теорема 3.1.** *Если для системы (1.1) при импульсном управлении убегающего (3.1) выполнено условие 3.1,  $\tau_i \notin \mathfrak{T}$  для всех  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , множество  $M$  выпукло и для начального состояния  $z_0$  и набора  $\omega$  множество  $T(z_0, \omega)$  непусто, то для любого  $T \in T(z_0, \omega)$  траектория системы (1.1) может быть приведена из начального состояния  $z_0$  на терминальное множество (1.2) в момент  $T$ .*

**Доказательство.** Обозначим  $N = n(T)$  и зафиксируем некоторый набор векторов-скачков  $\{v_i\}$ .

Предположим вначале, что  $\xi(T, z_0, \omega) \notin M$ . Обозначим  $K = k(T, z_0, v, \omega)$ , тогда, согласно (3.6) и (3.7),

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i(T, z_0, v_i, \omega) = 1.$$

Пусть  $K = N$ . Тогда на интервалах  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, K-1$ , будем выбирать управление преследователя таким образом, чтобы выполнялись включения

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{A(T-\vartheta)} u(\vartheta) d\vartheta - \pi e^{A(T-\tau_i)} v_i - w_i(T) \in \alpha_i(T, z_0, v_i, \omega) (M - \xi(T, z_0, \omega)), \quad (3.10)$$

а на отрезке  $[\tau_K, T]$  так, чтобы было справедливо включение

$$\int_{\tau_K}^T \pi e^{A(T-\vartheta)} u(\vartheta) d\vartheta - \pi e^{A(T-\tau_K)} v_K - w_K(T) \in \alpha_K(T, z_0, v_K, \omega) (M - \xi(T, z_0, \omega)). \quad (3.11)$$

В силу соотношения (3.8) и условия 3.1 эти включения имеют измеримые решения.

Если же  $K < N$ , то на интервалах  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, K$ , будем выбирать управление преследователя так, чтобы выполнялись соотношения (3.10), а на интервалах  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i = K + 1, \dots, N - 1$ , в качестве управления преследователя возьмем решения уравнений Фредгольма I-го рода:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{A(T-\vartheta)} u(\vartheta) d\vartheta - \pi e^{A(T-\tau_i)} v_i = w_i(T). \quad (3.12)$$

На отрезке  $[\tau_N, T]$  выберем в качестве управления преследователя решение интегрального уравнения Вольтерра I-го рода:

$$\int_{\tau_N}^T \pi e^{A(T-\vartheta)} u(\vartheta) d\vartheta - \pi e^{A(T-\tau_N)} v_N = w_N(T). \quad (3.13)$$

В силу включений  $w_i(T) \in W_i(T)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , из условия 3.1 следует, что уравнения (3.12), (3.13) имеют измеримые решения.

Из формулы Коши для системы (1.1) и свойств дельта-функции следует представление

$$\begin{aligned} \pi z(T) = & \pi e^{A(T-\tau_0)} z_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \left( \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{A(T-\vartheta)} u(\vartheta) d\vartheta - \pi e^{A(T-\tau_i)} v_i \right) \\ & + \int_{\tau_N}^T \pi e^{A(T-\vartheta)} u(\vartheta) d\vartheta - \pi e^{A(T-\tau_N)} v_N. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Прибавим и вычтем из правой части равенства (3.14) величину  $\sum_{i=0}^N w_i(T)$ . Тогда, учитывая законы выбора управления преследователем (3.10)–(3.13), а также выпуклость множества  $M$ , получаем включение

$$\pi z(T) \in \xi(T, z_0, \omega) + \sum_{i=0}^K \alpha_i(T, z_0, v_i, \omega) (M - \xi(T, z_0, \omega)) = M, \quad (3.15)$$

откуда немедленно следует, что  $z(T) \in M^*$ .

Пусть теперь  $\xi(T, z_0, \omega) \in M$ . На интервалах  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ , будем выбирать в качестве управления преследователя решения уравнений (3.12), а на отрезке  $[\tau_N, T]$  — решение уравнения (3.13). В результате, учитывая формулу (3.14), получим  $\pi z(T) = \xi(T, z_0, \omega) \in M$ , или  $z(T) \in M^*$ .  $\square$

#### 4. Импульсное управление обоих игроков

Пусть  $\{\tau_i\}$ ,  $\{\eta_j\}$  — последовательности моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, удовлетворяющие условию 2.1.

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему, эволюция которой описывается уравнением (1.1), и предположим, что управления обоих игроков (как преследователя, так и убегающего) носят импульсный характер и имеют вид:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \quad v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j \delta(t - \eta_j), \quad (4.1)$$

где векторы скачков преследователя  $u_i$  принадлежат компакту  $U$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$ , а векторы скачков убегающего  $v_j$  — компакту  $V$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$ .

Согласно [9], если управления игроков имеют вид (4.1), то при любом начальном условии (2.2) система (1.1) имеет единственное решение, которое является абсолютно непрерывным на интервалах между моментами скачков  $\tau_i, \eta_j, i, j \in \mathbb{N}$ .

Введем обозначение  $J_i = \{j \in \mathbb{N} : \eta_j \in [\tau_{i-1}, \tau_i)\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , и рассмотрим множества

$$W_i(n, \{v_j\}) = \pi e^{A(\tau_n - \tau_i)} U - \sum_{j \in J_i} \pi e^{A(\tau_n - \eta_j)} v_j, \quad (4.2)$$

$$W_i(n) = \pi e^{A(\tau_n - \tau_i)} U - \sum_{j \in J_i} \pi e^{A(\tau_n - \eta_j)} V, \quad (4.3)$$

где  $i = 1, \dots, n$ .

**Условие 4.1.** Множества  $W_i(n)$  непусты при всех  $n, i, n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n$ .

В силу условия 4.1 мы можем выбрать из каждого множества  $W_i(n)$  некоторый элемент  $w_i(n)$ . Зафиксируем некоторый набор  $\omega = \omega(n) = \{w_i(n)\}_{i=1}^n$  и положим

$$\xi(n, z, \omega) = \pi e^{A(\tau_n - \tau_0)} z + \sum_{i=1}^n w_i(n).$$

Введем функции

$$\tilde{\alpha}_i(n, z, \{v_j\}, \omega) = \sup \{ \alpha \geq 0 : \alpha (M - \xi(n, z, \omega)) \cap (W_i(n, \{v_j\}) - w_i(n)) \neq \emptyset \}. \quad (4.4)$$

Обозначим

$$k = k(n, z, \{v_j\}, \omega) = \min \left\{ m \in \{1, \dots, n\} : \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i(n, z, \{v_j\}, \omega) \geq 1 \right\}; \quad (4.5)$$

если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном  $m, m \in \{1, \dots, n\}$ , положим  $k = n + 1$ . Определим разрешающие функции [7]

$$\alpha_i(n, z, \{v_j\}, \omega) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i(n, z, \{v_j\}, \omega), & i = 1, \dots, k-1, \\ 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\alpha}_j(n, z, \{v_j\}, \omega), & i = k, \\ 0, & i = k+1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.6)$$

Можно показать, что если множества  $M$  и  $U$  выпуклы, то для определенных таким образом разрешающих функций при  $n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n, z \in \mathbb{R}^m, v_j \in V, w_i(n) \in W_i(n)$ , справедливы соотношения

$$\alpha_i(n, z, \{v_j\}, \omega) (M - \xi(n, z, \omega)) \cap (W_i(n, \{v_j\}) - w_i(n)) \neq \emptyset. \quad (4.7)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 2.1.

Введем также функцию

$$N(z, \omega) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n \inf_{\{v_j\}} \alpha_i(n, z, \{v_j\}, \omega) = 1 \right\}. \quad (4.8)$$

Если равенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном  $n$ , положим  $N(z, \omega) = +\infty$ .

**Теорема 4.1.** Если для системы (1.1) при импульсном управлении игроков (4.1) выполнено условие 4.1, множества  $M$  и  $U$  выпуклы,  $N(z_0, \omega) < +\infty$  для начального состояния  $z_0$  и некоторого набора  $\omega$ , и при этом  $\eta_j \neq \tau_{N(z_0, \omega)}, j \in \mathbb{N}$ , то траектория системы (1.1) может быть приведена из начального состояния  $z_0$  на терминальное множество (1.2) в момент  $\tau_{N(z_0, \omega)}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Положим  $N = N(z_0, \omega)$  и зафиксируем некоторый набор векторов  $\{v_j\}_{j: \eta_j \in [\tau_0, \tau_N]}$  из множества  $V$ .

Рассмотрим вначале случай, когда  $\xi(N, z_0, \omega) \notin M$ . Обозначим  $K = k(N, z_0, \{v_j\}, \omega)$ ; тогда, согласно (4.5) и (4.6),

$$\sum_{i=1}^K \alpha_i(N, z_0, \{v_j\}, \omega) = 1.$$

Для  $i = 1, \dots, K$  будем выбирать векторы скачков  $u_i$  так, чтобы выполнялись включения

$$\pi e^{A(\tau_N - \tau_i)} u_i - \sum_{j \in J_i} \pi e^{A(\tau_N - \eta_j)} v_j - w_i(N) \in \alpha_i(N, z_0, \{v_j\}, \omega) (M - \xi(N, z_0, \omega)). \quad (4.9)$$

Решения этих включений существуют, поскольку справедливо соотношение (4.7) и условие 4.1.

Для  $i = K + 1, \dots, N$  в качестве векторов скачков  $u_i$  будем выбирать решения уравнений

$$\pi e^{A(\tau_N - \tau_i)} u_i - \sum_{j \in J_i} \pi e^{A(\tau_N - \eta_j)} v_j = w_i(N). \quad (4.10)$$

Существование решений этих уравнений следует из условия 4.1.

Из формулы Коши для системы (1.1) и свойств дельта-функции, учитывая, что  $\eta_j \neq \tau_N$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , получаем представление

$$\pi z(\tau_N) = \pi e^{A(\tau_N - \tau_0)} z_0 + \sum_{i=1}^N \left( \pi e^{A(\tau_N - \tau_i)} u_i - \sum_{j \in J_i} \pi e^{A(\tau_N - \eta_j)} v_j \right). \quad (4.11)$$

Прибавим и вычтем из правой части уравнения (4.11) величину  $\sum_{i=1}^N w_i(N)$ . Тогда, учитывая выпуклость множества  $M$  и закон выбора управления преследователем (4.9)–(4.10), получим включение

$$\pi z(\tau_N) \in \xi(N, z_0, \omega) + \sum_{i=1}^K \alpha_i(N, z_0, \{v_j\}, \omega) (M - \xi(N, z_0, \omega)) = M, \quad (4.12)$$

которое эквивалентно включению  $z(\tau_N) \in M^*$ .

Пусть теперь  $\xi(N, z_0, \omega) \in M$ . В качестве векторов скачков  $u_i$  для всех  $i = 1, \dots, N$  будем выбирать решения уравнения (4.10). В таком случае из представления (4.11) немедленно следует включение  $\pi z(\tau_N) = \xi(N, z_0, \omega) \in M$ , равносильное включению  $z(\tau_N) \in M^*$ .  $\square$

## 5. Пример

Проиллюстрируем вышеизложенные результаты на примере игры с простым движением. Пусть динамика системы задается уравнением

$$\dot{z} = u - v, \quad z \in \mathbb{R}^m. \quad (5.1)$$

Пусть терминальное множество состоит из одной точки  $M^* = \{0\}$ . Тогда  $M^0 = \{0\}$ ,  $M = \{0\}$ . Поэтому  $L = \mathbb{R}^m$ , а  $\pi$  представляет собой оператор тождественного преобразования и задается единичной матрицей  $E$ . Матрица  $A$  нулевая, следовательно,  $e^{At} = E$ .

Рассмотрим вначале случай, когда управление преследователя имеет импульсный характер, а управление убегающего  $v = v(t)$  является измеримой функцией времени со значениями

из компакта  $V$ . Предположим, что  $\tau_i = iP$ , где  $P$  — некоторый период, тогда управление преследователя примет вид:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - iP), \quad u_i \in U.$$

Предположим также, что множество  $U$  представляет собой замкнутый шар радиуса  $\rho$  с центром в нуле, а множество  $V$  — шар радиуса  $\sigma$ , т.е.  $U = \rho S$ ,  $V = \sigma S$ ,  $S = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq 1\}$ .

Далее,

$$W_i(n, v(\cdot)) = W_i(v(\cdot)) = \rho S - \int_{(i-1)P}^{iP} v(\vartheta) d\vartheta,$$

$$W_i(n) = W_i = \rho S - \int_{(i-1)P}^{iP} \sigma S d\vartheta = \rho S - P\sigma S.$$

Таким образом, условие 2.2 будет выполнено, если  $\rho \geq P\sigma$ . При этом  $W_i = (\rho - P\sigma)S$  и множества  $W_i$  содержат нулевой вектор при всех  $i$ . Положим  $w_i(n) \equiv 0$  для всех  $i, n$ . Тогда

$$\xi(n, z, \omega) = z.$$

Обозначим  $I_i = \int_{(i-1)P}^{iP} v(\vartheta) d\vartheta$ . Имеем

$$\tilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), \omega) = \max\{\alpha \geq 0 : -\alpha z \in \rho S - I_i\}.$$

Эти функции могут быть найдены в явном виде из уравнения

$$\|I_i - \alpha z\| = \rho.$$

Решая его, получим

$$\tilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), \omega) = \frac{(z, I_i) + \sqrt{(z, I_i)^2 + \|z\|^2(\rho^2 - \|I_i\|^2)}}{\|z\|^2}.$$

При этом минимум  $\tilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), \omega)$  достигается при  $I_i = -P\sigma \frac{z}{\|z\|}$ , т.е. когда  $v(t) = -\sigma \frac{z}{\|z\|}$  почти всюду на интервале  $((i-1)P, iP)$ . Поскольку

$$\inf_{v(\cdot)} \tilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), \omega) = \frac{\rho - P\sigma}{\|z\|},$$

получаем, что

$$N(z, \omega) = N(z) = \left\lceil \frac{\|z\|}{\rho - P\sigma} \right\rceil + 1;$$

здесь и далее  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ . Таким образом, траектория системы (5.1) может быть приведена из начального положения  $z_0$  на терминальное множество не позже момента  $\tau_{N(z_0)} = N(z_0)P$ .

Следует также отметить, что при выбранном способе преследования справедливо равенство

$$z(\tau_i) = \left(1 - \sum_{j=1}^i \alpha_j(z_0, v(\cdot))\right) z_0.$$

Это означает, что  $z(\tau_i)$  параллельно  $z_0$  в моменты  $\tau_i = iP$ , т.е. стратегия преследования, предписываемая изложенным здесь методом, является аналогом *параллельного преследования* [12].

Рассмотрим теперь систему (5.1) в случае импульсного управления убегающего. Пусть управление преследователя  $u = u(t)$  представляет собой измеримую функцию времени со значениями из компакта  $U$ , а убегающий может воздействовать на систему только в дискретные моменты  $\tau_i = iP$ , и его управление имеет вид:

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \delta(t - iP), \quad v_i \in V.$$

Как и в предыдущем случае,  $U = \rho S$ ,  $V = \sigma S$ .

В данном примере  $n(t) = \left[ \frac{t}{P} \right]$ . Согласно (3.2), (3.3) имеем

$$W_i(t, v) = W_i(v) = \int_{iP}^{(i+1)P} \rho S d\vartheta - v = P\rho S - v, \quad i = 0, \dots, n(t) - 1,$$

$$W_{n(t)}(t, v) = \int_{\left[ \frac{t}{P} \right] P}^t \rho S d\vartheta - v = \left( t - \left[ \frac{t}{P} \right] P \right) \rho S - v,$$

$$W_i(t) = W_i = P\rho S - \sigma S, \quad i = 0, \dots, n(t) - 1.$$

Очевидно, эти множества непусты при всех  $t$ ,  $t \geq 0$ , если  $P\rho \geq \sigma$ . При этом  $W_i = (P\rho - \sigma)S$ ,

$$W_{n(t)}(t) = \left( t - \left[ \frac{t}{P} \right] P \right) \rho S - \sigma S.$$

Множество  $W_{n(t)}(t)$  непусто при

$$t \geq \left[ \frac{t}{P} \right] P + \frac{\sigma}{\rho},$$

а поскольку  $t < \left( \left[ \frac{t}{P} \right] + 1 \right) P$ , условие 3.1 будет выполнено, если справедливо неравенство

$$P\rho > \sigma, \tag{5.2}$$

при этом

$$\mathfrak{T} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \left[ iP + \frac{\sigma}{\rho}, (i+1)P \right).$$

Обозначим  $\eta(t) = t - \left[ \frac{t}{P} \right] P$ . Тогда  $W_{n(t)}(t) = (\eta(t)\rho - \sigma)S$  при  $t \in \mathfrak{T}$ . Таким образом, множества  $W_i(t)$  содержат нулевой элемент для всех  $t \in \mathfrak{T}$ ,  $i = 0, \dots, n(t)$ , и мы можем положить  $w_i(t) \equiv 0$ . В результате получим

$$\xi(t, z, \omega) = z.$$

Найдем разрешающие функции. Пусть  $i = 0, \dots, n(t) - 1$ , тогда

$$\tilde{\alpha}_i(t, z, v, \omega) = \sup \{ \alpha \geq 0 : -\alpha z \in P\rho S - v \}.$$

Значения этих функций можно найти в явном виде из уравнения

$$\|v - \alpha z\| = P\rho.$$

Простой подсчет показывает, что

$$\tilde{\alpha}_i(t, z, v, \omega) = \frac{(z, v) + \sqrt{(z, v)^2 + \|z\|^2 (P^2 \rho^2 - \|v\|^2)}}{\|z\|^2}.$$

Тогда

$$\inf_{\|v\| \leq \sigma} \tilde{\alpha}_i(t, z, v, \omega) = \frac{P\rho - \sigma}{\|z\|},$$

где минимум достигается при  $v = -\sigma \frac{z}{\|z\|}$ . Отсюда следует, что

$$N = n(T) = \left\lceil \frac{\|z\|}{P\rho - \sigma} \right\rceil,$$

где  $T, T \in T(z, \omega)$ , — момент окончания игры.

Далее,

$$\tilde{\alpha}_{n(t)}(t, z, v, \omega) = \sup \{ \alpha \geq 0 : -\alpha z \in \eta(t)\rho S - v \}.$$

Аналогично получаем

$$\tilde{\alpha}_{n(t)}(t, z, v, \omega) = \frac{(z, v) + \sqrt{(z, v)^2 + \|z\|^2(\eta(t)^2\rho^2 - \|v\|^2)}}{\|z\|^2},$$

откуда

$$\inf_{\|v\| \leq \sigma} \tilde{\alpha}_{n(t)}(t, z, v, \omega) = \frac{\eta(t)\rho - \sigma}{\|z\|},$$

причем минимум достигается при  $v = -\sigma \frac{z}{\|z\|}$ . Момент  $T$  окончания игры находится из уравнения

$$\left\lceil \frac{\|z\|}{P\rho - \sigma} \right\rceil \frac{P\rho - \sigma}{\|z\|} + \frac{\eta(t)\rho - \sigma}{\|z\|} = 1.$$

Это уравнение всегда имеет решение, если выполнено неравенство (5.2).

Наконец, рассмотрим систему (5.1) при импульсном управлении обоих игроков. Предположим, что  $\tau_i = iP$ ,  $\eta_j = jQ$ , где  $P, Q$  — некоторые периоды, причем  $Q < P$ . Управления преследователя  $u = u(t)$  и убегающего  $v = v(t)$  имеют вид

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - iP), \quad v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j \delta(t - jQ),$$

где  $u_i \in U = \rho S$ ,  $v_j \in V = \sigma S$ .

В данном случае  $J_i = \{j \in \mathbb{N} : jQ \in [(i-1)P, iP)\}$ , т.е.  $|J_i| = \left\lceil \frac{P}{Q} \right\rceil$ , где  $|J_i|$  — количество элементов множества  $J_i$ .

Согласно (4.2), (4.3) имеем

$$W_i(n, \{v_j\}) = \rho S - \sum_{j \in J_i} v_j,$$

$$W_i(n) = W_i = \rho S - \sum_{j \in J_i} \sigma S = \rho S - |J_i| \sigma S = \rho S - \left\lceil \frac{P}{Q} \right\rceil \sigma S.$$

Таким образом, условие 4.1 будет выполнено, если справедливо неравенство  $\rho \geq \left\lceil \frac{P}{Q} \right\rceil \sigma$ . При этом  $W_i(n) = \left(\rho - \left\lceil \frac{P}{Q} \right\rceil \sigma\right) S$  и множества  $W_i$  содержат нулевой вектор при всех  $i$ . Положим  $w_i(n) \equiv 0$  для всех  $i, n$ . Тогда

$$\xi(n, z, \omega) = z.$$

Обозначим  $\mathfrak{S}_i = \sum_{j \in J_i} v_j$  и найдем, чему равны разрешающие функции:

$$\tilde{\alpha}_i(n, z, \{v_j\}, \omega) = \sup \{ \alpha \geq 0 : -\alpha z \in \rho S - \mathfrak{S}_i \}. \quad (5.3)$$

Функции (5.3) могут быть найдены в явном виде из уравнений

$$\|\mathfrak{S}_i - \alpha z\| = \rho,$$

решив которые, получим

$$\tilde{\alpha}_i(n, z, \{v_j\}, \omega) = \frac{(z, \mathfrak{S}_i) + \sqrt{(z, \mathfrak{S}_i)^2 + \|z\|^2(\rho^2 - \|\mathfrak{S}_i\|^2)}}{\|z\|^2}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\inf_{\{v_j\}} \tilde{\alpha}_i(n, z, \{v_j\}, \omega) = \frac{\rho - \left[\frac{P}{Q}\right] \sigma}{\|z\|}, \quad (5.4)$$

причем минимум достигается при  $\mathfrak{S}_i = -\left[\frac{P}{Q}\right] \sigma \frac{z}{\|z\|}$ , т.е. когда  $v_j = -\sigma \frac{z}{\|z\|}$  для всех  $j$ . Из (4.8), (5.4) следует, что

$$N(z, \omega) = \left[ \frac{\|z\|}{\rho - \left[\frac{P}{Q}\right] \sigma} \right] + 1$$

и поимка может произойти в момент  $\tau_{N(z_0)}$ .

Поступила 27.01.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
6. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. 2. 576 с.
7. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
8. Микусинский Я., Сикорский Р. Элементарная теория обобщенных функций. М.: Иностранная литература, 1959. 79 с.
9. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
10. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
11. Aumann R.J. Integrals of set valued functions // J. Math. Anal. Appl. 1965. 12. P. 1–12.
12. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и системный анализ. 2000. №3. С. 3–32.

УДК 519.83

## АДАПТИВНОЕ МИНИМАКСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯМИ<sup>1</sup>

А. Ф. Шориков

Рассматривается задача адаптивного минимаксного управления процессом преследования для нескольких управляемых объектов, динамика каждого из которых описывается дискретным рекуррентным векторным уравнением. Предполагается, что в данном процессе управления известны прошлые реализации управляющих сигналов объектов  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) управляемых  $n$  преследователями, и информационных сигналов, содержащих неполную информацию об объекте  $II$ , управляемом уклоняющимся. Известны также множества значений всех априори неопределенных параметров рассматриваемых динамических систем, имеющие вид выпуклых многогранников в соответствующих конечномерных векторных пространствах. При этих предположениях формулируется и решается задача адаптивного минимаксного управления процессом преследования. Для организации минимаксного управления преследованием в выбранном классе допустимых стратегий адаптивного управления предлагается рекуррентная процедура, каждый шаг которой основывается на реализации процесса апостериорной минимаксной нелинейной фильтрации и на решении задач линейного и выпуклого программирования. Результаты, полученные в этой статье, могут быть использованы при компьютерном моделировании реальных динамических процессов и проектировании оптимальных навигационных и управляющих приборов для различных транспортных систем.

### 1. Введение

В данной статье рассматривается задача адаптивного минимаксного управления процессом преследования с неполной информацией (см. [1, 2, 4, 6, 7]) для нескольких управляемых объектов. Динамика всех объектов  $I_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , и объекта  $II$  (управляемых  $n$  преследователями  $P_i$  и уклоняющимся  $E$  соответственно) описывается дискретными рекуррентными векторными уравнениями. Предполагается, что каждый преследователь  $P_i$  знает значения прошлых реализаций управляющего воздействия на объект  $I_i$ , управляемый им. Каждому преследователю  $P_i$  также известны значения прошлых реализаций соответствующего ему информационного сигнала об объекте  $II$ , измеряемого с ошибкой и зависящего от реализаций фазовых векторов объектов  $II$  и  $I_i$ . Предполагается, что каждому преследователю  $P_i$  известны множества, ограничивающие изменение всех априори неопределенных параметров в уравнениях, описывающих динамику объектов  $I_i$  и  $II$ , и формирование соответствующих информационных сигналов. Каждое из этих множеств является выпуклым многогранником или компактом в некотором конечномерном векторном пространстве. В рассматриваемом процессе предполагается также, что существует координатор  $P$  всего процесса преследования, которому известна вся информация, доступная для каждого преследователя  $P_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , и в любой допустимый момент времени он передает каждому из них все данные о значениях фазовых векторов объекта  $II$ , которыми он располагает в этот момент времени. При сделанных предположениях в статье приводится формализация и общая схема решения задачи адаптивного минимаксного управления процессом преследования. Для организации минимаксного управления преследованием в выбранном классе допустимых стратегий адаптивного управления предлагается конечная

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00059).

рекуррентная процедура, каждый шаг которой основывается на реализации процесса апостериорной минимаксной нелинейной фильтрации (см. [5, 6]) и на решении задач линейного и выпуклого программирования.

Полученные в данной работе результаты основываются на исследованиях [1–7] и могут быть использованы при компьютерном моделировании реальных динамических процессов и проектировании оптимальных навигационных и управляющих приборов для различных транспортных систем. Математические модели таких систем рассматриваются, например, в работах [1–12].

## 2. Формализация задачи

На заданном целочисленном промежутке времени  $\overline{0, T} = \{0, 1, \dots, T\}$  ( $T > 0$ ) рассматриваются  $n + 1$  управляемых объектов:  $n$  объектов  $I_i$ , управляемых преследователями  $P_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , и объект  $II$ , управляемый уклоняющимся  $E$ . Динамика каждого объекта  $I_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , описывается дискретным рекуррентным векторным уравнением вида

$$y^{(i)}(t+1) = f^{(i)}(t, y^{(i)}(t), u^{(i)}(t)), \quad (2.1)$$

а динамика объекта  $II$  описывается линейным дискретным рекуррентным уравнением

$$z(t+1) = C(t)z(t) + D(t)v(t). \quad (2.2)$$

Здесь  $t \in \overline{0, T-1}$ ;  $y^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{r_i}$  ( $y^{(i)}(0) = y_0^{(i)}$  фиксировано) и  $z(t) \in \mathbb{R}^s$  ( $z(0) = z_0$  фиксировано) суть фазовые векторы объектов  $I_i$  и  $II$  в момент времени  $t \in \overline{0, T}$  соответственно ( $r_i, s \in \mathbb{N}$ , для  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^k$  есть  $k$ -мерное векторное пространство векторов-столбцов);  $u^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$  и  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  суть управляющие воздействия (управления) преследователя  $P_i$  и уклоняющегося  $E$  соответственно, стесненные заданными ограничениями

$$u^{(i)}(t) \in U_1^{(i)} \subset \mathbb{R}^{p_i}, \quad v(t) \in V_1 \subset \mathbb{R}^q \quad (p_i, q \in \mathbb{N}); \quad (2.3)$$

для всех  $i \in \overline{1, n}$  и  $t \in \overline{0, T-1}$  каждая вектор-функция  $f^{(i)}: \overline{0, T-1} \times \mathbb{R}^{r_i} \times \mathbb{R}^{p_i} \rightarrow \mathbb{R}^{r_i}$  является непрерывной по совокупности переменных  $(y^{(i)}, u^{(i)})$ , а  $C(t)$  и  $D(t)$  суть действительные матрицы размера  $(s \times s)$  и  $(s \times q)$  соответственно; все множества  $U_1^{(i)}$  для всех  $i \in \overline{1, n}$  суть компакты и  $V_1$  есть выпуклый многогранник в пространствах  $\mathbb{R}^{p_i}$  и  $\mathbb{R}^q$  соответственно (здесь и далее под выпуклым многогранником понимается выпуклая оболочка конечного числа точек); для всех  $i \in \overline{1, n}$  и  $(t, y^{(i)}) \in \overline{0, T-1} \times \mathbb{R}^{r_i}$  каждое из множеств  $f(t, y^{(i)}, U_1^{(i)}) = \{f(t, y^{(i)}, u^{(i)}), u^{(i)} \in U_1^{(i)}\} \subset \mathbb{R}^{r_i}$  является выпуклым.

Опишем информационные возможности преследователей  $P_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , в процессе преследования-уклонения (адаптивного минимаксного управления процессом преследования объекта  $II$  объектами  $I_i$ ).

Предполагается, что для некоторого момента времени  $\vartheta \in \overline{1, T}$  и соответствующего ему целочисленного промежутка времени  $\overline{0, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$  в момент  $\vartheta$  в процессе преследования, базирующемся на соотношениях (2.1)–(2.3), каждым из преследователей  $P_i$  ( $i \in \overline{1, n}$ ) измеряются и запоминаются значения следующих величин:  $y^{(i)}(0) = y_0^{(i)}$  — начальный фазовый вектор объекта  $I_i$ ;  $u^{(i)}(\cdot) = \{u^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{0, \vartheta-1}}$  — история реализаций управления преследователя  $P_i$  на промежутке времени  $\overline{0, \vartheta}$ ;  $\omega^{(i)}(\cdot) = \{\omega^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{0, \vartheta}}$  ( $\omega^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ ;  $m_i \in \mathbb{N}$ ,  $m_i \leq s$ ) — история реализаций информационного сигнала  $J_i$  на промежутке времени  $\overline{0, \vartheta}$ , значения которого  $\omega^{(i)}(t)$  ( $\omega^{(i)}(0) = \omega_0^{(i)}$  — фиксировано) для всех  $t \in \overline{0, \vartheta}$  генерируются в соответствии со следующим дискретным векторным уравнением

$$\omega^{(i)}(t) = E^{(i)}(y^{(i)}(t))z(t) + F^{(i)}(t)\xi^{(i)}(t), \quad (2.4)$$

где  $\xi^{(i)}(t)$  есть ошибка (погрешность) измерений, удовлетворяющая заданному ограничению

$$\xi^{(i)}(t) \in \Xi_1^{(i)} \subset \mathbb{R}^{l_i} \quad (l_i \in \mathbb{N}). \quad (2.5)$$

Здесь для всех  $i \in \overline{1, n}$  и векторов  $y^{(i)} \in \mathbb{R}^{r_i}$ ,  $E^{(i)}(y^{(i)})$  и  $F^{(i)}(t)$  — действительные матрицы размера  $(m_i \times s)$  и  $(m_i \times l_i)$  соответственно, при этом предполагается, что для всех  $y^{(i)}$  ранг каждой матрицы  $E^{(i)}(y^{(i)})$  равен  $m_i$  — размерности вектора  $\omega^{(i)}(t)$ ; для каждого  $i \in \overline{1, n}$  множество  $\Xi_1^{(i)}$  есть выпуклый многогранник в пространстве  $\mathbb{R}^{l_i}$ .

Предполагается также, что в рассматриваемом процессе существует координатор  $P$ , который знает в каждый момент времени  $t \in \overline{0, T}$  всю информацию, доступную в совокупности всем преследователям  $P_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ . Причем координатор  $P$  обязан предоставлять каждому преследователю  $P_i$  все данные о фазовом векторе  $z(t)$  объекта  $II$ , которыми он располагает в момент времени  $t \in \overline{0, T}$ .

В течение процесса преследования координатору  $P$  и всем преследователям  $P_i$  известно множество  $Z(0) = Z_0 \subseteq Z^* \subset \mathbb{R}^s$  всех возможных состояний начального фазового вектора  $z(0) = z_0$  объекта  $II$ , которое совместимо (см. [3]) со всеми начальными информационными сигналами  $J_i : \omega_0^{(i)}$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , являющееся выпуклым многогранником в пространстве  $\mathbb{R}^s$ . Известны также соотношения (2.1)–(2.5), определяющие рассматриваемую дискретную динамическую систему, и выпуклый многогранник  $Z^* \subset \mathbb{R}^s$  такой, что для всех  $t \in \overline{0, T}$  фазовый вектор  $z(t) \in \mathbb{R}^s$  объекта  $II$ , формируемый согласно (2.2), (2.3), удовлетворяет ограничению

$$z(t) \in Z^* \subset \mathbb{R}^s. \quad (2.6)$$

Таким образом, координация преследователей  $P_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , заключается в том, что каждый преследователь  $P_i$  передает данные о состоянии управляемого им объекта  $I_i$  и получаемый им информационный сигнал  $J_i$  координатору  $P$ , который все их обрабатывает и, сформировав информационное множество (см. [2, 3, 6]) (данные о состоянии уклоняющегося  $E$ ), передает его каждому из преследователей  $P_i$ , которые на основе этого информационного множества и знания состояния объекта  $I_i$  могут формировать свое управление на шаг вперед.

Результат реализации процесса преследования оценивается расстоянием между объектом  $II$  и ближайшим к нему по части координат объектом  $I_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ; см. далее формулу (2.16).

В данном процессе предполагается, что уклоняющийся  $E$  может располагать полной информацией обо всех параметрах системы (2.1)–(2.5) и реализациях фазовых координат преследователей на промежутке времени  $\overline{0, T}$  и его цель прямо противоположна их цели.

Введем ряд определений, которые необходимы для строгой математической формализации задачи.

Для любых фиксированных  $k \in \mathbb{N}$  и  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$  ( $\tau \leq \vartheta$ ) через  $\mathbf{S}_k(\overline{\tau, \vartheta})$  будем обозначать метрическое пространство функций целочисленного аргумента  $\varphi : \overline{\tau, \vartheta} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , в котором метрика  $\rho_k$  задается соотношением

$$\rho_k(\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot)) = \max_{t \in \overline{\tau, \vartheta}} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_k,$$

а символом  $\text{compr}(\mathbf{S}_k(\overline{\tau, \vartheta}))$  будем обозначать множество всех непустых и компактных в смысле этой метрики подмножеств пространства  $\mathbf{S}_k(\overline{\tau, \vartheta})$ . Здесь  $\|\cdot\|_k$  есть евклидова норма в  $\mathbb{R}^k$ .

Используя ограничение (2.3), определим множество  $\mathbf{U}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}) \in \text{compr}(\mathbf{S}_{p_i}(\overline{\tau, \vartheta - 1}))$  всех допустимых программных управлений преследователя  $P_i$  на промежутке времени  $\overline{\tau, \vartheta}$  ( $\tau < \vartheta$ ) соотношением

$$\mathbf{U}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}) = \{u^{(i)}(\cdot) : \forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}, u^{(i)}(t) \in U_1^{(i)}\}$$

и определим через  $\mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{U}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta})$  множество всех допустимых программных управлений  $u(\cdot) = \{u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot), \dots, u^{(n)}(\cdot)\}$  координатора  $P$  на промежутке времени  $\overline{\tau, \vartheta}$ , где символом  $\prod_{i=1}^k$  будем обозначать прямое произведение  $k$  множеств.

Аналогичным образом, используя ограничения (2.3) и (2.5), определим множества  $\mathbf{V}(\overline{\tau, \vartheta}) \in \text{compr}(\mathbf{S}_q(\overline{\tau, \vartheta - 1}))$  и  $\Xi^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}) \in \text{compr}(\mathbf{S}_{i_i}(\overline{\tau + 1, \vartheta}))$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , всех допустимых программных управлений  $v(\cdot) = \{v(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$  уклоняющегося  $E$  и всех допустимых ошибок измерений  $\xi^{(i)}(\cdot) = \{\xi^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{\tau + 1, \vartheta}}$  информационного сигнала  $J_i$  на промежутке времени  $\overline{\tau, \vartheta}$  соответственно.

Для фиксированного  $i \in \overline{1, n}$  обозначим через  $\hat{\Omega}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}) \subset \mathbf{S}_{m_i}(\overline{\tau + 1, \vartheta})$  множество всех допустимых, в силу (2.1)–(2.5), реализаций  $\omega^{(i)}(\cdot) = \{\omega^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{\tau + 1, \vartheta}}$  информационного сигнала  $J_i$  на промежутке времени  $\overline{\tau, \vartheta}$  и обозначим через  $\hat{\Omega}(\overline{\tau, \vartheta}) = \prod_{i=1}^n \hat{\Omega}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta})$  множество всех допустимых наборов  $\omega(\cdot) = \{\omega^{(1)}(\cdot), \omega^{(2)}(\cdot), \dots, \omega^{(n)}(\cdot)\} \in \hat{\Omega}(\overline{\tau, \vartheta})$  реализаций информационных сигналов  $J_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , на промежутке времени  $\overline{\tau, \vartheta}$ .

Назовем набор  $w^{(i)}(\tau) = \{\tau, y^{(i)}(\tau), Z(\tau)\} \in \overline{0, \overline{T}} \times \mathbb{R}^{r_i} \times \text{compr}(\mathbb{R}^s)$  (где  $Z(\tau)$  есть множество всех допустимых состояний фазового вектора  $z(\tau) \in \mathbb{R}^s$  объекта  $II$  в момент времени  $\tau$ ,  $w^{(i)}(0) = w_0^{(i)} = \{0, y_0^{(i)}, Z_0\}$ ) и набор  $w(\tau) = \{\tau, y(\tau), Z(\tau)\} \in \overline{0, \overline{T}} \times \mathbb{R}^r \times \text{compr}(\mathbb{R}^s)$  ( $y(\tau) = \{y^{(1)}(\tau), y^{(2)}(\tau), \dots, y^{(n)}(\tau)\}$ ,  $r = \sum_{i=1}^n r_i$ ,  $w(0) = w_0 = \{0, y_0, Z_0\}$ ,  $w_0^* = \{0, y_0, Z_0^*\}$ ,  $y_0 = y(0) = \{y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \dots, y_0^{(n)}\}$ ) соответственно  $\tau$ -позицией преследователя  $P_i$  ( $i \in \overline{1, n}$ ) и  $\tau$ -позицией координатора  $P$  в системе (2.1)–(2.5), где непустое множество  $Z_0^*$  определяется соотношением

$$Z_0^* = \left\{ z_0: z_0 \in Z_0, \forall i \in \overline{1, n}, \exists \tilde{\xi}_0^{(i)} \in \Xi_1^{(i)}, \omega_0^{(i)} = C^{(i)}(y_0^{(i)})z_0 + D^{(i)}(0)\tilde{\xi}_0^{(i)} \right\}.$$

Для любых фиксированных  $i \in \overline{1, n}$  и  $\tau \in \overline{0, \overline{T}}$  определим также множества  $\hat{\mathbf{W}}^{(i)}(\tau) = \{\tau\} \times \mathbb{R}^{r_i} \times \text{compr}(\mathbb{R}^s)$  ( $\hat{\mathbf{W}}^{(i)}(0) = \hat{\mathbf{W}}_0^{(i)}$ ) и  $\hat{\mathbf{W}}(\tau) = \{\tau\} \times \mathbb{R}^r \times \text{compr}(\mathbb{R}^s)$  ( $\hat{\mathbf{W}}(0) = \hat{\mathbf{W}}_0$ ) всех допустимых  $\tau$ -позиций преследователя  $P_i$  и координатора  $P$  соответственно.

Далее, для фиксированных промежутка времени  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, \overline{T}}$  ( $\tau < \vartheta$ ), допустимых, согласно (2.1)–(2.5), реализаций  $\tau$ -позиции  $w(\tau) = \{\tau, y(\tau), Z(\tau)\} \in \hat{\mathbf{W}}(\tau)$ , управления  $u(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta})$  координатора  $P$  и информационного сигнала  $\omega(\cdot) \in \hat{\Omega}(\overline{\tau, \vartheta})$  координатора  $P$  обозначим через  $\mathbf{R}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot))$  множество всех пар  $(\tilde{z}(\tau), \tilde{v}(\cdot)) \in Z(\tau) \times \mathbf{V}(\overline{\tau, \vartheta})$  совместимых (см. [2, 3, 6]) с этой информацией на промежутке времени  $\overline{\tau, \vartheta}$ , которое определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{R}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) = \left\{ (\tilde{z}(\tau), \tilde{v}(\cdot)): (\tilde{z}(\tau), \tilde{v}(\cdot)) \in Z(\tau) \times \mathbf{V}(\overline{\tau, \vartheta}), \right. \\ \left. \omega^{(i)}(t) \in E^{(i)}(y^{(i)}(t))\tilde{z}(t) + F^{(i)}(t)\Xi_1^{(i)}, \forall i \in \overline{1, n}, \forall t \in \overline{\tau + 1, \vartheta} \right\}, \quad (2.7)$$

где через  $y^{(i)}(t) = y_t^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}, y^{(i)}(\tau), u^{(i)}(\cdot))$  и  $\tilde{z}(t) = z_t(\overline{\tau, \vartheta}, \tilde{z}(\tau), \tilde{v}(\cdot))$  обозначены решения соответственно систем (2.1) и (2.2) в момент времени  $t \in \overline{\tau + 1, \vartheta}$ , которые порождены парами  $(y^{(i)}(\tau), u^{(i)}(\cdot))$  и  $(\tilde{z}(\tau), \tilde{v}(\cdot))$  соответственно.

Будем называть множество

$$\mathbf{Z}_\vartheta^{(e)}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) = \left\{ z^{(e)}: z^{(e)} \in \mathbb{R}^s, \right. \\ \left. z^{(e)} = z_\vartheta(\overline{\tau, \vartheta}, z(\tau), v(\cdot)), (z(\tau), v(\cdot)) \in \mathbf{R}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) \right\} \quad (2.8)$$

информационным множеством координатора  $P$  (см. [2, 3, 5]) для процесса апостериорной минимаксной фильтрации в системе (2.1)–(2.5) на промежутке времени  $\overline{\tau, \vartheta}$ , соответствующим моменту времени  $\vartheta$  и набору  $(w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) \in \hat{\mathbf{W}}(\tau) \times \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta}) \times \hat{\Omega}(\overline{\tau, \vartheta})$ . Следует отметить, что по определению это множество есть множество всех допустимых реализаций фазового вектора объекта  $II$  в момент времени  $\vartheta$ , которые совместимы со всей информацией о рассматриваемой системе, имеющейся в распоряжении координатора  $P$  на промежутке времени  $\overline{\tau, \vartheta}$ .

Для фиксированных промежутка времени  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$  ( $\tau < \vartheta$ ),  $\tau$ -позиции  $w(\tau) = \{\tau, y(\tau), Z(\tau)\} \in \widehat{\mathbf{W}}(\tau)$  координатора  $P$  и его управления  $u(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta})$  введем следующие множества:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot)) = \left\{ \omega(\cdot): \omega(\cdot) \in \widehat{\mathbf{\Omega}}(\overline{\tau, \vartheta}), \omega^{(i)}(t) \in E^{(i)}(y^{(i)}(t))z(t) + F^{(i)}(t)\Xi_1^{(i)}, \right. \\ \left. \forall i \in \overline{1, n}, \forall t \in \overline{\tau+1, \vartheta}, (z(\tau), v(\cdot)) \in Z(\tau) \times \mathbf{V}(\overline{\tau, \vartheta}) \right\}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\tau, w(\tau), \vartheta, u(\cdot)) = \left\{ w(\vartheta): w(\vartheta) \in \widehat{\mathbf{W}}(\vartheta), w(\vartheta) = \{\vartheta, y(\vartheta), Z(\vartheta)\}, \right. \\ \left. Z(\vartheta) = \mathbf{Z}_{\vartheta}^{(e)}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)), \omega(\cdot) \in \mathbf{\Omega}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot)) \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $y^{(i)}(t) = y_t^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}, y^{(i)}(\tau), u^{(i)}(\cdot))$ ,  $z(t) = z_t(\overline{\tau, \vartheta}, z(\tau), v(\cdot))$ , и назовем их соответственно множеством всех допустимых информационных сигналов  $J$  на промежутке времени  $\overline{\tau, \vartheta}$  и множеством всех допустимых  $\vartheta$ -позиций координатора  $P$ , отвечающих  $\tau$ -позиции  $w(\tau)$  и управлению  $u(\cdot)$ .

Используя определения (2.7)–(2.10) и условия, оговоренные для системы (2.1)–(2.5), можно доказать (см. [6]), что для любого фиксированного промежутка времени  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$  ( $\tau < \vartheta$ ), для любой допустимой, в силу (2.1)–(2.5), реализации набора  $(w_0^*, u(\cdot), \omega(\cdot)) \in \widehat{\mathbf{W}}_0 \times \mathbf{U}(\overline{0, \vartheta}) \times \mathbf{\Omega}(\overline{0, \vartheta}, w_0^*, u(\cdot))$ , соответствующей промежутку времени  $\overline{0, \vartheta}$ , справедливы следующие соотношения, отражающие полугрупповые свойства для введенных множеств:

$$\mathbf{R}(\overline{0, \vartheta}, w_0^*, u(\cdot), \omega(\cdot)) = \mathbf{R}(\overline{\tau, \vartheta}, w_*(\tau), \tilde{u}(\cdot), \tilde{\omega}(\cdot)); \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Z}_{\vartheta}^{(e)}(\overline{0, \vartheta}, w_0^*, u(\cdot), \omega(\cdot)) = \mathbf{Z}_{\vartheta}^{(e)}(\overline{\tau, \vartheta}, w_*(\tau), \tilde{u}(\cdot), \tilde{\omega}(\cdot)); \quad (2.12)$$

$$\mathbf{\Omega}(\overline{0, \vartheta}, w_0^*, u(\cdot)) = \mathbf{\Omega}(\overline{\tau, \vartheta}, w_*(\tau), \tilde{u}(\cdot)); \quad (2.13)$$

$$\mathbf{W}(0, w_0^*, \vartheta, u(\cdot)) = \mathbf{W}(\tau, w_*(\tau), \vartheta, \tilde{u}(\cdot)). \quad (2.14)$$

Здесь для  $\tau$ -позиции  $w_*(\tau) = \{\tau, y_*(\tau), Z_*^{(e)}(\tau)\} \in \widehat{\mathbf{W}}(\tau)$  координатора  $P$  и его управления  $\tilde{u}(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta})$  должны выполняться следующие соотношения:

$$u_*(\cdot) = \{u_*^{(1)}(\cdot), u_*^{(2)}(\cdot), \dots, u_*^{(n)}(\cdot)\} \in \mathbf{U}(\overline{0, \tau});$$

$$y_*(\tau) = \{y_*^{(1)}(\tau), y_*^{(2)}(\tau), \dots, y_*^{(n)}(\tau)\};$$

$$y_*^{(i)}(\tau) = y_{\tau}^{(i)}(\overline{0, \tau}, y_0^{(i)}, u_*^{(i)}(\cdot));$$

$$Z_*^{(e)}(\tau) = \mathbf{Z}_{\tau}^{(e)}(\overline{0, \tau}, w_0^*, u_*(\cdot), \omega_*(\cdot)); \quad \omega_*(\cdot) \in \mathbf{\Omega}(\overline{0, \tau}, w_0^*, u_*(\cdot));$$

$$\tilde{u}(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta}); \quad \tilde{\omega}(\cdot) \in \widehat{\mathbf{\Omega}}(\overline{\tau, \vartheta}).$$

Пусть  $\mathbf{F}_{\tau, \vartheta}^-: \widehat{\mathbf{W}}(\tau) \times \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta}) \times \widehat{\mathbf{\Omega}}(\overline{\tau, \vartheta}) \rightarrow \widehat{\mathbf{W}}(\vartheta)$  — отображение, которое каждому набору  $(w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) \in \widehat{\mathbf{W}}(\tau) \times \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta}) \times \widehat{\mathbf{\Omega}}(\overline{\tau, \vartheta})$  ставит в соответствие  $\vartheta$ -позицию  $w^{(e)}(\vartheta) = \{\vartheta, y^{(e)}(\vartheta), Z^{(e)}(\vartheta)\} \in \widehat{\mathbf{W}}(\vartheta)$  координатора  $P$ , а именно:

$$w^{(e)}(\vartheta) = \{\vartheta, y^{(e)}(\vartheta), Z^{(e)}(\vartheta)\} = \mathbf{F}_{\tau, \vartheta}^-(w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)), \quad (2.15)$$

где  $y^{(e)}(\vartheta) = \{y^{(e,1)}(\vartheta), y^{(e,2)}(\vartheta), \dots, y^{(e,n)}(\vartheta)\}$ ,  $y^{(e,i)}(\vartheta) = y_{\vartheta}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}, y^{(i)}(\tau), u^{(i)}(\cdot))$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ;  $Z^{(e)}(\vartheta) = \mathbf{Z}_{\vartheta}^{(e)}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot))$  ( $w(\tau) = \{\tau, y(\tau), Z(\tau)\}$ ,  $w(0) = w_0^*$ ).

Тогда для координатора  $P$  можно сформулировать следующую многошаговую нелинейную задачу формирования его допустимых позиций в динамической системе (2.1)–(2.5).

**Задача 1.** Для любой фиксированной реализации набора  $(w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) \in \widehat{\mathbf{W}}(\tau, \vartheta) \times \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta}) \times \widehat{\mathbf{\Omega}}(\overline{\tau, \vartheta})$  ( $w(0) = w_0^*$ ), которая соответствует дискретной динамической системе (2.1)–(2.5) и известна координатору  $P$  в конце промежутка времени  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$  ( $\tau < \vartheta$ ), требуется

сформировать отображение  $\mathbf{F}_{\tau, \vartheta}^-$  как реализацию конечной последовательности только одношаговых операций (конкретный смысл этого будет ясен из приводимых далее построений).

Заметим, что информационное множество  $\mathbf{Z}_\vartheta^{(e)}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) \subset \mathbb{R}^s$  является основным элементом решения задачи апостериорной минимаксной нелинейной фильтрации (см. [5, 6]) и будет необходимо для формализации и решения рассматриваемой в статье задачи преследования.

Далее, для оценивания качества управления процессом преследования в динамической системе (2.1)–(2.5) на промежутке времени  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, \overline{\mathbf{T}}}$  координатором  $P$  введем функционал  $\gamma: \mathbf{2}^{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{W}}(\tau) \times \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta}) \times \hat{\Omega}(\overline{\tau, \vartheta}) \rightarrow \mathbb{R}^1$  следующим образом:

$$\gamma(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) = \min_{i \in \overline{1, n}} \max_{\{z\}_k \in \{Z^{(e)}(\vartheta)\}_k} \|\{y^{(i)}(\vartheta)\}_k - \{z\}_k\|_k, \quad (2.16)$$

где  $\{y^{(i)}(\vartheta)\}_k = \{y_\vartheta^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}, y^{(i)}(\tau), u^{(i)}(\cdot))\}_k$ ,  $\{Z^{(e)}(\vartheta)\}_k = \{\mathbf{Z}_\vartheta^{(e)}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot))\}_k$ . Здесь и далее для  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^l$  и  $X \subset \mathbb{R}^l$  выражения  $\{x\}_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)'$  и  $\{X\}_k = \{g: g \in \mathbb{R}^k, g = \{x\}_k, x \in X\} \subset \mathbb{R}^k$  ( $k \leq l$ ) есть  $k$ -проекция вектора  $x$  и  $k$ -проекция множества  $X$  соответственно;  $w(\tau) = \{\tau, y(\tau), Z(\tau)\} \in \hat{\mathbf{W}}(\tau)$  ( $w(0) = w_0^*$ ),  $y(\tau) = \{y^{(1)}(\tau), y^{(2)}(\tau), \dots, y^{(n)}(\tau)\} \in \mathbb{R}^r$ ;  $u(\cdot) = \{u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot), \dots, u^{(n)}(\cdot)\} \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta})$ .

Ниже введем ряд определений.

Допустимой стратегией адаптивного управления  $\mathbf{U}$  координатора  $P$  в процессе преследования-уклонения (2.1)–(2.5) на промежутке времени  $\overline{0, \overline{\mathbf{T}}}$  будем называть отображение  $\mathbf{U}: \hat{\mathbf{W}}(\tau) \rightarrow \mathbf{U}(\overline{\tau, \tau + 1})$ , которое ставит в соответствие каждому моменту времени  $\tau \in \overline{0, \overline{\mathbf{T}} - 1}$  и каждой допустимой реализации  $\tau$ -позиции  $w(\tau) = \{\tau, y(\tau), Z(\tau)\} \in \hat{\mathbf{W}}(\tau)$  ( $w(0) = w_0$ ) множество  $\mathbf{U}(w(\tau)) \subseteq \mathbf{U}(\overline{\tau, \tau + 1})$  управлений  $u(\tau) = \{u^{(1)}(\tau), u^{(2)}(\tau), \dots, u^{(n)}(\tau)\} \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \tau + 1}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{U}_1^{(i)}$  координатора  $P$ . Обозначим множество всех допустимых стратегий адаптивного управления координатора  $P$  для рассматриваемого процесса через  $\mathbf{U}_a^*$ .

Для любого  $\varepsilon > 0$  определим стратегию адаптивного  $\varepsilon$ -минимаксного управления координатора  $P$  как стратегию  $\mathbf{U}_\varepsilon^{(a)} = \mathbf{U}_\varepsilon^{(a)}(w(\tau)) \in \mathbf{U}_a^*$  ( $\tau \in \overline{0, \overline{\mathbf{T}} - 1}$ ,  $w(\tau) \in \hat{\mathbf{W}}(\tau)$ ,  $w(0) = w_0$ ), которая формально описывается следующими соотношениями:

1) для всех  $\tau \in \overline{0, \overline{\mathbf{T}} - 1}$  и  $\tau$ -позиций  $w_\varepsilon^{(e)}(\tau) = \{\tau, y_\varepsilon^{(e)}(\tau), Z_\varepsilon^{(e)}(\tau)\} \in \mathbf{W}(0, w_0^*, \tau, u_{\varepsilon, \tau}(\cdot))$  ( $w_\varepsilon^{(e)}(0) = w_0^*$ )

$$\mathbf{U}_\varepsilon^{(a)}(w_\varepsilon^{(e)}(\tau)) = \mathbf{U}_\varepsilon(w_\varepsilon^{(e)}(\tau)) \subseteq \mathbf{U}(\overline{\tau, \tau + 1}); \quad (2.17)$$

2) для всех  $\tau \in \overline{0, \overline{\mathbf{T}} - 1}$  и  $\tau$ -позиций  $w(\tau) = \{\tau, y(\tau), Z(\tau)\} \in \{\hat{\mathbf{W}}(\tau) \setminus \mathbf{W}(0, w_0^*, \tau, u_{\varepsilon, \tau}(\cdot))\}$  ( $w(0) \neq w_0^*$ )

$$\mathbf{U}_\varepsilon^{(a)}(w(\tau)) = \mathbf{U}(\overline{\tau, \tau + 1}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{U}_1^{(i)}. \quad (2.18)$$

Здесь  $w_0^* = \{0, y_0, Z_0^*\} \in \hat{\mathbf{W}}_0$ ; для допустимых на промежутке времени  $\overline{0, \tau}$  ( $\tau \geq 1$ ) реализаций управления  $u_{\varepsilon, \tau}(\cdot) = \{u_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{0, \tau - 1}} \in \mathbf{U}(\overline{0, \tau})$  координатора  $P$  и его информационного сигнала  $\omega_{\varepsilon, \tau}(\cdot) = \{\omega_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{1, \tau}} \in \hat{\Omega}(\overline{0, \tau}, w_0^*, u_{\varepsilon, \tau}(\cdot))$ , порожденных стратегией  $\mathbf{U}_\varepsilon^{(a)}$  координатора  $P$ , формирование его  $\tau$ -позиции  $w_\varepsilon^{(e)}(\tau) = \{\tau, y_\varepsilon^{(e)}(\tau), Z_\varepsilon^{(e)}(\tau)\}$  осуществляется согласно (2.15), а именно:

$$w_\varepsilon^{(e)}(\tau) = \{\tau, y_\varepsilon^{(e)}(\tau), Z_\varepsilon^{(e)}(\tau)\} = \mathbf{F}_{0, \tau}^-(w_0^*, u_{\varepsilon, \tau}(\cdot), \omega_{\varepsilon, \tau}(\cdot));$$

множество  $\mathbf{U}_\varepsilon(w_\varepsilon^{(e)}(\tau))$  должно удовлетворять следующему соотношению:

$$\mathbf{U}_\varepsilon(w_\varepsilon^{(e)}(\tau)) = \left\{ u_\varepsilon(\tau): u_\varepsilon(\tau) \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \tau + 1}), \right.$$

$$\left. \sup_{\omega(\tau+1) \in \Omega^{(1)}(\tau, u_\varepsilon(\tau))} \gamma(\overline{\tau, \tau + 1}, w_\varepsilon^{(e)}(\tau), u_\varepsilon(\tau), \omega(\tau + 1)) \leq c_\varepsilon^{(a)}(\overline{\tau, \tau + 1}) = c_\varepsilon^{(a)}(\overline{\tau, \tau + 1}) + \varepsilon \right\}, \quad (2.19)$$

где

$$c_\varepsilon^{(a)}(\overline{\tau, \tau + 1}) = \inf_{u(\tau) \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \tau + 1})} \sup_{\omega(\tau+1) \in \mathbf{\Omega}^{(1)}(\tau, u(\tau))} \gamma(\overline{\tau, \tau + 1}, w_\varepsilon^{(e)}(\tau), u(\tau), \omega(\tau + 1))$$

$$(\mathbf{\Omega}^{(1)}(\tau, u)) = \mathbf{\Omega}(\overline{\tau, \tau + 1}, w_\varepsilon^{(e)}(\tau), u). \quad (2.20)$$

Здесь значения функционала  $\gamma$  определяются по формуле (2.16), а число  $c_\varepsilon^{(a)}(\overline{\tau, \tau + 1})$  есть  $\varepsilon$ -минимаксный результат, соответствующий реализации стратегии адаптивного  $\varepsilon$ -минимаксного управления  $\mathbf{U}_\varepsilon^{(a)} \in \mathbf{U}_a^*$  координатора  $P$  на промежутке времени  $\overline{\tau, \tau + 1}$ . В силу описанных выше условий на элементы системы (2.1)–(2.5) и свойств функционала  $\gamma$  следует, что для всех моментов времени  $\tau \in \overline{0, \overline{T-1}}$  и  $\tau$ -позиций  $w(\tau) \in \hat{\mathbf{W}}(\tau)$  ( $w(\tau) = w_0$ ) множества  $\mathbf{U}_\varepsilon^{(a)}(w(\tau))$  являются непустыми.

Пусть реализации управления  $u_\varepsilon(\cdot) = \{u_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{0, \overline{T-1}}} \in \mathbf{U}(\overline{0, \overline{T}})$  координатора  $P$  и информационного сигнала  $\omega_\varepsilon(\cdot) = \{\omega_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{1, \overline{T}}} \in \mathbf{\Omega}(\overline{0, \overline{T}}, w_0^*, u_\varepsilon(\cdot))$  являются результатом использования стратегии адаптивного  $\varepsilon$ -минимаксного управления  $\mathbf{U}_\varepsilon^{(a)} \in \mathbf{U}_a^*$  на промежутке времени  $\overline{0, \overline{T}}$  и информационный сигнал  $\omega_\varepsilon(\overline{T}) \in \mathbf{\Omega}(\overline{T-1, \overline{T}}, w_\varepsilon^{(e)}(\overline{T-1}), u_\varepsilon(\overline{T-1}))$  удовлетворяет следующему соотношению:

$$\gamma(\overline{T-1, \overline{T}}, w_\varepsilon^{(e)}(\overline{T-1}), u_\varepsilon(\overline{T-1}), \omega_\varepsilon(\overline{T}))$$

$$= \max_{\omega(\overline{T}) \in \mathbf{\Omega}^{(1)}(\overline{T-1}, u_\varepsilon(\overline{T-1}))} \gamma(\overline{T-1, \overline{T}}, w_\varepsilon^{(e)}(\overline{T-1}), u_\varepsilon(\overline{T-1}), \omega(\overline{T})),$$

где  $w_\varepsilon^{(e)}(\overline{T-1})$  есть  $(\overline{T-1})$ -позиция координатора  $P$ , которая имеет вид:

$$w_\varepsilon^{(e)}(\overline{T-1}) = \{\overline{T-1}, y_\varepsilon^{(e)}(\overline{T-1}), Z_\varepsilon^{(e)}(\overline{T-1})\} \in \mathbf{W}(0, w_0^*, \overline{T-1}, u_{\varepsilon, \overline{T-1}}(\cdot));$$

$$u_{\varepsilon, \overline{T-1}}(\cdot) = \{u_{\varepsilon, \overline{T-1}}^{(1)}(\cdot), u_{\varepsilon, \overline{T-1}}^{(2)}(\cdot), \dots, u_{\varepsilon, \overline{T-1}}^{(n)}(\cdot)\} \in \mathbf{U}(\overline{0, \overline{T-1}}),$$

$$\forall i \in \overline{1, n} : u_{\varepsilon, \overline{T-1}}^{(i)}(\cdot) = \{u_\varepsilon^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{0, \overline{T-2}}} \in \mathbf{U}^{(i)}(\overline{0, \overline{T-1}});$$

$$y_\varepsilon^{(e)}(\overline{T-1}) = \{y_\varepsilon^{(e,1)}(\overline{T-1}), y_\varepsilon^{(e,2)}(\overline{T-1}), \dots, y_\varepsilon^{(e,n)}(\overline{T-1})\} \in \mathbb{R}^r,$$

$$\forall i \in \overline{1, n} : y_\varepsilon^{(e,i)}(\overline{T-1}) = y_{\overline{T-1}}^{(i)}(\overline{0, \overline{T-1}}, y_0^{(i)}, u_{\varepsilon, \overline{T-1}}^{(i)}(\cdot)) \in \mathbb{R}^{r_i};$$

$$Z_\varepsilon^{(e)}(\overline{T-1}) = \mathbf{Z}_{\overline{T-1}}^{(e)}(\overline{0, \overline{T-1}}, w_0^*, u_{\varepsilon, \overline{T-1}}(\cdot), \omega_{\varepsilon, \overline{T-1}}(\cdot)),$$

$$\omega_{\varepsilon, \overline{T-1}}(\cdot) = \{\omega_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{1, \overline{T-1}}} \in \mathbf{\Omega}(\overline{0, \overline{T-1}}, w_0^*, u_{\varepsilon, \overline{T-1}}(\cdot)).$$

Назовем число

$$c_\varepsilon^{(a)}(\overline{0, \overline{T}}) = \gamma(\overline{0, \overline{T}}, w_0^*, u_\varepsilon(\cdot), \omega_\varepsilon(\cdot)) \quad (2.21)$$

$\varepsilon$ -минимаксным результатом, соответствующим реализации стратегии адаптивного  $\varepsilon$ -минимаксного управления  $\mathbf{U}_\varepsilon^{(a)} \in \mathbf{U}_a^*$  координатора  $P$  на промежутке времени  $\overline{0, \overline{T}}$ .

На основании введенных выше определений можно сформулировать основную задачу адаптивного  $\varepsilon$ -минимаксного управления процессом преследования в дискретной динамической системе (2.1)–(2.5) с несколькими преследователями и неполной информацией.

**Задача 2.** Для начальной позиции  $w(0) = w_0 = \{0, y_0, Z_0\} \in \hat{\mathbf{W}}_0$  координатора  $P$  в дискретной динамической системе (2.1)–(2.5) и любого  $\varepsilon > 0$  требуется сформировать его стратегию адаптивного  $\varepsilon$ -минимаксного управления  $\mathbf{U}_\varepsilon^{(a)} \in \mathbf{U}_a^*$  процессом преследования и  $\varepsilon$ -минимаксный результат  $c_\varepsilon^{(a)}(\overline{0, \overline{T}})$ , соответствующий реализации этой стратегии на промежутке времени  $\overline{0, \overline{T}}$ , как реализацию конечной последовательности только одношаговых операций.

В следующем разделе данной статьи будут приведены описания общих схем решения сформулированных задач.

### 3. Общая схема решения задачи адаптивного управления процессом преследования

Зафиксируем промежуток времени  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$  ( $\tau < \vartheta$ ). Для фиксированных  $i \in \overline{1, n}$ , векторов  $y^{(i)} \in \mathbb{R}^{r_i}$ ,  $\omega^{(i)} \in \mathbb{R}^{m_i}$  и набора  $(t-1, Z) \in \overline{\tau, \vartheta-1} \times \mathbf{2}^{\mathbb{R}^s}$  введем согласно (2.1)–(2.5) следующие множества:

$$\mathbf{Y}^{(i)}(t-1, y^{(i)}) = \{\tilde{y}^{(i)}: \tilde{y}^{(i)} \in \mathbb{R}^{r_i}, \tilde{y}^{(i)} = f^{(i)}(t-1, y^{(i)}, U_1^{(i)})\}; \quad (3.1)$$

$$\mathbf{Z}(t-1, Z) = C(t-1)Z + D(t-1)V_1; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{H}^{(i)}(y^{(i)}, \omega^{(i)}) = Z^* \cap \{z: \omega^{(i)} \in E^{(i)}(y^{(i)})z + F^{(i)}(t)\Xi_1^{(i)}\}. \quad (3.3)$$

Для фиксированных  $\tau$ -позиции  $w(\tau) = \{\tau, \underline{y}(\tau), Z(\tau)\} \in \hat{\mathbf{W}}(\overline{1, n}, \tau)$  ( $w(0) = w_0 = \{0, y_0, Z_0\}$ ), реализаций управления  $u(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta})$  координатора  $P$  и сигнала  $\omega(\cdot) \in \hat{\mathbf{\Omega}}(\overline{\tau, \vartheta})$  ( $\omega(\tau) = \omega_\tau$ ) сконструируем согласно (2.1), (3.2) и (3.3)  $\vartheta$ -позицию  $\tilde{w}^{(e)}(\vartheta) = \{\vartheta, \tilde{y}^{(e)}(\vartheta), \tilde{Z}^{(e)}(\vartheta)\} \in \hat{\mathbf{W}}(\vartheta)$  координатора  $P$ , используя следующие рекуррентные формулы:

$$\tilde{y}^{(e,i)}(t) = f^{(i)}(t-1, \tilde{y}^{(e,i)}(t-1), u^{(i)}(t-1)), \quad t \in \overline{\tau+1, \vartheta}, \quad i \in \overline{1, n}, \quad (3.4)$$

где  $\tilde{y}^{(e)}(0) = \{y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \dots, y_0^{(n)}\}$ ,  $\tilde{y}^{(e)}(\tau) = \{y^{(1)}(\tau), y^{(2)}(\tau), \dots, y^{(n)}(\tau)\}$ ,  $\tilde{y}^{(e)}(t) = \{\tilde{y}^{(e,1)}(t), \tilde{y}^{(e,2)}(t), \dots, \tilde{y}^{(e,n)}(t)\}$ ,

$$\tilde{Z}^{(e)}(t) = \mathbf{Z}(t-1, \tilde{Z}^{(e)}(t-1), t) \cap Z^* \bigcap_{i=1}^n \mathbf{H}^{(i)}(\tilde{y}^{(e,i)}(t), \omega^{(i)}(t)), \quad t \in \overline{\tau+1, \vartheta}, \quad (3.5)$$

где  $\tilde{Z}^{(e)}(0) = \tilde{Z}_0^* = Z_0 \cap Z^* \bigcap_{i=1}^n \mathbf{H}^{(i)}(y_0^{(i)}, \omega_0^{(i)})$ ;  $\tilde{Z}^{(e)}(\tau) = Z(\tau) \cap Z^* \bigcap_{i=1}^n \mathbf{H}^{(i)}(y^{(i)}(\tau), \omega^{(i)}(\tau))$ ,  $\tau > 0$ .

Пусть для допустимой, согласно (2.1)–(2.5), реализации набора  $(w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) \in \hat{\mathbf{W}}(\tau) \times \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta}) \times \hat{\mathbf{\Omega}}(\overline{\tau, \vartheta})$  ( $w(\tau) = \{\tau, \underline{y}(\tau), Z(\tau)\} \in \hat{\mathbf{W}}(\tau)$ ,  $w(0) = w_0^* = \{0, y_0, Z_0^*\}$ ), соответствующего промежутку времени  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$  ( $\tau < \vartheta$ ), многошаговое отображение  $\mathbf{F}_{\overline{\tau, \vartheta}}$  конструируется согласно системе соотношений (3.2)–(3.5). Тогда, принимая во внимание (2.7)–(2.15), (3.2)–(3.5) и условия, которые оговорены для системы (2.1)–(2.5), можно доказать, подобно [6], что справедливо следующее соотношение:

$$w^{(e)}(\vartheta) = \mathbf{F}_{\overline{\tau, \vartheta}}(w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) = \tilde{w}^{(e)}(\vartheta), \quad (3.6)$$

где  $\tilde{w}^{(e)}(\vartheta) = \{\vartheta, \tilde{y}^{(e)}(\vartheta), \tilde{Z}^{(e)}(\vartheta)\} \in \hat{\mathbf{W}}(\vartheta)$  и  $\tilde{Z}^{(e)}(0) = \tilde{Z}_0^* = Z_0^* \neq \emptyset$ . Здесь информационное множество  $\mathbf{Z}_{\vartheta}^{(e)}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) = \tilde{Z}^{(e)}(\vartheta)$  непусто и является выпуклым компактным подмножеством пространства  $\mathbb{R}^s$ .

Соотношение (3.6) можно положить в основу конструктивных численных методов для реализации отображения  $\mathbf{F}_{\overline{\tau, \vartheta}}$  на промежутке времени  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$  ( $\tau < \vartheta$ ), т.е. для решения многошаговой задачи 1.

Зафиксируем промежуток времени  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$  ( $\tau < \vartheta$ ) и набор  $(t-1, Z(t-1)) \in \overline{\tau, \vartheta-1} \times \mathbf{2}^{\mathbb{R}^s}$ , где  $Z(t-1)$  есть выпуклый многогранник пространства  $\mathbb{R}^s$ . Пусть  $Z(t) = \mathbf{Z}(t-1, Z(t-1))$  формируется согласно (3.2). Из определения (3.2) и сделанных выше предположений следует, что для всех  $t \in \overline{\tau+1, \vartheta}$  множество  $Z(t)$  есть также выпуклый многогранник в пространстве  $\mathbb{R}^s$ . Тогда, если мы знаем все вершины многогранника  $Z(t)$ , то можно считать, что это множество полностью сформировано.

Предположим, что множество  $Z(t-1)$  уже построено.

Для  $t \in \overline{\tau+1, \vartheta}$  на основании (2.2) определим следующие множества:

$$\begin{aligned}\bar{Z}(t) &= C(t-1)Z(t-1); & \hat{Z}(t) &= C(t-1)(t-1)\Gamma_s(Z(t-1)); \\ \bar{X}(t) &= D(t-1)v(t-1)V_1; & \hat{X}(t) &= D(t-1)\Gamma_q(V_1).\end{aligned}$$

Тогда нетрудно показать, что справедливы следующие равенства:  $\Gamma_s(\bar{Z}(t)) = \Gamma_s(\text{co}_s \hat{Z}(t))$ ;  $\Gamma_s(\bar{X}(t)) = \Gamma_s(\text{co}_s \hat{X}(t))$  (здесь и ниже символом  $\Gamma_n(M)$  обозначается множество всех вершин многогранника  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а символом  $\text{co}_n M$  — его выпуклая оболочка).

Далее, пусть для фиксированного набора  $(t-1, Z(t-1)) \in \overline{\tau, \vartheta-1} \times \mathbf{2}^{\mathbb{R}^s}$ , где  $Z(t-1)$  есть выпуклый многогранник в пространстве  $\mathbb{R}^s$ , для  $t \in \overline{\tau+1, \vartheta}$  множество  $Z(t) = \mathbf{Z}(t-1, Z(t-1))$  сконструировано согласно рекуррентному соотношению (3.2) и множество  $\tilde{Z}(t)$  определено равенством  $\tilde{Z}(t) = \hat{Z}(t) + \hat{X}(t)$ . В [6] доказано, что справедливо равенство

$$Z(t) = \mathbf{Z}(t-1, Z(t-1)) = \text{co}_s \tilde{Z}(t) \quad (3.7)$$

и множество  $Z(t)$  есть выпуклый многогранник в пространстве  $\mathbb{R}^s$ .

Для фиксированных индекса  $i \in \overline{1, n}$  и вектора  $y^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{r_i}$  матрица  $E^{(i)}(y^{(i)}(t))$ , фигурирующая в (2.4), по предположению имеет ранг  $m_i$  ( $m_i \leq s$ ). Предположим, что  $m_i < s$  и пусть  $\bar{E}^{(i)}(y^{(i)}(t))$  есть матрица размера  $(m_i \times m_i)$ , соответствующая базисному минору матрицы  $E^{(i)}(y^{(i)}(t))$ . Без уменьшения общности можно предполагать, что минор, соответствующий матрице  $\bar{E}^{(i)}(y^{(i)}(t))$ , находится в верхнем левом углу матрицы  $E^{(i)}(y^{(i)}(t))$ , т.е. это означает, что первые  $m_i$  координат  $(z_1(t), z_2(t), \dots, z_{m_i}(t))$  вектора  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_{m_i}(t), z_{m_i+1}(t), \dots, z_s(t))' \in \mathbb{R}^s$  являются базисными переменными для векторного уравнения (2.4).

Тогда нетрудно показать справедливость равенства

$$\mathbf{H}^{(i)}(y^{(i)}(t), \omega^{(i)}(t)) = \text{co}_s \tilde{\mathbf{H}}^{(i)}(y^{(i)}(t), \omega^{(i)}(t)), \quad (3.8)$$

где для  $i \in \overline{1, n}$ ,  $t \in \overline{\tau+1, \vartheta}$ , любых фиксированных и допустимых векторов  $y^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{r_i}$  и  $\omega^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  множество  $\mathbf{H}^{(i)}(y^{(i)}(t), \omega^{(i)}(t))$  определяется согласно соотношению (3.3), а множество  $\tilde{\mathbf{H}}^{(i)}(y^{(i)}(t), \omega^{(i)}(t))$  определяется формулой

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}^{(i)}(y^{(i)}(t), \omega^{(i)}(t)) &= \left\{ \tilde{z}: \tilde{z} = (\bar{z}(t), \hat{z}^*(t))' \in \mathbb{R}^s, \bar{z} \in \left\{ [\bar{E}^{(i)}(t)]^{-1}(y^{(i)}(t))\omega^{(i)}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - [\bar{E}^{(i)}(t)]^{-1}(y^{(i)}(t))E^{(i)*}(y^{(i)}(t))\Gamma_{s-m_i}(Z_{s-m_i}^*) - [\tilde{E}^{(i)}(t)]^{-1}(y^{(i)}(t))F^{(i)}(t)\Gamma_{l_i}(\Xi_1^{(i)}) \right\}, \right. \\ &\quad \left. \hat{z}^*(t) \in \Gamma_{s-m_i}(Z_{s-m_i}^*), \quad m_i < s; \right. \\ &\quad \left. \tilde{z}(t) \in Z^* \cap \left\{ [\tilde{E}^{(i)}(t)]^{-1}(y^{(i)}(t))\omega^{(i)}(t) - [\tilde{E}^{(i)}(t)]^{-1}(y^{(i)}(t))F^{(i)}(t)\Gamma_{l_i}(\Xi_1^{(i)}) \right\}, \quad m_i = s \right\}; \\ \tilde{E}^{(i)}(y^{(i)}(t)) &= \left\{ \bar{E}^{(i)}(y^{(i)}(t)), \quad m_i < s; \quad E^{(i)}(y^{(i)}(t)), \quad m_i = s \right\}.\end{aligned}$$

Используя рекуррентные соотношения (3.4), (3.5) и соотношение (3.8), нетрудно показать индукцией по числу шагов  $n_{\overline{\tau, \vartheta}} = \vartheta - \tau$ , соответствующих промежутку времени  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, \overline{\Gamma}}$  ( $\tau < \vartheta$ ), справедливость следующего утверждения (см. [7]).

**Теорема 1.** Для фиксированных промежутка времени  $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$  ( $\tau < \vartheta$ ),  $\tau$ -позиции  $w(\tau) = \{\tau, y(\tau), Z(\tau)\} \in \hat{\mathbf{W}}(\tau)$  ( $w(0) = w_0^*$ ), где множество  $Z(\tau) = Z_\tau$  для любого  $\tau \in \overline{0, T-1}$  есть выпуклый многогранник в пространстве  $\mathbb{R}^s$ , реализации управления  $u(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \vartheta})$  координатора  $P$  и его информационного сигнала  $\omega(\cdot) \in \mathbf{\Omega}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot))$  ( $\omega(\tau) = \omega_\tau$ ) информационное множество процесса апостериорной минимаксной фильтрации для системы (2.1)–(2.5)  $\mathbf{Z}_\vartheta^{(e)}(\overline{\tau, \vartheta}, w(\tau), u(\cdot), \omega(\cdot)) = Z^{(e)}(\vartheta) = \tilde{Z}^{(e)}(\vartheta) \neq \emptyset$  ( $\tilde{Z}^{(e)}(0) = \tilde{Z}_0^* = Z_0^* \neq \emptyset$ ) есть выпуклый многогранник в пространстве  $\mathbb{R}^s$ .

Пусть для фиксированных  $i \in \overline{1, n}$ ,  $t \in \overline{\tau+1, \vartheta}$  и вектора  $y^{(i)}(t-1) \in \mathbb{R}^{r_i}$  множество  $Y^{(i)}(t) = \mathbf{Y}^{(i)}(t-1, y^{(i)}(t-1))$  сконструировано согласно рекуррентному соотношению (3.1). Тогда из сделанных выше предположений следует, что множество  $Y^{(i)}(t)$  есть выпуклый компакт в пространстве  $\mathbb{R}^{r_i}$ . Тогда (см., например, [13]) для любого  $\varepsilon > 0$  существует выпуклый многогранник  $Y_\varepsilon^{(i)}(t) \subseteq Y^{(i)}(t)$  в пространстве  $\mathbb{R}^{r_i}$  такой, что справедливо следующее неравенство:

$$\forall y^{(i)}(t) \in Y^{(i)}(t) \exists y_\varepsilon^{(i)}(t) \in Y_\varepsilon^{(i)}(t): \|y^{(i)}(t) - y_\varepsilon^{(i)}(t)\|_{r_i} \leq \varepsilon. \quad (3.9)$$

Зафиксируем начальную позицию  $w(0) = w_0 = \{0, y_0, Z_0\} \in \hat{\mathbf{W}}_0$  координатора  $P$ , где вектор  $y_0 \in \mathbb{R}^r$ , а множество  $Z_0 \in \text{comp}(\mathbb{R}^s)$  есть выпуклый многогранник в пространстве  $\mathbb{R}^s$ , число  $\varepsilon > 0$  и реализации управления  $u_\varepsilon(\cdot) = \{u_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{0, \tau-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0, \tau})$  координатора  $P$  и его информационного сигнала  $\omega_\varepsilon(\cdot) = \{\omega_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{1, \tau}} \in \mathbf{\Omega}(\overline{0, \tau}, w_0, u_\varepsilon(\cdot))$  на промежутке времени  $\overline{0, \tau} \subseteq \overline{0, T-1}$  ( $\tau > 0$ ).

На основании приведенных выше определений, построений и утверждений общую схему алгоритма решения задачи 2 формирования адаптивной  $\varepsilon$ -минимаксной стратегии управления в системе (2.1)–(2.5) и вычисления соответствующего  $\varepsilon$ -минимаксного результата можно представить в виде реализации следующей конечной последовательности только одношаговых операций.

**I.** Для  $t \in \overline{0, \tau}$  вычисляем следующие элементы решения:

1.1. Пусть  $\tilde{y}_\varepsilon^{(e)}(0) = \{\tilde{y}_\varepsilon^{(e,1)}(0), \tilde{y}_\varepsilon^{(e,2)}(0), \dots, \tilde{y}_\varepsilon^{(e,n)}(0)\} = y_0 = \{y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \dots, y_0^{(n)}\}$ ; если  $t = 0$ , то перейти на пункт **II**; иначе — перейти на пункт 1.2.

1.2. Вектор  $\tilde{y}_\varepsilon^{(e)}(t)$  вычисляем по рекуррентным формулам (3.4), используя вектор  $\tilde{y}_\varepsilon^{(e)}(t-1)$  и управление  $u_\varepsilon(t-1) \in \prod_{i=1}^n \mathbf{U}_1^{(i)}$  координатора  $P$ .

1.3. Вычисляем область достижимости  $\mathbf{Z}(t-1, \tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(t-1)) = Z(t) = \text{co}_s \tilde{Z}(t)$  при предположении, что множество  $Z(t-1) = \tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(t-1)$  есть выпуклый многогранник, который уже определен ( $\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(0) = Z_0^*$ ), т.е. известно множество  $\mathbf{\Gamma}_s(\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(t-1))$  всех его вершин (общая схема построения этого множества описывается в пункте **III** алгоритма). На основании изложенного выше, эта область достижимости может быть сконструирована с использованием следующей схемы.

1.3.1. Используя известные матрицы  $C(t-1)$  и  $D(t-1)$ , множества  $\mathbf{\Gamma}_s(\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(t-1)) = \{\tilde{z}^{(j)}(t-1)\}_{j \in \overline{1, m_{t-1}}}$  и  $\mathbf{\Gamma}_q(\mathbf{V}_1) = \{v^{(j)}(t-1)\}_{j \in \overline{1, m_q}}$  всех вершин многогранников  $\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(t-1)$  и  $\mathbf{V}_1$  соответственно, конструируем множества  $\tilde{Z}(t)$ ,  $\hat{X}(t)$  и  $\tilde{Z}(t)$ .

1.3.2. Пусть  $\tilde{Z}(t) = \{\tilde{z}^{(j)}(t)\}_{j \in \overline{1, \tilde{s}_t}}$  и для  $i \neq j$ :  $\tilde{z}^{(i)}(t) \neq \tilde{z}^{(j)}(t)$ ; тогда рассматриваем следующую задачу линейного программирования.

**Задача 3.** Для фиксированных  $j \in \overline{1, \tilde{s}_t}$  и набора переменных  $\lambda_k \in \mathbb{R}^1$ ,  $k \in \overline{1, \tilde{s}_t}$ ,  $k \neq j$ ,

требуется установить совместность следующей системы линейных соотношений:

$$\sum_{k \neq j} \lambda_k \tilde{z}^{(k)} = \tilde{z}^{(j)}, \quad \sum_{k \neq j} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0. \quad (3.10)$$

Эта задача может быть решена с помощью модифицированного симплекс-метода (см., например, [14]), который используется для задачи линейного программирования с ограничениями (3.10) и поиска минимума целевой функции  $\alpha: \mathbb{R}^{\tilde{s}_t-1} \rightarrow \mathbb{R}^1$  достаточно произвольного вида, например,  $\alpha(\lambda) = \sum_{k \neq j} \lambda_k$ , где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\tilde{s}_t})$ ,  $k \in \overline{1, \tilde{s}_t}$ .

Отметим, что такой выбор целевой функции значительно упрощает проверку совместности ограничений (3.10) на первом шаге модифицированного симплекс-метода. Причем из свойств системы (3.10) следует, что если она совместна, то точка  $\tilde{z}^{(j)}(t)$  не является вершиной многогранника  $\text{co}_s \tilde{Z}(t)$ ; в противном случае имеем  $\tilde{z}^{(j)}(t) \in \Gamma_s(\text{co}_s \tilde{Z}(t))$ .

Тогда, решая задачу 3 для всех значений параметра  $j \in \overline{1, \tilde{s}_t}$ , найдем все вершины многогранника  $Z(t) = \mathbf{Z}(t-1, \tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(t-1), t)$ , так как в силу (3.7) имеет место равенство  $\Gamma_s(Z(t)) = \Gamma_s(\text{co}_s \tilde{Z}(t))$ .

**II.** Для фиксированных  $i \in \overline{1, n}$ ,  $\tilde{y}_\varepsilon^{(e,i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  ( $\tilde{y}_\varepsilon^{(e,i)}(0) = y_0^{(i)}$ ),  $\omega_\varepsilon^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  ( $\omega_\varepsilon^{(i)}(0) = \omega_0^{(i)}$ ) и  $t \in \overline{0, \tau}$  вычисляем множество  $\tilde{\mathbf{H}}^{(i)}(\tilde{y}_\varepsilon^{(e,i)}(t), \omega_\varepsilon^{(i)}(t))$  в соответствии со схемой, которая подробно описана в [7].

**III.** Используя модифицированные рекуррентные формулы (3.5), вычисляем множество

$$\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(t) = \{Z_0 \cap \tilde{\mathbf{H}}(y_0, \omega_0), t=0; \text{co}_s \tilde{Z}(t) \cap \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{y}_\varepsilon^{(e)}(t), \omega_\varepsilon(t)), t \in \overline{1, \tau}\} \quad (3.11)$$

и в итоге, с учетом теоремы 1, конструируем информационное множество  $\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(\tau) = Z_\varepsilon^{(e)}(\tau) = \mathbf{Z}_\tau^{(e)}(\overline{0, \tau}, w_0, u_\varepsilon(\cdot), \omega_\varepsilon(\cdot))$  процесса апостериорной минимаксной фильтрации для системы (2.1)–(2.5), которое является основным элементом решения задачи 1. Процесс конструирования множества  $\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(\tau)$  реализуем следующим образом:

3.1. Используя множество  $\Gamma_s(Z_0) = \{z^{(j)}(0)\}_{j \in \overline{1, s_0}}$  или  $\Gamma_s(Z(t)) = \Gamma_s(\text{co}_s \tilde{Z}(t)) = \{\tilde{z}^{(j)}(t)\}_{j \in \overline{1, s_t}}$  ( $t \in \overline{1, \tau}$ ) всех вершин многогранника  $Z_0$  или  $\text{co}_s \tilde{Z}(t) = \mathbf{Z}(t-1, \tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(t-1)) = Z(t)$  соответственно, которое известно к началу выполнения этого пункта, вычисляем крайние опорные гиперплоскости соответствующего многогранника.

В связи с этим напомним, что опорной гиперплоскостью выпуклого многогранника  $X \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) называется гиперплоскость вида  $\{x: x \in \mathbb{R}^n, (a, x)_n = b\}$ , где  $a \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ,  $(a, x)_n \leq b$  для всех  $x \in X$  и  $(a, x)_n = b$  хотя бы для одного  $x \in X$ . Если опорная гиперплоскость содержит  $n$  аффинно-независимых [13] точек множества  $X$ , то она называется крайней опорной гиперплоскостью этого множества.

3.2. Используя сконструированные гиперплоскости многогранника  $Z_0$  или  $\text{co}_s \tilde{Z}(t)$  ( $t \in \overline{1, \tau}$ ) и  $\text{co}_s \Gamma_s(\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{y}_\varepsilon^{(e)}(t), \omega_\varepsilon(t)))$  ( $t \in \overline{0, \tau}$ ), находим общее решение системы неравенств, состоящей из всех неравенств, порожденных крайними опорными гиперплоскостями этих многогранников, соответствующих фиксированному моменту времени  $t \in \overline{0, \tau}$ , которое описывает в частном случае множество  $\Gamma_s(\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(t))$  всех вершин многогранника  $\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(t)$ .

В результате реализации предыдущих пунктов для всех  $t \in \overline{0, \tau}$  вычисляется  $\tau$ -позиция  $w_\varepsilon^{(e)}(\tau) = \{\tau, y_\varepsilon^{(e)}(\tau), Z_\varepsilon^{(e)}(\tau)\} \in \mathbf{W}(\overline{0, \tau}, w_0^*, u_\varepsilon(\cdot))$  координатора  $P$ , где  $y_\varepsilon^{(e)}(\tau) = \tilde{y}_\varepsilon^{(e)}(\tau)$  и  $Z_\varepsilon^{(e)}(\tau) = \text{co}_s \Gamma_s(\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(\tau)) = \mathbf{Z}_\tau^{(e)}(\overline{0, \tau}, w_0^*, u_\varepsilon(\cdot), \omega_\varepsilon(\cdot))$  есть информационное множество процесса апостериорной минимаксной фильтрации для дискретной динамической системы (2.1)–(2.5).

Следует отметить, что это есть множество всех допустимых реализаций фазовых векторов  $z(\tau) \in Z_\varepsilon^{(e)}(\tau)$  объекта  $II$  в момент времени  $\tau$ , которые совместимы со всей информацией об этой системе, известной координатору  $P$  на промежутке времени  $\overline{0, \tau}$ .

**IV.** В этом пункте вычисляются все параметры стратегии адаптивного  $\varepsilon$ -минимаксного управления  $\mathbf{U}_\varepsilon^{(a)} = \mathbf{U}_\varepsilon^{(a)}(w(\tau)) \in \mathbf{U}^*$  координатора  $P$  для фиксированного момента времени  $\tau \in \overline{0, T-1}$ .

Эта процедура реализуется следующим образом:

4.1. Пусть для  $i \in \overline{1, n}$  и  $\tilde{y}_\varepsilon^{(e,i)}(\tau) \in \mathbb{R}^{r_i}$  множество  $Y^{(i)}(\tau+1) = \mathbf{Y}^{(i)}(\tau, \tilde{y}_\varepsilon^{(e,i)}(\tau))$  определяется согласно (3.1); вычисляем его, используя, например, методы из [2]. Заметим, что это есть множество всех допустимых реализаций фазовых векторов  $y^{(i)}(\tau+1) \in Y^{(i)}(\tau+1)$  объекта  $I_i$  в момент времени  $\tau+1$ . Тогда в силу (3.9) для любого  $\varepsilon > 0$  существует выпуклый многогранник  $Y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1) \subseteq Y^{(i)}(\tau+1)$  в пространстве  $\mathbb{R}^{r_i}$ , такой, что

$$\forall y^{(i)}(\tau+1) \in Y^{(i)}(\tau+1) \exists y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1) \in Y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1):$$

$$\|y^{(i)}(\tau+1) - y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\|_{r_i} \leq \varepsilon, \quad (3.12)$$

и пусть вычислено множество  $\mathbf{\Gamma}_{r_i}(Y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)) = \{y_\varepsilon^{(i,j)}(\tau+1)\}_{j \in \overline{1, r_i, \tau+1}} \subset \mathbb{R}^{r_i}$  всех его вершин, где для  $k \neq j$ :  $y_\varepsilon^{(i,k)}(\tau+1) \neq y_\varepsilon^{(i,j)}(\tau+1)$ . Используя это множество и процедуру, которая аналогична реализации пункта 1.3.2, вычисляем множество  $\mathbf{\Gamma}_k(\{Y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\}_k)$  всех вершин многогранника  $\{Y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\}_k \in \text{comp}(\mathbb{R}^k)$  и множество всех его опорных гиперплоскостей.

Тогда множество  $\{Y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\}_k$  описывается следующей системой линейных неравенств:

$$M_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\{y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\}_k \leq g_\varepsilon^{(i)}(\tau+1), \quad \{y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\}_k \in \mathbb{R}^k, \quad (3.13)$$

соответствующей множеству всех его крайних опорных гиперплоскостей. Здесь  $M_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)$  — действительная матрица размера  $(\tilde{k}_{i, \tau+1} \times k)$ ,  $\tilde{k}_{i, \tau+1} \in \mathbb{N}$  — число всех его крайних опорных гиперплоскостей и  $g_\varepsilon^{(i)}(\tau+1) \in \mathbb{R}^{\tilde{k}_{i, \tau+1}}$  — вектор свободных членов.

4.2. Используя известные матрицы  $C(\tau)$  и  $D(\tau)$ , множества  $\mathbf{\Gamma}_s(\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(\tau))$  и  $\mathbf{\Gamma}_q(V_1)$  всех вершин многогранников  $\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(\tau)$  и  $V_1$  соответственно, конструируем множества  $\tilde{Z}(\tau+1) = C(\tau)\mathbf{\Gamma}_s(\tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(\tau))$ ,  $\hat{X}(\tau+1) = D(\tau)\mathbf{\Gamma}_q(V_1)$  и  $\tilde{Z}(\tau+1) = \tilde{Z}(\tau+1) + \hat{X}(\tau+1)$ .

Пусть  $\tilde{Z}(\tau+1) = \{\tilde{z}^{(j)}(\tau+1)\}_{j \in \overline{1, \tilde{s}_{\tau+1}}}$  и  $\tilde{z}^{(i)}(\tau+1) \neq \tilde{z}^{(j)}(\tau+1)$  для  $i \neq j$ ; тогда, решая задачу 3 для этого множества и для всех значений параметра  $j \in \overline{1, \tilde{s}_{\tau+1}}$ , найдем все вершины многогранника  $Z(\tau+1) = \mathbf{Z}(\tau, \tilde{Z}_\varepsilon^{(e)}(\tau))$ , учитывая, что из соотношения (3.7) следует справедливость равенства  $\mathbf{\Gamma}_s(Z(\tau+1)) = \mathbf{\Gamma}_s(\text{co}_s \tilde{Z}(\tau+1))$ .

4.3. Используя множество  $\mathbf{\Gamma}_s(Z(\tau+1)) = \{z^{(j)}(\tau+1)\}_{j \in \overline{1, s_{\tau+1}}}$  ( $z^{(i)}(\tau+1) \neq z^{(j)}(\tau+1)$  для  $i \neq j$ ) всех вершин многогранника  $Z(\tau+1)$ , сформированного в предыдущем пункте, вычисляем множество  $\mathbf{\Gamma}_k(\{Z(\tau+1)\}_k)$  всех вершин многогранника  $\{Z(\tau+1)\}_k \subset \mathbb{R}^k$  и при фиксированном  $i \in \overline{1, n}$  для каждого  $j \in \overline{1, k_{\tau+1}}$  рассмотрим функционалы  $\delta_{ij}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ , значения которых для любого вектора  $y \in \mathbb{R}^k$  описываются формулой

$$\delta_{ij}(y) = \|y - \{\tilde{z}^{(j)}(\tau+1)\}_k\|_k, \quad j \in \overline{1, k_{\tau+1}}.$$

4.4. Вводим дополнительную переменную  $\tilde{c}^{(i)} \in \mathbb{R}^1$  и, используя функционалы  $\delta_{ij}$ ,  $j \in \overline{1, k_{\tau+1}}$ , и соотношение (3.13), формируем систему выпуклых и линейных неравенств

$$\delta_{ij}(\{y^{(i)}\}_k) \leq \tilde{c}^{(i)}, \quad j \in \overline{1, k_{\tau+1}}, \quad M_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\{y^{(i)}\}_k \leq g_\varepsilon^{(i)}(\tau+1), \quad \tilde{c}^{(i)} \in \mathbb{R}^1,$$

которую можно также представить в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)_{|k+1} &= \left\{ \tilde{y}_{|k+1}^{(i)} : \tilde{y}_{|k+1}^{(i)} = (\{y^{(i)}\}_k, \tilde{c}^{(i)})' \in \mathbb{R}^{k+1}, \right. \\ &\left. \left( \sum_{n=1}^k (y_n^{(i)} - \tilde{z}_n^{(j)}(\tau+1))^2 \right)^{1/2} - \tilde{c}^{(i)} \leq 0, \quad j \in \overline{1, k_{\tau+1}}, \right. \\ &\left. M_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\{y^{(i)}\}_k \leq g_\varepsilon^{(i)}(\tau+1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

4.5. Для каждого индекса  $i \in \overline{1, n}$  рассматриваем  $i$ -ю задачу минимизации линейного функционала

$$\beta(\tilde{y}_{|k+1}^{(i)}) = \tilde{c}^{(i)} \longrightarrow \min$$

при линейных и квадратичных ограничениях (3.14).

Каждую из этих задач можно решить, например, используя алгоритм Зойтендейка (случай нелинейных ограничений-неравенств) (см., например, [14]).

Пусть  $\{\tilde{y}_\varepsilon^{(e,i)}(\tau+1)\}_{|k+1} = (\tilde{y}_{\varepsilon,1}^{(e,i)}(\tau+1), \tilde{y}_{\varepsilon,2}^{(e,i)}(\tau+1), \dots, \tilde{y}_{\varepsilon,k}^{(e,i)}(\tau+1), \tilde{c}_{\varepsilon}^{(a,i)}(\overline{\tau, \tau+1}))' \in \tilde{Y}_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)_{|k+1}$  есть решение  $i$ -й задачи, которое удовлетворяет соотношению

$$\tilde{c}_{\varepsilon}^{(a,i)}(\overline{\tau, \tau+1}) = \min_{\tilde{y}_{|k+1}^{(i)} \in \tilde{Y}_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)_{|k+1}} \tilde{c}^{(i)},$$

и вектор  $\{\tilde{y}_\varepsilon^{(e)}(\tau+1)\}_k = \left\{ \{\tilde{y}_\varepsilon^{(e,1)}(\tau+1)\}_k, \{\tilde{y}_\varepsilon^{(e,2)}(\tau+1)\}_k, \dots, \{\tilde{y}_\varepsilon^{(e,n)}(\tau+1)\}_k \right\} \in \prod_{i=1}^n \{Y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\}_k$  формируем из решения всех  $n$  задач.

Вычисляем также следующее число

$$\tilde{c}_{\varepsilon}^{(a)}(\overline{\tau, \tau+1}) = \min_{i \in \overline{1, n}} \tilde{c}_{\varepsilon}^{(a,i)}(\overline{\tau, \tau+1}). \quad (3.15)$$

Тогда на основании сформированных ранее множеств  $\{Y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\}_k \neq \emptyset$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , используя теорему 1, соотношения (2.11)–(2.14), (2.16), (2.19)–(2.21), (3.6), (3.7), (3.9) и (3.11)–(3.15), можно доказать справедливость следующих соотношений:

$$\begin{aligned} &\min_{i \in \overline{1, n}} \min_{y \in \{Y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\}_k} \max_{j \in \overline{1, k_{\tau+1}}} \delta_{ij}(y) \\ &= \min_{i \in \overline{1, n}} \max_{j \in \overline{1, k_{\tau+1}}} \delta_{ij}(\{\tilde{y}_\varepsilon^{(e,i)}(\tau+1)\}_k) = \min_{i \in \overline{1, n}} \tilde{c}_{\varepsilon}^{(a,i)}(\overline{\tau, \tau+1}) \\ &= \tilde{c}_{\varepsilon}^{(a)}(\overline{\tau, \tau+1}) = \min_{i \in \overline{1, n}} \min_{y \in \{Y_\varepsilon^{(i)}(\tau+1)\}_k} \max_{z \in \{Z(\tau+1)\}_k} \|y - z\|_k \\ &= \min_{i \in \overline{1, n}} \max_{z \in \{Z(\tau+1)\}_k} \|\{\tilde{y}_\varepsilon^{(e,i)}(\tau+1)\}_k - z\|_k \\ &\leq \min_{i \in \overline{1, n}} \min_{y \in \{Y^{(i)}(\tau+1)\}_k} \max_{z \in \{Z(\tau+1)\}_k} \|y - z\|_k + \varepsilon \\ &= \min_{u(\tau) \in \mathbf{U}(\overline{1, n, \tau, \tau+1})} \max_{\omega(\tau+1) \in \mathbf{\Omega}^{(1)}(u(\tau))} \gamma(\overline{1, n, \tau, \tau+1}, w_\varepsilon^{(e)}(\tau), u(\tau), \omega(\tau+1)) + \varepsilon \\ &= c_\varepsilon^{(a)}(\overline{1, n, \tau, \tau+1}) + \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $\tilde{y}_\varepsilon^{(e,i)}(\tau+1) = y_{\tau+1}^{(i)}(\overline{\tau, \tau+1}, y_\varepsilon^{(e,i)}(\tau), \tilde{u}_\varepsilon^{(e,i)}(\tau))$ ,  $\Omega^{(1)}(u(\tau)) = \Omega(\overline{\tau, \tau+1}, w_\varepsilon^{(e)}(\tau), u(\tau))$ .

Используя этот алгоритм с пункта **I** до пункта **IV**, для всех моментов времени  $\tau \in \overline{0, T-1}$  и для всех  $\tau$ -позиций  $w_\varepsilon^{(e)}(\tau) = \{\tau, y_\varepsilon^{(e)}(\tau), Z_\varepsilon^{(e)}(\tau)\} \in \hat{\mathbf{W}}(\tau)$  формируем следующие множества:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_\varepsilon(w_\varepsilon^{(e)}(\tau)) &= \{\tilde{u}_\varepsilon(\tau): \tilde{u}_\varepsilon(\tau) = \{\tilde{u}_\varepsilon^{(1)}(\tau), \tilde{u}_\varepsilon^{(2)}(\tau), \dots, \tilde{u}_\varepsilon^{(n)}(\tau)\} \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \tau+1}), \\ \forall i \in \overline{1, n}, \{\tilde{y}_\varepsilon^{(e,i)}(\tau+1)\}_k &= \{f^{(i)}(\tau, y_\varepsilon^{(e,i)}(\tau), \tilde{u}_\varepsilon^{(i)}(\tau))\}_k, \tau \in \overline{0, T-1}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  сформируем стратегию управления  $\tilde{\mathbf{U}}_\varepsilon^{(a)} = \tilde{\mathbf{U}}_\varepsilon^{(a)}(w(\tau)) \in \mathbf{U}^*$  ( $\tau \in \overline{0, T-1}$ ,  $w(\tau) \in \hat{\mathbf{W}}(\tau)$ ,  $w(0) = w_0$ ) координатора  $P$  на промежутке времени  $\overline{0, T}$ , которая формально описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} 1) \text{ для всех } \tau \in \overline{0, T-1} \text{ и } \tau\text{-позиций } w_\varepsilon^{(e)}(\tau) &= \{t, y_\varepsilon^{(e)}(\tau), Z_\varepsilon^{(e)}(\tau)\} \in \mathbf{W}(0, w_0^*, \tau, \tilde{u}_{\varepsilon, \tau}(\cdot)) \\ (w_\varepsilon^{(e)}(0) = w_0^*) & \\ \tilde{\mathbf{U}}_\varepsilon^{(a)}(w_\varepsilon^{(e)}(\tau)) &= \tilde{\mathbf{U}}_\varepsilon(w_\varepsilon^{(e)}(\tau)) \subseteq \mathbf{U}(\overline{\tau, \tau+1}); \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ для всех } \tau \in \overline{0, T-1} \text{ и } \tau\text{-позиций } w(\tau) &= \{\tau, y(\tau), Z(\tau)\} \in \{\hat{\mathbf{W}}(\tau) \setminus \mathbf{W}(0, w_0, \tau, \tilde{u}_{\varepsilon, \tau}(\cdot))\} \\ (w(0) \neq w_0^*) & \\ \tilde{\mathbf{U}}_\varepsilon^{(a)}(w(\tau)) &= \mathbf{U}(\overline{\tau, \tau+1}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где  $\tilde{u}_{\varepsilon, \tau}(\cdot) = \{\tilde{u}_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{0, \tau-1}}: \forall t \in \overline{0, \tau-1}, \tilde{u}_\varepsilon(t) \in \tilde{\mathbf{U}}_\varepsilon(w_\varepsilon^{(e)}(t))$ .

Пусть набор  $(\tilde{u}_\varepsilon(\cdot), \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot)) \in \mathbf{U}(\overline{0, T-1}) \times \Omega(\overline{0, T-1}, w_0^*, \tilde{u}_\varepsilon(\cdot))$ , состоящий из реализаций управления  $\tilde{u}_\varepsilon(\cdot)$  координатора  $P$  и его информационного сигнала  $\tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot)$ , является результатом использования этой стратегии на промежутке времени  $\overline{0, T-1}$  и соответственно порождает  $\{T-1\}$ -позицию  $w_\varepsilon^{(e)}(T-1) = \{T-1, y_\varepsilon^{(e)}(T-1), Z_\varepsilon^{(e)}(T-1)\} = \mathbf{F}_{\overline{0, T-1}}(w_0^*, \tilde{u}_\varepsilon(\cdot), \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot))$  координатора  $P$ . Тогда путем реализации пункта 4.5 данного алгоритма на промежутке времени  $\overline{T-1, T}$  для  $(T-1)$ -позиции  $w_\varepsilon^{(e)}(T-1)$  координатора  $P$  вычисляем следующее число:

$$\tilde{c}_\varepsilon^{(a)}(\overline{0, T}) = \tilde{c}_\varepsilon^{(a)}(\overline{T-1, T}) = \min_{i \in \overline{1, n}} \tilde{c}_\varepsilon^{(a,i)}(\overline{T-1, T}). \quad (3.20)$$

Из приведенного выше алгоритма и соотношений (2.15)–(2.21), (3.14)–(3.20) следует справедливость следующего утверждения, которое является основным результатом данной статьи.

**Теорема 2.** Для начальной позиции  $w(0) = w_0 = \{0, y_0, Z_0\} \in \hat{\mathbf{W}}_0$  координатора  $P$  в дискретной динамической системе (2.1)–(2.5) и любого  $\varepsilon > 0$  его стратегия управления  $\tilde{\mathbf{U}}_\varepsilon^{(a)} \in \mathbf{U}^*$  на промежутке времени  $\overline{0, T}$  будет стратегией адаптивного  $\varepsilon$ -минимаксного управления для задачи 2, т.е.  $\tilde{\mathbf{U}}_\varepsilon^{(a)} = \mathbf{U}_\varepsilon^{(a)} \in \mathbf{U}^*$ , и число  $\tilde{c}_\varepsilon^{(a)}(\overline{0, T})$  есть  $\varepsilon$ -минимаксный результат для этой задачи, т.е.  $\tilde{c}_\varepsilon^{(a)}(\overline{0, T}) = c_\varepsilon^{(a)}(\overline{0, T})$ , который соответствует реализации этой стратегии на промежутке времени  $\overline{0, T}$  для процесса преследования, и оба эти элемента конструируются путем реализации конечной последовательности только одношаговых операций.

Отметим также, что для любого  $\varepsilon > 0$ , для реализаций управления  $u_\varepsilon(\cdot) = \{u_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0, T})$  координатора  $P$  и его информационного сигнала  $\omega_\varepsilon(\cdot) = \{\omega_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{1, T}} \in \Omega(\overline{0, T}, w_0^*, u_\varepsilon(\cdot))$ , которые являются результатом использования координатором  $P$  стратегии адаптивного  $\varepsilon$ -минимаксного управления  $\mathbf{U}_\varepsilon^{(a)} \in \mathbf{U}^*$  на промежутке времени  $\overline{0, T}$ , для всех моментов времени  $\tau \in \overline{0, T-1}$  в силу (2.12) и (3.16) справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{Z}_{\tau+1}^{(e)}(\overline{0, \tau+1}, w_0^*, u_{\varepsilon, \tau+1}(\cdot), \omega_{\varepsilon, \tau+1}(\cdot)) = \mathbf{Z}_{\tau+1}^{(e)}(\overline{\tau, \tau+1}, w_\varepsilon^{(e)}(\tau), u_\varepsilon(\tau), \omega_\varepsilon(\tau+1));$$

$$\begin{aligned}
\gamma(\overline{\tau, \tau + 1}, w_\varepsilon^{(e)}(\tau), u_\varepsilon(\tau), \omega_\varepsilon(\tau + 1)) &\leq \min_{i \in \overline{1, n}} \tilde{c}_\varepsilon^{(a, i)}(\overline{\tau, \tau + 1}) = c_\varepsilon^{(a)}(\overline{\tau, \tau + 1}) \\
&\leq \max_{\omega(\tau+1) \in \Omega(\overline{\tau, \tau+1}, w_0^*, u_\varepsilon(\tau))} \gamma(\overline{\tau, \tau + 1}, w_\varepsilon^{(e)}(\tau), u_\varepsilon(\tau), \omega(\tau + 1)) + \varepsilon \\
&= \min_{u(\tau) \in \mathbf{U}(\overline{\tau, \tau+1})} \max_{\omega(\tau+1) \in \Omega^{(1)}(\tau, u(\tau))} \gamma(\overline{\tau, \tau + 1}, w_\varepsilon^{(e)}(\tau), u(\tau), \omega(\tau + 1)) + \varepsilon \\
&= c_\varepsilon^{(a)}(\overline{\tau, \tau + 1}) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

где  $\Omega^{(1)}(\tau, u(\tau)) = \Omega(\overline{\tau, \tau + 1}, w_0^*, u(\tau))$ , а  $\tau$ -позиция  $w_\varepsilon^{(e)}(\tau) = \{\tau, y_\varepsilon^{(e)}(\tau), Z_\varepsilon^{(e)}(\tau)\} \in \mathbf{W}(0, w_0^*, \tau, u_{\varepsilon, \tau}(\cdot))$  ( $u_{\varepsilon, \tau}(\cdot) = \{u_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{0, \tau-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0, \tau})$ ) координатора  $P$  формируется в силу (2.15), а именно:

$$w_\varepsilon^{(e)}(\tau) = \{\tau, y_\varepsilon^{(e)}(\tau), Z_\varepsilon^{(e)}(\tau)\} = \mathbf{F}_{0, \tau}(w_0^*, u_{\varepsilon, \tau}(\cdot), \omega_{\varepsilon, \tau}(\cdot));$$

$$u_{\varepsilon, \tau+1}(\cdot) = \{u_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{0, \tau}} \in \mathbf{U}(\overline{0, \tau}),$$

$$\omega_{\varepsilon, \tau+1}(\cdot) = \{\omega_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{1, \tau+1}} \in \Omega(\overline{0, \tau + 1}, w_0^*, u_{\varepsilon, \tau+1}(\cdot)),$$

$$\omega_{\varepsilon, \tau}(\cdot) = \{\omega_\varepsilon(t)\}_{t \in \overline{1, \tau}} \in \Omega(\overline{0, \tau}, w_0^*, u_{\varepsilon, \tau}(\cdot)).$$

#### 4. Заключение

В итоге можно сделать вывод, что для организации адаптивного минимаксного управления преследованием в выбранном классе допустимых стратегий адаптивного управления для дискретной динамической системы (2.1)–(2.5) в данной работе предлагается рекуррентный алгоритм, который сводит многошаговую нелинейную задачу 2 к реализации решений конечной последовательности только одношаговых задач, представляющих собой задачи линейного и выпуклого программирования. Данный алгоритм может быть использован для моделирования на компьютере сложных динамических процессов преследования–уклонения, описываемых дискретными динамическими системами типа (2.1)–(2.5). Отметим, что в случае реализации предлагаемого алгоритма на компьютере размерность дискретной динамической системы (2.1)–(2.5) и число шагов процесса преследования ограничиваются только ресурсами памяти и быстродействием компьютера.

Поступила 26.03.04

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
4. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
5. Шориков А.Ф. Минимаксные фильтры для оценивания состояний нелинейных дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 112–122.
6. Шориков А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
7. Шориков А.Ф. Алгоритм адаптивного минимаксного управления для процесса преследования–уклонения в дискретных динамических системах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Т. 6, № 2. С. 515–535. Екатеринбург: УрО РАН, 2000.
8. Григоренко Н.Л. Задача преследования в дифференциальных играх многих лиц // Мат. сборник. 1988. Т. 135, № 1. С. 36–45.

9. **Петров Н.Н.** Об одном классе задач группового преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1994. № 3. С. 42–49.
10. **Tabak, D.**, Optimal Control of Nonlinear Discrete-Time Systems by Mathematical Programming // J. Franklin Inst., 1970. No. 289. P. 111–119.
11. **Tabak, D. and Kuo, B.C.**, Application of Mathematical Programming in the Design of Optimal Control Systems // Intern. J. Control, 1969. No. 10. P. 545–552.
12. **Ho, Y.C., Bryson, A.E., Jr., and Baron, S.**, Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies // IEEE Trans. Automat. Control. 1965. Vol. 10, No. 4. P. 385–389.
13. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
14. **Базара М., Шетти К.** Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.

*E. S. Adyullina, B. I. Anan'ev.* **Linear Estimation for Statistically Uncertain Systems.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 3–16.

Problems of construction of linear operators defined on a space of signals are considered with the aim of restoring state variables of statistically uncertain systems in a Hilbert space. Some special cases are studied, in particular, filtering problems for evolutionary systems.

*V. Yu. Andrianov, N. N. Petrov.* **Search under Counteraction.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 17–25.

In this paper, new problems of guaranteed graph searching are considered. The issue of finding a least number of pursuers, which are able (in some sense) to complete the search of an “invisible” evader, is stated.

*A. V. Arutyunov.* **Solvability Conditions for Nonlinear Equations on a Cone in a Neighborhood of an Anormal Point.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 26–31.

An operator equation described by a smooth nonlinear mapping acting in Banach spaces is considered. A solution of this equation that belongs to a given convex closed cone is sought. A condition of 2-regularity under which the equation in a neighborhood of a given point has a solution satisfying a linear-root estimate is presented. The introduced condition of 2-regularity is substantially weaker than the known Robinson condition, which is the first order regularity condition.

*V. D. Batukhtin, S. I. Bigil'deev.* **Inheritance of the Differential Properties of Potentials by Functions.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 32–42.

Generalizations of the notion of differentiability of functions are considered. Relations between approximation gradients and the Riesz transforms, Bessel potentials, Poisson integral, Steklov means, Sobolev derivatives,  $L^p$  differentiation, and harmonic derivatives are established.

*Yu. I. Berdyshev.* **A Problem of the Sequential Approach of a Nonlinear Object to Two Moving Points.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 43–52.

A problem of the fastest sequential approach of a nonlinear controlled object to two moving points is studied. A system of nonlinear differential equations describing a simplest model of the motion of an aircraft (car) in the horizontal plane is used. The structure of optimal trajectories is determined and an algorithm of their construction is suggested.

*T. S. Bykova, E. L. Tonkov.* **Reducibility of Linear Systems with Aftereffect.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 53–64.

It is shown that a linear system with aftereffect on each finite-dimensional subspace of solutions with finite Lyapunov indices is asymptotically similar under natural assumptions to a system of ordinary differential equations. A system with the right-hand side recurrent with respect to time is investigated in detail and a family of systems with aftereffect, whose space of solutions with finite Lyapunov indices is finite-dimensional, is constructed. The research is based on the conception of N. N. Krasovskii, according to which to every system with aftereffect there corresponds some dynamical system with infinite-dimensional phase space and a flow on it generated by solutions of the original system with aftereffect.

*O. I. Vdovina, A. N. Seseikin.* **Numerical Construction of Attainability Domains for Systems with Impulse Control.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 65–73.

A numerical algorithm is suggested for constructing the attainability set of a nonlinear control system with an impulse integrally bounded control that is included in the system linearly. The algorithm is based on the approximation of admissible controls by linear combinations of Dirac delta-functions and discretization of the space of positions of the system. An estimate of accuracy of the suggested algorithm is obtained. An illustrative example is given.

*M. I. Gusev.* **Optimal Inputs in Guaranteed Identification Problems.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 74–84.

The problem of optimal choice of inputs for identifying control system parameters by measurement results is considered. A priori information is restricted by the knowledge of admissible limits of the variation of uncertain parameters and measurement errors. There is no statistical information; the identification

problem is investigated within the framework of the minimax (guaranteed) approach. The optimal choice of inputs must provide the best quality of identification; the integral of the information function of the system is considered as an optimality criterion.

*Yu. F. Dolgii.* **Characteristic Equation in the Problem of Asymptotic Stability in Periodic Systems with Aftereffect.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 85–96.

In linear periodic systems with aftereffect, a motion is asymptotically stable, if all eigenvalues of the monodromy operator are less than one in absolute value. Procedures of constructing the characteristic equation for the monodromy operator are connected with finite-dimensional approximations of this operator. The characteristic equation on the complex plane is given by an entire function. For nuclear operators in a separable Hilbert space, this function is uniformly approximable by polynomials in any bounded closed region of the complex plane. Conditions for the nuclearity of the monodromy operator, its conjugate operator, and the regularized monodromy operator are obtained in this work.

*A. M. Il'in, M. A. Melentsov.* **The Asymptotics of Solutions of Systems of Differential Equations with a Small Parameter for Large Times.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 97–110.

For a single-frequency system of differential equations with small perturbation, the possibility of constructing and justifying of the asymptotic expansion of the solution for large times is studied. Under additional restrictions, it is proved that the asymptotic solution constructed by the known method of separation of variables approximates the true solution on the time interval  $[0, \varepsilon^{-k}]$  with accuracy up to any fixed power of the small parameter. Another construction and justification of the asymptotics is carried out with the help of the two-scale expansion on the phase plane. Calculations are performed for the classical Van der Pol equation; they show that the usual two-scale method of expansion is inapplicable to time of order  $t^{-2}$  and that the method considered here provides a good approximation for this time.

*A. V. Kim, S. Rubleva, Y. S. Choi.* **On the Problem of Analytical Construction of Regulators for Systems with Delays.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 111–121.

The paper contains a review and generalizations of the method of explicit solutions of generalized Riccati equations in the problem of analytical construction of regulators for systems with state delays.

*A. I. Korotkii.* **The Recovery of Parameters of a Navier–Stokes System.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 122–138.

We study inverse problems about the recovery of a priori unknown parameters of a dynamic system described by a boundary value problem for a system of Navier–Stokes equations on the basis of some available information on the motion of the dynamic system (on the solution of a corresponding boundary value problem). The first of the problems under consideration is a retrospective inverse problem, consisting in the recovery of a priori unknown initial state of a dynamic system on the basis of its known final state. This problem, as many other similar problems, is ill-posed. For its solution, ideas of the so-called start control are involved. Realization of these ideas allows one to reduce the original ill-posed problem to a set of direct well-posed problems which are solved in the direct time under corresponding given initial conditions. We also consider various modifications and regularizations of the suggested method of solution of the problem based on some a priori information about a desired solution. The second of the problems under discussion is an inverse dynamic problem, consisting in the dynamic recovery of a priori unknown right side of the system which characterizes the density of external mass forces, by results of approximate measurements of current system states. This problem is also ill-posed. For its solution we suggest a dynamic positional regularizing algorithm physically realizable and able to work in a real-time mode. Construction of the algorithm is supported by structures and methods of the positional control theory and methods of regularization of ill-posed problems.

*A. V. Kostousov, V. B. Kostousov.* **High Precision Navigation of Moving Vehicles by Means of Radar Images.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 139–148.

The paper is devoted to the problem of navigation of moving vehicles by means of radar images. A simplified mathematical model for obtaining a radar image is discussed, the problem of navigation by means of reference points is formulated, an algorithm for comparison of a reference image and a current one (measured during the motion) is described, and estimates of informativeness of pointwise images are given.

*S. I. Kumkov, V. S. Patsko, S. G. Pyatko, A. A. Fedotov.* **Construction of the Solvability Set in a Problem of Guiding an Aircraft under Wind Disturbance.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 149–159.

A nonlinear system of the fourth order is used for simplified description of the aircraft motion in the horizontal plane under wind disturbance. The aircraft control vector has two components constrained in modulus. One component affects the velocity value, and the second one defines variation of the direction of the velocity vector. The maximal value of the wind disturbance is given. The problem of guaranteed guidance of an aircraft from the initial position to a given terminal set at a fixed instant is considered. The motion is subject to the phase constraints at the intermediate instants. Based on the game theory, an algorithm for backward construction of the solvability set in a problem of guaranteed guidance is proposed. Numerical simulation results of the solvability set construction are described.

*V. I. Maksimov.* **Reconstruction of Boundary Disturbances: The Case of Neumann Boundary Conditions.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 160–176.

A problem of dynamical reconstruction of boundary disturbances in a nonlinear parabolic equation is considered. In the case when a disturbance is concentrated in the Neumann boundary conditions, two solving algorithms stable with respect to informational noises and computational errors are described.

*V. N. Tarasov.* **Adaptive Minimax Control of a Pursuit Process with Many Pursuers in Discrete Dynamical Systems** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 177–188.

Problems of the stability of elastic systems under one-sided constraints on displacements are considered. These problems are reduced to finding bifurcation points of nonsmooth functionals or to determining parameters for which a certain variational problem with inequality constraints has a nontrivial solution. The stability problem for a rectangular plate whose flexures are confined from one side by rigid ribs is solved.

*A. A. Tolstonogov.* **The Bang-Bang Principle for Controlled Systems of Subdifferential Type.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 189–200.

In a separable Hilbert space, a nonlinear evolutionary controlled system with evolutionary operators which are subdifferentials of a proper, convex, and lower semicontinuous function depending on time is considered. The control is subjected to a constraint which is a convex closed bounded set from a separable reflexive Banach space. It is shown that any trajectory of the controlled system corresponding to a measurable control can be approximated, to any degree of accuracy and uniformly in time, by trajectories corresponding to step controls whose values are extreme points of the constraint on control. The obtained results are illustrated by an example of a controlled system with a discontinuous nonlinearity.

*V. I. Ukhobotov, S. A. Nikitina.* **Constructing Guaranteed Control in Quasi-Linear Systems.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 201–211.

For a quasi-linear system, the problem of constructing guaranteed control keeping the phase trajectory near to a prescribed family of closed sets  $W(t)$  is considered. The deviation of the phase trajectory from the family is estimated with the help of some function. Sufficient conditions that provide keeping the trajectory within the family are obtained. The case when the vectogram of control  $U(t)$  and sets  $W(t)$  for every  $t$  are polyhedrons of a special kind is analyzed in detail. Examples are given.

*A. A. Chikriid, I. I. Matichin.* **Linear Differential Games with Impulse Control of Players.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 212–224.

We consider pursuit games in which players (the pursuer, evader or both players) use impulse controls, which is expressed in terms of the Dirac delta-function. We study linear dynamical system described by ordinary differential equations whose trajectories have discontinuities at discrete time instants. Such systems are a kind of hybrid ones. The research is based on the principal ideas of the decision function method. The following cases are considered successively: impulse control of the pursuer; impulse control of the evader; impulse control of both players. For each of the three cases, the problem of approach to a cylindrical terminal set is studied and sufficient solvability conditions for the above problem are obtained. The theoretical results are illustrated with an example of a pursuit game with simple motion.

*A. F. Shorikov.* **Adaptive Minimax Control of a Pursuit Process with Many Pursuers in Discrete Dynamical Systems.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. Vol. 11, no. 1. P. 225–240.

An adaptive minimax control of a pursuit process with several controlled objects whose dynamics are described by discrete recursive vector equations is considered. It is assumed that the past realizations of the

control signals of objects  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) controlled by  $n$  pursuers and signals containing an incomplete information about an object  $II$  controlled by an evader are known. The sets of values of all *a priori* unknown parameters of the dynamical systems considered are convex polyhedra in the corresponding finite-dimensional vector spaces. Under these assumptions, the problem of adaptive minimax control of the pursuit process is stated and solved. A recursive procedure for organizing a minimax pursuit control in a certain class of feasible adaptive control strategies is suggested; each step of this procedure is based on implementation of *a posteriori* minimax nonlinear filtering and on solution of linear and convex programming problems. The results obtained can be used in computer modeling of real-life dynamical processes and in designing optimal navigational and control devices for various transportation systems.

Научное издание

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН**

Сборник научных трудов

*Рекомендовано к изданию Ученым советом  
Института математики и механики  
и НИСО Уральского отделения Российской академии наук*

ЛР № 020764 от 24.04.98.

Ответственные за выпуск: М. И. Гусев, С. И. Морина

Оригинал-макет подготовлен в ИММ УрО РАН.

---

НИСО УрО РАН № 37(05).  
Подписано к печати 26.04.05. Формат  $60 \times 84^{1/8}$ . Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 30. Уч.-изд. л. 16,75. Тираж 200 экз. Заказ

---

Институт математики и механики УрО РАН  
620219 г. Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16.

Отпечатано в типографии УрО РАН  
620219 г. Екатеринбург, ГСП-169, ул. С. Ковалевской, 18.