

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

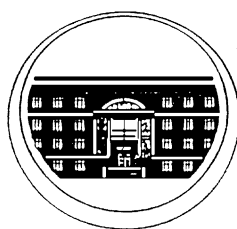
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 26

№ 2

2020



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 26, № 2.
Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2020. 292 с.

ISSN (print) 0134-4889

ISSN (online) 2658-4786

DOI журнала: 10.21538/0134-4889

Главный редактор акад. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора д-р физ.-мат. наук А. М. Тарасьев

Научные редакторы д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

Редакционная коллегия

д-р физ.-мат. наук Б. П. Андреянов (Франция), чл.-корр. РАН С. М. Асеев,
д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко, д-р физ.-мат. наук А. В. Васильев,
д-р физ.-мат. наук Э. Х. Гимади, д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай),
канд. физ.-мат. наук М. И. Гомоюнов, д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев,
д-р физ.-мат. наук Х. Г. Гусейнов (Турция),
д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев, д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий,
д-р физ.-мат. наук П. Крейчи (Чешская Республика), чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров,
акад. РАН С. В. Матвеев, д-р физ.-мат. наук А. Д. Медных,
д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Беларусь), чл.-корр. РАН И. А. Панин,
д-р физ.-мат. наук Е. Ю. Панов, д-р физ.-мат. наук И. Ф. Сивергина (США),
д-р физ.-мат. наук И. Д. Супруненко (Беларусь), чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов,
академик НАН Украины А. А. Чикрий (Украина), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай,
канд. физ.-мат. наук Л. В. Камнева (отв. секретарь)

Попечительский совет

академик РАН А. Б. Куржанский, академик РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН В. В. Васин, чл.-корр. РАН Н. Ю. Лукоянов,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин,
чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
д.ф.-м.н. Н. Ю. Антонов, д.ф.-м.н. В. В. Кабанов, д.ф.-м.н. В. И. Максимов

Отв. редакторы выпуска д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

Журнал индексируется в *российских базах*: РИНЦ, MathNet;
в *зарубежных базах*: MathSciNet, Scopus (2019),
Emerging Sources Citation Index Web of Science

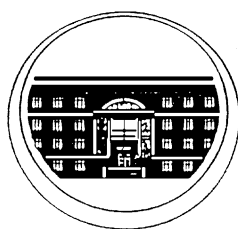
© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской
академии наук, 2020

TRUDY
INSTITUTA
MATEMATIKI I MEKHANIKI
URO RAN

Vol. 26

No. 2

2020



YEKATERINBURG

Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. Vol. 26, no. 2. Yekaterinburg:
IMM UrO RAN, 2020. 292 p.

ISSN (print) 0134–4889

ISSN (online) 2658–4786

DOI: 10.21538/0134-4889

Editor-in-Chief RAS Academician V. I. Berdyshev

Deputy Editor-in-Chief Dr. Phys.-Math. Sci. A. M. Taras'ev

Science Editors Dr. Phys.-Math. Sci. A. L. Ageev,
Dr. Phys.-Math. Sci. A. R. Danilin

Editorial Board

Dr. Phys.-Math. Sci. B. P. Andreianov (France), RAS Corresponding Member S. M. Aseev,
Dr. Phys.-Math. Sci. A. G. Babenko, RAS Corresponding Member A. G. Chentsov,
Ukrainian NAS Academician A. A. Chikrii (Ukraine),
Dr. Phys.-Math. Sci. E. H. Gimadi, Cand. Sci. (Phys.-Math.) M. I. Gomoyunov,
Dr. Phys.-Math. Sci. Wenbin Guo (China), Dr. Phys.-Math. Sci. Kh. G. Guseinov (Turkey),
Dr. Phys.-Math. Sci. M. I. Gusev,
Dr. Phys.-Math. Sci. M. Yu. Khachai, Dr. Phys.-Math. Sci. A. S. Kondrat'ev,
Dr. Phys.-Math. Sci. A. I. Korotkii, Dr. Phys.-Math. Sci. P. Krejčí (Czech Republic),
RAS Academician S. V. Matveev, RAS Corresponding Member V. D. Mazurov,
Dr. Phys.-Math. Sci. A. D. Mednykh,
Dr. Phys.-Math. Sci. V. S. Monakhov (Republic of Belarus),
RAS Corresponding Member I. A. Panin, Dr. Phys.-Math. Sci. E. Yu. Panov,
Dr. Phys.-Math. Sci. I. F. Sivergina (USA),
Dr. Phys.-Math. Sci. I. D. Suprunenko (Republic of Belarus),
Dr. Phys.-Math. Sci. A. V. Vasil'ev,
Cand. Sci. (Phys.-Math.) L. V. Kamneva (*Assistant Editor*)

Supervisory Board

RAS Academician A.B. Kurzhanski,
RAS Academician Yu.S. Osipov,
RAS Corresponding Member N.Yu. Lukoyanov,
RAS Corresponding Member A.A. Makhnev,
RAS Corresponding Member Yu.N. Subbotin,
RAS Corresponding Member N.N. Subbotina,
RAS Corresponding Member V.N. Ushakov,
RAS Corresponding Member V.V. Vasin,
Dr. Phys.-Math. Sci. N.Yu. Antonov,
Dr. Phys.-Math. Sci. V.V. Kabanov,
Dr. Phys.-Math. Sci. V.I. Maksimov

*Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN is abstracted and/or indexed in Elibrary,
MathNet, Mathematical Reviews, Scopus (2019), Emerging Sources Citation Index WoS*

© N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
(IMM UB RAS)

УДК 517.51

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ КЛАССА НИКОЛЬСКОГО — БЕСОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ¹

Г. Акишев

В статье рассматриваются пространства периодических функций многих переменных, а именно пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, пространство Никольского–Бесова $S_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}B$, а также изучается наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ тригонометрическими полиномами с номерами гармоник из ступенчатого гиперболического креста. Установлены достаточные условия принадлежности функции $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в пространство $f \in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случаях $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ и $p = q$, $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$. Получены оценки наилучших приближений функций класса Никольского–Бесова $S_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B$ по норме пространства $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ при различных соотношениях между параметрами $p, q, \tau_1, \tau_2, \theta$. При некоторых соотношениях между числами $p, q, \tau_1, \tau_2, \theta$ показана точность этих оценок.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класс Никольского–Бесова, тригонометрический полином, наилучшее приближение, гиперболический крест.

G. Akishev. Estimates for the best approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class in the Lorentz space by trigonometric polynomials.

We consider spaces of periodic functions of many variables, specifically, the Lorentz space $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ and the Nikol'skii–Besov space $S_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}B$, and study the best approximation of a function $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ by trigonometric polynomials with the numbers of harmonics from a step hyperbolic cross. Sufficient conditions are established for a function $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ to belong to a space $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ in the cases $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ and $p = q$, $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$. Estimates for the best approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class $S_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B$ in the norm of the space $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ are derived for different relations between the parameters p, q, τ_1, τ_2 , and θ . For some relations between these parameters, it is shown that the estimates are exact.

Keywords: Lorentz space, Nikol'skii–Besov class, trigonometric polynomial, best approximation, hyperbolic cross.

MSC: 42A05, 42A10, 46E30

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-5-27

Введение

Пусть \mathbb{R}^m — m -мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{I}^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m; 0 \leq x_j \leq 1; j = 1, \dots, m\}$ — m -мерный куб. В дальнейшем для m -мерного куба наряду с \mathbb{I}^m будем использовать обозначение $[0, 1]^m$.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, которые имеют 2π -период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left(\frac{\tau}{p} \int_0^1 (f^*(t))^{\tau} t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right)^{1/\tau}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad 1 \leq \tau < \infty,$$

конечна, где $f^*(y)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$, $\bar{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [1, гл. 1, разд. 3, с. 213–216; 2, с. 63]).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Уральского федерального университета, постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

Известно, что $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{p,\tau}^* = \left[\frac{\tau}{p} \int_0^1 \left(\int_0^t f^*(y) dy \right)^\tau t^{\tau(\frac{1}{p}-1)-1} dt \right]^{1/\tau} < +\infty, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leq \tau < \infty$$

и эта норма эквивалентна величине $\|f\|_{p,\tau}$ (см. [1, гл. 1, разд. 3, с. 229, теорема 3.21; 3, гл. 3, разд. 3.4, лемма 3.4.6, с. 94]), т. е.

$$\|f\|_{p,\tau}^* \asymp \|f\|_{p,\tau}. \quad (0.1)$$

Здесь и далее для неотрицательных величин $A(f), B(f)$ запись $A(f) \asymp B(f)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 , значения которых могут зависеть от заданных в условии утверждения параметров (в данном случае p, τ) и не зависеть от функции f , такие что $C_1 A(f) \leq B(f) \leq C_2 A(f)$. В порядковом равенстве (0.1) роль $A(f)$ и $B(f)$ играют $\|f\|_{p,\tau}^*$ и $\|f\|_{p,\tau}$ соответственно. Ниже встречаются порядковые равенства для величин, зависящих не от функционального параметра f , а от числового или векторного; например, в (2.1) таким числовым параметром служит n , а в (2.10) — вектор $\bar{s} = (s_1, \dots, s_m)$. В идейном плане определения таких порядковых равенств аналогичны предыдущему.

В случае $\tau = p$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$ (см. [4, гл. 1, разд. 1.1, с. 11; 1, гл. 5, разд. 3, с. 216] и [3, гл. 3, разд. 3.4.1, с. 91]).

Функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m) = L(\mathbb{T}^m)$ сопоставим ее ряд Фурье

$$\sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, 2\pi \bar{x} \rangle},$$

где $a_{\bar{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle \bar{n}, 2\pi \bar{x} \rangle}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}$ и \mathbb{Z}^m — целочисленная решетка в \mathbb{R}^m , $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$.

Положим

$$\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, 2\pi \bar{x} \rangle}.$$

Здесь $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : [2^{s_j-1}] \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\}$; $[a]$ — целая часть числа a ; $\bar{s} = (s_1, \dots, s_m), s_j = 0, 1, 2, \dots$.

Напомним, что для заданного $p \in [1, \infty)$ числовая последовательность $\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}$ принадлежит l_p , если $\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}\|_{l_p} = (\sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m} |a_{\bar{n}}|^p)^{1/p} < \infty$.

Далее для вектора $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ и нулевого вектора $\bar{0} = (0, \dots, 0)$ неравенство $\bar{r} > \bar{0}$ означает, что $r_j > 0$ при всех $j = 1, 2, \dots, m$. Пусть $1 \leq \theta \leq \infty$. Рассмотрим пространство всех функций $f \in \dot{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, для которых

$$\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta < \infty,$$

где \mathbb{Z}_+^m — множество элементов $\bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}^m$ с неотрицательными координатами и $\dot{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — множество всех функций $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(\bar{x}) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, m$.

Это пространство обозначается символом $S_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}B$ и называется *пространством Никольского — Бесова*. В этом пространстве рассмотрим единичный шар

$$S_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}B = \{f \in \dot{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m) : \|\{2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m}\|_{l_\theta} \leq 1\}.$$

В случае $\tau = p$ пространство $S_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}B$ совпадает с пространством $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$, которое изучали П. И. Лизоркин и С. М. Никольский [5], а также Т. И. Аманов [6].

Для данного вектора $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m) > \bar{0}$ положим $\bar{\gamma} = \frac{\bar{r}}{r_1}$ и

$$Q_n^{(\bar{\gamma})} = \bigcup_{(\bar{s}, \bar{\gamma}) < n} \rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{(\bar{\gamma})}) = \left(T(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{(\bar{\gamma})}} b_{\bar{k}} e^{i(\bar{k}, \bar{x})} \right).$$

Обозначим через $E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{p, \tau}$ наилучшее приближение функции $f \in L_{p, \tau}(\mathbb{T}^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{(\bar{\gamma})})$, а через $S_n^{(\bar{\gamma})}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{(\bar{\gamma})}} a_{\bar{k}}(f) e^{i(\bar{k}, 2\pi \bar{x})}$ — частичную сумму ряда Фурье функции f .

К. И. Бабенко [7] впервые предложил способ приближения функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов. Впоследствии приближение этим методом функций широко известных классов Соболева, Никольского — Бесова исследовали С. А. Теляковский [8], Б. С. Митягин [9], Я. С. Бугров [10], Э. М. Галеев [11; 12], В. Н. Темляков [13; 14], А. С. Романюк [15; 16], Г-Ю. Шмайсер, В. Зикель [17] и К. А. Бекмаганбетов, Е. Толеугазы [18]. Обзор результатов по этой теме дан в [19–21].

Известно, что для пространств Лоренца имеем включения $L_{q, \tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p, \tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < p < q < \infty$, $1 \leq \tau_1, \tau_2 < \infty$, и $L_{p, \tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p, \tau_1}(\mathbb{T}^m)$, если $1 \leq \tau_2 < \tau_1 < \infty$.

Основная цель статьи — найти точный порядок величины

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(S_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{r}} B)_{q, \tau_2} = \sup_{f \in S_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{r}} B} E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{q, \tau_2}$$

в различных соотношениях между параметрами $p, q, \tau_1, \tau_2, \theta$.

Статья состоит из трех разделов. В первом доказаны несколько вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основных результатов. Во втором разделе установлены оценки величины $E_n^{(\bar{\gamma})}(S_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{r}} B)_{p, \tau_2}$ в случае $\tau_1 = \tau_2$. Его основным результатом являются теоремы 2.1 и 2.2.

В третьем разделе установлены оценки величины $E_n^{(\bar{\gamma})}(S_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{r}} B)_{q, \tau_2}$ в случае $p < q$. Основные результаты этого раздела — теоремы 3.1, 3.3.

Все постоянные C , встречающиеся в формулах, не зависят от порядков тригонометрических полиномов и наилучших приближений.

1. Вспомогательные утверждения

Теорема 1.1. Пусть $1 < p, \tau < \infty$. Тогда для любой функции $f \in L_{p, \tau}(\mathbb{T}^m)$ выполняется соотношение

$$\|f\|_{p, \tau} \asymp \left\| \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p, \tau}.$$

Доказательство. Эта теорема доказывается аналогично теореме 1.1 из статьи автора 2017 г. (Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 3–21) с применением известного соотношения

$$\|f\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$ (см. [4, гл. 1, разд. 1.5, (13), с. 55]). □

Лемма 1.1. Пусть $1 < p < \infty$ и $1 < \tau \leq 2$, $\tau < p$. Тогда для произвольной системы функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subset L_{p, \tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство

$$\left\| \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p, \tau} \leq C \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \|\varphi_j\|_{p, \tau}^\tau \right)^{1/\tau},$$

где константа C не зависит от $\varphi_{\bar{j}}$ и n_j , $\bar{1} = (1, \dots, 1)$.

Доказательство. Известно, что $(f^*)^\theta = (|f|^\theta)^*$ для числа $\theta > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \left\| \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{\bar{j}}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} = \left[\int_0^1 \left(\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{\bar{j}}|^2 \right)^{1/2} \right)^{* \tau} (t) t^{\tau/p-1} dt \right]^{1/\tau} \\ &= \left[\int_0^1 \left(\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{\bar{j}}|^2 \right)^{\tau/2} \right)^* (t) t^{\tau/p-1} dt \right]^{1/\tau}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Теперь, пользуясь неравенством Йенсена (см. [4, гл. 3, разд. 3, с. 125], так как $\tau \leq 2$) и учитывая, что функция $f^* \downarrow$ из (1.1), получим

$$I \leq \left[\int_0^1 \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{\bar{j}}|^\tau \right)^* (t) t^{\tau/p-1} dt \right]^{1/\tau} \leq \left\{ \int_0^1 \left[\frac{1}{t} \int_0^t \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{\bar{j}}|^\tau \right)^* (u) du \right] t^{\tau/p-1} dt \right\}^{1/\tau}. \quad (1.2)$$

В силу известной формулы (см., например, [2, с. 64; 23, гл. 2, разд. 2, с. 89])

$$\int_0^t f^*(u) du = \sup_{E \subset \mathbb{I}^m, \mu E = t} \int_E |f(\bar{x})| d\bar{x}, \quad (1.3)$$

где μE — мера Лебега множества E , и свойства интеграла имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{\bar{j}}|^\tau \right)^* (u) du &= \sup_{E \subset \mathbb{I}^m, \mu E = t} \int_E \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{\bar{j}}(\bar{x})|^\tau d\bar{x} \\ &= \sup_{E \subset \mathbb{I}^m, \mu E = t} \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \int_E |\varphi_{\bar{j}}(\bar{x})|^\tau d\bar{x} = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \sup_{E \subset \mathbb{I}^m, \mu E = t} \int_E |\varphi_{\bar{j}}(\bar{x})|^\tau d\bar{x} \\ &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \int_0^t (|\varphi_{\bar{j}}|^\tau)^* (u) du. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Теперь из неравенств (1.2) и (1.4) следует, что

$$\begin{aligned} I &\leq \left\{ \int_0^1 \left[\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \frac{1}{t} \int_0^t (|\varphi_{\bar{j}}|^\tau)^* (u) du \right] t^{\tau/p-1} dt \right\}^{1/\tau} \\ &= \left\{ \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \int_0^1 \left[\frac{1}{t} \int_0^t (|\varphi_{\bar{j}}|^\tau)^* (u) du \right] t^{\tau/p-1} dt \right\}^{1/\tau}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t (|\varphi_{\bar{j}}|^\tau)^* (u) du \right) t^{\tau/p-1} dt &= \int_0^1 (|\varphi_{\bar{j}}|^\tau)^* (u) \int_u^1 t^{\tau/p-2} dt du \\ &= \frac{p}{p-\tau} \int_0^1 (|\varphi_{\bar{j}}|^\tau)^* (u) u^{\tau/p-1} du \end{aligned} \quad (1.6)$$

для $\tau < p$. Из неравенств (1.5) и (1.6) следует, что

$$\begin{aligned} I &\leq \left[\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \int_0^1 (|\varphi_{j_j}^\tau|)^*(u) u^{\tau/p-1} du \right]^{1/\tau} \\ &= \left[\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \int_0^1 (\varphi_{j_j}^*(u))^\tau u^{\tau/p-1} du \right]^{1/\tau} \leq C \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \|\varphi_{j_j}\|_{p,\tau}^\tau \right)^{1/\tau}. \end{aligned}$$

Лемма 1.2. Пусть $2 < p < \infty$, $2 < \tau < \infty$. Тогда для произвольной системы функций $\{\varphi_{j_j}\}_{j_j=1}^{n_j} \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство

$$\left\| \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{j_j}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} \leq C \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \|\varphi_{j_j}\|_{p,\tau}^2 \right)^{1/2},$$

где константа C не зависит от φ_{j_j} и n_j .

Доказательство. По свойству невозрастающей перестановки функции (см. (1.1))

$$\begin{aligned} I &= \left\| \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{j_j}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} = \left[\int_0^1 \left(\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{j_j}|^2 \right)^{1/2} \right)^*(t) t^{\tau/p-1} dt \right]^{1/\tau} \\ &= \left[\int_0^1 \left(\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{j_j}|^2 \right)^* \right)^{\tau/2} (t) t^{\tau/p-1} dt \right]^{1/\tau} \leq \left[\int_0^1 \left[\frac{1}{t} \int_0^t \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{j_j}|^2 \right)^*(u) du \right]^{\frac{\tau}{2}} t^{\frac{\tau}{2} - 1} dt \right]^{1/\tau}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Так как по условию леммы $p/2 > 1$ и $\tau/2 > 1$, то пространство $L_{p/2,\tau/2}(\mathbb{T}^m)$ будет нормированным. Поэтому в силу неравенства треугольника и соотношения (0.1) имеем

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_0^1 \left[\frac{1}{t} \int_0^t \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{j_j}|^2 \right)^*(u) du \right]^{\tau/2} t^{\tau/p-1} dt \right\}^{1/\tau} \\ &= \left\{ \int_0^1 \left[\frac{1}{t} \int_0^t \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} |\varphi_{j_j}|^2 \right)^*(u) du \right]^{\tau/2} t^{\frac{\tau}{2} - 1} dt \right\}^{\frac{2}{\tau}} \\ &\leq \left\{ \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \left[\int_0^1 \left[\frac{1}{t} \int_0^t (|\varphi_{j_j}|^2)^*(u) du \right]^{\tau/2} t^{\frac{\tau}{2} - 1} dt \right]^{2/\tau} \right\}^{1/2} \\ &\leq C \left\{ \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \left[\int_0^1 \left[(|\varphi_{j_j}|^2)^*(t) \right]^{\tau/2} t^{\frac{\tau}{2} - 1} dt \right]^{\frac{2}{\tau}} \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \left[\int_0^1 (\varphi_{j_j}^*(t))^{2\tau/2} t^{\tau/p-1} dt \right]^{2/\tau} \right\}^{1/2} \\ &\leq C \left\{ \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \left[\int_0^1 (\varphi_{j_j}^*(t))^\tau t^{\tau/p-1} dt \right]^{2/\tau} \right\}^{1/2} = C \left\{ \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \|\varphi_{j_j}\|_{p,\tau}^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Теперь из неравенств (1.7), (1.8) следует утверждение леммы 1.2. \square

З а м е ч а н и е. Эти леммы в одномерном случае в весовом пространстве Лоренца доказали В. Кокилашвили, Е. Ёылдирир [22].

Лемма 1.3. Пусть $2 < p < \infty$ и $2 < \tau < \infty$. Тогда для произвольной системы функций $\{\varphi_{\bar{j}}\}_{\bar{j}=1}^{\bar{n}} \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство

$$\left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\varphi_{\bar{s}}\|_{p,\tau}^\tau \right)^{1/\tau} \leq C \left\| \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} |\varphi_{\bar{s}}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau},$$

где константа C не зависит от $\varphi_{\bar{j}}$ и n_j .

Доказательство. Известно, что $(f^*)^\theta = (|f|^\theta)^*$ для числа $\theta > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} |\varphi_{\bar{s}}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} &= \left[\int_0^1 \left(\left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} |\varphi_{\bar{s}}|^2 \right)^{1/2} \right)^{* \tau} (t) t^{\tau/p-1} dt \right]^{1/\tau} \\ &= \left[\int_0^1 \left(\left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} |\varphi_{\bar{s}}|^2 \right)^* \right)^{\tau/2} (t) t^{\tau/p-1} dt \right]^{1/\tau}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Так как $2 < p < \infty$ и $2 < \tau < \infty$, то в силу ограниченности оператора Харди в пространстве $L_{p/2, \tau/2}(\mathbb{T}^m)$ (см. [1, гл. 5, разд. 3, лемма 3.14, с. 221] и соотношение (0.1)) из (1.9) выводим

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} |\varphi_{\bar{j}}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} \\ &\geq C \left\{ \int_0^1 \left[\frac{1}{t} \int_0^t \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} |\varphi_{\bar{j}}|^2 \right)^* (u) du \right]^{\tau/2} t^{\tau/p-1} dt \right\}^{1/\tau}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Далее, пользуясь равенством (1.4), неравенством Йенсена (так как $2/\tau < 1$), из (1.10) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} |\varphi_{\bar{s}}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} &\geq C \left\{ \int_0^1 \left[\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} \frac{1}{t} \int_0^t (|\varphi_{\bar{s}}|^2)^* (u) du \right]^{\tau/2} t^{\tau/p-1} dt \right\}^{1/\tau} \\ &\geq C \left\{ \int_0^1 \sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} \left[\frac{1}{t} \int_0^t (\varphi_{\bar{s}}^2(u))^* du \right]^{\tau/2} t^{\tau/p-1} dt \right\}^{1/\tau} \\ &\geq C \left[\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} \int_0^1 (\varphi_{\bar{s}}^*(t))^2 t^{\tau/p-1} dt \right]^{1/\tau} \geq C \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\varphi_{\bar{s}}\|_{p,\tau}^\tau \right)^{1/\tau}. \end{aligned}$$

Лемма 1.4. Пусть $1 < p < \tau \leq 2$. Тогда для функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p,\tau} \leq C \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\tau \right)^{1/\tau}, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Доказательство. Пусть $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p, \tau < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $1/\tau + 1/\tau' = 1$. Тогда в силу ортогональности $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})$ получим

$$\int_{\mathbb{I}^m} \sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) g(2\pi \bar{x}) d\bar{x} = \int_{\mathbb{I}^m} \sum_{s_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \delta_{\bar{s}}(g, \bar{x}) d\bar{x}. \quad (1.11)$$

Далее, применяя неравенства Гельдера для интеграла и суммы, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{I}^m} \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) g(\bar{x}) d\bar{x} \right| &\leq \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p',\tau'} \\ &\leq \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\tau \right)^{1/\tau} \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(g)\|_{p',\tau'}^{\tau'} \right)^{1/\tau'} \end{aligned} \quad (1.12)$$

для любой функции $g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)$.

Теперь, учитывая известное соотношение

$$\|f\|_{p,\tau} \asymp \sup_{\|g\|_{p',\tau'} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{I}^m} f(2\pi\bar{x}) g(2\pi\bar{x}) d\bar{x} \right|, \quad (1.13)$$

из неравенств (1.11), (1.12) имеем

$$\left\| \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p,\tau} \leq \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}\|_{p,\tau}^\tau \right)^{1/\tau} \sup_{\|g\|_{p',\tau'} \leq 1} \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(g)\|_{p',\tau'}^{\tau'} \right)^{1/\tau'}. \quad (1.14)$$

Так как $1 < p < \tau \leq 2$, то $2 \leq \tau' < p' < \infty$. Поэтому в силу леммы 1.3 выводим

$$\left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(g)\|_{p',\tau'}^{\tau'} \right)^{1/\tau'} \leq C \|g\|_{p',\tau'}.$$

Следовательно, из неравенства (1.14) получим утверждение леммы 1.4. \square

З а м е ч а н и е. Леммы 1.1 и 1.4 верны и в случае $\tau = p$, потому что $L_{p,p}(\mathbb{T}^m) = L_p(\mathbb{T}^m)$.

Лемма 1.5. Пусть $1 < p \leq 2$ и $1 < \tau \leq 2$. Тогда для функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство

$$\left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p,\tau}, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (1.11), (1.13) получим

$$\left\| \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p,\tau} \geq C \sup_{\|g\|_{p',\tau'} \leq 1} \int_{\mathbb{I}^m} \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \delta_{\bar{s}}(g, \bar{x}) d\bar{x}. \quad (1.15)$$

Рассмотрим множество

$$G_{p',\tau'}(\varepsilon) = \{g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m) : \|\delta_{\bar{s}}(g)\|_{p',\tau'} \leq \varepsilon_{\bar{s}}, \quad \bar{s} \in \mathbb{Z}_0^m\},$$

где $1/p + 1/p' = 1$, $1/\tau + 1/\tau' = 1$ и числовая последовательность $\{\varepsilon_{\bar{s}}\}$ удовлетворяет условию

$$\left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \varepsilon_{\bar{s}}^2 \right)^{1/2} \leq 1.$$

Множество таких последовательностей $\{\varepsilon_{\bar{s}}\}$ обозначим через Λ_2 .

Если $1 < p < 2$ и $1 < \tau < 2$, то $2 < p' < \infty$ и $2 < \tau' < \infty$. Поэтому согласно лемме 1.2 имеем

$$\left\| \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(g) \right\|_{p',\tau'} \leq C \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(g)\|_{p',\tau'}^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \varepsilon_{\bar{s}}^2 \right)^{1/2} \leq C.$$

Если $1 < p < 2$ и $\tau = 2$, то $2 \leq p' < \infty$ и $\tau' = 2$. Следовательно, в силу леммы 1.1 неравенство справедливо и при $\tau = 2$.

Таким образом, из неравенства (1.15) получим

$$\left\| \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p,\tau} \geq C \sup_{\{\varepsilon_{\bar{s}}\} \in \Lambda_2} \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \sup_{g \in G_{p',\tau'}(\varepsilon)} \int_{\mathbb{I}^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \delta_{\bar{s}}(g, \bar{x}) d\bar{x}. \quad (1.16)$$

Как в статье В. Н. Темлякова [14, с. 29], можно доказать, что

$$\sup_{g \in G_{p',\tau'}(\varepsilon)} \int_{\mathbb{I}^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \delta_{\bar{s}}(g, \bar{x}) d\bar{x} = \varepsilon_{\bar{s}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}, \quad \bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Поэтому из неравенства (1.16) и учитывая свойства нормы в пространстве l_2 , выводим

$$\left\| \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p,\tau} \geq C \sup_{\{\varepsilon_{\bar{s}}\} \in \Lambda_2} \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \varepsilon_{\bar{s}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau} = C \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^2 \right)^{1/2}.$$

Лемма 1.6. Пусть $1 < p \leq 2$ и $2 < \tau < \infty$. Тогда для функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство

$$\left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\tau \right)^{1/\tau} \leq C \left\| \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p,\tau}, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Доказательство. Как в доказательстве леммы 1.5, рассмотрим множество

$$G_{p',\tau'}(\varepsilon) = \{g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m) : \|\delta_{\bar{s}}(g)\|_{p',\tau'} \leq \varepsilon_{\bar{s}}, \quad \bar{s} \in \mathbb{Z}_0^m\},$$

где $1/p + 1/p' = 1$, $1/\tau + 1/\tau' = 1$ и числовая последовательность $\{\varepsilon_{\bar{s}}\}$ удовлетворяет условию

$$\left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \varepsilon_{\bar{s}}^{\tau'} \right)^{1/\tau'} \leq 1.$$

Множество таких последовательностей $\{\varepsilon_{\bar{s}}\}$ обозначим через $\Lambda_{\tau'}$.

Так как $1 < p \leq 2$ и $2 < \tau < \infty$, то $2 \leq p' < \infty$ и $1 < \tau' < 2$. Поэтому согласно лемме 1.1 (так как $\tau' < p'$) имеем

$$\left\| \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(g) \right\|_{p',\tau'} \leq \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(g)\|_{p',\tau'}^{\tau'} \right)^{1/\tau'} \leq C \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \varepsilon_{\bar{s}}^{\tau'} \right)^{1/\tau'} \leq C.$$

Следовательно, из неравенства (1.15) получим

$$\left\| \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p,\tau} \geq C \sup_{\{\varepsilon_{\bar{s}}\} \in \Lambda_{\tau'}} \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \sup_{g \in G_{p',\tau'}(\varepsilon)} \int_{\mathbb{I}^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \delta_{\bar{s}}(g, \bar{x}) d\bar{x}.$$

Как в статье В. Н. Темлякова [14, с. 29], можно показать, что

$$\sup_{g \in G_{p',\tau'}(\varepsilon)} \int_{\mathbb{I}^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \delta_{\bar{s}}(g, \bar{x}) d\bar{x} = \varepsilon_{\bar{s}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}, \quad \bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Поэтому из предыдущего неравенства, учитывая свойства нормы пространства l_τ , выводим

$$\left\| \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p,\tau} \geq C \sup_{\{\varepsilon_{\bar{s}}\} \in \Lambda_{\tau'}} \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \varepsilon_{\bar{s}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau} = C \left(\sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\tau \right)^{1/\tau}.$$

З а м е ч а н и е. Для одномерной суммы лемма 1.3 доказана в статье автора 2017 г. (см. ссылку на с. 7).

Теорема 1.2. Пусть $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leq 2$ или $2 < p < \infty$, $2 < \tau < \infty$. Тогда для любой функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{p,\tau} \leq C \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\bar{s}}\|_{p,\tau}^{\tau_0} \right)^{1/\tau_0},$$

где $\tau_0 = \min\{\tau, 2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $2 < p < \infty$, $2 \leq \tau < \infty$, то утверждение теоремы следует из леммы 1.2.

Пусть $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leq 2$. Тогда в случае $\tau < p$, применяя лемму 1.1, а для $\tau > p$, пользуясь леммой 1.4, получим утверждение теоремы 1.2. \square

Теорема 1.3. Пусть $1 < p < \infty$, $1 < \tau_2 \leq 2$. Если $\tau_2 < \tau_1$ и функция $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\tau_2(1/\tau_2 - 1/\tau_1)} \|\delta_{\bar{s}}\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} < \infty, \quad (1.17)$$

то $f \in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ и выполняется неравенство

$$\|f\|_{p,\tau_2} \leq C \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\tau_2(1/\tau_2 - 1/\tau_1)} \|\delta_{\bar{s}}\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}. \quad (1.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ и выполнено условие (1.17). Тогда в силу неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов (см. работу автора 2017 г. в данном журнале) имеем

$$\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\bar{s}}\|_{p,\tau_2}^{\tau_2} \leq \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\tau_2(1/\tau_2 - 1/\tau_1)} \|\delta_{\bar{s}}\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}. \quad (1.19)$$

Так как $1 < \tau_2 \leq 2$, то из (1.19) и теоремы 1.2 получим, что функция $f \in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ и выполняется неравенство (1.18). \square

2. О порядках приближений функций классов Никольского — Бесова в пространстве Лоренца с одинаковыми сильными параметрами

Положим $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$ и будем считать, что $\gamma'_j = \gamma_j$, $j = 1, \dots, \nu$, $\nu = 1, \dots, m$ и $\gamma_{j-1} < \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \nu+1, \dots, m$. При $\nu = m$, последние неравенства превращаются в равенства.

Теорема 2.1. Пусть $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $0 < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$, $\nu = 1, \dots, m$, $1 < p < \infty$ и $1 < \tau \leq 2$ или $2 < p < \infty$ и $2 \leq \tau < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Если $2 < p < \infty$ и $2 \leq \tau < \infty$, то

$$E_n^{(\bar{\gamma}')} (\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}} B)_{p,\tau} \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

где $a_+ = \max\{0, a\}$.

Если $1 < p < \infty$ и $1 < \tau \leq 2$, то

$$E_n^{(\bar{\gamma}')} (\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}} B)_{p,\tau} \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/\tau-1/\theta)_+}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}$. Тогда по свойству наилучшего приближения и теореме 1.2 имеем

$$E_n^{(\bar{\gamma}')} (f)_{p,\tau} \leq \|f - S_n^{(\bar{\gamma}')} (f)\|_{p,\tau} = \left\| \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{p,\tau} \leq \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^{\tau_0} \right)^{1/\tau_0}, \quad (2.3)$$

где $\tau_0 = \min\{\tau, 2\}$.

Пусть $2 < \tau < \infty$. Тогда оценка (2.3) имеет следующий вид:

$$E_n^{(\bar{\gamma}')} (f)_{p,\tau} \leq \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Если $2 < \theta < \infty$, то применяя неравенство Гельдера ($\beta = \theta/2$, $1/\beta + 1/\beta' = 1$) и [14, лемма В] из (2.4), получим

$$\begin{aligned} E_n^{(\bar{\gamma}')} (f)_{p,\tau} &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle 2\beta'} \right)^{1/(2\beta')} \\ &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} 2^{-nr_1 n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}$.

Если $\theta = \infty$, то из (2.4) согласно [14, лемма В] выводим

$$E_n^{(\bar{\gamma}')} (f)_{p,\tau} \leq C \sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau} \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle 2} \right)^{1/2} \leq C 2^{-nr_1 n^{(\nu-1)/2}} \sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}.$$

Если $\theta \leq 2$, то, применяя неравенство Йенсена (см. [4, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]) из (2.4), имеем

$$\begin{aligned} E_n^{(\bar{\gamma}')} (f)_{p,\tau} &\leq \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} \sup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} 2^{-nr_1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}$. Из неравенств (2.5), (2.6) следует оценка сверху в (2.1).

Пусть $1 < p < \infty$ и $1 < \tau \leq 2$. Тогда оценка (2.3) имеет следующий вид:

$$E_n^{(\bar{\gamma}')} (f)_{p,\tau} \leq \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\tau \right)^{1/\tau}. \quad (2.7)$$

Если $\tau < \theta < \infty$, то применяя неравенство Гельдера ($\beta = \theta/\tau$, $1/\beta + 1/\beta' = 1$) и [14, лемма В], из (2.7) получим

$$\begin{aligned} E_n^{(\bar{\gamma}')} (f)_{p,\tau} &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle 2\beta'} \right)^{1/(2\beta')} \\ &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} 2^{-nr_1 n^{(\nu-1)(1/\tau-1/\theta)}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если $\theta \leq 2$, то, применяя неравенство Йенсена (см. [4, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]), из (2.7) получим

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{p,\tau} \leq \left(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \geq n} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} \leq \left(\sum_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \theta} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} 2^{-nr_1} \quad (2.9)$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{\gamma}} B$. Из неравенств (2.8), (2.9) следует оценка сверху в (2.2).

Докажем оценку снизу величины $E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{B}_{p,\tau,\theta}^{\overline{\gamma}})_{p,\tau}$. Оценку достаточно доказать для $\nu = m$. В этом случае $\overline{\gamma} = (1, \dots, 1)$, и вместо $\overline{\gamma}$ будем писать $\overline{1}$.

Пусть $2 < p < \infty$, $2 \leq \tau < \infty$ и $2 < \theta < \infty$. Рассмотрим функцию

$$f_0(2\pi\overline{x}) = n^{-(m-1)/\theta} \sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle} \prod_{j=1}^m e^{i2^{s_j-1}2\pi x_j}, \quad \overline{x} \in \mathbb{I}^m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $|\prod_{j=1}^m e^{i2^{s_j-1}2\pi x_j}| = 1 \quad \forall \overline{x} \in \mathbb{I}^m$, то

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle \theta} \|\delta_{\overline{s}}(f_0)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} &= n^{-(m-1)/\theta} \left(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} \left\| \prod_{j=1}^m e^{i2^{s_j-1}2\pi x_j} \right\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} \\ &= n^{-(m-1)/\theta} \left(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} 1 \right)^{1/\theta} \leq C_0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $F_0 = C_0^{-1}f_0 \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{1}} B$. Поэтому $E_n^{(\overline{1})}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{1}} B)_{p,\tau} \geq E_n^{(\overline{1})}(F_0)_{p,\tau} = C_0^{-1}\|f_0\|_{p,\tau}$. Так как $2 < p < \infty$, то отсюда получим

$$\begin{aligned} E_n^{(\overline{1})}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{1}} B)_{p,\tau} &\geq C\|f_0\|_2 = Cn^{-(m-1)/\theta} \left(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle 2} \right)^{1/2} \\ &= Cn^{-(m-1)/\theta} 2^{-nr_1} \left(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} 1 \right)^{1/2} \geq C2^{-nr_1} n^{-(m-1)(1/2-1/\theta)}. \end{aligned}$$

Этим доказана точность оценки (2.1) в случае $2 < p < \infty$, $2 \leq \tau < \infty$ и $2 < \theta < \infty$.

Если $\theta = \infty$, то рассмотрим функцию

$$f_{01}(2\pi\overline{x}) = \sum_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle} \prod_{j=1}^m e^{i2^{s_j-1}2\pi x_j}, \quad \overline{x} \in \mathbb{I}^m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\|\delta_{\overline{s}}(f_{01})\|_{p,\tau} = 2^{-\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle} \quad \overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Следовательно, функция $f_{01} \in \mathbb{S}_{p,\tau,\infty}^{\overline{1}} B$.

Так как $2 < p < \infty$, то в силу равенства Парсеваля и [14, лемма В] имеем

$$E_n^{(\overline{1})}(\mathbb{S}_{p,\tau,\infty}^{\overline{1}} B)_{p,\tau} \geq E_n^{(\overline{1})}(f_{01})_{p,\tau} \geq CE_n^{(\overline{1})}(f_{01})_2 \geq C \left(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle 2} \right)^{1/2} \geq C2^{-nr_1} n^{(u-1)/2}.$$

Пусть $2 < p < \infty$, $2 \leq \tau < \infty$ и $\theta \leq 2$ или $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leq 2$ и $\theta \leq \tau$. Рассмотрим функцию

$$f_1(2\pi\overline{x}) = 2^{-n(r_1+1-1/p)} \sum_{\overline{k} \in \rho(\overline{s})} e^{i\langle \overline{k}, 2\pi\overline{x} \rangle},$$

где $\tilde{\bar{s}} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ — один из векторов $\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m$, удовлетворяющих условию и такой что $\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n$.

Тогда $\|\delta_{\bar{s}}(f_1)\|_{p,\tau} = 0$, если $\bar{s} \neq \tilde{\bar{s}}$. Если $\bar{s} = \tilde{\bar{s}}$, то в силу известного соотношения

$$\left\| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi \bar{x} \rangle} \right\|_{p,\tau} \asymp \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-1/p)}, \quad 1 < p, \tau < \infty \quad (2.10)$$

имеем $\|\delta_{\tilde{\bar{s}}}(f_1)\|_{p,\tau} \asymp 2^{-nr_1}$. Поэтому

$$\left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f_1)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} = 2^{\langle \tilde{\bar{s}}, \bar{\gamma} \rangle} \|\delta_{\tilde{\bar{s}}}(f_1)\|_{p,\tau} \leq C_1.$$

Следовательно, функция $F_1 = C_1^{-1} f_1 \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{\gamma}} B$.

Теперь по определению наилучшего приближения функции и в силу соотношения (2.10) получаем

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{\gamma}} B)_{p,\tau} \geq E_n^{(\bar{\gamma})}(F_1)_{p,\tau} = C_1^{-1} \|f_1\|_{p,\tau} \geq C_2^{-nr_1} \quad (2.11)$$

в случае $2 < p < \infty$, $2 \leq \tau < \infty$ и $\theta \leq 2$ или $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leq 2$ и $\theta \leq \tau$.

Пусть $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leq 2$ и $\tau < \theta$. Рассмотрим функцию

$$f_2(2\pi \bar{x}) = n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(r_1+1-1/p)} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi \bar{x} \rangle}.$$

В силу непрерывности функция f_2 принадлежит $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Далее согласно соотношению (2.10) имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f_2)\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} &= n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(1-1/p)} \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n} \left\| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi \bar{x} \rangle} \right\|_{p,\tau}^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\leq n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(1-1/p)} \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-1/p)\theta} \right)^{1/\theta} \leq C_2. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $F_2 = C_2^{-1} f_2 \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{\gamma}} B$. Теперь по определению наилучшего приближения функции выводим

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{\gamma}} B)_{p,\tau} \geq E_n^{(\bar{\gamma})}(F_2)_{p,\tau} = C_2^{-1} \|f_2\|_{p,\tau}. \quad (2.12)$$

Согласно следствию 3.1 (см. разд. 3) для ядра Дирихле

$$D_{n,\gamma}(\bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi \bar{x} \rangle}$$

справедливо соотношение $\|D_{n,\gamma}\|_{p,\tau} \asymp 2^{n(1-1/p)} n^{(m-1)/\tau}$, $1 < p, \tau < \infty$. Поэтому

$$\|f_2\|_{p,\tau} \geq C n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(r_1+1-1/p)} \left\| \sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi \bar{x} \rangle} \right\|_{p,\tau} \geq C_2^{-nr_1} n^{(m-1)(1/\tau-1/\theta)}.$$

Следовательно из неравенства (2.12) получим

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{\gamma}} B)_{p,\tau} \geq C_2^{-nr_1} n^{(m-1)(1/\tau-1/\theta)} \geq C_2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/\tau-1/\theta)}$$

в случае $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leq 2$ и $\tau < \theta$.

Докажем оценку снизу в случае $\theta = \infty$. Рассмотрим функцию

$$f_{21}(2\pi\bar{x}) = \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j+1-1/p)} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x} \rangle}.$$

В силу соотношения (2.10) нетрудно убедиться, что

$$\|\delta_{\bar{s}}(f_{21})\|_{p,\tau} \asymp 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle}$$

при $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$. Следовательно, функция $F_{21} = C_{21}f_{21} \in \mathbb{S}_{p,\tau,\infty}^{\bar{\tau}}B$ с некоторой постоянной $C_{21} > 0$.

Теперь по свойству наилучшего приближения функции и теореме 3.2 имеем

$$\begin{aligned} E_n^{(\bar{\tau}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\infty}^{\bar{\tau}}B)_{p,\tau} &\geq E_n^{(\bar{\tau}')} (F_{21})_{p,\tau} \geq C_{21} \|f_{21} - S_n^{\bar{\tau}'}(f_{21})\|_{p,\tau} \\ &\geq C \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle \geq n} \prod_{l=1}^m 2^{s_l(1/\lambda-1/p)\tau} \|\delta_{\bar{s}}(f_{21})\|_{\lambda}^{\tau} \right)^{1/\tau}, \end{aligned}$$

где $\lambda \in (p, \infty)$. Далее, пользуясь соотношением (2.10) и [14, лемма В], отсюда выводим

$$E_n^{(\bar{\tau}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\infty}^{\bar{\tau}}B)_{p,\tau} \geq 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)/\tau}.$$

З а м е ч а н и е. В случае $\tau = p$ из теоремы 2.1 следуют [14, теорема 2.3] при $\theta = \infty$ и [15, теорема 1] при $1 \leq \theta < \infty$.

Теорема 2.2. Пусть $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $0 < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$, $\nu = 1, \dots, m$, $1 < p < \infty$, $1 < \tau_2 \leq 2$ и $\tau_2 < \tau_1 < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$. Если $\tau_2 < \theta$, то

$$E_n^{(\bar{\tau})}(\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B)_{p,\tau_2} \leq C 2^{-nr_1} n^{(m-1)(1/\tau_2-1/\theta)+(1/\tau_2-1/\tau_1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

Если $\theta \leq \tau_2$, то

$$E_n^{(\bar{\tau})}(\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B)_{p,\tau_2} \asymp 2^{-nr_1} n^{(1/\tau_2-1/\tau_1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B$. Если $\tau_2 < \theta$, то положим $q = \theta/\tau_2 > 1$, $1/q + 1/q' = 1$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \\ &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^{\theta} \right)^{1/\theta} \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle \tau_2 q'} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q'} \right)^{1/(\tau_2 q')}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Так как $1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_m$, то

$$\begin{aligned} &\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle \tau_2 q'} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q'} \leq \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle r_1 \tau_2 q'} \left(\sum_{j=1}^m (s_j \gamma_j + 1) \right)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q'} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle < l+1} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle r_1 \tau_2 q'} \left(\sum_{j=1}^m (s_j \gamma_j + 1) \right)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q'} \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-lr_1 \tau_2 q'} (l+m)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q'} \sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle < l+1} 1 \leq C \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-lr_1 \tau_2 q'} (l+m)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q'} (l+1)^{m-1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Так как ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-lr_1\tau_2q'} (l+m)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q'} (l+1)^{m-1}$$

сходится, то в силу теоремы 1.3 из неравенств (2.14) и (2.15) следует, что $\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B \subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $\tau_2 < \theta$.

Если $\theta \leq \tau_2$, то применяя неравенство Йенсена (см. [4, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]) и учитывая (2.4), получим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\theta(1/\tau_2-1/\tau_1)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta} \right)^{1/\theta} \\ &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta} \right)^{1/\theta} \sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{(1/\tau_2-1/\tau_1)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Теперь в силу теоремы 1.3 из неравенства (2.16) следует, что $\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B \subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $\theta \leq \tau_2$.

Перейдем к доказательству неравенства (2.13). Пусть $f \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}B$. Тогда по свойству наилучшего приближения и теореме 1.3 имеем

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{p,\tau_2} \leq \|f - S_n^{(\bar{\gamma})}(f)\|_{p,\tau_2} \leq \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \geq n} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}. \quad (2.17)$$

Если $\tau_2 < \theta$, то положим $q = \theta/\tau_2 > 1$, $1/q + 1/q' = 1$. Применяя неравенство Гельдера и повторяя рассуждения доказательств неравенств (2.14) и (2.15), из (2.17) получим

$$\begin{aligned} E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{p,\tau_2} &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta} \right)^{1/\theta} \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \geq n} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \tau_2 q'} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q'} \right)^{1/(\tau_2 q')} \\ &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta} \right)^{1/\theta} \left(\sum_{l=n}^{\infty} 2^{-lr_1\tau_2q'} (l+m)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q'} (l+1)^{m-1} \right)^{1/(\tau_1 q')} \\ &\leq C \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta} \right)^{2/\theta} 2^{-nr_1} (n+1)^{(m-1)(1/\tau_2-1/\tau_1)} (n+1)^{1/\tau_2-1/\tau_1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из неравенства (2.18) следует оценка (2.13).

Если $\theta \leq \tau_2$, то, применяя неравенство Йенсена (см. [2, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]) и учитывая (2.4), получим

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{p,\tau_2} \leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta} \right)^{1/\theta} \sup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \geq n} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{(1/\tau_2-1/\tau_1)}.$$

Отсюда следует, что $E_n^{(\bar{\gamma})}(\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B)_{p,\tau_2} \leq C 2^{-nr_1} n^{(1/\tau_2-1/\tau_1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Докажем оценку снизу. Рассмотрим функцию

$$G_{\bar{s}}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \prod_{k \in \{1,2,\dots,m\} \setminus \{j\}} e^{i(2^{s_k}-1)2\pi x_k} \sum_{\nu_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} \frac{\cos 2\pi \nu_j x_j}{\nu_j^{1-1/p}},$$

где $\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m$ такой, что $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle$.

В недавней статье автора (О точности неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов в обобщенном пространстве Лоренца // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 9–20) показано, что

$$\|G_{\bar{s}}\|_{p,\tau} \asymp \left(\sum_{j=1}^m s_j \right)^{1/\tau}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 < \tau < \infty. \quad (2.19)$$

Поэтому функция $f_{0,\bar{s}}(\bar{x}) = C2^{-nr_1}n^{-1/\tau_1}G_{\bar{s}}(\bar{x}) \in \mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B$.

Далее, по свойству наилучшего приближения и учитывая (2.19), будем иметь

$$E_n^{(\bar{r})}(f_{0,\bar{s}})_{p,\tau_2} = \|f_{0,\bar{s}}\|_{p,\tau_2} = C2^{-nr_1}n^{-1/\tau_1}\|G_{\bar{s}}\|_{p,\tau_2} \geq C2^{-nr_1}n^{1/\tau_2-1/\tau_1}.$$

Следовательно, $E_n^{(\bar{r})}(\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B)_{p,\tau_2} \geq C2^{-nr_1}n^{(1/\tau_2-1/\tau_1)}$ в случае $\theta \leq \tau_2$.

3. О порядках приближений функций классов Никольского — Бесова в пространстве Лоренца с разными сильными параметрами

Теорема 3.1. Пусть $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$. Если функция $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \tau_2 (1/p-1/q)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} < \infty, \quad (3.1)$$

то $f \in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$, и выполняется неравенство

$$\|f\|_{q,\tau_2} \leq C \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \tau_2 (1/p-1/q)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Обозначим $M = [\tau_2] + 1$, где $[a]$ — целая часть числа a . Рассмотрим частичную сумму ряда Фурье функции $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$

$$S_{\bar{n}}(f, \bar{x}) = \sum_{s_1=0}^{n_1} \dots \sum_{s_m=0}^{n_m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{0} \leq \bar{s} \leq \bar{n}} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}),$$

где для элементов $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, запись $\bar{a} \leq \bar{b}$ означает, что $a_j \leq b_j$, $j = 1, \dots, m$. Положим $I_1 = \|S_{\bar{n}}(f)\|_{q,\tau_2}$.

Согласно свойству невозрастающей перестановки функции и нормы справедливо неравенство

$$I_1 \leq \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S_{\bar{n}}^*(f, u) du \right\|_{q,\tau_2}. \quad (3.3)$$

Пользуясь равенством (1.3), получим

$$\frac{1}{t} \int_0^t S_{\bar{n}}^*(f, u) du = \sum_{\bar{0} \leq \bar{s} \leq \bar{n}} \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{s}}^*(f, u) du. \quad (3.4)$$

Поэтому из неравенства (3.3) следует, что

$$I_1^{\tau_2} \leq \left\| \frac{1}{t} \int_0^t S_{\bar{n}}^*(f, u) du \right\|_{q,\tau_2}^{\tau_2} = \frac{\tau_2}{q} \int_0^1 \left(\sum_{\bar{0} \leq \bar{s} \leq \bar{n}} \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{s}}^*(f, u) du \right)^{(\tau_2/M)M} t^{\tau_2/q-1} dt. \quad (3.5)$$

Так как $\tau_2/M < 1$, то, применяя к сумме неравенство Йенсена ([4, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]), из (3.5) получим

$$\begin{aligned} I_1^{\tau_2} &\leq \frac{\tau_2}{q} \int_0^1 \left[\sum_{0 \leq \bar{s} \leq \bar{n}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{s}}^*(f, u) du \right)^{\tau_2/M} \right]^M t^{\tau_2/q-1} dt \\ &= \frac{\tau_2}{q} \sum_{0 \leq \bar{s}(1) \leq \bar{n}} \dots \sum_{0 \leq \bar{s}(M) \leq \bar{n}} \int_0^1 \prod_{j=1}^M \left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{s}(j)}^*(f, u) du \right)^{\tau_2/M} t^{\tau_2/q-1} dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Положим

$$\Delta_{\bar{s}(j)}(f, t) = \left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{s}(j)}^*(f, u) du \right)^{\tau_2/M}.$$

Тогда, учитывая равенство

$$\prod_{j=1}^M a_{\nu_j} = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq M} a_{\nu_i} a_{\nu_j} \right)^{1/(M-1)} \quad (3.7)$$

и применяя неравенство Гельдера с показателями $\theta = M(M-1)/2$, получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \prod_{j=1}^M \left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{s}(j)}^*(f, u) du \right)^{\tau_2/M} t^{\tau_2/q-1} dt = \int_0^1 \prod_{j=1}^M \Delta_{\bar{s}(j)}(f, t) t^{\tau_2/q-1} dt \\ &= \int_0^1 \left(\prod_{1 \leq i < j \leq M} \Delta_{\bar{s}(i)}(f, t) \Delta_{\bar{s}(j)}(f, t) \right)^{1/(M-1)} t^{\tau_2/q-1} dt \\ &= \int_0^1 \prod_{1 \leq i < j \leq M} (\Delta_{\bar{s}(i)}(f, t) \Delta_{\bar{s}(j)}(f, t))^{1/(M-1)} \prod_{1 \leq i < j \leq M} t^{(\tau_2/q-1)(1/\theta)} dt \\ &\leq \prod_{1 \leq i < j \leq M} \left(\int_0^1 (\Delta_{\bar{s}(i)}(f, t) \Delta_{\bar{s}(j)}(f, t))^{M/2} t^{\tau_2/q-1} dt \right)^{1/\theta}. \end{aligned}$$

Поэтому из неравенства (3.6) выводим

$$I_1^{\tau_2} \leq \frac{\tau_2}{q} \sum_{0 \leq \bar{s}(1) \leq \bar{n}} \dots \sum_{0 \leq \bar{s}(M) \leq \bar{n}} \prod_{1 \leq i < j \leq M} \left[\int_0^1 (\Delta_{\bar{s}(i)}(f, t) \Delta_{\bar{s}(j)}(f, t))^{M/2} t^{\tau_2/q-1} dt \right]^{1/\theta}. \quad (3.8)$$

Положим

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{\mu}, \bar{\nu}} &= \int_0^1 (\Delta_{\bar{\mu}}(f, t) \Delta_{\bar{\nu}}(f, t))^{M/2} t^{\tau_2/q-1} dt \\ &= \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{\mu}}^*(f, u) du \right)^{\tau_2/M} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{\nu}}^*(f, u) du \right)^{\tau_2/M} \right]^{M/2} t^{\tau_2/q-1} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{\mu}}^*(f, u) du \right)^{\tau_2/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{\nu}}^*(f, u) du \right)^{\tau_2/2} t^{\tau_2/q-1} dt. \end{aligned}$$

Теперь, применяя к интегралу в правой части этого равенства неравенство Гельдера с показателями $\alpha = \frac{p+q}{p}$, $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{p+q}{q}$, получим

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{\mu}, \bar{\nu}} &\leq \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{\mu}}^*(f, u) du \right)^{\tau_2 \alpha / 2} t^{\tau_2 / q - 1} dt \right]^{1/\alpha} \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{\mu}}^*(f, u) du \right)^{\tau_2 \alpha' / 2} t^{\tau_2 / q - 1} dt \right]^{1/\alpha'} \\ &= \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{\mu}}^*(f, u) du \right)^{\tau_2 \alpha / 2} t^{\frac{\tau_2 \alpha}{2} \frac{2}{q\alpha} - 1} dt \right]^{\frac{2}{\tau_2 \alpha}} \\ &\quad \times \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\bar{\mu}}^*(f, u) du \right)^{\tau_2 \alpha' / 2} t^{\frac{\tau_2 \alpha'}{2} \frac{2}{q\alpha'} - 1} dt \right]^{\frac{2}{\tau_2 \alpha'}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Так как $p < q$, то $q\alpha/2 > p$ и $q\alpha'/2 > p$. Поэтому, применяя неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца (см. [24, лемма 6]), из (3.9) имеем

$$\rho_{\bar{\mu}, \bar{\nu}} \leq \|\delta_{\bar{\mu}}(f)\|_{\frac{q\alpha}{2}, \frac{\tau_2 \alpha}{2}}^{\tau_2 / 2} \|\delta_{\bar{\nu}}(f)\|_{\frac{q\alpha'}{2}, \frac{\tau_2 \alpha'}{2}}^{\tau_2 / 2} \leq C \left(\prod_{j=1}^m 2^{\mu_j (\frac{1}{p} - \frac{2}{q\alpha})} \|\delta_{\bar{\mu}}(f)\|_{p, \tau_1} \prod_{j=1}^m 2^{\nu_j (\frac{1}{p} - \frac{2}{q\alpha'})} \|\delta_{\bar{\nu}}(f)\|_{p, \tau_1} \right)^{\tau_2 / 2}. \quad (3.10)$$

Так как

$$\frac{1}{p} - \frac{2}{q\alpha} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right), \quad \frac{1}{p} - \frac{2}{q\alpha'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \left(\frac{2}{\alpha} - 1\right),$$

то неравенство (3.10) можно переписать в следующем виде:

$$\rho_{\bar{\mu}, \bar{\nu}} \leq C \left(\prod_{j=1}^m 2^{\mu_j (1/p - 1/q) \tau_2} \|\delta_{\bar{\mu}}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2} \prod_{j=1}^m 2^{\nu_j (1/p - 1/q) \tau_2} \|\delta_{\bar{\nu}}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/2} \prod_{j=1}^m 2^{-|\mu_j - \nu_j| (1/2 - 1/\alpha) (\tau_2 / q)}. \quad (3.11)$$

Из неравенств (3.8) и (3.11) получим

$$\begin{aligned} I_1^{\tau_2} &\leq C \sum_{\bar{0} \leq \bar{s}(1) \leq \bar{n}} \dots \sum_{\bar{0} \leq \bar{s}(M) \leq \bar{n}} \prod_{1 \leq i < j \leq M} \left[\left(\prod_{l=1}^m 2^{s_l(i) (1/p - 1/q) \tau_2} \|\delta_{\bar{s}(i)}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \prod_{l=1}^m 2^{s_l(j) (1/p - 1/q) \tau_2} \|\delta_{\bar{s}(j)}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/2} \prod_{l=1}^m 2^{-|s_l(i) - s_l(j)| (1/2 - 1/\alpha) (\tau_2 / q)} \right]^{1/\theta}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Теперь, пользуясь формулой (3.7), будем иметь

$$\begin{aligned} &\prod_{1 \leq i < j \leq M} \left[\left(\prod_{l=1}^m 2^{s_l(i) (1/p - 1/q) \tau_2} \|\delta_{\bar{s}(i)}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2} \prod_{l=1}^m 2^{s_l(j) (1/p - 1/q) \tau_2} \|\delta_{\bar{s}(j)}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{l=1}^m 2^{-|s_l(i) - s_l(j)| (1/2 - 1/\alpha) (\tau_2 / q)} \right]^{1/\theta} \\ &= \prod_{i=1}^M \left(\prod_{l=1}^m 2^{s_l(i) (1/p - 1/q) \tau_2} \|\delta_{\bar{s}(i)}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/M} \prod_{i=1}^M \prod_{l=1}^m 2^{-|s_l(i) - s_l(j)| (1/2 - 1/\alpha) \frac{1}{2\theta}}. \end{aligned}$$

Учитывая это равенство и пользуясь неравенством Гельдера с показателем $M > 1$, из (3.12)

получим

$$\begin{aligned}
I_1^{\tau_2} &\leq C \sum_{\bar{0} \leq \bar{s}(1) \leq \bar{n}} \dots \sum_{\bar{0} \leq \bar{s}(M) \leq \bar{n}} \prod_{i=1}^M \left(\prod_{l=1}^m 2^{s_l(i) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \tau_2} \|\delta_{\bar{s}(i)}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/M} \prod_{i=1}^M \prod_{l=1}^m 2^{-|s_l(i) - s_l(j)| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{2\theta}} \\
&\leq C \prod_{i=1}^M \left(\sum_{\bar{0} \leq \bar{s}(1) \leq \bar{n}} \dots \sum_{\bar{0} \leq \bar{s}(M) \leq \bar{n}} \prod_{l=1}^m 2^{s_l(i) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \tau_2} \|\delta_{\bar{s}(i)}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2} \prod_{i=1}^M \prod_{l=1}^m 2^{-|s_l(i) - s_l(j)| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{M-1}} \right)^{1/M} \\
&\leq C \left(\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} \prod_{l=1}^m 2^{-|k_l| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)} \right)^{1/(M-1)} \sum_{\bar{0} \leq \bar{s} \leq \bar{n}} \prod_{l=1}^m 2^{s_l \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \tau_2} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2}.
\end{aligned}$$

Так как $1/2 - 1/\alpha > 0$, то ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|(1/2-1/\alpha)}$ сходится. Поэтому из предыдущего неравенства выводим

$$I_1^{\tau_2} \leq C \sum_{\bar{0} \leq \bar{s} \leq \bar{n}} \prod_{l=1}^m 2^{s_l(1/p-1/q)\tau_2} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2}$$

для функции $f \in L_{p, \tau_1}(\mathbb{T}^m)$. В этом неравенстве, переходя к пределу при $n_j \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, m$, и учитывая условие (3.1), получим утверждения теоремы 3.1. \square

Теорема 3.2. Пусть $1 < q < \lambda < \infty$, $1 < \tau < \infty$. Если функция $f \in L_{q, \tau}(\mathbb{T}^m)$, то

$$\|f\|_{q, \tau} \geq C \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{l=1}^m 2^{s_l(1/\lambda-1/q)\tau} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\lambda}^{\tau} \right)^{1/\tau}.$$

Доказательство. Эта теорема доказывается, как в [14, лемма 3.1], с использованием соотношения (1.14) и теоремы 3.1. \square

Следствие 3.1. Пусть $1 < q < \infty$, $1 < \tau < \infty$, $1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_m$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$. Тогда для ядра Дирихле

$$D_{n, \gamma}(\bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi \bar{x} \rangle}$$

выполняется соотношение $\|D_{n, \gamma}\|_{q, \tau} \asymp 2^{n(1-1/q)} n^{(m-1)/\tau}$.

Доказательство. Выберем число $p_0 \in (1, q)$. Тогда при $\tau_1 = p = p_0$ и $\tau_2 = \tau$ по теореме 3.1 имеем

$$\|D_{n, \gamma}\|_{q, \tau} \leq C \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1/p_0-1/q)\tau} \|\delta_{\bar{s}}(D_{n, \gamma})\|_{p_0}^{\tau} \right)^{1/\tau}. \quad (3.13)$$

Теперь в силу соотношения (2.10) и рассуждая, как в доказательстве [14, лемма Г], из (3.13) получим

$$\|D_{n, \gamma}\|_{q, \tau} \leq C \left(\sum_{\bar{s} \leq \bar{n}} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-1/q)\tau} \right)^{1/\tau} \leq C 2^{n(1-1/q)} n^{(m-1)/\tau}.$$

Докажем противоположное неравенство. Пользуясь теоремой 3.2, соотношением (2.10) и [14, лемма Г], имеем

$$\begin{aligned}
\|D_{n, \gamma}\|_{q, \tau} &\geq C \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1/\lambda-1/q)\tau} \|\delta_{\bar{s}}(D_{n, \gamma})\|_{\lambda}^{\tau} \right)^{1/\tau} \\
&\geq C \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n} \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-1/q)\tau} \right)^{1/\tau} \geq C 2^{n(1-1/q)} n^{(m-1)/\tau}. \quad \square
\end{aligned}$$

Теорема 3.3. Пусть $1 < p < q < \infty$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $1/p - 1/q < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$, $\nu = 1, \dots, m$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда справедливо соотношение

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(\mathbb{S}_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{r}} B)_{q, \tau_2} \asymp 2^{-n(r_1+1/q-1/p)} n^{(\nu-1)(1/\tau_2-1/\theta)_+}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.14)$$

где $a_+ = \max\{0, a\}$.

Доказательство. Если $\tau_2 < \theta < \infty$, то применяя неравенство Гельдера, а при $\theta \leq \tau_2$ применяя неравенство Йенсена, и учитывая, что $1/p - 1/q < r_j$, $j = 1, \dots, m$, нетрудно убедиться, что (см. доказательства неравенств (2.15) и (2.16))

$$\left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{l=1}^m 2^{s_l(1/p-1/q)\tau_2} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \leq C \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1}^\theta \right)^{1/\theta}.$$

Поэтому в силу теоремы 3.1 имеем $\mathbb{S}_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{r}} B \subset L_{q, \tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

Пусть $f \in \mathbb{S}_{p, \tau, \theta}^{\bar{r}} B$. Тогда по свойству наилучшего приближения и неравенству (3.2) имеем

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{q, \tau_2} \leq \|f - S_n^{(\bar{\gamma})}(f)\|_{q, \tau_2} \leq \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \geq n} \prod_{l=1}^m 2^{s_l(1/p-1/q)\tau_2} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1}^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}. \quad (3.15)$$

Если $\tau_2 < \theta$, то положим $\beta = \theta/\tau_2 > 1$, $1/\beta + 1/\beta' = 1$ и, применяя неравенство Гельдера и пользуясь [14, леммой В], при $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$, $\gamma'_j = (r_j + 1/q - 1/p)/(r_1 + 1/q - 1/p)$, $j = 1, \dots, m$, получим

$$\begin{aligned} E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{q, \tau_2} &\leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1}^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \geq n} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \tau_2 \beta'} \prod_{l=1}^m 2^{s_l(1/p-1/q)\tau_2 \beta'} \right)^{1/\tau_2 \beta'} \\ &\leq C \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1}^\theta \right)^{1/\theta} 2^{-n(r_1+1/q-1/p)} (n+1)^{(m-1)(1/\tau_2-1/\theta)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Если $\theta \leq \tau_2$, то, применяя к правой части неравенства (3.15) неравенство Йенсена (см. [4, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]), имеем

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{q, \tau_2} \leq \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1}^\theta \right)^{1/\theta} 2^{-n(r_1+1/q-1/p)}. \quad (3.17)$$

Из неравенств (3.16) и (3.17) следует оценка

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(\mathbb{S}_{q, \tau_1, \theta}^{\bar{r}} B)_{q, \tau_2} \leq C 2^{-n(r_1+1/q-1/p)} n^{(\nu-1)(1/\tau_2-1/\theta)_+}$$

в случае $1 \leq \theta < \infty$.

Если $\theta = \infty$, то, пользуясь [14, лемма В], из (3.15) получим

$$\begin{aligned} E_n^{(\bar{\gamma})}(\mathbb{S}_{q, \tau_1, \theta}^{\bar{r}} B)_{q, \tau_2} &\leq C \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \geq n} \prod_{l=1}^m 2^{-s_l(r_1+1/q-1/p)\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1} \\ &\leq C 2^{-n(r_1+1/q-1/p)} n^{(\nu-1)/\tau_2} \end{aligned}$$

для функций $f \in \mathbb{S}_{q, \tau_1, \theta}^{\bar{r}} B$. Этим оценка сверху доказана и в случае $\theta = \infty$.

Теперь докажем оценку снизу. Если $\theta \leq \tau_2$, то рассмотрим функцию

$$f_1(2\pi\bar{x}) = 2^{-n(r_1+1-1/p)} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x} \rangle},$$

где $\tilde{\bar{s}} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ один из векторов, удовлетворяющих условию теоремы, такой что $\langle \tilde{\bar{s}}, \bar{1} \rangle = n$. Тогда функция $F_1 = C_1^{-1} f_1 \in \mathbb{S}_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{\tau}}$ (см. доказательство теоремы 2.1).

Теперь, пользуясь соотношением (2.10), нетрудно убедиться, что

$$E_n^{(\bar{\tau})}(\mathbb{S}_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{\tau}} B)_{q, \tau_2} \geq E_n^{(\bar{\tau})}(F_1)_{q, \tau_2} = C_1^{-1} \|f_1\|_{q, \tau_2} \geq C 2^{-n(r_1+1/q-1/p)}.$$

в случае $\theta \leq \tau_2$.

Пусть $\tau_2 < \theta$. Рассмотрим функцию

$$f_2(2\pi\bar{x}) = n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(r_1+1-1/p)} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x} \rangle}.$$

Тогда функция $F_2 = C_2^{-1} f_2 \in \mathbb{S}_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{\tau}} B$. Таким образом,

$$E_n^{(\bar{\tau})}(\mathbb{S}_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{\tau}} B)_{q, \tau_2} \geq E_n^{(\bar{\tau})}(F_2)_{q, \tau_2} = C_2^{-1} \|f_2\|_{q, \tau_2}. \quad (3.18)$$

Далее, учитывая оценку нормы ядра Дирихле по гиперболическому кресту (см. следствие 3.1), имеем

$$\|f_2\|_{q, \tau_2} \geq C n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(r_1+1-1/p)} \left\| \sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x} \rangle} \right\|_{q, \tau_2} \geq C 2^{-n(r_1+1/q-1/p)} n^{(m-1)(1/\tau_2-1/\theta)}.$$

Следовательно, учитывая, что $\nu < m$, из неравенства (3.18) получим

$$E_n^{(\bar{\tau})}(\mathbb{S}_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{\tau}} B)_{q, \tau_2} \geq C 2^{-n(r_1+1/q-1/p)} n^{(m-1)(1/\tau_2-1/\theta)} \geq C 2^{-n(r_1+1/q-1/p)} n^{(\nu-1)(1/\tau_2-1/\theta)}$$

в случае $\tau_2 < \theta$.

Если $\theta = \infty$, то рассматривая функцию f_{21} (см. доказательство теоремы 2.1) и пользуясь теоремой 3.2, получим оценку снизу величины $E_n^{(\bar{\tau})}(\mathbb{S}_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{\tau}} B)_{q, \tau_2}$. \square

Заключение

Сравним полученные здесь некоторые результаты (а именно, теоремы 2.1, 2.2, 3.3) с известными результатами, имеющими непосредственное отношение к теме исследований данной работы.

1. Из теоремы 2.1 следуют теорема 2.3 из [14] при $\tau = p$ в случае $\theta = \infty$ и теорема 1 из статьи [15] при $\tau = p$, $1 < \tau \leq 2$, в случае $1 \leq \theta < \infty$; в отличие от указанных теорем из работ [14; 15] в теореме 2.1 порядок величины $E_n^{(\bar{\tau})}(\mathbb{S}_{p, \tau, \theta}^{\bar{\tau}} B)_{p, \tau}$ зависит от параметра τ пространства Лоренца $L_{p, \tau}(\mathbb{T}^m)$.

В теореме 2.2 порядок величины $E_n^{(\bar{\tau})}(\mathbb{S}_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{\tau}} B)_{p, \tau_2}$ зависит от параметров τ_1, τ_2 пространства Лоренца $L_{p, \tau}(\mathbb{T}^m)$. Это еще одно отличие от оценок в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$.

2. При $\tau_1 = p$ и $\tau_2 = q$ из теоремы 3.3 получим теорему 2.2 из [14] и теорему 2 из статьи [15] в случаях $\theta = \infty$ и $1 \leq \theta < \infty$ соответственно.

3. Теоремы 2.1, 2.2, 3.3 могут быть полезными для нахождения порядков наилучшего n -членного приближения тригонометрического поперечника и линейного поперечника класса $\mathbb{S}_{p, \tau_1, \theta}^{\bar{\tau}} B$ пространства Лоренца $L_{q, \tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

В работе [18] изучен порядок тригонометрического поперечника класса Никольского — Бесова в анизотропном пространстве Лоренца $L_{\bar{q}, \tau}(\mathbb{T}^m)$. Чтобы отличить анизотропное пространство $L_{\bar{q}, \tau}(\mathbb{T}^m)$ от рассматриваемого нами пространства Лоренца $L_{q, \tau}(\mathbb{T}^m)$, обозначим его через $L_{\bar{q}, \tau}^*(\mathbb{T}^m)$ и в случае $q_1 = \dots = q_m = q$ будем писать $L_{q, \tau}^*(\mathbb{T}^m)$ вместо $L_{\bar{q}, \tau}^*(\mathbb{T}^m)$.

Известно, что если $q < \tau$, то $L_{q, \tau}(\mathbb{T}^m) \subset L_{\bar{q}, \tau}^*(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_{L_{\bar{q}, \tau}^*} \leq C \|f\|_{q, \tau}$, где $\|f\|_{L_{\bar{q}, \tau}^*}$ — норма пространства $L_{\bar{q}, \tau}^*(\mathbb{T}^m)$ (см. [25]).

Поэтому из теоремы 1 статьи [18] для тригонометрического поперечника $d_M(\overline{S}_{p,\tau_1,\theta}^r B)_{L_{q,\tau_2}^*}$ класса $\overline{S}_{p,\tau_1,\theta}^r B$ в пространстве $L_{q,\tau_2}^*(\mathbb{T}^m)$ получим оценку

$$d_M(\overline{S}_{p,\tau_1,\theta}^r B)_{L_{q,\tau_2}^*} \leq CM^{-(r_1-1/p+1/2)}(\log M)^{(\nu-1)(r_1-1/p+1/2)+(\nu-1)(1/2-1/\theta)+}$$

в случае $1 < p < 2 < q < \frac{p}{p-1} = p'$, $p < \tau_1$.

Выбирая натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, из теоремы 3.3 получим

$$E_M^{\overline{r}}(\overline{S}_{p,\tau_1,\theta}^r B)_{q,\tau_2} \asymp M^{-(r_1-1/p+1/q)}(\log M)^{(\nu-1)(r_1-1/p+1/q)+(\nu-1)(1/\tau_2-1/\theta)+}$$

при $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$.

Теперь, сравнивая последние две оценки видим, что порядок величины $d_M(\overline{S}_{p,\tau_1,\theta}^r B)_{L_{q,\tau_2}^*}$ лучше, чем порядок $E_M^{\overline{r}}(\overline{S}_{p,\tau_1,\theta}^r B)_{q,\tau_2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва: Мир, 1974. 333 с.
2. **Коляда В.И.** Перестановки функций и теоремы вложения // Усп. мат. наук. 1989. Т.44, № 4. С. 61–95.
3. **Edmunds D.E., Evans W.D.** Hardy operators, function spaces and embedding. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 328 p.
4. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
5. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.
6. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-ата: Наука, 1976. 224 с.
7. **Бабенко К.И.** О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрические многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 5. С. 982–985.
8. **Теляковский С.А.** Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. 1964. Т. 63, № 3. С. 426–444.
9. **Митягин Б.С.** Приближение функций в пространствах L^p и C на торе // Мат. сб. 1962. Т. 58, № 4. С. 397–414.
10. **Бугров Я.С.** Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной // Мат. сб. 1964. Т. 64, № 3. С. 410–418.
11. **Галеев Э.М.** Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике \tilde{L}_p // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 4. С. 251–252.
12. **Галеев Э.М.** Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Мат. зам. 1978. Т. 23, № 2. С. 197–212.
13. **Темляков В.Н.** Приближение периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью // Мат. сб. 1980. Т. 113, № 1. С. 65–80.
14. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 3–112.
15. **Романюк А.С.** Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 10. С. 1398–1408.
16. **Романюк А.С.** Об оценках аппроксимативных характеристик классов Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. 1997. Т. 49. С. 1250–1268.
17. **Schmeisser H.-J., Sickel W.** Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses // J. Approx. Th. 2004. Vol. 128. P. 115–150.
18. **Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Y.** On the order of the trigonometric diameter of the anisotropic Nikol'skii–Besov class in the metric anisotropic Lorentz spaces // Anal. Math. 2019. Vol. 45, № 2. P. 237–247.
19. **Тихомиров В.М.** Теория приближений. Современные проблемы математики. Москва, 1987. С. 103–270.

20. **Dinh Dung**, **Temlyakov V.N.**, **Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation. / ed. S. Tikhonov. Cham: Birkhäuser, 2018. 222 p. (Ser. Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona).
21. **Temlyakov V.** Multivariate approximation. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 551 p.
22. **Kokilashvili V.**, **Yildirim Y.E.** On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces // *J. Func. Spaces Applic.* 2010. Vol. 8, no. 1. P. 67–86.
23. **Крейн С.Г.**, **Петунин Ю.И.**, **Семенов Е.М.** Интерполяция линейных операторов. Москва: Наука, 1978. 400 с.
24. **Акишев Г.** О порядках M -членных приближений классов функций симметричного пространства // *Мат. жур.* 2014. Т. 14, № 4. С. 46–71.
25. **Яценко А.А.** Итеративные перестановки функций и пространства Лоренца // *Изв. вузов. Математика.* 1998. № 5. С. 73–77.

Поступила 09.09.2019

После доработки 20.05.2020

Принята к публикации 25.05.2020

Акишев Габдолла

д-р физ.-мат. наук, профессор

Евразийский Национальный университет имени Л. Н. Гумилева

г. Нур-Султан;

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: akishev_g@mail.ru

REFERENCES

1. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9781400883899. Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*. Moscow: Mir Publ., 1974, 333 p.
2. Kolyada V.I. Rearrangements of functions and embedding theorems. *Russian Math. Surveys*. 1989. Vol. 44, no. 5. P. 73–117.
3. Edmunds D.E., Evans W.D. *Hardy operators, function spaces and embedding*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.
4. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems*. Moscow: Nauka, 1977.
5. Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. Spaces of functions of mixed smoothness from the decomposition point of view. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989. Vol. 187. P. 143–161.
6. Amanov T.I. *Prostranstva differentsiruemyykh funktsii s dominiruyushchei smeshannoi proizvodnoi* [Spaces of differentiable functions with dominant mixed derivative], Alma-Ata: Nauka, 1976. 224 p.
7. Babenko K.I. Approximation by trigonometric polynomials in a certain class of periodic functions of several variables. *Soviet Math. Dokl.*, 1960, vol. 1, pp. 672–675.
8. Telyakovskii S.A. Some estimates for trigonometric series with quasiconvex coefficients. *Mat. Sb.*, 1964, vol. 63, no. 3, pp. 426–444 (in Russian).
9. Mityagin B.S. Approximation of functions in the spaces L_p and C on the torus. *Mat. Sb.* 1962, vol. 58, no. 4, pp. 397–414 (in Russian).
10. Bugrov Ya.S. Approximation of function classes with the dominant mixed derivative. *Mat. Sb.* 1964, vol. 64, no. 3, pp. 410–418 (in Russian).
11. Galeev E.M. Approximation of some classes of periodic functions of several variables by Fourier sums in the metric of \tilde{L}_p . *Uspekhi Mat. Nauk.*, 1977, vol. 32, no. 4, pp. 251–252 (in Russian).
12. Galeev E.M. Approximation by of Fourier sums of classes of functions with bounded derivatives. *Mat. Zam.*, vol. 23, no. 2, pp. 197–212 (in Russian).
13. Temlyakov V.N. Approximation of periodic functions of several variables with bounded mixed differences. *Mat. Sb.*, 1980, vol. 113, no. 1, pp. 65–80.
14. Temlyakov V.N. Approximation of functions with bounded mixed derivative. *Tr. Mat. Inst. Steklov.*, 1986, vol. 178, pp. 3–112 (in Russian).
15. Romanyuk A.S. Approximation of the Besov classes of periodic functions of several variables in the space L_q . *Ukrain. Mat. Zh.*, 1991, vol. 43, pp. 1297–1306. doi: 10.1007/BF01061817.

16. Romanyuk A.S. On estimates of approximation characteristics of the Besov classes of periodic functions of many variables. *Ukrain . Mat. Zh.*, 1997, vol. 499, pp. 1409–1422. doi: 10.1007/BF02487348 .
17. Schmeisser H.-J., Sickel W. Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses. *J. Approx. Th.*, 2004, vol. 128, no. 2, pp. 115–150. doi: 10.1016/j.jat.2004.04.007 .
18. Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Y. On the order of the trigonometric diameter of the anisotropic Nikol'skii-Besov class in the metric anisotropic Lorentz spaces. *Anal. Math.*, 2019, vol. 45, no. 2, pp. 237–247. doi: 10.31489/2020M1/17-26 .
19. Tikhomirov V.M., Approximation theory. *Current problems in mathematics. Fundamental directions*, vol. 14, Moscow, 1987, pp. 103–260 (in Russian). [Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1987, 41-02].
20. Dinh Dung , Temlyakov V.N., Ullrich T. *Hyperbolic cross approximation*. Ser. Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Cham: Birkhäuser, 2018, 222 p.
21. Temlyakov V. *Multivariate approximation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2018, 551 p.
22. Kokilashvili V., Yildirim Y.E. On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces. *Jour. Func. Spaces Applic.*, 2010, vol. 8, no. 1, pp. 67–86.
23. Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. *Interpolation of linear operators*. Ser. Translat. Math. Monographs, vol. 54, Providence, R.I.: American Math. Soc., 1982, 375 p. Original Russian text published in Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. *Interpolyatsiya lineinykh operatorov*, Moscow: Nauka Publ., 1978, 400 p.
24. Akishev G. On the orders M -terms approximations of classes of functions of the symmetrical space. *Mat. Zh.*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 44–71 (in Russian).
25. Yatsenko A.A. Iterative rearrangements of functions, and Lorentz spaces. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1998, vol. 42, no. 4, pp. 71–75.

Received September 9, 2019

Revised May 20, 2020

Accepted May 25, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Gabdolla Akishev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, 100008 Republic Kazakhstan; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: akishev_g@mail.ru .

Cite this article as: G. Akishev. Estimates for the best approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class in the Lorentz space by trigonometric polynomials, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 5–27 .

УДК 517.977

ВЫПУКЛОСТЬ И МОНОТОННАЯ ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ МНОЖЕСТВ С НЕПРЕРЫВНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ В ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ¹

А. Р. АЛИМОВ

Непрерывная кривая $k(\cdot)$ в линейном нормированном пространстве X называется монотонной, если функция $f(k(\tau))$ монотонна по τ для любого экстремального функционала f из единичной сферы S^* сопряженного пространства. Замкнутое множество называется монотонно линейно связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной монотонной кривой, лежащей в этом множестве. Устанавливается, что в трехмерном банаховом пространстве любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией монотонно линейно связно, если и только если норма пространства является цилиндрической или гладкой. Этот результат частично обобщает недавний результат автора этой статьи и Б. Б. Беднова, которые охарактеризовали трехмерные банаховы пространства, в которых всякое чебышёвское множество монотонно линейно связно. Мы показываем, что в конечномерном пространстве любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу (непрерывной) метрической проекцией выпукло, если и только если пространство гладко. Получен ряд новых свойств строгих солнц в трехмерных пространствах с цилиндрической нормой. Показано, что в трехмерном пространстве с цилиндрической нормой замкнутое множество M с полунепрерывной снизу метрической проекцией является строгим солнцем. Более того, такое множество M имеет стягиваемые пересечения с замкнутыми шарами и обладает непрерывной выборкой из метрической проекции. При доказательстве результатов важную роль играет новый аппарат аппроксимации единичной сферы пространства многогранниками, построенными по касательным направлениям сферы.

Ключевые слова: множество с непрерывной метрической проекцией, чебышёвское множество, солнце, монотонно линейно связное множество.

A. R. Alimov. Convexity and monotone linear connectivity of sets with a continuous metric projection in three-dimensional spaces.

A continuous curve $k(\cdot)$ in a normed linear space X is called monotone if the function $f(k(\tau))$ is monotone with respect to τ for any extreme functional f of the unit dual sphere S^* . A closed set is monotone path-connected if any two points from it can be connected by a continuous monotone curve lying in this set. We prove that in a three-dimensional Banach space any closed set with lower semi-continuous metric projection is monotone path-connected if and only if the norm of the space is either cylindrical or smooth. This result partially extends a recent result of the author of this paper and B. B. Bednov, who characterized the three-dimensional spaces in which any Chebyshev set is monotone path-connected. We show that in a finite-dimensional Banach space any closed set with lower semi-continuous (continuous) metric projection is convex if and only if the space is smooth. A number of new properties of strict suns in three-dimensional spaces with cylindrical norm is put forward. It is shown that in a three-dimensional space with cylindrical norm a closed set M with lower semi-continuous metric projection is a strict sun. Moreover, such a set M has contractible intersections with closed balls and possesses a continuous selection of the metric projection operator. Our analysis depends substantially on the novel machinery of approximation of the unit sphere by polytopes built from tangent directions to the unit sphere.

Keywords: set with continuous metric projection, Chebyshev set, sun, monotone path-connected set.

MSC: 41A65

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-28-46

1. Введение и формулировка основных результатов

Величиной наилучшего приближения, или расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$, называется

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №18-01-00333-а, 19-01-00332-а) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ 6222.2018.1).

величина $\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения) из множества M для заданного $x \in X$ обозначается $P_M x$. Иными словами, $P_M x := \{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\}$. Отображение $x \mapsto P_M x$ называется *метрической проекцией* точки x на множество M .

Отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ называется *полунепрерывным снизу*, если множество $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \cap U \neq \emptyset\}$ открыто для всякого открытого множества $U \subset Y$. Это определение эквивалентно следующему (см. [1, §5]):

$$\text{для любых } x_0 \in X, x_n \rightarrow x_0 \text{ и любого } y \in F(x_0) \text{ найдется последовательность } y_n \in F(x_n), n \in \mathbb{N}, \text{ такая, что } y_n \rightarrow y \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Отображение $F : X \rightarrow 2^X$ называется *h-непрерывным* (*непрерывным по Хаусдорфу*), если для любых $x \in X$ и $(x_n) \subset X$ из условия $x_n \rightarrow x$ следует $h(Fx_n, Fx) \rightarrow 0$, где $h(Fx_n, Fx)$ — хаусдорфово расстояние между множествами Fx_n и Fx . Хорошо известно, что если M имеет компактные пересечения с замкнутыми шарами (такое множество называется ограничено компактным), то метрическая проекция P_M полунепрерывна сверху, а ее полунепрерывность снизу эквивалентна непрерывности по Хаусдорфу (см. [10]).

Ниже мы изучаем структурные свойства замкнутых множеств с полунепрерывной снизу метрической проекцией (непрерывной метрической проекцией) в конечномерных нормированных пространствах. Ставится задача описания пространств, в которых такие множества характеризуются в терминах более слабых, чем выпуклость. В качестве такой характеристики рассматривается свойство монотонной линейной связности множества (см. определение 1 ниже). Целью работы является характеристика пространств размерности ≤ 3 , в которых любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией монотонно линейно связно (теорема 1). В частности, показывается, что такое множество монотонно линейно связно в трехмерных пространствах вида $Y \oplus_{\infty} \mathbb{R}$ (где $\dim Y = 2$). Доказательство теоремы 1 потребовало решения давно стоящей задачи о строгой солнечности множества с непрерывной метрической проекцией. Ответ (в нужном нам частном случае трехмерных пространств с цилиндрической нормой) получен в теореме 2. В теореме 3 дается характеристика конечномерных пространств, в которых замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией выпукло (характеризационным свойством является гладкость пространства). Основными результатами работы являются теоремы 1–3.

В настоящей статье мы продолжаем исследования, начатые автором и Б.Б. Бедновым. В них была решена задача описания трехмерных пространств, в которых чебышёвские множества монотонно линейно связны (см. теорему А ниже).

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $k(\tau), 0 \leq \tau \leq 1$, — непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X . Кривая $k(\cdot)$ называется *монотонной*, если функция $f(k(\tau))$ монотонна по τ для любого экстремального функционала f из единичной сферы S^* сопряженного пространства. Замкнутое множество называется *монотонно линейно связным* (см. [1, §9]), если любые две его точки можно соединить непрерывной монотонной кривой, лежащей в этом множестве.

Монотонная линейная связность является более сильным свойством, чем линейная связность и более слабым, чем выпуклость. К примеру, единичная окружность на плоскости линейно связна, но не монотонно линейно связна. Координатный крест в пространстве ℓ_2^{∞} монотонно линейно связан, но не является выпуклым. Классическим примером монотонно линейно связного множества является множество (обобщенных) дробно-рациональных функций в пространстве $C(Q)$ с чебышёвской нормой (см. [1]).

Понятие монотонной линейной связности оказалось важным во многих задачах теории приближений. Например, с использованием аппарата монотонной линейной связности солнечность чебышёвского множества впервые была установлена при ограничениях типа связности (см. [1, §9.2; 25]). Различные варианты монотонной связности (слабая монотонная связность,

устойчивая монотонная связность) и их приложения к вопросу существования непрерывных выборок из множеств наилучших и почти наилучших приближений недавно исследовались И. Г. Царьковым [24–26] в симметричном и несимметричном случаях.

Точка s , лежащая на границе единичного шара B , называется точкой *гладкости* шара B (единичной сферы S), если опорная гиперплоскость к шару B в точке s единственна (иными словами, если норма пространства дифференцируема по Гато в точке s). Множество точек гладкости сферы S обозначается через $\text{sm } S$. Напомним, что если X_1, X_2 — линейные нормированные пространства, то ℓ^∞ -прямой суммой $X_1 \oplus_\infty X_2$ пространств X_1 и X_2 называется прямая сумма $X_1 \oplus X_2$ с нормой $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}\}$.

Следующая основная теорема описывает трехмерные нормированные пространства, в которых любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу (непрерывной) метрической проекцией монотонно линейно связно.

Теорема 1. *В трехмерном нормированном пространстве X любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу (непрерывной) метрической проекцией монотонно линейно связно, если и только если выполнено одно из следующих двух условий:*

- 1) *пространство X гладко (т. е. $\text{sm } S = S$);*
- 2) *пространство X имеет цилиндрическую норму, т. е. $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$, $\dim Y = 2$.*

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\emptyset \neq M \subset X$. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \emptyset$ (называемая *точкой светимости*) такая, что

$$y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x) \quad \text{для всех } \lambda \geq 0 \quad (1.2)$$

(это геометрически означает, что из точки y исходит “солнечный” луч, проходящий через x , для каждой точки которого точка y является ближайшей из M). Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \emptyset$ и условие (1.2) выполнено для любой точки $y \in P_M x$.

Множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно строгой солнечности) для M .

Согласно недавним исследованиям, свойства солнечности и локальной солнечности оказались тесно связанными с одной важной задачей геометрической оптики, в которой изучаются решения уравнения эйконала с особенностями в некотором фиксированном подмножестве области определения (см., например, [1; 17; 23; 27]). “Солнца” являются наиболее естественными объектами, для которых выполнен обобщенный критерий Колмогорова элемента наилучшего приближения (лемма С). Им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса (см., например, [1] и лемму С ниже).

З а м е ч а н и е 1. На нормированной плоскости любое солнце, а значит, и любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией (см. (2.1) ниже), монотонно линейно связно (см. [6]) и обратно, замкнутое монотонно линейно связное подмножество нормированной плоскости является солнцем (см. [6; 13]).

Множество M называется *чебышёвским множеством*, если оно есть множество существования и единственности, т. е. если для каждой точки $x \in X$ множество $P_M x$ одноточечно.

Напомним, что точка $s \in S$ называется *достижимой* точкой шара B , если найдется опорная гиперплоскость H к шару B в точке s такая, что $H \cap B = \{s\}$.

Ниже через $\text{exr } S$ мы обозначаем множество всех достижимых точек сферы S .

Следующий результат получен автором и Б. Б. Бедновым (см., например, [8]). В этой теореме достаточность доказана автором настоящей работы, необходимость — Б. Б. Бедновым. В теореме А доказательство достаточности во многом повторяет рассуждения при доказательстве достаточности в теореме 1 настоящей работы, но проще, поскольку в конечномерном случае метрическая проекция на чебышёвское множество непрерывна. Необходимость в теореме А идейно восходит к недавно построенному Б. Б. Бедновым примеру не монотонно линейно связного множества в пространстве ℓ_3^1 . Соответствующее множество строится как дополнение невыпуклого объединения нескольких открытых полупространств, касающихся единичной сферы по негладкой достижимой точке.

Теорема А. *В трехмерном нормированном пространстве X любое чебышёвское множество монотонно линейно связно, если и только если выполнено одно из следующих двух условий:*

- 1) *любая достижимая точка единичной сферы пространства X является точкой гладкости ($\text{exp } S \subset \text{sm } S$);*
- 2) *пространство X имеет цилиндрическую норму, т. е. $X = Y \oplus_{\infty} \mathbb{R}$.*

Теорема 1 частично обобщает и усиливает теорему А.

З а м е ч а н и е 2. В конечномерном пространстве любое чебышёвское множество является солнцем. Поэтому (см. замечание 1) на нормированной плоскости любое чебышёвское множество монотонно линейно связно.

Строгие солнца и множества с полунепрерывной снизу метрической проекцией обладают рядом общих свойств. Например, в линейном нормированном пространстве X для каждого множества M , принадлежащего любому из этих классов множеств, выполняется включение

$$\text{conv } P_M x \subset S(x, \rho(x, M)) \quad \text{для любого } x \in X \quad (1.3)$$

(см., например, [5]), т. е. выпуклая оболочка множества ближайших точек для любой точки $x \notin M$ содержится в собственной грани соответствующей сферы. Для солнц, не являющихся строгими солнцами, утверждение (1.3) может нарушаться даже в двумерном случае. Н. В. Невесенко (см. [18]) охарактеризовал банаховы пространства, в которых класс ограниченно компактных строгих солнц совпадает с классом ограниченно компактных непустых замкнутых множеств, имеющих полунепрерывную снизу метрическую проекцию. Такой класс пространств (который Н. В. Невесенко обозначает (RBR)) определяется следующим свойством: для любого $f \in S^*$ пересечение гиперплоскости $\{x \in X \mid f(x) = 1\}$ с единичным шаром либо пусто, либо одноточечно, либо является строго выпуклым телом в этой гиперплоскости. Понятно, что никакое трехмерное пространство с цилиндрической нормой не лежит в классе (RBR), поэтому в любом таком пространстве существует замкнутое выпуклое множество с разрывной метрической проекцией (см. [19, теорема 4]).

При изучении геометрических свойств множеств с непрерывной метрической проекцией И. Г. Царьков [22, теорема 2.2] установил, в частности, что

$$\text{замкнутое подмножество конечномерного нормированного пространства с полунепрерывной снизу метрической проекцией является (P-адикличным) солнцем.} \quad (1.4)$$

О п р е д е л е н и е 3. Замкнутое множество $M \neq \emptyset$ называется *унимодальным* (или LG-множеством, глобальным минимизатором; см., например, [1, § 3.3]), если для любой точки $x \notin M$ каждый локальный минимум функции расстояния $\Phi_x(y) = \|y - x\|$, $y \in M$, является глобальным, что объясняет происхождение термина “LG-множество” (local-global). Иными словами, из того, что $y \in P_{M \cap B(y, \varepsilon)} x$ при некотором $\varepsilon > 0$, следует, что $y \in P_M x$.

З а м е ч а н и е 3. Хорошо известно, что унимодальными являются любое строгое солнце и любое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией (см., например, [1, § 3.3]).

О п р е д е л е н и е 4. Если Q обозначает некоторое свойство (например, “связность”), мы будем говорить, что замкнутое множество M обладает свойством

B - Q , если $M \cap B(x, r)$ обладает свойством Q или пусто при всех $x \in X$, $r > 0$.

Множество называется B -солнцем, если любое его непустое пересечение с произвольным замкнутым шаром является солнцем.

Автор [4] показал, что

B -солнечное унимодальное множество является строгим солнцем. (1.5)

В трехмерных пространствах с цилиндрической нормой мы обобщаем указанные выше результаты (1.4), (1.5) следующим образом.

Теорема 2. *В трехмерном пространстве с цилиндрической нормой замкнутое множество M с полунепрерывной снизу метрической проекцией является строгим солнцем.*

Более того, такое множество M является B -стягиваемым, B -ретрактом, и на него существует непрерывная выборка из метрической проекции.

З а м е ч а н и е 4 (аналог теоремы 2 для пространства ℓ_n^∞). *В пространстве ℓ_n^∞ замкнутое множество M с полунепрерывной снизу метрической проекцией является строгим солнцем.* Действительно, множество M унимодально как множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией и является солнцем по (1.4). Теперь требуемый результат следует из (1.5), поскольку в ℓ_n^∞ любое солнце является B -солнцем (см. [5, § 4]).

З а м е ч а н и е 5. В условиях теоремы 2 существует строгое солнце (и, более того, замкнутое выпуклое множество), метрическая проекция на которое не полунепрерывна снизу (по поводу более общего результата см. [19, теорема 4]). Это показывает, что обратная импликация в первом утверждении теоремы 2 неверна.

З а м е ч а н и е 6. На нормированной плоскости любое солнце (а значит, и любое замкнутое множество с полунепрерывной метрической проекцией) монотонно линейно связно (см. замечание 1) и, как следствие, является B -солнцем. Поэтому в силу (1.5) на нормированной плоскости замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией является строгим солнцем.

Конечномерные пространства, в которых любое ограниченное множество существования с полунепрерывной снизу метрической проекцией выпукло, описываются следующим образом (И. Г. Царьков [22]): множество крайних точек $\text{ext } S^*$ сопряженной сферы S^* плотно в ней. В следующей теореме дается решение задачи о характеристизации конечномерных пространств, в которых всякое множество с непрерывной метрической проекцией выпукло. Удивительно, но эта задача ранее по-видимому не рассматривалась.

Теорема 3. *В конечномерном пространстве замкнутое множество с полунепрерывной снизу (непрерывной) метрической проекцией выпукло, если и только если пространство является гладким.*

З а м е ч а н и е 7. Напомним, что задача характеристизации пространств, в которых любое чебышёвское множество выпукло, решена только для размерностей ≤ 4 (см. [12]). В отличие от упомянутой ситуации, в теореме 3 ответ дается для любой конечной размерности n .

В работе важную роль играет аппарат выпуклости множества по направлениям и, в частности, леммы D и E о выпуклости солнц по касательным направлениям единичной сферы.

2. Вспомогательные результаты

Всюду ниже:

X — действительное линейное нормированное пространство;

$B(x, r)$ и $S(x, r)$ — соответственно, замкнутый шар и сфера с центром x и радиусом r ;

$\dot{B}(x, r)$ — открытый шар с центром x и радиусом r .

В частном случае мы полагаем:

$B := B(0, 1)$ — единичный шар;

$\dot{B} := \dot{B}(0, 1)$ — открытый единичный шар;

$S = S(0, 1)$ — единичная сфера;

S^* — единичная сфера сопряженного пространства;

$\text{ext } S$ — множество крайних (экстремальных) точек сферы S ;

$\text{ri } A$ и $\text{rb } A$ — соответственно, относительная внутренность и относительная граница выпуклого множества A .

При изучении геометрических свойств солнц в конечномерных нормированных пространствах А. Л. Браун (см. [13; 14; 16; 1, п. 9.3]) ввел важный класс (ВМ) линейных нормированных пространств. В таких пространствах оказалось возможным установить ряд нетривиальных результатов о геометрическо-топологических свойствах солнц и близких к ним множеств.

Напомним, что линейное нормированное пространство X называется (ВМ)-пространством, если

$$B(0, \|x\|) \cap (\text{m}(x, y) \setminus \{x\}) \neq \emptyset, \quad \text{когда } [x, x - y] \cap \dot{B}(0, \|x\|) = \emptyset, \quad x \neq 0.$$

Здесь и далее $\text{m}(x, y)$ — пересечение всех замкнутых шаров, содержащих точки x, y (оболочка Банаха — Мазура точек x и y).

Класс (ВМ)-пространств содержит все гладкие пространства, все двумерные пространства с полиэдральным единичным шаром, пространства $\ell_n^\infty, c_0, c, \ell^\infty$ (см. [1]). Строго выпуклое пространство лежит в классе (ВМ) тогда и только тогда, когда оно гладкое [13]. Пространства $\ell^1, \ell_n^1, n \geq 3$, не принадлежат классу (ВМ).

Воспользуемся результатами А. Л. Брауна, который охарактеризовал двумерные и трехмерные (ВМ)-пространства.

Лемма А [13, теорема 5.5]. *Для нормированной плоскости X следующие условия эквивалентны:*

- a) $X \in (\text{ВМ})$;
- b) $\text{sm } S^* \cap \text{ext } S^* \subset \text{exp } S^*$;
- c) *если $x \in S$, то или $x \in \text{sm } S$ или s — общая крайняя точка двух отрезков, лежащих в сфере S .*

Как следствие полиэдральное двумерное пространство лежит в классе (ВМ).

Лемма В [15, теорема 5.1]. *Трехмерное пространство X лежит в классе (ВМ), если и только если X или является гладким пространством, или имеет вид $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$, где Y — двумерное (ВМ)-пространство.*

Известно, что ограниченно компактное монотонно линейно связное подмножество банахова пространства является солнцем (см. [1, теорема 9.3]). Однако имеются примеры конечномерных пространств (любой размерности ≥ 3), содержащих не монотонно линейно связные чебышёвские множества и солнца (см., например, [1, пример 9.1]).

Х. Беренс и Л. Хетцельт установили метрическую выпуклость (относительно так называемой ассоциированной нормы) солнц в произвольных двумерных пространствах и в пространстве ℓ_n^∞ (см. [1]). А. Л. Браун [13, теорема 4.2] установил метрическую выпуклость солнц в конечномерных (ВМ)-пространствах. Как следствие [6, теорема 4.1]

$$\text{произвольное солнце на нормированной плоскости и в конечномерных (ВМ)-пространствах монотонно линейно связно.} \quad (2.1)$$

Для негладких конечномерных пространств иной структуры (и размерности ≥ 3) вопрос о монотонной линейной связности солнц ранее не был исследован. В бесконечномерном случае И. Г. Царьков недавно установил, что ограниченно компактное солнце в пространстве $C(Q)$ монотонно линейно связно (см. также [6]).

З а м е ч а н и е 8. Трехмерное пространство с цилиндрической нормой вида

$$X = Y \oplus_{\infty} \mathbb{R}$$

не обязательно лежит в классе (ВМ) — достаточно в качестве Y взять пространство со строго выпуклым негладким шаром (см. лемму В). Поэтому достаточность в теореме 1 не вытекает из (2.1) и (1.4).

З а м е ч а н и е 9. Из теоремы 3 следует, что в случае выполнения условия 1) теоремы 1 в пространстве X любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией выпукло (и, значит, монотонно линейно связно).

О п р е д е л е н и е 5. Ниже под *плоскостью* мы будем понимать двумерное аффинное подпространство в X . Если $X = Y \oplus_{\infty} \mathbb{R}$ — трехмерное пространство с цилиндрической нормой, то под *координатной плоскостью* мы будем понимать либо плоскость, параллельную основанию единичного шара B (цилиндра), либо плоскость, параллельную двумерной плоскости, натянутой на образующую цилиндра B и некоторое касательное направление к единичной сфере S_Y пространства Y .

В частности, плоскость, параллельная двумерной боковой грани цилиндра B (если такая имеется), является координатной. На любой плоскости H рассматривается норма, индуцированная нормой пространства X на H (в качестве начала координат плоскости H можно брать любую точку θ из H ; единичный шар B_H пространства H определяется пересечением $B(\theta, 1) \cap H$). В случае $X = Y \oplus_{\infty} \mathbb{R}$ плоскости, параллельные плоскости Y (или, что то же самое, основанию цилиндра — единичного шара B пространства X), будем называть *главными координатными плоскостями*.

Напомним (см. [1, § 3.2]), что множество

$$\mathring{K}(y, x) = \bigcup_{r>0} \mathring{B}(-ry + (r+1)x, (r+1)\|x-y\|), \quad (2.2)$$

состоящее из гомотетичных раздутий шара $\mathring{B}(x, \|x-y\|)$ относительно граничной точки y , называется *опорным конусом* к шару $B(x, \|x-y\|)$. Следующий результат (см., например, [1, теорема 3.1]) является аналогом классического критерия Колмогорова ближайшего элемента при приближении подпространствами и, более общо, выпуклыми множествами.

Лемма С. *Множество $M \subset X$ является солнцем в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ найдется точка $y \in P_M x$ такая, что $\mathring{K}(y, x) \cap M = \emptyset$.*

Далее напомним следующее определение.

О п р е д е л е н и е 6 (см. [3]). Для точки $y \in S$ через Λ_y обозначим множество предельных точек выражения $(y-z)/\|y-z\|$ при $z \rightarrow y$, $z \in S$ (т. е. Λ_y — множество *полукасательных направлений* к сфере S в точке y). Направление d называется (глобально) *касательным направлением* для сферы S , если для любой точки $y \in S$ условие опорности направления d в точке y влечет, что $d \in \Lambda_y$, т. е. направление d является касательным в точке y . Множество M называется *выпуклым по направлению d* , если из того, что $x, y \in M$, $(y-x) \parallel d$, вытекает, что $[x, y] \subset M$.

Нам потребуются два недавних результата о выпуклости солнц по касательным направлениям единичной сферы, доказанные автором и Е. В. Щепиным.

Лемма D [2, теорема 2.4]. *В нормированном пространстве солнце выпукло по любому касательному направлению единичной сферы.*

Лемма E [3, теорема 2]. *Подмножество двумерного банахова пространства является солнцем, если и только если оно замкнуто, связно и выпукло по любому касательному направлению сферы.*

Докажем ещё несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1. *Пусть M — множество существования с полунепрерывной метрической проекцией в трехмерном пространстве X с цилиндрической нормой, H — главная координатная плоскость в X и пусть $M \cap H \neq \emptyset$. Тогда*

$$M \cap H \text{ — солнце в } H.$$

Доказательство. Согласно (1.4) M — солнце в X . По лемме D множество M выпукло по любому касательному направлению (к шару пространства X и, следовательно, к шару пространства H). По лемме E будет доказано, что M — солнце в H , если мы покажем, что множество $M' := M \cap H$ связно. Предположим, рассуждая от противного, что множество M' несвязно в H . Тогда (см., например, [1, теорема 5.2]) множество M' также не P -связно в H (т. е. для некоторой точки $x \in H$ множество ее ближайших точек из M' относительно нормы $\|\cdot\|_H$ несвязно). Не ограничивая общности, можно считать, что $0 \in H$, $x = 0$, $\rho_H(0, M') = 1$. Имеем: пересечение $B_H \cap M'$ несвязно, $\mathring{B}_H \cap M' = \emptyset$, где \mathring{B}_H — открытый единичный шар в H . Поэтому мы можем выбрать точки $u, v \in B_H \cap M'$ из различных компонент связности множества $B_H \cap M'$, $u \neq v$ (ясно, что u, v — ближайшие точки из M' для 0 на плоскости H). Плоскость H разбивает пространство X на два открытых полупространства Π^\pm . Обозначим $\mathring{B}_H^\pm := \{z \in \Pi^\pm \mid z = y + w, \text{ где } y \in \mathring{B}_H, w \in 0 \oplus_\infty \mathbb{R}\}$ (запись $w \in 0 \oplus_\infty \mathbb{R}$ означает, что проекция точки w на плоскость H вдоль образующей цилиндра B есть точка 0).

Теорема 1 из [5] утверждает, в частности, что если N — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в банаховом пространстве размерности $n \leq 3$, то N является солнцем и имеет стягиваемые пересечения с замкнутыми шарами. Отсюда вытекает (см. [1, § 5]), что множество M \mathring{B} -связно, т. е. имеет связные пересечения с открытыми шарами. Поскольку по сказанному выше $\mathring{B}_H \cap M = \emptyset$ и так как множество \mathring{B}_H разделяет шар \mathring{B} , то

$$M \cap (\mathring{B}_H^+ \cap \mathring{B}) = \emptyset \quad \text{или} \quad M \cap (\mathring{B}_H^- \cap \mathring{B}) = \emptyset. \quad (2.3)$$

Без ограничения общности считаем, что выполнен первый случай, т. е. “верхняя половинка” цилиндра B не имеет точек из M в своей внутренности.

Рассмотрим точку $w_\alpha := (1 - \alpha)u + (0 \oplus_\infty \alpha)$. По хорошо известной эквивалентности

$$B(\xi, r) \subset B(\xi', r') \iff \|\xi - \xi'\| \leq r' - r$$

имеем, что при $0 < \alpha < 1/2$ шар $B(w_\alpha, \alpha)$ содержится в $B(0, 1)$, а при малых $\alpha > 0$ он лежит в замыкании полупространства Π^+ , поэтому $\mathring{B}(w_\alpha, \alpha) \subset (\mathring{B}_H^+ \cap \mathring{B})$ при малых $\alpha > 0$. Так как по (2.3) $M \cap (\mathring{B}_H^+ \cap \mathring{B}) = \emptyset$, то $M \cap \mathring{B}(w_\alpha, \alpha) = \emptyset$, и поскольку $\|u - w_\alpha\| = \alpha$, то u — ближайшая точка из M для точки w_α . По лемме C $\mathring{K}(u, w_\alpha) \cap M = \emptyset$, что вместе с представлением (2.2) для опорного конуса $\mathring{K}(u, w_\alpha)$ влечет, что $\mathring{B}(w_1, 1) \cap M = \emptyset$ (напомним, что $w_1 = 0 \oplus_\infty 1$ по определению точки w_α). Ясно, что $u \in S(w_1, 1)$. По построению $B(w_1, 1) \cap H = B_H$, поэтому $v \in S(w_1, 1)$. Таким образом, поскольку $\mathring{B}(w_1, 1) \cap M = \emptyset$ и $u, v \in S(w_1, 1)$, то $u, v \in P_M w_1$.

Один известный результат И. Г. Царькова (см. [22, лемма 2.5]) утверждает, что если N — замкнутое подмножество конечномерного нормированного пространства с полунепрерывной

снизу метрической проекцией, $\xi \notin N$, $r := \rho(\xi, N)$, то найдется грань A сферы $S(\xi, r)$ такая, что

$$P_N \xi \subset A \quad \text{и} \quad \text{ri} A \cap P_N \xi \neq \emptyset. \quad (2.4)$$

Пусть A — грань шара $B(w_1, 1)$, выбранная в соответствии с (2.4) для $N = M$ и $\xi = w_1$. Покажем, что грань A не может быть двумерной. Действительно, если $\dim A = 2$, то имеются два случая: 1) либо A — основание цилиндра $B(w_1, 1)$, либо 2) A — его боковая грань. В случае 1), очевидно, $A = \dot{B}_H$, что сразу дает противоречие, поскольку с одной стороны $\dot{B}_H \cap M = \emptyset$, а с другой по (2.4) имеем $\text{ri} A \cap P_M \hat{z} \neq \emptyset$. Рассмотрим случай 2). Обозначим $I := A \cap B_H$ (I — отрезок). Ясно, что $u, v \in I$. Так как I лежит в пересечении боковой двумерной грани A и основания цилиндра, то направление отрезка I является касательным к сфере S и так как $u, v \in P_M \hat{z} \subset A$, то по лемме D имеем $[u, v] \subset M \cap H$, что противоречит тому, что u и v лежат в различных компонентах связности множества $B_H \cap M$. В оставшемся случае ($\dim A = 1$), рассуждая как и выше, мы очевидным образом приходим к противоречию с выпуклостью M по касательным направлениям единичной сферы (лемма D).

Таким образом, множество M' связно в H и выпукло по касательным направлениям единичной сферы S_H , и, значит, M' — солнце в H по лемме E.

Лемма 1 доказана.

Для множества M с непрерывной метрической проекцией из трехмерного пространстве $X = Y \oplus_{\infty} \mathbb{R}$ рассмотрим аналогичный вопрос об аппроксимативных свойствах множества $M \cap H$, где

плоскость H параллельна плоскости, порожденной образующей цилиндра B и произвольным фиксированным касательным направлением шара B_U пространства Y . (2.5)

Пусть $\|\cdot\|_H$ — норма на H , индуцированная нормой пространства X (как и выше, за начало координат берем любую точку из H). Понятно, что единичная сфера пространства H является прямоугольником. Без ограничения общности (см. [1, теорема 8.15]) мы будем отождествлять плоскость H с пространством $\ell_2^{\infty} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\infty})$.

А. Л. Браун получил следующую характеристику солнц в конечномерных (ВМ)-пространствах в терминах m -связности (связности по Менгеру).

Лемма F [13, теорема 4.2]. *Непустое замкнутое подмножество N конечномерного (ВМ)-пространства является солнцем, если и только если оно m -связно, т. е.*

$$(m(x, y) \setminus \{x, y\}) \cap N \neq \emptyset \quad \forall x, y \in N, \quad x \neq y.$$

Лемма 2. *Пусть M — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в трехмерном пространстве $X = Y \oplus_{\infty} \mathbb{R}$ с цилиндрической нормой, пусть плоскость H определена в (2.5). Тогда, если $M \cap H \neq \emptyset$, то*

$$M \cap H \text{ — солнце в плоскости } H.$$

Доказательство. Обозначим $M' := M \cap H$. Предположим противное: пусть M' не является солнцем в плоскости H . Напомним, что H отождествляется с пространством $\ell_2^{\infty} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\infty})$. Поскольку $\ell_n^{\infty} \in (\text{ВМ})$ (см. [13, следствие 5.2]), то по лемме F непустое замкнутое множество N является солнцем в пространстве ℓ_n^{∞} , если и только если оно m -связно. Иными словами,

$$N \text{ — солнце в } \ell_n^{\infty} \iff (m_{\infty}(x, y) \setminus \{x, y\}) \cap N \neq \emptyset \quad \forall x, y \in N, \quad x \neq y, \quad (2.6)$$

где по определению $m_{\infty}(x, y)$ — пересечение всех шаров пространства ℓ_n^{∞} , содержащих точки x и y . Соответственно, поскольку по предположению множество M' не является солнцем в H ,

то согласно (2.6) M' не m -связно в H . По определению это означает, что найдутся точки $u, v \in M'$, $u \neq v$, такие, что

$$(m_H(u, v) \setminus \{u, v\}) \cap M' = \emptyset \quad (2.7)$$

(здесь и далее $m_H(u, v)$ — пересечение всех шаров пространства H , содержащих точки u и v).

Для $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ и $y = (y^{(1)}, y^{(2)}) \in H$ будем считать, что

$$x \not\equiv y, \text{ если } x^{(i)} \neq y^{(i)} \text{ для всех } i = 1, 2.$$

Поскольку по построению одномерные грани единичного шара B_H (квадрата) пространства H параллельны касательным направлениям шара B_X пространства X , то из леммы D (примененной ко множеству M) следует, что $u \not\equiv v$ (в пространстве H). Таким образом, $m_H(u, v)$ — невырожденный прямоугольник в пространстве H (растяжение шара B_H вдоль одного из ребер). Воспользуемся следующим легко проверяемым фактом: если Z — двумерное нормированное пространство, ℓ — касательное направление к сфере S_Z и если $x, y \in S_Z$ и отрезок $[x, y]$ параллелен ℓ , то

$$m_Z(x, y) = [x, y]. \quad (2.8)$$

Для доказательства этого факта достаточно заметить, что если $x, y \in S_Z$, $[x, y] \parallel \ell$ и ℓ — касательное направление к сфере S_Z , то $f(x) = f(y)$ для некоторого $f \in \text{ext } S^*$, и далее воспользоваться следующим представлением (см. [1, §9.1]):

$$m(x, y) = \{z \in Z \mid f(z) \in [f(x), f(y)] \quad \forall f \in \text{ext } S^*\},$$

которое имеет место, в частности, в любом сепарабельном пространстве.

В нашей ситуации из (2.8) имеем, что $m_H(u, v) = m(u, v)$. Пусть u, s, v, t — вершины прямоугольника $m_H(u, v)$.

В теореме 1 работы [5] утверждается, в частности, что если N — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в банаховом пространстве размерности $n \leq 3$, то на N существует непрерывная выборка из метрической проекции. Для $z \in X$ через $p(\cdot)$ обозначим соответствующую непрерывную выборку из метрической проекции на множество M (в норме пространства X). Так как по теореме 2 M — строгое солнце (доказательство теоремы 2 независимо), то по лемме C

$$\overset{\circ}{K}(p(z), z) \cap M = \emptyset \quad \forall z \notin M. \quad (2.9)$$

Поскольку H — плоскость, параллельная боковой грани единичного шара, то в зависимости от положения точки z на прямоугольнике $m(u, v) \setminus \{u, v\}$ (и, соответственно, точки $p(z)$ на сфере (цилиндре) $S(z, \|z - p(z)\|)$), при пересечении конуса $\overset{\circ}{K}(p(z), z)$ с плоскостью H получается множество одного из следующих видов:

- 1) плоскость H ;
- 2) открытое полупространство в H с границей, параллельной одной из сторон прямоугольника $m(u, v)$;
- 3) сдвиг одного из четырех открытых координатных квадрантов $\overset{\circ}{K}_i = \{\overset{\circ}{K}(p_i, 0) - p_i\}$ плоскости H , где p_i — крайние точки единичного шара B_H пространства H , $i = 1, \dots, 4$.

Пусть точка z лежит на отрезке $[s, t]$ (напомним, что $[s, t] \cap M = \emptyset$ в силу (2.7)). Очевидно, для любой точки $z \in [s, t]$ выполнение любого из случаев 1) или 2) ведет к противоречию с (2.9): одна из точек u или v обязательно попадает в $\overset{\circ}{K}(p(z), z)$, что невозможно по лемме C.

Рассмотрим отображение $[s, t] \ni z \mapsto \varphi(z) := (p(z) - z) / \|p(z) - z\|$. Ясно, что отображение $\varphi(\cdot)$ непрерывно. Согласно сказанному выше, для любой точки $z \in [s, t]$ всегда выполнен случай 3). Поэтому точка $\varphi(z)$ лежит на главной двумерной грани сферы S_X (т. е. на грани, параллельной главной координатной плоскости). Далее, в случае 3) координатный квадрант $\overset{\circ}{K}_i$ не может быть одним и тем же для всех точек $z \in [s, t]$ (если это так, то либо конус $\overset{\circ}{K}(p(t), t)$

содержит точки u, v , либо конус $\mathring{K}(p(s), s)$ содержит точки u, v , что противоречит (2.9)). Поэтому для любой точки $z \in [s, t]$ ее образ $\varphi(z)$ лежит либо на “нижней”, либо на “верхней” главной двумерной грани сферы S_X , причем образы точек s и t не могут лежать на одной и той же главной гиперграни сферы S_X . Поскольку отображение $\varphi(\cdot)$ непрерывно, то образ отрезка $[s, t]$ связан и, следовательно, не может содержаться в объединении двух главных двумерных граней сферы S_X ; значит, образ отрезка $[s, t]$ при отображении $\varphi(\cdot)$ обязан содержать точки из боковой поверхности конуса. Но для прообраза любой такой точки при отображении $\varphi(\cdot)$ обязательно выполнен случай 1) или 2), что, как мы видели выше, приводит к противоречию с (2.9). Таким образом, исходное предположение, что M' не является солнцем в H , неверно.

Лемма 2 доказана.

О п р е д е л е н и е 7. Пусть X — трехмерное пространство $X = Y \oplus_{\infty} \mathbb{R}$ с цилиндрической нормой. Через Y_P обозначим двумерное пространство Y с нормой $\|\cdot\|_{Y_P}$, единичным шаром которой является центрально-симметричный полиэдральный цилиндр P , для которого по построению мы считаем, что

$$\text{любая сторона многоугольника } P \text{ параллельна некоторому касательному направлению сферы } S \text{ пространства } X \text{ (сферы } S_Y \text{ пространства } Y). \quad (2.10)$$

Положим

$$X_P := Y_P \oplus_{\infty} \mathbb{R}; \quad (2.11)$$

пусть B_P — единичный шар пространства X_P (B_P — полиэдральный цилиндр), $\|\cdot\|_P$ — норма пространства X_P .

Для непустого замкнутого множества M с полунепрерывной снизу метрической проекцией из трехмерного пространства $X_P = Y_P \oplus_{\infty} \mathbb{R}$, определенного в (2.11), рассмотрим аналогичный вопрос об аппроксимативных свойствах множества $M \cap H$, где теперь H — плоскость, параллельная боковой двумерной грани цилиндра B_P (единичного шара пространства X_P). Пусть H — такая плоскость, $M \cap H \neq \emptyset$. Пусть $\|\cdot\|_H$ — норма на плоскости H , индуцированная нормой исходного пространства X (как и выше, за начало координат берем любую точку из H). Без ограничения общности (см. [1, теорема 8.15]) мы будем отождествлять плоскость H с двумерным пространством $\ell_2^{\infty} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\infty})$ (единичная сфера пространства H является прямоугольником). Ниже индекс P будет соответствовать объектам в трехмерном пространстве X , определяемым в терминах нормы $\|\cdot\|_P$ на X , а индекс H — объектам на плоскости H , определяемым в терминах нормы $\|\cdot\|_H$.

Для доказательства следующей леммы 3 нам потребуется еще одна характеристика солнц в пространстве ℓ_n^{∞} (см. [7]).

Лемма G [7, теорема 2]. *Непустое множество $N \subset \ell_n^{\infty}$ является солнцем в ℓ_n^{∞} , если и только если N замкнуто, связно и пересечение N с любой координатной аффинной гиперплоскостью H в ℓ_n^{∞} является солнцем в H или пусто.*

Лемма 3. *Пусть M — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в трехмерном пространстве с цилиндрической нормой. Тогда множество M — монотонно линейно связное солнце в пространстве X_P , где X_P определено в (2.10), (2.11).*

З а м е ч а н и е 10. Несложно построить пример, показывающий что условие (2.10) в определении (2.11) пространства X_P в условиях леммы 3 является существенным.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3. Мы будем рассуждать аналогично доказательству достаточности в лемме G из [7]. Поскольку единичный шар пространства X_P является полиэдральным цилиндром, то по лемме B пространство X_P лежит в классе (BM). Поэтому по лемме F множество M m -связно.

Предположим противное: пусть утверждение леммы 3 неверно, т. е. M не является солнцем в пространстве X_P . Так как $X_P \in (BM)$, то по лемме F найдутся точки $x, y \in M$, $x \neq y$, такие, что

$$(m_P(x, y) \setminus \{x, y\}) \cap M = \emptyset. \quad (2.12)$$

Поскольку по леммам 1 и 2 пересечение $M \cap H$ является солнцем в H для любой координатной плоскости H , $H \cap M \neq \emptyset$, и поскольку, очевидно, $m_P(x, y) \cap H = m_H(x, y)$, то точки x и y не могут лежать в одной координатной плоскости. Как следствие многогранник $m_P(x, y)$ является телом.

Далее мы рассуждаем, как в [7]. Обозначим через F_1, \dots, F_ν все двумерные грани тела $m_P(x, y)$, содержащие точку x , а через E_1, \dots, E_μ — все двумерные грани тела $m_P(x, y)$, содержащие точку y (поскольку $m_P(x, y)$ — цилиндр, то $\nu, \mu \leq 3$). Рассматривая все координатные плоскости H , проходящие через точку x , и координатные плоскости H , проходящие через точку y , а также принимая во внимание, что по лемме 2 непустое пересечение $M \cap H$ является солнцем в H , из (2.12) получаем $F_i \cap M = \{x\}$, $E_j \cap M = \{y\}$, $i = 1, \dots, \nu$, $j = 1, \dots, \mu$.

Для произвольного множества $F \subset \mathbb{R}^3$ и его граничной точки z определим

$$\text{cone}(F, z) := \{\alpha f + (1 - \alpha)z \mid f \in F, \alpha \geq 0\}.$$

Несложно видеть, что направление является касательным для сферы S_Z некоторого двумерного банахова пространства Z , если и только если оно параллельно некоторому невырожденному отрезку из границы множества $m_Z(x, y)$ при некоторых x, y . Это показывает, что любая из плоскостей $\text{aff } F_i$, $\text{aff } E_j$ является координатной в пространстве X в смысле определения 5. Поскольку по леммам 1, 2 пересечение множества M с координатными плоскостями $\text{aff } F_i$ и $\text{aff } E_j$ является солнцем для любых i и j , и, следовательно, по лемме F и (2.1) это пересечение монотонно линейно связно в плоскостях $\text{aff } F_i$ и $\text{aff } E_j$, то имеем

$$\text{cone}(F_i, x) \cap M = \{x\}, \quad \text{cone}(E_j, y) \cap M = \{y\}, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Несложно видеть, что множество

$$U := \left(m(x, y) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\nu} \text{cone}(F_i, x) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\mu} \text{cone}(E_j, y) \right) \right) \setminus \{x, y\}$$

разделяет пространство X , причем точки x и y лежат в разных компонентах связности множества $X \setminus U$ и $U \cap M = \emptyset$. Однако согласно (1.4) множество M является солнцем и, следовательно, линейно связно (см. [1, теорема 8.2]), при этом $x, y \in M$. Полученное противоречие показывает, что M — солнце в пространстве X_P . Поскольку $X_P \in (BM)$, то из солнечности M в X_P вытекает, что M монотонно линейно связно в пространстве X_P (см. (2.1)).

Лемма 3 доказана.

3. Доказательства основных результатов

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. *Необходимость.* Через (ExS) обозначим класс трехмерных пространств, в которых любая достижимая точка является точкой гладкости, а через (ExD) обозначим класс трехмерных пространств, для которых множество достижимых (крайних) точек плотно в единичной сфере сопряженного пространства (класс трехмерных пространств Царькова — Фелпса; см. [20–22]). Пусть (S) — класс гладких пространств. Согласно классическому результату В. И. Бердышева — А. Брондстеда класс (ExS) состоит в точности из тех трехмерных пространств, в которых любое чебышёвское множество выпукло (см. [9; 11; 12]), а класс (ExD) — в точности из тех пространств, в которых любое ограниченное чебышёвское множество выпукло. Поэтому (ExS) \subset (ExD).

Предположим, что пространство X негладко. Если $X \in (\text{ExD}) \setminus (\text{S})$, то по теореме 3 в X существует невыпуклое замкнутое множество M' с непрерывной метрической проекцией. Однако согласно одному хорошо известному утверждению Р. Фелпса (см. [20] и [1, § 9.1]), в пространствах из класса (ExD) (любой конечной размерности ≥ 3) класс связных по Менгеру (класс монотонно линейно связных) замкнутых множеств совпадает с классом выпуклых замкнутых множеств. Поэтому множество M' не монотонно линейно связно.

Пусть теперь $X \notin (\text{ExD})$. Тогда $X \notin (\text{ExS})$. В этом случае, если норма X не является цилиндрической, то по теореме А в X существует не монотонно линейно связное чебышёвское множество (метрическая проекция на которое, конечно, непрерывна).

Таким образом, если пространство X негладко и не имеет цилиндрической нормы, то в X содержится замкнутое не монотонно линейно связное множество с непрерывной снизу метрической проекцией.

Достаточность. Пусть M — замкнутое множество с непрерывной (полу непрерывной снизу) метрической проекцией в трехмерном пространстве X . Такое множество необходимо является солнцем (см. (1.4)). Если X — гладкое пространство, то любое солнце в нем выпукло (см. [1, теорема 4.1]) и, значит, монотонно линейно связно. Пусть теперь X имеет цилиндрическую норму, т. е. $X = Y \oplus_{\infty} \mathbb{R}$. Покажем, что

$$\text{множество } M \text{ монотонно линейно связно в } X. \quad (3.1)$$

Для этой цели мы построим последовательность $Q_n \subset Y$ центрально-симметричных выпуклых многоугольников с центром в нуле, таких, что полиэдральные цилиндры

$$P_n := Q_n \oplus_{\infty} [-1, 1]$$

приближают единичный шар B пространства X в смысле (2.10), (2.11) (с $P = P_n$). Последовательность P_n строится следующим образом. На единичной сфере S_Y (двумерного) пространства Y возьмем счетное всюду плотное множество G точек гладкости (это можно сделать согласно классической теореме Мазура). Каждой такой точке $s \in G$ соответствует экстремальный функционал из φ_s сферы S_Y^* , линия уровня которого $\{x \in X \mid \varphi_s(x) = 1\}$ является опорной прямой к сфере S_Y в пространстве Y (такое соответствие не обязательно взаимно-однозначное). Если число таких экстремальных функционалов конечно, то сфера S_Y — многоугольник, B_Y — полиэдральный цилиндр и требуемый результат следует из (2.1) и леммы В. Таким образом, мы считаем, что множество $\Phi = \{\varphi_s \mid s \in G\}$ бесконечно. Отметим, что множество Φ плотно во множестве всех экстремальных функционалов сферы S^* , поскольку, как хорошо известно, множество достижимых точек выпуклого подмножества конечномерного пространства плотно во множестве его крайних точек, а любой функционал φ_s , где $s \in G$, является достижимой точкой сферы S^* . Пусть $F = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — всюду плотное счетное подмножество из Φ .

Напомним, что если пространство Z сепарабельно, $H = (h_i)_{i \in I}$ — семейство функционалов из $\text{ext } S^*$, w^* -плотное во множестве крайних точек $\text{ext } S^*$ единичной сферы сопряженного пространства, $H = -H$, $(\alpha_i) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $i \in I$, $\text{card } I \leq \aleph_0$, и $\sum \alpha_i < \infty$, то ассоциированная (по Брауну) норма $|z|$ вектора $z \in Z$ определяется следующим образом (см. [1, § 9.1]):

$$|x| = \sum_{i \in I} \alpha_i |h_i(x)|. \quad (3.2)$$

Так как $\overline{F} \supset \text{ext } S_Y^*$, то в определении (3.2) ассоциированной нормы мы можем положить $H = F \cup (-F)$, $I = \mathbb{N}$, $h_i = f_i$, $i = 1, 2, \dots$. Определим $Q_n := \{x \in Y \mid |f_i(x)| \leq 1, i = 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что Q_n — центрально-симметричный выпуклый многоугольник с центром в нуле. Поскольку множество $\text{ext } S_Y^*$ является границей Джеймса пространства Y (т. е. для каждого $x \in Y$ найдется функционал $f \in \text{ext } S_Y^*$ такой, что $f(x) = \|x\|$), то имеет место сходимость

$$Q_n \rightarrow B_Y \quad (3.3)$$

в метрике Хаусдорфа, т. е. последовательность полиэдральных шаров (Q_n) приближает шар B_Y . Далее, любая сторона многоугольника Q_n есть неоточечная часть линии уровня некоторого экстремального функционала $f \in \text{ext } S_Y^*$, который в силу построения определяется по гладкой точке шара B_Y . Как следствие

любая сторона многоугольника Q_n параллельна некоторому касательному направлению единичной сферы S_Y пространства Y . (3.4)

Определим $P_n := Q_n \oplus_{\infty} [-1, 1]$. Согласно (3.3) последовательность (P_n) приближает шар B_X , а в силу (3.4) (P_n) удовлетворяет требуемому условию (2.10): любая сторона многоугольника P_n параллельна некоторому касательному направлению сферы S пространства X .

Как и выше, для любого n через Y_{Q_n} обозначим пространство Y с нормой $\|\cdot\|_{Y_n}$, единичным шаром которой является многоугольник Q_n . Положим $X_{P_n} := Y_{Q_n} \oplus_{\infty} \mathbb{R}$ (единичным шаром пространства X_{P_n} является полиэдральный цилиндр P_n); обозначим: $\|\cdot\|_{P_n}$ — норма пространства X_{P_n} . Зафиксируем произвольно числовую последовательность $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots < \infty$ и для каждого n в соответствии с (3.2) определим ассоциированные нормы

$$|x|_{P_n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i |f_i(x)| \quad \text{и} \quad |x|_X = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i |f_i(x)|, \quad (3.5)$$

соответственно, на пространствах X_{P_n} и X .

Предположим противное: пусть (3.1) не выполнено, т. е. множество M не монотонно линейно связно в X . Тогда множество M также не m -связно в X (см. [6, теорема 4.2]) и, значит,

$$(m(u, v) \setminus \{u, v\}) \cap M = \emptyset \quad (3.6)$$

для некоторых точек $u, v \in M, u \neq v$. По построению пространство X_{P_n} удовлетворяет условию (2.10). По лемме 3 множество M является солнцем в X_{P_n} для любого n , по лемме В каждое из пространств X_{P_n} лежит в классе (ВМ). Далее, в конечномерных (ВМ)-пространствах любое солнце монотонно линейно связно согласно (2.1). Поэтому M монотонно линейно связно в X_{P_n} для любого n . Соответственно по определению монотонной связности для любых u и v из M найдется монотонная кривая $k_{P_n}(\cdot) \subset (M \cap m_{P_n}(u, v))$, их соединяющая; при этом длина кривой $k_{P_n}(\cdot)$ в норме $|\cdot|_{P_n}$ равна $|u - v|_{P_n}$ (см. [1, лемма 9.1] и [13, следствие 3.2]). Пусть $z_n \in M$ — середина этой кривой относительно ассоциированной по Брауну нормы $|\cdot|_{P_n}$, т. е.

$$|z_n - u|_{P_n} = |z_n - v|_{P_n} = \frac{1}{2}|u - v|_{P_n}. \quad (3.7)$$

Согласно сказанному выше $\|\cdot\|_{P_n} \rightarrow \|\cdot\|_X$, а из (3.5) следует

$$|\cdot|_{P_n} \rightarrow |\cdot|_X. \quad (3.8)$$

В силу соображений компактности последовательность (z_n) содержит сходящуюся подпоследовательность (z_{n_k}) (которую мы без ограничения общности отождествим с (z_n)) такую, что $z_n \rightarrow z \in M$. Тогда $|z - u|_X = |z - v|_X = \frac{1}{2}|u - v|_X$ в силу (3.7) и (3.8), и, следовательно (см. [1, §9.1]), $z \in m(u, v)$, при этом, очевидно, $z \neq u, v$. Однако это противоречит (3.6). Итак, утверждение (3.1) доказано, а вместе с ним доказана и теорема 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть M — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в трехмерном банаховом пространстве $X = Y \oplus_{\infty} \mathbb{R}$ с цилиндрической нормой. Согласно (1.4) M — солнце в X . Без ограничения общности считаем $0 \notin M, \rho(0, M) = 1$. Требуется доказать, что 0 — точка строгой солнечности множества M .

Пусть A — грань шара $B(0, 1)$, выбранная в соответствии с (2.4) для $N = M$ и $\xi = 0$ (т. е. $P_M 0 \subset A, P_M 0 \cap \text{ri } A \neq \emptyset$). Пусть $y^* \in P_M 0 \cap \text{ri } A$. Мы покажем, что y^* — точка светимости.

С учетом того, что $y^* \in \text{ri} A$, отсюда непосредственно будет вытекать, что любая точка из $M \cap A$ также является точкой светимости, что и требуется. Рассмотрим три случая.

1. Если $\dim A = 0$, то доказывать нечего: $P_M 0$ состоит из одной точки y^* , которая в силу солнечности множества M является точкой светимости, а тогда 0 — точка строгой солнечности.

2. Пусть $\dim A = 2$. Поскольку грань A плоская и $y^* \in P_M 0 \cap \text{ri} A \neq \emptyset$, то для любой точки $x_\alpha := -\alpha y^*$, $\alpha > 0$, точка y^* доставляет локальный минимум функции расстояния, т. е. найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $y^* \in P_{M \cap B(y^*, \varepsilon)} x_\alpha$ при некотором $\varepsilon > 0$. Так как M — унимодальное множество (см. определение 3), то $y^* \in P_M x_\alpha$. Поскольку $\alpha > 0$ произвольно, то y^* — точка светимости для 0 . Окончательно, любая точка из $P_M 0$ также является точкой светимости для 0 , поскольку $y^* \in \text{ri} A$ и $P_M 0 \subset A$.

3. Пусть теперь A — отрезок. Рассуждая от противного, предположим, что

точка 0 не является точкой строгой солнечности и соответственно точка y^* не является точкой светимости для нуля. (3.9)

Более того, можно считать без ограничения общности, что

$$y^* \notin P_M x_\nu \quad \text{для любого } \nu > 0, \quad \text{где } x_\nu := -\nu y^*. \quad (3.10)$$

Для $\delta > 0$ рассмотрим точку x из окрестности точки 0 . Пусть $P_x := P_M x$ и пусть A_x — грань сферы $S(x, \rho(x, M))$, для которой выполнено (2.4) с $A = A_x$, т. е.

$$P_M x \subset A_x \quad \text{и} \quad P_M x \cap \text{ri} A_x \neq \emptyset. \quad (3.11)$$

Рассмотрим отображение

$$\tau(u) = \frac{P_M u - u}{\rho(u, M)} \in S, \quad u \notin M,$$

и обозначим $I_x := \tau(x)$, $I := \tau(0)$.

Покажем, что для всех x из достаточно малой окрестности точки 0

$$\text{каждая из граней } I_x \text{ является отрезком;} \quad (3.12)$$

$$I_x \rightarrow I \quad \text{в метрике Хаусдорфа} \quad (x \rightarrow 0). \quad (3.13)$$

Более того, из (3.10) следует, что $I_x \neq I$ и $A_x \neq A$ для $x = -\alpha y^*$ при всех малых $\alpha > 0$. Отсюда и из непрерывности метрической проекции следует, что A — боковое ребро цилиндра B , при этом ребро A_x параллельно ребру A при $x = -\alpha y^*$ для малых $\alpha > 0$.

Итак, если (3.12) не выполнено, то всегда найдется близкая к 0 точка x такая, что $\dim I_x = 2$ или 0 . В этом случае согласно доказанному в случаях 1 и 2 x — точка строгой солнечности, а согласно лемме 1 из [18] для множества существования с полунепрерывной снизу метрической проекцией множество точек строгой солнечности замкнуто, поэтому 0 — точка строгой солнечности, поскольку такие точки x могут быть выбраны сколь угодно близко к 0 . Утверждение (3.13) следует из (1.1) и того, что для ограниченно компактных множеств полунепрерывность снизу метрической проекции эквивалентна ее непрерывности по Хаусдорфу (см. [10]).

Итак, для точки 0 множество $P_M 0 =: P$ ее ближайших точек — отрезок, и согласно (3.12) для всех x из достаточно малой окрестности точки 0 грань A_x сферы $S(x, \rho(x, M))$ и множество P_x ее ближайших точек — также отрезки (при этом $P_x \subset A_x$).

Пусть \hat{y}, \tilde{y} — концевые точки отрезка P . Без ограничения общности считаем, что $\mathring{K}(\tilde{y}, 0) \cap M \neq \emptyset$ (если $\mathring{K}(\tilde{y}, 0) \cap M = \emptyset$ и $\mathring{K}(\hat{y}, 0) \cap M = \emptyset$, то $\mathring{K}(y^*, 0) \cap M = \emptyset$, что противоречит (3.9)). Ввиду (3.10) из леммы С следует, что $\mathring{K}(y, 0) \cap M \neq \emptyset$ для любого $y \in \text{ri}(P \cap A)$. Поэтому \hat{y} — точка светимости для 0 . Отсюда \hat{y} — крайняя (и негладкая) точка ребра A сферы S (точка \hat{y} лежит на пересечении ребра A с одним из оснований цилиндра B).

Рассмотрим прямую $\ell := \text{span}(\hat{y} - y^*)$, параллельную отрезку A , и для $t \geq 0$ положим $x_t := t(\hat{y} - y^*)$ (ясно, что $\hat{y} \neq y^*$). Для краткости обозначим

$$r_t := \rho(x_t, M), \quad A_t := A_{x_t}, \quad P_t := P_M x_t.$$

Рассмотрим несколько случаев (в предположении, что $t \in (0, 2)$ мало).

1) $r_t > r_0$. Поскольку $y^* \in \text{ri} P \subset A$, то $y^* \in P_M x_t$ при малых $t \in (0, \delta')$ при некотором $0 < \delta' < 2$, откуда $r_t \leq r_0$ при малых t , и, значит, случай 1 невозможен при малых $t > 0$.

2) $r_t < r_0$. Этот случай при малых $t \in (0, \delta'')$ при некотором $0 < \delta'' < 2$ также невозможен, поскольку в силу (3.12) A, A_t — боковые ребра цилиндра B и по (3.13) $P_t \rightarrow P$ при $t \rightarrow 0$, что ввиду условия $r_t < r_0$ дает $P_t \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$. Однако это противоречит тому, что $\rho(0, M) = 1$.

3) $r_t = r_0$. Пусть $t \in (0, \delta''')$ при некотором $0 < \delta''' < 2$. В этом случае при малых $t > 0$ согласно (3.12) P_t — также невырожденный отрезок; обозначим его $P_t := [\tilde{y}_t, \hat{y}_t]$, считая при этом, что вектор $\hat{y} - \tilde{y}$ сонаправлен вектору $\hat{y}_t - \tilde{y}_t$. Ясно, что P_t получен из P сдвигом (вдоль прямой ℓ) и растяжением (возможно, с коэффициентом 1), при этом $\text{ri} P_t \cap \text{ri} P \neq \emptyset$, поскольку $0 < t < 2$. Рассмотрим возможные положения точки светимости y_t для точки x_t .

3а) $y_t \in \text{ri} A_t$. Очевидно, что этот случай невозможен, поскольку тогда $\overset{\circ}{K}(y_t, x_t) = \overset{\circ}{K}(y^*, 0)$, но $\overset{\circ}{K}(y_t, x_t) \cap M = \emptyset$ по лемме С, что противоречит (3.10).

3б) $y_t = \tilde{y}_t$ (и $y_t \in \text{rb} A_t$). В этом случае, поскольку $\text{ri} P_t \cap \text{ri} P \neq \emptyset$, то $\overset{\circ}{K}(y_t, x_t) \cup \overset{\circ}{K}(\hat{y}, 0) = \overset{\circ}{K}(y^*, 0)$. Поскольку по предположению \hat{y} — точка светимости для 0, а y_t — точка светимости для x_t , то $\overset{\circ}{K}(y_t, x_t) \cap M = \emptyset$ и $\overset{\circ}{K}(\hat{y}, 0) \cap M = \emptyset$ по лемме С, что с учетом предыдущего равенства дает $\overset{\circ}{K}(y^*, 0) \cap M = \emptyset$. Однако в силу леммы С это противоречит (3.10).

3с) $y_t = \hat{y}_t$ (и $y_t \in \text{rb} A_t$). Поскольку по доказанному выше случаи 3а) и 3б) невозможны при любом $0 < t' < t$, то для всех $0 < t' < t$ реализуется случай 3с). Как следствие

$$\text{длина отрезка } P_{t'} \text{ не уменьшается при возрастании } t' \in (0, t). \quad (3.14)$$

Пусть $\delta_1 := \min\{\delta', \delta'', \delta'''\}/2$, $\hat{x}_1 := x_{\delta_1}$. Ясно, что $P_{\hat{x}_1}$ — отрезок, и с учетом (3.14) мы оказываемся в рассмотренной выше ситуации (где \hat{x}_1 играет роль точки 0). Как и выше, выбирается $\delta_2 > 0$, строится точка \hat{x}_2 и так далее, при этом на любом шаге i для $t \in (0, \delta_1 + \dots + \delta_i)$ всегда выполнен случай 3с). Если ряд $\delta_1 + \delta_2 + \dots$ имеет конечную сумму σ , то полагаем $\hat{x} := x_\sigma$ и, учитывая (3.14), оказываемся в рассмотренной выше ситуации (где \hat{x} играет роль точки 0). В итоге, как и в тривиальном случае бесконечной суммы $\delta_1 + \delta_2 + \dots$, получаем, что для любого $t > 0$ выполнено $r_t = r_0$ и $y_t = \hat{y}_t$. Так как y_t — точка светимости для x_t , то по лемме С имеем $\overset{\circ}{K}(y_t, x_t) \cap M = \emptyset$, но объединение $\cup \overset{\circ}{K}(y_t, x_t)$ по всем $t > 0$ дает конус $\overset{\circ}{K}(y^*, 0)$, который согласно (3.10) и лемме С имеет непустое пересечение с M . Полученное противоречие показывает, что предположение (3.9) было неверно, и, следовательно, y^* — точка светимости. Остальные утверждения теоремы 2 доказаны в [5, теорема 1].

Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Пусть M — замкнутое подмножество с полунепрерывной снизу метрической проекцией, лежащее в конечномерном пространстве. Согласно (1.4) множество M является солнцем. Хорошо известно, что в гладком пространстве солнце выпукло (см. [1, теорема 4.1]).

Обратно, пусть пространство X негладко. Пусть $y \in S$ — точка негладкости единичной сферы S . Рассмотрим $f_1, f_2 \in X^*$, $f_1 \neq f_2$, такие, что $f_1(y) = f_2(y) = \|y\| = 1$ (такие функционалы существуют вследствие негладкости точки y). Положим

$$M_i := \{u \in X \mid f_i(u) \geq 0\}, \quad i = 1, 2, \quad M := M_1 \cup M_2.$$

Хорошо известно, что M — невыпуклое солнце. Пусть $x \in X \setminus M$. Тогда для $i = 1, 2$ имеем $f_i(x) < 0$. Далее, $\rho(x, M_i) = |f_i(x)|$, $x - f_i(x)y \in M_i$, и значит, $\rho(x, M_i) = -f_i(x)$. Без

ограничения общности можно считать, что $c := \rho(x, M_1) \leq \rho(x, M_2)$. Пусть $y' \in P_M 0$. Тогда $u := x + cy' \in P_M x$. Таким образом, для любой точки $x \notin M$ ее образ при отображении $\tau(u) = \frac{P_M u - u}{\rho(u, M)} \subset S$, $u \notin M$, является постоянным, поэтому отображение $P_M(\cdot)$ непрерывно и, значит, полунепрерывно снизу.

Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 11. Вопрос о характеризации пространств размерности ≥ 4 , в которых любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией монотонно линейно связно, остается открытым. Также неизвестен ответ на вопрос о характеризации пространств размерности ≥ 3 , в которых любое солнце (строгое солнце, ограниченное солнце, ограниченное строгое солнце) монотонно линейно связно.

З а м е ч а н и е 12. Есть основания полагать, что заключение теоремы 2 верно в любом трехмерном пространстве.

Автор благодарен И. Г. Царькову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алимов А. Р., Царьков И. Г.** Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 1 (427). С. 3–84. doi: 10.4213/rm9698.
2. **Alimov A. R., Shchepin E. V.** Convexity of suns in tangent directions // J. Convex Anal. 2019. Vol. 26, no. 4. P. 1069–1074. doi: 10.1134/S1064562419010058.
3. **Алимов А. Р., Щепин Е. В.** Выпуклость чебышёвских множеств по касательным направлениям // Успехи мат. наук. 2018. Т. 73, № 2(440). С. 185–186. doi: 10.4213/rm9813.
4. **Alimov A. R.** Continuity of the metric projection and local solar properties of sets // Set-Valued Var. Anal. 2019. Vol. 27, no. 1. P. 213–222. doi: 10.1007/s11228-017-0449-0.
5. **Алимов А. Р.** Выборки из метрической проекции и строгая солнечность множеств с непрерывной метрической проекцией // Мат. сб. 2017. Т. 208, № 7. С. 3–18. doi: 10.4213/sm8765.
6. **Алимов А. Р.** Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. математическая. 2014. Т. 78, № 4. С. 3–18. doi: 10.4213/im8128.
7. **Алимов А. Р.** Сохранение аппроксимативных свойств подмножеств чебышевских множеств и солнц в $\ell^\infty(n)$ // Изв. РАН. Сер. математическая. 2006. Т. 70, № 5. С. 3–12. doi: 10.4213/im1115.
8. **Алимов А. Р.** Монотонная линейная связность множеств с непрерывной метрической проекцией // Монотонная линейная связность множеств с непрерывной метрической проекцией: Мат. междунар. научн. конф. “Современные проблемы естественных и гуманитарных наук, их роль в укреплении научных связей между странами”, посвящ. 10-летию Филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе). 2019. С. 9–10.
9. **Бердышев В. И.** К вопросу о чебышёвских множествах // Докл. АзССР. 1966. Т. 22, № 9. С. 3–5.
10. **Blatter J., Morris P. D., Wulbert D. E.** Continuity of the set-valued metric projection // Math. Ann. 1968. Vol. 178, no. 1. P. 12–24. doi: 10.1007/BF01350621.
11. **Brøndsted A.** Convex sets and Chebyshev sets, II // Math. Scand. 1966. Vol. 18. P. 5–15.
12. **Brown A. L.** Chebyshev sets and facial systems of convex sets in finite-dimensional spaces // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1980. Vol. 41. P. 297–339. doi: 10.1112/plms/s3-41.2.297.
13. **Brown A. L.** Suns in normed linear spaces which are finite dimensional // Math. Ann. 1987. Vol. 279, no. 1. P. 87–101. doi: 10.1007/BF01456192.
14. **Brown A. L.** On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces // Workshop/Miniconference on Functional Analysis and Optimization (Canberra, 1988). Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. Canberra: Austral. Nat. Univ., 1988. Vol. 20. P. 1–15.
15. **Brown A. L.** On the problem of characterising suns in finite dimensional spaces // Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 2002. Vol. 68. P. 315–328.
16. **Brown A. L.** Suns in polyhedral spaces // Seminar of mathematical analysis (Malaga/Seville, 2002/2003). Colecc. Abierta. Vol. 64. Seville: Univ. Sevilla Secr. Publ., 2003. P. 139–146.
17. **Li T., Wang J., Wen H.** Global structure and regularity of solutions to the eikonal equation // Arch. Rational Mech. Anal. 2019. Vol. 232. P. 1073–1112.

18. Невесенко Н. В. Строгие солнца и полунепрерывность метрической проекции в линейных нормированных пространствах // *Мат. заметки*. 1978. Т. 23, № 4. С. 563–572
19. Невесенко Н. В., Ошман Е. В. Метрическая проекция на выпуклые множества // *Мат. заметки*. 1982. Т. 31, № 1. С. 117–126.
20. Phelps R. R. A representation theorem for bounded convex sets // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1960. Vol 11. P. 976–983.
21. Царьков И. Г. Ограниченные чебышевские множества в конечномерных банаховых пространствах // *Мат. заметки*. 1984. Т. 36, № 1. С. 73–87.
22. Царьков И. Г. Непрерывность метрической проекции, структурные и аппроксимативные свойства множеств // *Мат. заметки*. 1990. Т. 47, № 2. С. 137–148.
23. Tsar'kov I. G.. Singular sets of surfaces // *Russ. J. Math. Phys.* 2017. Vol. 24. P. 263–271. doi: 10.1134/S1061920817020121.
24. Царьков И. Г. Непрерывные выборки из операторов метрической проекции и их обобщений // *Изв. РАН. Сер. математическая*. 2018. Т. 82, № 4. С. 199–224. doi: 10.4213/im8695.
25. Царьков И. Г. Слабо монотонные множества и непрерывная выборка из оператора почти наилучшего приближения // *Тр. МИАН*. 2018. Т. 303. С. 246–257. doi: 10.1134/S037.
26. Царьков И. Г. Слабо монотонные множества и непрерывная выборка в несимметричных пространствах // *Мат. сб.* 2019. Т. 210, № 9. С. 129–152. doi: 10.4213/sm9107.
27. Царьков И. Г. Гладкие решения уравнения эйконала и поведение локальных минимумов функции расстояния // *Изв. РАН. Сер. математическая*. 2019. Т. 83, № 6. С. 167–194.

Поступила 19.12.2019

После доработки 28.01.2020

Принята к публикации 10.02.2020

Алимов Алексей Ростиславович

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук;

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

механико-математический факультет;

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

г. Москва

e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

REFERENCES

1. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Connectedness and solarly in problems of best and near-best approximation. *Russian Math. Surveys*, 2016, vol. 71, no. 1, pp. 1–77. doi: 10.1070/RM9698.
2. Alimov A.R., Shchepin E.V. Convexity of suns in tangent directions. *J. Convex Anal.*, 2019, vol. 26, no. 4, pp. 1069–1074. doi: 10.1134/S1064562419010058.
3. Alimov A.R., Shchepin E.V. Convexity of Chebyshev sets with respect to tangent directions. *Russian Math. Surveys*, 2018, vol. 73, no. 2, pp. 366–368. doi: 10.1070/RM9813.
4. Alimov A.R. Continuity of the Metric Projection and Local Solar Properties of Sets. *Set-Valued Var. Anal.*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 213–222. doi: 10.1007/s11228-017-0449-0.
5. Alimov A.R. Selections of the metric projection operator and strict solarly of sets with continuous metric projection. *Sb. Math.*, 2017, vol. 208, no. 7, pp. 915–928. doi: 10.1070/SM8765.
6. Alimov A.R. Monotone path-connectedness and solarly of Menger-connected sets in Banach spaces. *Izv. Math.*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 641–655. doi: 10.1070/IM2014v078n04ABEH002702.
7. Alimov A.R. Preservation of approximative properties of subsets of Chebyshev sets and suns in $\ell^\infty(n)$. *Izv. Math.*, 2006, vol. 70, no. 5, pp. 857–866. doi: 10.1070/IM2006v070n05ABEH002330.
8. Alimov A.R. Monotone path connectedness of sets with continuous metric projection. In *Proc. Int. Sci. Conf. "Modern problems in natural and human sciences and their role in strengthening of relations between countries" dedicated to the 10th anniversary of Dushanbe Branch of Moscow State University*. 2019. P. 9–10.
9. Berdyshev V.I. On the problem of Chebyshev sets. *Akad. Nauk Azerb. SSR Dokl.*, 1966, vol. 22, no. 9, pp. 3–5.

10. Blatter J., Morris P.D., Wulbert D.E. Continuity of the set-valued metric projection. *Math. Ann.*, 1968, vol. 178, no. 1, pp. 12–24. doi: 10.1007/BF01350621.
11. Brøndsted A. Convex sets and Chebyshev sets, II. *Math. Scand.*, 1966, vol. 18, pp. 5–15. doi: 10.7146/math.scand.a-10773.
12. Brown A.L. Chebyshev sets and facial systems of convex sets in finite-dimensional spaces. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1980, vol. s3-41, no. 2, pp. 297–339. doi: 10.1112/plms/s3-41.2.297.
13. Brown A.L. Suns in normed linear spaces which are finite dimensional. *Math. Ann.*, 1987, vol. 279, no. 1, pp. 87–101. doi: 10.1007/BF01456192.
14. Brown A.L. On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces. In: Fitzpatrick S.P., Giles J.R. (eds.) Workshop/Miniconference on Functional Analysis and Optimization (Canberra, 1988). *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, Canberra: Austral. Nat. Univ., 1988, vol. 20, pp. 1–15.
15. Brown A.L. On the problem of characterising suns in finite dimensional spaces. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, 2002, vol. 68, pp. 315–328.
16. Brown A.L. Suns in polyhedral spaces. In: Girela D. et al (eds.), *Seminar of mathematical analysis* (Malaga/Seville, 2002/2003), Colecc. Abierta, Seville: Univ. Sevilla Secr. Publ., 2003, vol. 64, pp. 139–146.
17. Li T., Wang J., Wen H. Global structure and regularity of solutions to the Eikonal equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2019, vol. 232, no. 2, pp. 1073–1112. doi: 10.1007/s00205-018-01339-4.
18. Nevesenko N.V. Strict sums and semicontinuity below metric projections in linear normed spaces. *Math. Notes*, 1978, vol. 23, no. 4, pp. 308–312. doi: 10.1007/BF01786961.
19. Nevesenko N.V., Oshman E.V. Metric projection onto convex sets. *Math. Notes*, 1982, vol. 31, no. 1, pp. 59–64. doi: 10.1007/BF01146270.
20. Phelps R.R. A representation theorem for bounded convex sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1960, vol. 11, pp. 976–983. doi: 10.2307/2034446.
21. Tsar’kov I.G. Bounded Chebyshev sets in finite-dimensional Banach spaces *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR.*, 1984, vol. 36, no. 1, pp. 530–537. doi: 10.1007/BF01139554.
22. Tsar’kov I.G. Continuity of the metric projection, structural and approximate properties of sets. *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR.*, 1990, vol. 47, no. 2, pp. 218–227. doi: 10.1007/BF01156834.
23. Tsar’kov I.G. Singular sets of surfaces. *Russ. J. Math. Phys.*, 2017, vol. 24, no. 2, pp. 263–271. doi: 10.1134/S1061920817020121.
24. Tsar’kov I.G. Continuous selections for metric projection operators and for their generalizations. *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 4, pp. 837–859. doi: 10.1070/IM8695.
25. Tsar’kov I.G. Weakly monotone sets and continuous selection from a near-best approximation operator. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 303, pp. 227–238. doi: 10.1134/S0081543818080187.
26. Tsar’kov I.G. Weakly monotone sets and continuous selection in asymmetric spaces. *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 9, pp. 1326–1347. doi: 10.1070/SM9107.
27. Tsar’kov I.G. Smooth solutions of the eikonal equation and the behaviour of local minima of the distance function. *Izv. Math.*, 2019, vol. 83, no. 6, pp. 1234–1258. doi: 10.4213/im8850.

Received December 19, 2019

Revised January 28, 2020

Accepted February 10, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project nos. 18-01-00333-a, 19-01-00332-a) and a grant from the President of the Russian Federation for Supporting Leading Scientific Schools (project no. NSh-6222.2018.1).

Alexey R. Alimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119899 Russia; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia, e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru.

Cite this article as: A. R. Alimov. Convexity and monotone linear connectivity of sets with a continuous metric projection in three-dimensional spaces. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 28–46.

УДК 517.518.86

НАИЛУЧШЕЕ L^2 -ПРОДОЛЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ С ЕДИНИЧНОЙ ЕВКЛИДОВОЙ СФЕРЫ НА КОНЦЕНТРИЧЕСКУЮ СФЕРУ¹

В. В. Арестов, А. А. Селезнев

В данной работе рассматривается задача о продолжении алгебраических многочленов с единичной сферы евклидова пространства размерности $m \geq 2$ на концентрическую сферу радиуса $r \neq 1$ с наименьшим значением L^2 -нормы. Найдено продолжение произвольного многочлена. Как следствие, получено наилучшее продолжение класса многочленов заданной степени $n \geq 1$, норма которых в пространстве L^2 на единичной сфере не превосходит 1. Показано, что величина наилучшего продолжения равна r^n при $r > 1$ и r^{n-1} при $0 < r < 1$. Описан наилучший метод продолжения. А. В. Парфененков в 2009 г. получил подобный результат в равномерной норме на плоскости ($m = 2$).

Ключевые слова: многочлен, евклидова сфера, L^2 -норма, наилучшее продолжение.

V. V. Arestov, A. A. Seleznev. Best L^2 -extension of algebraic polynomials from the unit Euclidean sphere to a concentric sphere.

We consider the problem of extending algebraic polynomials from the unit sphere of a Euclidean space of dimension $m \geq 2$ to a concentric sphere of radius $r \neq 1$ with the smallest value of the L^2 -norm. An extension of an arbitrary polynomial is found. As a result, we obtain the best extension of a class of polynomials of given degree $n \geq 1$ whose norms in the space L^2 on the unit sphere do not exceed 1. We show that the best extension equals r^n for $r > 1$ and r^{n-1} for $0 < r < 1$. We describe the best extension method. A.V. Parfenenkov obtained in 2009 a similar result in the uniform norm on the plane ($m = 2$).

Keywords: polynomial, Euclidean sphere, L^2 -norm, best extension.

MSC: 41A63, 41A99, 26C05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-47-55

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Основной результат

Пусть \mathbb{R}^m , $m \geq 2$, есть евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_m)$, наделенное нормой $|x| = |x|_m = \left(\sum_{k=1}^m x_k^2\right)^{1/2}$; $\mathbb{B}_r = \mathbb{B}_r^m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq r\}$, $\mathbb{S}_r = \mathbb{S}_r^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = r\}$ — соответственно, шар и сфера радиуса $r > 0$ с центром в начале координат пространства \mathbb{R}^m ; \mathbb{Z}_+^m — множество точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ с целыми неотрицательными координатами, называемых *мультииндексами*. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ и точки $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ полагаем $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$.

Через $L^2(\mathbb{S}_r)$ обозначим пространство комплекснозначных измеримых интегрируемых с квадратом на \mathbb{S}_r функций с L^2 -нормой

$$\|f\| = \|f\|_{L^2(\mathbb{S}_r)} = \left(\frac{1}{|\mathbb{S}_r|} \int_{\mathbb{S}_r} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2};$$

¹Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013). Исследования первого автора поддержаны также РФФИ (проект 18-01-00336).

здесь $|\mathbb{S}_r|$ — площадь сферы \mathbb{S}_r ; $L^2(\mathbb{S}_r)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \frac{1}{|\mathbb{S}_r|} \int_{\mathbb{S}_r} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\mathbb{S}_r). \quad (1.1)$$

Пусть, далее, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^m$ для целого неотрицательного n есть множество алгебраических многочленов

$$P_n(x) = P_n(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m, \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq n}} c_\alpha x^\alpha \quad (1.2)$$

от m действительных переменных $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ степени (не выше) n с комплексными коэффициентами $\{c_\alpha\}$. Слагаемое x^α в (1.2) называют *мономом*, а сумму $\alpha_1 + \dots + \alpha_m$ — *степенью* этого монома. Наибольшая степень монома с ненулевым коэффициентом называется *точной степенью* многочлена P_n . Символом \mathcal{B}_n обозначим множество многочленов из \mathcal{P}_n , нормы которых в пространстве $L^2(\mathbb{S})$ на единичной сфере $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1$ ограничены единицей, т. е.

$$\mathcal{B}_n = \{P_n \in \mathcal{P}_n : \|P_n\|_{L^2(\mathbb{S})} \leq 1\}.$$

Многочлену $P_n \in \mathcal{P}_n$ сопоставим ассоциированный с ним класс

$$\mathcal{Q}_n(P_n) = \{Q_n \in \mathcal{P}_n : Q_n(x) = P_n(x) \text{ для } x \in \mathbb{S}\} \quad (1.3)$$

многочленов $Q_n \in \mathcal{P}_n$, совпадающих с P_n на единичной сфере \mathbb{S} . Для многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ наименьшее значение

$$u_n(P_n; r) = \inf\{\|Q_n\|_{L^2(\mathbb{S}_r)} : Q_n \in \mathcal{Q}_n(P_n)\}$$

$L^2(\mathbb{S}_r)$ -норм многочленов из ассоциированного класса на сфере радиуса r можно интерпретировать как величину наилучшего L^2 -продолжения многочлена P_n с единичной сферы \mathbb{S} на сферу \mathbb{S}_r . В таком случае величину

$$\theta_n^m(r) = \sup\{u_n(P_n; r) : P_n \in \mathcal{B}_n\} = \sup\{u_n(P_n; r) : P_n \in \mathcal{P}_n, \|P_n\|_{L^2(\mathbb{S})} \leq 1\} \quad (1.4)$$

естественно считать величиной наилучшего L^2 -продолжения множества многочленов \mathcal{B}_n с \mathbb{S} на \mathbb{S}_r . Рассматриваемая в данной статье задача заключается в нахождении точного значения величины наилучшего продолжения $\theta_n^m(r)$ и наилучшего метода продолжения; назовем ее задачей (1.4).

А. В. Парфененков (см. [1, 2009 г.]) решил задачу, подобную (1.4), в равномерной норме на плоскости ($m = 2$) при любом $r > 0$.

Ниже будет дано решение задачи (1.4) для произвольной размерности $m \geq 2$ при всех $r > 0$, $r \neq 1$; в случае $r = 1$ задача (1.4) тривиальная: $\theta_n^m(1) = 1$.

Обозначим через $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n^m$ множество гармонических (в \mathbb{R}^m) многочленов $H_n \in \mathcal{P}_n^m$. Наконец, пусть $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_n^m$ — множество однородных гармонических многочленов $G_n \in \mathcal{H}_n^m$, точная степень (и порядок однородности) которых есть n .

Основным в данной работе является следующая теорема.

Теорема. *При любых $m \geq 2$, $n \geq 1$ справедливы следующие утверждения.*

1. При $r > 1$ для величины наилучшего продолжения (1.4) имеет место формула

$$\theta_n^m(r) = r^n; \quad (1.5)$$

при этом экстремальными в задаче (1.4) являются лишь однородные гармонические многочлены $G_n \in \mathcal{G}_n$ степени n с единичной нормой $\|G_n\|_{L^2(\mathbb{S})} = 1$ и многочлены ассоциированных с ними классов $\mathcal{Q}_n(G_n)$.

2. При $0 < r < 1$ имеет место формула

$$\theta_n^m(r) = r^{n-1};$$

экстремальными в этом случае являются лишь однородные гармонические многочлены $G_{n-1} \in \mathcal{G}_{n-1}$ степени $n - 1$ с единичной нормой $\|G_{n-1}\|_{L_2(\mathbb{S})} = 1$ и многочлены ассоциированных классов $\mathcal{Q}_n(G_{n-1})$.

Наилучший метод продолжения многочленов с единичной сферы на сферу \mathbb{S}_r радиуса $r \neq 1$ описан ниже в разд. 4 после доказательства теоремы.

Как будет видно из леммы 1 и доказательства теоремы, случай $n = 1$ является вырожденным, хотя формально для него теорема справедлива.

Задача (1.4) имеет смысл и при $n = 0$. Это тривиальный случай и его будет удобно обсудить после доказательства леммы 1.

На будущее отметим два известных факта.

1. Для площади сферы \mathbb{S}_r , $r > 0$, справедлива формула (см., например, [2, гл. XVIII, п. 676, пример 3])

$$|\mathbb{S}_r| = \sigma_m r^{m-1}, \quad \sigma_m = |\mathbb{S}| = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}.$$

2. Для функции f , определенной, измеримой, суммируемой на сфере \mathbb{S}_r , $r > 0$, имеет место формула (детали можно найти, например, в [3, (26)])

$$\int_{\mathbb{S}_r} f(x) dx = r^{m-1} \int_{\mathbb{S}} f(rx) dx.$$

В дальнейшем высказывания о том, что многочлен из \mathcal{P}_n и, в частности, из \mathcal{H}_n имеет степень n , означают лишь, что точная степень многочлена не выше n . Случаи, когда точная степень многочлена равна n , будут оговариваться явно.

1.2. Разложение Гаусса алгебраических многочленов нескольких переменных

В исследовании экстремальных задач для алгебраических многочленов нескольких переменных важное значение имеет известная теорема Гаусса о представлении произвольного однородного многочлена нескольких переменных через однородные гармонические многочлены; доказательство этой теоремы можно найти в монографиях [4, гл. XI, § 2, теорема XI.1] и [5, гл. IV, § 2, теорема 2.1]. В данной работе будет использоваться вытекающее из этой теоремы представление Гаусса произвольного многочлена нескольких переменных через гармонические многочлены. Мы сформулируем это утверждение в виде следующей теоремы (см., например, [4, гл. XI, § 5, (XII.5.1)]).

Теорема А (Разложение Гаусса алгебраических многочленов). *При любом целом неотрицательном n любой многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде*

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} |x|^{2s} H_{n-2s}(x), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

где $H_j \in \mathcal{H}_j$.

Следствие. *При любом $r > 0$ для любого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ существует единственный гармонический многочлен $H_n = H_n(P_n, r)$, который совпадает с P_n на сфере \mathbb{S}_r . В частности, для любого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ ассоциированный с ним класс (1.3) содержит единственный гармонический многочлен.*

2. Структура ассоциированного класса

Авторы не претендуют на новизну следующего утверждения о представлении ассоциированного класса (1.3). Однако мы не нашли в математической литературе ссылку на такой результат. Поэтому здесь он приводится с доказательством.

Лемма 1 (Структура ассоциированного класса). *При $n \geq 2$ для любого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ ассоциированный класс $\mathcal{Q}_n(P_n)$ состоит в точности из многочленов вида*

$$Q_n(x) = P_n(x) + (|x|^2 - 1) R_{n-2}(x), \quad R_{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

При $n = 0$ и $n = 1$ класс $\mathcal{Q}_n(P_n)$ состоит только из многочлена P_n .

Доказательство. Обсудим вначале утверждения леммы для $n = 0$ и $n = 1$. При $n = 0$ многочлен $P_0 \in \mathcal{P}_0$ есть константа, и ассоциированный с ним класс $\mathcal{Q}_0(P_0)$, очевидно, состоит только из константы P_0 .

В случае $n = 1$ многочлен $P_1 \in \mathcal{P}_1$ имеет вид

$$P_1(x_1, \dots, x_m) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m + a_{m+1},$$

где $\{a_k\}$ — коэффициенты P_1 . Пусть

$$Q_1(x_1, \dots, x_m) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m + b_{m+1}$$

есть многочлен также первой степени, который совпадает с P_1 на единичной сфере. Рассмотрим их разность:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_m) &= P_1(x_1, \dots, x_m) - Q_1(x_1, \dots, x_m) \\ &= (a_1 - b_1)x_1 + \dots + (a_m - b_m)x_m + (a_{m+1} - b_{m+1}). \end{aligned}$$

Введем обозначение $c_k = a_k - b_k$. Возьмем $2m$ точек, у которых одна из координат равна 1 или -1 , а остальные равны 0. Эти точки принадлежат единичной сфере, поэтому разность F_1 в этих точках обращается в нуль. В результате получим систему из $2m$ линейных уравнений относительно переменных c_k :

$$c_{m+1} \pm c_k = 0, \quad k = 0, \dots, m.$$

Эта система имеет лишь нулевое решение: $c_k = 0$, $1 \leq k \leq m + 1$. Значит, многочлен Q_1 совпадает с многочленом P_1 всюду в \mathbb{R}^m .

Пусть теперь $n \geq 2$. Предположим, что F есть многочлен, равный разности алгебраических многочленов, принимающих одинаковые значения на единичной сфере \mathbb{S} , т. е. F есть многочлен, зануляющийся на единичной сфере:

$$F(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{S}. \quad (2.1)$$

Точки $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ представим в виде $x = (\xi, y)$, где $\xi = x_1 \in \mathbb{R}$, $y = (x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Запишем многочлен $F(x) = F(\xi, y)$ как многочлен переменного ξ , коэффициенты которого являются многочленами от y :

$$F(\xi, y) = \sum_{k=0}^n c_k(y) \xi^k.$$

Разделим $F(\xi, y)$ на многочлен второй степени $\xi^2 + |y|_{m-1}^2 - 1 = \xi^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 - 1$ переменного ξ , считая координаты точки y параметрами. Получим соотношение

$$F(\xi, y) = R(\xi, y)(\xi^2 + |y|^2 - 1) + \xi U(y) + V(y), \quad (2.2)$$

где $R(\xi, y)$, $U(y)$ и $V(y)$ суть многочлены соответственно переменных $x = (\xi, y)$ и y .

Для произвольной точки y из открытого единичного шара $\overset{\circ}{\mathbb{B}} = \overset{\circ}{\mathbb{B}}^{m-1}$ пространства \mathbb{R}^{m-1} следующие два (различных между собой) значения

$$\xi^\pm = \pm \sqrt{1 - |y|_{m-1}^2}$$

параметра ξ таковы, что точки $x^\pm = (\xi^\pm, y)$ лежат на единичной сфере пространства \mathbb{R}^m , и потому согласно (2.1) имеем $F(\xi^\pm, y) = 0$. Подставив эти точки в представление (2.2), получаем соотношения

$$F(\xi^\pm, y) = \xi^\pm U(y) + V(y) = 0, \quad y \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}. \quad (2.3)$$

Так как $\xi^+ \neq \xi^-$, то (2.3) влекут, что $U(y) = 0$, $V(y) = 0$ для $y \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}$. А поскольку U и V суть многочлены, то отсюда следует, что U и V тождественно равны нулю на \mathbb{R}^{m-1} .

В результате для многочлена F получено представление

$$F(x) = R(x) (|x|_m^2 - 1), \quad x \in \mathbb{R}^m;$$

нетрудно понять, что многочлен R имеет степень не выше $n - 2$, т. е. принадлежит \mathcal{P}_{n-2} .

Лемма 1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение леммы 1 при $n = 0$ показывает, что задача (1.4) в этом случае тривиальная. А именно, $\theta_0^m(r) = 1$, $r > 0$, и экстремальными являются лишь два многочлена ± 1 .

3. Наилучшее продолжение гармонического многочлена

В этом разделе будет исследовано наилучшее продолжение

$$u_n(H_n; r) = \inf \{ \|Q_n\|_{L^2(\mathbb{S}_r)} : Q_n \in \mathcal{Q}_n(H_n) \}$$

с единичной сферы на сферу радиуса $r > 0$, $r \neq 1$, гармонических многочленов H_n степени $n \geq 1$. Будем исходить из того, что, как довольно очевидно, гармонический многочлен $H_n \in \mathcal{H}_n^m$ является суммой

$$H_n = \sum_{k=0}^n G_k \quad (3.1)$$

однородных гармонических многочленов $G_k \in \mathcal{G}_k^m$ степени k , $0 \leq k \leq n$.

Лемма 2 (Продолжение гармонического многочлена). *При $n \geq 2$, $r > 0$, $r \neq 1$, для гармонического многочлена H_n , записанного в виде (3.1), имеет место формула*

$$u_n(H_n; r) = (r^{2n} \|G_n\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 + r^{2(n-1)} \|G_{n-1}\|_{L^2(\mathbb{S})}^2)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Наилучшее продолжение осуществляют лишь многочлены

$$Q_n^*(x) = H_n(x) + (|x|^2 - 1)R_{n-2}^*(x), \quad (3.3)$$

где R_{n-2}^* суть многочлены степени (не выше) $n - 2$, для которых на сфере \mathbb{S}_r обязательно справедливо представление

$$R_{n-2}^*(x) = -\frac{1}{r^2 - 1} \sum_{k=0}^{n-2} G_k(x), \quad x \in \mathbb{S}_r. \quad (3.4)$$

Доказательство. В силу леммы 1 для произвольного многочлена $Q_n \in \mathcal{Q}_n(H_n)$ справедливо представление

$$Q_n(x) = H_n(x) + (|x|^2 - 1)R_{n-2}(x),$$

в котором R_{n-2} — произвольный многочлен из \mathcal{P}_{n-2} . В силу следствия теоремы А многочлен R_{n-2} на сфере \mathbb{S}_r совпадает с некоторым гармоническим многочленом H_{n-2} степени (не выше) $n - 2$, который согласно формуле (3.1) имеет вид

$$H_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} G_k^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

где $\{G_k^0\}_{k=0}^{n-2}$ — однородные гармонические многочлены. Следовательно, для многочлена R_{n-2} на \mathbb{S}_r справедливо представление

$$R_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} G_k^0(x), \quad x \in \mathbb{S}_r.$$

Итак, на сфере \mathbb{S}_r для многочлена Q_n имеет место формула

$$Q_n(x) = G_n(x) + G_{n-1}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} (G_k(x) + (r^2 - 1)G_k^0(x)), \quad x \in \mathbb{S}_r.$$

Все $n + 1$ слагаемое правой части этой формулы являются однородными гармоническими многочленами соответствующей степени. Такие многочлены ортогональны на сфере \mathbb{S}_r относительно скалярного произведения (1.1) (см., например, [5, гл. IV, § 2, следствие 2.4] или [4, гл. XI, § 3]). Поэтому

$$\|Q_n\|_{L_2(\mathbb{S}_r)}^2 = \|G_n\|_{L_2(\mathbb{S}_r)}^2 + \|G_{n-1}\|_{L_2(\mathbb{S}_r)}^2 + \sum_{k=0}^{n-2} \|G_k + (r^2 - 1)G_k^0\|_{L_2(\mathbb{S}_r)}^2.$$

Наименьшее значение последней величины достигается на многочленах $\{G_k^0\}_{k=0}^{n-2}$, которые, по крайней мере, на сфере \mathbb{S}_r определены формулами

$$G_k^0 = -G_k/(r^2 - 1), \quad 0 \leq k \leq n - 2.$$

Итак, доказано, что

$$\begin{aligned} u_n(H_n; r) &= \inf\{\|Q_n\|_{L_2(\mathbb{S}_r)} : Q_n \in \mathcal{Q}_n(H_n)\} = \|G_n + G_{n-1}\|_{L_2(\mathbb{S}_r)} \\ &= (\|G_n\|_{L_2(\mathbb{S}_r)}^2 + \|G_{n-1}\|_{L_2(\mathbb{S}_r)}^2)^{1/2} = (r^{2n}\|G_n\|_{L_2(\mathbb{S})}^2 + r^{2(n-1)}\|G_{n-1}\|_{L_2(\mathbb{S})}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Минимум здесь достигается на любом многочлене вида (3.3), в котором R_{n-2}^* есть многочлен степени $n - 2$, имеющий на сфере \mathbb{S}_r вид (3.4).

Лемма 2 доказана.

З а м е ч а н и е 2. По нашему мнению представляет интерес тот факт, что многочлены (3.3) на сфере \mathbb{S}_r независимо от значения $r > 0$, $r \neq 1$, определены одной и той же формулой

$$Q_n^*(x) = G_n(x) + G_{n-1}(x), \quad x \in \mathbb{S}_r.$$

4. Завершение исследования задачи (1.4)

4.1. Доказательство основной теоремы

Обоснуем вначале утверждения теоремы в случае $n \geq 2$. Согласно следствию теоремы А для любого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ ассоциированный с ним класс содержит (единственный) гармонический многочлен $H_n \in \mathcal{P}_n$. Ассоциированные классы этих двух многочленов совпадут, поэтому

$$u_n(P_n; r) = u_n(H_n; r).$$

Воспользовавшись представлением (3.1) многочлена H_n и формулой (3.2), получаем соотношение

$$u_n(P_n; r) = (r^{2n} \|G_n\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 + r^{2(n-1)} \|G_{n-1}\|_{L^2(\mathbb{S})}^2)^{1/2}. \quad (4.1)$$

Отсюда при $r > 1$ имеем

$$\begin{aligned} u_n(P_n; r) &\leq r^n (\|G_n\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 + \|G_{n-1}\|_{L^2(\mathbb{S})}^2)^{1/2} \\ &\leq r^n \left(\sum_{k=0}^n \|G_k\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 \right)^{1/2} = r^n \|H_n\|_{L^2(\mathbb{S})} = r^n \|P_n\|_{L^2(\mathbb{S})}. \end{aligned}$$

Итак, при $r > 1$ для любого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ справедлива оценка

$$u_n(P_n; r) \leq r^n \|P_n\|_{L^2(\mathbb{S})}.$$

Из доказательства нетрудно сделать вывод, что последнее неравенство обращается в равенство в том и только том случае, если $H_n = G_n$. Отсюда следует и равенство (1.5), и приведенная в формулировке теоремы характеристика экстремальных многочленов.

Утверждения основной теоремы при $r > 1$ доказаны.

В случае $0 < r < 1$ формула (4.1) влечет неравенство

$$u_n(P_n; r) \leq r^{n-1} (\|G_n\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 + \|G_{n-1}\|_{L^2(\mathbb{S})}^2)^{1/2}.$$

Отсюда, как и при $r > 1$, следует, что в случае $0 < r < 1$ для любого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ справедлива оценка

$$u_n(P_n; r) \leq r^{n-1} \|P_n\|_{L^2(\mathbb{S})}.$$

Эта оценка влечет все утверждения теоремы и при $0 < r < 1$.

При $n \geq 2$ основная теорема доказана.

Рассмотрим случай $n = 1$. Многочлен P_1 первой степени является гармоническим и имеет вид $P_1 = G_0 + G_1$, где G_0 есть константа, а G_1 — однородный многочлен первой степени. Согласно лемме 1 ассоциированный с P_1 класс состоит из одного этого многочлена. Поэтому в этом случае имеем

$$u_1(P_1; r) = \|P_1\|_{L^2(\mathbb{S}_r)} = (r^2 \|G_1\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 + \|G_0\|_{L^2(\mathbb{S})}^2)^{1/2}. \quad (4.2)$$

Формула (4.2) есть аналог формулы (4.1). Дальнейшие рассуждения в обоснование теоремы при $n = 1$ проводятся так же, как при $n \geq 2$.

Теорема полностью доказана.

4.2. Наилучший метод продолжения

В приведенном доказательстве теоремы построен метод, который продолжает многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$ с единичной сферы в пространство \mathbb{R}^m до многочлена степени не выше n с наименьшим значением L^2 -нормы на сфере \mathbb{S}_r радиуса $r \neq 1$; мы называем его здесь *наилучшим методом продолжения*. В случае $n = 1$ при любом $r > 0$ таким методом является тождественный оператор, который многочлену $P_1 \in \mathcal{P}_1$ сопоставляет этот же многочлен. В случае $n \geq 2$ метод состоит из двух шагов.

1. Многочлену $P_n \in \mathcal{P}_n$ сопоставляем ассоциированный с ним гармонический многочлен $H_n \in \mathcal{P}_n$.

2. Многочлену H_n , используя представление (3.1), по формуле (3.3) сопоставляем многочлен $Q_n^* \in \mathcal{P}_n$.

Построенное отображение $P_n \rightarrow Q_n^*$ множества \mathcal{P}_n в себя как раз и будет наилучшим методом продолжения. При $n \geq 4$ оно неоднозначное, поскольку многочлен R_{n-2}^* в формуле (3.3) определен однозначно лишь на сфере \mathbb{S}_r .

Однако отображение A_r , которое многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$ с единичной сферы \mathbb{S} наилучшим образом (т. е. с наименьшим значением L^2 -нормы) продолжает на сферу \mathbb{S}_r , $r \neq 1$, определено однозначно формулой

$$(A_r P_n)(x) = G_n(x) + G_{n-1}(x), \quad x \in \mathbb{S}_r;$$

это отображение является линейным оператором и для нормы этого оператора из $L^2(\mathbb{S})$ в $L^2(\mathbb{S}_r)$ справедлива формула

$$\|A_r\|_{L^2(\mathbb{S}) \rightarrow L^2(\mathbb{S}_r)} = \max\{r^n, r^{n-1}\}.$$

В таком понимании наилучший метод продолжения однозначный, единственный и линейный.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Парфененков А.В.** Наилучшее продолжение алгебраических многочленов с единичной окружности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 184–194.
2. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. III. М.: Физматлит, 2002. 728 с.
3. **Дейкалова М.В.** Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 532–551.
4. **Соболев С.Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
5. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 338 с.

Поступила 10.01.2020

После доработки 10.02.2020

Принята к публикации 17.02.2020

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет;
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru

Селезнев Антон Александрович
магистрант
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: misterion3000@gmail.com

REFERENCES

1. Parfenenkov A.V. The best extension of algebraic polynomials from the unit circle. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 265, suppl. 1, pp. 194–204. doi: 10.1134/S0081543809060157.
2. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course in differential and integral calculus], vol. 3. Moscow: Fizmatlit Publ., 2002, 728 p. ISBN: 5-9221-0158-7.
3. Deikalova M.V. The Taikov functional in the space of algebraic polynomials on the multidimensional Euclidean sphere. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, pp. 498–514. doi: 10.1134/S0001434608090228.
4. Sobolev S.L. *Cubature formulas and modern analysis: An introduction*. Montreux: Gordon and Breach, 1992, 379 p. ISBN: 9782881248412. Original Russian text published in Sobolev S.L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul*. Moscow: Nauka Publ., 1974, 808 p.
5. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9781400883899. Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*. Moscow: Mir Publ., 1974, 338 p.

Received January 10, 2020

Revised February 10, 2020

Accepted February 17, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University). The research of the first author was also supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336).

Vitalii Vladimirovich Arestov, Dr. Phys.-Math. Sci., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru.

Anton Aleksandrovich Seleznev, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: misterion3000@gmail.com.

Cite this article as: V. V. Arestov, A. A. Seleznev. Best L^2 -extension of algebraic polynomials from the unit Euclidean sphere to a concentric sphere. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 47–55.

УДК 519.176

ДВУДОЛЬНО-ПОРОГОВЫЕ ГРАФЫ

В. А. Баранский, Т. А. Сеньчонок

Тройка (x, v, y) различных вершин графа $G = (V, E)$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$ называется *повышающей*, если $\deg(x) \leq \deg(y)$, и *понижающей*, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$. Преобразование φ графа G такое, что $\varphi(G) = G - xv + vy$, называется *вращением ребра* в графе G *вокруг вершины* v , отвечающим тройке (x, v, y) . Вращение ребра в графе G , отвечающее тройке (x, v, y) , называется *повышающим*, если тройка (x, v, y) повышающая, и *понижающим*, если тройка (x, v, y) понижающая. Вращение φ ребра в графе G является повышающим тогда и только тогда, когда обратное к нему вращение ребра в графе $\varphi(G)$ является понижающим. Двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ будем называть *двудольно-пороговым графом*, если он не имеет повышающих троек таких, что $x, y \in V_1, v \in V_2$ или $x, y \in V_2, v \in V_1$. В работе найдены различные свойства, характеризующие двудольно-пороговые графы. В частности, каждый такой граф (V_1, E, V_2) является подграфом порогового графа $(K(V_1), E, V_2)$, где $K(V_1)$ — полный граф на множестве вершин V_1 . Отметим, что граф является пороговым тогда и только тогда, когда он не имеет повышающих троек вершин. Любой двудольный граф может быть получен из двудольно-порогового графа с помощью понижающих вращений ребер. С помощью полученных результатов и критерия Кохнерта графичности разбиения мы приводим новое достаточно простое доказательство известной теоремы Гейла и Райзера о представлении двух разбиений степенными разбиениями долей двудольного графа.

Ключевые слова: разбиение, пороговый граф, двудольный граф, диаграмма Ферре.

V. A. Baransky, T. A. Senchonok. Bipartite threshold graphs.

A triple of distinct vertices (x, v, y) in a graph $G = (V, E)$ such that $xv \in E$ and $vy \notin E$ is called *lifting* if $\deg(x) \leq \deg(y)$ and *lowering* if $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$. A transformation φ of a graph G that replaces G with $\varphi(G) = G - xv + vy$ is called an *edge rotation* corresponding to a triple of vertices (x, v, y) . For a lifting (lowering) triple (x, v, y) , the corresponding edge rotation is called *lifting (lowering)*. An edge rotation in a graph G is lifting if and only if its inverse in the graph $\varphi(G)$ is lowering. A bipartite graph $H = (V_1, E, V_2)$ is called a *bipartite threshold graph* if it has no lifting triples such that $x, y \in V_1$ and $v \in V_2$ or $x, y \in V_2$ and $v \in V_1$. The aim of paper is to give some characteristic properties of bipartite threshold graphs. In particular, every such graph (V_1, E, V_2) is embedded in the threshold graph $(K(V_1), E, V_2)$, where $K(V_1)$ is the complete graph on the vertex set V_1 . Note that a graph is a threshold graph if and only if it has no lifting triples of vertices. Every bipartite graph can be obtained from a bipartite threshold graph by means of lowering edge rotations. Using the obtained results and Kohnert's criterion for a partition to be graphical, we give a new simple proof of the well-known Gale–Ryser theorem on the representation of two partitions by degree partitions of the parts in a bipartite graph.

Keywords: integer partition, threshold graph, bipartite graph, Ferrer's diagram.

MSC: 05C35

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-56-67

1. Введение

Далее под графом мы будем всегда понимать обыкновенный граф, т. е. граф без петель и кратных ребер, и будем использовать терминологию, принятую в [1].

Под *разбиением* (см. [2]) мы будем понимать последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ целых неотрицательных чисел, которая является невозрастающей и содержит конечное число ненулевых компонент. Через $\text{sum}(\lambda)$ будем обозначать сумму всех компонент разбиения λ и называть ее *весом* разбиения λ . *Длиной* $l(\lambda)$ разбиения λ будем называть число его ненулевых компонент. Для удобства разбиение λ иногда будем записывать в виде $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, где $t \geq l(\lambda)$, т. е. будем опускать нули, начиная с некоторой нулевой компоненты.

Через NPL будем обозначать множество всех разбиений, а через $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, — множество всех разбиений λ таких, что $\text{sum}(\lambda) = m$. *Отношение доминирования* \geq на множестве NPL и на множествах вида $NPL(m)$ задается следующим образом. Выполняется $\lambda \leq \mu$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \mu_1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &\leq \mu_1 + \mu_2, \\ &\dots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_t &\leq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_t, \\ &\dots \end{aligned}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, т. е. префиксные суммы разбиения λ не превосходят соответствующих префиксных сумм разбиения μ .

Теория разбиений имеет давнюю историю и является одним из активно развивающихся направлений комбинаторики. Продолжаются исследования по перечислению графических разбиений. Во введении к работе [3] приведен полезный обзор статей по проблеме перечисления графических разбиений. Изучаются реализации графических разбиений и совершенствуются алгоритмы построения всех реализаций (см., например, [4]). Во введении к работе [5] приведен обзор статей, посвященных обобщениям разбиений, обобщенным решеткам разбиений и дискретным динамическим системам.

В данной работе мы будем исследовать двудольные графы и отвечающие им пары разбиений. Приведем необходимые определения и обозначения.

Определим элементарные преобразования разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ [6; 7]. Эти преобразования будут двух типов.

Пусть для натуральных чисел i, j таких, что $1 \leq i < j \leq l(\lambda) + 1 = t$, выполняются следующие неравенства:

- 1) $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$;
- 2) $\lambda_{j-1} \geq \lambda_j + 1$;
- 3) $\lambda_i \geq 2 + \lambda_j$.

Будем говорить, что разбиение $\eta = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_t)$ получено из разбиения λ с помощью *элементарного преобразования первого типа* (или *перекидывания блока*). Отметим, что разбиение η отличается от разбиения λ только на двух компонентах с номерами i и j . Условия 1) и 2) обеспечивают тот факт, что после применения элементарного преобразования снова получается разбиение. Отметим, что элементарные преобразования первого типа сохраняют вес разбиения.

Пусть для натурального числа i такого, что $1 \leq i \leq l(\lambda)$, выполняется условие $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$. Будем говорить, что разбиение $\eta = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots)$ получено из разбиения λ с помощью *элементарного преобразования второго типа* (или *удаления блока*). Ясно, что элементарные преобразования второго типа уменьшают вес разбиения на 1.

В [7] показано, что в *NPL* выполняется $\lambda \leq \mu$ тогда и только тогда, когда разбиение λ можно получить из разбиения μ с помощью последовательного применения конечного числа элементарных преобразований.

Для натурального числа n конечную невозрастающую последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ целых неотрицательных чисел будем называть *n-последовательностью*. Такая *n-последовательность* называется *графической*, если существует обыкновенный граф G на n вершинах, для которого $\deg(v_1) = \lambda_1, \dots, \deg(v_n) = \lambda_n$, где v_1, \dots, v_n — последовательность всех его вершин; граф G называют *реализацией n-последовательности* λ и говорят, что λ *реализуется* графом G .

Разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ называется *графическим*, если графической является последовательность $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, где $l = l(\lambda)$. Нетрудно заметить, что разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ является графическим тогда и только тогда, когда графической будет любая *n-последовательность* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, для которой $n \geq l(\lambda)$.

Разбиения принято изображать в виде диаграмм Ферре, состоящих из конечного набора квадратных блоков одинакового размера, составляющих “ступенчатую” фигуру (см., напри-

мер, рис. 1). На рис. 1 представлена диаграмма Ферре разбиения $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ длины 8 и веса 26.

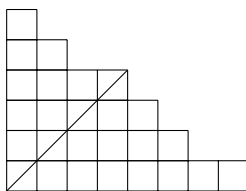


Рис. 1

Для произвольного разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ определим его *ранг Дерфи* $r(\lambda)$ (или просто *ранг*), полагая $r(\lambda) = \max\{i \mid \lambda_i \geq i\}$. Ранг $r = r(\lambda)$ разбиения λ равен числу блоков на главной диагонали его диаграммы Ферре (см. рис. 1). Максимальный квадрат, составленный из блоков диаграммы Ферре и симметричный относительно главной диагонали диаграммы Ферре, называют *квадратом Дерфи* разбиения λ (на рис. 1 указана диагональ квадрата Дерфи, здесь $r = 4$).

Головой $\text{hd}(\lambda)$ разбиения λ называется разбиение, полученное уменьшением первых r компонент разбиения λ на одно и то же число $r - 1$ и обнулением всех компонент с номерами $r + 1, r + 2, \dots$. Отметим, что верхняя строка квадрата Дерфи всегда входит в диаграмму Ферре головы $\text{hd}(\lambda)$ в качестве первой строки.

Хвостом $\text{tl}(\lambda)$ разбиения λ называется разбиение, для которого диаграмма Ферре получается из диаграммы Ферре разбиения λ удалением первых $r = r(\lambda)$ столбцов и последующим считыванием компонент по строкам, т. е. заменой строк последовательно на столбцы при продвижении снизу вверх.

На рис. 1 для разбиения $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ имеем $r = r(\lambda) = 4$, $\text{hd}(\lambda) = (3, 2, 1, 1)$ и $\text{tl}(\lambda) = (4, 2, 1)$.

Отметим, что всегда $l(\text{hd}(\lambda)) = r(\lambda)$, $l(\lambda) - r$ равно величине первой компоненты хвоста $\text{tl}(\lambda)$ и $l(\text{tl}(\lambda)) = \lambda_{r+1}$. Разбиение $\text{hd}(\lambda)$ “считывается” по столбцам, “урезанным” на число $r - 1$, слева направо, а разбиение $\text{tl}(\lambda)$ “считываются” по строкам, “урезанным” на число r , снизу вверх.

Пусть G — произвольный граф, v_1, \dots, v_n — множество всех его вершин и $\deg(v_1) = \lambda_1 \geq \deg(v_2) = \lambda_2 \geq \dots \geq \deg(v_n) = \lambda_n$. Разбиение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)$ будем называть *графическим разбиением, отвечающим графу G* , и будем обозначать его через $\text{gpt}(G)$. Граф G называют *реализацией* графического разбиения λ .

Добавление к графу или удаление из него изолированных вершин не меняет отвечающего ему разбиения, т. е. реализации графических разбиений можно исследовать с точностью до изолированных вершин. В силу леммы о рукопожатиях графическое разбиение имеет четный вес, который равен удвоенному числу ребер в каждой из его реализаций.

В [8] указан критерий графичности разбиения, который мы приведем в терминологии, предложенной в ранее опубликованной нами работе (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 1–10).

Разбиение λ четного веса является графическим тогда и только тогда, когда $\text{hd}(\lambda) \leq \text{tl}(\lambda)$.

На рис. 1 для разбиения $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ выполняется $\text{hd}(\lambda) = (3, 2, 1, 1) \leq \text{tl}(\lambda) = (4, 2, 1)$, так как здесь $\text{hd}(\lambda)$ можно получить из $\text{tl}(\lambda)$ с помощью одного элементарного преобразования первого типа, состоящего в перекидывании блока из первой компоненты в четвертую. Следовательно, разбиение $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ является графическим.

Несложно установить, что указанный критерий Кохнерта графичности разбиения эквивалентен известному критерию Эрдеша — Галлаи [9] графичности n -последовательности. Прямое доказательство критерия Кохнерта, опирающееся на наши предшествующие результаты и не использующее [9], приведено в [10].

Пусть (x, v, y) — тройка различных вершин графа $G = (V, E)$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$. Такую тройку назовем

- 1) повышающей, если $\deg(x) \leq \deg(y)$;
- 2) понижающей, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$;
- 3) сохраняющей, если $\deg(x) = 1 + \deg(y)$.

Рассмотрим преобразование φ графа G такое, что $\varphi(G) = G - xv + vy$, т. е. из G сначала удаляется ребро xv , а затем добавляется ребро vy (см. рис. 2):

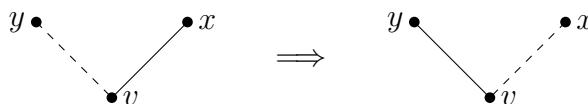


Рис. 2

Преобразование φ называется *вращением ребра* (в графе G *вокруг вершины* v), отвечающим тройке (x, v, y) . Вращение ребра в графе $\varphi(G)$, отвечающее тройке (y, v, x) называется *обратным вращением* ребра для вращения φ .

Вращение ребра в графе G , отвечающее тройке (x, v, y) , называется

- 1) *повышающим*, если тройка (x, v, y) повышающая;
- 2) *понижающим*, если тройка (x, v, y) понижающая;
- 3) *сохраняющим*, если тройка (x, v, y) сохраняющая.

Отметим, что случаи, когда $\deg(x) = 1$ или $\deg(y) = 0$, будем рассматривать как допустимые, т. е. после вращения ребра может возникнуть изолированная вершина или вращение ребра произойдет в графе G с добавлением новой изолированной вершины.

Из определений следует, что вращение ребра в графе является повышающим тогда и только тогда, когда обратное к нему вращение является понижающим.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)$ — графическое разбиение, $1 \leq i < j \leq n$, и разбиение $\eta = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_n)$ получено из него с помощью одного элементарного преобразования первого типа. Покажем, что разбиение η также является графическим. Действительно, пусть $G = (V, E)$ — реализация разбиения λ , $\deg(x) = \lambda_i$ и $\deg(y) = \lambda_j$, где $x, y \in V$. Поскольку $\lambda_i > \lambda_j$, существует вершина $v \in V$ такая, что $xv \in E$, и $vy \notin E$. Пусть φ — понижающее вращение ребра, отвечающее тройке (x, v, y) в графе G . Тогда $\eta = \text{gpt}(\varphi(G))$. Следовательно, разбиение η также является графическим.

Хорошо известно, что множество $NPL(2m)$ является решеткой относительно отношения доминирования (см., например, [7]). Поэтому в силу доказанного множество всех графических разбиений фиксированного веса $2m$, где m — натуральное число, образует порядковый идеал в решетке $NPL(2m), \leq$. Максимальные элементы этого порядкового идеала называют *максимальными графическими разбиениями* (веса $2m$).

Через (V_1, E, V_2) мы будем обозначать граф, имеющий две непересекающиеся непустые доли V_1, V_2 и множество ребер E , причем каждое ребро соединяет некоторую вершину из V_1 с некоторой вершиной из V_2 . Такой граф, как обычно, будем называть *двудольным*, если E не пусто. Конечно, мы считаем, что $(V_1, E, V_2) = (V_2, E, V_1)$. Пусть G_1 и G_2 — два графа с множествами вершин V_1 и V_2 , соответственно. Тогда через (G_1, E, G_2) будем обозначать объединение графов G_1 и G_2 , дополненное множеством ребер E .

Граф G называется *пороговым* (см., например, [11]), если его множество вершин представимо в виде дизъюнктного объединения клики V_1 и антиклики V_2 (т. е. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, V_1 порождает полный подграф $K(V_1)$ и V_2 — нулевой подграф $O(V_2)$ в G), а множество окрестностей в G вершин из V_2 образует цепь подмножеств множества V_1 относительно теоретико-множественного включения. Отметим, что случаи $V_1 = \emptyset$ или $V_2 = \emptyset$ допускаются, т. е. полные и нулевые графы являются пороговыми. Для порогового графа G множество всех ребер представимо в виде дизъюнктного объединения множества всех ребер полного подграфа $K(V_1)$ и множества E всех его ребер, соединяющих вершины из V_1 с вершинами из V_2 . Таким образом, пороговый граф

можно представить в виде $G = (K(V_1), E, O(V_2))$. Мы будем писать просто $G = (K(V_1), E, V_2)$. Граф $H = (V_1, E, V_2)$ будем называть *сэндвич-подграфом* порогового графа $G = (K(V_1), E, V_2)$. В тривиальных случаях, когда $V_1 = \emptyset$, или $V_2 = \emptyset$, или V_2 состоит из изолированных вершин, сэндвич-подграф H является пустым подграфом в G .

Из определения порогового графа следует, что добавление или удаление изолированных вершин не меняет свойство графа быть пороговым. Другие равносильные определения пороговых графов и их многочисленные свойства можно найти в монографии [11].

В ранее опубликованной нами и упомянутой выше статье было доказано, что

Граф является пороговым тогда и только тогда, когда он не содержит повышающих троек вершин.

С использованием этой теоремы также было доказано, что для произвольного разбиения λ четного веса следующие условия эквивалентны:

- 1) λ является максимальным графическим разбиением;
- 2) $\lambda = \text{gpt}(G)$ для некоторого порогового графа G ;
- 3) $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$.

Там же отмечено, что любое максимальное графическое разбиение имеет единственную реализацию с точностью до изоморфизма и изолированных вершин.

Пусть $G = (K(V_1), E, V_2)$ — пороговый граф и $H = (V_1, E, V_2)$ — его сэндвич-подграф. Тогда граф G не содержит повышающих троек вершин, и для любых $x, y \in V_1$ выполняются равенства $\deg_H(x) + t - 1 = \deg_G(x)$ и $\deg_H(y) + t - 1 = \deg_G(y)$, где $t = |V_1|$. Поэтому сэндвич-подграф $H = (V_1, E, V_2)$ не имеет повышающих троек вершин (x, v, y) вида

- 1) $x, y \in V_1$ и $v \in V_2$,
- 2) $x, y \in V_2$ и $v \in V_1$.

В произвольном двудольном графе (V_1, E, V_2) повышающие тройки вершин вида 1) будем называть *повышающими тройками первой доли* или, кратко, *повышающими V_1 -тройками*, а вида 2) — *повышающими тройками второй доли* или, кратко, *повышающими V_2 -тройками*.

Произвольный двудольный граф будем называть *двудольно-пороговым графом*, если он не имеет повышающих троек как первой, так и второй доли. Из данного определения и ранее указанного свойства пороговых графов следует, что сэндвич-подграф любого порогового графа является двудольно-пороговым графом.

Цель работы состоит в доказательстве теоремы 1 о различных характеристиках двудольно-пороговых графов, которые мы ввели как аналоги пороговых графов для класса двудольных графов. Кроме того, используя теорему 1, мы получаем новое достаточно простое и естественное доказательство известной теоремы Гейла — Райзера о двудольной реализации пары разбиений, а также в теореме 3 показываем, каким образом произвольный двудольный граф может быть получен естественным образом из двудольно-пороговых графов.

2. Доказательство основного результата

Рассмотрим теперь произвольный двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$. Через $N(v)$ будем обозначать окрестность любой его вершины v .

Лемма 1. *Если граф $H = (V_1, E, V_2)$ не имеет повышающих V_2 -троек, то семейство окрестностей вершин из V_2 образует цепь подмножеств множества V_1 относительно теоретико-множественного включения.*

Доказательство. Достаточно установить, что для любых вершин $x, y \in V_2$ условие $\deg_H(x) \leq \deg_H(y)$ эквивалентно условию $N(x) \subseteq N(y)$.

Из условия $N(x) \subseteq N(y)$ тривиально следует, что $\deg_H(x) \leq \deg_H(y)$.

Обратно, предположим, что $\deg_H(x) \leq \deg_H(y)$ для некоторых $x, y \in V_2$, и, от противного, предположим, что $N(x) \not\subseteq N(y)$. Тогда существует вершина $v \in V_1$ такая, что $v \in N(x)$ и $v \notin N(y)$. Поэтому в H имеется повышающая V_2 -тройка (x, v, y) . Пришли к противоречию. \square

Будем говорить, что граф $H = (V_1, E, V_2)$ содержит *двудольный 4-псевдоцикл* x_1, x_2, x_3, x_4 , если $x_1, x_3 \in V_2$; $x_2, x_4 \in V_1$; $x_1x_2 \in E$; $x_2x_3 \notin E$; $x_3x_4 \in E$; $x_4x_1 \notin E$:

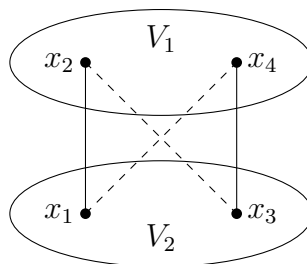


Рис. 3

Лемма 2. *Граф $H = (V_1, E, V_2)$ имеет повышающую V_1 -тройку тогда и только тогда, когда он имеет двудольный 4-псевдоцикл.*

Доказательство. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 — это двудольный 4-псевдоцикл. Если $\deg_H(x_2) \leq \deg_H(x_4)$, то (x_2, x_1, x_4) — повышающая V_1 -тройка. Если же $\deg_H(x_4) \leq \deg_H(x_2)$, то (x_4, x_3, x_2) — повышающая V_1 -тройка.

Обратно, пусть (x_2, x_1, x_4) — повышающая V_1 -тройка. Тогда $\deg_H(x_2) \leq \deg_H(x_4)$. Если для любого ребра вида $ux_4 \in E$, где $u \in V_2$, выполняется $ux_2 \in E$, то, учитывая ребро x_1x_2 , получаем $\deg_H(x_2) > \deg_H(x_4)$, что невозможно. Поэтому существует такая вершина $x_3 \in V_2$, что $x_3x_4 \in E$ и $x_3x_2 \notin E$. Теперь ясно, что x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 — двудольный 4-псевдоцикл. \square

Пусть $H = (V_1, E, V_2)$ — ненулевой двудольный граф без изолированных вершин, $|V_1| = t$ и $|V_2| = s$. Упорядочим вершины в V_1 и V_2 таким образом, что (см. рис. 4)

$$V_1 = \{v_1, \dots, v_t\} \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \deg_H v_1 \geq \alpha_2 = \deg_H v_2 \geq \dots \geq \alpha_t = \deg_H v_t > 0;$$

$$V_2 = \{u_s, \dots, u_1\} \quad \text{и} \quad 0 < \beta_s = \deg_H u_s \leq \beta_{s-1} = \deg_H u_{s-1} \leq \dots \leq \beta_1 = \deg_H u_1 :$$

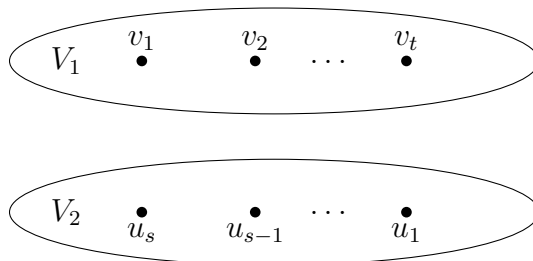


Рис. 4

Разбиения $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ обозначим, соответственно, через $\text{dpt}_H(V_1)$ и $\text{dpt}_H(V_2)$. Это *степенные разбиения долей* графа H , составленные из степеней вершин долей V_1 и V_2 , соответственно, в неубывающем порядке и дополненные бесконечными последовательностями из нулей (степенные разбиения долей двудольных графов с изолированными вершинами определим аналогичным образом и будем использовать для них такие же обозначения).

Вложим теперь граф H в граф $\hat{H} = (K(V_1), E, V_2)$, добавляя к H всевозможные ребра, соединяющие пары различных вершин из V_1 . В графе \hat{H} множество V_1 является кликой, а V_2 — антикликой (т.е. множество вершин графа \hat{H} распадается в дизъюнктное объединение клики и антиклики, такие графы называют *расщепляемыми*). В силу условий $\alpha_t + t - 1 \geq t$ и $t \geq \beta_1$ для графического разбиения $\lambda = \text{gpt}(\hat{H})$ получаем

$$\lambda = (\alpha_1 + t - 1, \alpha_2 + t - 1, \dots, \alpha_t + t - 1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s).$$

Отсюда следует, что $r(\lambda) = t$,

$$\text{hd}(\lambda) = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) = \text{dpt}_H(V_1) \text{ и } \text{tl}(\lambda)^* = (\beta_1, \dots, \beta_s) = \text{dpt}_H(V_2).$$

Лемма 3. Пусть $H = (V_1, E, V_2)$ — двудольный граф. Тогда $\text{sum}(\text{dpt}_H(V_1)) = \text{sum}(\text{dpt}_H(V_2))$ и $\text{dpt}_H(V_1) \leq \text{dpt}_H(V_2)^*$, $\text{dpt}_H(V_2) \leq \text{dpt}_H(V_1)^*$.

Доказательство. Очевидно, $\text{sum}(\text{dpt}_H(V_1)) = m = \text{sum}(\text{dpt}_H(V_2))$, где m — число ребер графа H .

Без ограничения общности будем считать, что H не имеет изолированных вершин. Упорядочим вершины множеств V_1 и V_2 таким образом, как указано перед леммой, и вложим H в расщепляемый граф $\hat{H} = (K(V_1), E, V_2)$. Для графического разбиения $\lambda = \text{gpt}(\hat{H})$ в силу критерия Кохнерта имеем $\text{hd}(\lambda) \leq \text{tl}(\lambda)$. Отсюда следует $\text{dpt}_H(V_1) \leq \text{dpt}_H(V_2)^*$. Второе неравенство $\text{dpt}_H(V_2) \leq \text{dpt}_H(V_1)^*$ верно потому, что переход к сопряженным разбиениям является антиавтоморфизмом решетки разбиений $NPL(m)$. \square

Лемма 4. Расщепляемый граф $\hat{H} = (K(V_1), E, V_2)$ является пороговым тогда и только тогда, когда $\text{dpt}_H(V_2) = \text{dpt}_H(V_1)^*$.

Доказательство. Если граф \hat{H} является пороговым, то $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$ и, следовательно, $\text{dpt}_H(V_2) = \text{tl}(\lambda)^* = \text{hd}(\lambda)^* = \text{dpt}_H(V_1)^*$.

Обратно, пусть $\text{dpt}_H(V_2) = \text{dpt}_H(V_1)^*$. Тогда $\text{tl}(\lambda)^* = \text{dpt}_H(V_2) = \text{dpt}_H(V_1)^* = \text{hd}(\lambda)^*$, откуда получаем $\text{tl}(\lambda) = \text{hd}(\lambda)$. Следовательно, граф \hat{H} является пороговым. \square

Следующая теорема дает различные характеристики двудольно-пороговых графов.

Теорема 1. Пусть $H = (V_1, E, V_2)$ — двудольный граф. Тогда следующие условия эквивалентны.

- 1) H является сэндвич-подграфом порогового графа $G = (K(V_1), E, V_2)$;
- 2) H является сэндвич-подграфом порогового графа $G = (K(V_2), E, V_1)$;
- 3) в H окрестности вершин каждой из долей V_1 и V_2 образуют цепи относительно теоретико-множественного включения;
- 4) в H окрестности вершин доли V_1 образуют цепь относительно теоретико-множественного включения;
- 5) в H окрестности вершин доли V_2 образуют цепь относительно теоретико-множественного включения;
- 6) H является двудольно-пороговым графом, т. е. не содержит повышающих V_1 -троек и повышающих V_2 -троек;
- 7) H не содержит повышающих V_1 -троек;
- 8) H не содержит повышающих V_2 -троек;
- 9) $\text{dpt}_H(V_2) = \text{dpt}_H(V_1)^*$;
- 10) $\text{dpt}_H(V_1) = \text{dpt}_H(V_2)^*$;
- 11) H не имеет двудольных 4-псевдоциклов.

Доказательство. Нетрудно заметить, что при удалении из каждой доли V_1 и V_2 графа H конечного множества изолированных вершин свойства 1)–11) сохраняются. Эти свойства сохраняются и при добавлении изолированных вершин. Поэтому без ограничения общности можно считать, что H не содержит изолированных вершин.

Поскольку наличие двудольного 4-псевдоцикла в графе $H = (V_1, E, V_2)$ не зависит от нумерации его долей V_1 и V_2 , в силу леммы 2 условие 7) эквивалентно условию 11), которое в свою очередь в силу леммы 2 эквивалентно условию 8). Отсюда следует, что условия 6), 7), 8) и 11) попарно эквивалентны.

Если выполняется условие 8), то в силу леммы 1 выполняется условие 5). Тогда граф $G = (K(V_1), E, V_2)$ является пороговым по определению порогового графа, поэтому выполняется

условие 1). Обратное, если выполняется условие 1), то, как отмечено во введении, пороговый граф $G = (K(V_1), E, V_2)$ не содержит повышающих троек, поэтому выполняется условие 8). Следовательно, условия 8), 5) и 1) попарно эквивалентны.

Аналогично, условия 7), 4) и 2) попарно эквивалентны. Поэтому девять условий 1)–8) и 11) попарно эквивалентны. В силу леммы 4 условие 1) эквивалентно условию 9), а условие 2) — условию 10). Таким образом, все одиннадцать условий теоремы попарно эквивалентны.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим двудольный граф H без изолированных вершин:

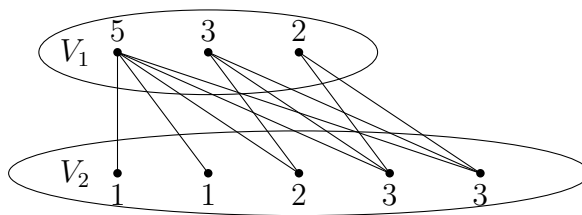


Рис. 5

Легко видеть, что для этого графа выполняется условие вложенности окрестностей. Здесь $dpt_H(V_1) = (5, 3, 2)$, $dpt_H(V_2) = (3, 3, 2, 1, 1)$ и $dpt_H(V_2) = dpt_H(V_1)^*$. Конечно, верно и условие $dpt_H(V_1) = dpt_H(V_2)^*$:

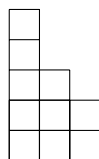


Рис. 6. Диаграмма Ферре разбиения $dpt_H(V_1)$

Нетрудно установить, что для любого двудольного графа $H = (V_1, E, V_2)$ без изолированных вершин все пороговые графы, содержащие его в качестве реберно порожденного подграфа, устроены следующим образом: $G = (K(V_1 \cup U_1), E, V_2 \cup U_2)$ для некоторых конечных множеств U_1 и U_2 таких, что множества V_1, U_1, V_2, U_2 попарно не пересекаются. Множество U_1 “расширяет” клику, а множество U_2 — антиклику.

Отметим, что любой двудольный граф последовательными вращениями ребер, каждое из которых отвечает повышающей тройке первой или второй доли, приводится к двудольно-пороговому графу, поскольку при каждом таком вращении в решетке разбиений строго увеличивается степенное разбиение преобразуемой доли, и можно совершить лишь конечное число таких вращений, так как решетка $NPL(m)$ конечна, где m — число ребер исходного двудольного графа. В силу теоремы 1 любой двудольный граф последовательными вращениями ребер, каждое из которых отвечает повышающей тройке только первой доли, также приводится к двудольно-пороговому графу. Конечно, аналогичное утверждение верно и для повышающих троек второй доли.

3. Применение теоремы 1

Покажем теперь как с помощью теоремы 1 можно получить новое достаточно простое доказательство известного критерия Гейла и Райзера о представлении двух разбиений степенными разбиениями долей двудольного графа. Сначала приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 5. Пусть $H = (V_1, E, V_2)$ — двудольный граф и $dpt_H(V_1) = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_t)$, где $1 \leq i < j \leq t$, где $|V_1| = t$. Упорядочим вершины в V_1 таким образом, что $V_1 = \{u_1, \dots, u_t\}$ и $\lambda_1 = \deg_H u_1 \geq \lambda_2 = \deg_H u_2 \geq \dots \geq \lambda_t = \deg_H u_t$.

Пусть разбиение $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_t)$ получено из разбиения λ с помощью одного элементарного преобразования первого типа. Тогда существует граф $H_1 = (V_1, E_1, V_2)$, который можно получить из графа H с помощью одного понижающего V_1 -вращения ребра, отвечающего тройке (u_i, v, u_j) для некоторой вершины $v \in V_2$, и для которого выполняются равенства $\text{dpt}_{H_1}(V_1) = \mu$ и $\text{dpt}_{H_1}(V_2) = \text{dpt}_H(V_2)$.

Доказательство. Если каждая вершина из V_2 , смежная вершине u_i , является смежной и вершине u_j , то $\lambda_i = \deg_H u_i \leq \deg_H u_j = \lambda_j$, что противоречит условию $\lambda_i \geq 2 + \lambda_j$. Поэтому существует вершина $v \in V_2$, задающая понижающую V_1 -тройку (u_i, v, u_j) . Искомый граф H_1 получается из графа H с помощью соответствующего ей понижающего V_1 -вращения ребра. \square

Лемма 6. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ — разбиение, где $l(\beta) = s$. Тогда для любого $k \geq \beta_1$ существует такой двудольный граф $G = (V_1, E', V_2)$, что $|V_1| = k$, $\text{dpt}_G(V_1) = \beta^*$ и $\text{dpt}_G(V_2) = \beta$.

Доказательство. Возьмем два непересекающихся множества V_1 и V_2 таких, что $|V_1| = k$ и $|V_2| = s$, где $k \geq \beta_1$, $V_1 = \{u_1, \dots, u_k\}$ и $V_2 = \{v_1, \dots, v_s\}$. На множестве $V_1 \cup V_2$ определим двудольный граф $G = (V_1, E', V_2)$, полагая $N(v_i) = \{u_1, \dots, u_{\beta_i}\}$ для любого $i = 1, \dots, s$. Тогда $\text{dpt}_H(V_2) = \beta$ и система окрестностей вершин множества V_2 образует цепь подмножеств из V_1 относительно теоретико-множественного включения. В силу теоремы 1 граф H является двудольно-пороговым и $\text{dpt}_G(V_1) = \text{dpt}_G(V_2)^* = \beta^*$. \square

Заметим, что двудольно-пороговый граф, для которого разбиения β^* и β являются степенными разбиениями двух его долей, единственен с точностью до изоморфизма и изолированных вершин. Любой такой граф изоморфен некоторому из графов, построенных методом, указанным в доказательстве леммы. Чтобы показать этого, нужно воспользоваться тем, что система окрестностей вершин второй доли двудольно-порогового графа образует цепь подмножеств в первой доле относительно теоретико-множественного включения, и соответствующим образом упорядочить вершины первой доли.

Для произвольного разбиения β через $\text{btg}(\beta^*, \beta)$ будем обозначать двудольно-пороговый граф $H = (V_1, E, V_2)$ без изолированных вершин такой, что $\text{dpt}_G(V_1) = \beta^*$ и $\text{dpt}_G(V_2) = \beta$.

Лемма 7. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ — два разбиения такие, что $\text{sum}(\alpha) = \text{sum}(\beta)$ и $\alpha \leq \beta^*$. Тогда существует такой двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$, что $\text{dpt}_H(V_1) = \alpha$ и $\text{dpt}_H(V_2) = \beta$.

Доказательство. В силу условий $\alpha \leq \beta^*$ и $\text{sum}(\alpha) = \text{sum}(\beta)$ существует [7] такая последовательность разбиений $\beta^* = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(t)} = \alpha$, что для любого $i = 1, \dots, t$ каждое разбиение вида $\lambda^{(i)}$ получается из разбиения $\lambda^{(i-1)}$ с помощью одного элементарного преобразования первого типа. При выполнении элементарных преобразований первого типа длина разбиения не может уменьшиться, и, следовательно, $\alpha \leq \beta^*$ влечет $l(\alpha) \geq l(\beta^*) = \beta_1$.

Теперь применим лемму 6 при $k = l(\alpha)$ и k раз применим лемму 5 (при выполнении V_1 -вращений ребер множество E' преобразуется в множество E). \square

Из лемм 3 и 7 вытекает теорема Гейла — Райзера в следующей формулировке.

Теорема 2 (Гейл — Райзер). Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ — два разбиения. Двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ такой, что $\text{dpt}_H(V_1) = \alpha$ и $\text{dpt}_H(V_2) = \beta$, существует тогда и только тогда, когда $\text{sum}(\alpha) = \text{sum}(\beta)$ и $\alpha \leq \beta^*$.

Пусть λ и μ — два разбиения одинакового веса такие, что $\lambda \leq \mu$. Через $\text{height}(\mu, \lambda)$ будем обозначать высоту разбиения μ над разбиением λ [10], т. е. длину кратчайшей последовательности элементарных преобразований первого типа, переводящей μ в λ . В силу [12, теорема 1] выполняется

$$\text{height}(\mu, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_i |\mu_i - \lambda_i|,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ — два разбиения такие, что $\text{sum}(\alpha) = \text{sum}(\beta)$ и $\alpha \leq \beta^*$. Через $BG(\alpha, \beta)$ обозначим класс всех двудольных графов $H = (V_1, E, V_2)$ таких, что $\text{dpt}_H(V_1) = \alpha$ и $\text{dpt}_H(V_2) = \beta$.

Будем предполагать далее, что $H = (V_1, E, V_2)$ — некоторый двудольный граф без изолированных вершин такой, что $\text{dpt}_H(V_1) = \alpha$, $\text{dpt}_H(V_2) = \beta$.

С учетом теоремы 1 граф H можно преобразовать в двудольно-пороговый граф $G_1 = (V_1, E_1, V_2)$ с помощью последовательных вращений ребер, отвечающих только повышающим тройкам первой доли V_1 . Поскольку при таких вращениях степени вершин доли V_2 не изменяются, выполняется равенство $\text{dpt}_{G_1}(V_2) = \beta$. Тогда в силу теоремы 1 имеем $\text{dpt}_{G_1}(V_1) = \beta^*$, т. е. $G_1 = \text{btg}(\beta^*, \beta)$.

Таким образом, граф $H = (V_1, E, V_2)$ приводится повышающими V_1 -вращениями ребер к единственному с точностью до изоморфизма и изолированных вершин двудольно-пороговому графу, а именно к $\text{btg}(\beta^*, \beta)$.

Так как любой последовательности понижающих V_1 -вращений ребер отвечает последовательность элементарных преобразований первого типа степенного разбиения доли V_1 и, очевидно, наоборот (см. лемму 5), можно вычислить наименьшее возможное число понижающих V_1 -вращений ребер, переводящих граф $\text{btg}(\beta^*, \beta)$ в граф из семейства $BG(\alpha, \beta)$ двудольных графов. В силу [12, теорема 1] оно равно высоте разбиения β^* над разбиением α , т. е.

$$\frac{1}{2} \sum |\beta_i^* - \alpha_i|,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ и $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots)$ (ср. с теоремой Гейла — Райзнера).

Аналогично, граф H можно преобразовать в двудольно-пороговый граф $G_2 = \text{btg}(\alpha, \alpha^*)$ с помощью последовательных вращений ребер, отвечающих только повышающим тройкам второй доли V_2 . Заметим, что по теореме Гейла — Райзнера имеем $\beta \leq \alpha^*$. Ясно, что высота разбиения α^* над разбиением β равна высоте разбиения β^* над разбиением α , поскольку переход к сопряженным разбиениям является антиавтоморфизмом решетки $NPL(m)$, где $m = |E|$. Отсюда следует, что наименьшее возможное число понижающих V_2 -вращений ребер, переводящих $\text{btg}(\alpha, \alpha^*)$ в граф из семейства $BG(\alpha, \beta)$, равно наименьшему возможному числу понижающих V_1 -вращений ребер, переводящих $\text{btg}(\beta^*, \beta)$ в граф из семейства $BG(\alpha, \beta)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ — два разбиения такие, что $\text{sum}(\alpha) = \text{sum}(\beta)$ и $\alpha \leq \beta^*$.

1) Любой граф $H = (V_1, E, V_2)$ без изолированных вершин из семейства графов $BG(\alpha, \beta)$ с помощью конечной последовательности повышающих V_1 -вращений ребер приводится к единственному двудольно-пороговому графу с точностью до изоморфизма и изолированных вершин, который изоморфен $\text{btg}(\beta^*, \beta)$ и получается из графа $\text{btg}(\beta^*, \beta)$ с помощью конечной последовательности понижающих V_1 -вращений ребер.

2) Наименьшее возможное число понижающих V_1 -вращений ребер в конечной последовательности, переводящей граф $\text{btg}(\beta^*, \beta)$ в граф из семейства $BG(\alpha, \beta)$, равно высоте разбиения β^* над разбиением α , т. е.

$$\text{height}(\beta^*, \alpha) = \frac{1}{2} \sum_i |\beta_i^* - \alpha_i|, \quad \text{где } \beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots).$$

Аналогичное утверждение справедливо также для семейства $BG(\alpha, \beta)$ и двудольно-порогового графа $\text{btg}(\alpha, \alpha^*)$, причем $\text{height}(\beta^*, \alpha) = \text{height}(\alpha^*, \beta)$.

Заметим, что нетрудно привести пример разбиений α и β таких, что $\text{sum}(\alpha) = \text{sum}(\beta)$ и $\alpha \leq \beta^*$, и пример графа из $BG(\alpha, \beta)$, для которых любая последовательность повышающих V_1 -вращений ребер, приводящая его к двудольно-пороговому виду, имеет длину, строго большую числа $\text{height}(\beta^*, \alpha)$.

Ранее нами было показано, что любой граф может быть получен из некоторого порогового графа с помощью конечной последовательности понижающих вращений ребер. Как видим, для класса двудольных графов ситуация совершенно аналогичная, любой двудольный граф может быть получен из некоторого “тесно связанного с ним” двудольно-порогового графа с помощью конечной последовательности понижающих вращений ребер одной из его долей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Лань, 2010. 368 с.
2. **Andrews G.E.** The theory of partitions. Cambridge: Cambridge University Press, 1976. 255 p.
3. **Ivanyi A., Lucz L., Gombos G., Matuszka T.** Parallel enumeration of degree sequences of simple graphs // Acta Univ. Sapientiae, Informatica. 2012. Vol. 4, № 2. P. 260–288.
4. **Tripathi A., Venugopalan S., West D.B.** A short constructive proof of the Erdos–Gallai characterization of graphic lists // Discrete Math. 2010. Vol. 310, № 4. P. 833–834. doi: 10.1016/j.disc.2009.09.023.
5. **Bisi C., Ciaselotti G., Oliverio P.A.** A natural extension of the Young partition lattice // Advances in Geometry. 2015. Vol. 15, № 3. P. 263–280. doi: 10.1515/advgeom-2015-0017.
6. **Baransky V.A., Koroleva T.A.** The lattice of partitions of a positive integer // Dokl. Math. 2008. Vol. 77, № 1. P. 72–75.
7. **Baransky V.A., Koroleva T.A., Senchonok T.A.** On the partition lattice of all integers // Sib. Elect. Math. Reports. 2016. Vol. 13. P. 744–753. doi: 10.17377/semi.2016.13.060.
8. **Kohnert A.** Dominance order and graphical partitions // Elec. J. Comb. 2004. Vol. 11, № 4. P. 1–17. doi: 10.37236/1845.
9. **Erdős P., Gallai T.** Graphs with given degree of vertices // Math. Lapok. 1960. Vol. 11. P. 264–274.
10. **Baransky V.A., Senchonok T.A.** On maximal graphical partitions that are the nearest to a given graphical partition // Sib. Elect. Math. Reports. 2020. Vol. 17. P. 338–363. doi: 10.33048/semi.2020.17.022.
11. **Mahadev N.V.R., Peled U.N.** Threshold graphs and related topics. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1995. Vol. 56. 542 p. (Ser. Annals of Discr. Math.)
12. **Baransky V.A., Senchonok T.A.** On the shortest sequences of elementary transformations in the partition lattice // Sib. Elect. Math. Reports. 2018. Vol. 15. P. 844–852. doi: 10.17377/semi.2018.15.072.

Поступила 15.03.2020

После доработки 8.05.2020

Принята к публикации 18.05.2020

Баранский Виталий Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru

Сеньчонок Татьяна Александровна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru

REFERENCES

1. Asanov M.O., Baransky V.A., Rasin V.V. *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy* [Discrete Mathematics: graphs, matroids, algorithms]. SPb: Lan', 2010, 368 p. ISBN: 978-5-8114-1068-2.
2. Andrews G.E. *The theory of partitions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976, 255 p. ISBN: 9781107093683.

3. Ivanyi A., Lucz L., Gombos G., Matuszka T. Parallel enumeration of degree sequences of simple graphs. *Acta Univ. Sapientiae, Informatica*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 260–288.
4. Tripathi A., Venugopalan S., West D.B. A short constructive proof of the Erdős–Gallai characterization of graphic lists. *Discrete Mathematics*, 2010, vol. 310, no. 4, pp. 843–844. doi: 10.1016/j.disc.2009.09.023.
5. Bisi C., Ciaselotti G., Oliverio P.A. A natural extension of the Young partition lattice. *Advances in Geometry*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 263–280. doi: 10.1515/advgeom-2015-0017.
6. Baransky V.A., Koroleva T.A. The lattice of partitions of a positive integer. *Doklady Math.*, 2008, vol. 77, no. 1, pp. 72–75. doi: 10.1007/s11472-008-1018-z.
7. Baransky V.A., Koroleva T.A., Senchonok T.A. On the partition lattice of all integers. *Sib. Elect. Math. Reports*, 2016, vol. 13, pp. 744–753. doi: 10.17377/semi.2016.13.060.
8. Kohnert A. Dominance order and graphical partitions. *Elec. J. Comb.*, 2004, vol. 11, no. 4, pp. 1–17. doi: 10.37236/1845.
9. Erdős P., Gallai T. Graphs with given degree of vertices. *Math. Lapok*, 1960, vol. 11, no. 4, pp. 264–274 (in Hungarian).
10. Baransky V.A., Senchonok T.A. On maximal graphical partitions that are the nearest to a given graphical partition. *Sib. Elect. Math. Reports*, 2020, vol. 17, pp. 338–363. doi 10.33048/semi.2020.17.022.
11. Mahadev N.V.R., Peled U.N. *Threshold Graphs and Related Topics*. Ser. Annals of Discr. Math., vol. 56, Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1995, 542 p. doi: 10.1016/s0167-5060(13)71063-x.
12. Baransky V.A., Senchonok T.A. On the shortest sequences of elementary transformations in the partition lattice. *Sib. Elect. Math. Reports*, 2018, vol. 15, pp. 844–852 (in Russian). doi 10.17377/semi.2018.15.072.

Received March 15, 2019

Revised May 8, 2020

Accepted May 18, 2020

Vitaly Anatol'evich Baransky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru.

Tatiana Aleksandrovna Senchonok, Cand. Phys.-Math. Sci., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru.

Cite this article as: V. A. Baransky, T. A. Senchonok. Bipartite threshold graphs. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 56–67.

УДК 519.21+517.982.4

**ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССОВ ТИПА ЛЕВИ
В ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ****В. А. Бовкун**

Статья посвящена исследованию корректности уравнений для вероятностных характеристик процессов типа Леви, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). На основе формулы Ито и аппарата теории обобщенных функций доказаны следующие результаты. Прямое уравнение для переходной вероятности процесса является корректным на пространстве финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций при выполнении условий теоремы существования и единственности решения СДУ. Обратное уравнение для вероятностной характеристики специального вида является корректным на том же пространстве при дополнительных условиях на гладкость коэффициентов СДУ.

Ключевые слова: процесс типа Леви, формула Ито, марковский процесс, переходная вероятность, обобщенная функция.

V. A. Bovkun. Forward and backward equations for the probability characteristics of Levy type processes in spaces of distributions.

We study the correctness of equations for the probability characteristics of Levy type processes defined by stochastic differential equations. Using the Ito formula and techniques of the theory of generalized functions, we prove the following results. The forward equation for the transition probability of the process is correct on the space of compactly supported twice continuously differentiable functions under the assumptions of the theorem of existence and uniqueness of solutions to the stochastic differential equation, and the backward equation for a probability characteristic of special form is correct on the same space under additional conditions on the smoothness of the coefficients of the stochastic differential equation.

Keywords: Levy type process, Ito formula, Markov process, transition probability, distribution.

MSC: 60H10, 35D30, 46F10**DOI:** 10.21538/0134-4889-2020-26-2-68-78**Введение**

Изучение многочисленных явлений с учетом случайных возмущений, возникающих в различных областях фундаментальных и прикладных исследований, приводит к математическим моделям в форме стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Наиболее подробно и полно исследованы СДУ для процессов диффузионного типа — уравнения, содержащие “непрерывные”, случайные возмущения в форме интеграла Ито по винеровскому процессу. В настоящее время большой интерес вызывает исследование СДУ, содержащих наряду с непрерывными и разрывные случайные возмущения в форме стохастических интегралов по пуассоновской и компенсированной пуассоновской случайным мерам (см., например, [1–3]). Процессы, определяемые СДУ с интегралами указанного вида, в литературе называют процессами типа Леви. В качестве примеров процессов, моделируемых СДУ с различными типами случайных возмущений, укажем цены различных типов опционов [4] и векторный процесс, описывающий динамику развития эпидемии в условиях случайной внешней среды [5].

Важным направлением в теории СДУ является исследование связи этих уравнений с детерминированными прямым и обратным уравнениями для вероятностных характеристик процессов, определяемых СДУ. Одним из принципиальных отличий уравнений для вероятностных характеристик процессов типа Леви от соответствующих уравнений для процессов диффузионного типа является наличие интегральных слагаемых, отвечающих разрывным случайным возмущениям.

Основным инструментом стохастического анализа, который позволяет установить связь между СДУ и уравнениями для вероятностных характеристик, как в случае диффузионных процессов, так и в случае процессов типа Леви, является формула Ито. Применение этой формулы для вывода прямого уравнения относительно переходной вероятности процесса приводит к появлению дважды непрерывно дифференцируемой функции f . Как показывают дальнейшие преобразования перехода от стохастического уравнения к детерминированному, функция f в этом случае становится основной функцией из некоторого основного пространства¹ Φ , и прямое уравнение допускает формализацию в пространстве обобщенных функций Φ' .

В отличие от прямого уравнения вывод на основе формулы Ито обратного уравнения относительно важной, например, в экономических задачах, вероятностной характеристики $g(t, x) := \mathbf{E}^{t,x}[h(X(T))]$ для процесса типа Леви $X = \{X(t), t \in [0; T]\}$ приводит к значительным техническим трудностям. Необходимым условием применения формулы Ито в этом случае является принадлежность функции g пространству $C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Как следует из конструкции, свойства функции g определяются свойствами функции h , которая фиксируется на этапе экономического моделирования, и свойствами процесса X . Основные исследования в этом направлении сосредоточены на поиске достаточных условий на функцию h и процесс X , при которых функция g обладает необходимой степенью гладкости и удовлетворяет обратному уравнению в классическом смысле (см., например, [2; 6]). В общем случае, без существенных условий гладкости на функцию h , которые в приложениях зачастую не выполняются, ниоткуда не следует, что функция g будет принадлежать пространству $C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. В этой ситуации обратное уравнение следует рассматривать в пространстве обобщенных функций.

В настоящей работе показано, во-первых, что прямое уравнение относительно переходной вероятности процессов типа Леви допускает формализацию на пространстве Φ финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций f при условиях теоремы существования и единственности решения СДУ. Во-вторых, обратное уравнение для функции g корректно на том же пространстве Φ при дополнительных к теореме существования и единственности условиях на гладкость коэффициентов СДУ.

1. Постановка задачи

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$. Рассмотрим случайный процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$, определяемый суммой непрерывных и разрывных случайных возмущений:

$$\begin{aligned} X(t) - \xi &= \int_0^t \mathbf{a}(s) ds + \int_0^t \mathbf{b}(s) dW(s) + \int_0^t \int_{|q| \geq 1} \mathbf{K}(s, q) N(ds, dq) \\ &+ \int_0^t \int_{|q| < 1} \mathbf{F}(s, q) \tilde{N}(ds, dq), \quad t \in [0; T], \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$\{W(t), t \geq 0\}$ — стандартный винеровский процесс;

$N(t, A)$ для любых $t \geq 0$ и ограниченного снизу множества A (т. е. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ и $0 \notin \bar{A}$) является пуассоновской случайной мерой на пространстве $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$;

$\tilde{N}(t, A)$ — мартингально-значная (компенсированная) пуассоновская случайная мера на этом пространстве.

¹Основным пространством называется линейное пространство функций с заданными свойствами, а линейные непрерывные функционалы над основным пространством называются обобщенными функциями.

Согласно определению пуассоновской случайной меры величина $N(t, \cdot)(\omega)$ при любых $\omega \in \Omega$ и $t \geq 0$ является считающей мерой на $\mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, а процесс $\{N(t, A), t \geq 0\}$ является пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda = \nu(A) := \mathbf{E}[N(1, A)]$. Мартингальная мера определяется следующим образом: $\tilde{N}(t, A) := N(t, A) - t\nu(A)$. Слагаемые в правой части равенства (1.1), содержащие пуассоновскую и компенсированную пуассоновскую случайные меры, отвечают разрывным случайным возмущениям, а величина dq характеризует приращение этих возмущений. В частности, для скачкообразных случайных возмущений dq характеризует величины скачков.

В равенстве (1.1) предполагается, что отображения $\mathbf{a}, \mathbf{b}: [0; T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям

$$P\left(\int_0^T \mathbf{a}^2(t) dt < \infty\right) = 1, \quad P\left(\int_0^T \mathbf{b}^2(t) dt < \infty\right) = 1,$$

$\mathbf{F}: [0; T] \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — предсказуемое отображение, удовлетворяющее условию

$$P\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |\mathbf{F}(t, q)|^2 \nu(dq) dt < \infty\right) = 1,$$

$\mathbf{K}: [0; T] \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — предсказуемое отображение и ξ — \mathcal{F}_0 -измеримая случайная величина.

Как сказано во введении, в настоящей работе будут исследованы уравнения для вероятностных характеристик случайного процесса типа Леви. В общем случае процесс типа Леви определяется стохастическим уравнением вида

$$\begin{aligned} X(t) - \xi &= \int_0^t a(X(s-)) ds + \int_0^t b(X(s-)) dW(s) \\ &+ \int_0^t \int_{|q| \geq 1} K(X(s-), q) N(ds, dq) + \int_0^t \int_{|q| < 1} F(X(s-), q) \tilde{N}(ds, dq), \quad t \in [0; T]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Известно, что если отображение $K(\cdot, q)$ является непрерывным для любого $q \geq 1$, а отображения a, b, F удовлетворяют условиям Липшица и подлинейного роста

$$\exists C_1 > 0: \forall y, z \in \mathbb{R} \implies |a(y) - a(z)| + |b(y) - b(z)| + \int_{|q| < 1} |F(y, q) - F(z, q)| \nu(dq) \leq C_1 |y - z|,$$

$$\exists C_2 > 0: \forall y \in \mathbb{R} \implies a^2(y) + b^2(y) + \int_{|q| < 1} F^2(y, q) \nu(dq) \leq C_2 (1 + y^2),$$

то существует единственное сильное² решение задачи (1.2), которое является однородным марковским процессом (см., например, [7, с. 374, 388]). Исследование корректности постановки в пространствах обобщенных функций прямого и обратного уравнений для вероятностных характеристик процессов типа Леви X в настоящей работе опирается на применение общей формулы Ито для процессов указанного типа. А именно, для процесса $\{X(t), t \geq 0\}$, определяемого равенством (1.1), и произвольной функции $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ с вероятностью единица

²В рамках теории СДУ сильным решением называется процесс, удовлетворяющий п.н. равенству (1.2) и согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, порожденной случайными возмущениями, входящими в уравнение. Далее в работе под решением СДУ всегда будет подразумеваться сильное решение.

имеет место равенство (формула Ито) [2, с. 68]

$$\begin{aligned}
f(t, X(t)) - f(0, X(0)) &= \int_0^t f'_s(s, X(s-))ds + \int_0^t \mathbf{a}(s)f'_x(s, X(s-))ds \\
&+ \int_0^t \mathbf{a}(s)f'_x(s, X(s-))dW(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{b}^2(s)f''_{xx}(s, X(s-))ds \\
&+ \int_0^t \int_{|q| \geq 1} [f(s, X(s-) + \mathbf{K}(s, q)) - f(s, X(s-))]N(ds, dq) \\
&+ \int_0^t \int_{|q| < 1} [f(s, X(s-) + \mathbf{F}(s, q)) - f(s, X(s-))] \tilde{N}(ds, dq) \\
&+ \int_0^t \int_{|q| < 1} [f(s, X(s-) + \mathbf{F}(s, q)) - f(s, X(s-)) - \mathbf{F}(s, q)f'_x(s, X(s-))] \nu(dq)ds. \quad (1.3)
\end{aligned}$$

2. Основные результаты

Пусть $\{X(t), t \geq 0\}$ — решение уравнения (1.2) с начальным условием $x \in \mathbb{R}$, а $P(s, z; t, B)$ — вероятность перехода процесса X из положения $z \in \mathbb{R}$ в момент времени $s \geq 0$ в одно из состояний множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ в момент времени $t \geq s$. Рассмотрим линейное пространство Φ — совокупность всех финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и пространство Φ' — совокупность всех линейных непрерывных функционалов на Φ . Поскольку конечное значение интеграла $\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0, x; t, dy)$ существует для любой $f \in C_b(\mathbb{R})$ в силу свойств переходной вероятности, то на пространстве $C_c(\mathbb{R})$ (совокупность всех финитных непрерывных функций на \mathbb{R}) корректно определен функционал $p(0, x; t, \cdot)$ такой, что для любой $f \in C_c(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0, x; t, dy) = \langle f(\cdot), p(0, x; t, \cdot) \rangle, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Функционал $p(0, x; t, \cdot)$ назовем обобщенной плотностью переходной вероятности процесса $\{X(t), t \geq 0\}$. В случае, если переходная вероятность имеет классическую плотность (производную в смысле Радона — Никодима), то $p(0, x; t, \cdot)$ является регулярной обобщенной функцией и справедливо равенство $\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0, x; t, dy) = \int_{\mathbb{R}} f(y)p(0, x; t, y)dy$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Отметим,

что в силу вложения $\Phi \subset C_c(\mathbb{R})$ равенство (2.1) корректно определяет функционал на пространстве Φ . Покажем, что функционал p удовлетворяет прямому уравнению в пространстве Φ' . А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 1. Пусть в уравнении (1.2) начальное условие $\xi = x \in \mathbb{R}$ и коэффициенты a, b, F, K удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения СДУ. Тогда обобщенная плотность переходной вероятности p , определяемая равенством (2.1), на $f \in \Phi$ удовлетворяет уравнению

$$\left\langle f(y), \frac{\partial p(0, x; t, y)}{\partial t} \right\rangle = \left\langle f(y), -\frac{\partial (a(y)p(0, x; t, y))}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial (b^2(y)p(0, x; t, y))}{\partial y} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
& + \left\langle f(y), \int_{|q| \geq 1} (p(0, x; t, y - K(y, q)) - p(0, x; t, y)) \nu(dq) \right\rangle \\
& + \langle f(y), \int_{|q| < 1} \left(p(0, x; t, y - F(y, q)) - p(0, x; t, y) + \frac{\partial (F(y, q)p(0, x; t, y))}{\partial y} \right) \nu(dq) \rangle, \quad t > 0. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f \in C^2(\mathbb{R})$ и с помощью формулы (1.3) запишем уравнение для процесса $\{f(X(t)), t \geq 0\}$, где X — решение уравнения (1.2) с начальным условием $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(X(t)) - f(x) &= \int_0^t a(X(s-))f'(X(s-))ds + \int_0^t a(X(s-))f'(X(s-))dW(s) \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^t b^2(X(s-))f''(X(s-))ds \\
& \quad + \int_0^t \int_{|q| \geq 1} [f(X(s-) + K(X(s-), q)) - f(X(s-))]N(ds, dq) \\
& \quad + \int_0^t \int_{|q| < 1} [f(X(s-) + F(X(s-), q)) - f(X(s-))] \tilde{N}(ds, dq) \\
& \quad + \int_0^t \int_{|q| < 1} [f(X(s-) + F(X(s-), q)) - f(X(s-)) - F(X(s-), q)f'(X(s-))] \nu(dq)ds. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Далее будет показано, что функции f в прямом уравнении играют роль основных функций для функционалов, определяемых переходной вероятностью процесса типа Леви.

К обеим частям равенства (2.3) применим математическое ожидание. Поскольку интегралы по винеровскому процессу и компенсированному пуассоновскому процессу являются мартингалами, получаем, что математическое ожидание от второго и пятого слагаемых правой части равенства равны нулю. Теперь для интеграла по мере N в силу независимости подынтегрального выражения от N имеем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left\{ \int_0^t \int_{|q| \geq 1} [f(X(s-) + K(X(s-), q)) - f(X(s-))]N(ds, dq) \right\} \\
& = \int_0^t \int_{|q| \geq 1} \mathbf{E}[f(X(s-) + K(X(s-), q)) - f(X(s-))] \nu(dq)ds.
\end{aligned}$$

В оставшихся слагаемых правой части в силу стохастической теоремы Фубини изменим порядок интегрирования и получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[f(X(t))] - f(x) &= \int_0^t \mathbf{E}[a(X(s-))f'(X(s-)) + \frac{1}{2}b^2(X(s-))f''(X(s-))]ds \\
& \quad + \int_0^t \int_{|q| \geq 1} \mathbf{E}[f(X(s-) + K(X(s-), q)) - f(X(s-))] \nu(dq)ds
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \int_{|q|<1} \mathbf{E} [f(X(s-) + F(X(s-), q)) - f(X(s-)) - F(X(s-), q)f'(X(s-))] \nu(dq) ds.$$

Далее, поскольку процессы типа Леви обладают свойством $P(X(s-) = X(s)) = 1$ при любом $s \geq 0$, выводим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(y) P(0, x; t, dy) - f(x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[a(z) f'(z) + \frac{1}{2} b^2(z) f''(z) \right] P(0, x; s, dz) ds \\ &+ \int_0^t \int_{|q| \geq 1} \int_{\mathbb{R}} [f(z + K(z, q)) - f(z)] P(0, x; s, dz) \nu(dq) ds \\ &+ \int_0^t \int_{|q| < 1} \int_{\mathbb{R}} [f(z + F(z, q)) - f(z) - F(z, q) f'(z)] P(0, x; s, dz) \nu(dq) ds. \end{aligned}$$

Правая часть полученного равенства представляет собой интеграл с переменным верхним пределом, отсюда после дифференцирования обеих частей этого равенства по параметру t получаем прямое уравнение для переходной вероятности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} f(y) P(0, x; t, dy) &= \int_{\mathbb{R}} \left[a(y) f'(y) + \frac{1}{2} b^2(y) f''(y) \right] P(0, x; t, dy) \\ &+ \int_{|q| \geq 1} \int_{\mathbb{R}} [f(y + K(y, q)) - f(y)] P(0, x; t, dy) \nu(dq) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{|q| < 1} [f(y + F(y, q)) - f(y) - F(y, q) f'(y)] \nu(dq) P(0, x; t, dy). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь переходим к формализации этого уравнения в пространстве обобщенных функций Φ' . Для этого рассмотрим функционал $p(0, x; t, \cdot)$, определяемый равенством (2.1), на пространстве Φ . Поскольку для любой функции $f \in \Phi$ существует производная по параметру t величины $\int_{\mathbb{R}} f(y) P(0, x; t, dy)$, то в силу необходимого и достаточного условия дифференцируемости обобщенной функции по параметру (см., например, [8, с. 190]) существует производная плотности $p(0, x; t, \cdot)$ по t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} f(y) P(0, x; t, dy) = \frac{\partial}{\partial t} \langle f(y), p(0, x; t, y) \rangle = \left\langle f(y), \frac{\partial}{\partial t} p(0, x; t, y) \right\rangle, \quad f \in \Phi.$$

Рассмотрим “дифференциальные” слагаемые в равенстве (2.4):

$$\int_{\mathbb{R}} \left[a(y) f'(y) + \frac{1}{2} b^2(y) f''(y) \right] P(0, x; t, dy), \quad f \in \Phi.$$

Поскольку условия теоремы существования и единственности решения стохастического уравнения (1.2) считаются выполненными, функции a, b удовлетворяют условию Липшица. Отсюда следует, что a и b^2 являются мультипликаторами в $C_c(\mathbb{R})$, т.е. произведения $a f'$ и $b^2 f''$ определяют функции из пространства $C_c(\mathbb{R})$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left[a(y) f'(y) + \frac{1}{2} b^2(y) f''(y) \right] P(0, x; t, dy) &= \left\langle a(y) f'(y) + \frac{1}{2} b^2(y) f''(y), p(0, x; t, y) \right\rangle \\ &= \left\langle f(y), -\frac{\partial}{\partial y} (a(y) p(0, x; t, y)) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (b^2(y) p(0, x; t, y)) \right\rangle, \quad f \in \Phi. \end{aligned}$$

Переходим к формализации “интегральных” слагаемых, входящих в уравнение (2.4). Рассмотрим интеграл

$$\int_{|q| \geq 1} \int_{\mathbb{R}} [f(y + K(y, q)) - f(y)] P(0, x; t, dy) \nu(dq), \quad f \in \Phi. \quad (2.5)$$

Поскольку условия теоремы существования и единственности считаются выполненными, функция $K(\cdot, q)$ при любом $|q| \geq 1$ является непрерывной на \mathbb{R} , следовательно, при любом $|q| \geq 1$ имеет место включение $f(\cdot + K(\cdot, q)) \in C_c(\mathbb{R})$. Тогда для интеграла (2.5) выводим представление

$$\begin{aligned} \int_{|q| \geq 1} \int_{\mathbb{R}} [f(y + K(y, q)) - f(y)] P(0, x; t, dy) \nu(dq) &= \int_{|q| \geq 1} \langle f(y + K(y, q)) - f(y), p(0, x; t, y) \rangle \nu(dq) \\ &= \int_{|q| \geq 1} \langle f(y), p(0, x; t, y - K(y, q)) - p(0, x; t, y) \rangle \nu(dq) \\ &= \left\langle f(y), \int_{|q| \geq 1} (p(0, x; t, y - K(y, q)) - p(0, x; t, y)) \nu(dq) \right\rangle, \quad f \in \Phi. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим последний интеграл правой части уравнения (2.4):

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{|q| < 1} [f(y + F(y, q)) - f(y) - F(y, q)f'(y)] \nu(dq) P(0, x; t, dy), \quad f \in \Phi.$$

Поскольку условия теоремы существования и единственности считаются выполненными, для внутреннего интеграла имеет место включение

$$\int_{|q| < 1} [f(y + F(y, q)) - f(y) - F(y, q)f'(y)] \nu(dq) \in C_c(\mathbb{R}).$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\int_{|q| < 1} \int_{\mathbb{R}} [f(y + F(y, q)) - f(y) - F(y, q)f'(y)] \nu(dq) P(0, x; t, dy) \\ &= \left\langle \int_{|q| < 1} [f(y + F(y, q)) - f(y) - F(y, q)f'(y)] \nu(dq), p(0, x; t, y) \right\rangle \\ &= \left\langle f(y), \int_{|q| < 1} \left(p(0, x; t, y - F(y, q)) - p(0, x; t, y) + \frac{\partial}{\partial y} (F(y, q)p(0, x; t, y)) \right) \nu(dq) \right\rangle, \quad f \in \Phi. \end{aligned}$$

Таким образом, объединяя вместе полученные равенства, получаем, что обобщенная плотность переходной вероятности p процесса $\{X(t), t \geq 0\}$ удовлетворяет прямому уравнению (2.2). \square

З а м е ч а н и е. В силу равенства (2.1) корректность прямого уравнения для обобщенной плотности на пространстве Φ приводит к тому, что и уравнение (2.4) для переходной вероятности корректно на этом пространстве.

Далее покажем, что обратное уравнение для вероятностной характеристики g процесса типа Леви

$$g(t, x) := \mathbf{E}^{t, x}[h(X(T))] = \int_{\mathbb{R}} h(y) P(t, x; T, dy), \quad t \in [0; T], \quad h \in C_b(\mathbb{R},) \quad (2.6)$$

при дополнительных условиях на коэффициенты a, b, K, F корректно на том же пространстве Φ . А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 2. Пусть процесс $\{X(t), t \geq 0\}$ — решение уравнения (1.2). Пусть коэффициенты a, b , коэффициент $F(\cdot, q)$ при любом $q \in (-1; 1)$, коэффициент $K(\cdot, q)$ при любом $|q| \geq 1$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми на \mathbb{R} функциями. Тогда функция g , определяемая равенством (2.6), на $f \in \Phi$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & -\langle f(x), g'_t(t, x) \rangle = \left\langle f(x), a(x)g'_x(t, x) + \frac{1}{2}b^2(x)g''_{xx}(t, x) \right\rangle \\ & \quad + \left\langle f(x), \int_{|q| \geq 1} [g(t, x + K(x, q)) - g(t, x)] \nu(dq) \right\rangle \\ & + \left\langle f(x), \int_{|q| < 1} [g(t, x + F(x, q)) - g(t, x) - F(x, q)g'_x(t, x)] \nu(dq) \right\rangle, \quad t \in (0; T). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Доказательство проведем в два этапа. На первом этапе предположим существование непрерывных частных производных g'_t, g'_x, g''_{xx} и запишем с помощью формулы Ито уравнение для процесса $\{g(t, X(t)), t \in [0; T]\}$

$$\begin{aligned} & g(t, X(t)) - g(0, X(0)) \\ & = \int_0^t \left(g'_s(s, X(s-)) + a(X(s-))g'_x(s, X(s-)) + \frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s, X(s-)) \right) ds \\ & \quad + \int_0^t \int_{|q| \geq 1} [g(s, X(s-) + K(X(s-), q)) - g(s, X(s-))] N(ds, dq) \\ & \quad + \int_0^t b(X(s-))g'_x(s, X(s-)) dW(s) \\ & \quad + \int_0^t \int_{|q| < 1} [g(s, X(s-) + F(X(s-), q)) - g(s, X(s-))] \tilde{N}(ds, dq) \\ & + \int_0^t \int_{|q| < 1} [g(s, X(s-) + F(X(s-), q)) - g(s, X(s-)) - F(X(s-), q)g'_x(s, X(s-))] \nu(dq) ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В силу определения функции g и марковского свойства процесса X имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[g(t, X(t))] = \mathbf{E}[\mathbf{E}^{t, X(t)}[h(X(T))]] \\ & = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(y) P(t, x; T, dy) P(0, \xi; t, dx) = \int_{\mathbb{R}} h(y) P(0, \xi; T, dy) = \mathbf{E}[g(0, X(0))]. \end{aligned}$$

Следовательно, математическое ожидание правой части (2.8) равно нулю. Тогда по стохастической теореме Фубини изменим порядок интегрирования в первом и последнем слагаемых правой части равенства:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \mathbf{E} \left[g'_s(s, X(s-)) + a(X(s-))g'_x(s, X(s-)) + \frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s, X(s-)) \right] ds \\ & + \mathbf{E} \left\{ \int_0^t \int_{|q| \geq 1} [g(s, X(s-) + K(X(s-), q)) - g(s, X(s-))] N(ds, dq) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{E} \left[\int_0^t b(X(s-)) g'_x(s, X(s-)) dW(s) \right] \\
& + \mathbf{E} \left\{ \int_0^t \int_{|q|<1} [g(s, X(s-)) + F(X(s-), q)) - g(s, X(s-))] \tilde{N}(ds, dq) \right\} \\
& + \int_0^t \mathbf{E} \left[\int_{|q|<1} [g(s, X(s-)) + F(X(s-), q)) - g(s, X(s-)) - F(X(s-), q) g'_x(s, X(s-))] \nu(dq) \right] ds = 0.
\end{aligned}$$

В силу мартингалности винеровского процесса и меры \tilde{N} третье и четвертое слагаемые равны нулю. Учитывая для второго слагаемого независимость подынтегрального выражения от меры N , получаем равенство

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \mathbf{E} \left\{ g'_s(s, X(s-)) + a(X(s-)) g'_x(s, X(s-)) + \frac{1}{2} b^2(X(s-)) g''_{xx}(s, X(s-)) \right. \\
& \quad \left. + \int_{|q|\geq 1} [g(s, X(s-)) + K(X(s-), q)) - g(s, X(s-))] \nu(dq) \right. \\
& \quad \left. + \int_{|q|<1} [g(s, X(s-)) + F(X(s-), q)) - g(s, X(s-)) - F(X(s-), q) g'_x(s, X(s-))] \nu(dq) \right\} ds = 0.
\end{aligned}$$

В силу произвольности $t \in [0; T]$ отсюда следует, что подынтегральная функция равна нулю при любом $0 < s \leq t < T$:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left\{ g'_s(s, X(s-)) + a(X(s-)) g'_x(s, X(s-)) + \frac{1}{2} b^2(X(s-)) g''_{xx}(s, X(s-)) \right. \\
& \quad \left. + \int_{|q|\geq 1} [g(s, X(s-)) + K(X(s-), q)) - g(s, X(s-))] \nu(dq) \right. \\
& \quad \left. + \int_{|q|<1} [g(s, X(s-)) + F(X(s-), q)) - g(s, X(s-)) - F(X(s-), q) g'_x(s, X(s-))] \nu(dq) \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Если эволюция процесса началась в момент времени $t \in [0; T]$ из точки $X(t) = x \in \mathbb{R}$, то полученное равенство приводит к обратному уравнению для функции g :

$$\begin{aligned}
-g'_t(t, x) &= a(x) g'_x(t, x) + \frac{1}{2} b^2(x) g''_{xx}(t, x) + \int_{|q|\geq 1} [g(t, x + K(x, q)) - g(t, x)] \nu(dq) \\
& + \int_{|q|<1} [g(t, x + F(x, q)) - g(t, x) - F(x, q) g'_x(t, x)] \nu(dq), \quad t \in (0; T). \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Теперь переходим ко *второму этапу* — исследованию корректности полученного уравнения в пространстве обобщенных функций. Отметим важный факт: уравнение (2.9) получено при условиях существования непрерывных частных производных g'_t, g'_x, g''_{xx} . Один из основных результатов, полученных Х. Кунитой (см., например, [6]), обеспечивает существование указанных производных функции g при следующих условиях: коэффициенты a, b, F, K дважды непрерывно дифференцируемы (по переменной x), и их производные до второго порядка включительно удовлетворяют условиям Липшица и подлинейного роста; функция h является

дважды непрерывно дифференцируемой и имеет ограниченные производные. При исследовании общего случая, когда $h \in C_b(\mathbb{R})$, условий дважды непрерывной дифференцируемости коэффициентов a, b, F, K уравнения (1.2) оказывается недостаточно для того, чтобы функция g обладала достаточной степенью гладкости. В этой ситуации следует рассматривать обратное уравнение для функции g в пространстве обобщенных функций Φ' .

Для начала отметим, что для произвольной $h \in C_b(\mathbb{R})$ имеет место принадлежность $g(\cdot, t) \in C_b(\mathbb{R})$ при любом $t \in [0; T]$ (см., например, [7, с. 402]). Тогда на пространстве C_c , а следовательно, и на пространстве Φ , при любом $t \in [0; T]$ корректно определен функционал $g(\cdot, t)$. Более того, для любого $t \in (0; T)$ определена производная g'_t этого функционала по параметру. Далее, пусть коэффициенты a, b , коэффициент $F(\cdot, q)$ при любом $q \in (-1; 1)$, коэффициент $K(\cdot, q)$ при любом $|q| \geq 1$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми на \mathbb{R} функциями. При указанных предположениях для произвольной $f \in \Phi$ произведения af, b^2f и $F(\cdot, q)f(\cdot)$ при любом $q \in (-1; 1)$ определяют функции из пространства Φ . В этом случае равенства

$$\begin{aligned}\langle f(x), a(x)g'_x(t, x) \rangle &= -\langle (a(x)f(x))', g(t, x) \rangle, & t \in (0; T), \\ \langle f(x), b^2(x)g''_{xx}(t, x) \rangle &= \langle (b^2(x)f(x))'', g(t, x) \rangle, & t \in (0; T), \\ \langle f(x), F(x, q)g'_x(t, x) \rangle &= -\langle (F(x, q)f(x))', g(t, x) \rangle, & q \in (-1; 1), t \in (0; T),\end{aligned}$$

корректно определяют частные производные g'_x, g''_{xx} на Φ . Далее, для произвольной $f \in \Phi$ при любом $|q| \geq 1$ имеет место включение $f(\cdot - K(\cdot, q)) \in \Phi$, а при любом $q \in (-1; 1)$ — включение $f(\cdot - F(\cdot, q)) \in \Phi$, тогда на Φ корректны равенства

$$\begin{aligned}\langle f(x), g(t, x + K(x, q)) \rangle &= \langle f(x - K(x, q)), g(t, x) \rangle, & |q| \geq 1, t \in (0; T), \\ \langle f(x), g(t, x + F(x, q)) \rangle &= \langle f(x - F(x, q)), g(t, x) \rangle, & q \in (-1; 1), t \in (0; T).\end{aligned}$$

С помощью полученных соотношений определим в пространстве Φ интегральные слагаемые уравнения (2.9):

$$\begin{aligned}& \int_{|q| \geq 1} [\langle f(x - K(x, q)), g(t, x) \rangle - \langle f(x), g(t, x) \rangle] \nu(dq) \\ &= \int_{|q| \geq 1} \langle f(x), g(t, x + K(x, q)) - g(t, x) \rangle \nu(dq) = \left\langle f(x), \int_{|q| \geq 1} [g(t, x + K(x, q)) - g(t, x)] \nu(dq) \right\rangle, \\ & \int_{|q| < 1} \langle f(x - F(x, q)), g(t, x) \rangle - \langle f(x), g(t, x) \rangle + \langle (F(x, q)f(x))', g(t, x) \rangle \nu(dq) \\ &= \int_{|q| < 1} \langle f(x), g(t, x + F(x, q)) - g(t, x) - F(x, q)g'_x(t, x) \rangle \nu(dq) \\ &= \left\langle f(x), \int_{|q| < 1} [g(t, x + F(x, q)) - g(t, x) - F(x, q)g'_x(t, x)] \nu(dq) \right\rangle.\end{aligned}$$

Собрав вместе полученные равенства, получаем, что обратное уравнение (2.7) для функции g корректно на пространстве Φ . \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Protter P.E.** Stochastic integration and differential equations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 415 p. doi: 10.1007/978-3-662-10061-5.
2. **Kunita H.** Stochastic flows and jump-diffusions. Singapore: Springer, 2019. 352 p. doi: 10.1007/978-981-13-3801-4.

3. **Kolokoltsov V.N.** Markov processes, semigroups and generators. Berlin: Birkhäuser, 2011. 430 p. (De Gruyter Studies in Mathematics, 38) doi: 10.1515/9783110250114.
4. **Cont R., Tankov P.** Financial modelling with jump processes. 1st ed. N Y: Chapman and Hall/CRC, 2003. 552 p. doi: 10.1201/9780203485217.
5. **Liu Y., Zhang Y., Wang Q.** A stochastic SIR epidemic model with Levy jump and media coverage // *Advances in Difference Equations*. 2020. Vol. 2020, P. 1-15. doi.org/10.1186/s13662-020-2521-6.
6. **Kunita H.** Ito's stochastic calculus: Its surprising power for applications // *Stochastic Processes and their Applications*. 2010. Vol. 120, no. 5. P. 622-652. /10.1016/j.spa.2010.01.013.
7. **Applebaum D.** *Levy processes and stochastic calculus*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009, 492 p. doi: 10.1017/CBO9780511809781.
8. **Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е.** Обобщенные функции. Выпуск 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.

Поступила 10.03.2020

После доработки 20.04.2020

Принята к публикации 27.04.2020

Бовкун Вадим Андреевич
 канд. физ.-мат. наук
 доцент кафедры математического анализа
 Уральского Федерального Университета
 г. Екатеринбург
 e-mail: Vadim.Bovkun@urfu.ru

REFERENCES

1. Protter P.E. *Stochastic integration and differential equations*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005, 415 p. doi: 10.1007/978-3-662-10061-5.
2. Kunita H. *Stochastic flows and jump-diffusions*. Singapore: Springer, 2019. 352 p. doi: 10.1007/978-981-13-3801-4.
3. Kolokoltsov V.N. *Markov processes, semigroups and generators*. Berlin: Birkhäuser, 2011. 430 p. (De Gruyter Studies in Mathematics, 38) doi: 10.1515/9783110250114.
4. Cont R., Tankov P. *Financial modelling with jump processes*. 1st ed. N Y: Chapman and Hall/CRC, 2003, 552 p. doi: 10.1201/9780203485217.
5. Liu Y., Zhang Y., Wang Q. A stochastic SIR epidemic model with Levy jump and media coverage. *Advances in Difference Equations*, 2020, vol. 2020, pp. 1-15. doi: 10.1186/s13662-020-2521-6.
6. Kunita H. Ito's stochastic calculus: Its surprising power for applications. *Stochastic Processes and their Applications*, 2010, vol. 120, no. 5, pp. 622-652. doi: 10.1016/j.spa.2010.01.013.
7. Applebaum D. *Levy processes and stochastic calculus*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009, 492 p. doi: 10.1017/CBO9780511809781.
8. Gelfand I.M., Shilov G.E. *Generalized functions*, vol. 1: Properties and Operations. Providence: AMS Chelsea Publishing, 2016. 423 p. doi: 10.1090/chel/377. Originally published in Russian in 1958. Originally published in English as 5 volume set. Vol. 1. N Y: Acad. Press, 1964.

Received March 10, 2020

Revised April 20, 2020

Accepted April 27, 2020

Vadim Andreevich Bovkun, Cand. Phys.-Math. Sci., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: Vadim.Bovkun@urfu.ru.

Cite this article as: V. A. Bovkun. Forward and backward equations for the probability characteristics of Levy type processes in spaces of distributions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 68–78.

УДК 517.9, 51-72

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА, ОПИСЫВАЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвиряков

Изучается переопределенная система, состоящая из уравнений Навье — Стокса и уравнения несжимаемости. Система уравнений описывает установившиеся сдвиговые пространственно неоднородные течения вязкой несжимаемой жидкости. Нетривиальное точное решение рассматриваемой системы определяется в классе Линя — Сидорова — Аристова. Получено условие разрешимости системы для поля скоростей следующего вида:

$$V_x = U(z) + u_1(z)x + u_2(z)y, \quad V_y = V(z) + v_1(z)x + v_2(z)y, \quad V_z = 0.$$

При исследовании точного решения было установлено, что разрешимость системы уравнений возможна при алгебраической связи горизонтальных градиентов (пространственных ускорений) скоростей u_1, u_2, v_1, v_2 с компонентами давления P_{11}, P_{12}, P_{22} . Давление является квадратичной формой относительно координат x и y . Установлено, что компоненты давления и пространственные ускорения являются постоянными величинами. В этом случае в зависимости от значений параметров получено точное решение для скоростей U и V . Полученные точные решения могут описывать неоднородное течение Куэтта — Пуазейля — Экмана.

Ключевые слова: слоистые течения, сдвиговые течения, точные решения, параметр Кориолиса, переопределенная система, условия совместности.

N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid.

We study an overdetermined system consisting of the Navier–Stokes equations and the incompressibility equation. The system of equations describes steady spatially inhomogeneous shear flows of a viscous incompressible fluid. The nontrivial exact solution of the system under consideration is determined in the Lin–Sidorov–Aristov class. A condition for the solvability of the system for the velocity field of the form

$$V_x = U(z) + u_1(z)x + u_2(z)y, \quad V_y = V(z) + v_1(z)x + v_2(z)y, \quad V_z = 0$$

is obtained. In the study of the exact solution, it is stated that the solvability of the system of equations is possible under an algebraic connection between the horizontal gradients (spatial accelerations) of the velocities u_1, u_2, v_1, v_2 and the pressure components P_{11}, P_{12}, P_{22} . Pressure is a quadratic form with respect to the coordinates x and y . It is established that the pressure components and spatial accelerations are constant. In this case, depending on the values of the parameters, an exact solution is obtained for the velocities U and V . The exact solutions obtained can describe the inhomogeneous Poiseuille–Couette–Ekman flow.

Keywords: layered flows, shear flows, exact solutions, Coriolis parameter, overdetermined system, compatibility conditions.

MSC: 35N10, 76D05, 76D17, 76U05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87

Введение

Для описания крупномасштабных течений вязких несжимаемых жидкостей используется приближение тонкого слоя, позволяющее построить квазидвумерные модели движения сред [1]. Применение приближения тонкого слоя характерно для изучения слоистых и сдвиговых течений в Мировом океане, в решении задач при описании циркуляции несжимаемого воздуха в атмосфере [1; 2]. В этом случае при интегрировании уравнений Навье — Стокса, дополненных уравнением несжимаемости, полагают равной нулю одну из компонент вектора

скорости $\mathbf{V} = (V_x(x, y, z, t), V_y(x, y, z, t), 0)$ — гидростатическое приближение [1–5]. После осуществления такой редукции система разрешающих уравнений становится переопределенной, поскольку для вычисления двух компонент вектора скорости и давления имеется, вообще говоря, четыре уравнения [4; 5]. Указанная выше проблема имеет место и для изобарических течений жидкости [4–6]. Численное интегрирование переопределенной системы квадратично нелинейных уравнений в частных производных без анализа разрешимости практически невозможно, поэтому очень трудно переоценить теоретическое исследование переопределенной редуцированной системы уравнений Навье — Стокса, дополненной уравнением несжимаемости.

В статьях Р. Беркера [7] и Ю. Д. Шмыглевского [8] впервые начато изучение переопределенной системы, описывающей плоское изобарическое движение жидкости (поле скоростей $\mathbf{V} = (V_x(x, y, t), V_y(x, y, t), 0)$ двумерно и зависит от двух координат и времени), и построено много точных нетривиальных решений. Дальнейшее обобщение пионерских исследований [7; 8] показало существование нетривиальных решений для поля скоростей $V_x(x, y, z, t), V_y(x, y, z, t), 0$ (см. [4]) в классе Линя — Сидорова — Аристова [9–11]. В статье [6] приведено условие разрешимости в терминах функции тока, определение которой базируется на интегрировании уравнений Монжа — Ампера. Исследование переопределенных систем уравнений, описывающих градиентные и конвективные крупномасштабные течения, приведены в [12; 13]. Результаты, анонсированные в [4–6; 12; 13], справедливы в инерциальной системе координат. В силу того что приближение тонкого слоя используется для решения задач геофизической гидродинамики, актуальной является задача по нахождению точных решений, описывающих установившиеся пространственно неоднородные течения жидкости. В статье приводятся новые точные решения уравнений Навье — Стокса для вращающихся жидкостей, которые могут быть полезными при описании неоднородного течения Экмана. Актуальность рассматриваемой задачи подчеркивают также работы [14–17], в которых изучаются различные эффекты, вызванные с учетом силы Кориолиса.

1. Постановка задачи

Рассмотрим установившееся изотермическое сдвиговое течение вязкой несжимаемой жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. Полагаем, что вращение описывается одним параметром Кориолиса f , то есть используется традиционное приближение для вектора угловой скорости [2; 3]. Для моделирования этого процесса используем уравнения Навье — Стокса и уравнение несжимаемости [18]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} &= -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V}, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{V} = (V_x(x, y, z, t), V_y(x, y, z, t), V_z(x, y, z, t))$ — вектор скорости; $P(x, y, z, t)$ — нормированное на плотность редуцированное давление, полученное из истинного давления p вычитанием центробежной составляющей $\rho((\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}), (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}))/2$ и учетом потенциальных массовых сил; ν — кинематическая вязкость жидкости; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — операторы Гамильтона и Лапласа соответственно. Для установившихся слоистых течений ($\mathbf{V} = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), 0)$) система (1.1) в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ принимает более простой вид

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} - f V_y &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + f V_x &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Уравнения системы (1.2) содержат конвективную производную, потому система (1.2) является квадратично нелинейной. Кроме того, число уравнений, входящих в систему (1.2), превосходит число неизвестных гидродинамических полей, следовательно, система (1.2) является переопределенной. Переопределенность системы (1.2) можно снять, если тождественно удовлетворить “лишнему” уравнению. Рассмотрим далее поле скоростей и поле давления, которые описываются соответственно линейной и квадратичной формами относительно горизонтальных (продольных) координат x и y :

$$V_x = U(z) + u_1(z)x + u_2(z)y, \quad V_y = V(z) + v_1(z)x + v_2(z)y, \quad (1.3)$$

$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y + P_{12}(z)xy + P_{11}(z)\frac{x^2}{2} + P_{22}(z)\frac{y^2}{2}. \quad (1.4)$$

Коэффициенты в формулах (1.3) и (1.4) зависят от вертикальной (поперечной) координаты z . Условие разрешимости переопределенной системы типа (1.2) для класса скоростей вида (1.3) в случае изобарических течений невращающихся жидкостей было изучено в [4]. Класс решений (1.4) для поля давления позволяет описывать квадратично нелинейное распределение этого поля по продольным (горизонтальным) координатам. Давление P_0 называется *фоновым*, оно соответствует, например, атмосферному давлению. Компоненты P_1, P_2 есть горизонтальные градиенты давления, компоненты P_{11}, P_{12}, P_{22} — слагаемые, характеризующие локальную кривизну поля давления. Точные решения системы (1.2), полученные в рамках класса (1.3), могут описывать неоднородное течение Куэтта — Пуазейля — Экмана. Под этим термином понимаем такие обобщения классических движений жидкости, которые существуют только для одной или двух горизонтальных (продольных) скоростей жидкости, зависящих от трех координат (двух продольных и поперечной). Неоднородное изобарическое течение Куэтта в классе (1.3) изучено в статьях [4; 5], неоднородное градиентное течение Пуазейля рассмотрено в [12]. Исследования неоднородных течений Экмана и их суперпозиции с движениями Куэтта и Пуазейля к настоящему времени отсутствуют.

Подставим представление гидродинамических полей (1.3) и (1.4) в систему уравнений (1.2) и применим принцип неопределенных коэффициентов для получившихся полиномов относительно независимых переменных x, y . В результате несложных преобразований придем к системе уравнений следующего вида относительно компонент гидродинамических полей, входящих в разложение (1.3), (1.4):

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2v_1 - fv_1 &= -P_{11} + \nu u_1'', \\ u_1u_2 + u_2v_2 - fv_2 &= -P_{12} + \nu u_2'', \\ u_1v_1 + v_1v_2 + fu_1 &= -P_{12} + \nu v_1'', \\ u_2v_1 + v_2^2 + fu_2 &= -P_{22} + \nu v_2'', \\ u_1 + v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$Uu_1 + Vu_2 - fV = -P_1 + \nu U'', \quad (1.6)$$

$$Uv_1 + Vv_2 + fU = -P_2 + \nu V''.$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = \frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{\partial P_2}{\partial z} = \frac{\partial P_{12}}{\partial z} = \frac{\partial P_{11}}{\partial z} = \frac{\partial P_{22}}{\partial z} = 0. \quad (1.7)$$

В системе (1.5)–(1.7) штрихом обозначено взятие производной по вертикальной координате z . В уравнениях (1.7) поле давления зависит только от горизонтальных координат x и y . Таким образом, компоненты $P_0, P_1, P_2, P_{12}, P_{11}, P_{22}$ поля давления P могут быть однозначным образом найдены из граничного условия. Отметим, что системы уравнений для определения компонент полей, аналогичные системе (1.5), (1.6), в случае, когда $f = 0$, были рассмотрены, например, в [4; 5; 13].

2. Анализ разрешимости

После того, как компоненты поля давления P найдены из граничных условий, систему уравнений (1.5), (1.6) можно рассматривать как систему семи уравнений относительно шести неизвестных (четыре пространственных ускорения u_1, u_2, v_1, v_2 и две скорости U, V) при заданном распределении давления. Получившаяся система (1.5), (1.6) в этом смысле является переопределенной, поэтому встает вопрос о ее разрешимости (о существовании нетривиального решения). При этом уравнения системы (1.6) являются зависимыми в том смысле, что их решение может быть получено только после того, как решена система (1.5). Если система (1.5) решена, то получаем, что система (1.6) состоит из двух линейных дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций (скорости U, V) с известными коэффициентами. Получается, что основная сложность нахождения компонент поля скорости состоит в том, чтобы решить переопределенную систему (1.5).

Теорема. *Если существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что выполняется равенство*

$$\alpha^2 f^2 + 2\alpha f^3 - P_{11}^2 - 4P_{12}^2 - 2f^2(P_{11} - P_{22}) + 2P_{11}P_{22} + P_{22}^2 = 0,$$

то переопределенная система (1.5) является разрешимой, при этом функции u_1, u_2, v_1, v_2 принимают постоянные значения

$$u_1 = -\frac{P_{12}}{f}, \quad u_2 = \frac{P_{11} - P_{22} - f\alpha}{f}, \quad v_1 = \frac{P_{11} - P_{22} + f\alpha}{f}, \quad v_2 = \frac{P_{12}}{f}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнения системы (1.5) относительно пространственных ускорений u_1, u_2, v_1, v_2 и разобьем эти уравнения на три подсистемы:

$$u_1 u_2 + u_2 v_2 - f v_2 = -P_{12} + \nu u_2'', \tag{2.1}$$

$$u_1 v_1 + v_1 v_2 + f u_1 = -P_{12} + \nu v_1'',$$

$$u_1^2 + u_2 v_1 - f v_1 = -P_{11} + \nu u_1'', \tag{2.2}$$

$$u_2 v_1 + v_2^2 + f u_2 = -P_{22} + \nu v_2'',$$

$$u_1 + v_2 = 0. \tag{2.3}$$

Сложим уравнения (2.1) и с учетом уравнения (2.3) получим следующее дифференциальное соотношение $\nu(u_2 + v_1)'' = 2P_{12} + 2f u_1$. Далее вычтем уравнения группы (2.1) друг из друга, получим $(u_2 - v_1)'' = 0$.

Совершим теперь аналогичные преобразования с уравнениями группы (2.2) посредством их сложения и вычитания, принимая во внимание соотношение (2.3). В этом случае подсистема (2.2) запишется следующим образом:

$$P_{11} + P_{22} + 2u_1^2 + 2u_2 v_1 + f(u_2 - v_1) = 0,$$

$$2\nu u_1'' = P_{11} - P_{22} - f(u_2 + v_1).$$

Таким образом, получаем, что система (2.1)–(2.3) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$v_1'' = u_2'',$$

$$\nu u_2'' = P_{12} + f u_1, \tag{2.4}$$

$$2\nu u_1'' = P_{11} - P_{22} - f(u_2 + v_1),$$

$$P_{11} + P_{22} + 2u_1^2 + 2u_2 v_1 + f(u_2 - v_1) = 0. \tag{2.5}$$

Уравнения подсистемы (2.4) позволяют определить общий вид пространственных ускорений u_1, u_2, v_1 , уравнение (2.5) представляет собой условие совместности этих решений.

Продифференцируем дважды второе уравнение системы (2.4): $\nu u_2^{(4)} = f u_1''$. Затем правую часть получившегося уравнения заменим в силу третьего уравнения:

$$\nu u_2^{(4)} = \frac{f}{2\nu} [P_{11} - P_{22} - f(u_2 + v_1)]. \quad (2.6)$$

Проинтегрировав дважды первое уравнение системы (2.4), найдем связь между компонентами v_1, u_2 поля скоростей (1.3)

$$v_1 = u_2 + c_1 z + c_2. \quad (2.7)$$

Здесь c_1, c_2 — произвольные постоянные. Подставим это соотношение в (2.6) и получим следующее дифференциальное уравнение:

$$u_2^{(4)} + \frac{f^2}{\nu^2} u_2 = \frac{f}{2\nu^2} [P_{11} - P_{22} - f(c_1 z + c_2)]. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) является обыкновенным неоднородным линейным дифференциальным уравнением четвертого порядка с постоянными коэффициентами относительно функции u_2 . Его общее решение представимо в виде суммы $u_2 = u_{21} + u_{22}$, где u_{21} — общее решение соответствующего однородного уравнения, а u_{22} — некоторое частное решение уравнения (2.8).

Для определения слагаемого u_{21} имеем уравнение

$$u_{21}^{(4)} + \frac{f^2}{\nu^2} u_{21} = 0.$$

Общее решение уравнений такого типа согласно [19, разд. 4.1.2, с. 663] имеет вид

$$u_{21} = c_3 \cosh(kz) \cos(kz) + c_4 \cosh(kz) \sin(kz) + c_5 \sinh(kz) \cos(kz) + c_6 \sinh(kz) \sin(kz),$$

здесь $k^4 = f^2 / (4\nu^2)$, c_3, c_4, c_5, c_6 — постоянные интегрирования. Частное решение уравнения (2.8) легко определяется:

$$u_{22} = \frac{P_{11} - P_{22} - f(c_1 z + c_2)}{2f} = az + b,$$

причем $a = -c_1/2, b = (P_{11} - P_{22} - f c_2) / (2f)$. Следовательно, точное решение уравнения (2.8) имеет вид

$$u_2 = c_3 \cosh(kz) \cos(kz) + c_4 \cosh(kz) \sin(kz) + c_5 \sinh(kz) \cos(kz) + c_6 \sinh(kz) \sin(kz) + az + b.$$

Учитывая (2.7), получим выражение

$$v_1 = c_3 \cosh(kz) \cos(kz) + c_4 \cosh(kz) \sin(kz) + c_5 \sinh(kz) \cos(kz) + c_6 \sinh(kz) \sin(kz) + (a + c_1)z + (b + c_2).$$

Затем, используя второе уравнение системы (2.4), находим

$$u_1 = \frac{\nu u_2'' - P_{12}}{f}.$$

Делая подстановку найденных решений в уравнение (2.5), получаем, что $c_1 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$, а само алгебраическое уравнение (2.5) сводится к следующему тождеству:

$$c_2^2 f^2 + 2c_2 f^3 - P_{11}^2 - 4P_{12}^2 - 2f^2(P_{11} - P_{22}) + 2P_{11}P_{22} + P_{22}^2 = 0. \quad (2.9)$$

При этом все компоненты поля скорости (1.3) оказываются постоянными:

$$u_1 = -\frac{P_{12}}{f}, \quad u_2 = b = \frac{P_{11} - P_{22} - f c_2}{2f}, \quad v_1 = b + c_2 = \frac{P_{11} - P_{22} + f c_2}{2f}, \quad v_2 = \frac{P_{12}}{f}.$$

Таким образом, если найдется $c_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию (2.9), то для $\alpha = c_2 \in \mathbb{R}$ будут выполнены все условия теоремы. При этом доказано, что для такого c_2 система (1.5) разрешима и искомые функции u_1, u_2, v_1, v_2 принадлежат множеству постоянных функций.

3. Точное решение для однородных компонент поля скорости

Проинтегрируем систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка (1.6) и найдем точное решение для однородных компонент U , V поля скорости (1.3). Для этого преобразуем (1.6) следующим образом:

$$\begin{aligned}\nu U'' - u_1 U - (u_2 - f)V &= P_1, \\ \nu V'' + u_1 V - (v_1 + f)U &= P_2.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Вид решения этой системы зависит от значений коэффициентов u_1, u_2, v_1 , стоящих перед неизвестными функциями U и V и удовлетворяющих выражениям для u_1, u_2, v_1, v_2 из теоремы.

1) Пусть $v_1 + f = 0$, тогда второе уравнение системы (3.1) запишется следующим образом:

$$\nu V'' + u_1 V = P_2. \quad (3.2)$$

Вид решения уравнения (3.2) зависит от величины коэффициента u_1 .

1.1) Если $u_1 = 0$, то

$$\begin{aligned}V &= \frac{P_2}{2\nu} z^2 + C_1 z + C_2, \\ U &= \frac{P_2}{24\nu^2} (u_2 - f) z^4 + \frac{C_1}{6\nu} (u_2 - f) z^3 + \frac{C_2(u_2 - f) + P_1}{2\nu} z^2 + C_3 z + C_4.\end{aligned}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

1.2) Если $u_1 > 0$, то

$$\begin{aligned}V &= \frac{P_2}{u_1} + C_1 \sin\left(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\right) + C_2 \cos\left(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\right), \\ U &= -\frac{C_1}{2u_1} (u_2 - f) \sin\left(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\right) - \frac{C_2}{2u_1} (u_2 - f) \cos\left(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\right) \\ &+ C_3 \exp\left(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\right) + C_4 \exp\left(-z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\right) - \frac{P_1 u_1 + P_2 (u_2 - f)}{u_1^2}.\end{aligned}$$

1.3) Если $u_1 < 0$, то

$$\begin{aligned}V &= \frac{P_2}{u_1} + C_1 \sinh\left(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\right) + C_2 \cosh\left(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\right), \\ U &= C_1 \cos\left(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\right) + C_2 \sin\left(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\right) + \frac{(\nu P_1 + P_2 (u_2 - f))}{\nu |u_1|} \\ &+ \frac{C_1 (u_2 - f)}{2|u_1|} \sinh\left(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\right) + \frac{C_2 (u_2 - f)}{2|u_1|} \cosh\left(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\right).\end{aligned}$$

2) Пусть теперь $v_1 + f \neq 0$, тогда из второго уравнения системы (3.1) выразим скорость

$$U = \frac{\nu V'' + u_1 V - P_2}{v_1 + f} \quad (3.3)$$

и подставим в первое уравнение. Получим

$$\nu \left(\frac{\nu V'' + u_1 V - P_2}{v_1 + f} \right)'' - u_1 \left(\frac{\nu V'' + u_1 V - P_2}{v_1 + f} \right) - (u_2 - f)V = P_1.$$

Элементарными преобразованиями это уравнение приводится к равносильному виду

$$V^{(4)} - \frac{u_1^2 + (u_2 - f)(v_1 + f)}{\nu^2} V = \frac{P_1(v_1 + f) - u_1 P_2}{\nu^2}. \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4) зависит от значения коэффициента $S = -[u_1^2 + (u_2 - f)(v_1 + f)]/\nu^2$ (см. [19, разд. 4.1.2, с. 663]).

2.1) Если $S = 0$, то уравнение (3.4) имеет решение

$$V = \frac{P_1(v_1 + f) - u_1 P_2}{24\nu^2} z^4 + C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4.$$

2.2) Если $S > 0$, то решение для скорости V определяется формулой

$$V = C_1 \cosh(kz) \cos(kz) + C_2 \cosh(kz) \sin(kz) + C_3 \sinh(kz) \cos(kz) + C_4 \sinh(kz) \sin(kz) + \frac{P_1(v_1 + f) - u_1 P_2}{S\nu^2},$$

здесь $k^4 = S/4$.

2.3) Если $S < 0$, то

$$V = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz) + C_3 \cosh(kz) + C_4 \sinh(kz) + \frac{P_1(v_1 + f) - u_1 P_2}{S\nu^2}.$$

После этого необходимо подставить найденное решение для скорости V в выражение (3.3) для определения вида функции, отвечающей однородной скорости U .

Заключение

В статье рассмотрены неоднородные течения вращающейся вязкой несжимаемой среды. Течения жидкости описываются переопределенной системой, состоящей из уравнений Навье — Стокса и несжимаемости. Получено нетривиальное точное решение переопределенной системы уравнений движения. Данное решение принадлежит классу Линя — Сидорова — Аристова с постоянными пространственными ускорениями (горизонтальными градиентами скоростей). Для пространственных ускорений получено условие разрешимости, при котором существуют течения. При известных горизонтальных градиентах скорости проинтегрирована точно система обыкновенных дифференциальных уравнений для фоновых скоростей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аристов С.Н., Шварц К.Г.** Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: ГОУ ВПО “Пермский государственный университет”, 2006. 155 с.
2. **Зырянов В.Н.** Теория установившихся океанических течений. Ленинград: Гидрометеоздат, 1985. 248 с.
3. **Коротаев Г.К., Михайлова Э.Н., Шапиро Н.Б.** Теория экваториальных противотечений в Мировом океане. Киев: Наук. думка, 1986. 208 с.
4. **Аристов С.Н., Просвирыков Е.Ю.** Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 2. С. 177–182. doi: 10.20537/nd1402004.
5. **Аристов С.Н., Просвирыков Е.Ю.** Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Изв. высших учебных заведений. Авиационная техника. 2015. Вып. 4. С. 50–54.
6. **Зубарев Н.М., Просвирыков Е.Ю.** О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 6(358). С. 65–71. doi: 10.15372/PMTF20190607.
7. **Berker R.** Sur quelques cas d'integration des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Paris-Lille: Taffin-Lefort, 1936. 161 p.

8. **Шмыглевский Ю.Д.** Об изобарических плоских течениях вязкой несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 12. С. 1895–1898.
9. **Lin C.C.** Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1958. Vol. 1. P. 391–395.
10. **Сидоров А.Ф.** О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикл. механика и теорет. физика. 1989. № 2. С. 34–40.
11. **Аристов С.Н.** Вихревые течения в тонких слоях жидкости: дис. ... д-р. физ.-мат. наук / ИАПУ. Владивосток, 1990. 303 с.
12. **Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A.** Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer // Russian J. Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15, no. 3. P. 271–283. doi: 10.20537/nd190306.
13. **Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.** Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости // Теоретические основы химической технологии. 2020. Т. 54, № 1. С. 114–124. doi: 10.31857/S0040357119060034.
14. **Wheeler M.H.** On stratified water waves with critical layers and Coriolis forces // Discrete and Continuous Dynamical Systems – A. 2019. Vol. 39, no. 8. P. 4747–4770. doi: 10.3934/dcds.2019193.
15. **Sarja A., Singh P., Ekkad S.** Parallel rotation for negating Coriolis force effect on heat transfer // Aeronautical J. 2020. Vol. 124, no. 1274. P. 581–596. doi:10.1017/aer.2020.1.
16. **Fein Y.Y., Kialka F., Geyer P., Gerlich S., Arndt M.** Coriolis compensation via gravity in a matter-wave interferometer // New J. Physics. 2020. Vol. 22. doi: 10.1088/1367-2630/ab73c5.
17. **Mills C.** Calibrating and operating Coriolis flow meters with respect to process effects // Flow Measurement and Instrumentation. 2020. Vol. 71. doi: 10.1016/j.flowmeasinst.2019.101649.
18. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Гидродинамика. 6-е. изд. Москва: Физматлит, 2006. 736 с.
19. **Polyanin A.D., Zaitsev V.F.** Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. 2nd ed. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2003. 803 p.

Поступила 20.02.2020

После доработки 26.03.2020

Принята к публикации 27.04.2020

Бурмашева Наталья Владимировна
канд. техн. наук
науч. сотрудник
Институт машиноведения УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: nat_burm@mail.ru

Просвиряков Евгений Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт машиноведения УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: evgen_pros@mail.ru

REFERENCES

1. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoi prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical flows of the advective nature in a rotating fluid layer]. Perm: Perm State Univ. Publ., 2006, 155 p.
2. Zyryanov V.N. *Teoriya ustanovivshikhsya okeanicheskikh techenii* [Theory of steady-state oceanic currents]. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ., 1985, 248 p.

3. Korotayev G.K., Mikhaylova E.N., Shapiro N.B. *Teoriya ekvatorial'nykh protivotechenii v Mirovom okeane* [Theory of equatorial countercurrents in the World Ocean]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1986, 208 p.
4. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Inhomogeneous Couette flow. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182 (in Russian). doi: 10.20537/nd1402004.
5. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Rus. Aeronautics*, 2015, vol. 58, no. 4, pp. 413–418. doi: 10.3103/S1068799815040091.
6. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for layered three-dimensional unsteady isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *J. Appl. Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, no. 6, pp. 1031–1037. doi: 10.1134/S0021894419060075.
7. Berker R. *Sur quelques cas d'integration des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*. Paris-Lille: Taffin-Lefort, 1936, 161 p.
8. Shmyglevskii Yu.D. On isobaric planar flows of a viscous incompressible liquid. *USSR Comput. Mathematics and Math. Physics*, 1985, vol. 25, no. 6, pp. 191–193. doi: 10.1016/0041-5553(85)90030-8.
9. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, no. 1, pp. 391–395. doi: 10.1007/BF00298016.
10. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. doi: 10.1007/BF00852164.
11. Aristov S.N. *Vikhrevie techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortical flows in thin liquid layers]. Dissertation, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Vladivostok, 1990, 303 p.
12. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer. *Russian J. Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 271–283. doi: 10.20537/nd190306.
13. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Thermocapillary Convection of a Vertical Swirling Liquid. *Theoret. Foundations of Chemical Engineering*, 2020, vol. 54, no. 1, pp. 230–239. doi: 10.1134/S0040579519060034.
14. Wheeler M.H. On stratified water waves with critical layers and Coriolis forces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – A*, 2019, vol. 39, no. 8, pp. 4747–4770. doi: 10.3934/dcds.2019193.
15. Sarja A., Singh P., Ekkad S. Parallel rotation for negating Coriolis force effect on heat transfer. *Aeronautical J.*, 2020, vol. 124, no. 1274, pp. 581–596. doi:10.1017/aer.2020.1.
16. Fein Y.Y., Kialka F., Geyer P., Gerlich S., Arndt M. Coriolis compensation via gravity in a matter-wave interferometer. *New J. Physics*, 2020, vol. 22. doi: 10.1088/1367-2630/ab73c5.
17. Mills C. Calibrating and operating Coriolis flow meters with respect to process effects. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2020, vol. 71. doi: 10.1016/j.flowmeasinst.2019.101649.
18. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1987, 539 p. ISBN: 9781483161044. Original Russian text published in Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika. 6-e. izd.* Moscow: Fizmatlit Publ., 2006, 736 p.
19. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations*, 2nd ed. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2003, 803 p. ISBN: 1584882972.

Received February 20, 2020

Revised March 26, 2020

Accepted April 27, 2020

Natalya Vladimirovna Burmasheva, Cand. Eng. Sci., Institute of Engineering Sciences of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 620049 Russia; Ural federal university, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: nat_burm@mail.ru.

Evgeniy Yur'evich Prosviryakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Engineering Sciences of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 620049 Russia; Ural federal university, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: evgen_pros@mail.ru.

Cite this article as: N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 79–87.

УДК 521.554.32

**О СВОЙСТВАХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ
ЛИНЕЙНЫХ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП, НЕБОЛЬШИХ
ОТНОСИТЕЛЬНО ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ И РЕГУЛЯРНОГО
УНИПОТЕНТНОГО ЭЛЕМЕНТА ИЗ ПОДСИСТЕМНОЙ ПОДГРУППЫ¹**

Т. С. Бусел, И. Д. Супруненко

В работе изучаются свойства неприводимых представлений специальной линейной и симплектической групп, небольших относительно характеристики поля и регулярных унипотентных элементов простого порядка из подсистемных подгрупп типов A_l и C_l соответственно с определенными условиями на l . Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$, $G = A_r(K)$ или $C_r(K)$, $l < r - 1$ при $G = A_r(K)$ и $l < r$ при $G = C_r(K)$, $H \subset G$ — подсистемная подгруппа с двумя простыми компонентами H_1 и H_2 типов A_l и A_{l-r-1} или C_l и C_{r-l} соответственно, x — регулярный унипотентный элемент из H_1 . Предположим, что $l + 1 = ap^s + b$ при $G = A_r(K)$ и $2l = ap^s + b$ при $G = C_r(K)$, где $a < p$, $p \leq b \leq p^s$, $s > 1$. Назовем неприводимое представление φ группы G (p, x) -специальным, если все веса ограничения представления φ на хорошую A_1 -подгруппу, содержащую x^{p^s} , меньше p (здесь множество весов группы типа A_1 канонически отождествляется с множеством целых чисел). Обозначим символом $d_\rho(z)$ минимальный многочлен образа элемента z в представлении ρ и назовем композиционный фактор ψ ограничения представления φ на H большим относительно элемента $z \in H$, если $d_\psi(z) = d_\varphi(z)$. Основные результаты статьи — теоремы 1 и 2.

Теорема 1. Пусть φ — (p, x) -специальное представление группы G . Тогда ограничение φ на H не имеет композиционных факторов, больших относительно x и нетривиальных для H_2 .

Теорема 2. В условиях теоремы 1 число блоков Жордана максимальной размерности у элемента $\varphi(x)$ не превосходит некоторого числа, которое зависит только от p , b и коэффициентов старшего веса и не зависит от ранга группы.

В статье показано, почему изучаемый здесь случай целесообразно рассматривать отдельно. Так, для p -ограниченных представлений соответствующих групп с большими относительно характеристики старшими весами справедливы утверждения, противоположные теоремам 1 и 2. Результаты о блочной структуре образов унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп могут быть использованы для решения задач распознавания представлений и линейных групп по наличию матриц определенного вида.

Ключевые слова: унипотентные элементы, размерности блоков Жордана, специальная линейная группа, симплектическая группа.

T. S. Busel, I. D. Suprunenko. On the properties of irreducible representations of special linear and symplectic groups that are not large with respect to the field characteristic and regular unipotent elements from subsystem subgroups.

We study the properties of irreducible representations of special linear and symplectic groups that are not large with respect to the ground field characteristic and regular unipotent elements of nonprime order from subsystem subgroups of types A_l and C_l , respectively, with certain conditions on l . Assume that K is an algebraically closed field of characteristic $p > 2$, $G = A_r(K)$ or $C_r(K)$, $l < r - 1$ for $G = A_r(K)$ and $l < r$ for $G = C_r(K)$, $H \subset G$ is a subsystem subgroup with two simple components H_1 and H_2 of types A_l and A_{l-r-1} or C_l and C_{r-l} , respectively, and x is a regular unipotent element from H_1 . Suppose that $l + 1 = ap^s + b$ for $G = A_r(K)$ and $2l = ap^s + b$ for $G = C_r(K)$ where $a < p$, $p \leq b \leq p^s$, and $s > 1$. An irreducible representation φ of G is said to be (p, x) -special if all the weights of the restriction of φ to a nice A_1 -subgroup containing x^{p^s} are less than p (here the set of weights of a group of type A_1 is canonically identified with the set of integers). Denote by $d_\rho(z)$ the minimal polynomial of the image of an element z in a representation ρ and call the composition factor ψ of the restriction of φ to H large for $z \in H$ if $d_\psi(z) = d_\varphi(z)$. The main results of the paper are Theorems 1 and 2.

Theorem 1. Let φ be a (p, x) -special representation of G . Then the restriction of φ to H has no composition factors that are large for x and nontrivial for H_2 .

Theorem 2. Under the assumptions of Theorem 1, the number of maximum size Jordan blocks of the element $\varphi(x)$ does not exceed a certain integer which depends only upon p , b , and the coefficients at the highest weight and does not depend on the group rank.

¹Работа поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф19-024).

We explain why the case studied here should be considered separately. For instance, for p -restricted representations of the corresponding groups with large highest weights with respect to the characteristic, assertions opposite to Theorems 1 and 2 are valid. The results on the block structure of the images of unipotent elements in representations of algebraic groups can be used for solving recognition problems for representations and linear groups based on the presence of certain special matrices.

Keywords: unipotent elements, Jordan block sizes, special linear group, symplectic group.

MSC: 20G05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-88-97

1. Введение

Пусть x — элемент порядка p^{s+1} из простой алгебраической группы G классического типа над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p > 2$, $s \geq 0$. Положим $y = x^{p^s}$. Пусть A — хорошая A_1 -подгруппа (см. [10, теорема 1]), содержащая y . Назовем неприводимое представление φ группы G (p, x) -специальным, если все веса ограничения $\varphi|_A$ меньше p (здесь множество весов группы типа A_1 канонически отождествляется с множеством целых чисел).

В работе изучаются свойства неприводимых представлений специальной линейной и симплектической групп, являющихся (p, x) -специальными для регулярных унитарных элементов x непростого порядка из подсистемных подгрупп типов A_l и C_l соответственно с определенными условиями на l . Всюду в дальнейшем $p > 2$, $G = A_r(K)$ или $C_r(K)$, $|z|$ — порядок элемента z , $l < r - 1$ при $G = A_r(K)$ и $l < r$ при $G = C_r(K)$, $H \subset G$ — подсистемная подгруппа с двумя простыми компонентами H_1 и H_2 типов A_l и A_{l-r-1} или C_l и C_{r-l} соответственно.

Положим $n = l + 1$ при $G = A_r(K)$ и $n = 2l$ при $G = C_r(K)$. Предположим, что $n = ap^s + b$, где $0 < a < p$, $p \leq b \leq p^s$, $s > 1$. Из доказанной в разд. 2 леммы 3 следует, что неприводимое представление группы G является (p, x) -специальным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) старший вес представления имеет вид

$$\begin{cases} a_1\omega_1 + \dots + a_{p-1}\omega_{p-1} + a_{r-p+2}\omega_{r-p+2} + \dots + a_r\omega_r & \text{при } G = A_r(K), \\ a_1\omega_1 + \dots + a_{p-1}\omega_{p-1} & \text{при } G = C_r(K); \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & a(a_1 + 2a_2 + \dots + (p-1)a_{p-1} + (p-1)a_{r-p+2} + \dots + a_r) < p \quad \text{при } G = A_r(K), \\ & a(a_1 + 2a_2 + \dots + (p-1)a_{p-1}) < p \quad \text{при } G = C_r(K). \end{aligned}$$

Обозначим символом $d_\rho(u)$ минимальный многочлен образа элемента u в представлении ρ . Назовем композиционный фактор ψ ограничения представления φ на H *большим относительно элемента* $u \in H$, если $d_\psi(u) = d_\varphi(u)$. Основные результаты статьи — теоремы 1 и 2.

Теорема 1. Пусть x — регулярный унитарный элемент группы H_1 , φ — (p, x) -специальное представление группы G . Тогда ограничение φ на H не имеет композиционных факторов, больших относительно x и нетривиальных для H_2 .

Теорема 2. В условиях теоремы 1 число блоков Жордана максимальной размерности u элемента $\varphi(x)$ не превосходит некоторого числа, которое зависит только от p , b и коэффициентов старшего веса и не зависит от ранга группы.

Результаты о блочной структуре образов унитарных элементов в представлениях алгебраических групп могут быть использованы для решения задач распознавания представлений и линейных групп по наличию матриц определенного вида. В положительной характеристике получить такую информацию значительно труднее, чем в нулевой, особенно для унитарных элементов непростого порядка. Авторам известна лишь одна работа, где определена нормальная форма Жордана для образов таких элементов произвольного порядка и семейства

неприводимых представлений, размерности которых не ограничены в совокупности. Это статья М. Корхонена [9], содержащая решение этой задачи для образов унитарных элементов в неприводимых модулях для классических алгебраических групп в нечетной характеристике, являющихся композиционными факторами тензорного произведения стандартного модуля и дуального к нему либо внешнего или симметрического квадрата стандартного модуля. В общем случае, когда размерности рассматриваемых представлений неизвестны, можно стремиться выделить классы “редких” элементов, наличие которых в образе представления может быть эффективно использовано для его распознавания. Так, А. Е. Залесский и Д. Тестерман [15] классифицировали неприводимые представления исключительных алгебраических групп, образы которых содержат унитарные элементы с одним нетривиальным блоком Жордана, что завершает классификацию таких представлений для всех простых алгебраических групп в нечетной характеристике. Для поиска таких “редких” элементов важно систематическое изучение свойств образов различных унитарных элементов в неприводимых представлениях простых алгебраических групп. При этом оказывается полезным анализ композиционных факторов ограничений этих представлений на подсистемные подгруппы.

Когда-то А. Е. Залесский привлек внимание второго автора к изучению ограничений представлений простых алгебраических групп на непростые подсистемные подгруппы. В [14] доказано, что ограничения нетривиальных представлений простой алгебраической группы на подсистемные подгруппы с двумя простыми компонентами почти всегда имеют композиционные факторы, нетривиальные для обеих компонент; все исключения указаны явно. Эти результаты были усилены в [13]. Изучение ограничений неприводимых представлений простых алгебраических групп на подсистемные подгруппы с двумя простыми компонентами часто позволяет получить информацию, которую было бы затруднительно иметь, рассматривая лишь ограничения на простые подсистемные подгруппы. При некоторых ограничениях на l в [13, теоремы 1.3 и 1.6] доказано, что если φ — p -ограниченное представление группы G со старшим весом

$$\omega = \sum_{i=1}^r a_i \omega_i, \quad \sum_{i=1}^r a_i \geq p,$$

$$\omega \neq a_1 \omega_1 + a_r \omega_r \text{ с } a_1 + a_r = p, (p-1)\omega_1 + \omega_2 \text{ или } \omega_{r-1} + (p-1)\omega_r \text{ при } G = A_r(K)$$

$$\text{и } \omega \neq (p-1)\omega_1 + \omega_2 \text{ при } G = C_r(K),$$

то ограничение $\varphi|H$ имеет композиционный фактор, большой для всех унитарных элементов из H_1 и нетривиальный относительно H_2 . В силу [12, теорема 1.1] для таких представлений $d_\varphi(z) = |z|$ для любого унитарного элемента z . В качестве следствия из упомянутых выше результатов получены нижние оценки числа блоков Жордана размерности $|z|$ для всех элементов z , порядок которых равен порядку регулярного унитарного элемента из подгруппы H_1 для подходящего l [13, следствия 1.8 и 1.9]. Эти оценки зависят от ранга r исходной группы и порядка элемента. Там же указаны обширные классы неприводимых представлений φ групп $A_r(K)$ и $C_r(K)$, у которых сумма коэффициентов старшего веса меньше p и $\varphi|H$ имеет композиционный фактор, большой для всех элементов порядка p из H_1 и нетривиальный для H_2 [13, теоремы 1.5 и 1.7].

Есть основания полагать, что при $G = A_r(K)$ ограничение $\varphi|H$ имеет композиционный фактор, большой для регулярного унитарного элемента x из H_1 и нетривиальный для H_2 , если $ap^s \leq l < (a+1)p^s$, $1 < a < p$, и максимальный вес ограничения $\varphi|A$ не меньше $p+a$, и что такой фактор существует для обширного класса представлений φ , небольших относительно x , если $p^s \leq l \leq p^s + p - 2$, $s > 1$. Если такой фактор существует, то $\varphi(x)$ имеет не менее $r-l$ блоков Жордана максимальной размерности. Поиску указанных факторов будет посвящена последующая работа второго автора.

Таким образом, поведение элемента x в случае, когда φ — (p, x) -специальное представление, а ранг l не слишком мал, отличается от других ситуаций. Этот случай естественно рассматривать отдельно.

2. Предварительные сведения

Далее ω_i и α_i , $1 \leq i \leq r$, — фундаментальные веса и простые корни группы G , ε_i с $1 \leq i \leq r+1$ при $G = A_r(K)$ и $1 \leq i \leq r$ при $G = C_r(K)$ — веса стандартного G -модуля, определенные в [2, §13]. Символы ω_i и α_i используются не только для группы G , но и для других полупростых алгебраических групп; из контекста всегда ясно, о какой группе идет речь. Нумерация простых корней соответствует [1]. Напомним, что неприводимое представление полупростой алгебраической группы в характеристике p называется *p-ограниченным*, если все коэффициенты его старшего веса меньше p .

Ниже $\Lambda(\Gamma)$ — множество весов полупростой алгебраической группы Γ , $\omega(\varphi)$ — старший вес представления φ , \mathfrak{X}_β и $x_\beta(t)$ — корневая подгруппа и корневой элемент в G , ассоциированные с корнем β и элементом $t \in K$, $G(\beta_1, \dots, \beta_k) \subset G$ — подгруппа в G , порожденная корневыми подгруппами $\mathfrak{X}_{\pm\beta_1}, \dots, \mathfrak{X}_{\pm\beta_k}$. Положим $\mathfrak{X}_{\pm i} = \mathfrak{X}_{\pm\alpha_i}$, $G(i_1, \dots, i_k) = G(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$. Используется также обозначение $G(i_1, \dots, i_k, \beta)$ для группы $G(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \beta)$. Подгруппу, порожденную всеми корневыми подгруппами, ассоциированными с корнями из некоторой подсистемы системы корней группы G , будем называть *подсистемной подгруппой*.

Далее $\dim M$ ($\dim \varphi$) — размерность G -модуля M (представления φ), $\Lambda(M)$ ($\Lambda(\varphi)$) — множества весов модуля M (представления φ), M_λ — весовое подпространство веса λ в модуле M . Символ $\langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$ или $\langle V_1, V_2, \dots, V_k \rangle$ обозначает подгруппу, порожденную элементами g_1, g_2, \dots, g_k , или линейную оболочку подпространств V_1, V_2, \dots, V_k фиксированного векторного пространства.

Всюду ниже $x \in H_1$ — регулярный унипотентный элемент, $y = x^{p^s}$.

Предполагается, что корни и веса группы G рассматриваются относительно фиксированного максимального тора T . Если $S \subset G$ — такая подгруппа, что $T \cap S$ — максимальный тор в S , то $\lambda|S$ — это ограничение веса $\lambda \in \Lambda(G)$ с T на $T \cap S$. Ясно, что можно рассматривать ограничения $\lambda|S$ для подсистемных подгрупп S .

Предложение 1 ([7, предложение 2.11(b)]; см. также [6, теорема I; 11, предложение]). Пусть $S = G(i_1, \dots, i_k) \subseteq G$, M — неприводимый G -модуль со старшим весом ω , $v \in M$ — ненулевой вектор старшего веса. Тогда подпространство $KSv \subseteq M$ является неприводимым S -модулем со старшим весом $\omega|S$ и прямым слагаемым S -модуля M .

О п р е д е л е н и е. Связная замкнутая подгруппа A типа A_1 в простой алгебраической группе Γ над K называется хорошей A_1 -подгруппой, если образы всех корней при гомоморфизме $\sigma : \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(A)$, индуцированном ограничением весов с максимального тора T группы Γ на максимальный тор $T_A = T \cap A$ в A , меньше $2p - 1$.

Предложение 2 [10, предложение 2.2]. Если Γ — простая алгебраическая группа классического типа над K , то для любого элемента $z \in \Gamma$ порядка p существует хорошая A_1 -подгруппа A , содержащая z , и все такие подгруппы сопряжены; при этом можно выбрать систему простых корней так, что $\sigma(\alpha_i) \in \{0, 1, 2\}$ и совпадает с i -й меткой на помеченной диаграмме Дынкина элемента z (здесь σ — гомоморфизм из определения).

Лемма 1. 1) В стандартном G -модуле элемент y имеет b блоков Жордана размерности $a + 1$ и $p^s - b$ блоков размерности a , а остальные блоки тривиальны.

2) Пусть ρ — неприводимое представление полупростой алгебраической группы Γ над полем K , $h \in \Gamma$ — элемент порядка p^{s+1} , $h_1 = h^{p^s}$. Тогда

$$p^s (d_\rho(h_1) - 1) < d_\rho(h) \leq p^s d_\rho(h_1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Известно, что в стандартном G -модуле элемент x имеет один блок размерности $n = ap^s + b$ и блоки размерности 1. Далее используем предложение 2.5.b из работы [12].

2) Эта часть предложения 2.5.а из [12]. \square

Используя [8, следствие 3.6], легко видеть, что группа H_1 содержит элементы z и u , которые в стандартном G -модуле и в стандартном H_1 -модуле имеют p и $p - 1$ блоков Жордана размерности 2 соответственно, а остальные блоки тривиальны. Если $f \in \{y, z, u\}$, то далее A_f — хорошая A_1 -подгруппа в G , содержащая f , $\sigma_f : \Lambda(G) \rightarrow \Lambda(A_f)$ — гомоморфизм, удовлетворяющий условиям предложения 2. Так как все такие подгруппы для фиксированного элемента сопряжены, можно считать, что $A_f \subset H_1$. Ясно, что A_f является хорошей A_1 -подгруппой для f и в H_1 .

Лемма 2.

$$\begin{aligned} \text{При } G = A_r(K) \quad & \sigma_y(\varepsilon_1) = \dots = \sigma_y(\varepsilon_b) = -\sigma_y(\varepsilon_{r-b+2}) = \dots = -\sigma_y(\varepsilon_{r+1}) = a, \\ & |\sigma_y(\varepsilon_j)| < a \quad \text{при } b+1 \leq j \leq r-b+1; \\ & \sigma_z(\varepsilon_1) = \dots = \sigma_z(\varepsilon_p) = -\sigma_z(\varepsilon_{r-p+2}) = \dots = -\sigma_z(\varepsilon_{r+1}) = 1, \\ & \sigma_z(\varepsilon_j) = 0 \quad \text{при } p+1 \leq j \leq r-p+1; \\ & \sigma_u(\varepsilon_1) = \dots = \sigma_u(\varepsilon_{p-1}) = -\sigma_u(\varepsilon_{r-p+3}) = \dots = -\sigma_u(\varepsilon_{r+1}) = 1, \\ & \sigma_u(\varepsilon_j) = 0 \quad \text{при } p \leq j \leq r-p+2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{При } G = C_r(K) \quad & \sigma_y(\varepsilon_1) = \dots = \sigma_y(\varepsilon_b) = a, \\ & 0 \leq \sigma_y(\varepsilon_j) < a \quad \text{при } j \geq b+1; \\ & \sigma_z(\varepsilon_1) = \dots = \sigma_z(\varepsilon_p) = 1, \\ & \sigma_z(\varepsilon_j) = 0 \quad \text{при } j \geq p+1; \\ & \sigma_u(\varepsilon_1) = \dots = \sigma_u(\varepsilon_{p-1}) = 1, \\ & \sigma_u(\varepsilon_j) = 0 \quad \text{при } j \geq p. \end{aligned}$$

Для неприводимого представления φ группы G

$$\sigma_f(\omega(\varphi)) = \max_{\mu \in \Lambda(\varphi)} \{\sigma_f(\mu)\} \quad \text{при } f \in \{y, z, u\}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \{y, z, u\}$. Обозначим символом $N(f)$ набор из всех весов ограничения стандартного G -модуля на A_f с учетом кратностей. Таким образом, набор $N(f)$ состоит из $r+1$ чисел при $G = A_r(K)$ и $2r$ чисел при $G = C_r(K)$. В наборе $N(y)$ каждое из чисел $a, a-2, \dots, 2-a, -a$ встречается b раз, каждое из чисел $a-1, a-3, \dots, 3-a, 1-a - p^s - b$ раз, остальные числа — нули. Набор

$$\begin{aligned} N(z) &= \underbrace{\{1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0\}}_{p \text{ раз}}, \underbrace{\{-1, -1, \dots, -1\}}_{p \text{ раз}}, \\ N(u) &= \underbrace{\{1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0\}}_{p-1 \text{ раз}}, \underbrace{\{-1, -1, \dots, -1\}}_{p-1 \text{ раз}}. \end{aligned}$$

В силу [4, предложение 2.12] набор $(\sigma_f(\varepsilon_1), \sigma_f(\varepsilon_2), \dots, \sigma_f(\varepsilon_r), \sigma_f(\varepsilon_{r+1}))$ совпадает с $N(f)$ при $G = A_r(K)$, а набор $(\sigma_f(\varepsilon_1), \sigma_f(-\varepsilon_1), \dots, \sigma_f(\varepsilon_r), \sigma_f(-\varepsilon_r))$ — при $G = C_r(K)$ (в обоих случаях с учетом кратностей). Так как $\sigma_f(\alpha_i) \geq 0$, то $\sigma_f(\varepsilon_i) \geq \sigma_f(\varepsilon_{i+1})$ при $G = A_r(K)$, $1 \leq i \leq r$, и $\sigma_f(\varepsilon_1) \geq \sigma_f(\varepsilon_2) \geq \dots \geq \sigma_f(\varepsilon_r) \geq 0$ при $G = C_r(K)$. Отсюда следует утверждение леммы. \square

Для элемента g порядка p из группы G , H_1 или H_2 и неприводимого представления ρ соответствующей группы обозначим символом $m_g(\rho)$ максимальный вес ограничения представления ρ на хорошую A_1 -подгруппу, содержащую g . В силу предложения 2 $m_g(\rho)$ не зависит от выбора такой подгруппы. Далее предполагаем, что φ — p -ограниченное представление группы G и $m_y(\varphi) < p$.

Лемма 3. *Вес*

$$\omega(\varphi) = \begin{cases} a_1\omega_1 + \dots + a_{p-1}\omega_{p-1} + a_{r-p+2}\omega_{r-p+2} + \dots + a_r\omega_r & \text{при } G = A_r(K), \\ a_1\omega_1 + \dots + a_{p-1}\omega_{p-1} & \text{при } G = C_r(K); \end{cases}$$

$$m_y(\varphi) = \begin{cases} a(a_1 + 2a_2 + \dots + (p-1)a_{p-1} + (p-1)a_{r-p+2} + \dots + a_r) & \text{при } G = A_r(K), \\ a(a_1 + 2a_2 + \dots + (p-1)a_{p-1}) & \text{при } G = C_r(K); \end{cases}$$

$$m_z(\varphi) = m_u(\varphi) = \begin{cases} a_1 + 2a_2 + \dots + (p-1)a_{p-1} + (p-1)a_{r-p+2} + \dots + a_r & \text{при } G = A_r(K), \\ a_1 + 2a_2 + \dots + (p-1)a_{p-1} & \text{при } G = C_r(K). \end{cases}$$

Доказательство. Так как $b \geq p$, то из леммы 2 следует, что $\sigma_y(\omega_j) \geq p$ при $p \leq j \leq r-p+1$ для $G = A_r(K)$ и $j \geq p$ для $G = C_r(K)$. Поэтому

$$\omega(\varphi) = \begin{cases} a_1\omega_1 + \dots + a_{p-1}\omega_{p-1} + a_{r-p+2}\omega_{r-p+2} + \dots + a_r\omega_r & \text{при } G = A_r(K), \\ a_1\omega_1 + \dots + a_{p-1}\omega_{p-1} & \text{при } G = C_r(K). \end{cases}$$

Применяя эту лемму еще раз, получаем искомые формулы для $m_f(\varphi)$ при $f \in \{y, z, u\}$. \square

Лемма 4. *Пусть ρ — неприводимое представление группы H_1 и $m_y(\rho) < p$. Тогда*

$$\omega(\rho) = \begin{cases} c_1\omega_1 + \dots + c_{p-1}\omega_{p-1} + c_{l-p+2}\omega_{l-p+2} + \dots + c_l\omega_l & \text{при } G = A_l(K), \\ c_1\omega_1 + \dots + c_{p-1}\omega_{p-1} & \text{при } G = C_l(K); \end{cases}$$

$$m_y(\rho) = \begin{cases} a(c_1 + 2c_2 + \dots + (p-1)c_{p-1} + (p-1)c_{l-p+2} + \dots + c_l) & \text{при } G = A_l(K), \\ a(c_1 + 2c_2 + \dots + (p-1)c_{p-1}) & \text{при } G = C_l(K); \end{cases}$$

$$m_z(\rho) = m_u(\rho) = \begin{cases} c_1 + 2c_2 + \dots + (p-1)c_{p-1} + (p-1)c_{l-p+2} + \dots + c_l & \text{при } G = A_l(K), \\ c_1 + 2c_2 + \dots + (p-1)c_{p-1} & \text{при } G = C_l(K). \end{cases}$$

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 3, только наборы $N(f)$ в этом случае содержат меньше нулей. \square

3. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Известно, что все подгруппы H , удовлетворяющие условиям теоремы, сопряжены, поэтому достаточно доказать ее для какой-либо одной такой подгруппы.

Выберем подгруппы H_1 и H_2 следующим образом.

Пусть $G = A_r(K)$. Положим

$$I = \begin{cases} \{1, 2, \dots, k, r-k+2, r-k+3, \dots, r+1\} & \text{при } n = 2k, \\ \{1, 2, \dots, k, k+1, r-k+2, r-k+3, \dots, r+1\} & \text{при } n = 2k+1; \end{cases}$$

$$J = \{1, 2, \dots, r+1\} \setminus I;$$

$$R_1 = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j \in I, i \neq j\},$$

$$R_2 = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j \in J, i \neq j\}.$$

Обозначим символами H_1 и H_2 подгруппы, порожденные всеми подгруппами \mathfrak{X}_β при $\beta \in R_1$ и R_2 соответственно. При $G = C_r(K)$ положим $H_1 = G(1, 2, \dots, l-1, 2\varepsilon_l)$, $H_2 = G(l+1, \dots, r)$. Легко видеть, что H_1 и H_2 — подсистемные подгруппы; $H_1 \cong A_l(K)$, $H_2 \cong A_{r-l-1}(K)$ при $G = A_r(K)$ и $H_1 \cong C_l(K)$, $H_2 \cong C_{r-l}(K)$ при $G = C_r(K)$.

Известно, что каждое неприводимое представление ρ группы H записывается в виде $\rho_1 \otimes \rho_2$, где ρ_i — неприводимое представление группы H_i .

Пусть $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ — композиционный фактор ограничения $\varphi|_H$ и $\omega(\psi_2) \neq 0$. Покажем, что $m_y(\psi_1) < m_y(\varphi)$. Предположим противное. Так как множество $\Lambda(\psi_1)$ состоит из ограничений весов из некоторого подмножества в $\Lambda(\varphi)$ с максимального тора группы G на максимальный тор группы H_1 , то число $m_y(\psi_1)$ не может превосходить $m_y(\varphi)$. Поэтому $m_y(\psi_1) = m_y(\varphi)$.

Так как $m_y(\psi_1) < p$, то в силу леммы 4

$$\omega(\psi_1) = \begin{cases} c_1\omega_1 + \dots + c_{p-1}\omega_{p-1} + c_{l-p+2}\omega_{l-p+2} + \dots + c_l\omega_l & \text{при } G = A_r(K); \\ c_1\omega_1 + \dots + c_{p-1}\omega_{p-1} & \text{при } G = C_r(K). \end{cases}$$

Из лемм 3 и 4 вытекает, что

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + \dots + (p-1)a_{p-1} + (p-1)a_{r-p+2} + \dots + a_r \\ = c_1 + 2c_2 + \dots + (p-1)c_{p-1} + (p-1)c_{l-p+2} + \dots + c_l \quad \text{при } G = A_r(K), \end{aligned}$$

$$a_1 + 2a_2 + \dots + (p-1)a_{p-1} = c_1 + 2c_2 + \dots + (p-1)c_{p-1} \quad \text{при } G = C_r(K).$$

Еще раз используя лемму 4, получаем, что

$$m_z(\varphi) = m_z(\psi_1) = m_u(\psi_1). \quad (3.1)$$

Построим элемент $w \in H$, сопряженный с z . Положим

$$f = \begin{cases} k+1 & \text{при } G = A_r(K), n = 2k; \\ k+2 & \text{при } G = A_r(K), n = 2k+1; \\ l+1 & \text{при } G = C_r(K). \end{cases}$$

Пусть $t \in K$. Положим при $G = A_r(K)$

$$w_1(t) = x_1(t) \dots x_{p-1}(t), \quad w_2(t) = x_f(t), \quad w_1^-(t) = x_{-1}(t) \dots x_{-(p-1)}(t), \quad w_2^-(t) = x_{-f}(t)$$

и при $G = C_r(K)$

$$w_1(t) = x_{2\varepsilon_1}(t) \dots x_{2\varepsilon_{p-1}}(t), \quad w_2(t) = x_{2\varepsilon_f}(t), \quad w_1^-(t) = x_{-2\varepsilon_1}(t) \dots x_{-2\varepsilon_{p-1}}(t), \quad w_2^-(t) = x_{-2\varepsilon_f}(t).$$

В обоих случаях пусть

$$w(t) = w_1(t)w_2(t), \quad w^-(t) = w_1^-(t)w_2^-(t),$$

$$S_1 = \langle w_1(t), w_1^-(t) | t \in K \rangle, \quad S_2 = \langle w_2(t), w_2^-(t) | t \in K \rangle, \quad S = \langle w(t), w^-(t) | t \in K \rangle.$$

Из наших условий для n следует, что $k > p$ при $n = 2k$ или $n = 2k+1$. Теперь ясно, что $S_1 \subset H_1$, $S_2 \subset H_2$ и $S \subset H$. Нетрудно заметить, что при $t \neq 0$ элемент $w_1(t)$ можно рассматривать в качестве элемента u , а элемент $w(t)$ сопряжен с элементом z ; при этом подгруппы S_1 и S являются хорошими A_1 -подгруппами для $w_1(t)$ и $w(t)$ соответственно.

Из построения подгрупп S , S_1 и S_2 следует, что существуют максимальные торы $T_1 \subset S_1$, $T_2 \subset S_2$, $T_S \subset S$ такие, что каждый элемент тора $h \in T_S$ однозначно представляется в виде произведения $h_1 h_2$, где $h_i \in T_i$. Так как $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$, то каждое собственное значение элемента $\psi(h)$ есть произведение некоторых собственных значений элементов $\psi_1(h)$ и $\psi_2(h)$.

Определим параметр $m_w(\psi)$ так же, как $m_y(\varphi)$. Легко видеть, что $m_w(\psi) = m_{w_1}(\psi_1) + m_{w_2}(\psi_2)$. Так как представление ψ_2 нетривиально, то $m_w(\psi) > m_{w_1}(\psi_1)$. В силу леммы 4 $m_{w_1}(\psi_1) = m_z(\psi_1)$. Но тогда ввиду формулы (3.1) $m_{w_1}(\psi_1) = m_z(\varphi)$. Так как ψ — композиционный фактор ограничения $\varphi|_H$, число $m_w(\varphi) \geq m_w(\psi)$. Поскольку элементы w и z сопряжены, приходим к противоречию. Следовательно, $m_y(\psi_1) < m_y(\varphi)$.

В силу результатов о минимальных многочленах образов элементов порядка p в неприводимых представлениях простых алгебраических групп в характеристике p [4, теорема 1.1, предложение 1.3 и алгоритм 1.4]

$$d_\varphi(y) = \min\{p, m_y(\varphi) + 1\}, \quad d_{\psi_1}(y) = \min\{p, m_y(\psi_1) + 1\}. \quad (3.2)$$

Так как $m_y(\varphi) < p$, отсюда вытекает, что $d_{\psi_1}(y) < d_\varphi(y)$. Ввиду п. 2) леммы 1 $d_\varphi(x) > p^s(d_\varphi(y) - 1)$ и $d_{\psi_1}(x) \leq p^s d_{\psi_1}(y) \leq p^s(d_\varphi(y) - 1)$. Значит, $d_\varphi(x) > d_{\psi_1}(x)$ для любого композиционного фактора $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ ограничения $\varphi|_H$ с $\omega(\psi_2) \neq 0$.

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Так как $m_y(\varphi) < p$, то в силу формулы (3.2) $d_\varphi(y) = m_y(\varphi) + 1$. Из [5] следует полная приводимость ограничения $\varphi|_{A_y}$. Положим $\omega = \omega(\varphi)$, $\sigma = \sigma_y$. Пусть M — G -модуль, в котором реализуется φ , и $v \in M$ — ненулевой вектор старшего веса. Из известного описания p -ограниченных неприводимых модулей группы $A_1(K)$ (см., например, [3, §12]) легко следует, что в таком модуле со старшим весом a нетривиальный унитарный элемент этой группы действует как блок Жордана размерности $a + 1$. Отсюда и из полной приводимости ограничения $M|_{A_y}$ вытекает, что число блоков Жордана максимальной размерности у элемента $\varphi(y)$ равно размерности весового подпространства веса $m_y(\varphi)$ в модуле $M|_{A_y}$. Обозначим это подпространство символом U . Легко видеть, что $U = \langle M_\lambda | \sigma(\lambda) = m_y(\varphi), \lambda \in \Lambda(M) \rangle$. Из леммы 2 следует, что

$$\sigma(\alpha_j) = 0 \text{ при } 1 \leq j \leq b-1 \text{ и при } r+2-b \leq j \leq r, \quad \sigma(\alpha_b) > 0, \quad \sigma(\alpha_{r+1-b}) > 0 \text{ при } G = A_r(K)$$

и

$$\sigma(\alpha_j) = 0 \text{ при } 1 \leq j \leq b-1, \quad \sigma(\alpha_b) > 0 \text{ при } G = C_r(K).$$

Теперь ясно, что $\sigma(\lambda) < m_y(\varphi)$ при $\lambda = \omega - \sum_{i=1}^r s_i \alpha_i$, если $s_b \neq 0$ или $G = A_r(K)$ и $s_{r+1-b} \neq 0$. Из предложения 1 и леммы 3 вытекает, что $\mu \notin \Lambda(M)$, если

$$\mu = \begin{cases} \omega - \sum_{i=1}^{b-1} s_i \alpha_i - \sum_{i=b+1}^{r-b} s_i \alpha_i - \sum_{i=r+2-b}^r s_i \alpha_i, & \sum_{i=b+1}^{r-b} s_i \neq 0 \text{ при } G = A_r(K), \\ \omega - \sum_{i=1}^{b-1} s_i \alpha_i - \sum_{i=b+1}^r s_i \alpha_i, & \sum_{i=b+1}^r s_i \neq 0 \text{ при } G = C_r(K). \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $\lambda \in \Lambda(M)$ число $\sigma(\lambda) = m_y(\varphi)$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda = \omega - \sum_{i=1}^{b-1} s_i \alpha_i - \sum_{i=r+2-b}^r s_i \alpha_i \text{ при } G = A_r(K)$$

и

$$\lambda = \omega - \sum_{i=1}^{b-1} s_i \alpha_i \text{ при } G = C_r(K).$$

Положим $\Gamma = G(1, 2, \dots, b-1, r+2-b, \dots, r)$ при $G = A_r(K)$ и $\Gamma = G(1, 2, \dots, b-1)$ при $G = C_r(K)$. Тогда $\Gamma \cong A_{b-1}(K) \times A_{b-1}(K)$ при $G = A_r(K)$ и $\Gamma = A_{b-1}(K)$ при $G = C_r(K)$. Ясно, что $U = K\Gamma v$. В силу предложения 1 $K\Gamma v$ — неприводимый Γ -модуль со старшим весом $\omega|_\Gamma$. Его размерность D зависит только от b, p и ненулевых коэффициентов веса ω и не зависит от r . Итак, установлено, что $\varphi(y)$ имеет D блоков максимальной размерности. Рассматривая блоки Жордана максимальной размерности элемента $\varphi(x)$ как элементы группы $SL_f(K)$ при подходящем f и применяя п. 2) леммы 1, получаем, что $\varphi(x)$ имеет не более D блоков Жордана максимальной размерности.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Известно, что размерность нетривиального H_2 -модуля не меньше $r - l$ при $G = A_r(K)$ и не меньше $2(r - l)$ при $G = C_r(K)$. Поэтому из теоремы 2 следует, что для некоторого веса ω , удовлетворяющего условиям теоремы 1, при достаточно большом r ограничение $\varphi|_H$ не имеет композиционных факторов, больших относительно x и нетривиальных для H_2 . Однако теорема 2 не позволяет оценить, насколько должен быть велик ранг, чтобы гарантировать отсутствие таких факторов. Поэтому она не может заменить теорему 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли, гл. IV-VI. М.: Мир, 1972. 334 с.
2. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли, гл. VII-VIII. М.: Мир, 1978. 342 с.
3. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 263 с.
4. **Супруненко И.Д.** Минимальные полиномы элементов порядка p в неприводимых представлениях групп Шевалле над полями характеристики p // Тр. Ин-та математики СО РАН. Вопросы алгебры и логики. Новосибирск, 1996. Т. 30. С. 126–163.
5. **Andersen H.H., Jorgensen J., Landrock P.** The projective indecomposable modules of $SL(2, p^n)$ // Proc. London Math. Soc. 1983. Vol. 46. P. 38–52. doi: 10.1112/plms/s3-46.1.38.
6. **Jantzen J.C.** Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen // Bonner math. Schr. 1973. Vol. 67.
7. **Jantzen J.C.** Representations of algebraic groups. Second ed. 2003. 576 p. (Math. Surveys and Monographs; vol. 107).
8. **Liebeck M.W., Seitz G.M.** Unipotent and nilpotent classes in simple algebraic groups and Lie algebras. Providence: American Math. Soc., 2012. 380p. (Math. Surveys and Monographs; 180). doi: 10.1090/surv/180.
9. **Korhonen M.** Jordan blocks of unipotent elements in some irreducible representations of classical groups in good characteristic // Proc. Amer. Math. Soc. 2019. Vol. 147. P. 4205–4219. doi: 10.1090/proc/14570.
10. **Seitz G.M.** Unipotent elements, tilting modules, and saturation // Invent. Math. 2000. Vol. 141, no. 3. P. 467–502. doi: 10.1007/s002220000073.
11. **Smith S.** Irreducible modules and parabolic subgroups // J. Algebra. 1982. Vol. 75. P. 286–289. doi: 10.1016/0021-8693(82)90076-x.
12. **Suprunenko I.D.** The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic // Memoirs Amer. Math. Soc.. 2009. Vol. 200, no. 939. 154 p. doi: 10.1090/memo/0939.
13. **Suprunenko I.D.** Special composition factors in restrictions of representations of special linear and symplectic groups to subsystem subgroups with two simple components // Труды Института математики. 2018. Т. 26, № 1. С. 115–133.
14. **Suprunenko I.D., Zalesskii A.E.** On restricting representations of simple algebraic groups to semisimple subgroups with two simple components // Труды Института математики. 2005. Т. 13, № 2. С. 109–115.
15. **Testerman D., Zalesski A.E.** Irreducible representations of simple algebraic groups in which a unipotent element is represented by a matrix with a single non-trivial Jordan block // J. Group Theory. 2018. Vol. 21. P. 1–20. doi: 10.1515/jgth-2017-0019.

Поступила 10.04.2020

После доработки 8.05.2020

Принята к публикации 18.05.2020

Бусел Татьяна Сергеевна
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск
e-mail: tbusel@gmail.com

Супруненко Ирина Дмитриевна
д-р. физ.-мат. наук, главный науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск
e-mail: suprunenko@im.bas-net.by

REFERENCES

1. Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie (Chapt. IV–VI)*. Paris: Hermann, 1968, 282 p. doi: 10.1007/978-3-540-34491-9. Translated to Russian under the title *Gruppy i algebrы Li (glavy IV–VI)*. Moscow: Mir Publ., 1976, 332 p.
2. Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie, Chaps. VII–VIII*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006, 265 p. doi: 10.1007/978-3-540-33977-9. Translated to Russian under the title *Gruppy i algebrы Li, glavy VII–VIII*. Moscow: Mir Publ., 1978, 342 p.
3. Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups*. Providence: AMS, 2016, 175 p. ISBN: 9781470431051. Translated to Russian under the title *Lektsii o gruppakh Shevalle*. Moscow: Mir Publ., 1975, 263 p.
4. Suprunenko I.D. Minimal polynomials of elements of order p in irreducible representations of Chevalley groups over fields of characteristic p . *Siberian Advances in Mathematics*, 1996, vol. 6, no. 4, pp. 97–150. doi: 10.1090/conm/131.1/1175791.
5. Andersen H.H., Jorgensen J., Landrock P. The projective indecomposable modules of $SL(2, p^n)$. *Proc. London Math. Soc.*, 1983, vol. 46, pp. 38–52. doi: 10.1112/plms/s3-46.1.38.
6. Jantzen J.C. *Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen*. Bonner math. Schr., vol. 67. Bonn: Mathematische Institut der Universität, 1973, 124 p.
7. Jantzen J.C. *Representations of algebraic groups*. Second ed. Math. Surveys and Monographs, vol. 107, 2003, 576 p. ISBN: 978-0-8218-4377-2.
8. Liebeck M.W., Seitz G.M. *Unipotent and nilpotent classes in simple algebraic groups and Lie algebras*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 180, Providence: AMS, 2012, 380 p. doi: 10.1090/surv/180.
9. Korhonen M. Jordan blocks of unipotent elements in some irreducible representations of classical groups in good characteristic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2019, vol. 147, pp. 4205–4219. doi: 10.1090/proc/14570.
10. Seitz G.M. Unipotent elements, tilting modules, and saturation. *Invent. Math.*, 2000, vol. 141, no. 3, pp. 467–502. doi: 10.1007/s002220000073.
11. Smith S. Irreducible modules and parabolic subgroups. *J. Algebra*, 1982, vol. 75, no. 1, pp. 286–289. doi: 10.1016/0021-8693(82)90076-x.
12. Suprunenko I.D. The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 2009, vol. 200, no. 939, 154 p. doi: 10.1090/memo/0939.
13. Suprunenko I.D. Special composition factors in restrictions of representations of special linear and symplectic groups to subsystem subgroups with two simple components. *Trudy Insituta Matematiki*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 115–133.
14. Suprunenko I.D., Zalesskii A.E. On restricting representations of simple algebraic groups to semisimple subgroups with two simple components. *Trudy Insituta Matematiki*, 2005, vol. 13, no. 2, pp. 109–115.
15. Testerman D., Zalesski A.E. Irreducible representations of simple algebraic groups in which a unipotent element is represented by a matrix with a single non-trivial Jordan block. *J. Group Theory*, 2018, vol. 21, no. 1, pp. 1–20. doi: 10.1515/jgth-2017-0019.

Received April 10, 2020

Revised May 8, 2020

Accepted May 18, 2020

Funding Agency: This research was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. F19-024).

Tatyana Sergeevna Busel, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072, Republic of Belarus, e-mail: tbusel@gmail.com

Irina Dmitrievna Suprunenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072, Republic of Belarus, e-mail: suprunenko@im.bas-net.by

Cite this article as: T. S. Busel, I. D. Suprunenko. On the properties of irreducible representations of special linear and symplectic groups that are not large with respect to the field characteristic and regular unipotent elements from subsystem subgroups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 88–97.

УДК 514.8+515.2

О СВЯЗНЫХ КОМПОНЕНТАХ ФРАКТАЛЬНЫХ КУБОВ¹

Д. А. Ваулин, Д. А. Дроздов, А. В. Тетенев

В статье показывается существенное отличие фрактальных кубов от фрактальных квадратов. В основе топологической классификации фрактальных квадратов, полученной в 2013 г. К.-С. Лау с соавторами, лежит рассмотрение свойств \mathbb{Z}^2 -периодического расширения $H = F + \mathbb{Z}^2$ и его дополнения $H^c = \mathbb{R}^2 \setminus H$. Фрактальный квадрат $F \subset \mathbb{R}^2$ содержит отличную от отрезка или точки связную компоненту тогда и только тогда, когда H^c содержит ограниченную связную компоненту. Мы показываем, что существует фрактальный куб F в \mathbb{R}^3 , для которого множество H^c связно, а множество Q связных компонент K_α куба F обладает следующими свойствами: Q — вполне несвязное самоподобное подмножество гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$, билипшицево изоморфное канторову множеству $C_{1/5}$; все множества $K_\alpha + \mathbb{Z}^3$ связны и попарно не пересекаются; множество значений хаусдорфовых размерностей $\dim_H(K_\alpha)$ совпадает с некоторым промежутком $[a, b]$.

Ключевые слова: фрактальный квадрат, фрактальный куб, суперфрактал, самоподобное множество, гиперпространство, хаусдорфова размерность.

D. A. Vaulin, D. A. Drozdov, A. V. Tetenov. On connected components of fractal cubes.

The paper shows an essential difference between fractal squares and fractal cubes. The topological classification of fractal squares proposed in 2013 by K.-S. Lau et al. was based on analyzing the properties of the \mathbb{Z}^2 -periodic extension $H = F + \mathbb{Z}^2$ of a fractal square F and of its complement $H^c = \mathbb{R}^2 \setminus H$. A fractal square $F \subset \mathbb{R}^2$ contains a connected component different from a line segment or a point if and only if the set H^c contains a bounded connected component. We show the existence of a fractal cube F in \mathbb{R}^3 for which the set $H^c = \mathbb{R}^3 \setminus H$ is connected whereas the set Q of connected components K_α of F possesses the following properties: Q is a totally disconnected self-similar subset of the hyperspace $C(\mathbb{R}^3)$, it is bi-Lipschitz isomorphic to the Cantor set $C_{1/5}$, all the sets $K_\alpha + \mathbb{Z}^3$ are connected and pairwise disjoint, and the Hausdorff dimensions $\dim_H(K_\alpha)$ of the components K_α assume all values from some closed interval $[a, b]$.

Keywords: fractal square, fractal cube, superfractal, self-similar set, hyperspace, Hausdorff dimension.

MSC: 28A80

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-98-107

Введение

Фрактальные квадраты, при всей их простоте, в последние годы стали объектом пристального внимания нескольких исследователей. В 2009 г. Л. Кристеа и Б. Штайнски в работах [3;4] исследовали фрактальные лабиринты — вид фрактальных квадратов, являющихся дендритами. В 2013 г. К. Лао, Дж. Луо и Х. Рао [7] описали топологическую структуру фрактальных квадратов. Тогда же М. Бонк и С. Меренков [2] получили для них условия квазисимметрической жесткости. В более поздних работах [8;9] были изучены вопросы липшицевой эквивалентности фрактальных квадратов.

Настоящая статья посвящена топологическим свойствам многомерных аналогов фрактальных квадратов — фрактальным k -мерным кубам. Она продолжает исследования, начатые в [11]. Введем необходимые понятия.

Пусть $n \geq 2$, а $D = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ — некоторое подмножество $\{0, 1, \dots, n-1\}^k$, которое мы назовем *множеством единиц*. Элементы ξ_i множества D определяют систему $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих подобий $S_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} + \xi_i)/n$ в \mathbb{R}^k . Тогда согласно [6, Theorem(3), p.10] существует

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00420).

единственное непустое компактное множество $F \subset \mathbb{R}^k$, удовлетворяющее уравнению

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) = \frac{F + D}{n},$$

которое назовем *фрактальным k -кубом* (или фрактальным квадратом, если $k = 2$) *порядка n* . С каждым фрактальным k -кубом F связывают его \mathbb{Z}^k -периодическое расширение $H = F + \mathbb{Z}^k$ и дополнение $H^c = \mathbb{R}^k \setminus H$. Мы также обозначим через $P = [0, 1]^k$ единичный k -мерный куб, и определим действующий на подмножествах $A \subset \mathbb{R}^k$ оператор Хатчинсона T для задаваемой множеством D системы сжимающих отображений \mathcal{S} равенством

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^m S_i(A) = \frac{A + D}{n}.$$

Для случая $k = 2$, когда F является фрактальным квадратом, К. Лау, Д. Луо и Х. Рао доказали следующее утверждение.

Теорема 1 [7, теорема 1.1]. *Пусть F — фрактальный квадрат. Тогда либо*

- (i) *все компоненты H^c ограничены, и F содержит отличную от точки связную компоненту, которая не является отрезком прямой, либо*
- (ii) *все компоненты H^c неограничены, и F либо вполне несвязно, либо все связные компоненты F — либо точки, либо параллельные прямолинейные отрезки.*

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Существует фрактальный куб $F \subset \mathbb{R}^3$ такой, что множество H^c связно, а H есть несчетное объединение неограниченных связных компонент, каждая из которых инвариантна относительно \mathbb{Z}^3 -сдвигов.*

Теорема 2 показывает существенное отличие фрактальных кубов от фрактальных квадратов: Для фрактального куба F , рассматриваемого в теореме 2, каждая из несчетного семейства связных компонент множества H является \mathbb{Z}^3 -периодической и поэтому бесконечной во всех направлениях пространства \mathbb{R}^3 . Никакая из связных компонент K_α фрактального куба F не является ни точкой, ни прямолинейным отрезком, а множество H^c связно и неограничено, поэтому ни одно из условий (i), (ii) теоремы 1 не выполняется.

Разделы 1 и 2 статьи содержат доказательство теоремы 2 и предваряющие его результаты. Мы задаем в разд. 1 множество единиц D , определяющее фрактальный куб F . По построению, это множество разбивается на две части $D = D_0 \sqcup D_1$. Поэтому и порождающий F оператор Хатчинсона записывается в виде $T(A) = T_0(A) \cup T_1(A)$. Тогда F можно рассматривать как суперфрактал [1, Definition 18], порожденный системой $\Sigma = \{\tilde{T}_1, \tilde{T}_2\}$, действующей в гиперпространстве $C(\mathbb{R}^3)$. Пусть I^∞ — индексное пространство, Q — аттрактор системы Σ , а $\sigma : I^\infty \rightarrow Q$ — соответствующее индексное отображение. В этих терминах мы получаем в разд. 2 следующее описание множества связных компонент F :

Теорема 3. *Для каждого $\alpha \in I^\infty$ точке $q_\alpha = \sigma(\alpha)$ аттрактора $Q \subset C(\mathbb{R}^3)$ системы сжимающих отображений $\Sigma = \{\tilde{T}_0, \tilde{T}_1\}$ гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$ соответствует связная компонента K_α фрактального куба F , причем*

$$F = \bigsqcup_{\alpha \in I^\infty} K_\alpha$$

Существует билипшицев гомеоморфизм $\psi : C_{1/5} \rightarrow Q$ канторова множества $C_{1/5}$ на Q , который индуцирует изоморфизм самоподобных структур на этих множествах.

В разд. 3 мы доказываем теорему 4 о значениях хаусдорфовой размерности компонент $K_\alpha \subset F$ и о положительности меры этих компонент в случае когда α — предпериодическая последовательность.

1. Построение множества F

Некоторые обозначения. Мы будем строить множество F как фрактальный куб порядка $n = 5$. В этом случае всякое множество единиц D содержится в $\{0, 1, 2, 3, 4\}^3$, для каждого $\xi \in D$ отображение S_ξ задается формулой $S_\xi(\mathbf{x}) = (\xi + \mathbf{x})/5$, а неподвижной точкой S_ξ является точка $\xi/4$. Оператор Хатчинсона T системы $\mathcal{S} = \{S_\xi, \xi \in D\}$ задается равенством $T(A) = (A + D)/5$. Так как компактные множества $A \subset \mathbb{R}^3$ — элементы гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$, наделенного метрикой Хаусдорфа d_H , равенство $T(A) = (A + D)/5$ задает отображение $\tilde{T} : C(\mathbb{R}^3) \rightarrow C(\mathbb{R}^3)$ гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$. Это отображение является сжимающим, и его липшицева константа равна $1/5$. Иногда мы будем проводить формальное различие между действием оператора T на подмножества $A \subset \mathbb{R}^3$ и действием отображения \tilde{T} на элементы $A \in C(\mathbb{R}^3)$ гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$.

Свойства фрактальных кубов, задаваемых D_0 и D_1 . Пусть D_0 и D_1 — множества единиц, для которых соответствующие им подмножества $P_0 = (D_0 + P)/5$ и $P_1 = (D_1 + P)/5$ куба P изображены на рис. 1. Эти множества содержат $\#D_0 = 13$ и $\#D_1 = 44$ элементов. Множества единиц D_0 и D_1 определяют операторы Хатчинсона $T_0(A) = (D_0 + A)/5$ и $T_1(A) = (D_1 + A)/5$ и фрактальные кубы K_0 и K_1 соответственно (рис. 2).

1. Заметим, что $P_0 \cap P_1 = \emptyset$, причем наименьшее расстояние $d(P_0, P_1)$ между точками этих множеств равно $1/5$.

2. Множества P_0 и P_1 связны и инвариантны относительно группы симметрий куба P , а их пересечения с гранями W куба P непусты. Обозначим через W_0 грань P , лежащую в плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Тогда $D_0 \cap \mathbb{R}^2$ и $D_1 \cap \mathbb{R}^2$ — множества единиц, задающие фрактальные квадраты $K_0 \cap W_0$ и $K_1 \cap W_0$. Последние в силу симметрии конгруэнтны пересечениям K_0 и K_1 с любой из граней W куба P .

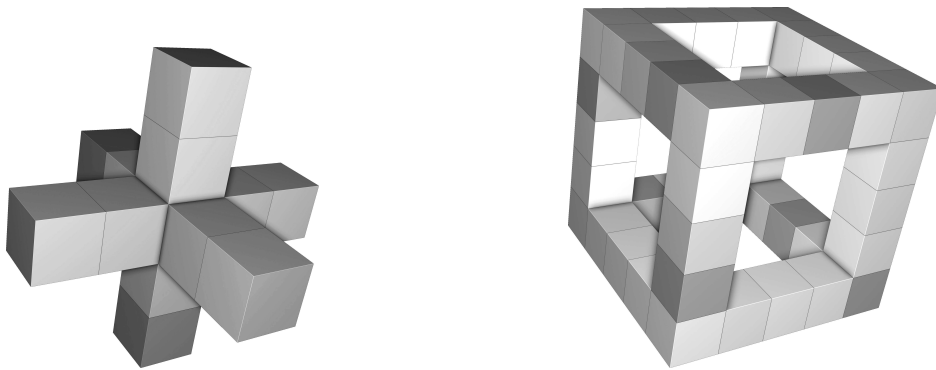


Рис.1: P_0 (слева) и P_1 (справа)

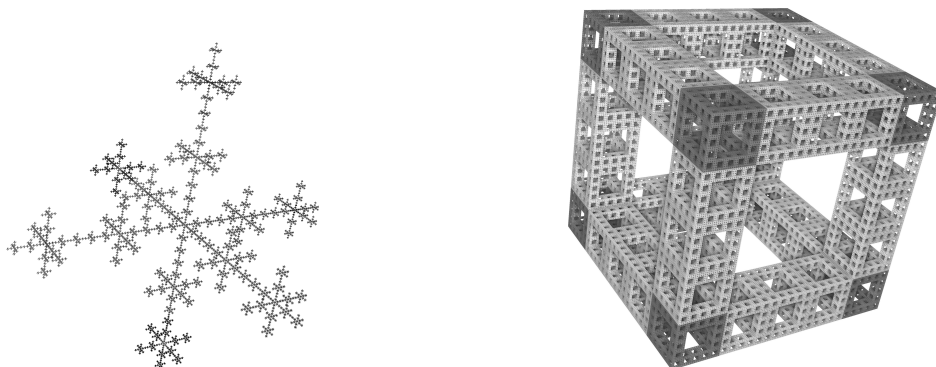


Рис. 2: Фрактальные кубы K_0 (слева) и K_1 (справа)

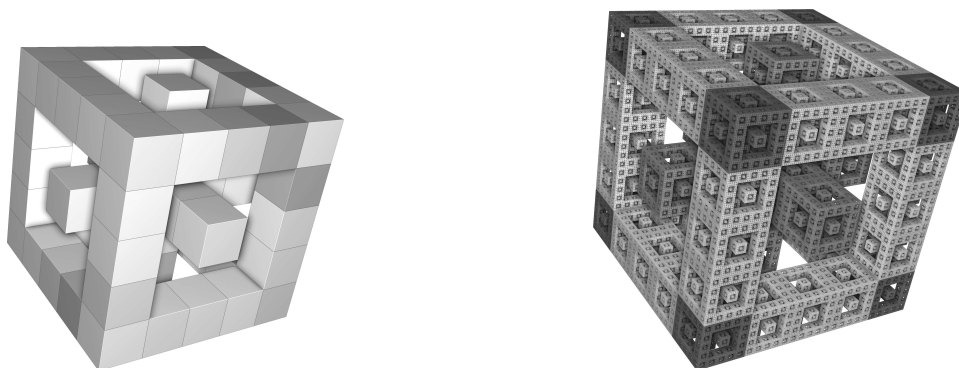


Рис. 3: Множество $T(P)$ (слева) и фрактальный куб F (справа)

3. Пересечение множества P_0 с гранью W_0 куба P — центральный квадрат на этой грани. Так как $D_0 \cap \mathbb{R}^2 = (2, 2, 0)$, имеем $K_0 \cap W_0 = \{c_0\}$, где $c_0 = (1/2, 1/2, 0)$ — центр грани W_0 . Значит в силу симметрии для каждой грани W_i , $K_0 \cap W_i = \{c_i\}$, где c_i — центр грани W_i . Поэтому множества $S_\xi(K_0)$ и $S_\eta(K_0)$ имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда кубы $S_\xi(P)$ и $S_\eta(P)$ имеют общую грань, причем единственной точкой пересечения при этом является центр этой общей грани.

4. Ввиду **3** система сжимающих подобий $\mathcal{S}_{D_0} = \{S_\xi, \xi \in D_0\}$ является системой с одноточечным пересечением. При этом граф пересечений этой системы является деревом. Согласно [10, Theorem 1.7] фрактальный куб K_0 является дендритом. Из строения графа пересечений системы \mathcal{S}_{D_0} следует, что все точки ветвления K_0 имеют порядок 6.

В свою очередь, фрактальный куб K_1 — это $5 \times 5 \times 5$ -версия губки Менгера.

Множество D и фрактальный куб F . Определим F как фрактальный куб (рис. 3), множество единиц которого D есть объединение непересекающихся множеств D_0 и D_1 . Оператор Хатчинсона T , порождающий фрактальный куб F , задается равенством $T(A) = T_0(A) \cup T_1(A)$. При этом множество $T(P)$ есть объединение непересекающихся связных множеств P_0 и P_1 (см. рис. 3).

2. Свойства множества F

Индексное пространство для F . Поскольку фрактальный куб F задается системой $\mathcal{S} = \{S_\xi, \xi \in D\}$, то для всякого k элементы $\bar{\xi} = \xi_1 \dots \xi_k$ множества D^k мы будем называть *мультииндексами длины k* . Множество всех мультииндексов мы обозначим через $D^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D^k$.

Мы будем называть *индексным пространством* системы \mathcal{S} пространство всех бесконечных строк $\{\xi = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots; \xi_i \in D\}$, т.е. бесконечное произведение D^∞ конечных дискретных пространств D .

Запись $\bar{\xi} \sqsubset \bar{\eta}$ (соотв. $\bar{\xi} \sqsubset \xi$) означает, что мультииндекс $\bar{\xi}$ является начальным подсловом в $\bar{\eta}$ (соотв. в ξ). Если не выполняется ни одно из соотношений $\bar{\xi} \sqsubset \bar{\eta}$, $\bar{\eta} \sqsubset \bar{\xi}$, два мультииндекса называются несравнимыми. Символом $\bar{\xi} \wedge \bar{\eta}$ мы обозначаем максимальное общее начальное подслово в $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$. Запись $\bar{\xi} \bar{\eta}$ (соотв. $\bar{\xi} \xi$) означает конкатенацию соответствующих слов или строк. Точно так же, если A, B — множества мультииндексов или строк, то $AB = \{\bar{\xi} \bar{\eta} : \bar{\xi} \in A, \bar{\eta} \in B\}$. Длина k мультииндекса $\bar{\xi} = \xi_1 \dots \xi_k$ обозначается символом $|\bar{\xi}|$.

Каждый мультииндекс задает отображение $S_{\bar{\xi}} = S_{\xi_1 \dots \xi_k} = S_{\xi_1} \dots S_{\xi_k}$. Поэтому k -е измельчение системы \mathcal{S} задается равенством $\mathcal{S}^k = \{S_{\bar{\xi}}, \bar{\xi} \in D^k\}$, а k -я степень оператора Хатчинсона системы \mathcal{S} задается равенством $T^k(A) = \bigcup_{\bar{\xi} \in D^k} S_{\bar{\xi}}(A)$.

Для каждой строки $\xi = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \in D^\infty$ положим

$$\pi(\xi) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{\xi_1 \dots \xi_n}(P) \tag{2.1}$$

Формула (2.1) задает единственную точку в множестве F и тем самым определяет *индексное отображение* $\pi : D^\infty \rightarrow F$.

Лемма 1. (i) Для любого $\bar{\xi} \in D^*$ $\pi(\bar{\xi}D^\infty) = S_{\bar{\xi}}(F)$;

(ii) Для $i = 0, 1$ $\pi(D_i \times D^\infty) = T_i(F)$;

(iii) Для любой строки $\xi = \xi_1\xi_2\dots \in D^\infty$ и любого $x \in \mathbb{R}^3$ $\pi(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{\xi_1\dots\xi_k}(x)$.

Доказательство. Из равенства (2.1) следует, что для любых $\bar{\xi} \in D^*$, $\eta \in D^\infty$, $\pi(\bar{\xi}\eta) = S_{\bar{\xi}}(\pi(\eta))$. Так как $\pi(D^\infty) = F$, получаем $\pi(\bar{\xi}D^\infty) = S_{\bar{\xi}}(F)$. Аналогично, равенство $\pi(D_i \times D^\infty) = \bigcup_{\xi \in D_i} S_\xi(F)$ дает (ii). Так как для любого $x \in \mathbb{R}^3$ и для $\bar{\xi} = \xi_1\dots\xi_k$ расстояние $d(S_{\bar{\xi}}(x), S_{\bar{\xi}}(P)) = d(x, P)/5^k$, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим (iii). \square

Множество Q и его точки K_α . Учитывая, что оператор T удовлетворяет уравнению $T(A) = T_0(A) \cup T_1(A)$, мы рассмотрим систему сжимающих отображений $\Sigma = \{\tilde{T}_0, \tilde{T}_1\}$ гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$. Обозначим ее аттрактор через Q .

Так как $\text{Lip } \tilde{T}_i = 1/5$, аттрактор Q системы Σ — вполне несвязное компактное подмножество в $C(\mathbb{R}^3)$. Более того, так как из включений $T_i(F) \subset F$ следует включение $\tilde{T}_0(C(F)) \cup \tilde{T}_1(C(F)) \subset C(F)$, множество Q содержится в пространстве $C(F)$ всех компактных подмножеств фрактального куба F .

Положим $I = \{0, 1\}$. Каждому мультииндексу $\bar{\alpha} = \alpha_1\dots\alpha_k \in I^k$ соответствует отображение $\tilde{T}_{\bar{\alpha}} = \tilde{T}_{\alpha_1}\dots\tilde{T}_{\alpha_k}$ пространства $C(\mathbb{R}^3)$ в себя, задаваемое равенством $T_{\bar{\alpha}}(A) = T_{\alpha_1}\dots T_{\alpha_k}(A)$. Положим $P_{\bar{\alpha}} = T_{\bar{\alpha}}(P)$.

Индексным пространством для системы Σ мы назовем множество I^∞ . По теореме Хатчинсона, для каждой бесконечной строки $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots \in I^\infty$ и любого $A \in C(\mathbb{R}^3)$ существует предел $K_\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} T_{\alpha_1\dots\alpha_m}(A)$, не зависящий от выбора $A \in C(\mathbb{R}^3)$. Тем самым мы зададим *индексное отображение* $\sigma : I^\infty \rightarrow Q$ формулой $\sigma(\alpha) = K_\alpha$.

В случае, когда $A = P$ (или $A = F$), множества $T_{\alpha_1\dots\alpha_m}(P) = P_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ (соотв. $F_{\alpha_1\dots\alpha_m}$) образуют последовательность вложенных компактов, поэтому предел последовательности $P_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ в метрике Хаусдорфа совпадает в их пересечении

$$K_\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} P_{\alpha_1\dots\alpha_m} = \bigcap_{\bar{\alpha} \sqsubset \alpha} P_{\bar{\alpha}} = \bigcap_{\bar{\alpha} \sqsubset \alpha} F_{\bar{\alpha}}.$$

Если α — периодическая строка с периодом $\bar{\alpha}$, то множество $K_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет уравнению $K_\alpha = T_{\bar{\alpha}}(K_\alpha)$, и в этом случае K_α совпадает с аттрактором $K_{\bar{\alpha}}$ оператора $T_{\bar{\alpha}}$ (рис. 4).

Соотношения между пространствами D^∞ и I^∞ . Пусть $\varphi : D \rightarrow I$ — отображение, тождественно равное 0 на D_0 и равное 1 на D_1 . Для всякого $k \in \mathbb{N}$ зададим отображение

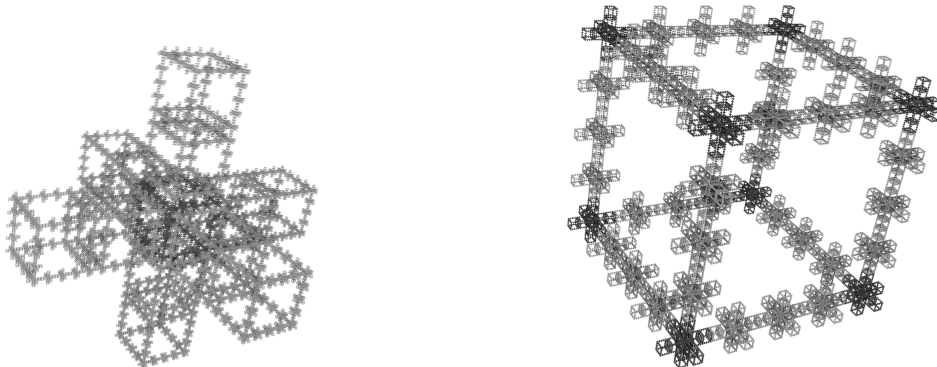


Рис. 4: Компоненты K_{01} и K_{10}

$\varphi_k : D^k \rightarrow I^k$ равенством $\varphi_k(\xi_1 \dots \xi_k) = \varphi(\xi_1) \dots \varphi(\xi_k)$. Для каждого мультииндекса $\bar{\alpha} \in I^k$ положим $D_{\bar{\alpha}} = D_{\alpha_1} \times \dots \times D_{\alpha_k}$. Тогда для любого $\bar{\alpha} \in I^k$, $\varphi_k^{-1}(\bar{\alpha}) = D_{\bar{\alpha}}$. При этом множество D^k есть дизъюнктивное объединение подмножеств $D_{\bar{\alpha}}$ по всем $\bar{\alpha} \in I^k$.

Аналогично зададим отображение индексных пространств $\varphi_\infty : D^\infty \rightarrow I^\infty$ равенством $\varphi_\infty(\xi) = \alpha$, где $\xi = \xi_1 \dots \xi_k \dots$, а $\alpha = \varphi(\xi_1) \dots \varphi(\xi_k) \dots$. Будучи произведением непрерывных отображений, φ_∞ непрерывно.

Пусть $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots$ и $D_\alpha = \varphi_\infty^{-1}(\alpha)$. Пространство D_α есть бесконечное произведение компактных пространств $\prod_{i=1}^\infty D_{\alpha_i}$. Поэтому множества D_α компактны и $D^\infty = \bigsqcup_{\alpha \in I^\infty} D_\alpha$.

- Лемма 2.** (i) Для любого мультииндекса $\bar{\alpha} \in I^k, k \in \mathbb{N}$, множество $P_{\bar{\alpha}}$ связно;
(ii) Для любого $\alpha \in \{0, 1\}^\infty$ множество K_α связно;
(iii) $\pi(D_\alpha) = K_\alpha$ и $F = \bigcup_{\alpha \in I^\infty} K_\alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Множества $P_i, i \in 0, 1$, обладают следующими свойствами:

(i1) Множества P_i инвариантны относительно симметрий куба P , в частности, пересечения P_i с любыми двумя противоположными гранями куба P конгруэнтны относительно параллельного переноса одной грани в другую;

(i2) любые два куба $(\xi + P)/5, (\eta + P)/5 \subset P_i$ с ребром длины $1/5$ в P_i можно соединить путем, пересекающим только грани кубов из P_i и не пересекающим их ребер.

Если $\xi, \eta \in D_i$ таковы, что кубы $S_\xi(P), S_\eta(P)$ имеют общую грань, то $S_\xi(P_j) \cap S_\eta(P_j)$ имеет непустую внутренность. Поэтому для любых $i, j \in I$ множества $T_i(P_j)$ связны и обладают теми же свойствами (i1) и (i2).

Рассуждая по индукции, мы получаем, что множества $T_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(P_i)$ связны и наследуют свойства (i1), (i2).

(ii) Так как K_α — пересечение убывающей по включению последовательности связных компактных множеств $P_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$, множество K_α также компактно и связно и обладает свойствами (i1), (i2).

(iii) Множество D_α есть пересечение убывающей последовательности компактов $D_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \times D^\infty$. Согласно лемме 1 $\pi(D_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \times D^\infty) = F_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$, поэтому $\pi(D_\alpha) \subset K_\alpha$. Поскольку $F = \pi(D^\infty) = \bigcup_{\alpha \in I^\infty} \pi(D_\alpha)$, то $F = \bigcup_{\alpha \in I^\infty} K_\alpha$. \square

Из конструкции множеств D_0, D_1 следует, что хаусдорфово расстояние между множествами $d_H(P_0, P_1) = 2\sqrt{2}/5$, $d_H(P, P_i) \leq 2\sqrt{2}/5$, в то время как минимальное расстояние $d(P_0, P_1)$ между точками этих множеств равно $1/5$. Отсюда мы получаем следующие оценки.

Лемма 3. Пусть $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in I^*$ — несравнимые мультииндексы. Тогда

$$P_{\bar{\alpha}} \cap P_{\bar{\beta}} = \emptyset, \quad d_H(P_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\beta}}) < 3\sqrt{5}/5^{|\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}|} \quad \text{и} \quad d(P_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\beta}}) \geq 1/5^{|\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}|+1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\alpha_1 \neq \beta_1$, то $P_{\bar{\alpha}} \subset P_{\alpha_1}, P_{\bar{\beta}} \subset P_{\beta_1}$, следовательно,

$$d_H(P_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\beta}}) \leq d_H(P_{\bar{\alpha}}, P_{\alpha_1}) + d_H(P_{\alpha_1}, P_{\beta_1}) + d_H(P_{\beta_1}, P_{\bar{\beta}}) \leq \frac{2\sqrt{2}}{25} + \frac{2\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{25} < \frac{3\sqrt{2}}{5} \quad (2.2)$$

и $d(P_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\beta}}) \geq d(P_{\alpha_1}, P_{\beta_1}) = 1/5$. Заметим, что $d_H(P_{\sigma\bar{\alpha}}, P_{\sigma\bar{\beta}}) = d_H(P_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\beta}})/5^{|\sigma|}$ и $d(P_{\sigma\bar{\alpha}}, P_{\sigma\bar{\beta}}) = d(P_{\bar{\alpha}}, P_{\bar{\beta}})/5^{|\sigma|}$, из чего вытекает утверждение леммы. \square

Пусть $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \in I^\infty$. Заметим, что $K_\alpha = \bigcap_{k=1}^\infty P_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ есть пересечение убывающей последовательности множеств $P_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$. Тогда, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в неравенстве (2.2) и в дальнейших рассуждениях леммы 3, получим

Утверждение. Для любых $\alpha, \beta \in I^\infty$

$$\frac{1}{5^{|\alpha \wedge \beta| + 1}} \leq d_H(K_\alpha, K_\beta) < \frac{3\sqrt{5}}{5^{|\alpha \wedge \beta| + 1}},$$

и

$$d(K_\alpha, K_\beta) \geq \frac{1}{5^{|\alpha \wedge \beta| + 1}}. \quad \square$$

Доказательство теоремы 3. По лемме 2 каждое множество K_α связно и компактно. Для каждого k множества $P_{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha} \in I^k$ образуют конечное покрытие F попарно непересекающимися континуумами. При этом из включения $F_{\bar{\alpha}} := T_{\bar{\alpha}}(F) \subset P_{\bar{\alpha}}$ следует что $F_{\bar{\alpha}} = F \cap P_{\bar{\alpha}}$. Поэтому для любых $\bar{\alpha} \in I^*$, множества $F_{\bar{\alpha}}$ открыто-замкнуты в F . Поэтому $\{F_{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha} \sqsubset \alpha\}$ — фундаментальная система открыто-замкнутых окрестностей множества K_α , и каждое из множеств K_α является связной компонентой F . При этом $F = \bigsqcup \alpha \in I^\infty K_\alpha$.

Пусть x_α, x_β — точки канторова множества $C_{1/5}$ с адресами α, β , они удовлетворяют неравенству

$$3 \cdot 5^{-(|\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}| + 1)} < d(x_\alpha, x_\beta) < 5^{-(|\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}|)}.$$

В то же время для точек $K_\alpha, K_\beta \in Q$ выполняется неравенство

$$5^{-(|\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}| + 1)} < d_H(K_\alpha, K_\beta) < 3\sqrt{5} \cdot 5^{-(|\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}| + 1)}. \quad (2.3)$$

Из неравенства (2.3) получим

$$d(x_\alpha, x_\beta)/5 < d_H(K_\alpha, K_\beta) < \sqrt{5} \cdot d(x_\alpha, x_\beta). \quad (2.4)$$

Пусть $\psi : C_{1/5} \rightarrow Q$ задается формулой $\psi(x_\alpha) = K_\alpha$. Согласно (2.4) ψ — билипшицев гомеоморфизм между $C_{1/5}$ и Q . Если $f_0(x) = x/5$, $f_1(x) = x/5 + 4/5$ — отображения в \mathbb{R} , порождающие $C_{1/5}$, то $\psi \cdot f_i = \tilde{T}_i \circ \psi$. Поэтому гомеоморфизм ψ индуцирует изоморфизм самоподобных структур на $C_{1/5}$ и Q . \square

Доказательство теоремы 2. Для любой компоненты K_α расширение $K_\alpha + \mathbb{Z}^3$ связно, поскольку пересечения K_α с любыми двумя противоположными гранями куба P конгруэнтны относительно параллельного переноса одной грани в другую. Поскольку такое расширение получено путем объединения \mathbb{Z}^3 -сдвигов компоненты K_α , то $K_\alpha + \mathbb{Z}^3$ инвариантно относительно \mathbb{Z}^3 -сдвигов. Значит, $H = F + \mathbb{Z}^k$ есть несчетное объединение неограниченных компонент, каждая из которых инвариантна относительно \mathbb{Z}^3 -сдвигов.

Далее, поскольку $F = \bigcap_{k=1}^\infty T^k(P)$ есть пересечение убывающей по включению последовательности компактов, то множество $P \setminus F = \bigcup_{k=1}^\infty P \setminus T^k(P)$ объединение возрастающей последовательности открытых подмножеств из P , каждое из которых связно. Поэтому $P \setminus F$ связно. С другой стороны, поскольку пересечения $P \setminus F$ с противоположными гранями куба P конгруэнтны, то множество $H^c = P \setminus F + \mathbb{Z}^3$ связно. \square

3. Размерности компонент

Пусть $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \in I^\infty$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ *плотностью единиц* в начальном подслове $\alpha_1 \dots \alpha_k$ мультииндекса α мы назовем число $\lambda_k(\alpha) = k^{-1} \sum_{i=1}^k \alpha_i$. Положим $\bar{\lambda}_\alpha = \limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(\alpha)$, $\underline{\lambda}_\alpha = \liminf_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(\alpha)$ и, если $\underline{\lambda}_\alpha = \bar{\lambda}_\alpha$, мы пишем $\lambda_\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(\alpha)$. Если α — предпериодическая строка с длиной периода p , то λ_α равна плотности единиц в любом подслове $\bar{\beta}$ длины p из периодической части строки α .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Для любого $\alpha \in I^\infty$

$$\overline{\dim}_B(K_\alpha) = (1 - \bar{\lambda}_\alpha) \log_5 13 + \bar{\lambda}_\alpha \log_5 44,$$

$$\dim_H(K_\alpha) = \underline{\dim}_B(K_\alpha) = (1 - \underline{\lambda}_\alpha) \log_5 13 + \underline{\lambda}_\alpha \log_5 44.$$

Если строка α — предпериодическая, то K_α имеет положительную меру Хаусдорфа в размерности $\dim_H(K_\alpha)$.

Доказательство. Пусть $\bar{\alpha} \sqsubset \alpha$, $|\bar{\alpha}| = k$ и $\sum_{i=1}^k \alpha_i = m$. Множество $P_{\bar{\alpha}}$ состоит из $\#D_{\bar{\alpha}} = 13^{k-m} 44^m$ кубов с ребром $\delta_k = 5^{-k}$, и эти кубы образуют δ_k -покрытие K_α . Обозначая $a = \log_5 13$ и $b = \log_5 44$, получим $-\ln N_{\delta_k} / \ln \delta_k = (1 - \lambda_k(\alpha))a + \lambda_k(\alpha)b$, поэтому

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{-\ln N_{\delta_k}}{\ln \delta_k} = a + (b - a)\underline{\lambda}(\alpha) \quad \text{и} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{-\ln N_{\delta_k}}{\ln \delta_k} = a + (b - a)\bar{\lambda}(\alpha),$$

что и дает формулы для верхней и нижней клеточной размерности.

Для p -периодического $\alpha = \overline{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \in I^\infty$, $\underline{\lambda}_\alpha = \bar{\lambda}_\alpha$, и $\overline{\dim}_B(K_\alpha) = \underline{\dim}_B(K_\alpha) = \dim_B(K_\alpha)$. В силу уравнения $K_\alpha = T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}(K_\alpha)$ множество K_α является аттрактором системы $\{S_{\bar{\xi}}; \bar{\xi} \in D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}\}$, удовлетворяющей условию открытого множества (OSC). Поэтому (см. [5, Theorem 9.3, p. 118]) $\dim_H(K_\alpha) = \dim_B(K_\alpha)$ и K_α имеет конечную положительную меру в этой размерности.

Последнее верно и для предпериодических α . Если $\alpha = \bar{\beta}\beta$, где $\bar{\beta}$ — конечное подслово и β — периодическая часть, то $K_\alpha = T_{\bar{\beta}}(K_\beta)$. Тогда $\dim_H(K_\alpha) = \dim_H(K_\beta)$. Так как $\lambda(\beta) = \lambda(\alpha)$, имеем $\dim_H(K_\alpha) = a + (b - a)\lambda(\alpha)$.

Теперь докажем, что $\dim_H(K_\alpha) = \underline{\dim}_B(K_\alpha)$ для любой строки α . Пусть $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots$. Для каждого k будем обозначать k -й остаток последовательности как $\alpha_k = \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots$.

Зададим вероятностную меру μ_α на пространстве D_α как произведение равномерных вероятностных мер на сомножителях D_{α_i} . Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и $\bar{\xi} \in D_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ справедливо

$$\mu(\bar{\xi} D_{\alpha_k}) = (\#D_{\alpha_1 \dots \alpha_k})^{-1} = 5^{-k(a + \lambda_k(\alpha) \cdot (b-a))}.$$

Пусть $\Lambda(t) = 5^{-(a+tb)}$. Функция $\Lambda(t)$ убывает на $[0, 1]$, и $\Lambda(0) = 1/13$, а $\Lambda(1) = 1/44$.

Зададим меру $\tilde{\mu}$ с носителем в K_α , положив для всякого $A \subset P$, $\tilde{\mu}_\alpha(A) = \mu_\alpha(\pi^{-1}(A \cap K_\alpha))$. Покажем, что для этой меры выполняется принцип распределения масс.

Пусть B — шар, такой что

$$\sqrt{3} \cdot 5^{-n-1} < |B| \leq \sqrt{3} \cdot 5^{-n}. \quad (3.1)$$

Тогда B содержится не более, чем в 27 кубах со стороной 5^{-n} . Поэтому для множества $B \cap K_\alpha$ его прообраз $\pi^{-1}(B \cap K_\alpha)$ содержится не более чем в 27 множествах $\xi_1 \dots \xi_n D_{\alpha_n}$, мера каждого из которых равна $\Lambda(\lambda_n)^n$.

Отсюда следует неравенство $\tilde{\mu}(B) < 27\Lambda(\lambda_n)^n$.

По определению нижней плотности $\underline{\lambda}_\alpha$, для любого $\nu < \underline{\lambda}_\alpha$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при $n > N$, $\lambda_n(\alpha) > \nu$. Тогда $\Lambda(\nu) > \Lambda(\lambda_n)$ и поэтому $\tilde{\mu}(B) < 27\Lambda(\nu)^n$.

Из левой части неравенства (3.1) получаем, что $n > \log_5(\sqrt{3}/(5|B|))$. Тогда

$$\tilde{\mu}(B) < 27\Lambda(\nu)^{\log_5(\sqrt{3}/(5|B|))} = L \cdot |B|^{-\log_5 \Lambda(\nu)} = L \cdot |B|^{a+\nu(b-a)},$$

где $L = 27 \cdot (5^{-1}\sqrt{3})^{\log_5 \Lambda(\nu)}$ — положительная постоянная.

Согласно принципу распределения масс [5, Mass distribution Principle 4.2, p.55] $\dim_H(K_\alpha) \geq a + \nu(b - a)$ для любого $\nu < \underline{\lambda}_\alpha$. Следовательно, $\dim_H(K_\alpha) \geq a + (b - a)\underline{\lambda}(\alpha) = \underline{\dim}_B(K_\alpha)$.

Поскольку для любого непустого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ справедливо неравенство $\dim_H(K) \leq \underline{\dim}_B(K)$ [5, (3.17), p. 43], мы получаем, что $\dim_H(K_\alpha) = \underline{\dim}_B(K_\alpha)$. \square

З а м е ч а н и е. Для произвольного $\alpha \in I^\infty$ нельзя утверждать ни положительность, ни конечность меры Хаусдорфа множества K_α в его размерности. Если в строке $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots$ индексы $\alpha_i = 0$ при $i = n(n+1)/2$ и $\alpha_i = 1$ в остальных случаях, то $\dim_H(K_\alpha) = b$, причем хаусдорфова мера $H^b(K_\alpha) = 0$. Если же $\alpha_i = 1$ при $i = n(n+1)/2$ и $\alpha_i = 0$ в остальных случаях, то $\dim_H(K_\alpha) = a$, причем хаусдорфова мера $H^a(K_\alpha) = \infty$.

Авторы признательны Д. А. Мехонцеву — создателю программного пакета IFSTile, с помощью которого построены все изображения фракталов в данной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Barnsley M.F., Hutchinson J.E., Stenflo Ö.** *V*-variable fractals: Fractals with partial self similarity // *Adv. Math.* 2008. Vol. 218, no. 6. P. 2051–2088. doi:10.1016/j.aim.2008.04.011.
2. **Bonk M., Merenkov S.** Quasisymmetric rigidity of square Sierpinski carpets // *Annals Math.* 2013. Vol. 177. P. 591–643. doi:10.4007/annals.2013.177.2.5.
3. **Cristea L.L., Steinsky B.** Curves of infinite length in 4×4 -labyrinth fractals // *Geom. Dedicata.* 2009. Vol. 141. P. 1–17. doi: /10.1007/s10711-008-9340-3.
4. **Cristea L.L., Steinsky B.** Curves of infinite length in labyrinth fractals // *Proc. Edinb. Math. Soc.* II. Ser. 2011. Vol. 54, no. 2. P. 329–344. doi: 10.1017/S0013091509000169.
5. **Falconer K.J.** *Fractal geometry: mathematical foundations and applications.* N Y: J. Wiley and Sons, 1990. 288 p. ISBN: 0471922870.
6. **Hutchinson J.** Fractals and self-similarity // *Indiana Univ. Math. J.* 1981. Vol. 30, no. 5. P. 713–747. doi: 10.1512/iumj.1981.30.30055.
7. **Lau K.S., Luo J.J., Rao H.** Topological structure of fractal squares // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 2013. Vol. 155. P. 73–86. doi: 10.1017/S0305004112000692.
8. **Luo J.J., Liu J.-C.** On the classification of fractal squares // *Fractals.* 2016. Vol. 24, no. 1. Art.-no. 1650008. doi: 10.1142/S0218348X16500080.
9. **Ruan H.J., Wang Y.** Topological invariants and Lipschitz equivalence of fractal squares // *J. Math. Anal. Appl.* 2017. Vol. 451. P. 327–344. doi: 10.1016/j.jmaa.2017.02.012.
10. **Tetenov A.V.** Finiteness properties for self-similar sets: [e-resource]. arXiv:2003.04202 [math.MG]. 12 p.
11. **Tetenov A.V., Drozdov D.A.** On the connected components of fractal cubes: [e-resource]. arXiv:2002.02920 [math.MG]. 6 p.

Поступила 6.04.2020

После доработки 20.04.2020

Принята к публикации 11.05.2020

Ваулин Дмитрий Алексеевич

старший преподаватель кафедры математики, физики и информатики

Горно-Алтайского государственного университета

e-mail: d_warrant@mail.ru

Дроздов Дмитрий Алексеевич

магистрант Горно-Алтайского государственного университета

e-mail: dimalek97@yandex.ru

Тетенев Андрей Викторович

д-р физ.-мат. наук, доцент

профессор кафедры математики, физики и информатики

Горно-Алтайского государственного университета

г. Горно-Алтайск;

профессор кафедры теории функций

Новосибирский государственный университет

г. Новосибирск

e-mail: atet@mail.ru

REFERENCES

1. Barnsley M.F., Hutchinson J.E., Stenflo Ö. V -variable fractals: Fractals with partial self similarity. *Adv. Math.*, 2008, vol. 218, no. 6, pp. 2051–2088. doi: 10.1016/j.aim.2008.04.011.
2. Bonk M., Merenkov S. Quasisymmetric rigidity of square Sierpinski carpets. *Annals Math.*, 2013, vol. 177, no. 2, pp. 591–643. doi: 10.4007/annals.2013.177.2.5.
3. Cristea L.L., Steinsky B. Curves of infinite length in 4×4 -labyrinth fractals. *Geom. Dedicata*, 2009, vol. 141, pp. 1–17. doi: 10.1007/s10711-008-9340-3.
4. Cristea L.L., Steinsky B. Curves of infinite length in labyrinth fractals. *Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser.*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 329–344. doi: 10.1017/S0013091509000169.
5. Falconer K.J. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. N Y: J. Wiley and Sons, 1990, 288 p. ISBN: 0471922870.
6. Hutchinson J. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 1981, vol. 30, no. 5, pp. 713–747. DOI: 10.1512/iumj.1981.30.30055.
7. Lau K.S., Luo J.J., Rao H. Topological structure of fractal squares. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 2013, vol. 155, no. 1, pp. 73–86. doi: 10.1017/S0305004112000692.
8. Luo J.J., Liu J.C. On the classification of fractal squares. *Fractals*, 2016, vol. 24, no. 1, art.-no. 1650008. doi: 10.1142/S0218348X16500080.
9. Ruan H.J., Wang Y. Topological invariants and Lipschitz equivalence of fractal squares. *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, vol. 451, no. 1, pp. 327–344. doi: 10.1016/j.jmaa.2017.02.012.
10. Tetenov A.V. Finiteness properties for self-similar sets. *arXiv:2003.04202 [math.MG]*.
11. Tetenov A.V., Drozdov D.A. On the connected components of fractal cubes. *arXiv:2002.02920 [math.MG]*. 6 p.

Received April 6, 2020

Revised April 20, 2020

Accepted May 11, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00420).

Dmitrii Alekseevich Vaulin, Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, 649000 Russia,
e-mail: d_warrant@mail.ru.

Dmitry Alekseevich Drozdov, Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, 649000 Russia,
e-mail: dimalek97@yandex.ru.

Andrei Viktorovich Tetenov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, 649000 Russia, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: atet@mail.ru.

Cite this article as: D. A. Vaulin, D. A. Drozdov, A. V. Tetenov. On connected components of fractal cubes. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 98–107.

УДК 519.8

О НЕКОТОРЫХ ЭФФЕКТИВНО РАЗРЕШИМЫХ КЛАССАХ СЕТЕВОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОПУСКНЫЕ СПОСОБНОСТИ КОММУНИКАЦИЙ¹**Э. Х. Гимади, О. Ю. Цидулко**

В работе исследуется задача размещения в сетях с ограниченными пропускными способностями коммуникаций, в которой требуется разместить предприятия в вершинах заданной сети так, чтобы с минимальными затратами одновременно удовлетворить спросы всех клиентов, находящихся в вершинах сети. Рассматриваются постановки задачи с делимыми запросами, где спрос клиента может быть удовлетворен несколькими предприятиями совместно, и неделимыми запросами, тогда спрос клиента должен быть целиком удовлетворен одним предприятием. В работе показано, что задача с неделимыми запросами NP-трудна, даже если заданная сеть является простым путем, и NP-трудна в сильном смысле, если сеть — дерево. Задача с делимыми запросами слабо NP-трудна на деревьях. Для этой задачи в работе предложен псевдополиномиальный алгоритм решения на графах с древесной шириной, ограниченной константой, а также представлен линейный алгоритм для случая, когда граф сети является простым путем.

Ключевые слова: задача размещения, пропускные способности, делимый спрос, неделимый спрос, NP-трудная задача, древесная ширина, псевдополиномиальный алгоритм, полиномиальный алгоритм.

E. Kh. Gimadi, O. Yu. Tsidulko. On some efficiently solvable classes of the network facility location problem with constraints on the capacities of communication lines.

We study the network facility location problem with constraints on the capacities of communication lines, called Restricted Facility Location Problem (RFLP). It is required to locate facilities at the vertices of a given network graph so as to simultaneously satisfy the demands of the clients, which are also located at the vertices of the network graph, at minimum cost. We consider two statements of the problem: the multiple-allocation RFLP, where the demand of a client can be satisfied jointly by several facilities, and the single-allocation RFLP, where the demand of a client must be entirely satisfied by a single facility. We show that the single-allocation RFLP is NP-hard even if the network is a simple path and strongly NP-hard if the network is a tree. The multiple-allocation RFLP is weakly NP-hard on trees. For this problem we propose a pseudopolynomial algorithm for the case where the network graph has constant treewidth, and show a linear-time algorithm for the case where the network is a simple path.

Keywords: facility location problem, capacities, single-allocation, multiple-allocation, NP-hard problem, treewidth, pseudopolynomial algorithm, polynomial-time algorithm.

MSC: 90-02, 90B80

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-108-124

Введение

Задачи размещения (Facility Location Problems) — это широкий раздел в комбинаторной оптимизации, в котором изучаются задачи о выборе наилучшего расположения одного или нескольких предприятий для эффективного обслуживания спроса заданного множества клиентов. Задачи размещения имеют большое число приложений в логистике, в сфере размещения медицинских объектов, в системах GIS и в сфере телекоммуникаций [20, разд. III], в задачах кластеризации, в компьютерном зрении [21], в биоинформатике [19] и др.

В данной работе рассматриваются сетевые задачи размещения, в которых клиенты и возможные пункты открытия предприятий находятся в вершинах заданного графа сети. Сетевые

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-31-00470) и частичной поддержке Математического Центра в Академгородке (соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации 075-15-2019-1675).

задачи размещения возникают, например, в задачах размещения прокси-серверов в компьютерных сетях, в задачах управления поставками, при планировании путей эвакуации в транспортных сетях [3]. В таких задачах естественным образом возникают ограничения на объем продукции, который может единовременно передаваться по ребрам сети.

Сетевую задачу размещения с ограничениями на пропускные способности коммуникаций в этой работе мы будем сокращенно называть RFLP (от английского названия Restricted Facility Location Problem, предложенного в статье [14]). В задаче RFLP в заданном n -вершинном графе для каждой вершины известен объем клиентского спроса и стоимость открытия предприятия в этой вершине, а для каждого ребра сети известны его пропускная способность и стоимость передачи по нему единицы продукта. Требуется открыть набор предприятий так, чтобы удовлетворить спрос всех клиентов, не нарушая ограничений на пропускные способности ребер, с минимальными суммарными расходами на открытие предприятий и единовременную транспортировку продукта от предприятий к клиентам. Задачу можно рассматривать в постановке с *делимыми запросами*, когда спрос одного клиента может быть обслужен несколькими предприятиями совместно, и в постановке с *неделимыми запросами*, когда спрос клиента должен быть целиком удовлетворен одним предприятием.

В произвольном графе даже сетевая задача размещения с неограниченными пропускными способностями ребер NP-трудна [11], однако, она решается точно за время $O(n)$, если входной граф является простым путем [17], за время $O(n \log n)$, если входной граф является деревом [23], за время $O(n^{k+2})$ [2; 15], если входной граф является частичным k -деревом, или, что эквивалентно [8, теорема 1], имеет древесную ширину, не превосходящую k .

Непосредственно задача RFLP исследовалась в литературе в работах [14; 25; 26]. Для задачи RFLP с *делимыми запросами* в статье [14] построен алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ в случае, когда входной граф является простым путем, а в работах [25] и [26] предложены псевдополиномиальные алгоритмы решения этой задачи на деревьях и частичных 2-деревьях. Отметим, что в работе [14] нами также предлагался алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ для задачи RFLP с *неделимыми запросами* на путевом графе, однако он основывался на неверном предположении о структуре оптимальных решений задачи. Далее мы покажем (см. утверждение 2), что задача RFLP с *неделимыми запросами* на путевом графе NP-трудна.

Среди задач с ограничениями на пропускные способности сети в литературе известны так называемые задачи размещения источников (Source Location) [3; 4; 24], близкие к задачам RFLP с *делимыми запросами*. Эти задачи мотивированы приложениями передачи данных, где время передачи одного пакета данных должно быть пренебрежимо мало и не заметно для конечного пользователя, поэтому затраты на передачу данных по ребрам сети в этих постановках равны нулю. Кроме нулевых затрат на передачу данных, задачи Source Location отличаются от RFLP с делимыми запросами тем, что в них, как правило, клиенты должны быть обслужены не одновременно, т.е. после того, как спрос некоторого клиента удовлетворен совокупностью открытых предприятий, ребра сети освобождаются, и для следующего клиента можно вновь использовать их полную пропускную способность. Задачи Source Location, в которых спрос всех клиентов должен быть обслужен одновременно, называются задачами Simultaneous Source Location (SSL) [3; 24]. Эти задачи являются частным случаем RFLP с *делимыми запросами*. В работе [3] рассматривалась задача SSL, где стоимость открытия любого предприятия равна 1. Для случая, когда входной граф является деревом, в [3] был предложен алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$, который позднее в работе [24] был улучшен до $O(n)$, и показано, что задача SSL становится NP-трудной на графах с древесной шириной, равной 2. При фиксированном k для задачи SSL на графах с древесной шириной k в [3] построен псевдополиномиальный алгоритм.

К задачам RFLP с *неделимыми запросами* среди известных в литературе наиболее близки задачи о неделимых потоках (Unsplittable Flow Problem, UFP). В этих задачах даны граф, пропускные способности ребер, и m запросов: четверок вида $\{s_i, t_i, d_i, w_i\}$, где s_i — вершина источник, t_i — вершина сток, d_i — объем продукции, который нужно доставить из s_i

в t_i , а w_i — доход от выполнения запроса. Требуется выбрать подмножество запросов с максимальным суммарным доходом, которые можно удовлетворить одновременно. Частным случаем задачи UFP является задача о максимальном числе непересекающихся путей. Задача UFP NP-трудна даже на графе с двумя вершинами и двумя параллельными ребрами [18], и в общем случае APX-трудна [16]. Поэтому большая часть результатов для нее касается приближенных алгоритмов, в том числе для частных случаев с ограниченной структурой графа [1; 10], с ограничениями на функцию доходов [1], с одним источником [13; 18] и др.

В данной работе мы исследуем частные случаи задачи RFLP со структурными ограничениями на граф сети. В разд. 2 мы уточним сложностной статус задач RFLP с произвольными стоимостями открытия предприятий на деревьях и простых путях, поскольку этот вопрос в предыдущих работах по RFLP [14; 25; 26] не обсуждался. Мы покажем, что задача RFLP с *неделимыми запросами* NP-трудна, даже если входной граф — простой путь, и NP-трудна в сильном смысле на деревьях, а NP-трудность задачи RFLP с *делимыми запросами* на деревьях напрямую следует из аналогичного результата для задачи Source Location [4]. В разд. 3 мы обобщим псевдополиномиальный алгоритм из [3] на случай задачи RFLP с делимыми запросами, произвольными стоимостями открытия предприятий и ненулевыми транспортными расходами на графах с ограниченной древесной шириной. За счет более аккуратных вычислений в самом алгоритме и при оценке числа его шагов полученный алгоритм по сравнению с алгоритмом из [3] имеет трудоемкость, меньшую на два порядка. Наконец, в разд. 4 мы рассмотрим задачу RFLP с делимыми запросами на путевом графе, для которой был известен алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ [14]. Мы покажем, как находить точные решения этой задачи за время $O(n)$, используя подход к решению задачи с неограниченными пропускными способностями из [17].

Ниже в таблице собраны результаты, касающиеся вычислительной сложности задач RFLP на различных простых типах графов:

Граф G	RFLP с делимыми запросами		RFLP с неделимыми запросами $f_i \equiv 1, c(e) \equiv 0$
	$f_i \equiv 1, c(e) \equiv 0$	Общий случай	
простой путь	$O(n)$ [24]	$O(n)$ (теорема 2)	NP-тр. (утверждение 2)
дерево	$O(n)$ [24]	NP-тр. (утверждение 1)	NP-тр. с.с. (утверждение 2)
$tw = 2$	NP-тр., [3]	NP-тр.	NP-тр. с.с.
$tw = O(1)$	$O(nB^{2tw})$	$O(nB^{2tw})$ (теорема 1)	NP-тр. с.с.

Для задачи RFLP на графе каждого типа либо указана трудоемкость известного алгоритма решения задачи, либо сложностной статус задачи, где “NP-тр.” — “NP-трудна”; “NP-тр.с.с.” — сокращение от “NP-трудна в сильном смысле”; tw — древесная ширина графа G ; f_i — стоимость открытия предприятия в вершине i ; $c(e)$ — стоимость передачи единицы продукта по ребру e ; B — максимальный объем продукции, передаваемый по ребру.

1. Постановка задачи RFLP

Приведем формальную постановку задачи RFLP. Дан граф сети $G = (V, E)$ со множеством вершин $V = \{1, \dots, n\}$. Для каждой вершины $i \in V$ заданы величина клиентского спроса $b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и стоимость $f_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ открытия предприятия в вершине i . Для каждого ребра $e \in E$ заданы его пропускная способность $q(e) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ и стоимость $c(e) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ транспортировки единицы продукции по ребру e .

В задаче RFLP требуется найти подмножество вершин $S \subseteq V$, в которых будут открыты предприятия, и план перевозок $x = (x_{ij}^p)$ такие, что

$$\sum_{i \in S} f_i + \sum_{i, j \in V} \sum_{p \in P_{ij}} g_{ij}^p x_{ij}^p \rightarrow \min_{S, x_{ij}^p} \quad (1.1)$$

при условиях

$$\sum_{i \in S} \sum_{p \in P_{ij}} x_{ij}^p = b_j, \quad j \in V, \quad (1.2)$$

$$\sum_{(i,j,p) \in Q_e} x_{ij}^p \leq q(e), \quad e \in E, \quad (1.3)$$

$$x_{ij}^p \geq 0, \quad i \in S, \quad j \in V, \quad p \in P_{ij}, \quad (1.4)$$

где x_{ij}^p — объем продукта, поставленного предприятием $i \in S$ в вершину $j \in V$ по пути p ; $g_{ij}^p = \sum_{e \in p} c(e)$ — стоимость транспортировки единицы продукта по пути p ; P_{ij} — множество всех простых путей в графе G , ведущих из вершины i в вершину j ; Q_e — множество троек (i, j, p) таких, что путь $p \in P_{ij}$ проходит через ребро e .

Условие (1.2) обеспечивает удовлетворение спроса в вершине $j \in V$, неравенство (1.3) задает ограничения на пропускные способности ребер.

Задачу (1.1)–(1.3) и (1.4) будем называть задачей RFLP с делимыми спросами. В ней несколько предприятий могут совместно обеспечивать спрос клиента в вершине j . Задачи с неделимыми спросами, где весь спрос клиента должен обеспечиваться ровно одним предприятием, могут моделироваться либо заменой условия (1.4) на условие $x_{ij}^p \in \{0, b_j\}$, $i \in S$, $j \in V$, $p \in P_{ij}$, тогда весь необходимый объем продукции будет доставлен из некоторого предприятия $i \in S$ клиенту j по одному пути, либо добавлением условия $\sum_{p \in P_{ij}} x_{ij}^p \in \{0, b_j\}$, $j \in V$, $i \in S$, тогда единственное предприятие i , обслуживающее клиента j , может доставлять к нему продукцию по нескольким путям. Заметим, что если граф G является деревом или в задаче отсутствуют ограничения (1.3), в оптимальном решении весь неделимый объем продукции будет доставляться от предприятия i к клиенту j по кратчайшему пути.

2. Сложностной статус задачи RFLP

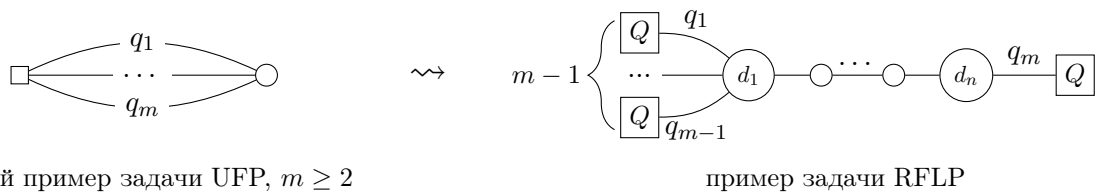
В этом разделе мы обсудим сложностной статус задачи RFLP на деревьях и путевых графах. Доказательство NP-трудности частных случаев задач RFLP легко следует из известных результатов для близких к RFLP задачи размещения источников в сети (Source Location) [4] и задачи о неделимом потоке (Unsplittable Flow Problem) [18].

Утверждение 1. *Задача RFLP с делимыми спросами NP-трудна, даже если транспортные затраты равны нулю, а заданный граф транспортной сети является графом-звездой, т. е. деревом, в котором все, кроме одной, вершины — листья.*

Доказательство следует из NP-трудности задачи размещения источников (Source Location) на графе-звезде с одним клиентом, к которой в работе [4, теорема 5.1] сводится известная NP-трудная задача о ранце. Как было сказано во введении, задача Source Location отличается от задачи RFLP тем, что в Source Location разные клиенты обслуживаются не одновременно. Однако, задача Source Location с одним клиентом является частным случаем задачи RFLP, откуда следует требуемое утверждение.

Утверждение 2. *Задача RFLP с неделимыми спросами NP-трудна, даже когда заданный граф является простым путем, и NP-трудна в сильном смысле, даже если заданный граф является гусеничным деревом, т. е. деревом, которое превратится в простой путь, если из него одновременно удалить все листья. Трудность задачи в обоих случаях сохраняется, даже если транспортные затраты равны нулю, и стоимости открытия всех предприятий одинаковы.*

Доказательство следует из NP-трудности задачи Unsplittable Flow Problem (UFP) [18, утверждение 3.0.1]. В [18] показано, что задача UFP NP-трудна даже на графах с двумя

сложный пример задачи UFP, $m \geq 2$

пример задачи RFLP

Рис. 1. Сведение сложного примера задачи UFL к задаче RFLP с неделимыми спросами. Квадратами обозначены вершина-источник и с необходимостью открытые предприятия, в круглых вершинах находятся клиенты.

вершинами и двумя параллельными ребрами, поскольку к ней сводится задача о ранце, и NP-трудна в сильном смысле на графах с двумя вершинами и нефиксированным числом параллельных ребер, поскольку к ней сводится задача об упаковке в контейнеры. Покажем, что этот сложный частный случай задачи UFP сводится к RFLP с неделимыми спросами (см. рис. 1).

В рассматриваемом частном случае задачи UFP дан граф G с вершинами s и t , и m параллельными ребрами, каждое из которых имеет пропускную способность q_j , $j = 1, \dots, m$. Заданы n запросов вида $\{s, t, d_i\}$, $i = 1, \dots, n$, на доставку неделимого спроса d_i из s в t , т. е. объем продукции d_i должен быть доставлен целиком по одному ребру. Необходимо выяснить, возможно ли выполнить все n запросов одновременно.

В эквивалентном примере задачи RFLP рассмотрим путевой граф G' с вершинами v_i , в которых задан спрос d_i , $i = 1, \dots, n$, и назначим ребрам пути G' пропускную способность, равную суммарному спросу. Пусть $Q = \max\{q_j \mid 1 \leq j \leq m\} + 1$. Добавим в G' новые вершины u_1, \dots, u_m , спрос в которых равен Q . Добавим в G' ребро $\{v_n, u_m\}$ с пропускной способностью q_m и ребра $\{v_1, u_j\}$ с пропускными способностями q_j , $j = 1, \dots, m - 1$. Заметим, что при $m = 2$ граф G' является простым путем, а при $m > 2$ — гусеничным деревом. Положим стоимость открытия предприятия в любой вершине равной 1, а стоимость транспортировки по каждому ребру в G' равной 0. В любом допустимом решении построенного примера RFLP в каждой вершине u_j , $j = 1, \dots, m$, будет открыто предприятие, поскольку каждая вершина u_j связана с остальным графом единственным ребром с пропускной способностью q_j , которой недостаточно, чтобы передать в u_j объем продукции Q из других вершин. То есть стоимость оптимального решения в таком примере всегда не меньше m . Если стоимость оптимального решения примера RFLP равна m , то в примере задачи UFP есть допустимое решение, в котором по каждому ребру $j = 1, \dots, m$ передается такой же объем продукции, как и по ребру, ведущему из u_j в решении задачи RFLP, а если стоимость оптимального решения RFLP больше m , то допустимого решения примера задачи UFP нет. И наоборот.

3. Задача RFLP на графах с ограниченной древесной шириной

В этом разделе мы рассмотрим задачу RFLP с делимыми спросами в случае, когда древесная ширина (treewidth, tw) заданного графа сети ограничена константой.

Понятие древесной ширины и его определение с помощью древесных декомпозиций было предложено Робертсоном и Сеймуром в работе [22]. Древесная декомпозиция дает представление графа в виде “укрупненного” дерева, узлы которого содержат подмножества вершин исходного графа, а ширина декомпозиции — это числовая характеристика, отражающая степень такого “укрупнения”. Древесная ширина графа — это минимальная ширина среди всех возможных его древесных декомпозиций. В частности, древесная ширина дерева равна 1, древесная ширина n -вершинной клики равна $n - 1$, а частичные k -деревья эквивалентны графам с древесной шириной не более k [8, теорема 1]. Графы с ограниченной древесной шириной часто возникают в приложениях [8; 9], при этом в таких графах для многих NP-трудных задач существуют эффективные алгоритмы динамического программирования (см., например,

обзор [7] и книгу [12, гл. 7]).

Для задачи RFLP с делимыми спросами на графах с древесной шириной 2 в работе [26] был построен алгоритм с трудоемкостью $O(nB^4)$, где n — число вершин графа, а величина $B = \min\{\sum_{k=1}^n b_k, \max_{e \in E(G)} q(e)\}$. В работе [3] исследовался частный случай задачи RFLP с делимыми спросами, нулевыми транспортными затратами и единичными стоимостями открытия предприятий и был предложен алгоритм динамического программирования с трудоемкостью $O(Nn^2 \text{tw} B^{2\text{tw}+2})$, где N — число узлов в древесной декомпозиции графа.

В этой главе мы обобщим алгоритм динамического программирования из [3] на случай задачи RFLP с делимыми спросами и произвольными стоимостями транспортировки и открытия предприятий. За счет более аккуратных вычислений в самом алгоритме и при оценке числа его операций трудоемкость алгоритма составит $O(n \text{tw}^2 B^{2\text{tw}})$. Если $\text{tw} = O(1)$, алгоритм псевдополиномиален. При $\text{tw} = 2$ его трудоемкость совпадает с трудоемкостью алгоритма из [26].

3.1. Древесная ширина и древесные декомпозиции

Введем формальные определения древесной ширины и древесной декомпозиции графа, которые потребуются нам далее.

О п р е д е л е н и е 1. *Древесная декомпозиция* $\mathbb{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ графа $G = (V, E)$ состоит из дерева T , в котором каждому узлу $t \in V(T)$ соответствует подмножество вершин исходного графа $X_t \subseteq V$ такое, что

- (1) для каждой вершины $v \in V$ найдется узел t дерева T такой, что $v \in X_t$,
- (2) для каждого ребра $\{u, v\} \in E$ найдется узел t дерева T такой, что $\{u, v\} \subseteq X_t$,
- (3) для каждой вершины $v \in V$ узлы $t \in V(T)$, для которых $v \in X_t$, образуют связное поддерево в T .

Шириной декомпозиции \mathbb{T} называется величина $w(\mathbb{T}) := \max_{t \in V(T)} |X_t| - 1$; *древесной шириной* $\text{tw}(G)$ графа G называется минимальная ширина всех его возможных древесных декомпозиций.

Нахождение древесной ширины и соответствующей древесной декомпозиции графа G является NP-трудной задачей, однако, в работе [6] был предложен алгоритм, находящий древесную декомпозицию ширины $\text{tw}(G)$ с $O(n)$ узлами за время $\text{tw}(G)^{O(\text{tw}(G)^3)} n$. Если $\text{tw}(G)$ ограничено константой, нахождение древесной декомпозиции займет линейное время.

При решении комбинаторных задач на графах с ограниченной древесной шириной, алгоритмы динамического программирования строятся по корневому дереву декомпозиции. При этом для упрощения рекуррентных соотношений зачастую удобнее использовать *хорошие древесные декомпозиции*, в которых множества вершин, соответствующие соседним узлам дерева декомпозиции, отличаются друг от друга не более, чем на одну вершину.

О п р е д е л е н и е 2. *Хорошая древесная декомпозиция (nice tree decomposition)* \mathbb{T} — это древесная декомпозиция, в которой есть один выделенный корневой узел r , причем $X_r = \emptyset$, а все остальные ее узлы принадлежат к одному из следующих типов:

- *Лист*: узел t является листом в \mathbb{T} и $X_t = \emptyset$.
- *Узел включения*: узел t в \mathbb{T} с одним сыном t_1 и $X_t = X_{t_1} \cup \{v\}$ для некоторой вершины $v \notin X_{t_1}$.
- *Узел исключения*: узел t в \mathbb{T} с одним сыном t_1 и $X_t = X_{t_1} \setminus \{v\}$ для некоторой вершины $v \in X_{t_1}$.
- *Узел слияния*: узел t в \mathbb{T} с двумя сыновьями t_1 и t_2 , где $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$.

Заметим, что в силу условия (3) в определении 1 для каждой вершины v в хорошей древесной декомпозиции есть ровно один узел исключения. Узлов включения для вершины v может быть больше одного, но они не могут быть потомками друг друга. Из произвольной древесной декомпозиции ширины w за время $O(w^2 n)$ можно получить хорошую древесную декомпозицию ширины не более w с $O(w n)$ узлами [12, лемма 7.4].

Согласно определению 1 для каждого узла t в любой древесной декомпозиции ширины w мощность $|X_t| \leq w + 1$. В дальнейшем для более аккуратного подсчета числа действий в

алгоритме динамического программирования нам потребуется следующее замечание о размере множеств X_t в хорошей древесной декомпозиции.

З а м е ч а н и е 1. Пусть \mathbb{T} — хорошая древесная декомпозиция с шириной w , тогда

(а) если t — узел исключения, то $|X_t| \leq w$;

(б) если t — узел слияния, то $|X_t| = w + 1$ тогда и только тогда, когда в T для узла t в его левом и правом поддеревьях найдутся узлы включения y_1 и y_2 соответственно, такие, что $|X_{y_1}| = |X_{y_2}| = w + 1$ и на путях между t и y_1 , t и y_2 нет узлов исключения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем (а). Если t — узел исключения, то по определению $X_t = X_{t'} \setminus \{v\}$, где $v \notin X_{t'}$, причем $|X_{t'}| \leq w + 1$, а значит, $|X_t| \leq w$.

Покажем (б) для левого (правого) поддерева узла t . Поскольку любой узел слияния t сохраняет множество X_t таким же, как было у его сыновей, то рекурсивно получим $|X_t| = |X_y|$, где y — ближайший к t узел в левом (правом) поддереве t , который не является узлом слияния.

(\Rightarrow) Если y — это узел включения такой, что $|X_y| = w + 1$, то $|X_t| = w + 1$.

(\Leftarrow) Пусть $|X_t| = w + 1$. Тогда $|X_y| = |X_t| = w + 1$. Если y — это узел исключения, получим противоречие с пунктом (а). Узел y также не может быть листом или корнем, поскольку тогда $|X_y| = 0$. Следовательно, y — узел включения. Замечание 1 доказано.

З а м е ч а н и е 2. Обходом в глубину по дереву T можно для каждого узла слияния t , в котором $|X_t| = w + 1$, найти ближайшие узлы включения y_1 и y_2 в его левом и правом поддеревьях. Для каждого узла слияния будем дополнительно хранить номера вершин j_1 и j_2 , которые добавляются в узлах y_1 и y_2 соответственно.

3.2. Псевдополиномиальный алгоритм

В этом разделе мы приведем алгоритм динамического программирования для решения задачи RFLP с делимыми спросами на графах с древесной шириной, ограниченной константой. Будем считать, что исходный n -вершинный граф G задан вместе с его хорошей древесной декомпозицией ширины $\text{tw}(G)$. В противном случае, как упоминалось в предыдущем разделе, при $\text{tw}(G) = O(1)$, древесную ширину $\text{tw}(G)$ и хорошую древесную декомпозицию с $O(\text{tw}(G)n)$ узлами можно найти за время, линейное по n .

Алгоритм динамического программирования последовательно строит частичные решения в узлах хорошей древесной декомпозиции \mathbb{T} из частичных решений в узлах-потомках. При этом нам будет достаточно рассматривать такие частичные решения, в которых суммарные потоки продукции, проходящие по ребрам или поступающие в вершины исходного графа, обладают следующими свойствами.

Утверждение 3 [26, лемма 1]. *Существует такое оптимальное решение задачи RFLP с делимыми спросами, что*

1) *каждый пункт производства не является транзитной вершиной для потоков продукта из других предприятий;*

2) *все потоки продукта, идущие через данное ребро, имеют одинаковое направление.*

Частичные решения. Каждому узлу t декомпозиции \mathbb{T} помимо подмножества вершин X_t исходного графа $G = (V, E)$ будем ставить в соответствие подграф $G_t = (V_t, E_t)$ графа G такой, что

- $V_t := \{v \in X_y \mid \text{ для всех узлов } y, \text{ являющихся потомками } t \text{ в } \mathbb{T}\} \setminus X_t$,
- $E_t = \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in V_t\}$.

Для каждого узла $t \in T$ будем вычислять частичное решение, величину $F_t[z_1, \dots, z_n]$, равную оптимальному решению задачи RFLP на подграфе G_t , если в каждую вершину $i \in X_t$ поступает дополнительный целочисленный поток продукции z_i . Если $z_i \geq 0$, считаем, что поток поступает снаружи подграфа G_t ; если $z_i \leq 0$, считаем, что поток поступает из подграфа G_t . Для вершин $i \notin X_t$ дополнительный поток $z_i = 0$. Если набор $z = (z_1, \dots, z_n)$ по каким-то причинам недопустим для узла t , то $F_t[z_1, \dots, z_n] := \infty$.

Рекуррентные соотношения. Покажем, как вычислить величины $F_t[z_1, \dots, z_n]$ для узла t каждого типа: листа, узла включения, узла слияния и узла исключения.

Лист. По определению, если $t \in T$ — лист, то $X_t = \emptyset$ и $F_t[z_1, \dots, z_n] := 0$, где допустим только набор $z = (0, \dots, 0)$.

Узел включения. Пусть t_1 — сын узла t в дереве T такой, что $X_t = X_{t_1} \cup \{i\}$, где вершина $i \notin X_{t_1}$. Поскольку $i \notin X_{t_1}$, то согласно пп. (2) и (3) определения 1 $i \notin X_y$ для всех потомков y узла t_1 , и, следовательно, вершина i не лежит в подграфе G_t и не имеет ребер, ведущих в вершины из V_t . Тогда дополнительный поток продукта z_i в вершину i не повлияет на решение задачи в подграфе G_t :

$$F_t[z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n] = F_{t_1}[z_1, \dots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \dots, z_n], \quad (3.1)$$

где допустимыми являются наборы $z \in \mathbb{Z}^n$, в которых $z_j = 0$ для всех $j \notin X_t$, $z_i \in [0, B] \cap \mathbb{Z}$ и $z_j \in [-B, B] \cap \mathbb{Z}$ для $j \in X_{t_1}$.

Узел слияния. Пусть узел t в \mathbb{T} имеет двух сыновей t_1 и t_2 , где $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$. В оптимальном решении для подграфа G_t потоки продукции, входящие в вершины X_t , должны оптимально распределяться между подграфами G_{t_1} и G_{t_2} :

$$F_t[z_1, \dots, z_n] = \min_{\alpha} \{F_{t_1}[z_1 - \alpha_1, \dots, z_n - \alpha_n] + F_{t_2}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]\}, \quad (3.2)$$

где допустимыми являются наборы $z \in \mathbb{Z}^n$, в которых $z_j = 0$ для всех $j \notin X_t$, $z_j \in [-B, B] \cap \mathbb{Z}$ для $j \in X_t$, а минимум берется по всем наборам $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ таким, что $|\alpha_j| \leq B$ и $|z_j - \alpha_j| \leq B$ для всех $i = 1, \dots, n$, и $\alpha_j = 0$ для всех вершин $j \notin X_t$. В случае $|X_t| = tw + 1$ будем дополнительно полагать $\alpha_{j_1} = z_k$, $\alpha_{j_2} = 0$, где j_1 и j_2 номера вершин из замечания 2, хранящиеся для узла слияния t .

Поясним дополнительные условия на наборы α при $|X_t| = tw + 1$. В этом случае согласно замечанию 1 ближайшие к t узлы в левом и правом поддеревьях T с корнем t , не являющиеся узлами слияния, есть узлы включения y_1 и y_2 , причем $|X_{y_1}| = |X_{y_2}| = tw + 1$. Согласно замечанию 2 нам известны вершины j_1 и j_2 , добавленные в этих узлах. Тогда в вершину j_1 в подграфе G_{t_1} достаточно отправить поток величины 0, поскольку,

○ если y_1 — сын узла t , то для любого потока z_{j_1} в вершину j_1 выполняется (3.1);

○ если в кратчайшем пути от узла t к узлу y_1 в дереве T есть узел слияния $s \neq t$, за счет перераспределения потоков в (3.2) все допустимые величины потоков для поддерева, не содержащего y_1 , тем не менее будут рассмотрены.

Аналогичные рассуждения верны для вершины j_2 в подграфе G_{t_2} .

Узел исключения. Пусть узел t в \mathbb{T} имеет одного сына t_1 и $X_t = X_{t_1} \setminus \{i\}$ для вершины $i \in X_{t_1}$. Поскольку $i \notin X_t$, согласно определению 1 все ребра, инцидентные вершине i в графе G , находятся в подграфе G_t или ведут в вершины из X_t . При исключении вершины i принимается решение о том, открывать в ней предприятие или нет, и перераспределяются потоки, идущие через i . Обозначим $V_i := \{j \in X_{t_1} \mid \{i, j\} \in E\}$. Тогда

$$F_t[z_1, \dots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \dots, z_n] = \min\{Y(z), N(z)\},$$

где

$$\begin{aligned} Y(z) &= \min_{\alpha} \left\{ f_i + \sum_{j \in V_i} c(i, j) |\alpha_j| + F_{t_1}[z_1 + \alpha_1, \dots, z_i, \dots, z_n + \alpha_n] \right\}, \\ N(z) &= \min_{\alpha} \left\{ \sum_{j \in V_i} c(i, j) |\alpha_j| + F_{t_1}[z_1 - \alpha_1, \dots, z_i, \dots, z_n - \alpha_n] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

где допустимыми являются наборы $z \in \mathbb{Z}^n$, в которых $z_j = 0$ для всех $j \notin X_t$, $z_j \in [-B, B] \cap \mathbb{Z}$ для $j \in X_t$. Минимум в $Y(z)$ берется по всем наборам $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ таким, что $\alpha_j = 0$ для всех $j \notin V_i$, $0 \leq \alpha_j \leq \min\{q(i, j), B\}$ для всех $j \in V_i$. Минимум в $N(z)$ берется по всем

наборам $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ таким, что $\alpha_j = 0$ для всех $j \notin V_i \cup \{i\}$, $|\alpha_j| \leq \min\{q(i, j), B\}$ для всех $j \in V_i$, и $\alpha_i \in [-B, B]$ такое, что $\sum_{j \in V_i} \alpha_j - b_i \geq \alpha_i$. Если для фиксированного набора z наборов α с требуемыми свойствами нет, то $F_t[z_1, \dots, z_n] := \infty$.

Здесь $Y(z)$ — это стоимость частичного решения, в котором в вершине i открывается предприятие, и в каждую вершину $j \in X_t$, смежную с i , по ребру $\{i, j\}$ добавляется допустимый поток величины $\alpha_j \geq 0$. Соответственно, $N(z)$ это стоимость частичного решения, в котором в вершине i не открывается предприятие, а из каждой вершины $j \in X_t$, смежной с i , по ребру $\{i, j\}$ в i направляется допустимый поток величины α_j , из поддерева G_t в i направляется дополнительный поток α_i и сумма всех потоков в i позволяет удовлетворить спрос b_i .

Теорема 1. *Для задачи RFLP на графах с фиксированной древесной шириной tw существует псевдополиномиальный алгоритм решения с трудоемкостью $O(n B^{2tw})$, где величина $B = \min\{\sum_{k=1}^n b_k, \max_{e \in E(G)} q(e)\}$.*

Доказательство. При заданной хорошей древесной декомпозиции графа ширины tw алгоритм работает следующим образом.

Для каждого узла $t \in T$ вычислим значения $F_t[z_1, \dots, z_n]$, соответствующие оптимальным частичным решениям в поддереве G_t , для каждого допустимого набора $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$. Оптимальное значение целевой функции задачи RFLP в исходном графе G будет лежать в $F_r[0, \dots, 0]$.

Оценим время работы алгоритма. На предварительном шаге за время $O(tw n)$ для всех узлов слияния найдем величины из замечания 2. Оценим время, требующееся для вычисления величин $F_t[z_1, \dots, z_n]$ для всех допустимых наборов $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ в узле каждого типа.

Если t — узел включения, то $|X_t| \leq tw + 1$, и для вычисления всех величин $F_t[z_1, \dots, z_n]$ согласно (3.1) потребуется время $O(B^{tw+1})$.

Если t — узел слияния и $|X_t| \leq tw$, то в (3.2) необходимо просмотреть $O(B^{tw})$ наборов α для каждого из $O(B^{tw})$ наборов z ; если $|X_t| = tw + 1$, то потребуется просмотреть $O(B^{tw-1})$ наборов α для каждого из $O(B^{tw+1})$ наборов z . На проверку допустимости каждой пары наборов α и z потребуется время $O(tw)$. Суммарно обработка узла слияния занимает время $O(tw B^{2tw})$.

Если t — узел исключения, то $|X_t| \leq tw$ в силу замечания 1, в (3.3) необходимо просмотреть $O(B^{tw})$ наборов α для каждого из $O(B^{tw})$ наборов z . На проверку допустимости каждой пары наборов α и z потребуется время $O(tw)$. Суммарно обработка узла исключения занимает время $O(tw B^{2tw})$.

Поскольку в T всего $O(n tw)$ узлов, решение исходной задачи восстанавливается обратным ходом по узлам дерева T за время $O(tw n B)$, а общее время работы алгоритма динамического программирования при фиксированном $tw = O(1)$ составляет $O(n B^{2tw})$.

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Пользуясь сведением из [14, разд. 2], можно за время $O(n)$ свести пример задачи RCFLP (Restricted Capacitated Facility Location Problem), в которой кроме ограничений на пропускные способности ребер (1.3) заданы еще и ограничения на производственные мощности предприятий, на графе G к примеру задачи RFLP на графе G' , при этом $tw(G) = tw(G')$ и $|V(G')| \leq 2|V(G)|$. Таким образом, предложенный выше алгоритм можно использовать для получения решений задачи RCFLP с теми же оценками трудоемкости.

4. Задача RFLP с делимыми спросами на путевом графе

В предыдущих разделах мы показали, что хотя задача RFLP с *делимыми спросами* NP-трудна даже на графах с древесной шириной $tw = 1$, она может быть решена за псевдополиномиальное время, если $tw = O(1)$. Для более простого случая задачи RFLP с *делимыми спросами* на путевом графе известен полиномиальный алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ [14]. В этом разделе мы покажем, что задача RFLP с делимыми спросами на путевом графе может быть решена за время $O(n)$.

Для решения нашей задачи адаптируем алгоритм из работы [17], который решает неограниченную задачу размещения (1.1), (1.2), (1.4) на путевом графе за время $O(n)$. Алгоритм из [17] в свою очередь опирается на следующий результат из работы [27].

О п р е д е л е н и е 3. Функция $h: \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ *вогнутая*, если для любых $1 \leq i_1 < i_2 < j_1 < j_2 \leq n$

$$h(i_1, j_1) + h(i_2, j_2) \leq h(i_1, j_2) + h(i_2, j_1). \quad (4.1)$$

Утверждение 4 [27, разд. 3–4]. *Существует алгоритм, находящий за время $O(n)$ решение одномерных динамических программ вида*

$$H(j) = \min_{1 \leq i \leq j} \{H(i) + h(i, j)\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

если функция $h(i, j)$ вогнутая, и значение функции $h(i, j)$ для каждой пары $1 \leq i < j \leq n$ можно получить за время $O(1)$.

Далее в разд. 4.1 мы опишем основные идеи алгоритма из [17], в разд. 4.2 покажем, как на основе этих идей получить решение задачи RFLP с делимыми спросами на путевом графе за время $O(n)$.

4.1. Алгоритм для неограниченной задачи размещения на путевом графе

Рассмотрим неограниченную задачу размещения на путевом графе. Пусть $V = \{1, \dots, n\}$ — вершины заданного пути $G = (V, E)$. *Отрезком $[j, k]$* будем называть простой подпуть в G из вершины j в вершину k . Введем функцию $w(j, k)$, определенную для $1 \leq j < k \leq n$, равную суммарным транспортным затратам на обслуживание всех клиентов отрезка $[j, k]$ из вершины j , и функцию $\bar{w}(j, k)$, равную суммарным транспортным затратам на обслуживание всех клиентов отрезка $[j, k]$ из вершины k :

$$w(j, k) = \sum_{t=j}^k b_t g_{tj}, \quad \bar{w}(j, k) = \sum_{t=j}^k b_t g_{tk}, \quad 1 \leq j < k \leq n. \quad (4.2)$$

Для фиксированной пары $j < k$ значение $w(j, k)$ и $\bar{w}(j, k)$ можно получать за время $O(1)$, если предварительно провести следующие вычисления.

Утверждение 5 [17, разд. 2]. *Пусть $B_j = \sum_{t=1}^j b_t$, $C_1 = 0$ и $C_j = \sum_{t=2}^j c_{t-1,t}$, $D_j = \sum_{t=1}^j b_t C_t$ для всех $j = 1, \dots, n$. Все эти величины можно вычислить рекурсивно за общее время $O(n)$. Тогда*

$$w(j, k) = D_k - D_{j-1} - (B_k - B_j)C_j, \quad \bar{w}(j, k) = -D_k + D_{j-1} + (B_k - B_j)C_k.$$

Утверждение 6 [17, лемма 1]. *Функции $w(j, k)$ и $\bar{w}(j, k)$ вогнутые.*

Через $F(j)$ обозначим оптимальное решение подзадачи на вершинах $\{j, j+1, \dots, n\}$ для $1 \leq j \leq n$. Через $G(j)$ обозначим оптимальное решение подзадачи на вершинах $\{j, j+1, \dots, n\}$ такое, что в вершине j открыто предприятие. Тогда верны следующие рекуррентные соотношения [17]: для каждого $j = n, \dots, 1$

$$G(j) = f_j + \min_{j < k \leq n+1} \{w(j, k) + F(k)\}, \quad F(j) = \min_{j \leq k \leq n} \{\bar{w}(j, k) + G(k)\}, \quad (4.3)$$

и величина $F(1)$ соответствует оптимуму целевой функции исходной задачи. Обратным ходом можно восстановить решение за время $O(n)$.

Поскольку функции $w(j, k)$ и $\bar{w}(j, k)$ вогнутые, умея получать их значения за $O(1)$, согласно утверждению 2, с помощью алгоритма из [27] можно вычислить значения $F(j)$ и $G(j)$ для всех j за суммарное время $O(n)$. Учитывая трудоемкость предварительных построений для быстрого вычисления величин $w(j, k)$ и $\bar{w}(j, k)$, а также трудоемкость обратного хода, суммарное время работы данного алгоритма для неограниченной задачи размещения на путевом графе составляет $O(n)$ [17].

4.2. Лине́йный алгоритм для задачи RFLP на путевом графе

В этом разделе покажем, как за время $O(n)$ свести задачу RFLP с делимыми спросами на путевом графе к решению динамической программы, аналогичной (4.3), с вогнутыми слагаемыми.

Согласно утверждению 3 для задачи RFLP с делимыми спросами существует оптимальное решение, в котором все потоки продукта по ребру имеют одинаковое направление. Легко заметить, что для задачи на путевом графе такое оптимальное решение будет *центрально-связным*, т. е. будет разбивать путь на отрезки, в каждом из которых открыто ровно одно предприятие, полностью обслуживающее всех клиентов этого отрезка, за исключением, быть может, клиентов в крайних вершинах отрезка. Далее для задачи будем искать именно центрально-связные решения.

Для каждой вершины $i = 1, \dots, n$, в которой $f_i < \infty$, определим *границы возможной области обслуживания*, т. е. самую левую и самую правую вершины $\ell_i \leq i \leq r_i$ такие, что ограничения на пропускные способности ребер позволяют предприятию, открытому в i , полностью удовлетворить спрос всех клиентов на отрезке $[\ell_i, r_i]$, после чего у него еще останется возможность доставить $\alpha_i \in [0, b_{\ell_i-1})$ единиц продукта клиенту в вершине $\ell_i - 1$ и $\beta_i \in [0, b_{r_i+1})$ единиц продукта клиенту в вершине $r_i + 1$. Границу области обслуживания ℓ_i (r_i) будем называть *строгой*, если $\alpha_i = 0$ ($\beta_i = 0$), и *нестрогой*, в ином случае.

Лемма 1. *Номера вершин ℓ_i и r_i , а также величины α_i и β_i для всех $i = 1, \dots, n$ можно найти суммарно за время $O(n)$.*

Доказательство. Покажем, как, двигаясь от вершины 1 к вершине n , вычислить величины r_i и β_i за время $O(n)$. Аналогичным способом, двигаясь от n к 1, можно вычислить все величины ℓ_i и α_i .

Заметим, что $r_{i+1} \geq r_i$ для любого $i = 1, \dots, n - 1$, поскольку если ограничения на пропускные способности ребер позволяют из вершины i полностью обслужить отрезок $[i, r_i]$, то и из вершины $i + 1$ возможно полностью обслужить отрезок $[i + 1, r_i]$. Воспользуемся этим свойством в процедуре поиска величин r_i и β_i . В процедуре последовательно просматриваются вершины i пути G , и для каждого $j > i$ проверяется, возможно ли из вершины i в дополнение к обслуженному отрезку $[i, j - 1]$ обслужить клиента в j . Если возможно, процедура переходит к проверке клиента $j + 1$, если нет, то величина r_i найдена, и нужно проверять, возможно ли обслужить клиента j из вершины $i + 1$.

Приведем формальное описание процедуры. Пусть, как и раньше, $B_j := \sum_{t=1}^j b_t$. Для пары вершин $i < j$ через $\text{dif}_{i,j} \geq 0$ обозначим величину, на которую можно увеличить поток продукции из вершины i после того как из i полностью обслужены клиенты отрезка $[i, j - 1]$:

$$\text{dif}_{i,j} = \min_{i < j' < j} \{q(\{j' - 1, j'\}) - (B_j - B_{j'-1})\} = \min_{i < j' < j} \{q(\{j' - 1, j'\}) + B_{j'-1}\} - B_j.$$

В работе [5, разд. 4–5] показано, что для заданного массива $A[1, \dots, n]$, потратив на предобработку массива время $O(n)$, можно за время $O(1)$ находить номер минимального элемента в подмассиве $A[i, i + 1, \dots, j]$. Используя алгоритм из [5] для массива с элементами $A[j'] = q(\{j' - 1, j'\}) + B_{j'-1}$, $j' = 1, \dots, n$, для каждой пары $i < j$ значение $\text{dif}_{i,j}$ можно вычислить за время $O(1)$.

Процедура вычисления r_i и β_i .

1. Положим $r_k := n$, $\beta_k := 0$, $B_0 := 0$, $B_k := B_{k-1} + b_k$ для всех $1 \leq k \leq n$, а также $i := 1$, $j := 2$.
2. Вычислим элементы массива A и выполним его предобработку алгоритмом из [5].
3. Пока $j \leq n$ и $i < n$:
 4. Если $b_j \leq \text{dif}_{i,j}$ и $b_j \leq q(\{j - 1, j\})$, то $j := j + 1$.
 5. Иначе: $r_i := j - 1$, $\beta_i := \min\{\text{dif}_{i,j}, q(\{j - 1, j\})\}$ и $i := i + 1$.

Шаги 1, 2 выполняются за время $O(n)$. На каждой итерации цикла (3–5) либо j , либо i увеличивается на 1, поэтому общее число итераций не превосходит $2n$. Все действия внутри одной итерации цикла требуют $O(1)$ времени. Таким образом, трудоемкость процедуры равна $O(n)$.

Лемма 2. *Если для каждой вершины известны границы областей обслуживания, пример исходной задачи RFLP на путевом графе с n вершинами можно за время $O(n)$ свести к эквивалентному примеру задачи RFLP на путевом графе с $O(n)$ вершинами, в которой $\alpha_i = \beta_i = 0$ для каждой вершины i .*

Доказательство. Для каждой вершины $i = 1, \dots, n$ выполним следующее. Если $\alpha_i > 0$, уменьшим спрос в вершине $\ell_i - 1$ на α_i и добавим в путевом графе между вершинами ℓ_i и $\ell_i - 1$ вершину v_i со спросом α_i и бесконечной стоимостью открытия предприятия. Стоимость транспортировки единицы товара по ребру $\{v_i, \ell_i\}$ и его пропускную способность положим такими же, как были у ребра $\{\ell_i - 1, \ell_i\}$, а для ребра $\{\ell_i - 1, v_i\}$ положим $c(\{\ell_i - 1, v_i\}) = 0$ и $q(\{\ell_i - 1, v_i\}) = \infty$. Аналогичным образом, если $\beta_i > 0$, уменьшим спрос в вершине $r_i + 1$ на β_i и добавим между вершинами r_i и $r_i + 1$ вершину u_i со спросом β_i и бесконечной стоимостью открытия предприятия. Таким образом, вершины v_i и u_i — это новые строгие границы области обслуживания для вершины i .

В ходе описанной выше процедуры для каждой вершины исходного графа было добавлено не более двух дополнительных вершин, поэтому общее число вершин теперь не превосходит $3n$. Кроме того, поскольку в задаче спросы делимые, очевидно, что для любого допустимого решения исходного примера существует допустимое решение той же стоимости в новом примере, и наоборот.

Лемма 3. *Для задачи RFLP с делимыми спросами на путевом графе, в которой для каждой вершины i границы возможного интервала обслуживания строгие ($\alpha_i = \beta_i = 0$), существует центрально-связное оптимальное решение, в котором спрос каждого клиента обслуживается ровно одним предприятием.*

Доказательство. Рассмотрим пример задачи RFLP с делимыми спросами на путевом графе, в которой для каждой вершины i выполняется $\alpha_i = \beta_i = 0$. Пусть (S, x) — оптимальное центрально-связное решение этой задачи. Пусть $i_1, i_2 \in S$ — два последовательных предприятия в этом решении такие, что $i_1 < j < i_2$, i_1 обслуживает всех клиентов отрезка $[i_1, j - 1]$ и часть $b \in [0, b_j]$ спроса клиента j , а i_2 обслуживает всех клиентов отрезка $[j + 1, i_2]$ и часть $(b_j - b)$ спроса клиента j . Тогда суммарные затраты на обслуживание клиента j в этом решении составляют

$$b \sum_{k=i_1+1}^j c(\{k-1, k\}) + (b_j - b) \sum_{k=j+1}^{i_2-1} c(\{k-1, k\}),$$

где $0 \leq b \leq b_j$. Это линейная по b функция, следовательно, она достигает своего минимума либо при $b = b_j$, либо при $b = 0$, что соответствует полному обслуживанию спроса клиента j либо из i_1 , либо из i_2 . Для каждой из вершин i_1 и i_2 по условию леммы 3 границы интервалов обслуживания строгие, и в решении (S, x) каждая из них частично обслуживает j . Следовательно, у каждой из них есть возможность обслужить вершину j полностью. Значит, найдется решение (S, x') , стоимость которого не больше стоимости решения (S, x) и в котором все клиенты отрезка $[i_1, i_2]$ обслуживаются ровно одним предприятием. Проведя аналогичные рассуждения для каждой пары последовательных предприятий $i_1, i_2 \in S$, получим оптимальное центрально-связное решение (S, x'') , в котором спрос каждого клиента обслуживается ровно одним предприятием.

Теорема 2. *Для задачи RFLP с делимыми спросами на путевом графе существует точный алгоритм, работающий за время $O(n)$.*

Доказательство. Центральное-связное оптимальное решение задачи найдем следующим образом. Пусть $G = (V, E)$ — исходный путевой граф с вершинами $V = \{1, \dots, n\}$. За время $T_1 = O(n)$ с помощью процедуры из леммы 1 для каждой вершины $i \in V$ найдем величины $\ell_i, r_i, \alpha_i, \beta_i$. За время $T_2 = O(n)$ с помощью процедуры из леммы 2 построим эквивалентный пример на путевом графе $G' = (V', E')$, где $|V'| = O(n)$ и для каждой вершины $i \in V'$ величины $\alpha_i = \beta_i = 0$. Далее покажем, что решение задачи в графе G' может быть получено алгоритмом динамического программирования, аналогичным (4.3).

Согласно лемме 3 для задачи на графе G' существует центральное-связное оптимальное решение, в котором спрос каждого клиента обслуживается ровно одним предприятием. В таком решении каждая вершина i обслуживает некоторый отрезок $[j'_i, j''_i] \subseteq [\ell_i, r_i]$, причем суммарные транспортные затраты на обслуживание $[j'_i, j''_i]$ из i равны $w(i, j'_i) + \bar{w}(j''_i, i)$, где величины $w(i, j'_i)$ и $\bar{w}(j''_i, i)$ определяются согласно (4.2). В центральное-связном решении задачи RFLP обслуживание клиента $j \notin [\ell_i, r_i]$ из i невозможно, в этом случае транспортные затраты можно считать равными ∞ . Введем функции $w'(j, k)$ и $\bar{w}'(j, k)$, определяющиеся через функции из (4.2): для $j, k \in V'$

$$w'(j, k) = \begin{cases} w(j, k), & \text{если } k \leq r_j, \\ \infty, & \text{иначе;} \end{cases} \quad \bar{w}'(j, k) = \begin{cases} \bar{w}(j, k), & \text{если } j \geq \ell_k, \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Согласно утверждению 5 с помощью предварительных вычислений, требующих $T_3 = O(n)$ времени, для произвольной пары $j < k$ значения $w'(j, k)$ и $\bar{w}'(j, k)$ можно получать за время $O(1)$. Покажем, что функции $w'(j, k)$ и $\bar{w}'(j, k)$ вогнуты. Допустим, на наборе $1 \leq j_1 < j_2 < k_1 < k_2 \leq |V'|$ для функции $w'(j, k)$ не выполняется условие вогнутости (4.1), т. е.

$$w'(j_1, k_1) + w'(j_2, k_2) > w'(j_1, k_2) + w'(j_2, k_1). \quad (4.5)$$

Если в (4.5) все слагаемые $< \infty$, получим противоречие с утверждением 6 для функции $w(j, k)$. Если $w'(j_1, k_2) = \infty$ или $w'(j_2, k_1) = \infty$, получим противоречие со строгостью неравенства (4.5). Если $w'(j_2, k_2) = \infty$ или $w'(j_1, k_1) = \infty$, то из определения (4.4) следует $w'(j_1, k_2) = \infty$, что снова противоречит строгости неравенства (4.5). Следовательно, функция $w'(j, k)$ вогнутая. Вогнутость $\bar{w}'(j, k)$ доказывается аналогично.

Наконец, в графе G' оптимальное центральное-связное решение задачи RFLP, в котором спрос каждого клиента обслуживается ровно одним предприятием, можно найти по аналогии с (4.3) путем решения динамической программы: для каждого $j = |V'|, \dots, 1$

$$G(j) = f_j + \min_{j < k \leq n+1} \{w'(j, k) + F(k)\}, \quad F(j) = \min_{j \leq k \leq n} \{\bar{w}'(j, k) + G(k)\}. \quad (4.6)$$

Поскольку $w'(j, k)$ и $\bar{w}'(j, k)$ вогнуты и каждое значение для них можно вычислить за время $O(1)$, решение (4.6) может быть найдено за время $T_4 = O(n)$ согласно [17; 27]. Из этого решения за время $T_5 = O(n)$ очевидным образом восстанавливается решение исходной задачи в графе G . Таким образом, общее время работы алгоритма решения исходной задачи составляет $T_1 + \dots + T_5 = O(n)$. Теорема 2 доказана.

Подход из теоремы 2 можно адаптировать для решения задачи p -RFLP с делимыми спросами, в решении которой должно быть открыто не более p предприятий, а также для некоторых частных случаев задачи RFLP с неделимыми спросами на путевом графе.

Следствие 1. Для задачи p -RFLP с делимыми спросами на n -вершинном путевом графе существует точный алгоритм со временем работы $O(pn)$.

Доказательство. Достаточно в алгоритме из теоремы 2 вместо рекуррентных соотношений (4.3) использовать соотношения из [17] для p -RFLP: для каждого $j = |V'|, \dots, 1$ и каждого $i = 1, \dots, p$

$$G^i(j) = f_j + \min_{j < k \leq n+1} \{w'(j, k) + F^{i-1}(k)\}, \quad F^i(j) = \min_{j \leq k \leq n} \{\bar{w}'(j, k) + G^i(k)\}.$$

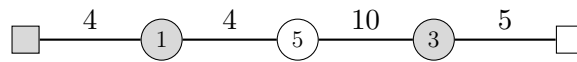


Рис. 2. Пример задачи RFLP с неделимыми спросами, в котором единственное допустимое решение не центрально-связно. Квадратами обозначены вершины, в которых стоимость открытия предприятий меньше ∞ , в круглых вершинах указан спрос клиентов, над ребрами указаны их пропускные способности. В решении серое предприятие обслуживает клиентов в серых вершинах, а белое — в белых.

Как было показано в утверждении 2, задача RFLP с неделимыми спросами на путевом графе NP-трудна. Легко заметить, что центрально-связных оптимальных решений для этой задачи может не быть (см. рис. 2). Однако в тех случаях, когда для задачи RFLP с неделимыми спросами существуют центрально-связные оптимальные решения, их можно найти с помощью алгоритма из теоремы 2, в котором пропускается шаг из леммы 2.

Следствие 2. *Задача RFLP с неделимыми спросами на путевом графе с n вершинами может быть решена за время $O(n)$, если*

- *спросы всех клиентов одинаковые или*
- *для всех вершин i границы областей обслуживания строгие ($\alpha_i = \beta_i = 0$) в терминах, введенных для задачи RFLP с делимыми спросами.*

Заключение

В работе рассматривались частные случаи задачи RFLP на путевых графах и графах с ограниченной древесной шириной и исследовалась возможность их точного решения. Положительные алгоритмические результаты были получены для задачи RFLP с делимыми спросами. Эта задача слабо NP-трудна даже на простейших типах деревьев, однако, для нее удалось построить псевдополиномиальный алгоритм на графах с ограниченной древесной шириной и линейный алгоритм на путевых графах. С другой стороны, мы показали, что задача RFLP с неделимыми спросами сильно NP-трудна на деревьях и NP-трудна на путевых графах, хотя при некоторых ограничениях на значения пропускных способностей или спросы клиентов RFLP с неделимыми спросами на путевых графах может быть решена за линейное время. Вопрос о существовании псевдополиномиального алгоритма для задачи RFLP с неделимыми спросами на путевом графе в общем случае остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Adamaszek A., Chalermsook P., Ene A., Wiese A.** Submodular unsplittable flow on trees // *Math. Program.* 2018. Vol. 172. P. 565–589. doi: 10.1007/s10107-017-1218-4.
2. **Ageev A. A.** A criterion of polynomial-time solvability for the network location problem // *Integer Programming and Combinatorial Optimization. Proc. IPCO II Conf. Campus Printing. Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 1992. P. 237–245.*
3. **Andreev K., Garrod C., Golovin D., Maggs B., Meyerson A.** Simultaneous source location // *ACM Trans. Algorithms.* 2010. Vol. 6, no. 1. P. 16:1–16:17. doi: 10.1145/1644015.1644031.
4. **Arata K., Iwata S., Makino K., Fujishige S.** Locating sources to meet flow demands in undirected networks // *J. Algorithms.* 2002. Vol. 42. P. 54–68. doi: 10.1006/jagm.2001.1203.
5. **Bender M. A., Farach-Colton M.** The LCA problem revisited // *4th Latin American Symposium on Theoretical Informatics (LATIN). 2000. Lecture Notes in Computer Science; vol. 1776. P. 88–94. doi: 10.1007/10719839_9.*
6. **Bodlaender H. L.** A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth // *SIAM J. Computing.* 1996. Vol. 25, no. 6. P. 1305–1317. doi: 10.1137/S0097539793251219.
7. **Bodlaender H. L.** Treewidth: Algorithmic techniques and results // *Proc. of the 22nd Internat. Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'97). Berlin, Heidelberg: Springer, 1997. P. 19–36. doi: 10.1007/BFb0029946.*

8. **Bodlaender H. L.** A partial k -arboretum of graphs with bounded treewidth // Theoretical Computer Science. 1998. Vol. 209, iss. 1–2. P. 1–45. doi: 10.1016/S0304-3975(97)00228-4.
9. **Bodlaender H. L.** Treewidth: Characterizations, applications, and computations // Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2006) / ed. F.V. Fomin. Lecture Notes in Computer Science; vol. 4271. 2006. P. 1–14. doi: 10.1007/11917496_1.
10. **Chekuri C., Ene A., Korula N.** Unsplittable flow in paths and trees and column-restricted packing integer programs // Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques (APPROX 2009, RANDOM 2009) / eds. I. Dinur et al. 2009. Lecture Notes in Computer Science; vol. 5687. P. 42–55. doi: 10.1007/978-3-642-03685-9_4.
11. **Cornuéjols G., Nemhauser G. L., Wolsey L. A.** The uncapacitated facility location problem // Discrete location theory / eds. P. B. Mirchandani and R. L. Francis. N Y: Wiley, 1990. P. 119–171.
12. **Cygan M., Fomin F.V., Kowalik L., Lokshtanov D., Marx D., Pilipczuk M., Pilipczuk M., Saurabh S.** Parameterized algorithms. Cham: Springer, 2015. 613 p. doi: 10.1007/978-3-319-21275-3.
13. **Dinitz Y., Garg N., Goemans M.X.** On the single-source unsplittable flow problem // Proc. 39th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. Palo Alto, CA, USA, 1998. P.290–299. doi: 10.1109/SFCS.1998.743461.
14. **Gimadi E. Kh., Kurochkina A., Tsidulko O.** On exact solvability of the restricted capacitated facility location problem // CEUR-WS. 2017. Vol. 1987. P. 209–216.
15. **Granot D., Skorin-Kapov D.** On some optimization problems on k -trees and partial k -trees // Discrete Appl. Math. 1994. Vol. 48, no 2. P. 129–145. doi: 10.1016/0166-218X(92)00122-3.
16. **Guruswami V., Khanna S., Rajaraman R., Shepherd B., Yannakakis M.** Near-optimal hardness results and approximation algorithms for edge-disjoint paths and related problems // J. Computer System Sci. 2003. Vol. 67, no. 3, P. 473–496. doi: 10.1016/S0022-0000(03)00066-7.
17. **Hassin R., Tamir A.** Improved complexity bounds for location problems on the real line // Operations Research Letters. 1991. Vol. 10, no. 7. P. 395–402. doi: 10.1016/0167-6377(91)90041-M.
18. **Kleinberg J.M.** Approximation algorithms for disjoint paths problems // Ph.D. dissertation. M.I.T. 1996. 188 p.
19. **Koivisto M., Manila H., Perola M., Varilo T., Henna W., Ekelund J., Lukk M., Peltonen L., Ukkonen E.** An MDL method for finding haplotype blocks and for estimating the strength of block boundaries // Pacific Symposium on Biocomputing, 2003. P. 502–513. doi: 10.1142/9789812776303_0047.
20. **Laporte G., Nickel S., Saldanha da Gama F.** Location science. Switzerland: Springer Intern. Publ., 2015. 650 p.
21. **Lazic N., Givoni I. E., Frey B. J., Aarabi P.** FLoSS: Facility location for subspace segmentation // IEEE 12th Intern. Conf. on Computer Vision. Kyoto, 2009. P. 825–832. doi: 10.1109/ICCV.2009.5459302.
22. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width. // J. Algorithms. 1986. Vol 7, no. 3, P. 309–322. doi: 10.1016/0196-6774(86)90023-4.
23. **Shah R., Farach-Colton M.** Undiscretized dynamic programming: Faster algorithms for facility location and related problems on trees // Proc. of the thirteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (SODA). 2002. P. 108–115.
24. **Turner L., Gross D. P., Hamacher H. W., Krumke S. O.** Static and dynamic source locations in undirected networks // TOP. Vol. 23. 2015. P. 619–646. doi: 10.1007/s11750-015-0395-7.
25. **Вознюк И. П.** Задача размещения на сети с ограниченными пропускными способностями коммуникаций // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 1999. Т. 6, вып. 1. С. 3–11.
26. **Вознюк И. П.** Задача размещения пунктов производства на два-дереве с ограниченными пропускными способностями коммуникаций // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, вып. 1. С. 3–8.
27. **Wilber R.** The concave least-weight subsequence problem revisited // J. Algorithms. 1988. Vol. 9. P. 418–425. doi 10.1016/0196-6774(88)90032-6.

Поступила 24.03.2020

После доработки 14.05.2020

Принята к публикации 18.05.2020

главный науч. сотрудник
Институт математики им С. Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

Цидулко Оксана Юрьевна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики им С. Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск
e-mail: tsidulko@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Adamaszek A., Chalermsook P., Ene A., Wiese A. Submodular unsplitable flow on trees. *Math. Program.* 2018, vol. 172, pp. 565–589. doi: 10.1007/s10107-017-1218-4.
2. Ageev A. A. A criterion of polynomial-time solvability for the network location problem. *Integer Programming and Combinatorial Optimization. Proc. IPCO II Conf.* Campus Printing. Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 1992, pp. 237–245.
3. Andreev K., Garrod C., Golovin D., Maggs B., Meyerson A. Simultaneous source location *ACM Trans. Algorithms*, 2010, vol. 6, no. 1, pp. 16:1–16:17. doi: 10.1145/1644015.1644031.
4. Arata K., Iwata S., Makino K., Fujishige S. Locating sources to meet flow demands in undirected networks. *J. Algorithms*, 2002, vol. 42, pp. 54–68. doi: 10.1006/jagm.2001.1203.
5. Bender M. A., Farach-Colton M. The LCA problem revisited. *4th Latin American Symposium on Theoretical Informatics (LATIN)*. 2000, LNCS; vol. 1776, pp. 88–94. doi: 10.1007/10719839_9.
6. Bodlaender H. L. A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. *SIAM J. on Computing*, 1996, vol. 25, no. 6, pp. 1305–1317. doi: 10.1137/S0097539793251219.
7. Bodlaender H. L. Treewidth: Algorithmic techniques and results. In: *Proceedings of the 22nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'97)*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1997, pp. 19–36. doi: 10.1007/BFb0029946
8. Bodlaender H. L. A partial k -arboretum of graphs with bounded treewidth. *Theoretical Computer Science*, 1998, vol. 209, no. 1–2, pp. 1–45. doi: 10.1016/S0304-3975(97)00228-4.
9. Bodlaender H. L. Treewidth: Characterizations, applications, and computations. In: F. V. Fomin (ed.), *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2006)*. 2006, Lecture Notes in Computer Science; vol 4271, pp. 1–14. doi: 10.1007/11917496_1.
10. Chekuri C., Ene A., Korula N. (2009) Unsplitable flow in paths and trees and column-restricted packing integer programs. In: Dinur I. et al. (eds), *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques (APPROX 2009, RANDOM 2009)*. 2009. Lecture Notes in Computer Science; vol. 5687, pp. 42–55. doi: 10.1007/978-3-642-03685-9_4.
11. Cornuéjols G., Nemhauser G. L., Wolsey L. A. The uncapacitated facility location problem. *Discrete location theory*. Mirchandani P. B. and Francis R. L. (eds). N Y: Wiley, 1990, pp. 119–171.
12. Cygan M., Fomin F. V., Kowalik L., Lokshtanov D., Marx D., Pilipczuk M., Pilipczuk M., Saurabh S. *Parameterized algorithms*. Cham: Springer, 2015, 613 p. doi: 10.1007/978-3-319-21275-3.
13. Dinitz Y., Garg N., Goemans M. X. On the single-source unsplitable flow problem. *Proc. 39th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. Palo Alto, CA, USA, 1998, pp. 290–299. doi: 10.1109/SFCS.1998.743461.
14. Gimadi E. Kh., Kurochkina A., Tsidulko O. On exact solvability of the restricted capacitated facility location problem. *CEUR-WS*, 2017, vol. 1987, pp. 209–216.
15. Granot D., Skorin-Kapov D. On some optimization problems on k -trees and partial k -trees. *Discrete Appl. Math.*, 1994, vol. 48, no. 2, pp. 129–145. doi: 10.1016/0166-218X(92)00122-3.
16. Guruswami V., Khanna S., Rajaraman R., Shepherd B., Yannakakis M. Near-optimal hardness results and approximation algorithms for edge-disjoint paths and related problems. *J. Computer and System Sciences*, 2003, vol. 67, no. 3, pp. 473–496. doi: 10.1016/S0022-0000(03)00066-7.

17. Hassin R., Tamir A. Improved complexity bounds for location problems on the real line. *Operations Research Letters*, 1991, vol. 10, no. 7, pp. 395–402. doi: 10.1016/0167-6377(91)90041-M.
18. Kleinberg J.M. *Approximation algorithms for disjoint paths problems*. Ph.D. dissertation, M.I.T., 1996, 188 p.
19. Koivisto M., Manila H., Perola M., Varilo T., Hennah W., Ekelund J., Lukk M., Peltonen L., Ukkonen E. An MDL method for finding haplotype blocks and for estimating the strength of block boundaries. In: *Pacific Symposium on Biocomputing*, 2003, pp. 502–513. doi: 10.1142/9789812776303_0047.
20. Laporte G., Nickel S., Saldanha da Gama F. *Location science*. Switzerland: Springer Intern. Publ., 2015, 650 p.
21. Lasic N., Givoni I. E., Frey B. J., Aarabi P. FLoSS: Facility location for subspace segmentation. *IEEE 12th Intern. Conf. on Computer Vision*, Kyoto, 2009, pp. 825–832. doi: 10.1109/ICCV.2009.5459302.
22. Robertson N., Seymour P.D. Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width. *J. Algorithms*, 1986, vol. 7, no. 3, pp. 309–322. doi: 10.1016/0196-6774(86)90023-4.
23. Shah R., Farach-Colton M. Undiscretized dynamic programming: Faster algorithms for facility location and related problems on trees. *Proc. of the thirteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (SODA)*, 2002, pp. 108–115.
24. Turner L., Gross D. P., Hamacher H. W., Krumke S. O. Static and dynamic source locations in undirected networks. *TOP.*, 2015, vol. 23, pp. 619–646. doi: 10.1007/s11750-015-0395-7.
25. Voznyuk I.P. The location problem on networks with bounded communication capacities. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, Ser. 2, 1999, vol. 6, no. 1, pp. 3–11 (in Russian).
26. Voznyuk I.P. The plant location problem on a two-tree with bounded communication capacities. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, Ser. 2, 2000, vol. 7, no. 1, pp. 3–8 (in Russian).
27. Wilber R. The concave least-weight subsequence problem revisited. *J. Algorithms*, 1988, vol. 9, pp. 418–425. doi 10.1016/0196-6774(88)90032-6.

Received March 24, 2020

Revised May 14, 2020

Accepted May 18, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-31-00470) and partially supported by Mathematical Center in Akademgorodok (agreement with Ministry of Science and High Education of the Russian Federation no. 075-15-2019-1675).

Edward Khairutdinovich Gimadi, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630990 Russia, e-mail: gimadi@math.nsc.ru.

Oxana Yurievna Tsidulko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630990 Russia, e-mail: tsidulko@math.nsc.ru

Cite this article as: E. Kh. Gimadi, O. Yu. Tsidulko. On some efficiently solvable classes of the network facility location problem with constraints on the capacities of communication lines. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 108–124.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ РАЗРЕШИМЫ ИЛИ ИМЕЮТ ПРИМАРНЫЕ ИНДЕКСЫ¹

В. Го, А. С. Кондратьев, Н. В. Маслова, Л. Мяо

Хорошо известно, что все максимальные подгруппы конечной разрешимой группы разрешимы и имеют примарные индексы. Однако обратное утверждение неверно. Конечные неразрешимые группы, все локальные подгруппы которых разрешимы, были изучены Дж. Томпсоном (1968). Р. Гуральник (1983) описал все пары (G, H) такие, что G — конечная неабелева простая группа и H — подгруппа примарного индекса в G . Некоторые авторы изучали конечные группы, в которых каждая подгруппа непримарного индекса (не обязательно максимальная) является группой, близкой к нильпотентной. Ослабляя условия, Е. Н. Бажанова (Демина) и Н. В. Маслова (2014) рассмотрели класс \mathfrak{J}_{pr} конечных групп, в которых все неразрешимые максимальные подгруппы имеют примарные индексы, и, в частности, определили возможные неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы из класса \mathfrak{J}_{pr} . В данной статье продолжено изучение нормального строения неразрешимой группы из класса \mathfrak{J}_{pr} . Доказано, что группа из класса \mathfrak{J}_{pr} содержит не более одного неабелева главного фактора и для любого положительного целого числа n существует группа из класса \mathfrak{J}_{pr} с числом неабелевых композиционных факторов, не меньшим n . Кроме того, определены все почти простые группы из класса \mathfrak{J}_{pr} .

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, примарный индекс, неразрешимая группа.

W. Guo, A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, L. Miao. Finite groups whose maximal subgroups are solvable or have prime power indices.

It is well known that all maximal subgroups of a finite solvable group are solvable and have prime power indices. However, the converse statement does not hold. Finite nonsolvable groups in which all local subgroups are solvable were studied by J. Thompson (1968). R. Guralnick (1983) described all the pairs (G, H) such that G is a finite nonabelian simple group and H is a subgroup of prime power index in G . Several authors studied finite groups in which every subgroup of non-prime-power index (not necessarily maximal) is a group close to nilpotent. Weakening the conditions, E. N. Bazhanova (Demina) and N. V. Maslova (2014) considered the class \mathfrak{J}_{pr} of finite groups in which all nonsolvable maximal subgroups have prime power indices and, in particular, described possibilities for nonabelian composition factors of a nonsolvable group from the class \mathfrak{J}_{pr} . In the present note, the authors continue the study of the normal structure of a nonsolvable group from \mathfrak{J}_{pr} . It is proved that a group from \mathfrak{J}_{pr} contains at most one nonabelian chief factor and, for each positive integer n , there exists a group from \mathfrak{J}_{pr} such that the number of its nonabelian composition factors is at least n . Moreover, all almost simple groups from \mathfrak{J}_{pr} are determined.

Keywords: finite group, maximal subgroup, prime power index, nonsolvable subgroup.

MSC: 20D60, 20D05, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-125-131

1. Введение

В этой работе мы рассматриваем только конечные группы, поэтому термин “группа” означает “конечная группа”. Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [6; 7; 9; 12].

Будем обозначать через $\text{Soc}(G)$ *цоколь* группы G (т.е. подгруппу группы G , порожденную всеми ее минимальными нетривиальными нормальными подгруппами). Напомним, что

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научных проектов № 20-51-53013 и № 12011530061, ГФЕН Китая в рамках научных проектов № 11771409 и № 11871062, Фонда естествознания провинции Цзянсу в рамках научного проекта № ВК20181451 и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ, соглашение № 02.А03.21.0006 от 27.08.2013.

группа G называется *почти простой*, если $\text{Soc}(G)$ — неабелева простая группа. Хорошо известно, что группа G почти проста тогда и только тогда, когда существует неабелева простая группа S такая, что $\text{Inn}(S) \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(S)$; более того, здесь $\text{Inn}(S) \cong S$, поэтому мы будем отождествлять S и $\text{Inn}(S)$ и писать $S \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(S)$.

Хорошо известно, что все максимальные подгруппы разрешимой группы разрешимы и имеют примарные индексы. Однако обратное утверждение неверно: например, все максимальные подгруппы неабелевой простой группы $PSL_2(7)$ разрешимы и имеют примарные индексы. В 1983 г. Р. Гуральник [10, теорема 1] описал все пары (G, H) такие, что G — неабелева простая группа и H — подгруппа примарного индекса в G . Более того, в [10, следствие 3] Р. Гуральник получил следующий результат.

Предложение 1. *Если G — неразрешимая группа такая, что каждая ее собственная максимальная подгруппа имеет примарный индекс, то фактор-группа $G/S(G)$ изоморфна $PSL_2(7)$ (здесь $S(G)$ — разрешимый радикал группы G , т. е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G).*

Неразрешимые группы, все локальные подгруппы которых разрешимы, были изучены Дж. Томпсоном [13]. Некоторые авторы изучали группы, в которых каждая подгруппа примарного индекса (необязательно максимальная) является группой, близкой к нильпотентной. Например, П. П. Барышовец [5] доказал, что группами $PSL_2(5)$, $PSL_2(7)$, $SL_2(5)$ и $SL_2(7)$ исчерпываются все неразрешимые группы, в которых каждая подгруппа примарного индекса нильпотентна или является группой Шмидта (минимальной ненильпотентной группой).

Ослабив условия и рассмотрев класс \mathfrak{J}_{pr} конечных групп, в которых все неразрешимые максимальные подгруппы имеют примарные индексы, мы получим класс групп, который содержит класс всех разрешимых групп в качестве собственного подкласса. Естественным образом возникает следующий вопрос.

В о п р о с. Каково нормальное строение неразрешимой группы из класса \mathfrak{J}_{pr} , в частности, каковы ее неабелевы композиционные факторы?

В [1] Е. Н. Бажанова и третий автор описали возможные неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы из класса \mathfrak{J}_{pr} . В этой статье, основываясь на результатах, полученных в [10] и [1], мы изучаем нормальное строение неразрешимой группы из класса \mathfrak{J}_{pr} . Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Выполняются следующие утверждения:*

(i) *Неабелевы композиционные факторы группы $G \in \mathfrak{J}_{pr}$ попарно изоморфны и исчерпываются группами из следующего списка:*

- (i1) $PSL_2(2^p)$, где p — простое число;
- (i2) $PSL_2(3^p)$, где p — простое число;
- (i3) $PSL_2(p^{2^w})$, где p — нечетное простое число и $w \geq 0$;
- (i4) $Sz(2^p)$, где p — нечетное простое число;
- (i5) $PSL_3(3)$.

(ii) *Для каждой простой группы S из списка пункта (i) найдется группа $G \in \mathfrak{J}_{pr}$ такая, что $\text{Soc}(G) \cong S$.*

(iii) *Группа из класса \mathfrak{J}_{pr} содержит не более одного неабелева главного фактора.*

(iv) *Для любого положительного целого числа n существует группа $G = G(n)$ из класса \mathfrak{J}_{pr} такая, что число неабелевых композиционных факторов группы G не меньше n .*

Естественным образом возникают следующие вопросы.

В о п р о с 1. Верно ли, что для любого положительного целого числа n существует группа $G = G(n)$ из класса \mathfrak{J}_{pr} такая, что число неабелевых композиционных факторов группы G в точности равно n ?

Из доказательства п. (iv) теоремы 1 следует, что ответ на вопрос 1 положителен, если n — степень простого числа, большего 3.

Пусть S — простая группа и G — группа. Обозначим через $Comp(G, S)$ число композиционных факторов G , изоморфных S .

В о п р о с 2. Пусть S — неабелева простая группа из списка п. (i) теоремы 1. Какие значения может принимать число $Comp(G, S)$, если $G \in \mathfrak{J}_{pr}$?

Кроме того, в этой статье мы описываем все почти простые группы из класса \mathfrak{J}_{pr} . Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть G — почти простая группа. Тогда G принадлежит классу \mathfrak{J}_{pr} тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:

- (i) $Soc(G) \cong PSL_2(2^p)$, где p — простое число;
- (ii) $Soc(G) \cong PSL_2(3^p)$, где p — нечетное простое число;
- (iii) $G \cong PSL_2(p)$, где p — нечетное простое число, большее 3, такое, что $p = 11$ или $p \not\equiv \pm 1 \pmod{10}$;
- (iv) $G \cong PGL_2(p)$, где p — нечетное простое число, большее 3;
- (v) $Soc(G) \cong PSL_2(p^{2^w})$, где p — нечетное простое число, $w > 0$ и G не содержится в группе внутренне-полевых автоморфизмов группы $Soc(G)$;
- (vi) $Soc(G) \cong Sz(2^p)$, где p — нечетное простое число;
- (vii) $Soc(G) \cong PSL_3(3)$.

Отметим, что наши доказательства основаны на классификации конечных простых групп.

2. Предварительные результаты

Следующие утверждения будут полезны нам для доказательства теорем 1 и 2.

Лемма 1 [1, лемма 1]. Класс \mathfrak{J}_{pr} замкнут относительно взятия фактор-групп.

Лемма 2. Пусть p — простое число, Q — подгруппа группы $L = L_1 \times \dots \times L_n$, где все L_i — конечные группы, и пусть π_i — проекция L на L_i . Если Q содержит силовскую p -подгруппу группы L и существует индекс i такой, что группа L_i почти проста, индекс $|L_i : Soc(L_i)|$ — степень числа p и $\pi_i(Q) = L_i$, то $L_i \leq Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказать эту лемму можно, повторив рассуждения доказательства [2, лемма 9], при этом заменив простое число 2 на произвольное простое число p .

Лемма 3 (см., например, [6, теорема 1.3.6] и [4, леммы 6–9]). Пусть G — почти простая группа и $S = Soc(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (i) Если M — максимальная подгруппа группы G , тогда выполняются утверждения
 - (i1) $S \cap M \neq 1$;
 - (i2) если $S \not\leq M$, то $M = N_G(M \cap S)$;
 - (i3) если $S \not\leq M$, то $G = MS$.
- (ii) Пусть P — нетривиальная собственная подгруппа группы S . Тогда подгруппа $N_G(S)$ максимальна в группе G тогда и только тогда, когда выполняется равенство $G = N_G(P)S$ и для любой подгруппы Y группы S такой, что $P < Y < S$, имеем $N_G(P) \not\leq N_G(Y)$. В частности, если подгруппа P максимальна в группе S , то подгруппа $N_G(P)$ максимальна в группе G тогда и только тогда, когда выполняется равенство $G = N_G(P)S$.

3. Доказательство теоремы 1

Пункты (i) и (ii) теоремы 1 следуют из [1, теорема 1].

Докажем п. (iii). Предположим, что $G \in \mathfrak{J}_{pr}$ — группа наименьшего порядка, имеющая не менее двух различных неабелевых главных факторов. По лемме 1 разрешимый радикал группы G тривиален.

Пусть A — минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда A — прямое произведение попарно изоморфных неабелевых простых групп. Из нашего предположения заключаем, что фактор-группа G/A неразрешима. Пусть M — максимальная подгруппа группы G . Тогда либо $A \leq M$ и, следовательно, подгруппа M неразрешима; либо $G = MA$ и по соответствующей теореме о гомоморфизмах $G/A \cong M/(M \cap A)$, следовательно, подгруппа M снова неразрешима. Таким образом, каждая максимальная подгруппа группы G имеет примарный индекс. Следовательно, группа G изоморфна $PSL_2(7)$ по предложению 1. Получаем противоречие с предположением, что группа G имеет хотя бы два различных главных фактора.

Докажем п. (iv). Зафиксируем простое число $p \geq 5$. Предположим, что циклическая группа R порядка p^k , где k — неотрицательное целое число, действует регулярно на множестве $\Omega = \{1, \dots, p^k\}$. Пусть $S = \text{Aut}(PSL_2(2^p)) \cong PSL_2(2^p) \cdot \mathbb{Z}_p$,

$$G = S \wr_{\Omega} R \text{ — регулярное сплетение,}$$

$U = U_1 \times \dots \times U_{p^k}$ — база этого сплетения и $L = U' = \prod_{i=1}^{p^k} L_i$, где $L_i = U'_i \cong PSL_2(2^p)$ для каждого i . Тогда L — минимальная нормальная подгруппа группы G . Пусть π_i — проекция группы U на U_i .

Заметим, что фактор-группа G/L является p -группой и L — холлова подгруппа группы G . Действительно, $|L| = |PSL_2(2^p)|^{p^k}$ и $|PSL_2(2^p)| = 2^p(2^{2p} - 1)$. По Малой теореме Ферма, p делит число $2^{p-1} - 1$. По [11, Hilfsatz 2] (см. также [3, лемма 3a]) имеем

$$(2^{p-1} - 1, 2^{2p} - 1) = 2^{(p-1, 2p)} - 1 = 2^2 - 1 = 3.$$

Так как $p > 3$, p не делит $|PSL_2(2^p)|$.

Очевидно, что G имеет в точности p^k попарно различных неабелевых композиционных факторов. Покажем, что $G \in J_{pr}$. Пусть H — собственная максимальная подгруппа группы G . По лемме 3 либо $L \leq H$, и в этом случае индекс $|G : H|$ — степень числа p ; либо $G = LH$. В последнем случае имеем $G = UH$ и по соответствующей теореме о гомоморфизмах получаем

$$G/L \cong H/L \cap H \text{ и } G/U \cong H/U \cap H.$$

Положим $K = U \cap H$. Легко понять, что подгруппа H содержит силовскую p -подгруппу группы G . Таким образом, без ограничения общности мы можем предположить, что подгруппа H содержит R . Следовательно, $\pi_i(K) \cong \pi_j(K)$ для любых $i, j \in \Omega$. Более того, подгруппа K содержит силовскую p -подгруппу группы U и

$$K \leq \prod_{i=1}^{p^k} \pi_i(K).$$

Заметим, что для любого индекса i имеем $\pi_i(K) \leq U_i \cong \text{Aut}(PSL_2(2^p))$ и подгруппа $\pi_i(K)$ содержит силовскую p -подгруппу группы U_i для любого $i \in \Omega$. По [6, табл. 8.1, 8.2, 8.7] для каждого $i \in \Omega$ либо подгруппа $\pi_i(K)$ разрешима, либо $\pi_i(K) = U_i$. В первом случае подгруппа K разрешима, следовательно, подгруппа H разрешима. В последнем случае, используя лемму 2, заключаем, что $K = U$. Следовательно, подгруппа H содержит L и силовскую p -подгруппу группы G . Таким образом, $H = G$. Получаем противоречие.

Итак, мы доказали, что для любого простого числа $p \geq 5$ и любого неотрицательного целого числа k существует группа $G = G(p^k) \in \mathfrak{J}_{pr}$ такая, что G имеет в точности p^k попарно различных неабелевых композиционных факторов. \square

4. Доказательство теоремы 2

Докажем *необходимость* в теореме 2. Пусть G — почти простая группа из класса \mathfrak{J}_{pr} . Тогда $S := \text{Soc}(G)$ — простая группа из списка в п. (i) теоремы 1. Ввиду [7, табл. 5] $\text{Out}(S)$ — абелева группа, в частности, фактор-группа G/S разрешима.

Пусть M — максимальная подгруппа группы G . Если $S \leq M$, то индекс $|G : M|$ является простым числом ввиду [7, табл. 5]. Если $S \not\leq M$, то по лемме 3 имеем $G = SM$, и, следовательно, по соответствующей теореме о гомоморфизмах имеем $G/S \cong M/(M \cap S)$. Таким образом,

$$|G : M| = |S : M \cap S|.$$

Если подгруппа $M \cap S$ разрешима, то подгруппа M также разрешима. Предположим, что подгруппа $M \cap S$ неразрешима. Тогда подгруппа M неразрешима, и по предположению индекс $|S : M \cap S| = |G : M|$ является степенью простого числа. Следовательно, по [10] имеем $S \cong PSL_2(11)$ и $M \cap S \cong A_5$. Если $S \cong PSL_2(11)$, то выполняется п. (iii) или п. (iv) теоремы 2. Следовательно, если группа S не изоморфна $PSL_2(11)$, то все максимальные подгруппы группы G , не содержащие S , разрешимы.

Предположим, что группа G не удовлетворяет заключению теоремы 2. Тогда $S \cong PSL_2(q)$, где $q = p^f$, p — нечетное простое число, f — степень числа 2 и либо $f = 1$, $11 \neq p \equiv \pm 1 \pmod{10}$ и $G = S$, либо $f > 1$ и G — подгруппа группы внутренне-полевых автоморфизмов группы S . Ввиду леммы 3 и [6, табл. 8.1, 8.2, 8.7] (см. также [8, Theorem 1.3]) G содержит неразрешимую максимальную подгруппу P такую, что $S \not\leq P$ и подгруппа $P \cap S$ изоморфна A_5 при $f = 1$ или $q = 9$ и изоморфна $PSL_2(q_0)$ при $f > 1$ и $9 < q = q_0^2$. Но это противоречит сделанному ранее заключению, что если подгруппа S не изоморфна $PSL_2(11)$, то все максимальные подгруппы группы G , не содержащие S , разрешимы.

Таким образом, *необходимость* в теореме 2 доказана.

Пусть G — почти простая группа из заключения теоремы 2. Тогда ввиду леммы 3, [7, табл. 5] и [6, табл. 8.1, 8.2, 8.7, 8.16] фактор-группа $G/\text{Soc}(G)$ разрешима, и либо $G \cong PSL_2(11)$, либо все максимальные подгруппы группы G , не содержащие $\text{Soc}(G)$, разрешимы. Очевидно, что в последнем случае $G \in \mathfrak{J}_{pr}$. Заметим, что $PSL_2(11) \in \mathfrak{J}_{pr}$ ввиду [7].

Таким образом, *достаточность* в теореме 2 доказана. □

Благодарности

Некоторые идеи в рамках этого исследования возникли во время дискуссий первого и третьего авторов во время визита первого автора в Уральский федеральный университет в сентябре 2019 г. Первый автор благодарен Уральскому федеральному университету за гостеприимство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Демина Е.Н., Маслова Н.В.** Неабелевы композиционные факторы конечной группы с арифметическими ограничениями на неразрешимые максимальные подгруппы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 122–134.
2. **Го В., Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О пронормальности подгрупп нечетных индексов в некоторых расширениях конечных групп // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 773–790.
3. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
4. **Маслова Н.В.** Максимальные подгруппы нечётного индекса в конечных группах с простым линейным, унитарным или симплектическим цокелем // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 189–208.
5. **Baryshovets P.P.** Finite nonsolvable groups in which subgroups of nonprimary index are nilpotent or are Shmidt groups // Ukrain. Math. J. 1981. Vol. 33, no. 1. P. 37–39.

6. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407). doi: 10.1017/CBO9781139192576.
7. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
8. **Giudici M.** Maximal subgroups of almost simple groups with socle $PSL(2, q)$: [e-resource]. arXiv: math/0703685 [math.GR]. 2007. 11 p.
9. **Gorenstein D.** Finite groups. Chelsea: N Y, 1968. 520 p.
10. **Guralnick R.M.** Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. Vol. 81, no. 2. P. 304–311.
11. **Huppert B.** Singer-Zyklen in klassischen Gruppen // Math. Z. 1970. Vol. 117, no. 7. S. 141–150.
12. **Kleidman P., Liebeck M.** The Subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1990. 304 p.
13. **Thompson J.G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, no. 3. P 383–437.

Поступила 23.04.2020

После доработки 15.05.2020

Принята к публикации 25.05.2020

Вэньбинь Го

д-р физ.-мат. наук, профессор

профессор

Хайнаньский Университет, г. Хайкоу, Китай;

Университет науки и технологии Китая, г. Хэфэй

e-mail: wbguo@ustc.edu.cn

Кондратьев Анатолий Семенович

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Маслова Наталья Владимировна

д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: butterson@mail.ru

Лун Мяо

Ph. D.

профессор

Университет Янчжоу, г. Янчжоу, Китай

e-mail: lmiao@yzu.edu.cn

REFERENCES

1. Demina E.N., Maslova N.V. Nonabelian composition factors of a finite group with arithmetic constraints to non-solvable maximal subgroups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 289, suppl. 1, pp. 64–76. doi: 10.1134/S0081543815050065.
2. Guo W., Maslova N.V., Revin D.O. On the pronormality of subgroups of odd index in some extensions of finite groups. *Siberian Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 4, pp. 610–622. doi: 10.1134/S0037446618040043.

3. Kondrat'ev A.S. Prime graph components of finite simple groups. *Math. USSR-Sb.*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1070/SM1990v067n01ABEH001363.
4. Maslova N.V. Maximal subgroups of odd index in finite groups with simple linear, unitary, or symplectic socle. *Algebra and Logic*, 2011, vol. 50, no. 2, pp. 133–145. doi: 10.1007/s10469-011-9128-7.
5. Baryshovets P.P. Finite nonsolvable groups in which subgroups of nonprimary index are nilpotent or are Schmidt groups. *Ukrain. Math. J.*, 1981, vol. 33, no. 1, pp. 37–39. doi: 10.1007/BF01085772.
6. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougall C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407, 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576.
7. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups*. Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0198531990.
8. Giudici M. Maximal subgroups of almost simple groups with socle $PSL(2, q)$. *ArXiv: math/0703685 [math.GR]*, 2007, 11 p.
9. Gorenstein D. *Finite Groups*. Chelsea: New York, 1968, 528 p.
10. Guralnick R.M. Subgroups of prime power index in a simple group. *J. Algebra*, 1983, vol. 81, no. 2, pp. 304–311. doi: 10.1016/0021-8693(83)90190-4.
11. Huppert B. Singer-Zyklen in klassischen Gruppen. *Math. Z.*, 1970, vol. 117, pp. 141–150. doi: 10.1007/BF01109836.
12. Kleidman P., Liebeck M. *The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990, 304 p. ISBN: 0-521-35949-X.
13. Thompson J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1968, vol. 74, no. 3, pp. 383–437. doi: 10.1090/S0002-9904-1968-11953-6.

Received April 23, 2020

Revised May 15, 2020

Accepted May 25, 2020

Funding Agency: This work was supported by a joint program of the Russian Foundation for Basic Research and the National Natural Science Foundation of China (project nos. 20-51-53013 and 12011530061), by the National Natural Science Foundation of China (projects nos. 11771409 and 11871062), by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (project no. BK20181451), and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Wenbin Guo, Dr. Phys.-Math. Sci., School of Science, Hainan University, Haikou, Hainan, 570228 China; and School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026 China, e-mail: wbguo@ustc.edu.cn.

Anatolii Semenovich Kondrat'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru.

Natalia Vladimirovna Maslova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: butterson@mail.ru.

Long Miao, Ph. D., School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, 225002 China e-mail: lmiao@yzu.edu.cn.

Cite this article as: W. Guo, A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, L. Miao. Finite groups whose maximal subgroups are solvable or have prime power indices. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 125–131.

УДК 517.977

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ
ПЕРЕВОДА ОБЪЕКТА НА МНОЖЕСТВО¹**

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

Настоящая работа посвящена задаче оптимального быстродействия для сингулярно возмущенной линейной автономной системы с гладкими геометрическими ограничениями на управление и неограниченным целевым множеством:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + B_1u, & x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^r, \\ \varepsilon \dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + B_2u, & \|u\| \leq 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0, \quad y(0) = y_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}^m, \quad T_\varepsilon \rightarrow \min. \end{cases}$$

Доказана единственность представления оптимального управления с нормированным определяющим вектором в предельной задаче. Доказана разрешимость исходной задачи, получены предельные соотношения для времени быстродействия и вектора, определяющего оптимальное управление. Доказан асимптотический аналог теоремы о функции, заданной неявно. С помощью этой теоремы получена полная асимптотика решения задачи по степеням малого параметра ε .

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенная задача, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of a solution to a singularly perturbed time-optimal control problem of transferring an object to a set.

The present work is devoted to a time-optimal control problem for a singularly perturbed linear autonomous system with smooth geometric constraints on the control and an unbounded target set:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + B_1u, & x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^r, \\ \varepsilon \dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + B_2u, & \|u\| \leq 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0, \quad y(0) = y_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}^m, \quad T_\varepsilon \rightarrow \min. \end{cases}$$

The uniqueness of the representation of the optimal control with a normalized defining vector in the limit problem is proved. The solvability of the problem is established. The limit relations for the optimal time and the vector determining the optimal control are obtained. An asymptotic analog of the implicit function theorem is proved and used to derive a complete asymptotics of the solution to the problem in powers of the small parameter ε .

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singularly perturbed problem, small parameter.

MSC: 93C70, 49N05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-132-146

¹Исследование О. О. Коврижных выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.А03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

1. Постановка задачи

В работе рассматривается одна из задач о быстродействии оптимального управления (см. [1]) для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными (см. обзоры [2; 3]) в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями в виде шара:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + B_1u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \\ \varepsilon \dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + B_2u, & u \in U = \{u: \|u\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^r, \\ x(0) = x_0 \neq 0, \quad y(0) = y_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}^m, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма в соответствующем конечномерном пространстве.

Задача (1.1) есть задача наискорейшего перевода точки (x_0, y_0) на целевое множество

$$G := \{(0, y) : y \in \mathbb{R}^m\}.$$

Ранее в работе [4] были получены основные соотношения для системы общего вида с многоугольником в качестве ограничивающего множества, в работах [5; 6] рассмотрено поведение областей достижимости при стремлении малого параметра к нулю. В статьях [7; 8] исследованы линейно-квадратичные задачи оптимального управления для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и неограниченным многомерным управлением. Работы [9; 10] (задача о быстродействии), [11] (терминальный критерий качества), [12] (интегральный выпуклый критерий качества) посвящены получению полной асимптотики решения в задачах управления для линейных систем с быстрыми и медленными переменными и ограничивающим множеством в виде шара в евклидовом пространстве.

Отличительная особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что целевое множество не ограничено. В настоящей работе используются методы статьи [9] и общие соотношения, полученные в [13–15].

У с л о в и е I. $\operatorname{Re} \sigma(A_{22}) \leq -\alpha < 0$, где $\sigma(A_{22})$ — спектр матрицы A_{22} .

У с л о в и е II. Пара $(A_{22}; B_2)$ вполне управляема, что эквивалентно вследствие критерия Калмана (см. [16, с. 91, теорема 5]) условию

$$\operatorname{rank} [B_2, A_{22}B_2, \dots, A_{22}^{m-1}B_2] = m.$$

Введем обозначения

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

В силу этих обозначений задача (1.1) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}_\varepsilon z + \mathcal{B}_\varepsilon u, & z \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad u \in \mathbb{R}^r, \\ z(0) = z_0 \notin G, & \|u\| \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ z(T_\varepsilon) \in G, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min. \end{cases} \quad (1.3)$$

Предельная задача (при $\varepsilon = 0$):

$$\dot{x} = A_0x + B_0u, \quad x(0) = x_0 \neq 0, \quad (1.4)$$

$$x(T_0) = 0, \quad T_0 \longrightarrow \min, \quad (1.5)$$

где

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \quad B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \quad u(t) \in U. \quad (1.6)$$

У с л о в и е III. Пусть пара $(A_0; B_0)$ такова, что если $B_0^* e^{A_0^* t} r_1 \parallel B_0^* e^{A_0^* t} r_2$ на некотором промежутке, то и $r_1 \parallel r_2$.

Отметим, что из условия III следует, что пара $(A_0; B_0)$ вполне управляема. Кроме этого, если оператор B_0^* инъективен, то условие III заведомо выполнено.

У с л о в и е IV. Начальный вектор $x_0 \neq 0$ выбран так, что задача (1.4), (1.5) разрешима.

Отметим, что при выполнении условий I–III найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ пара $(A_\varepsilon, B_\varepsilon)$ вполне управляема (см. [4]).

Утверждение 1. Пусть выполнены условия I–III. Если существует $t_1 > 0$ такое, что $z(t_1) \in G$, то задача (1.3) разрешима и $T_\varepsilon \leq t_1$, где T_ε — время быстрогодействия.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формулы Коши выполняется

$$z(t) = e^{A_\varepsilon t} z_0 + \int_0^t e^{A_\varepsilon(t-\tau)} B_\varepsilon u(\tau) d\tau. \quad (1.7)$$

Поскольку

$$\|e^{A_\varepsilon t}\| \leq e^{\|A_\varepsilon\|t},$$

то существует такое $K_{1,\varepsilon} > 0$, что при всех $t \in [0; t_1]$ справедливо неравенство

$$\|e^{A_\varepsilon t}\| \leq K_{1,\varepsilon}.$$

Тогда из (1.7) получим, что

$$\|z(t)\| \leq K_{1,\varepsilon} \|z_0\| + K_{1,\varepsilon} \|B_\varepsilon\| t_1 =: K_{2,\varepsilon}. \quad (1.8)$$

Рассмотрим целевое множество $G_\varepsilon := \{(0; y) : \|y\| \leq K_{2,\varepsilon}\} \subset G$. Это множество выпукло и компактно. В силу теоремы 17 из [16, гл. 3, п. 2.5] задача быстрогодействия для системы из (1.3) с таким целевым множеством разрешима и $T_\varepsilon \leq t_1$, где T_ε — время быстрогодействия.

Покажем, что решение этой задачи есть решение и задачи (1.1). Если $0 < t < T_\varepsilon$, то множество достижимости системы из (1.1) не пересекается с G_ε , а в силу (1.8) это множество не пересекается и с G . \square

Утверждение 2. Пусть выполнены условия I–IV. Тогда задача (1.1) разрешима при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и

$$0 \leq \liminf T_\varepsilon \leq \limsup T_\varepsilon \leq T_0$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$, где T_0 — время быстрогодействия в задаче (1.4), (1.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условий доказываемой теоремы в силу теоремы 2 из [13] разрешима задача быстрогодействия для системы из (1.1) с целевым множеством $G_0 := \{(0; 0)\}$ и $\tilde{T}_\varepsilon \rightarrow T_0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, где \tilde{T}_ε — время быстрогодействия для задачи с целевым множеством G_0 . Таким образом, в силу утверждения 1 разрешима и исходная задача и $0 < T_\varepsilon \leq \tilde{T}_\varepsilon$. Поэтому $0 \leq \liminf T_\varepsilon \leq \limsup T_\varepsilon \leq T_0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. \square

Рассмотрим единственность оптимального управления (в классе кусочно-непрерывных управлений) в задаче (1.3) с общих позиций

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, & z \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}, \quad u \in \mathbb{R}^r, \\ z(0) = z_0 \notin \tilde{G}, & \|u\| \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ z(T) \in \tilde{G}, & T \rightarrow \min. \end{cases} \quad (1.9)$$

Теорема 1. Пусть пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ вполне управляема, а целевое множество \tilde{G} выпукло. Тогда, если задача (1.9) разрешима, то оптимальное управление единственно.

Доказательство. 1. В силу вполне управляемости пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ функция $\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l$ при $l \neq 0$ может иметь лишь конечное число нулей на любом конечном отрезке. В противном случае в силу аналитичности этой функции выполняется $\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l \equiv 0$, откуда в силу вполне управляемости пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ следует $l = 0$, что противоречит предположению $l \neq 0$.

2. Пусть $\tilde{G} = \{z_1\}$, а $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ — два оптимальных управления. Тогда из принципа максимума следует, что при $t \in [0; T]$ справедливы равенства

$$\|\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1\| = \langle u_1(t), \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1 \rangle = \langle u_2(t), \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1 \rangle,$$

где l_1 соответствует управлению $u_1(\cdot)$ (см., например, [1, гл. 3, теорема 11, следствие равенства (24))). Поскольку $\|u_i(t)\| \leq 1$, $i = 1, 2$, то при $\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1 \neq 0$ выполняется

$$u_1(t) = \frac{\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1}{\|\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1\|} = u_2(t).$$

3. Пусть $\Xi(T, z_0)$ — множество достижимости управляемой системы из (1.9) к моменту времени T . В силу теоремы 1 из [16, п. 2.1] это множество выпукло и компактно. Покажем, что множество $\Xi(T, z_0)$ строго выпукло (см. [16, гл. 2, приложение]), для этого докажем, что его граница $\partial\Xi(T, z_0)$ не содержит отрезков. Предположим противное, т. е. что некоторый отрезок $[z_1; z_2] \subset \partial\Xi(T, z_0)$. Пусть $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ — оптимальные управления, переводящие z_0 в z_1 и z_2 соответственно. Поскольку точка $\tilde{z} := (z_1 + z_2)/2 \in \partial\Xi(T, z_0)$, то время быстрогодействия из z_0 в \tilde{z} также равно T . Пусть $\tilde{u}(\cdot)$ — оптимальное управление, переводящее точку z_0 в точку \tilde{z} за время T . Поскольку управление $\bar{u}(\cdot) := (u_1(\cdot) + u_2(\cdot))/2$ тоже переводит точку z_0 в \tilde{z} за время T и $\|\bar{u}\| \leq 1$, то в силу п. 2 доказываемой теоремы $\tilde{u} = \bar{u}$ за исключением конечного числа точек отрезка $[0; T]$. При этом, если $\|\tilde{u}(t)\| = 1$, а $u_1(t) \neq u_2(t)$, то

$$\|\tilde{u}(t)\| = 1 > \|(u_1(t) + u_2(t))/2\| = \|\bar{u}(t)\|,$$

что противоречит равенству $\tilde{u} = \bar{u}$.

4. Пусть теперь \tilde{G} — произвольное выпуклое множество, а T — время быстрогодействия в задаче (1.9). Пусть $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ — оптимальные управления в задаче (1.9), а $z_1 \in \tilde{G}$ и $z_2 \in \tilde{G}$ — точки, в которые эти управления переводят точку z_0 (соответственно). Если $z_1 = z_2$, то в силу п. 1, 2 доказываемой теоремы $u_1 = u_2$ за исключением, быть может, конечного числа точек отрезка $[0; T]$. Пусть $z_1 \neq z_2$. Тогда для любого $\mu \in (0; 1)$ управление $u_\mu := (1 - \mu)u_1 + \mu u_2$ переводит z_0 в точку $z_\mu := (1 - \mu)z_1 + \mu z_2 \in \tilde{G}$ за время T и $\|u_\mu(t)\| \leq 1$ при всех $t \in [0; T]$. Тем самым, $[z_1; z_2] \subset \partial\Xi(T, z_0)$, что противоречит п. 3. \square

З а м е ч а н и е. Из [16, п. 2.2, теорема 3] и теоремы 1 следует, в частности, что если пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ вполне управляема, то задача (1.9) нормальна.

Покажем, что условие III обеспечивает единственность представления оптимального управления в предельной задаче (1.4), (1.5) через начальный вектор сопряженной системы в виде

$$u_0(T_0 - t) = \frac{B_0^* e^{A_0^* t} l_0}{\|B_0^* e^{A_0^* t} l_0\|} \quad (1.10)$$

при нормировке вектора l_0 .

Утверждение 3. Пусть выполнены условия I–III. Тогда система

$$0 = e^{A_0 T_0} x_0 + \int_0^{T_0} \frac{C_0(t) C_0^*(t) l}{\|C_0^*(t) l\|} dt, \quad \|l\| = 1, \quad (1.11)$$

где T_0 — оптимальное время в задаче (1.5), (1.4), имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть l_1 и l_2 — два определяющих вектора оптимального управления. Тогда в силу теоремы 1

$$\frac{\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1}{\|\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1\|} = \frac{\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_2}{\|\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_2\|} \quad (1.12)$$

за исключением, может быть, конечного числа точек на отрезке $[0; T_0]$. Следовательно, существует интервал, на котором

$$\|\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1\| \times \|\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_2\| = \langle \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1, \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_2 \rangle.$$

Тем самым, $\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1 \parallel \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_2$. В силу условия III отсюда следует, что существует $\mu \in \mathbb{R}$ такое, что $l_2 = \mu l_1$, а из соотношения (1.12) следует неравенство $\mu > 0$. Поэтому $1 = \|l_2\| = \mu \|l_1\| = \mu$, значит, $l_1 = l_2$. \square

2. Основное уравнение и предельное соотношение

Пусть $u_\varepsilon(t)$ — оптимальное управление в задаче (1.1). Тогда в силу принципа максимума Понтрягина для такой задачи (см., например, теорему 18 из [16, гл. 3, п. 2.5]) существует такой вектор $\lambda_\varepsilon \perp G$, т. е. $\lambda_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, 0)^*$, что для решения сопряженной задачи

$$\dot{\psi}_\varepsilon = -\mathcal{A}_\varepsilon^* \psi, \quad \psi_\varepsilon(T_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon$$

выполняется соотношение

$$\langle \psi_\varepsilon(t), \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon(t) \rangle = \max_{\|u\| \leq 1} \langle \psi_\varepsilon(t), \mathcal{B}_\varepsilon u \rangle = \|\mathcal{B}_\varepsilon^* \psi_\varepsilon(t)\|.$$

Здесь и далее символ $*$ обозначает операцию транспонирования.

Поскольку $\psi_\varepsilon(t) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)} \lambda_\varepsilon$, то при t таких, что $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)} \lambda_\varepsilon \neq 0$, оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$ имеет вид

$$u_\varepsilon(t) = \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)} \lambda_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)} \lambda_\varepsilon\|}. \quad (2.1)$$

С учетом условия $x(T_\varepsilon) = 0$ в силу формулы Коши и определения $u_\varepsilon(\cdot)$ (2.1) получим

$$0 = \left[e^{\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon} z_0 + \int_0^{T_\varepsilon} \frac{e^{\mathcal{A}_\varepsilon(T_\varepsilon-t)} \mathcal{B}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)} \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon-t)} \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}\|} dt \right]_1. \quad (2.2)$$

Здесь запись $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_1$ означает вектор x . После замены переменной интегрирования по формуле $\tau = T_\varepsilon - t$ приходим к соотношению, эквивалентному (2.2),

$$0 = \left[e^{\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon} z_0 + \int_0^{T_\varepsilon} \frac{e^{\mathcal{A}_\varepsilon \tau} \mathcal{B}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}\|} dt \right]_1. \quad (2.3)$$

Отметим, что подынтегральная функция в основном уравнении (2.3) положительно однородна относительно вектора $\lambda_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, 0)^*$, поэтому уравнение (2.3) надо дополнить каким-либо условием нормировки этого вектора, например, условием

$$\|\lambda_\varepsilon\| = \|l_\varepsilon\| = 1. \quad (2.4)$$

Из результатов А. Б. Васильевой (см., например, [17]) следует, что в рассматриваемом случае на любом отрезке $[0, T]$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ имеет место равномерное по t асимптотическое разложение

$$e^{A_\varepsilon t} =: \mathcal{W}(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11}(t, \varepsilon) & \mathcal{W}_{12}(t, \varepsilon) \\ \mathcal{W}_{21}(t, \varepsilon) & \mathcal{W}_{22}(t, \varepsilon) \end{pmatrix} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\mathcal{W}_k(t) + \widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau)), \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon}, \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{W}_k(t) := \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11,k}(t) & \mathcal{W}_{12,k}(t) \\ \mathcal{W}_{21,k}(t) & \mathcal{W}_{22,k}(t) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau) := \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{W}}_{11,k}(\tau) & \widetilde{\mathcal{W}}_{12,k}(\tau) \\ \widetilde{\mathcal{W}}_{21,k}(\tau) & \widetilde{\mathcal{W}}_{22,k}(\tau) \end{pmatrix},$$

все $\mathcal{W}_k(t)$, $\widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau)$ — бесконечно дифференцируемые по t матричнозначные функции, причем все $\widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau)$ экспоненциально убывают при $\tau \rightarrow +\infty$, в частности, при $t \geq \varepsilon^p$, $p \in (0, 1)$, $\varepsilon \rightarrow +0$ (см., например, утверждение 1.6 из [14]). В [14] приведены формулы (см. (2.4)–(2.8)) для $\mathcal{W}_0(t)$, $\widetilde{\mathcal{W}}_0(\tau)$ и рекуррентные формулы, позволяющие найти остальные $\mathcal{W}_k(t)$, $\widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau)$. В частности,

$$\mathcal{W}_0(t) = \begin{pmatrix} e^{A_0 t} & 0 \\ -A_{22}^{-1} A_{21} e^{A_0 t} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{W}}_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{A_{22} \tau} A_{22}^{-1} A_{21} & e^{A_{22} \tau} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{W}_{12,1}(t) = -e^{A_0 t} A_{12} A_{22}^{-1}, \quad \widetilde{\mathcal{W}}_{12,1}(\tau) = A_{12} A_{22}^{-1} e^{A_{22} \tau}.$$

Как и в [14], введем обозначение

$$C_\varepsilon(t) := [e^{A_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon]_1 = \mathcal{W}_{11}(t, \varepsilon) B_1 + \varepsilon^{-1} \mathcal{W}_{12}(t, \varepsilon) B_2. \quad (2.7)$$

Из (2.6) получим, что при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерно по t на любом отрезке $[0; T]$ имеет место следующая формула:

$$C_\varepsilon(t) = C_0(t) + A_{12} A_{22}^{-1} e^{A_{22} t} B_2 + O(\varepsilon), \quad \text{где } C_0(t) := e^{A_0 t} B_0. \quad (2.8)$$

В обозначениях (2.5), (2.7) основное уравнение (2.3) принимает вид

$$0 = \mathcal{W}_{11}(T_\varepsilon, \varepsilon) x_0 + \mathcal{W}_{12}(T_\varepsilon, \varepsilon) y_0 + \int_0^{T_\varepsilon} \frac{C_\varepsilon(t) C_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon}{\|C_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon\|} dt. \quad (2.9)$$

Из (2.1) с учетом того, что $\lambda_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, 0)^*$, получим

$$u_\varepsilon(T_\varepsilon - t) = \frac{C_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon}{\|C_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon\|}. \quad (2.10)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия I–IV. Тогда $T_\varepsilon \rightarrow T_0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{T} := \liminf T_\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Тогда найдется последовательность $\{\varepsilon_k\}$ такая, что $\varepsilon_k \rightarrow +0$ и $T_k := T_{\varepsilon_k} \rightarrow \widetilde{T}$. Отметим, что $\widetilde{T} \leq T_0$ в силу утверждения 2. Из этого же утверждения также следует, что T_ε ограничено сверху, обозначим одну из верхних границ через \widehat{T} . Из (2.6), (2.8) и (2.9) следует, что существуют константы $\varepsilon_0 > 0$ и $K > 0$ такие, что $\|C_\varepsilon(t)\| \leq K$ при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ и $t \in [0; \widehat{T}]$. Кроме этого,

$$0 = e^{A_0 T_k} x_0 + O(\varepsilon_k) + \int_0^{T_k} \frac{C_{\varepsilon_k}(t) C_{\varepsilon_k}^*(t) l_{\varepsilon_k}}{\|C_{\varepsilon_k}^*(t) l_{\varepsilon_k}\|} dt. \quad (2.11)$$

Таким образом, существует $K > 0$ такое, что для всех $T \in [0; \widehat{T}]$

$$0 = \left\| \int_0^T \frac{C_{\varepsilon_k}(t) C_{\varepsilon_k}^*(t) l_{\varepsilon_k}}{\|C_{\varepsilon_k}^*(t) l_{\varepsilon_k}\|} dt \right\| \leq K T. \quad (2.12)$$

Если $\tilde{T} = 0$, то в силу (2.11) и (2.12) после перехода к пределу при $k \rightarrow +\infty$ получим, что $0 = e^{A_0 \tilde{T}} x_0$. В силу взаимной однозначности оператора $e^{A_0 \tilde{T}}$ это противоречит предположению IV.

Итак, $\tilde{T} > 0$. В силу определения T_k при всех достаточно больших k справедливо неравенство $T_k \geq \tilde{T}/2$. Разобьем отрезок интегрирования в (2.9) на отрезки $[0; \sqrt{\varepsilon_k}]$ и $[\sqrt{\varepsilon_k}; T_k]$. В силу (2.12) интеграл по отрезку $[0; \sqrt{\varepsilon_k}]$ есть величина $O(\sqrt{\varepsilon_k})$ при $k \rightarrow +\infty$, а на отрезке $[\sqrt{\varepsilon_k}; T_0] \supset [\sqrt{\varepsilon_k}; T_k]$ в силу (2.8) справедлива асимптотическая формула $C_\varepsilon(t) = C_0(t) + O(\varepsilon)$. С учетом (2.6) равенство (2.11) принимает вид

$$0 = e^{A_0 T_k} x_0 + O(\sqrt{\varepsilon_k}) + \int_{\sqrt{\varepsilon_k}}^{T_k} \frac{(C_0(t) + O(\varepsilon_k))(C_0^*(t) + O(\varepsilon_k))l_{\varepsilon_k}}{\|(C_0^*(t) + O(\varepsilon_k))l_{\varepsilon_k}\|} dt. \quad (2.13)$$

Пусть l_0 — какая-нибудь предельная точка последовательности $\{l_{\varepsilon_k}\}$. Поскольку $\|l_{\varepsilon_k}\| = 1$, то и $\|l_0\| = 1$. В силу вполне управляемости $C_0^*(t)l_0$ может обращаться в 0 не более, чем в конечном числе точек на отрезке $[0; \tilde{T}]$ (в силу п. 1 доказательства теоремы 1). Переходя к пределу в (2.13), получим равенство

$$0 = e^{A_0 \tilde{T}} x_0 + \int_0^{\tilde{T}} \frac{C_0(t)C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|} dt.$$

Поскольку $\|(C_0^*(t)l_0)/\|C_0^*(t)l_0\|\| = 1$ за исключением конечного числа значений аргументов, то $u_0(\tilde{T} - t) := (C_0^*(t)l_0)/\|C_0^*(t)l_0\|$ есть допустимое управление, переводящее систему (1.4) из точки x_0 в точку 0 за время \tilde{T} . Поэтому $T_0 \leq \tilde{T}$. Это в силу утверждения 2 дает равенство $T_0 = \tilde{T}$. \square

Теорема 3. Пусть выполнены условия I–IV, а l_ε ($\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$) — векторы, определяющие оптимальное управление u_ε в задаче (2.9) по формуле (2.10). Тогда $l_\varepsilon \rightarrow l_0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, где l_0 — единственное решение уравнения (1.11).

Доказательство. Почти дословно повторяя рассуждения при доказательстве теоремы 2, получим, что все предельные точки для $\{l_\varepsilon\}$ удовлетворяют уравнению (1.11) и тем самым в силу утверждения 3 совпадают с l_0 . \square

Условие V. Начальный вектор x_0 выбран так, что соответствующее ему оптимальное управление в предельной задаче (1.4), (1.5) непрерывно, т. е. знаменатель $\|C_0^*(t)l_0\|$ в (1.10) не обращается в нуль на отрезке $[0; T_0]$.

3. Асимптотика вектора l_ε и времени быстрогодействия T_ε

Пусть при каждом $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ вектор l_ε определяет оптимальное управление в задаче (1.1), а l_0 — вектор, определяющий оптимальное управление в задаче (1.4), (1.5). Положим

$$\Delta l_\varepsilon := l_\varepsilon - l_0, \quad \Delta T_\varepsilon := T_\varepsilon - T_0. \quad (3.1)$$

В силу теоремы 3 выполняется $\Delta l_\varepsilon = o(1)$ и $\Delta T_\varepsilon = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, и $\Delta l_\varepsilon, \Delta T_\varepsilon$ удовлетворяют системе уравнений (см. (2.4), (2.9) и (1.11))

$$\begin{cases} 0 = W_{11}(T_0 + \Delta T, \varepsilon)x_0 + W_{12}(T_0 + \Delta T, \varepsilon)y_0 - e^{A_0 T_0} x_0 \\ + \int_0^{T_0 + \Delta T} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)(l_0 + \Delta l)}{\|C_\varepsilon^*(t)(l_0 + \Delta l)\|} dt - \int_0^{T_0} \frac{C_0(t)C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|} dt, \\ \|l_0 + \Delta l\|^2 = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Система (3.2) имеет вид $0 = H(w, \varepsilon)$, где $w = (\Delta l^*, \Delta T)^*$ и $H(w, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $w \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow +0$.

Для получения асимптотики решения такого уравнения мы воспользуемся следующим асимптотическим аналогом теоремы о функции, заданной неявно.

Теорема 4. Пусть функция $H: \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ разлагается в степенной асимптотический ряд при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$H(w, \varepsilon) \stackrel{as}{=} \mathcal{H}w + \varepsilon f_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k H_k(w), \quad (3.3)$$

где $\mathcal{H}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ — линейный оператор, каждая компонента $H_k(w)$ является однородным многочленом степени k относительно компонент вектора w и H непрерывна по w при каждом малом $\varepsilon > 0$.

Если оператор \mathcal{H} обратим, то существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1)$ уравнение $0 = H(w, \varepsilon)$ имеет решение $w_\varepsilon = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, и оно разлагается в степенной асимптотический ряд

$$w_\varepsilon \stackrel{as}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k w_k. \quad (3.4)$$

При этом все такие решения уравнения $0 = H(w, \varepsilon)$ асимптотически равны, т.е. если $H(w_\varepsilon, \varepsilon) = 0 = H(\tilde{w}_\varepsilon, \varepsilon)$, $w_\varepsilon = o(1)$ и $\tilde{w}_\varepsilon = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, то $(w_\varepsilon - \tilde{w}_\varepsilon) \stackrel{as}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Доказательство. 1. В силу определения асимптотического разложения из (3.3) получим, что для $\tilde{H}_2(w, \varepsilon) := H(w, \varepsilon) - \mathcal{H}w - \varepsilon f_1$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ справедлива асимптотическая оценка $\|\tilde{H}_2(w, \varepsilon)\| = O(\|w\|^2 + \varepsilon^2)$, а уравнение $0 = H(w, \varepsilon)$ запишется в виде $\mathcal{H}w = -\varepsilon f_1 + \tilde{H}_2(w, \varepsilon)$, или

$$w = -\varepsilon \mathcal{H}^{-1} f_1 + \mathcal{H}^{-1} \tilde{H}_2(w, \varepsilon). \quad (3.5)$$

При этом для некоторой константы $K > 0$ при всех малых $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{H}^{-1} \tilde{H}_2(w, \varepsilon)\| \leq K(\|w\|^2 + \varepsilon^2). \quad (3.6)$$

Пусть $\tilde{w} := w + \varepsilon \mathcal{H}^{-1} f_1$, а $\mathcal{H}^{-1} \tilde{H}_2(\tilde{w} - \varepsilon \mathcal{H}^{-1} f_1, \varepsilon) := \tilde{H}(\tilde{w}, \varepsilon)$. Тогда в силу (3.6)

$$\|\tilde{H}(\tilde{w}, \varepsilon)\| \leq K(\|\tilde{w}\|^2 + 2\varepsilon\|\tilde{w}\| \|\mathcal{H}^{-1} f_1\| + \varepsilon^2 \|\mathcal{H}^{-1} f_1\|^2 + \varepsilon^2) \leq K_1(\|\tilde{w}\|^2 + \varepsilon\|\tilde{w}\| + \varepsilon^2), \quad (3.7)$$

а уравнение (3.5) примет вид

$$\tilde{w} = \tilde{H}(\tilde{w}, \varepsilon). \quad (3.8)$$

Покажем, что уравнение (3.8) при всех малых $\varepsilon > 0$ имеет решение в замкнутом шаре $B[0, \varepsilon]$.

Пусть $\|\tilde{w}\| \leq \varepsilon$. Тогда в силу (3.7) $\|\tilde{H}(\tilde{w}, \varepsilon)\| \leq 4\varepsilon^2 K_1$. Тем самым, найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $4\varepsilon^2 K_1 \leq \varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1)$. Поэтому по теореме Шаудера — Тихонова (см., например, [18, гл. 16, § 3, теорема 1]) в $B[0, \varepsilon]$ есть неподвижная точка отображения $\tilde{H}(\tilde{w}, \varepsilon)$. Таким образом, при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1)$ существует \tilde{w}_ε — решение уравнения (3.8).

Возвращаясь к переменной w , получим, что $w_\varepsilon = \tilde{w}_\varepsilon - \varepsilon \mathcal{H}^{-1} f_1 = O(\varepsilon)$ есть решение уравнения $0 = H(w, \varepsilon)$.

2. Покажем, что любое решение w_ε уравнения $0 = H(w, \varepsilon)$ такое, что $w_\varepsilon = o(1)$ имеет асимптотический порядок $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Действительно, в силу (3.5) и (3.6)

$$\|w_\varepsilon\|(1 - K\|w_\varepsilon\|) \leq \varepsilon \|\mathcal{H}^{-1} f_1\| + K\varepsilon^2,$$

откуда с учетом $w_\varepsilon = o(1)$ и следует асимптотическая оценка $\|w_\varepsilon\| = O(\varepsilon)$.

Система $0 = \mathcal{H}\tilde{w}_1 + \varepsilon f_1$ является системой первого приближения для w_ε , а оператор \mathcal{H} — оператором первого приближения. Из системы первого приближения $\tilde{w}_1 = -\varepsilon\mathcal{H}^{-1}f_1 := \varepsilon w_1$.

3. Далее процесс построения коэффициентов w_k проходит стандартно. Если уже найдены коэффициенты w_1, \dots, w_N , то для новой переменной

$$w_{\varepsilon, N+1} := w_\varepsilon - \sum_{k=1}^N \varepsilon^k w_k$$

в силу определения коэффициентов w_1, \dots, w_N получится уравнение

$$0 = \mathcal{H}w_{\varepsilon, N+1} + \varepsilon^{N+1}f_{N+1} + O(\varepsilon\|w_{\varepsilon, N+1}\| + \|w_{\varepsilon, N+1}\|^2 + \varepsilon^{N+2}). \quad (3.9)$$

И новый коэффициент w_{N+1} определяется следующим образом: $0 = \mathcal{H}\tilde{w}_{N+1} + \varepsilon^{N+1}f_{N+1}$, т. е. $w_{N+1} := -\mathcal{H}^{-1}f_{N+1}$.

Из (3.9) получим

$$\|w_{\varepsilon, N+1}\| \leq K_1(\varepsilon\|w_{\varepsilon, N+1}\| + \|w_{\varepsilon, N+1}\|^2 + \varepsilon^{N+1}).$$

Отсюда, если $\|w_{\varepsilon, N+1}\| \neq 0$, получим, что

$$K_1^{-1} \leq \varepsilon + \|w_{\varepsilon, N+1}\| + \frac{\varepsilon^{N+1}}{\|w_{\varepsilon, N+1}\|}. \quad (3.10)$$

Поскольку $\|w_{\varepsilon, N+1}\| = O(\varepsilon)$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ из (3.10) следует, что

$$\frac{1}{2K_1} \leq \frac{\varepsilon^{N+1}}{\|w_{\varepsilon, N+1}\|},$$

т. е. $\|w_{\varepsilon, N+1}\| \leq 2K_1\varepsilon^{N+1}$. Поэтому построенный ряд (3.4) есть степенное асимптотическое разложение малого решения w_ε уравнения $0 = H(w, \varepsilon)$.

4. Поскольку коэффициенты разложения (3.4) строятся однозначно по коэффициентам разложения функции $H(w, \varepsilon)$, то все малые решения уравнения $0 = H(w, \varepsilon)$ асимптотически равны. \square

Отметим, что доказанная теорема является обобщением теоремы 1.2 из [15]. Она не сводится к теореме о неявно заданной функции, поскольку при добавлении слагаемого $h(w)e^{-1/\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, $h(0) = 0$, а $h(w)$ непрерывная, но не дифференцируемая в любой окрестности нуля, к бесконечно дифференцируемой функции $H(w, \varepsilon)$ сразу нарушаются условия классической теоремы о неявно заданной функции. При этом степенные асимптотические разложения функций $H(w, \varepsilon)$ и $H(w, \varepsilon) + h(w)e^{-1/\varepsilon}$ будут совпадать.

4. Построение асимптотических разложений вектора l_ε и времени быстрого действия T_ε

Чтобы воспользоваться теоремой 4 для получения асимптотических разложений вектора l_ε и времени быстрого действия T_ε , покажем, что правые части системы (3.2) раскладываются в степенные асимптотические ряды по малым Δl , ΔT , ε , и при этом оператор первого приближения обратим.

Представим интеграл в правой части системы (3.2) в виде суммы двух слагаемых

$$\begin{aligned} J(\Delta l, \Delta T, \varepsilon) &:= \int_0^{T_0+\Delta T} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)(l_0 + \Delta l)}{\|C_\varepsilon^*(t)(l_0 + \Delta l)\|} dt = \int_0^{T_0} + \int_{T_0}^{T_0+\Delta T_\varepsilon} \\ &=: J_1(\Delta l, \varepsilon) + J_2(\Delta l, \Delta T, \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Введем следующее дополнительное условие.

У с л о в и е VI. Для любого $\tau \geq 0$ выполняется

$$\|(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} (A_{22}^{-1})^* A_{12}^*) l_0\| \neq 0.$$

Отметим, что в силу (1.6) из условия VI при $\tau = 0$ следует, что

$$\|B_1^* l_0\| \neq 0. \quad (4.2)$$

Утверждение 4. Пусть выполнены предположения I–VI. Тогда найдутся $K > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ и $t \in [0; T_\varepsilon]$ справедливо неравенство $\|C_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon\| \geq K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 3, формулы (2.8) и того, что $\|e^{A_{22}^* \tau}\| \leq K_1 e^{-\gamma \tau}$ ($K_1 > 0$, $\gamma > 0$) при $\varepsilon \rightarrow +0$ (см., например, утверждение 2.1 из [14]), получим

$$C_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon = \begin{cases} C_0^*(t) l_0 + o(1), & t > \sqrt{\varepsilon}, \\ (B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} (A_{22}^{-1})^* A_{12}^*) l_0 + o(1), & 0 \leq t \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad \tau = t/\varepsilon. \end{cases}$$

Отметим, что $B_0^* l_0 = C_0^*(0) l_0$. В силу непрерывности $C_0^*(t)$, $e^{A_{22}^* \tau}$ и $\|e^{A_{22}^* \tau}\| \rightarrow +0$ при $\tau \rightarrow +\infty$ получим справедливость заключения доказываемого утверждения. \square

Таким образом, подынтегральная функция в (4.1) не имеет особенностей в знаменателе, поэтому раскладывается в степенной ряд по Δl и ε с аналитическими по t и t/ε коэффициентами.

Алгоритм получения степенной асимптотики каждого из интегралов J_1 и J_2 подробно описан в [14].

Выпишем образ линейного оператора $\mathcal{H}w$, где $w = (\Delta l, \Delta T)^*$,

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} \Delta l \\ \Delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1(\Delta l, \Delta T) \\ \mathcal{H}_2(\Delta l, \Delta T) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\Delta l, \Delta T) &= \int_0^{T_0} C_0(t) \frac{C_0^*(t) \Delta l \|C_0^*(t) l_0\|^2 - \langle C_0^*(t) \Delta l, C_0^*(t) l_0 \rangle C_0^*(t) l_0}{\|C_0^*(t) l_0\|^3} dt \\ &\quad + e^{A_0 T_0} A_0 x_0 \Delta T + \frac{C_0(T_0) C_0^*(T_0) l_0}{\|C_0^*(T_0) l_0\|} \Delta T, \\ \mathcal{H}_2(\Delta l, \Delta T) &= \langle l_0, \Delta l \rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Покажем, что оператор \mathcal{H} обратим. Поскольку обратимость линейного оператора, действующего в конечномерном линейном пространстве, эквивалентна его инъективности, то проверим инъективность этого оператора. Покажем, что ядро оператора \mathcal{H} нулевое. Домножим сначала уравнение $\mathcal{H}_1(\Delta l, \Delta T) = 0$ скалярно на вектор l_0 , при этом подынтегральная функция обратится в нуль тождественно и уравнение примет вид

$$\Delta T (\langle e^{A_0 T_0} A_0 x_0, l_0 \rangle + \|C_0^*(T_0) l_0\|) = 0. \quad (4.4)$$

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\langle e^{A_0 T_0} A_0 x_0, l_0 \rangle = \|B_0^* l_0\| - \|C_0^*(T_0) l_0\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Домножим обе части первого уравнения (1.11) скалярно на l_0 , тогда

$$\begin{aligned} \langle e^{A_0 T_0} A_0 x_0, l_0 \rangle &= \langle e^{A_0 T_0} x_0, A_0^* l_0 \rangle = - \int_0^{T_0} \frac{\langle C_0(t) C_0^*(t) l_0, A_0^* l_0 \rangle}{\|C_0^*(t) l_0\|} dt = - \int_0^{T_0} \frac{\langle C_0^*(t) l_0, C_0^*(t) A_0^* l_0 \rangle}{\|C_0^*(t) l_0\|} dt \\ &= - \int_0^{T_0} d\|C_0^*(t) l_0\| = \|B_0^* l_0\| - \|C_0^*(T_0) l_0\|. \end{aligned}$$

\square

В силу леммы 1 и условия V из (4.4) получаем, что $\Delta T = 0$.

Далее покажем, что $\Delta l = 0$. Предположим, что это не так, и домножим уравнение $\mathcal{H}_1(\Delta l, \Delta T) = 0$ скалярно на вектор $\Delta l \neq 0$. В числителе подынтегральной функции получим выражение

$$\|C_0^*(t)l_0\|^2 \|C_0^*(t)\Delta l\|^2 - (\langle C_0^*(t)l_0, C_0^*(t)\Delta l \rangle)^2. \quad (4.5)$$

В силу неравенства Коши — Буняковского при всех $t \in [0, T_0]$ выражение (4.5) неотрицательно. Из равенства нулю интеграла по невырожденному промежутку от неотрицательной непрерывной функции следует, что подынтегральная функция тождественно равна нулю. Равенство нулю в выражении (4.5) достигается только в случае коллинеарности соответствующих векторов:

$$\forall t \in [0, T_0] \quad C_0^*(t)l_0 \parallel C_0^*(t)\Delta l.$$

В силу условия III отсюда следует, что $l_0 \parallel \Delta l$, что противоречит уравнению $\langle l_0, \Delta l \rangle = 0$ (см. (4.3)). Значит, наше предположение неверно и $\Delta l = 0$. Следовательно, оператор \mathcal{H} обратим и в силу теоремы 4 (в которой, в частности, описан алгоритм получения коэффициентов асимптотического разложения) справедлива следующая итоговая теорема.

Теорема 5. При выполнении условий I–VI время быстродействия и вектор, определяющий оптимальное управление, раскладываются в асимптотические ряды в смысле Пуанкаре по степеням малого параметра ε .

5. Примеры

1. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = y + u, & x, y \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon \dot{y} = -y + u, & \|u\| \leq 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0, \quad y(0) = y_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}, \quad T_\varepsilon \rightarrow \min. \end{cases}$$

Матрицы \mathcal{A}_ε и \mathcal{B}_ε (1.2) примут вид

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} I \\ \varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}; \quad (5.1)$$

здесь I — матрица тождественного отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} I & \varepsilon(1 - e^{-t/\varepsilon})I \\ 0 & e^{-t/\varepsilon}I \end{pmatrix}, \quad C_\varepsilon(t) = [e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon]_1 = (2 - e^{-t/\varepsilon})I. \quad (5.2)$$

В предельной задаче

$$\begin{cases} \dot{x} = 2u, & \|u\| \leq 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_0) = 0, \quad T_0 \rightarrow \min, \\ A_0 = 0, \quad B_0 = 2I, \quad C_0(t) \equiv 2I \end{cases}$$

оптимальное управление и время быстродействия вычисляются по формулам

$$u_0(t) \equiv -\frac{x_0}{\|x_0\|} =: l_0, \quad T_0 = \frac{\|x_0\|}{2}.$$

В данном примере все условия I–VI выполнены, поэтому время быстрогодействия и вектор, определяющий оптимальное управление, раскладываются в асимптотические ряды по степеням малого параметра ε .

Отметим, что оператор \mathcal{H} (5.5) в рассматриваемом примере имеет вид

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} \Delta l \\ \Delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2x_0}{\|x_0\|} \Delta T + \|x_0\| \Delta l - \frac{\langle x_0, \Delta l \rangle x_0}{\|x_0\|} \\ \langle x_0, \Delta l \rangle \end{pmatrix},$$

а система первого приближения —

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon y_0 - \frac{2x_0}{\|x_0\|} \Delta T + \|x_0\| \Delta l - \frac{\langle x_0, \Delta l \rangle x_0}{\|x_0\|}, \\ 0 = \langle x_0, \Delta l \rangle. \end{cases} \quad (5.3)$$

Отсюда с учетом второго соотношения в (5.3) получаем

$$0 = \varepsilon y_0 - \frac{2x_0}{\|x_0\|} \Delta T + \|x_0\| \Delta l.$$

Умножив последнее равенство скалярно на x_0 , с учетом второго соотношения в (5.3) найдем $\Delta T_\varepsilon = \varepsilon \langle y_0, x_0 \rangle / (2\|x_0\|)$. После чего найдем и Δl_ε . Таким образом, в рассматриваемой задаче верны следующие асимптотические при $\varepsilon \rightarrow +0$ равенства:

$$T_\varepsilon = \frac{\|x_0\|}{2} + \varepsilon \frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{2\|x_0\|} + O(\varepsilon^2), \quad l_\varepsilon = -\frac{x_0}{\|x_0\|} + \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \left(\frac{x_0}{\|x_0\|^2} \langle x_0, y_0 \rangle - y_0 \right) + O(\varepsilon^2).$$

2. Движение точки малой массы $\varepsilon > 0$ с сопротивлением под действием ограниченной управляющей силы моделируется следующей задачей:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x, y \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon \dot{y} = -y + u, & \|u\| \leq 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0, y(0) = y_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_\varepsilon) = 0, y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}, \quad T_\varepsilon \rightarrow \min. \end{cases}$$

Матрицы \mathcal{A}_ε и $e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}$ такие же, как и в первом примере (см. (5.1), (5.2)), а

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1} I \end{pmatrix}, \quad C_\varepsilon(t) = [e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon]_1 = (1 - e^{-t/\varepsilon}) I.$$

В предельной задаче

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \quad \|u\| \leq 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0, \quad x(T_0) = 0, \quad T_0 \rightarrow \min \end{cases}$$

оптимальное управление и время быстрогодействия вычисляются по формулам

$$u_0(t) \equiv -\frac{x_0}{\|x_0\|} =: l_0, \quad T_0 = \|x_0\|.$$

Отметим, что в этой задаче условия I–V выполнены, поэтому справедливы предельные соотношения для T_ε и l_ε и основное уравнение.

Условие VI не выполнено, поскольку $B_1^* = 0$ (см. (4.2)). Однако и для этой задачи время быстрогодействия и вектор, определяющий оптимальное управление, раскладываются в асимптотические ряды по степеням малого параметра ε .

Действительно, в данном примере интеграл из основной системы вычисляется в явном виде и основная система уравнений (2.9), (2.4) принимает вид

$$0 = x_0 + \varepsilon y_0 + T_\varepsilon l_\varepsilon - \varepsilon l_\varepsilon + \mathbb{O}, \quad \|l_\varepsilon\| = 1;$$

здесь \mathbb{O} — асимптотический нуль относительно степенной асимптотической последовательности, т. е. $\forall \gamma > 0 \mathbb{O} = o(\varepsilon^\gamma)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Домножим скалярно первое уравнение системы на вектор l_ε , с учетом второго уравнения получим

$$T_\varepsilon = \varepsilon - \langle x_0 + \varepsilon y_0, l_\varepsilon \rangle. \quad (5.4)$$

Подставив выражение для T_ε обратно в первое уравнение, преобразуем это уравнение к виду

$$0 = x_0 + \varepsilon y_0 - \langle x_0 + \varepsilon y_0, l_\varepsilon \rangle l_\varepsilon. \quad (5.5)$$

Следовательно, $l_\varepsilon \|(x_0 + \varepsilon y_0)$ и найдется такой скаляр δ_ε , что $l_\varepsilon = \delta_\varepsilon (x_0 + \varepsilon y_0)$. Из (5.5) получим, что $\delta_\varepsilon = \pm \|x_0 + \varepsilon y_0\|^{-1}$, тогда в силу того, что $T_\varepsilon > 0$, из (5.4) вытекает

$$l_\varepsilon = -\frac{x_0 + \varepsilon y_0}{\|x_0 + \varepsilon y_0\|}, \quad T_\varepsilon = \|x_0 + \varepsilon y_0\| + \varepsilon. \quad (5.6)$$

Для $\Delta l_\varepsilon = l_\varepsilon + \frac{x_0}{\|x_0\|}$ и $\Delta T_\varepsilon = T_\varepsilon - \|x_0\|$ (3.1) из (5.6) получаются степенные асимптотические разложения. В частности, верны следующие асимптотические при $\varepsilon \rightarrow +0$ равенства:

$$T_\varepsilon = \|x_0\| + \varepsilon \left(1 + \frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|x_0\|^2}\right) + O(\varepsilon^2), \quad l_\varepsilon = -\frac{x_0}{\|x_0\|} + \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \left(\frac{x_0}{\|x_0\|^2} \langle x_0, y_0 \rangle - y_0\right) + O(\varepsilon^2).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Дмитриев М. Г., Курина Г. А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
3. **Zhang Y., Naidu D. S., Chenxiao Cai, Yun Zou.** Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012 // Intern. J. Informaton and Systems Sciences. 2014. Vol. 9, no. 1. P. 1–36.
4. **Kokotovic P. V., Haddad A. H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852.
5. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
6. **Donchev A. L., Veliev V. M.** Singular perturbation in Mayer's problem for linear systems // SIAM J. Control Optim. 1983. Vol. 21, no. 4. P. 566–581.
7. **Курина Г. А., Нгуен Т. Х.** Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 4. С. 628–652.
8. **Kurina G. A., Hoai N. T.** Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1997. P. 020073. doi: 10.1063/1.5049067.
9. **Данилин А. Р., Ильин А. М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстрогодействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
10. **Данилин А. Р., Коврижных О. О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
11. **Данилин А. Р., Парышева Ю. В.** Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 2. С. 151–154.

12. **Шабуров А. А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и гладкими геометрическими ограничениями на управление // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2017. Т. 50, № 2. С. 110–120.
13. **Данилин А. Р., Коврижных О. О.** О зависимости задачи быстрогодействия для линейной системы от двух малых параметров // Вест. Челяб. гос. ун-та. Математика, механика, информатика. 2011. Вып. 14. С. 46–60.
14. **Шабуров А. А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и гладкими геометрическими ограничениями на управление // Вест. Тамбов. ун-та. Серия: естественные и технические науки. 2019. Т. 24, № 125. С. 119–614. doi: 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136.
15. **Шабуров А. А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и интегральным выпуклым критерием качества: дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2019. 132 с.
16. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
17. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
18. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

Поступила 15.01.2020

После доработки 27.02.2020

Принята к публикации 2.03.2020

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: koo@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, N Y; London, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 0470693819. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
2. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. doi: 10.1134/S0005117906010012.
3. Zhang Y., Naidu D.S., Chenxiao Cai and Yun Zou Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002-2012 *Inter. J. Informaton and Systems Sciences*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.
4. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes. *IEEE Trans. Automat. Control.*, 1975, vol. 20, no. 1, pp. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852.
5. Dontchev A.L. *Perturbations, approximations and sensitivity analisis of optimal control systems*. Berlin; Heidelberg; N Y; Tokio, Springer-Verlag, 1983, 161 p. doi: 10.1007/BFb0043612. Translated under the title *Sistemy optimal'nogo upravleniya: Vozmushcheniya, priblizheniya i analiz chuvstvitel'nosti*, Moscow, Mir Publ., 1987, 156 p.

6. Donchev A.L., Veliev V.M. Singular Perturbation in Mayer's Problem for Linear Systems. *SIAM J. Control Optim.* 1983. vol. 21, no. 4, pp. 566–581. doi: 10.1137/0321034.
7. Kurina G.A., Nguyen T.H. Asymptotic solution of singularly perturbed linear-quadratic optimal control problems with discontinuous coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 4, pp. 524–547. doi: 10.1134/S0965542512040100.
8. Kurina G.A., Hoai N.T. Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-Quadratic control problem in a critical case *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1997, pp. 020073. doi: 10.1063/1.5049067.
9. Danilin A.R., Il'in A.M. On the structure of the solution of a perturbed optimal-time control problem. *Fundament. Prikl. Matematika*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 905–926 (in Russian).
10. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 1, pp. 465–467. doi:10.1134/S1064562413040364.
11. Danilin A.R., Parysheva Y.V. Asymptotics of the optimal cost functional in a linear optimal control problem. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 80, no. 1, pp. 478–481. doi:10.1134/S1064562409040073.
12. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of a solution for the singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index and smooth control constraints *Proc. of the Institute of Math. and Inf. at Udmurt State University*, 2017, vol. 50, no 2, pp. 110–120.
13. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. On the dependence of the time-optimal control problem for a linear system of two small parameters. *Vest. Chelyabinsk. Univ., Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika*, iss. 14, 2011, pp. 46–60 (in Russian).
14. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of the solution to a singularly perturbed optimal control problem with an integral convex quality criterion and smooth geometric control constraints. *Vestn. of Tambov. Univ. Ser: Natural and Technical Sciences*. 2019, vol. 24, no. 125, pp. 119–136 (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136.
15. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of the solution to singularly perturbed optimal control problems with smooth geometric control constraints and an integral convex quality index. The dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences. Yekaterinburg, 2019. 132 p.
16. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. N Y; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635.
17. Vassilyeva A.B., Butuzov V.F. *Asymptoticheskie razlozheniya reshenyi singul'arno vozmushchennykh uravnenyi* [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow: Nauka Publ., 1973, 272 p.
18. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional analysis*. 2nd ed. N Y: Pergamon Press Ltd, 1982, 589 p. ISBN: 0-08-023036-9. Original Russian text (3rd ed.) published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz*. Moscow: Nauka Publ., 1984, 752 p.

Received January 15, 2020

Revised February 27, 2020

Accepted March 2, 2020

Funding Agency: O. O. Kovrizhnykh's research is supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru.

Ol'ga Olegovna Kovrizhnykh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: koo@imm.uran.ru.

Cite this article as: A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of a solution to a singularly perturbed time-optimal control problem of transferring an object to a set. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 132–146.

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЛИЕВА ТИПА НАД ПОЛЯМИ РАЗНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, ГРАФЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ¹

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля*, или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$. В “Коуровской тетради” А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одинаковым графом Грюнберга — Кегеля. М. Хаги (2003) и М. А. Звездина (2013) получили такое описание в случае, когда одна из этих групп является спорадической и знакопеременной группой соответственно. Автор (2014) решил этот вопрос для пар конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики. В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G — конечная простая группа исключительного лиева типа над полем из q элементов и G_1 — неизоморфная группе G конечная простая группа лиева типа над полем из q_1 элементов, где q и q_1 взаимно просты. Если $GK(G) = GK(G_1)$, то выполнено одно из следующих утверждений:

- (1) $\{G, G_1\} = \{G_2(3), A_1(13)\}$;
- (2) $\{G, G_1\} = \{{}^2F_4(2)', A_3(3)\}$;
- (3) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_2(q_1)\}$, где $(q_1 - 1)_3 \neq 3$, $q_1 + 1 \neq 2^{k_1}$;
- (4) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_4^\pm(q_1)\}$, где $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$;
- (5) $\{G, G_1\} = \{G_2(q), G_2(q_1)\}$, где q и q_1 не являются степенями числа 3;
- (6) $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{F_4(q), F_4(q_1)\}$, $\{{}^3D_4(q), {}^3D_4(q_1)\}$, $\{E_8(q), E_8(q_1)\}$.

Существование пар групп в пп. (3)–(6) неизвестно.

Ключевые слова: конечная простая группа исключительного лиева типа, спектр, граф простых чисел.

M. R. Zinov'eva. On finite simple groups of exceptional Lie type over fields of different characteristics with coinciding prime graphs.

Suppose that G is a finite group, $\pi(G)$ is the set of prime divisors of its order, and $\omega(G)$ is the set of orders of its elements. A graph with the following adjacency relation is defined on $\pi(G)$: different vertices r and s from $\pi(G)$ are adjacent if and only if $rs \in \omega(G)$. This graph is called the *Gruenberg–Kegel graph* or the *prime graph* of G and is denoted by $GK(G)$. In A. V. Vasil'ev's Question 16.26 from the “Kourovka Notebook,” it is required to describe all pairs of nonisomorphic finite simple nonabelian groups with identical Gruenberg–Kegel graphs. M. Hagie (2003) and M. A. Zvezdina (2013) gave such a description in the case where one of the groups coincides with a sporadic group and an alternating group, respectively. The author (2014) solved this question for pairs finite simple groups of Lie type over fields of the same characteristic. In the present paper we prove the following theorem.

Theorem. Let G be a finite simple group of exceptional Lie type over a field with q elements, and let G_1 be a finite simple group of Lie type over a field with q elements nonisomorphic to G , where q and q_1 are coprime. If $GK(G) = GK(G_1)$, then one of the following statements holds:

- (1) $\{G, G_1\} = \{G_2(3), A_1(13)\}$;
- (2) $\{G, G_1\} = \{{}^2F_4(2)', A_3(3)\}$;
- (3) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_2(q_1)\}$, where $(q_1 - 1)_3 \neq 3$ and $q_1 + 1 \neq 2^{k_1}$;
- (4) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_4^\pm(q_1)\}$, where $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$;
- (5) $\{G, G_1\} = \{G_2(q), G_2(q_1)\}$, where q and q_1 are not powers of the number 3;
- (6) $\{G, G_1\}$ is one of the pairs $\{F_4(q), F_4(q_1)\}$, $\{{}^3D_4(q), {}^3D_4(q_1)\}$, and $\{E_8(q), E_8(q_1)\}$.

The existence of pairs of groups in statements (3)–(6) is unknown.

Keywords: finite simple exceptional group of Lie type, spectrum, prime graph.

MSC: 05C25, 20D05, 20D06

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-147-160

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00456) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности, Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, №02.А03.21.0006.

Введение

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — спектр группы G , т. е. множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s в $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля*, или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$.

В “Коуровской тетради” [1] А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одинаковым графом Грюнберга — Кегеля. М. Хаги [2] и М. А. Звезда [3] получили такое описание в случае, когда одна из групп пары совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно.

Автор в [4] решил этот вопрос для пар конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики.

В случае конечных простых групп лиева типа разных характеристик в 2016 г. доказана теорема редукции, описывающая равенство графов классических групп лиева типа достаточно большого ранга (см. [5]). В 2017 г. автор исследовал две конечные простые группы G и G_1 лиева типа над полями разных характеристик с $t(G) = t(G_1) \geq 5$, причем одна из этих групп является линейной группой. Тем самым уточнен первый пункт теоремы редукции.

В публикации 2018 г. (М. Р. Зиновьева. О конечных простых линейных и унитарных группах малых размерностей над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 73–90) рассмотрены две конечные простые группы G и G_1 лиева типа над полями разных характеристик с $t(G) = t(G_1) \leq 3$, причем одна из этих групп является линейной или унитарной группой. Далее будем ссылаться на эту работу как на *статью автора* 2018 г.

В настоящем исследовании автор продолжает изучать новые случаи проблемы. Мы рассматриваем две конечные простые группы лиева типа над полями разных характеристик, одна из которых является группой исключительного лиева типа.

Далее $q = p^f$ и $q_1 = p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные простые числа и f, f_1 — натуральные числа. Для $\varepsilon \in \{+, -\}$ через $A_{n-1}^\varepsilon(q)$ обозначается $A_{n-1}(q) = L_n(q) = PSL_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2A_{n-1}(q) = U_n(q) = PSU_n(q)$ при $\varepsilon = -$, через $E_6^\varepsilon(q)$ обозначается $E_6(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2E_6(q)$ при $\varepsilon = -$.

Под группой исключительного лиева типа понимается одна из групп $G_2(q), F_4(q), {}^3D_4(q), {}^2B_2(q), {}^2G_2(q), {}^2F_4(q)$, где $q > 2, {}^2F_4(2)', E_6(q), {}^2E_6(q), E_7(q), E_8(q)$.

Используя сведения о графах простых чисел конечных простых групп из [6–9], мы доказываем следующую теорему.

Теорема. Пусть G — конечная простая группа исключительного лиева типа над полем из q элементов и G_1 — неизоморфная группе G конечная простая группа лиева типа над полем из q_1 элементов, где q и q_1 взаимно просты. Если $GK(G) = GK(G_1)$, то выполнено одно из следующих утверждений:

- (1) $\{G, G_1\} = \{G_2(3), A_1(13)\}$;
- (2) $\{G, G_1\} = \{{}^2F_4(2)', A_3(3)\}$;
- (3) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_2(q_1)\}$, где $(q_1 - 1)_3 \neq 3, q_1 + 1 \neq 2^{k_1}$;
- (4) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_4^\pm(q_1)\}$, где $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$;
- (5) $\{G, G_1\} = \{G_2(q), G_2(q_1)\}$, где q и q_1 не являются степенями числа 3;
- (6) $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{F_4(q), F_4(q_1)\}, \{{}^3D_4(q), {}^3D_4(q_1)\}, \{E_8(q), E_8(q_1)\}$.

Существование пар групп в пп. (3)–(6) неизвестно.

З а м е ч а н и е. Автору известны только следующие пары неизоморфных конечных простых групп лиева типа над полями разных характеристик с одинаковым графом простых чисел: $\{A_1(9), A_1(4)\}, \{A_1(9), A_1(5)\}, \{A_1(7), A_1(8)\}, \{{}^2A_3(3), A_1(49)\}, \{A_3(3), {}^2F_4(2)'\}, \{G_2(3), A_1(13)\}$.

Г и п о т е з а. Указанные в замечании пары исчерпывают все пары неизоморфных конечных простых групп лиева типа, заданные над полями разных характеристик с одинаковым графом простых чисел.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть G — конечная группа. Через $\pi(n)$ обозначается множество простых делителей натурального числа n . Для натурального n через n_p обозначается p -часть числа n . Обозначим $\pi(|G|)$ через $\pi(G)$.

Обозначим множество связных компонент графа $GK(G)$ через $\{\pi_i \mid i = 1, \dots, s(G)\}$, где $s(G)$ — число связных компонент графа $GK(G)$; если порядок G четен, считаем $2 \in \pi_1$. В [6; 7] описаны связные компоненты графов простых чисел всех конечных простых групп. В [8; 9] был получен арифметический критерий смежности двух вершин в графе простых чисел для каждой конечной простой неабелевой группы.

Коклик графа называется его индуцированный подграф с попарно не смежными вершинами. Мощность (размер) коклики называется ее *порядком*. *Максимальной коклик* называется коклика, которая не содержится в другой коклике. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(r, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число r .

Для любой неединичной конечной группы G положим $\mathcal{T}(G) = \{t(r, G) \mid r \in \pi(G)\}$ и будем рассматривать $\mathcal{T}(G)$ как строго убывающую последовательность $(t(r_1, G), t(r_2, G), \dots)$, где r_i — некоторые числа из $\pi(G)$. В статье [5, леммы 8–14] вычислены $\mathcal{T}(G)$ для простых классических групп G .

Согласно [9, определения 3.3–3.8], определяются подмножества $\Theta(G)$ и $\Theta'(G)$ множества $\pi(G)$. Если G — одна из групп ${}^2B_2(2^{2m+1})$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$ или $A_2^\epsilon(q)$, то $\Theta(G)$ и $\Theta'(G)$ определяются согласно [9, определения 3.3–3.7]. Если G не является одной из групп ${}^2B_2(2^{2m+1})$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$ или $A_2^\epsilon(q)$, то согласно [9, определение 3.8] через $\theta(G)$ обозначается пересечение всех коклик максимального порядка графа $GK(G)$, а через $\Theta(G)$ — множество $\{\theta(G)\}$. Множество $\Theta'(G)$ состоит из всех подмножеств $\theta'(G)$ из $\pi(G) \setminus \theta(G)$, для которых $\theta(G) \cup \theta'(G)$ — коклика максимального порядка в графе $GK(G)$.

Лемма 1 (теорема Жигмонди [10]). *Пусть q и n — неединичные натуральные числа. Тогда существует простое число r , делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при $1 \leq i < n$, причем $r \equiv 1 \pmod{n}$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$.*

Согласно [8], если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r, q) = 1$, то через $e(r, q)$ обозначается минимальное натуральное число n с $q^n \equiv 1 \pmod{r}$. Если q нечетно, то $e(2, q)$ равно 1 при $q \equiv 1 \pmod{4}$ и 2 при $q \equiv -1 \pmod{4}$. Говорят, что простое число r с $e(r, q) = n$ является *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. Через $r_n(q)$ обозначается некоторый примитивный простой делитель числа $q^n - 1$, а через $R_n(q)$ множество всех таких делителей. По лемме 1 примитивный простой делитель $r_n(q)$ существует за исключением указанных в лемме 1 случаев. Если q фиксировано, то $r_n(q)$ обозначается через r_n .

Пусть n — натуральное число. Следуя [8; 9], положим $m_1(B, n) = 2^{2n+1} - 1$, $m_2(B, n) = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, $m_3(B, n) = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$, $m_1(G, n) = 3^{2n+1} - 1$, $m_2(G, n) = 3^{2n+1} + 1$, $m_3(G, n) = 3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1$, $m_4(G, n) = 3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1$, $m_1(F, n) = 2^{2n+1} - 1$, $m_2(F, n) = 2^{2n+1} + 1$, $m_3(F, n) = 2^{4n+2} + 1$, $m_4(F, n) = 2^{4n+2} - 2^{2n+1} + 1$, $m_5(F, n) = 2^{4n+2} - 2^{3n+2} + 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, $m_6(F, n) = 2^{4n+2} + 2^{3n+2} + 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$.

Через $S_i(G)$ обозначается множество $\pi(m_i(F, n)) \setminus \{3\}$ для $G = {}^2F_4(2^{2n+1})$ и $i = 1, \dots, 6$ и $\pi(m_i(G, n)) \setminus \{2\}$ для $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$ и $i = 1, \dots, 4$. Если группа G фиксирована, то положим $S_i = S_i(G)$ и обозначим через s_i любой элемент из S_i .

**Конечные простые группы G лиева типа
над полем нечетной характеристики p с $t(G) = 5$**

G	условия на G	$t(2, G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	элементы $\Theta'(G)$
$A_8(q)$	$q \neq 3$	2	5	1	$\{r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\{\emptyset\}$
${}^2A_8(q)$		2	5	1	$\{r_3, r_8, r_{10}, r_{14}, r_{18}\}$	$\{\emptyset\}$
$B_5(q), C_5(q)$		2	5	1	$\{r_3, r_5, r_6, r_8, r_{10}\}$	$\{\emptyset\}$
$A_9(q)$		2	5	1	$\{r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\{r_5\}, \{r_{10}\}$
${}^2A_9(q)$		2	5	1	$\{r_3, r_8, r_{14}, r_{18}\}$	$\{r_5\}, \{r_{10}\}$
$B_6(q), C_6(q)$		2	5	1	$\{r_5, r_8, r_{10}, r_{12}\}$	$\{r_3\}, \{r_6\}$
${}^2D_6(q)$		2	5	1	$\{r_5, r_8, r_{10}, r_{12}\}$	$\{r_3\}, \{r_4\}, \{r_6\}$
$F_4(q)$		2	5	2	$\{r_3, r_4, r_6, r_8, r_{12}\}$	$\{\emptyset\}$
$B_5(3), C_5(3)$		2	5	2	$\{7, 11, 13, 41, 61\}$	$\{\emptyset\}$
$E_6(q)$		3	5	2	$\{r_5, r_8, r_9\}$	$\{r_3, r_4\}, \{r_4, r_{12}\},$ $\{r_6, r_{12}\}$
${}^2E_6(q)$	3	5	2	$\{r_8, r_{10}, r_{18}\}$	$\{r_3, r_{12}\}, \{r_4, r_6\},$ $\{r_4, r_{12}\}$	
${}^2G_2(3^{2n+1})$	$n \geq 1$	3	5	3	$\{3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$\{\emptyset\}$

С использованием результатов [6–9] в статье [4] были составлены таблицы, в которых описаны некоторые числовые характеристики и максимальные коклики графов простых чисел конечных простых групп G лиева типа над полем порядка q с $t(G) \leq 6$ для четного q и с $t(G) \leq 4$ для нечетного q . Мы дополним эти таблицы, приведя все конечные простые группы G лиева типа для нечетного q с $t(G) = 5$ (см. таблицу выше).

Лемма 2 (Героно [11]). Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b . Тогда пара (p^a, q^b) равна $(3^2, 2^3)$, $(p, 2^b)$ или $(2^a, q)$.

Лемма 3 [12]. Диофантово уравнение $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$ для целых чисел $x > 1, y > 1, n > 2, q \geq 2$ кроме решений $(3, 11, 5, 2)$, $(7, 20, 4, 2)$, $(18, 7, 3, 3)$ не имеет других решений (x, y, n, q) , если выполнено одно из следующих условий: (i) $q = 2$, (ii) $3 \mid n$, (iii) $4 \mid n$, (iv) $q = 3$ и $n \neq 6k + 5$ для некоторого $k \geq 0$.

Лемма 4 [6, лемма 3; 13, лемма 6(iii)]. Пусть a, s, t — натуральные числа. Тогда

$$(a) (a^s - 1, a^t - 1) = a^{(s,t)} - 1;$$

$$(b) (a^s - 1, a^t + 1) = \begin{cases} a^{(s,t)} + 1, & \text{если } s/(s,t) \text{ четно и } t/(s,t) \text{ нечетно,} \\ (2, a + 1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма 5. Пусть p — простое нечетное число, m и n — натуральные числа. Тогда

(1) если $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^n - 1)$, то либо m делит n , либо $m = 2$, n нечетно и $p = 2^s - 1$, где s — простое число;

(2) если $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^n + 1)$, то либо $m = 1$ и $p = 2$, либо $m = 2$, $p = 2$ и n нечетно, либо $m = 1$ и $p = 2^{2^l} + 1$, либо $m = 2$, $p = 2^{2^l} + 1$, n нечетно, либо $m = 2$, $p = 3$ и n четно, либо $m = 4$, $p = 3$ и n — удвоенное нечетное число.

Доказательство. (1) Пусть $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^n + 1)$. Предположим, что утверждение (1) неверно. Тогда $m \geq 2$ и $(m, p) \neq (2, 2^s - 1)$ для простого числа s . По лемме 1 существует $t \in R_m(p)$. По условию $t \in \pi(p^n - 1)$ и, следовательно, по п. (a) леммы 4 $t \in \pi(p^{(m,n)} - 1)$. Примитивность числа t влечет, что $(m, n) = m$, т. е. m делит n ; противоречие.

(2) Пусть $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^n + 1)$. Предположим, что $p = 2$. Если $(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$, то $m = 1$ и п. (2) леммы выполняется. Поэтому можно считать, что $(2^m - 1, 2^n + 1) > 1$. По п. (b) леммы 4 имеем $(2^m - 1, 2^n + 1) = 2^{(m,n)} + 1$, $m/(m, n)$ четно и $n/(m, n)$ нечетно. Поскольку $(2^n - 1, 2^n + 1) = 1$ и $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^n + 1)$, то $(2^m - 1, 2^n - 1) = 1$. Но п. (a) леммы 4 имеем $(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1$ и, следовательно, $(m, n) = 1$ и n нечетно. Поскольку $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^n + 1) \subseteq \pi(p^{2n} - 1)$, то по п. (1) m делит $2n$, откуда $m = 2$ и п. (2) леммы выполняется.

Предположим, что $p > 2$. Поскольку $p - 1$ делит $p^m - 1$, имеем $\pi(p - 1) \subseteq \pi(p^n + 1)$. Но $(p - 1, p^n + 1) = 2$, следовательно, ввиду леммы 2 имеем $p = 2^{2^l} + 1$. Можно считать, что $m \geq 2$.

Пусть $m = 2$. Тогда $\pi(p + 1) \subseteq \pi(p^n + 1)$. Если n нечетно, то п. (2) выполняется. Если n четно, то $(p + 1, p^n + 1) = (p + 1, p^n - 1 + 2) = (p + 1, 2) = 2$, откуда $\pi(p + 1)$ и, следовательно, $\pi(p^2 - 1) = \{2\}$, т. е. $p = 3$ и п. (2) леммы выполняется.

Пусть $m \geq 3$. По лемме 1 существует $t \in \pi(p^m - 1) \setminus \{2\}$. По условию $t \in \pi(p^n + 1)$, следовательно, $t \in \pi(p^{(m,n)} + 1)$. По п. (b) леммы 4 имеем $(p^m - 1, p^n + 1) = p^{(m,n)} + 1$, $m/(m, n)$ четно и $n/(m, n)$ нечетно. Так как $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^{(m,n)} + 1) \subseteq \pi(p^{2(m,n)} - 1)$, то по п. (1) леммы m делит $2(m, n)$, откуда $m = 2(m, n)$. Таким образом, $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^{m/2} + 1)$. Так как $(p^{m/2} - 1, p^{m/2} + 1) = 2$, то $\pi(p^{m/2} - 1) = \{2\}$. Так как $m \geq 3$, то по лемме 2 имеем $m/2 = 2$, $p = 3$ и n — удвоенное нечетное число, т. е. п. (2) леммы выполняется. \square

Лемма 6. Пусть α — натуральное число. Тогда

- (a) $\pi(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2) \neq \{2, 7\}$ при $\alpha \equiv 4 \pmod{6}$;
 (b) если $\pi(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2) = \{2, 7\}$ и $\alpha \equiv 1 \pmod{6}$, то $\alpha = 1$.

Доказательство. (a) От противного. Предположим, что $\alpha \equiv 4 \pmod{6}$ и $\pi(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2) = \{2, 7\}$. Тогда $\alpha = 4 + 6t$ для некоторого целого числа t , поэтому $3^{6t} = (735 - 6)^t \equiv (-6)^t \pmod{49}$, $3^\alpha \equiv 32(-6)^t \pmod{49}$ и $3^{2\alpha} \equiv 44(36)^t \pmod{49}$. Если

$$t \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{7},$$

то $3^\alpha \equiv 32, 4, 25, 46, 18, 39, 11 \pmod{49}$ и $3^{2\alpha} \equiv 44, 16, 37, 9, 30, 2, 23 \pmod{49}$ соответственно. По предположению $3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2 \equiv 14 \pmod{49}$ и, следовательно, $3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2 = 7 \cdot 2^\beta$ для некоторого натурального числа β . Так как α четно, то $3^\alpha \equiv 1 \pmod{4}$, поэтому $7 \cdot 2^\beta \equiv 2 \pmod{4}$. Отсюда $\beta = 1$. Но уравнение $3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2 = 14$ не имеет решений; противоречие.

(b) Пусть $\alpha \equiv 1 \pmod{6}$ и $\pi(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2) = \{2, 7\}$. Можно считать, что $\alpha = 1 + 6t$ для некоторого целого неотрицательного числа t , поэтому $3^{6t} = (735 - 6)^t \equiv (-6)^t \pmod{49}$, $3^\alpha \equiv 3(-6)^t \pmod{49}$ и $3^{2\alpha} \equiv 9(36)^t \pmod{49}$. Если

$$t \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{7},$$

то $3^\alpha \equiv 3, 31, 10, 38, 17, 45, 24 \pmod{49}$ и $3^{2\alpha} \equiv 9, 30, 2, 23, 44, 16, 37 \pmod{49}$ соответственно. По предположению $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 \equiv 14 \pmod{49}$, и, следовательно, $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 = 7 \cdot 2^\beta$ для некоторого натурального числа β . Так как α нечетно, то $3^\alpha \equiv 3 \pmod{4}$, поэтому $7 \cdot 2^\beta \equiv 2 \pmod{4}$. Отсюда $\beta = 1$. Уравнение $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 = 14$ имеет единственное решение $\alpha = 1$. \square

Лемма 7. Пусть α — натуральное число. Тогда

- (a) $(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2, 3^{2\alpha} - 3^\alpha + 1) = \begin{cases} 7, & \alpha \equiv 1 \pmod{6}, \\ 1, & \text{иначе;} \end{cases}$
 (b) $(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2, 3^{2\alpha} + 3^\alpha + 1) = \begin{cases} 7, & \alpha \equiv 4 \pmod{6}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$

Доказательство. (a) Положим $x = 3^\alpha$. Тогда x нечетно и $x \geq 3$. Вычислим $(x^2 + x + 2, x^2 - x + 1)$. По алгоритму Евклида

$$x^2 + x + 2 = (x^2 - x + 1) + 2x + 1, \quad x^2 - x + 1 = (2x + 1) \cdot (x - 3)/2 + 3x/2 + 5/2.$$

Получаем, что

$$(x^2 + x + 2, x^2 - x + 1) = (2x + 1, 3x/2 + 5/2).$$

Положим $x_1 = (x - 1)/2$. Тогда $x_1 \geq 1$, $2x + 1 = 4x_1 + 3$ и $3x/2 + 5/2 = 3x_1 + 4$. По алгоритму Евклида

$$(2x + 1, 3x/2 + 5/2) = (4x_1 + 3, 3x_1 + 4) = (3x_1 + 4, x_1 - 1) = (7, x_1 - 1).$$

Пусть 7 делит $x_1 - 1$, т. е. 7 делит $3^{\alpha-1} - 1$. Тогда 6 делит $\alpha - 1$, т. е. $\alpha \equiv 1 \pmod{6}$. Пункт (а) доказан.

(b) Доказательство аналогично доказательству п. (а). \square

Лемма 8. Пусть α — натуральное число. Тогда

(а) Если $\pi(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2) = \{2\}$, то либо $3^\alpha = 3$, либо $3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2 = 2^{2t}$ для некоторого натурального числа t ;

(b) $\pi(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2) \neq \{2\}$.

Доказательство. (а) Можно предполагать, что $3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2 = 2^{2t+1}$ для некоторого натурального числа t . Тогда $3^\alpha(3^\alpha - 1) = 2(2^t - 1)(2^t + 1)$. Значит, 3^α делит либо $2^t - 1$, либо $2^t + 1$. Отсюда либо $3^\alpha = 2^t + 1$, либо $3^\alpha \leq 2^t - 1$. Если $2^t + 1 = 3^\alpha$, то по лемме 2 имеем $(t, \alpha) \in \{(1, 1); (3, 2)\}$. При $(t, \alpha) = (1, 1)$ имеем $3^\alpha = 3$. При $(t, \alpha) = (3, 2)$ имеем $3^\alpha = 9$ и $9^2 - 9 + 2 \neq 2^7$; противоречие. Если $3^\alpha \leq 2^t - 1$, то

$$3^\alpha(3^\alpha - 1) = 2(2^t - 1)(2^t + 1) \geq 2 \cdot 3^\alpha(3^\alpha + 2)$$

и $3^\alpha \leq -5$; противоречие.

(b) Предположим, что $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 = 2^{2t+1}$ для некоторого натурального числа t . Тогда $3^\alpha(3^\alpha + 1) = 2(2^t - 1)(2^t + 1)$. Значит, 3^α делит либо $2^t - 1$, либо $2^t + 1$. Отсюда либо $3^\alpha = 2^t + 1$, либо $3^\alpha \leq 2^t - 1$. Если $2^t + 1 = 3^\alpha$, то по лемме 2 имеем $(t, \alpha) \in \{(1, 1); (3, 2)\}$. При $(t, \alpha) = (1, 1)$ имеем $3^\alpha = 3$ и $9 + 3 + 2 \neq 8$; противоречие. При $(t, \alpha) = (3, 2)$ имеем $3^\alpha = 9$ и $9^2 + 9 + 2 \neq 2^7$; противоречие. Если $3^\alpha \leq 2^t - 1$, то $3^\alpha(3^\alpha + 1) = 2(2^t - 1)(2^t + 1) \geq 2 \cdot 3^\alpha(3^\alpha + 2)$ и $3^\alpha \leq -3$; противоречие.

Предположим, что $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 = 2^{2t}$ для некоторого натурального числа t . При $3^\alpha = 3$ имеем $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 = 14 \neq 2^t$. Значит, $3^\alpha \geq 9$. Отсюда $2^{2t} = 3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 \geq 92$, поэтому $t \geq 4$. Имеем $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 = 2^{2t} \equiv 0 \pmod{256}$. Пусть α нечетно. Тогда $3^\alpha \equiv 3 \pmod{4}$ и $3^{2\alpha} \equiv 1 \pmod{4}$, поэтому $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 \equiv 2 \pmod{4}$; противоречие. Значит, α четно. Пусть $\alpha = 4k$, где k — натуральное число. Тогда $3^\alpha = 3^{4k} = 81^k \equiv 1 \pmod{16}$ и $3^{2\alpha} \equiv 1 \pmod{16}$, поэтому $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 \equiv 4 \pmod{16}$; противоречие. Пусть $\alpha = 4k + 2$, где k — натуральное число. Тогда $3^\alpha = 3^{4k} \cdot 3^2 = 81^k \cdot 9 \equiv 9 \pmod{16}$ и $3^{2\alpha} \equiv 1 \pmod{16}$, поэтому $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 \equiv 12 \pmod{16}$; противоречие. \square

Лемма 9. (а) Пусть α и n — натуральные числа и p — простое число. Тогда система уравнений (относительно (α, p, n))

$$\begin{cases} \pi(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 1) = \{p\}, \\ \pi(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 1) = \pi((p^n + 1)/2), \\ \pi(3(3^{2\alpha} - 1)) = \pi(p^n - 1) \end{cases}$$

имеет единственное решение $(\alpha, p, n) = (1, 13, 1)$;

(b) система уравнений (относительно (α, p, n))

$$\begin{cases} \pi(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 1) = \{p\}, \\ \pi(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 1) = \pi((p^n + 1)/2), \\ \pi(3(3^{2\alpha} - 1)) = \pi(p^n - 1) \end{cases}$$

не имеет решений.

Доказательство. (а) Из первого уравнения системы следует, что $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 1 = p^m$, где m — натуральное число, т. е. $\frac{(3^\alpha)^3 - 1}{3^\alpha - 1} = p^m$. По лемме 3 $m = 1$ и $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 = p + 1$.

Пусть n нечетно. Тогда $\pi((p+1)/2) \subseteq \pi((p^n+1)/2) = \pi(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 1)$, поэтому

$$\pi((3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2)/2) \subseteq \pi(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 1).$$

По п. (а) леммы 7 имеем $\pi((3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2)/2) = \{7\}$ и $\alpha \equiv 1 \pmod{6}$, т. е. $\pi(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2) = \{2, 7\}$. По п. (б) леммы 6 имеем $\alpha = 1$ и $p = 13$. Отсюда $\pi(13^n - 1) = \pi(3(3^{2\alpha} - 1)) = \{2, 3\}$. Теперь из леммы 1 получаем, что $(\alpha, p, n) = (1, 13, 1)$.

Пусть n четно. Тогда $\pi(p^2 - 1) \subseteq \pi(p^n - 1) = \pi(3^\alpha - 1) \cup \pi(3(3^\alpha + 1)) = \pi(3^\alpha - 1) \cup \pi(p - 1)$. Отсюда $\pi(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2) = \pi(p + 1) \subseteq \pi(3^\alpha - 1)$. По алгоритму Евклида

$$3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2 = (3^\alpha - 1)(3^\alpha + 2) + 4,$$

$(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2, 3^\alpha - 1) = (4, 3^\alpha - 1)$ делит 4. Значит, $\pi(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 2) = \{2\}$. Противоречие с п. (б) леммы 8.

(б) Из первого уравнения системы следует, что $3^{2\alpha} - 3^\alpha = p^m - 1$, где m — натуральное число, поэтому

$$\pi(p^m - 1) = \pi(3^\alpha(3^\alpha - 1)) \subseteq \pi(3(3^{2\alpha} - 1)) = \pi(p^n - 1).$$

По п. (1) леммы 5 либо m делит n , либо $m = 2$ и $p = 2^s - 1$.

Предположим, что $m = 2$ и $p = 2^s - 1$. Тогда $3^\alpha(3^\alpha - 1) = 2^{s+1}(2^{s-1} - 1)$. Так как 3^α делит $2^{s-1} - 1$, то $3^\alpha \leq 2^{s-1} - 1$. Имеем $2^{s+1}(2^{s-1} - 1) = 3^\alpha(3^\alpha - 1) \leq 2(2^{s-1} - 1)(2^{s-2} - 1)$. Поэтому $2^s \leq 2^{s-2} - 1$; противоречие.

Предположим, что $n = mt$, где t — четное число. Тогда

$$\pi(p^m + 1) \setminus \{2\} = \pi(p^{2m} - 1) \setminus \pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^{mt} - 1) \setminus \pi(p^m - 1) = \pi(3^\alpha + 1) \setminus \{2\}.$$

Итак, $\pi(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2) = \pi(p^m + 1) \subseteq \pi(3^\alpha + 1)$. По алгоритму Евклида

$$3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2 = (3^\alpha + 1)(3^\alpha - 2) + 4,$$

$(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2, 3^\alpha + 1) = (4, 3^\alpha + 1)$ делит 4. Значит, $\pi(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2) = \{2\}$. По п. (а) леммы 8 либо $3^\alpha = 3$, либо $3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2 = 2^{2t}$.

Пусть $3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2 = 2^{2t}$. Тогда $p^m + 1 = 2^{2t}$. По лемме 2 число $2t$ простое, поэтому $2t = 2$. Отсюда $3^\alpha(3^\alpha - 1) = 2$; противоречие.

Пусть $3^\alpha = 3$. Тогда $p^m = 7$, и, следовательно, $p = 7$. Имеем $\pi(7^n - 1) = \{2, 3\}$ и $\pi((7^n + 1)/2) = \{13\}$. Если $n \in \{1, 2\}$, то $\pi(7^n - 1) = \{2, 3\}$. Если $n \geq 3$, то по лемме 1 $\pi(7^n - 1) \neq \{2, 3\}$. Значит, $n \in \{1, 2\}$. При $n \in \{1, 2\}$ и, следовательно, $\pi((7^n + 1)/2) \neq \{13\}$; противоречие.

Предположим, что $n = mt$, где t — нечетное число. Тогда $\pi((p^m + 1)/2) \subseteq \pi((p^{mt} + 1)/2) = \pi((p^n + 1)/2)$, поэтому $\pi((3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2)/2) \subseteq \pi(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 1)$. Ввиду п. (б) леммы 7 имеем $\pi((3^{2\alpha} - 3^\alpha + 2)/2) = \{7\}$ и $\alpha \equiv 4 \pmod{6}$. Это противоречит п. (а) леммы 6. \square

Лемма 10. Пусть α и n — натуральные числа и p — простое число. Тогда системы уравнений (относительно (α, p, n))

$$(a) \begin{cases} \pi(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 1) = \{p\}, \\ \pi(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 1) = \pi((p^n - 1)/2), \\ \pi(3(3^{2\alpha} - 1)) = \pi(p^n + 1), \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \pi(3^{2\alpha} + 3^\alpha + 1) = \{p\}, \\ \pi(3^{2\alpha} - 3^\alpha + 1) = \pi((p^n - 1)/2), \\ \pi(3(3^{2\alpha} - 1)) = \pi(p^n + 1) \end{cases}$$

не имеют решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) Из первого уравнения системы следует, что $3^{2\alpha} - 3^\alpha + 1 = p^m$, где m — натуральное число, т.е. $3^\alpha(3^\alpha - 1) = p^m - 1$. Поэтому

$$\pi(p^m - 1) = \pi(3^\alpha(3^\alpha - 1)) \subseteq \pi(3(3^{2\alpha} - 1)) = \pi(p^n + 1),$$

т.е. $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^n + 1)$. Так как $p > 3$, то по п. (2) леммы 5 получаем, что $p = 2^{2^l} + 1$, где l — натуральное число, и либо $m = 1$, либо $m = 2$ и n нечетно.

Если $m = 1$, то $3^\alpha(3^\alpha - 1) = p - 1 = 2^{2^l}$; противоречие.

Предположим, что $m = 2$. Тогда $3^\alpha(3^\alpha - 1) = 2^{2^l+1}(2^{2^l-1} + 1)$. Так как 3^α делит $2^{2^l-1} + 1$, то $3^\alpha \leq 2^{2^l-1} + 1$. Имеем $2^{2^l+1}(2^{2^l-1} + 1) = 3^\alpha(3^\alpha - 1) \leq 2^{2^l-1}(2^{2^l-1} + 1)$. Отсюда $2 \leq 1/2$; противоречие.

(б) Из первого уравнения системы следует, что $3^{2\alpha} + 3^\alpha + 1 = p^m$, где m — натуральное число. Поэтому

$$\pi(p^m - 1) = \pi(3^\alpha(3^\alpha + 1)) \subseteq \pi(3(3^{2\alpha} - 1)) = \pi(p^n + 1).$$

По п. (2) леммы 5 имеем $p = 2^{2^l} + 1$, где l — натуральное число, и либо $m = 1$, либо $m = 2$ и n нечетно.

Если $m = 1$, то $3^\alpha(3^\alpha + 1) = 2^{2^l}$; противоречие.

Предположим, что $m = 2$. Тогда $3^\alpha(3^\alpha + 1) = 2^{2^l+1}(2^{2^l-1} + 1)$. Так как 3^α делит $2^{2^l-1} + 1$, то $3^\alpha \leq 2^{2^l-1} + 1$. Имеем $2^{2^l+1}(2^{2^l-1} + 1) = 3^\alpha(3^\alpha + 1) \leq (2^{2^l-1} + 1)(2^{2^l-1} + 2)$. Отсюда $2^{2^l} \leq 4/3$; противоречие. \square

В последующих далее леммах $q = p^f$ и $q_1 = p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные простые числа и f, f_1 — натуральные числа, G и G_1 — неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно. Будем предполагать также, что $GK(G) = GK(G_1)$.

Лемма 11. Если G — одна из групп $G_2(4), G_2(8), {}^3D_4(2), {}^3D_4(4), {}^3D_4(8), F_4(2), {}^2F_4(2)', {}^2F_4(8), E_6(2), {}^2E_6(2)$, то $\{G, G_1\} = \{{}^2F_4(2)', A_3(3)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — одна из групп ${}^3D_4(4), {}^3D_4(8), G_2(8), {}^2F_4(8), E_6(2), {}^2E_6(2)$. Тогда по [14] $\pi(G_1) \neq \pi(G)$, и, следовательно, $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие.

Далее предполагаем, что для некоторой группы G_1 имеет место равенство $GK(G_1) = GK(G)$.

Пусть $G = G_2(4)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 7, 13\}$, и по [14]

$$G_1 \in \{A_2(9), C_3(3), B_3(3), D_4(3), {}^2A_3(5)\}.$$

По [4, табл. 1, 2] $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие.

Пусть $G = F_4(2)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 7, 13, 17\}$, и по [14] $G_1 \in \{A_1(169), C_2(13)\}$.

По [4, табл. 1, 2] $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G = {}^2F_4(2)'$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 13\}$. По [14] $G_1 \in \{A_1(25), A_3(3), C_2(5)\}$.

По [4, табл. 1, 2] $G_1 = A_3(3)$.

Пусть $G = {}^3D_4(2)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 7, 13\}$. По [14] $G_1 \in \{A_1(13), A_1(27), G_2(3)\}$.

По [4, табл. 1, 2] $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие. \square

Из леммы 11 следует п. (2) теоремы. \square

Лемма 12. Если $G = G_2(q)$, где $q = 3^f$, то $\{G, G_1\} = \{G_2(3), A_1(13)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. По [4, табл. 1, 2] либо $G_1 = A_1(q_1)$, либо $G_1 \in \{A_2(2), {}^2A_3(3), {}^2A_5(2)\}$. Если $G_1 \in \{A_2(2), {}^2A_3(3), {}^2A_5(2)\}$, то по [5, лемма 6] $GK(G) \neq GK(G_1)$. Значит, $G_1 = A_1(q_1)$. Рассмотрим компоненты связности графов $GK(G)$ и $GK(G_1)$, используя [6; 7]. Если q_1 четно, то $\pi(q(q^2 - 1)) = \{2\}$; противоречие.

Если $q_1 \equiv 1 \pmod{4}$, то из равенства компонент графов $GK(G)$ и $GK(G_1)$ получаем одну из систем

$$\begin{cases} \pi(3^{2f} + 3^f + 1) = \{p_1\}, \\ \pi(3^{2f} - 3^f + 1) = \pi((q_1 + 1)/2), \\ \pi(3(3^{2f} - 1)) = \pi(q_1 - 1), \end{cases} \quad \begin{cases} \pi(3^{2f} - 3^f + 1) = \{p_1\}, \\ \pi(3^{2f} + 3^f + 1) = \pi((q_1 + 1)/2), \\ \pi(3(3^{2f} - 1)) = \pi(q_1 - 1). \end{cases}$$

По лемме 9 получаем $q = 3$ и $q_1 = 13$, т. е. выполняется заключение леммы.

Если $q_1 \equiv 3 \pmod{4}$, то из равенства компонент графов $GK(G)$ и $GK(G_1)$ получаем одну из систем

$$\begin{cases} \pi(3^{2f} - 3^f + 1) = \{p_1\}, \\ \pi(3^{2f} + 3^f + 1) = \pi((q_1 - 1)/2), \\ \pi(3(3^{2f} - 1)) = \pi(q_1 + 1), \end{cases} \quad \begin{cases} \pi(3^{2f} + 3^f + 1) = \{p_1\}, \\ \pi(3^{2f} - 3^f + 1) = \pi((q_1 - 1)/2), \\ \pi(3(3^{2f} - 1)) = \pi(q_1 + 1). \end{cases}$$

По лемме 10 получаем противоречие. □

Из леммы 12 следует п. (1) теоремы. □

Лемма 13. *Если $G = G_2(q)$, где q — не степень 3, то $G_1 = G_2(q_1)$, где q_1 нечетно и не степень 3.*

Доказательство. Пусть q четно. Если $q \in \{4, 8\}$, то по лемме 11 $GK(G) \neq GK(G_1)$. Значит, $q \notin \{4, 8\}$. По [4, табл. 1, 2] $G_1 \in \{A_3(5), G_2(q_1)\}$, где q_1 — не степень 3. Если $G_1 = A_3(5)$, то по [14] $GK(G) \neq GK(G_1)$. Если $G_1 = G_2(q_1)$, то получаем заключение леммы.

Пусть q нечетно. По [4, табл. 1, 2] либо $G_1 = G_2(q_1)$, где q_1 нечетно, либо

$$G_1 \in \{A_2(8), A_3(2), A_3(5), A_5(4), A_7(2), {}^2A_2(8), {}^2A_4(2), {}^2D_4(2), {}^2D_5(2), G_2(4), G_2(8)\},$$

либо G_1 — одна из групп $A_2(q_1)$, где $8 < q_1$ четно и $(q_1 - 1)_3 \neq 3$; $A_4(q_1)$, где q_1 четно; ${}^2A_2(q_1)$, где $q_1 \neq 8$ четно и $(q_1 + 1)_3 \neq 3$; ${}^2A_4(q_1)$, где q_1 четно.

Если $G_1 = G_2(q_1)$, то получаем заключение леммы. Если $G_1 \in \{G_2(4), G_2(8)\}$, то по лемме 11 $GK(G) \neq GK(G_1)$. Если $G_1 \in \{A_3(2), {}^2A_2(8), {}^2A_4(2)\}$, то по лемме 12 из работы автора 2018 г. $GK(G) \neq GK(G_1)$. Если $G_1 \in \{A_7(2), {}^2D_4(2), {}^2D_5(2)\}$, то по [5, лемма 6] $GK(G) \neq GK(G_1)$. Если $G_1 \in \{A_2(8), A_3(5), A_5(4)\}$, то по [14] $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Рассмотрим случай $G = G_2(q)$, где $q \equiv 1 \pmod{3}$. По [9, табл. 4] все максимальные коклики в $GK(G)$ таковы:

$$\{p, r_3(q), r_6(q)\}, \quad \{r_2(q), r_3(q), r_6(q)\} \text{ при } r_2(q) \neq 2, \quad \{r_1(q), r_3(q), r_6(q)\} \text{ при } r_1(q) \neq 2, 3, \\ \{2, r_3(q), r_6(q)\}, \quad \{3, r_6(q)\}.$$

Пусть $G_1 = A_2(q_1)$, где $q_1 > 8$ и $(q_1 - 1)_3 \neq 3$. В $GK(G)$ есть максимальные коклики $\{p, r_3(q), r_6(q)\}$, а в $GK(G_1)$ все максимальные коклики имеют вид $\{2, r_2(q_1), r_3(q_1)\}$; противоречие.

Пусть $G_1 = A_4(q_1)$, где $(q_1 - 1)_5 \neq 5$. По [9, табл. 2] все максимальные коклики в $GK(G)$ таковы:

$$\{2, r_4(q_1), r_5(q_1)\}, \quad \{r_3(q_1), r_4(q_1), r_5(q_1)\}, \quad \{r_1(q_1), r_5(q_1)\} \text{ при } r_1(q_1) \neq 2, \\ \{r_2(q_1), r_5(q_1)\} \text{ при } r_2(q) \neq 2.$$

Положим

$$A = \{\{3, r_6(q)\}\}, B = \{\{r_1(q_1), r_5(q_1)\}\} \cup \{\{r_2(q_1), r_5(q_1)\}\}.$$

Сравнивая максимальные кокклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем, что

$$\{2, r_3(q), r_6(q)\} = \{2, r_4(q_1), r_5(q_1)\},$$

поэтому $R_6(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_5(q_1)$. Так как $A = B$, то $R_6(q) \subseteq R_1(q_1) \cup R_2(q_1) \cup R_5(q_1)$. И так, $R_6(q) \subseteq R_5(q_1)$. Также из равенства $A = B$ следует, что $\pi(q_1^2 - 1) = \{3\}$. Имеем уравнение $2^{2f_1} - 3^t = 1$ для некоторого натурального числа t . По лемме 2 $t = 1$, $f_1 = 1$, $q_1 = 2$. Значит, $G_1 = A_4(2)$. По лемме 12 из работы автора 2018 г. $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G_1 = A_4(q_1)$, где $(q_1 - 1)_5 = 5$. Как и в случае $G_1 = A_4(q_1)$, где $(q_1 - 1)_5 \neq 5$, получаем, что $q_1 = 2$, но $(2 - 1)_5 \neq 5$; противоречие.

В случаях $G_1 = {}^2A_2(q_1)$, где $q_1 \neq 8$, $(q_1 + 1)_3 \neq 3$ и $G_1 = {}^2A_4(q_1)$ аналогично получаем противоречие.

В случае $G = G_2(q)$, где $q \equiv 2 \pmod{3}$, получаем противоречие аналогично случаю $G = G_2(q)$, где $q \equiv 1 \pmod{3}$. \square

Из леммы 13 следует п. (5) теоремы. \square

Лемма 14. Если $G = {}^3D_4(q)$, то G_1 — одна из групп $A_2(q_1)$, где $(q_1 - 1)_3 \neq 3$ и $q_1 + 1 \neq 2^{k_1}$; $A_4^\pm(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$; ${}^3D_4(q_1)$.

Доказательство. Предположим, что q четно. По [4, табл. 1, 2] G_1 — одна из групп ${}^3D_4(q_1)$; $A_2^\pm(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_3 = 3$ и $q_1 \pm 1 = 2^{k_1}$; $A_4^\pm(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_3 \neq 3$ и $q_1 \pm 1 \neq 2^{k_1}$; $A_4^\pm(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$; $A_4^\pm(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 = 5$; $A_3(3)$, $A_5(3)$, $A_5(7)$, ${}^2A_5(5)$, $B_3(3)$, $C_3(3)$, $D_4(3)$. По [9, табл. 4] все максимальные кокклики в $GK(G)$ таковы:

$$\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}, \quad \{r_1(q), r_{12}(q)\} \text{ при } r_1(q) \neq 2, \quad \{r_2(q), r_{12}(q)\} \text{ при } r_2(q) \neq 2, \quad \{2, r_{12}(q)\}.$$

Если $G_1 \in \{A_3(3), A_5(7), {}^2A_5(5)\}$, то по лемме 12 из работы автора 2018 г. $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Если $G_1 \in \{A_5(3), B_3(3), C_3(3), D_4(3)\}$, то по [14] $G \neq {}^3D_4(q)$; противоречие.

Пусть $G_1 = A_2(q_1)$, где $(q_1 - 1)_3 = 3$ и $q_1 + 1 = 2^{k_1}$. В $GK(G_1)$ есть максимальные кокклики $\{3, p_1, r_3(q_1)\}$, а в $GK(G)$ все максимальные кокклики имеют вид $\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}$; противоречие.

Пусть $G_1 = {}^2A_2(q_1)$, где $(q_1 + 1)_3 = 3$ и $q_1 - 1 = 2^{k_1}$. В $GK(G_1)$ есть коклика $\{3, p_1, r_6(q_1)\}$, а в $GK(G)$ все кокклики порядка 3 имеют вид $\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}$; противоречие.

Пусть $G_1 = {}^2A_2(q_1)$, где $q_1 > 2$, $(q_1 + 1)_3 \neq 3$ и $q_1 - 1 \neq 2^{k_1}$. По [9, табл. 2] все максимальные кокклики в $GK(G_1)$ таковы:

$$\begin{aligned} \{p_1, r_1(q_1), r_6(q_1)\} \text{ при } r_1(q_1) \neq 2, \quad \{r_2(q_1), r_6(q_1)\} \text{ при } r_2(q_1) \neq 2, 3, \\ \{3, r_6(q_1)\} \text{ при } (q_1 + 1)_3 > 3, \quad \{2, r_6(q_1)\}. \end{aligned}$$

Так как $\{2, r_{12}(q)\} = \{2, r_6(q_1)\}$, то $R_{12}(q) = R_6(q_1)$. Из равенства

$$\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\} = \{p_1, r_1(q_1), r_6(q_1)\}$$

следует, что $p_1 \in R_3(q) \cup R_6(q)$, поэтому $p_1 \equiv 1 \pmod{3}$, а значит, $q_1 \equiv 1 \pmod{3}$, т. е. 3 делит $q_1 - 1$. В $GK(G_1)$ есть максимальная коклика, содержащая 3, а в $GK(G)$ ее нет; противоречие.

Пусть $G_1 = A_4(q_1)$, где $(q_1 - 1)_5 = 5$. В $GK(G_1)$ есть коклика $\{5, r_4(q_1), r_5(q_1)\}$, а в $GK(G)$ все кокклики порядка 3 имеют вид $\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}$; противоречие.

Пусть $G_1 = {}^2A_2(q_1)$, где $(q_1 + 1)_5 = 5$. В $GK(G_1)$ есть коклика $\{5, r_4(q_1), r_{10}(q_1)\}$, а в $GK(G)$ все кокклики порядка 3 имеют вид $\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}$; противоречие.

Предположим, что q нечетно. По [4, табл. 1, 2] G_1 — одна из групп ${}^3D_4(q_1)$; $A_2^\pm(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_3 = 3$ и $q_1 \pm 1 = 2^{k_1}$; $A_2^\pm(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_3 \neq 3$ и $q_1 \pm 1 \neq 2^{k_1}$; $A_4^\pm(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$;

$A_4^\pm(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 = 5$; $A_3(3)$, $A_5(3)$, $A_5(7)$, ${}^2A_5(5)$, $A_5(2)$, $A_6(2)$, $C_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, $B_3(3)$, $C_3(3)$, $D_4(3)$. По [9, табл. 4] все максимальные кокклики в $GK(G)$ таковы:

$$\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}, \quad \{r_1(q), r_{12}(q)\} \text{ при } r_1(q) \neq 2, \quad \{r_2(q), r_{12}(q)\} \text{ при } r_2(q) \neq 2, \\ \{p, r_{12}(q)\}, \quad \{2, r_{12}(q)\}.$$

Если $G_1 \in \{A_3(3), A_5(7), {}^2A_5(5), A_5(2)\}$, то по лемме 12 из работы автора 2018 г. $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1 = A_6(2)$, то по [5, лемма 6] $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1 \in \{A_5(3), C_4(2), B_3(3), C_3(3), D_4(3)\}$, то по [14] $G \neq {}^3D_4(q)$; противоречие. Если $G_1 = {}^2F_4(2)'$, то по лемме 11 $G \neq {}^3D_4(q)$; противоречие.

Группы G_1 , равные $A_2^\pm(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_3 = 3$ и $q_1 \pm 1 = 2^{k_1}$; ${}^2A_2(q_1)$, где $(q_1 + 1)_3 \neq 3$ и $q_1 - 1 \neq 2^{k_1}$; $A_4^\pm(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 = 5$, рассматриваются аналогично случаю q четно. Получаем противоречие. \square

Лемма 15. Если $G = F_4(q)$, то $G_1 = F_4(q_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $G = F_4(2)$, то по лемме 11 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $q > 2$. По таблице на с. 150, [4, табл. 1] имеем $G_1 \in \{B_5(3), C_5(3), {}^2G_2(q_1), F_4(q_1)\}$. Если $G_1 = {}^2G_2(q_1)$, то по [9, табл. 4] кокклики максимального порядка в графе $GK(G)$ имеют вид $\{r_3(q), r_4(q), r_6(q), r_8(q), r_{12}(q)\}$, а все кокклики максимального порядка в графе $GK(G_1)$ имеют вид $\{3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$; противоречие. Пусть $G_1 \in \{B_5(3), C_5(3)\}$. Тогда $\{r_3(q), r_4(q), r_6(q), r_8(q), r_{12}(q)\} = \{7, 11, 13, 41, 61\}$, т. е. $11 \equiv 1 \pmod{k}$, где $k \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$; противоречие. \square

Лемма 16. $G \notin \{{}^2B_2(q), {}^2G_2(q), {}^2F_4(q)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы следует из леммы 15, табл., [4, табл. 1, 2]. \square

Лемма 17. $G \neq E_6^\pm(q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $G \in \{E_6(2), {}^2E_6(2)\}$, то по лемме 11 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Если qq_1 четно, то по таблице на с. 150, [4, табл. 1, 2] $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Предположим, что qq_1 нечетно. Тогда по таблице на с. 150, [4, табл. 1, 2] $G_1 = E_6^\pm(q_1)$.

Пусть $\{G, G_1\} = \{E_6(q), E_6(q_1)\}$. Тогда по [9, табл. 4] все кокклики максимального порядка в $GK(G_1)$ имеют вид

$$\{r_3(q_1), r_4(q_1), r_5(q_1), r_8(q_1), r_9(q_1)\}, \quad \{r_4(q_1), r_5(q_1), r_8(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\},$$

$$\{r_6(q_1), r_5(q_1), r_8(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}, \quad \{3, r_8(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\} \text{ при } (q-1)_3 = 3,$$

$$\{p_1, r_8(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}, \quad \{r_1(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}, \quad \{r_2(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}, \quad \{2, r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}.$$

Отсюда $t(r_i(q_1), E_6(q_1)) = 5$ при $i \in \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\}$, $t(r_2(q_1), G_1) = 3$, $t(r_1(q_1), G_1) = 3$ при $r_1(q_1) \neq 3$ или $(q-1)_3 \neq 3$, $t(3, G_1) = 4$ при $(q-1)_3 = 3$.

Сравнивая максимальные кокклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получим $\{2, r_9(q_1), r_{12}(q_1)\} = \{2, r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}$, т. е. $\{r_9(q_1), r_{12}(q_1)\} = \{r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}$. Отсюда

$$\{r_3(q_1), r_4(q_1), r_5(q_1), r_8(q_1), r_9(q_1)\} = \{r_3(q), r_4(q), r_5(q), r_8(q), r_9(q)\}.$$

Поэтому $R_8(q_1) \subseteq R_3(q) \cup R_4(q) \cup R_5(q) \cup R_8(q)$. Пусть $(q-1)_3 \neq 3$. Тогда $\{p_1, r_8(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\} = \{p, r_8(q), r_9(q), r_{12}(q)\}$, поэтому $R_8(q_1) \subseteq \{p\} \cup R_8(q)$. Итак, $R_8(q_1) \subseteq R_8(q)$ и $p_1 = p$; противоречие.

Пусть $(q-1)_3 = 3$. Так как $p = r_i(q_1)$, то $4 = t(p, G) = t(p, G_1) = t(r_i(q_1), G_1)$, поэтому $p = r_i(q_1) = 3$, но $(q-1)_3 = 3$; противоречие.

Если пара $\{G, G_1\}$ равна $\{E_6(q), {}^2E_6(q_1)\}$ или $\{{}^2E_6(q), E_6^\pm(q_1)\}$, получаем противоречие аналогично. \square

Лемма 18. $G \neq E_7(q)$, где $q > 3$.

Доказательство. Предположим, что $G = E_7(q)$, где $q > 3$. Так как $t(G) = t(G_1) = 8$, то по [9, табл. 2–4] G_1 — одна из групп $A_{14}^{\pm}(q_1)$, $A_{15}^{\pm}(q_1)$, $B_9(q_1)$, $B_{10}(q_1)$, $C_9(q_1)$, $C_{10}(q_1)$, ${}^2D_{10}(q_1)$, $E_7(q_1)$.

По [9, табл. 4] максимальные коклики в $GK(G)$ имеют вид

$$\begin{aligned} & \{r_4(q), r_5(q), r_7(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{12}(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\}, \\ & \{r_8(q), r_5(q), r_7(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{12}(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\}, \\ & \{r_3(q), r_7(q), r_8(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\}, \quad \{r_6(q), r_5(q), r_7(q), r_8(q), r_9(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\}, \\ & \{p, r_7(q), r_9(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\}, \quad \{r_1(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\}, \quad \{r_2(q), r_7(q), r_9(q)\}, \\ & \{2, r_{14}(q), r_{18}(q)\} \text{ при } q \equiv 1 \pmod{4}, \quad \{2, r_7(q), r_9(q)\} \text{ при } q \equiv 3 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Отсюда $t(r_i(q), G) = 8$ при $i \in \{4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 18\}$, $t(r_i(q), G) = 7$ при $i \in \{3, 6\}$, $t(p, G) = 5$, $t(r_1(q), G) = t(r_2(q), G) = 3$, $t(2, G) = 3$. Таким образом, $\mathcal{T}(G) = \{8, 7, 5, 3\}$. Так как $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}(G_1)$, по [5, леммы 8, 10, 11] $G_1 = E_7(q_1)$. Из равенства $p_1 = r_i(q)$ следует, что $5 = t(p_1, G_1) = t(p_1, G) = t(r_i(q), G) \in \{3, 7, 8\}$; противоречие. \square

Лемма 19. Если $G = E_8(q)$, то $G_1 = E_8(q_1)$.

Доказательство. Предположим, что $G = E_8(q)$. Так как $t(G) = t(G_1) = 12$, то по [9, табл. 2–4] G_1 — одна из групп $A_{22}^{\pm}(q_1)$, $A_{23}^{\pm}(q_1)$, $B_{15}(q_1)$, $C_{15}(q_1)$, $D_{15}(q_1)$, $D_{16}(q_1)$, ${}^2D_{15}(q_1)$, $E_8(q_1)$.

По [9, табл. 4] максимальные коклики графа $GK(G)$ имеют вид

$$\begin{aligned} & \{r_5(q), r_7(q), r_8(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{12}(q), r_{14}(q), r_{15}(q), r_{18}(q), r_{20}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\}, \\ & \{r_3(q), r_7(q), r_{10}(q), r_{14}(q), r_{18}(q), r_{20}(q), r_{15}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\}, \\ & \{r_4(q), r_7(q), r_{14}(q), r_9(q), r_{18}(q), r_{20}(q), r_{15}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\} \text{ при } r_4(q) \neq 5, \\ & \{r_4(q), r_7(q), r_{14}(q), r_9(q), r_{18}(q), r_{15}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\} \text{ при } r_4(q) = 5, \\ & \{r_6(q), r_5(q), r_7(q), r_9(q), r_{14}(q), r_{20}(q), r_{15}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\}, \\ & \{p, r_{15}(q), r_{20}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\}, \quad \{r_1(q), r_{15}(q), r_{20}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\}, \\ & \{2, r_{15}(q), r_{20}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\}, \quad \{r_2(q), r_{15}(q), r_{20}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\} \end{aligned}$$

Отсюда $t(r_i(q), G) = 12$ при $i \in \{5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 24, 30\}$, $t(r_i(q), G) = 9$ при $i \in \{3, 4, 6\}$ и $r_4(q) \neq 5$, $t(r_i(q), G) = 8$ при $r_4(q) = 5$, $t(p, G) = 5$, $t(r_1(q), G) = t(r_2(q), G) = 5$, $t(2, G) = 5$. Таким образом, $\mathcal{T}(G)$ равно $\{12, 9, 5\}$ при $q \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$ и $\{12, 9, 8, 5\}$ при $q \equiv 2, 3 \pmod{5}$. Так как $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}(G_1)$, по [5, леммы 8–11] $G_1 = E_8(q_1)$. \square

Из лемм 14–19 следует пп. (3), (4) и (6) теоремы. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / ред. В.Д. Мазуров. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2014. Изд. 18-е, доп. 253 с.
2. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424. doi: 10.1081/AGB-120022800.
3. **Звездина М.А.** О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 65–76.
4. **Зиновьева М.Р.** Конечные простые группы лиева типа над полем одной характеристики с одинаковым графом простых чисел // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 168–183.

5. **Зиновьева М.Р.** О конечных простых классических группах над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 101–116. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-101-116.
6. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
7. **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0.
8. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
9. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
10. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. vol. 3, no. 1, pp. 265–284. doi: 10.1007/BF01692444.
11. **Gerono G. C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
12. **Bugeaud Y., Mihăilescu P.** On the Nagell–Ljunggren equation $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$ // Math. Scand. 2007. Vol. 101, no. 2. P. 177–183. doi: 10.7146/math.scand.a-15038.
13. **Zavarnitsine A.V.** Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders // J. Group Theory. 2004. Vol. 7, no. 1. P. 81–97. doi: 10.1515/jgth.2003.044.
14. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Elec. Math. Rep. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Поступила 3.04.2020

После доработки 11.05.2020

Принята к публикации 25.05.2020

Зиновьева Марианна Рифхатовна
 канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
 Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
 доцент
 Уральский федеральный университет
 г. Екатеринбург
 e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

REFERENCES

1. *Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook*, ed. V.D. Mazurov, 18th ed., Novosibirsk: Inst. Mat. SO RAN Publ., 2014, 253 p.
2. Hagie M. The prime graph of a sporadic simple group. *Comm. Algebra*, 2003, vol. 31, no. 9, pp. 4405–4424. doi: 10.1081/AGB-120022800.
3. Zvezdina M. A. On nonabelian simple groups having the same prime graph as an alternating group. *Sib. Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 47–55. doi: 10.1134/S0037446613010072.
4. Zinov'eva M.R. Finite simple groups of Lie type over a field of the same characteristic with the same prime graph. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 168–183 (in Russian).
5. Zinov'eva M.R. On finite simple classical groups over fields of different characteristics with coinciding prime graphs. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. 223–239. doi: 10.1134/S0081543817050248.
6. Kondrat'ev A.S. Prime graph components of finite simple groups. *Math. USSR-Sb.*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1070/SM1990v067n01ABEH001363.
7. Williams J.S. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0.
8. Vasiliev A.V., Vdovin E.P. An adjacency criterion for the prime graph of a finite simple group. *Algebra and Logic*, 2005, vol. 44, no. 6, pp. 381–406. doi: 10.1007/s10469-005-0037-5.
9. Vasiliev A.V., Vdovin E.P. Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group. *Algebra and Logic*, 2011, vol. 50, no. 4, pp. 291–322. doi: 10.1007/s10469-011-9143-8.

10. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzreste. *Monatsh. Math. Phys.*, 1892, vol. 3, no. 1, pp. 265–284. doi: 10.1007/BF01692444.
11. Gerono G.C. Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$. *Nouv. Ann. Math. (2)*, 1870, vol. 9, pp. 469–471.
12. Bugeaud Y., Mihăilescu P. On the Nagell-Ljunggren equation $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$. *Math. Scand.*, 2007, vol. 101, no. 2, pp. 177–183. doi: 10.7146/math.scand.a-15038.
13. Zavarnitsine A.V. Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders. *J. Group Theory*, 2004, vol. 7, no. 1, pp. 81–97. doi: 10.1515/jgth.2003.044.
14. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

Received April 3, 2020

Revised May 11, 2020

Accepted May 25, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00456) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Marianna Rifkhatovna Zinov'eva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Ekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru.

Cite this article as: M. R. Zinov'eva. On finite simple groups of exceptional Lie type over fields of different characteristics with coinciding prime graphs, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 147–160.

УДК 517.983.23

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ РЯДОВ

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант

В банаховом пространстве заданы линейный плотно определенный оператор и некоторая область, лежащая в его регулярном множестве и содержащая неположительную полуось вещественной оси. По скалярным аналитическим функциям из определенного класса строятся (на базе интегральной формулы Коши) операторные функции. Рассматривается вопрос об умножении (слева, справа) таких функций, в частности, комплексных степеней оператора, на степенной операторный ряд, исследуется связь области определения этого произведения с областью определения степенного операторного ряда. Результаты уточняются в случае, когда не только сама скалярная функция, но и функция, представляющая ее обратную величину, лежат в данном классе. Отдельно изучается случай непрерывной операторной функции и операторной функции, обратной к непрерывной.

Ключевые слова: линейный замкнутый оператор, функции от оператора, степенные операторные ряды.

L. F. Korkina, M. A. Rekant. Some properties of power operator series.

A linear densely defined operator and a domain lying in its regular set and containing the nonpositive real semiaxis are given in a Banach space. A power bound for the norm of the resolvent of the operator at infinity is assumed to be known. We consider the question of (left, right) multiplication of a function of an operator, in particular, a complex degree of an operator, by a power operator series and the connection between the domain of this product and the domain of the power operator series. The case of the continuity of the operator function or its inverse and the possibility of taking the function under the series sign are considered separately. In some of the statements proved, certain constraints are imposed on the coefficients of the power series. Examples connected with these constraints and the constraints on the scalar function generating the operator function are analyzed.

Keywords: linear closed operator, functions of an operator, power operator series.

MSC: 47A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-161-172

Пусть X — комплексное банахово пространство, A — линейный оператор, действующий в X . При ряде предположений на пространство X и оператор A различными способами вводились, изучались и находили применение при решении различных математических задач функции от оператора A (см., например, [1–9]). Один из способов такого введения — построение операторных функций по соответствующим скалярным аналитическим функциям на базе интегральной формулы Коши (см., например, [1; 4–6]). В русле этих исследований находятся и работы авторов [10; 11]. В работе [12] изучались операторные экспоненты e^B — степенные операторные ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$. В данной работе продолжено изучение степенных операторных рядов, в том числе устанавливаются равенства, связанные с произведением (слева, справа) функции от оператора, в частности, степенной операторной функции, на степенной операторный ряд с определенными ограничениями на его коэффициенты. (Заметим, что операторные ряды и ряды элементов банахова пространства рассматривались в [2]).

Введем некоторые обозначения и предложения, которые понадобятся нам в дальнейшем. Для $\varphi \in (0, \pi)$ обозначим через $\Delta(\varphi)$ область в \mathbb{C} , содержащую отрицательную вещественную полуось с границей $L(\varphi) = L_1(\varphi) \cup L_2(\varphi)$, где

$$L_1(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = te^{i\varphi}, t \geq 0\}, \quad L_2(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = te^{-i\varphi}, t \geq 0\}.$$

Полагаем $\Omega(a, \varphi) = \Delta(\varphi) \cup B(0, a)$ ($a > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$), $B(0, a)$ — открытый круг с центром в нуле радиуса a , $\Gamma(a, \varphi) = \partial\Omega(a, \varphi)$ обходится так, что $\Omega(a, \varphi)$ остается справа.

Предполагается, что A — плотно определенный в X линейный оператор с областью определения $\mathcal{D}(A)$ и множеством значений $\text{Im } A \subset X$. Известна оценка нормы резольвенты $R(\lambda) = R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ оператора A в $\overline{\Omega}(a_0, \varphi_0)$ ($a_0 > 0$, $\varphi_0 \in (0, \pi)$): при некоторых $C_0 > 0$, $\gamma \leq 1$ и всех $\lambda \in \overline{\Omega}(a_0, \varphi_0)$

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{C_0}{(|\lambda| + 1)^\gamma}.$$

Пусть $a \in (0, a_0)$, $\varphi \in (\varphi_0, \pi)$, $C \in (0, +\infty)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, через $F(a, \varphi, C, \sigma)$ обозначим множество функций f , непрерывных в $\mathbb{C} \setminus \Omega(a, \varphi)$, аналитических в $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}(a, \varphi)$, для каждой из которых при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega(a, \varphi)$ справедливо неравенство

$$|f(\lambda)| \leq C|\lambda|^\sigma.$$

Через \mathcal{F} обозначим объединение всех таких множеств.

Пусть $f \in \mathcal{F}$ и числа $a \in (0, a_0)$, $\varphi \in (\varphi_0, \pi)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $C \in (0, +\infty)$ таковы, что $f \in F(a, \varphi, C, \sigma)$. В [11] изучались операторные функции

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} A^m \int_{\Gamma(a, \varphi)} \frac{f(\lambda)}{\lambda^m} R(\lambda) d\lambda, \quad (1)$$

$$\tilde{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(a, \varphi)} \frac{f(\lambda)}{\lambda^m} R(\lambda) d\lambda A^m, \quad (2)$$

где

$$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \sigma - m - \gamma < -1. \quad (3)$$

Эти функции не зависят от a, φ, C, σ, m с оговоренными ограничениями, они плотно определены, $\tilde{f}(A) \subset f(A)$, и в случае непрерывности одной из этих функций они совпадают, в частности, при $\sigma < \gamma - 1$ они непрерывны, и в (1), (2) можно взять $m = 0$.

Если $f \in \mathcal{F}$ и $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$, то существует оператор $(f(A))^{-1}$, равный $\left(\frac{1}{f}\right)(A)$, и существует оператор $(\tilde{f}(A))^{-1}$, равный $\left(\widetilde{\left(\frac{1}{f}\right)}\right)(A)$ (теорема 2 и замечание к ней из [11]). Если $f(\lambda) = \lambda^n$ ($n \in \mathbb{Z}$), то $f(A) = A^n$ [10, теорема 4].

В этой статье мы используем ряды элементов банахова пространства и операторные ряды. Сходимость ряда элементов банахова пространства понимается в смысле сходимости по норме последовательности его частичных сумм [2, гл. 2, § 2]. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ операторов A_n , действующих в X , под его суммой понимается оператор A с

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A_n) : \sum_{n=1}^{\infty} A_n x \text{ — сходящийся ряд} \right\}$$

и $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x$ для $x \in \mathcal{D}(A)$.

Лемма 1. Пусть $f, g \in \mathcal{F}$. Если оператор $f(A)$ непрерывен, то

$$f(A)g(A) \subset g(A)f(A), \quad f(A)\tilde{g}(A) \subset \tilde{g}(A)f(A).$$

Если $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и $(f(A))^{-1}$ — непрерывный оператор, то

$$g(A)f(A) \subset f(A)g(A), \quad \tilde{g}(A)f(A) \subset f(A)\tilde{g}(A).$$

Доказательство. Если оператор $f(A)$ непрерывен, то по теоремам 1 и 3 из [11] имеем

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &\subset (fg)(A) = g(A)f(A), \\ f(A)\tilde{g}(A) &\subset \overline{f(A)\tilde{g}(A)} = \widetilde{(fg)}(A) \subset \overline{\tilde{g}(A)f(A)} = \tilde{g}(A)f(A). \end{aligned}$$

Если $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и $(f(A))^{-1}$ — непрерывный оператор, то по тем же теоремам

$$g(A)f(A) \subset (fg)(A) = f(A)g(A).$$

Кроме того, с учетом доказанного

$$f^{-1}(A)\tilde{g}(A)f(A) \subset \tilde{g}(A)f^{-1}(A)f(A) \subset \tilde{g}(A),$$

откуда получаем, что

$$\tilde{g}(A)f(A) = f(A)f^{-1}(A)\tilde{g}(A)f(A) \subset f(A)\tilde{g}(A).$$

Лемма доказана. □

Следствие 1. Если $f, \frac{1}{f}, g \in \mathcal{F}$, оба оператора $f(A)$ и $[f(A)]^{-1}$ непрерывны, то

$$f(A)g(A) = g(A)f(A), \quad f(A)\tilde{g}(A) = \tilde{g}(A)f(A).$$

Утверждение 1. Пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{F}$. Тогда в случае непрерывности $f(A)$

$$f(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \subset \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^n f)(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A), \quad (4)$$

а в случае, когда $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и $(f(A))^{-1}$ — непрерывный оператор,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^n f)(A) \subset f(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n. \quad (5)$$

Доказательство. Если оператор $f(A)$ непрерывен, то

$$f(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \subset \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f(A) A^n.$$

В силу леммы 1 $f(A)A^n \subset A^n f(A)$, а по теореме 3 из [11] $A^n f(A) = (\lambda^n f)(A)$, т. е. справедливы соотношения (4).

Если $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и оператор $(f(A))^{-1}$ непрерывен, то с учетом леммы 1

$$(f(A))^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A) \subset \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (f(A))^{-1} A^n f(A) \subset \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (f(A))^{-1} f(A) A^n \subset \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A) \subset f(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n.$$

Так как оператор A^{-n} непрерывен, то по теореме 3 из [11]

$$A^n f(A) = (\lambda^n f)(A),$$

т. е. имеет место (5). Утверждение доказано. □

Следствие 2. Пусть $t > 0$. Если $f(A)$ — непрерывный оператор, то $f(A)e^{tA} \subset e^{tA}f(A)$. Если $f, \frac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и $(f(A))^{-1}$ — непрерывный оператор, то $e^{tA}f(A) \subset f(A)e^{tA}$.

Будем считать, что $\lambda^z = e^{z \ln \lambda}$, где $\ln \lambda = \ln |\lambda| + i \arg \lambda$ с $|\arg \lambda| < \pi$. В этом случае, если $f(\lambda) = \lambda^z$, то $f(A) = A^z$, $\widetilde{f}(A) = \widetilde{A}^z$ (формулы для $f(A)$ и A^z , $\widetilde{f}(A)$ и \widetilde{A}^z соответственно совпадают).

Следствие 3. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$. Если оператор A^z непрерывен, то

$$A^z \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \subset \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{z+n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n A^z.$$

Если оператор A^{-z} непрерывен, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n A^z = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{n+z} \subset A^z \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n.$$

Утверждение 2. Пусть $f \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}((\widetilde{\lambda^n f})(A)), \quad (6)$$

причем, если $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$, то

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}((\lambda^n f)(A)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}((\widetilde{\lambda^n f})(A)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n). \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ и числа $a_1 \in (0, a_0)$, $\varphi_1 \in (\varphi_0, \pi)$, $C_1 \in (0, +\infty)$, $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ таковы, что $f \in F(a_1, \varphi_1, C_1, \sigma_1)$. Возьмем произвольно такое число m_1 , что выполнено (3) с $m = m_1$, $\sigma = \sigma_1$. Тогда операторы $(\lambda^{-m_1} f)(A)$ и $(\widetilde{\lambda^{-m_1} f})(A)$ непрерывны и совпадают, и при любом $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ в соответствии с определением (2) операторной функции

$$(\widetilde{\lambda^n f})(A) = \overline{(\lambda^{-m_1} f)(A) A^{m_1+n}}. \quad (8)$$

В силу того что $x \in \mathcal{D}(A^{m_1+n})$ при произвольном $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, получаем, что $x \in \mathcal{D}((\widetilde{\lambda^n f})(A))$, т. е. имеет место (6).

Предполагаем далее, что и $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и числа $a_2 \in (0, a_0)$, $\varphi_2 \in (\varphi_0, \pi)$, $C_2 \in (0, +\infty)$, $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ таковы, что $\frac{1}{f} \in F(a_2, \varphi_2, C_2, \sigma_2)$. Возьмем произвольно такое число m_2 , что выполнено (3) для функции $\frac{1}{f}$ с $C = C_2$, $\sigma = \sigma_2$. Пусть $x \in \mathcal{D}((\lambda^n f)(A))$. Тогда оператор $(\frac{1}{\lambda^{m_2} f})(A)$ непрерывен и при любом $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $(\lambda^{m_2+n} f)(A)$ — оператор, обратный к непрерывному, т. е. по теореме 3 из [9] следует

$$A^n = \overline{\left(\frac{1}{\lambda^{m_2} f}\right)(A)(\lambda^{m_2+n} f)(A)}.$$

Поскольку $x \in \mathcal{D}((\lambda^{m_2+n} f)(A))$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), то $x \in \mathcal{D}(A^n)$. Таким образом, $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$, т. е.

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}((\widetilde{\lambda^n f})(A)) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}((\lambda^n f)(A)) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n),$$

и с учетом (6) получаем (7). Утверждение доказано. \square

Следствие 4. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^{z+n}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(\widetilde{A^{z+n}}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n).$$

Следствие 4 получается из (7) для $f(\lambda) = \lambda^z$.

Следствие 5.

$$\bigcap_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(A^z) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\widetilde{A^z}) = \bigcap_{\sigma \in \mathbb{R}} \mathcal{D}(A^\sigma) = \bigcap_{\sigma \in \mathbb{R}} \mathcal{D}(\widetilde{A^\sigma}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n). \quad (9)$$

Справедливость (9) вытекает в силу следствия 4 из соотношений

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^{z+n}) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(\widetilde{A^{z+n}}) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(A^z) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\widetilde{A^z}),$$

в которых \mathbb{C} можно заменить на \mathbb{R} .

З а м е ч а н и е 1. Если $f \in \mathcal{F}$, $\frac{1}{f} \notin \mathcal{F}$, то включение в (6) может быть строгим. Для примера можно взять функцию $f(\lambda) = e^{-\lambda}$. В этом случае $(\lambda^{-n}e^{-\lambda})(A)$ — непрерывный на X оператор и правая часть в (6) равна X . В случае неограниченного оператора A в (6) — строгое включение.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $f \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n) \subset \mathcal{D}(\widetilde{f(A)}).$$

Замечание вытекает из того факта, что при достаточно большом $m \in \mathbb{N}$ справедливо, что $\mathcal{D}(A^m) \subset \mathcal{D}(\widetilde{f(A)})$.

Утверждение 3. Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$. Тогда $x \in \mathcal{D}(\widetilde{f_1(A)f_2(A)})$ и

$$\widetilde{f_1(A)f_2(A)}x = f_1(A)f_2(A)x = (f_1f_2)(A)x. \quad (10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$, числа $a_i \in (0, a_0)$, $\varphi_i \in (\varphi_0, \pi)$, $C_i \in (0, +\infty)$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) таковы, что $f_i \in F(a_i, \varphi_i, C_i, \sigma_i)$, числа $m = m_i$ удовлетворяют (3) при $\sigma = \sigma_i$, $y = A^{m_2}x$. По теореме 3 из [11]

$$\begin{aligned} (f_1f_2)(A)x &= (f_1f_2)A^{-m_2}y = (\lambda^{-m_2}f_1f_2)(A)y \\ &= f_1(A)(\lambda^{-m_2}f_2)(A)y = f_1(A)f_2(A)A^{-m_2}y = f_1(A)f_2(A)x, \end{aligned}$$

т. е. второе из равенств (10) имеет место.

Покажем, что имеет место первое из них. Так как выполнено (3) с $\sigma = \sigma_i$, $m = m_i$, то $\sigma_1 + \sigma_2 - m_1 - m_2 < 2(\gamma - 1) \leq \gamma - 1$. Тогда с учетом включения $f_1f_2 \in \mathcal{F}$, замечания 2 и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} (f_1f_2)(A)x &= (\widetilde{f_1f_2})(A)x = \overline{(\lambda^{-m_1-m_2}f_1f_2)(A)A^{m_1+m_2}}x \\ &= (\lambda^{-m_1-m_2}f_1f_2)(A)A^{m_1+m_2}x = (\lambda^{-m_1}f_1)(A)(\lambda^{-m_2}f_2)(A)A^{m_1}A^{m_2}x \\ &= (\lambda^{-m_1}f_1)(A)A^{m_1}(\lambda^{-m_2}f_2)(A)A^{m_2}x = \widetilde{f_1(A)}\widetilde{f_2(A)}x = \widetilde{f_1(A)}f_2(A)x. \end{aligned}$$

Итак, (10) имеет место. Утверждение доказано. \square

Следствие 6. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$. Тогда $x \in \mathcal{D}(\widetilde{A^{z_1} A^{z_2}})$ и

$$\widetilde{A^{z_1} A^{z_2}} x = A^{z_1} A^{z_2} x = A^{z_1+z_2} x. \quad (11)$$

З а м е ч а н и е 3. Если числа $a_i, \varphi_i, C_i, \sigma_i, m_i$ ($i = 1, 2$) такие, как при доказательстве утверждения 3, то $\mathcal{D}(A^{m_1+m_2}) \subset \mathcal{D}((f_1 f_2)(A))$ и для $x \in \mathcal{D}(A^{m_1+m_2})$ имеет место (10). В частности, если $z_i \in \mathbb{C}$, $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таковы, что $\operatorname{Re} z_i - m_i < \gamma - 1$ ($i = 1, 2$), то $\mathcal{D}(A^{m_1+m_2}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A^{z_1+z_2}})$ и для $x \in \mathcal{D}(A^{m_1+m_2})$ справедливо (11).

Утверждение 4. Пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, последовательность $\left\{ \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}} \right\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ монотонна и ограничена, $x \in X$, $f \in \mathcal{F}$. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x$ сходится, то справедливы неравенства

$$\widetilde{f}(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \widetilde{f}(A) A^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\widetilde{\lambda^n f})(A) x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \widetilde{f}(A) x \quad (12)$$

(в них все части имеют смысл).

Если в дополнение к сформулированным условиям $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$, то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n &= f(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \widetilde{f}(A) A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f(A) A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\widetilde{\lambda^n f})(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^n f)(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \widetilde{f}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A), \end{aligned} \quad (13)$$

причем области определения всех частей равенств совпадают с $\mathcal{D}(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть числа $a \in (0, a_0)$, $\varphi \in (\varphi_0, \pi)$, $C \in (0, +\infty)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ таковы, что $f \in F(a, \varphi, C, \sigma)$. Найдем такое число $k \in \mathbb{N}$, что $\sigma - km < \gamma - 1$. Последовательность $\left\{ \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+km}} \right\}_{n=0}^{\infty}$ (как и последовательность $\left\{ \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}} \right\}_{n=0}^{\infty}$) будет ограничена и с некоторого номера монотонна в силу равенства

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+km}} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}} \times \frac{\alpha_{n+m}}{\alpha_{n+2m}} \times \dots \times \frac{\alpha_{n+(k-1)m}}{\alpha_{n+km}}.$$

Для простоты обозначений считаем, что $k = 1$, т. е. выполнено (3).

Возьмем произвольно $x \in \mathcal{D}(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n)$, т. е. такой элемент, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x$ сходится. Тогда согласно сформулированному в утверждении 1 из [12] для рядов элементов банахова пространства аналогу признака Абеля сходимости числовых рядов сходится в X ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}} \alpha_{n+m} A^{n+m} x,$$

т. е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{n+m} x$. В силу замкнутости оператора A^m имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x \in \mathcal{D}(A^m) \quad \text{и} \quad A^m \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{n+m} x.$$

Отсюда по определению (2) функции $\widetilde{f}(A) = \overline{(\lambda^{-m} f)(A) A^m}$ выводим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x \in \mathcal{D}(\widetilde{f}(A));$$

$$\tilde{f}(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x = (\lambda^{-m} f)(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{n+m} x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^{-m} f)(A) A^{m+n} x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \tilde{f}(A) A^n x$$

(использована непрерывность оператора $(\lambda^{-m} f)(A)$, которая имеет место в силу (3)). По теореме 3 из [11] $\tilde{f}(A) A^n x = (\widetilde{\lambda^n f})(A) x$, откуда следует справедливость второго из равенств (12). Кроме того, с учетом леммы 1

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \tilde{f}(A) A^n x &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^{-m} f)(A) A^{m+n} x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^{-m} f)(A) A^n A^m x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n (\lambda^{-m} f)(A) A^m x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \tilde{f}(A) x. \end{aligned}$$

Равенства (12) (включая существование их частей) установлены.

Пусть в дополнение к сформулированным условиям выполнено $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$. Предполагаем, что числа $a_1 \in (0, a_0)$, $\varphi_1 \in (\varphi_0, \pi)$, $C_1 \in (0, +\infty)$, $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ таковы, что $\frac{1}{f} \in F(a_1, \varphi_1, C_1, \sigma_1)$. Найдем такое число $k_1 \in \mathbb{N}$, что $\sigma_1 - k_1 m < \gamma - 1$, и считаем без ограничения общности что $k_1 = 1$, т. е. выполнено (3) с заменой σ на σ_1 .

Для доказательства равенств (13) достаточно установить, что область определения любой из частей равенств лежит в $\mathcal{D}(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n)$.

Прежде всего заметим, что

$$\mathcal{D}\left(\tilde{f}(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n\right) \subset \mathcal{D}\left(f(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n\right) \subset \mathcal{D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n\right),$$

и с учетом теоремы 1 из [11]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \tilde{f}(A) A^n\right) &\subset \mathcal{D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f(A) A^n\right) \subset \mathcal{D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^n f)(A)\right), \\ \mathcal{D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\widetilde{\lambda^n f})(A)\right) &\subset \mathcal{D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^n f)(A)\right). \end{aligned}$$

Пусть $x \in X$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^n f)(A) x$ сходится. Тогда по ранее применявшемуся аналогу признака Абеля сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^{m+n} f)(A) x$. В силу непрерывности оператора $(\frac{1}{\lambda^m f})(A)$ делаем вывод о сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{1}{\lambda^m f}\right)(A) (\lambda^{m+n} f)(A) x,$$

и ввиду теоремы 1 из [11] — и ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x$.

Далее,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \tilde{f}(A) \subset \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A).$$

Пусть $x \in X$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A) x$ сходится. Тогда аналогично предыдущему заключаем сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{m+n} f(A) x$. Так как $A^m f(A) \subset (\lambda^m f)(A)$ [11, теорема 1], то сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n (\lambda^m f)(A) x$, а в силу непрерывности оператора $(\frac{1}{\lambda^m f})(A)$ — и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{1}{\lambda^m f}\right)(A) A^n (\lambda^m f)(A) x.$$

Поэтому по лемме 1 будет сходиться ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \left(\frac{1}{\lambda^m f} \right) (A) (\lambda^m f) (A) x,$$

т. е. и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x$. Утверждение доказано. \square

З а м е ч а н и е 4. В условиях утверждения 4 без предположения, что $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$, для $x \in \mathcal{D}(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n)$ справедливы равенства

$$f(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f(A) A^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^n f) (A) x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A) x.$$

Следствие 7. Пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, последовательность $\left\{ \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}} \right\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ монотонна и ограничена, $z \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{A}^z \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n &= A^z \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \widetilde{A}^z A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^z A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \widetilde{A}^{z+n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{z+n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \widetilde{A}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n A^z, \end{aligned}$$

причем области определения всех частей равенств совпадают с $\mathcal{D}(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n)$.

Заметим, что условие ограниченности последовательности $\left\{ \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}} \right\}_{n=0}^{\infty}$ в утверждении 4 существенно для справедливости (12), а включение $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$ — для справедливости (13). Это демонстрируют следующие далее примеры, для рассмотрения которых нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow m$ (m — пространство комплексных ограниченных последовательностей с суп-нормой), $f(\lambda) = \{f_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), f непрерывна и интегрируема в несобственном смысле на \mathbb{R} . Тогда при любом n функция $f_n(\lambda)$ интегрируема на \mathbb{R} и

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\lambda = \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_n(\lambda) d\lambda \right\}_{n=1}^{\infty}$$

(значение интеграла слева предполагается элементом m).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что для любого отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ функции f_n интегрируемы по Риману на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(\lambda) d\lambda = \left\{ \int_a^b f_n(\lambda) d\lambda \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Это вытекает из определения $\int_a^b f(\lambda) d\lambda$ как предела интегральных сумм функции f в m , т. е. равномерного предела по n интегральных сумм функций f_n (разбиение отрезка $[a, b]$ и выбор точек, соответствующий разбиению, для всех f_n одинаковы).

Взяв такие последовательности $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, что $a_k \rightarrow -\infty$, $b_k \rightarrow +\infty$, и учитывая, что $\int_{a_k}^{b_k} f(\lambda) d\lambda \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\lambda$ (в m), по тем же соображениям получаем заключение леммы. Лемма доказана. \square

З а м е ч а н и е 5. Лемма остается справедливой при аналогичном доказательстве, если \mathbb{R} заменить на $\Gamma(a, \varphi)$ ($a > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$).

П р и м е р 1. Пусть $X = c_0$, для $x = \{\xi_s\}_{s=1}^\infty \in c_0$ таких, что $y = \{s\xi_s\}_{s=1}^\infty \in c_0$, определим оператор A формулой $Ax = y$. Оператор A плотно определен, линеен, его спектр $\sigma(A)$ равен \mathbb{N} , для $y = \{\eta_s\}_{s=1}^\infty \in c_0$, $\lambda \in \rho(A)$ справедливо равенство $R(\lambda)y = \left\{\frac{\eta_s}{s-\lambda}\right\}_{s=1}^\infty$. При этом для $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda \leq \frac{1}{2}$ выполнено $\|R(\lambda)\| = \frac{1}{|\lambda-1|}$.

Взяв $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, причем $k > \operatorname{Re} z$, а также $x = \{\xi_s\}_{s=1}^\infty \in \mathcal{D}(A^z) \subset c_0$, в силу формулы (1) и леммы 2 имеем

$$A^z x = -\frac{A^k}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})} \frac{\lambda^{z-k}}{s-\lambda} \xi_s d\lambda \right\}_{s=1}^\infty = A^k \{s^{z-k} \xi_s\}_{s=1}^\infty = \{s^z \xi_s\}_{s=1}^\infty.$$

Докажем теперь, что $\widetilde{A}^z = A^z$.

Пусть $x = \{\xi_s\}_{s=1}^\infty \in \mathcal{D}(A^z)$ и $x_s = (\xi_1, \dots, \xi_s, 0, 0, \dots)$ ($s \in \mathbb{N}$). Тогда (в силу (2)) при всех s выполняется, что $x_s \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^z)$, $x_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} x$ и

$$\widetilde{A}^z x_s = A^z x_s = (\xi_1, \dots, s^z \xi_s, 0, 0, \dots) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \{s^z \xi_s\}_{s=1}^\infty = A^z x.$$

С учетом замкнутости оператора \widetilde{A}^z справедливо, что $x \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^z)$, т.е. $\mathcal{D}(A^z) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A}^z)$, а так как $\widetilde{A}^z \subset A^z$, то эти операторы совпадают.

Пусть $\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{n^n}, & n \geq 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$ Тогда для $x = \{\xi_s\}_{s=1}^\infty \in \mathcal{D}(\sum_{n=0}^\infty \alpha_n A^n)$ верно, что

$$\sum_{n=1}^\infty \alpha_n A^n x = \left\{ \sum_{n=1}^\infty \frac{s^n}{n^n} \xi_s \right\}_{s=1}^\infty.$$

Рассмотрим вектор $x = \{\xi_s\}_{s=1}^\infty$ с $\xi_s = \frac{1}{s + \sum_{k=1}^\infty \frac{s^{k+1}}{k^k}}$. Так как $\xi_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$, то $x \in c_0$. Кроме того, при любом $n \in \mathbb{N}$

$$s^n \xi_s \leq \frac{s^n}{\frac{s^{n+1}}{n^n}} = \frac{n^n}{s} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0,$$

т.е. $x \in \mathcal{D}(A^n)$.

Покажем, что ряд $(s + \sum_{n=1}^\infty \frac{s^n}{n^n}) \xi_s$ сходится равномерно по $s \in \mathbb{N}$. Для этого установим, что его остаток

$$r_N(s) = \left(\sum_{n=N+1}^\infty \frac{s^n}{n^n} \right) / \left(s + \sum_{k=1}^\infty \frac{s^{k+1}}{k^k} \right)$$

равномерно (по s) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$. Так как при всех s , $N \in \mathbb{N}$ верно, что $r_N(s) \leq \frac{1}{s}$, то $r_N(s) < \varepsilon$ при $s > \frac{1}{\varepsilon}$ и произвольном $N \in \mathbb{N}$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty \frac{s^n}{n^n}$ при каждом фиксированном s вытекает, что $r_N(s) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. По числу ε найдем такой номер N_0 , что при всех $s \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $N > N_0$ выполняется неравенство $r_N(s) < \varepsilon$. Таким образом, $r_N(s) < \varepsilon$ при $N > N_0$ и всех $s \in \mathbb{N}$, что означает равномерную (по s) сходимость к нулю последовательности остатков $r_N(s)$ при $N \rightarrow \infty$.

Итак, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x$ сходится в c_0 . В то же время при любом $s \in \mathbb{N}$ справедливо, что

$$\left(s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{n+1}}{n^n} \right) \xi_s = 1,$$

т. е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{n+1} x$ расходится в c_0 . Таким образом, несмотря на сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x,$$

все части равенств (12) для $f(\lambda) = \lambda$ не имеют смысла в c_0 (в данном случае при любом $m \in \mathbb{N}$ последовательность $\left\{ \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}} \right\}_{n=0}^{\infty}$ монотонна, но не является ограниченной).

Пример 2. Пусть $X = c_0$, A — оператор из примера 1, $f(\lambda) = \lambda - 1$ (в этом случае $\frac{1}{f} \notin \mathcal{F}$, поскольку $1 \in \sigma(A)$). При этом $f(A) = A - E$, т. е. для $x = \{\xi_s\}_{s=1}^{\infty}$ верно, что

$$f(A)x = \{(s-1)\xi_s\}_{s=1}^{\infty} = \{f(s)\xi_s\}_{s=1}^{\infty}.$$

Берем $x = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, полагаем $\alpha_n = 1$ при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда поскольку ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \xi_1$ (в данном случае $\xi_1 = 1$) расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x$ (по лемме 2). С другой стороны, поскольку

$$f(A)x = (0, \xi_2, 2\xi_3, 3\xi_4, \dots) = 0,$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A)x$ сходится (к нулю). Итак, (13) не имеет места

$$\left(x \notin \mathcal{D}(f(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n), \text{ хотя } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A)x = 0 \right).$$

З а м е ч а н и е 6. Без предположения, что $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{f}(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n &= f(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \subset \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \tilde{f}(A) A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f(A) A^n \\ &\subset \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^n f)(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A). \end{aligned}$$

Справедливость замечания вытекает из утверждения 4, замечания 2 и теорем 1, 3 из [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Из-во иностр. лит., 1962. 896 с.
2. Люстерник Л.А., Соболев С.Л. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 519 с.
3. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 449 с.
4. Balakrishnan A.V. Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them // Pacific J. Math. Soc. 1960. Vol. 3. P. 419–437. doi: 10.2140/pjm.1960.10.419.
5. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльников Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.
6. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 494 с.

7. **Komatsu H.** Fractional powers of operators // Interpolation spaces. *Pacific J. Math.* 1967. Vol. 21, no 1. P. 89–111. doi: 10.2140/pjm.1967.21.89.
8. **Репин О.А.** Об одной задаче для уравнения смешанного типа с дробной производной // Изв. вузов. Математика. 2018. № 8. С. 46–51.
9. **Костин В.А., Костин Д.В., Костин А.В.** Операторные косинус-функции и граничные задачи // Докл. АН. 2019. Т. 486, № 5. С. 531–536.
10. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Некоторые классы функций линейного замкнутого оператора // Тр. института математики и механики УрО РАН, 2011. Т. 17, № 3. С. 186–200.
11. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Свойства отображений скалярных функций в операторные линейного замкнутого оператора // Тр. института математики и механики УрО РАН, 2015. Т. 21, № 1. С. 153–165.
12. **Korkina L.F., Rekant M.A.** Some properties of operator exponent // *Ural. Math. J.* 2018. Vol. 4, no. 2. P. 33–42. doi: 10.15826/umj.2018.2.005.

Поступила 9.12.2019

После доработки 25.01.2020

Принята к публикации 3.02.2020

Коркина Людмила Федоровна

канд. физ.-мат. наук

доцент

Уральский федеральный университет,

г. Екатеринбург

e-mail: L.F.Korkina@urfu.ru

Рекант Марк Александрович

канд. физ.-мат. наук

доцент

Уральский федеральный университет,

г. Екатеринбург

e-mail: M.A.Rekant@urfu.ru

REFERENCES

1. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators. I. General theory.* N Y: Interscience Publ., 1958, 858 p. ISBN: 0470226056. Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962, 896 p.
2. Lusternik L.A. Sobolev V.J. *Elements of functional analysis.* International monographs on advanced mathematics and physics. Delhi: Hindustan Publishing Corp., 1974, 360 p. ISBN: 0470556501. Original Russian text published in Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Elementy funktsional'nogo analiza.* Moscow: Nauka Publ., 1965, 520 p.
3. Rudin W. *Functional Analysis.* N Y: McGraw–Hill, 1973, 397 p. ISBN: 9780070542259. Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz.* Moscow: Mir Publ., 1975, 449 p.
4. Balakrishnan A.V. Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them. *Pacific J. Math. Soc.*, 1960, vol. 3, pp. 419–437. doi: 10.2140/pjm.1960.10.419.
5. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. *Integral operators in spaces of summable functions.* Netherlands: Springer, 1976, 536 p. ISBN: 978-94-010-1544-8. Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsii.* Moscow: Nauka Publ., 1966, 499 p.
6. Krein S. *Linear differential equations in Banach space.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 29. Providence: AMS, 1972, 390 p. ISBN: 978-1-4704-1628-7. Original Russian text published in Krein S.G. *Lineinye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve.* Moscow: Nauka Publ., 1967, 494 p.
7. Komatsu H. Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces. *Pacific J. Math.*, 1967, vol. 21, no 1, pp. 89–111. doi: 10.2140/pjm.1967.21.89.
8. Repin O.A. On a problem for mixed-type equation with fractional derivative. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2018, vol. 62, no. 8, pp. 38–42. doi: 10.3103/S1066369X18080066.

9. Kostin V.A., Kostin D.V., Kostin A.V. Operator Cosine Functions and Boundary Value Problems. *Dokl. Math.*, 2019, vol. 99, no. 3, pp. 303–307. doi: 10.1134/S1064562419030177.
10. Korkina L.F., Rekant M.A. Some classes of functions of a linear closed operator. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2012, vol. 277, suppl. 1, pp. 121–135. doi: 10.1134/S0081543812050124.
11. Korkina L.F., Rekant M.A. Properties of mappings of scalar functions to operator functions of a linear closed operator. *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no 1, pp. 153–165 (in Russian).
12. Korkina L.F., Rekant M.A. Some properties of operator exponent. *Ural. Math. J.*, 2018, vol. 4, no. 2, pp. 33–42. doi: 10.15826/umj.2018.2.005.

Received December 9, 2019

Revised January 25, 2020

Accepted February 3, 2020

Lyudmila Fedorovna Korkina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: L.F.Korkina@urfu.ru.

Mark Aleksandrovich Rekant, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: M.A.Rekant@urfu.ru.

Cite this article as: L. F. Korkina, M. A. Rekant. Some properties of power operator series. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp.161–172.

УДК 514.174.2

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ УПАКОВОК
ИЗ РАЗЛИЧНЫХ ШАРОВ В ВЫПУКЛЫЕ КОМПАКТЫ¹****П. Д. Лебедев, А. Л. Казаков, А. А. Лемперт**

Исследуется проблема оптимальной упаковки неравных шаров в выпуклый компакт. Рассматриваются наборы шаров, радиусы которых пропорциональны заданному параметру r . Максимизация последнего выбрана в качестве критерия оптимальности. Наибольшее возможное количество различных типов шаров равно трем. Задача относится к классу NP-трудных и исследуется численно. Предложены алгоритмы, основанные на сегментации заданного компакта на зоны влияния центров элементов упаковки (обобщенные зоны Дирихле). Разбиение строится с использованием оптико-геометрического подхода, развиваемого в последние годы авторами. После получения промежуточного результата выполняется процедура улучшения с помощью разработанного геометрического алгоритма. В качестве его основы использованы методы, базирующиеся на пошаговом сдвиге точек с целью максимизации радиуса текущего шара. Для отыскания направления сдвига строится супердифференциал функции, равной максимальному радиусу элемента упаковки с центром в текущей точке. Выведена формула, позволяющая определить направление максимального роста данной функции. Разработанные алгоритмы реализованы в виде программного комплекса для построения упаковок шаров в компакт. Выполнен численный эксперимент, в ходе которого рассмотрено несколько примеров. Построены упаковки шаров разного радиуса для тел различной формы: куба, шара, цилиндра.

Ключевые слова: упаковка, шар, оптимизация, обобщенная зона Дирихле, производная по направлению, супердифференциал, оптико-геометрический подход.

P. D. Lebedev, A. L. Kazakov, A. A. Lempert. Numerical methods for the construction of packings of different balls into convex compact sets.

The problem of an optimal packing of incongruent balls into a convex compact set is studied. We consider sets of balls whose radii are proportional to a specified parameter r . The aim is to maximize r . The maximum possible number of different types of balls is three. The problem belongs to the class of NP-hard problems and is solved numerically. We propose algorithms based on partitioning the given compact set into zones of influence of the centers of the elements (generalized Dirichlet zones). The partition is constructed using the optical-geometric approach developed by the authors earlier. A preliminary result is obtained and then improved by a geometric algorithm based on a step-by-step shift of points aimed at maximizing the radius of the current ball. To find the shift direction, we construct the superdifferential of the function equal to the maximum radius of a packed ball centered at the current point. We derive a formula for the maximum growth direction of this function. The developed algorithms are implemented as a software complex for the construction of a ball packing of a compact set. A numerical experiment was carried out for several examples. Packings with balls of different radii are constructed for containers of different shapes: a cube, a sphere, and a cylinder.

Keywords: packing, sphere, optimization, generalized Dirichlet zone, directional derivative, superdifferential, optical-geometric approach.

MSC: 52C17, 05B40, 51M16, 52A27**DOI:** 10.21538/0134-4889-2020-26-2-173-187**Введение**

Задача об оптимальной упаковке шаров относится к числу классических и популярных проблем математики. Достаточно сказать, что в научной литературе она рассматривается, по крайней мере, с 1611 года, когда вышел в свет известный трактат И. Кеплера “*Strena, seu de nive sexangula*” (О шестиугольных снежинках). Задача интересна как сама по себе, так и в связи с многочисленными приложениями. Принято считать, что впервые она была предложена

¹Исследование П.Д. Лебедева поддержано грантом РФФИ (проект № 19-11-00105), исследование А.Л. Казакова выполнено при поддержке РФФИ (проект № 18-07-00604), исследование А.А. Лемперт — при поддержке РФФИ (проект № 20-010-00724) и Правительства Иркутской области.

елизаветинским адмиралом У. Рэли, который изучал проблему размещения пушечных ядер в корабельном трюме.

Позднее задача упаковки шаров рассматривалась в упаковочной логистике, химии, медицине и др. [1]. Так, в материаловедении она возникает при моделировании процессов поглощения молекул [2], в радиохирургии — при планировании лечения [3], в области безопасности — при осуществлении охраны водного и воздушного периметров и т.п. При этом рассматриваются как равные шары (сферы), так и различные.

О сложности задачи упаковки шаров говорит, в частности, следующий факт: гипотеза Кеплера (1611) о том, что для случая бесконечного пространства плотнейшими упаковками равных шаров являются гранецентрированная кубическая и гексагональная плотная с плотностью $\pi/(3\sqrt{2})$, была окончательно доказана лишь спустя четыре столетия [4]. Для случая ограниченного контейнера проблема остается открытой даже в случаях, когда в качестве контейнеров выступают множества простой формы: сфера, куб, тетраэдр и т. д. и все шары между собой равны [5]. Как правило, задача упаковки шаров в контейнер решается численно. Приведем краткий обзор.

В [6] задачи упаковки заданного количества неравных шаров с целью минимизации размера контейнера решаются с помощью модификации алгоритма JA (jump-algorithm). Алгоритм JA также используется в работе [7] для решения задачи упаковки неравных шаров в сферу минимального размера.

В работе [8] представлен параллельный жадный алгоритм (B1.6_3DSPP) для задачи упаковки шаров разных радиусов в куб и кубоид. Этот алгоритм является улучшенным вариантом алгоритмов B1.0 и B1.5 из [9]. На основе жадных алгоритмов в работе [10] предложены методы широколучевого поиска (width-beam search), и рассмотрены задачи упаковки различных шаров в кубоид минимальной длины при фиксированной ширине и высоте. В статье [11] исследован метод, включающий методы поиска Табу, квази-человеческую (Quasi-human) стратегию и метод BFGS.

Задача упаковки шаров двух разных типов рассматривалась в [12], здесь размер больших шаров во много раз больше размера маленьких. Для получения наибольшей плотности предложена формула вычисления размера больших шаров при заданном размере маленьких.

Авторы ранее изучали в основном задачи упаковки равных кругов в плоские фигуры (см. [13;14]). В работах [15;16] они рассматривали упаковки уже из шаров в тела в трехмерном пространстве. В статье 2018 г. (П.Д. Лебедев, А.Л. Казаков. Итерационные методы построения упаковок из кругов различного радиуса на плоскости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 141–151) были исследованы упаковки на плоскости, которые содержали различные по размерам элементы. Естественно, возникает вопрос о возможности применения предложенных методов для построения упаковок из шаров различного радиуса в трехмерные компактные множества. В настоящей работе авторы сконцентрировались на варианте, когда радиус каждого шара равен произведению некоего индивидуального положительного коэффициента на общий для всех элементов параметр r .

1. Постановка задачи

Пусть задано выпуклое компактное множество $M \subset \mathbb{R}^3$ ненулевого объема $v(M) > 0$. Рассмотрим шар $B(\mathbf{s}, r) \triangleq \{\mathbf{b}: \|\mathbf{b} - \mathbf{s}\| \leq r\}$ с центром в точке \mathbf{s} , радиуса $r > 0$, здесь $\|\mathbf{b}\|$ означает евклидову норму вектора \mathbf{b} . Набор из $n \in \mathbb{N}$ шаров $B(\mathbf{s}_i, r_i)$ называется *упаковкой* U_n в множество M , если выполняются условия

$$\forall i = \overline{1, n} \quad B(\mathbf{s}_i, r_i) \subseteq M$$

и

$$\forall i = \overline{1, n}, \quad \forall j = \overline{1, n} \quad (i \neq j) \Rightarrow \text{int } B(\mathbf{s}_i, r_i) \cap \text{int } B(\mathbf{s}_j, r_j) = \emptyset,$$

где $\text{int}(\cdot)$ означает объединение внутренних точек множества.

Введем в рассмотрение при заданном n массив $A_n = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ из n положительных чисел. Будем обозначать S_n набор из n точек в трехмерном пространстве.

З а д а ч а 1. Пусть заданы выпуклый компакт M , число n и массив A_n . Требуется найти набор шаров $\{B(\mathbf{s}_i, \alpha_i r)\}_{i=1}^n$, образующих упаковку в множество M , при максимально возможном значении r .

Задачу 1 можно сформулировать как задачу оптимизации многомерной функции, зависящей от набора S_n . Обозначим через $R_M(S_n, A_n)$ максимальный радиус шаров с центрами в точках $\mathbf{s}_i \in S_n$, с радиусами $\alpha_i R_M(S_n, A_n)$, которые образуют упаковку во множество M . При $S_n \subset M$ его можно записать в виде

$$R_M(S_n, A_n) = \min_{i=\overline{1, n}} \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i), \quad (1.1)$$

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \min_{j=\overline{1, n}} \psi^{(i, j)}(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

$$\psi^{(i, j)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\alpha_i + \alpha_j)^{-1} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\|, & i \neq j, \\ \alpha_i^{-1} \rho(\mathbf{x}, \partial M), & i = j, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.3)$$

где $\rho(\mathbf{x}, M) \triangleq \min_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ — евклидово расстояние от точки \mathbf{x} до замкнутого множества M , ∂M — граница множества M . Задача 1 сводится к отысканию набора $S_n \subset M$, для которого величина $R_M(S_n, A_n)$ максимальна.

2. Методы решения задачи

В общем случае задача 1 может быть решена только численными методами. При этом ее удобно свести к задаче о поэтапной максимизации функций $\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$ за счет изменения координат точек \mathbf{s}_i , $i = \overline{1, n}$. В случае шаров равного радиуса часто пользуются конструкциями глобально оптимальных решеток, например, гранецентрированной или гексагональной плотноупакованной [17, гл. VII, § 2]. Однако при различных размерах элементов упаковки они в явном виде не дают приемлемых результатов. Поэтому авторы разрабатывают различные итерационные схемы.

2.1. Методы разбиения множества на зоны влияния

Разбиение множества M на зоны, в которые вложены круги с центрами в каждой из точек массива S_n , впервые применены авторами в работе [13]. Однако для учета неравенства радиусов шаров в них требуется внести существенные коррективы.

О п р е д е л е н и е 1. Будем называть областью доминирования точки \mathbf{s}_i над \mathbf{s}_j при заданном массиве положительных чисел A_n множество

$$D^{(i, j)}(S_n, A_n) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \leq \varphi^{(j)}(\mathbf{x})\}.$$

Считаем для удобства составления алгоритмов, что $D^{(i, i)}(S_n) = \mathbb{R}^3$.

Предложение 1. Пусть $\mathbf{s}_i \in S_n$ и $\mathbf{s}_j \in S_n$. Если $\mathbf{s}_i \neq \mathbf{s}_j$, то справедливы утверждения
1) если $\alpha_i < \alpha_j$, то $D^{(i, j)}(S_n)$ есть шар

$$D^{(i, j)}(S_n) = B(\mathbf{v}, r^*(\alpha_i, \alpha_j, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)) \quad (2.1)$$

с центром в

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}_i + \frac{\alpha_i^2}{\alpha_j^2 - \alpha_i^2} (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \quad (2.2)$$

радиуса

$$r^*(\alpha_i, \alpha_j, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = \frac{\alpha_i \alpha_j}{|\alpha_j^2 - \alpha_i^2|} \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|; \quad (2.3)$$

2) если $\alpha_i = \alpha_j$, то $D^{(i,j)}(S_n)$ есть полупространство

$$D^{(i,j)}(S_n) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\|\};$$

3) если $\alpha_i > \alpha_j$, то $D^{(i,j)}(S_n)$ есть неограниченное множество

$$D^{(i,j)}(S_n) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\| \geq r^*(\alpha_i, \alpha_j, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)\}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}_j + \frac{\alpha_i^2}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2} (\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i). \quad (2.5)$$

Доказательство предложения 1 полностью аналогично доказательству теоремы 1 из недавней работы авторов (П.Д. Лебедев, А.Л. Казаков. Построение оптимальных покрытий выпуклых плоских фигур кругами различного радиуса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 137–148). Заметим, что чем ближе отношение чисел α_i/α_j к 1 при $\alpha_i \neq \alpha_j$, тем больше радиус (2.3) сферы, разграничивающей зоны доминирования точек. И чем меньше отношение α_i/α_j при $\alpha_i < \alpha_j$, тем ближе центр (2.2) этой сферы к \mathbf{s}_i . С другой стороны, чем больше частное α_i/α_j при $\alpha_i > \alpha_j$, тем ближе центр (2.5) этой сферы к \mathbf{s}_j . \square

Определение 2. При заданном массиве A_n и $S_n \subset M$ будем называть

$$D^{(i)}(S_n, A_n, M) \triangleq \{\mathbf{m} \in M: \varphi^{(i)}(\mathbf{m}) = \min_{j=\overline{1,n}} \varphi^{(j)}(\mathbf{m})\} \quad (2.6)$$

обобщенной зоной Дирихле точки \mathbf{s}_i в множестве M .

Из формулы (2.6) следует, что обобщенные зоны Дирихле можно находить как пересечение областей доминирования точки с компактом M

$$D^{(i)}(S_n, A_n, M) = M \cap \bigcap_{j=\overline{1,n}} D^{(i,j)}(S_n, A_n). \quad (2.7)$$

Теорема 1. Пусть заданы компакт M , натуральное число n , массив положительных чисел A_n . Тогда для любого массива точек $S_n \subset M$ можно построить новый массив $\tilde{S}_n = \{\tilde{\mathbf{s}}_i\}_{i=\overline{1,n}}$, в котором каждая точка $\tilde{\mathbf{s}}_i, i = \overline{1,n}$, взята произвольным образом из множества $\Theta(D^{(i)}(S_n, A_n, M))$, где

$$\Theta(M) \triangleq \{\mathbf{m}^* \in M: \rho(\mathbf{m}^*, \partial M) = \max_{\mathbf{m} \in M} \rho(\mathbf{m}, \partial M)\}$$

— подмножество точек из M , на которых достигается максимум функции $\rho(\mathbf{x}, \partial M)$. При этом будет выполняться неравенство

$$R_M(\tilde{S}_n, A_n) \geq R_M(S_n, A_n). \quad (2.8)$$

Доказательство. Допустим, все точки из S_n попарно различны. Из формулы (2.7) для обобщенной зоны Дирихле следует, что шар $B(\mathbf{s}_i, \alpha_i r)$, вложенный в $D^{(i)}(S_n, A_n, M)$, не пересекается ни с одним шаром $B(\mathbf{s}_i, \alpha_j r)$ при $i \neq j$, за исключением, может быть, его граничных точек. В то же время, если $B(\mathbf{s}_i, \alpha_i r) \setminus (D^{(i)}(S_n, A_n, M)) \neq \emptyset$, то либо в шаре $B(\mathbf{s}_i, \alpha_i r)$ есть точки, вложенные в $\text{int } B(\mathbf{s}_i, \alpha_j r)$, где $i \neq j$, либо шар $B(\mathbf{s}_i, \alpha_i r)$ выходит за пределы множества M . Значит, можно записать

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) = \alpha_i^{-1} \rho(\mathbf{s}_i, \partial(D^{(i)}(S_n, A_n, M))), \quad i = \overline{1,n}. \quad (2.9)$$

Вместе с тем можно построить n шаров с центрами в точках $\tilde{\mathbf{s}}_i$ радиусами $\rho(\tilde{\mathbf{s}}_i, (D^{(i)}(S_n, A_n, M)))$, $i = \overline{1, n}$, каждый из которых лежит в обобщенной зоне Дирихле $D^{(i)}(S_n, A_n, M)$, $i = \overline{1, n}$, а значит, эти шары не будут пересекаться друг с другом за исключением граничных точек и не выйдут за пределы компакта M . Следовательно, можно записать оценки

$$\tilde{\varphi}^{(i)}(\tilde{\mathbf{s}}_i) \geq \alpha_i^{-1} \rho(\tilde{\mathbf{s}}_i, \partial(D^{(i)}(S_n, A_n, M))) \geq \alpha_i^{-1} \rho(\mathbf{s}_i, \partial(D^{(i)}(S_n, A_n, M))), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.10)$$

где

$$\tilde{\varphi}^{(i)}(\mathbf{x}) = \min_{j=\overline{1, n}} \tilde{\psi}^{(i, j)}(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\tilde{\psi}^{(i, j)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\alpha_i + \alpha_j)^{-1} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{s}}_j\|, & i \neq j, \\ \alpha_i^{-1} \rho(\mathbf{x}, \partial M), & i = j, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

При этом (аналогично формуле (1.1))

$$R_M(\tilde{S}_n, A_n) = \min_{i=\overline{1, n}} \tilde{\varphi}^{(i)}(\tilde{\mathbf{s}}_i). \quad (2.11)$$

Из равенств (2.9) и неравенств (2.10) следует $\forall i = \overline{1, n} \quad \tilde{\varphi}^{(i)}(\tilde{\mathbf{s}}_i) \geq \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$. Отсюда по формулам (1.1) и (2.11) получаем оценку (2.8).

Если же допустить, что среди точек S_n есть две совпадающие, то $R_M(S_n, A_n) = 0$, и, следовательно, неравенство (2.8) выполняется для любого множества точек $\tilde{S}_n \subset M$. \square

Теорема 1 дает возможность разрабатывать *геометрические алгоритмы*, основанные на разбиении тела M на обобщенные зоны Дирихле. Однако их структура может быть очень сложной: участки их границ могут содержать не только части плоскостей, но и сегменты сфер, разделяющих зоны доминирования точек, в случае, если они описаны формулами (2.1) или (2.4). Особенности сложности создает то обстоятельство, что множества $D^{(i)}(S_n, A_n, M)$, $i = \overline{1, n}$, в общем случае не выпуклые и не односвязные, даже если M — выпуклое тело.

В качестве второго способа построения обобщенных зон Дирихле авторы используют *волновой метод*, предложенный в [15] и базирующийся на оптико-геометрической аналогии между распространением света и отысканием кратчайшего расстояния от точки до замкнутого множества. Фактически для нахождения зон Дирихле необходимо из каждой точки $\mathbf{s}_i \in S_n$ инициировать световую волну, движущуюся со скоростью α_i , и отслеживать ее распространение до тех пор, пока она не заполнит множество M . Это означает, что для любой точки $\mathbf{x} \in M$ мы имеем вектор $t(\mathbf{x}) = \{t^1(\mathbf{x}), \dots, t^n(\mathbf{x})\}$ времен достижения \mathbf{x} каждой волной. Если $j^* = \arg \min_{i=\overline{1, \dots, n}} (t^i(\mathbf{x}))$, то \mathbf{x} принадлежит зоне Дирихле, порожденной точкой \mathbf{s}_{j^*} ; если для некоторого k : $|t^{j^*}(\mathbf{x}) - t^k(\mathbf{x})| \leq \varepsilon$, то \mathbf{x} лежит на границе j^* -й и k -й зон.

2.2. Методы оптимального сдвига точек из S_n

Если текущий массив S_n центров элементов упаковки удовлетворяет вложению $S_n \subset M$ и оценке $R_M(S_n, A_n) > 0$, то имеется возможность улучшить его свойства за счет использования дифференциальных свойств функций $\varphi^{(i)}(\cdot)$, $i = \overline{1, n}$, в окрестности точек \mathbf{s}_i , $i = \overline{1, n}$. Похожие методы использовались ранее в работе [16] для упаковок из конгруэнтных шаров.

Заметим, что функция $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ (в случае, если $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) > 0$) есть согласно (1.2), (1.3) минимум из n супердифференцируемых функций $\psi^{(i, j)}(\cdot)$. Подробнее определение супердифференциала приведено в [18, гл. I, п. 4.1], а свойства супердифференциала функции евклидова расстояния до выпуклого множества — в [19, гл. II, § 8]. Для функции $f(\mathbf{x})$, у которой определен в точке \mathbf{x}^* супердифференциал $D^+ f(\mathbf{x})$, производная

$$\left. \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{b}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{f(\mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}^*)}{\varepsilon}$$

по любому направлению $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ($\mathbf{0} \triangleq (0, 0, 0)$) равна

$$\left. \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{b}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \min_{\mathbf{d} \in D^+u(\mathbf{x}^*)} \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle.$$

Обозначим через $J^{(i)}(\mathbf{x})$ множество вторых номеров j функций $\psi^{(i,j)}(\cdot)$, для которых выполняется равенство $\psi^{(i,j)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(i)}(\mathbf{x})$. Введем также $\Omega(\mathbf{x}, M) \triangleq \{\mathbf{m} \in M : \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = \rho(\mathbf{x}, M)\}$ — множество ближайших к \mathbf{x} в евклидовой метрике точек компакта M .

О п р е д е л е н и е 3. При заданном массиве A_n и $S_n \subset M$ будем называть

$$\Omega^{(i)}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{s}_j : j \in J^{(i)}(\mathbf{x}), j \neq i\} \cup M^{(i)}(\mathbf{x}), \quad (2.12)$$

где

$$M^{(i)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Omega(\mathbf{x}, \partial M), & i \in J^{(i)}(\mathbf{x}), \\ \emptyset, & i \notin J^{(i)}(\mathbf{x}), \end{cases}$$

множеством характеристических точек функции $\varphi^{(i)}(\cdot)$ в \mathbf{x} .

Супердифференциал $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ функции $\varphi^{(i)}(\cdot)$ в точке \mathbf{x} совпадает с

$$D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \text{co} \left(\bigcup_{j \in J^{(i)}(\mathbf{x})} D^+\psi^{(i,j)}(\mathbf{x}) \right),$$

где $\text{co}(M)$ означает выпуклую оболочку множества M . Его можно записать в виде

$$\begin{aligned} D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \text{co} \left(\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_j}{(\alpha_i + \alpha_j)\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\|} : \mathbf{s}_j \in S_n \cap \Omega^{(i)}(\mathbf{x}) \right) \right. \\ \left. \cup \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{m}}{\alpha_i\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|} : \mathbf{m} \in \partial M \cap \Omega^{(i)}(\mathbf{x}) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подробнее вывод формулы (2.13) приведен в доказательстве теоремы 1 из вышеуказанной статьи авторов 2018 г. (см. разд. Введение).

О п р е д е л е н и е 4. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^3$ и имеет в точке $\mathbf{x}^* \in \text{int } X$ производные по всем векторам $\mathbf{b} \in \partial B(\mathbf{0}, 1)$. Назовем направлением экстремального роста вектор $\mathbf{b}^* \in \partial B(\mathbf{0}, 1)$, если для него выполняются условия

$$\left. \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{b}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} > 0$$

и

$$\left. \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{b}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \max_{\mathbf{b} \in \partial B(\mathbf{0}, 1)} \left. \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{b}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}. \quad (2.14)$$

Лемма. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^3$ и имеет в точке $\mathbf{x}^* \in \text{int } X$ супердифференциал $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$. Тогда, если

$$\mathbf{0} \notin D^+f(\mathbf{x}^*),$$

то для $f(\mathbf{x})$ существует и единственно направление экстремального роста

$$\mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{d}^*}{\|\mathbf{d}^*\|}, \quad (2.15)$$

где вектор \mathbf{d}^* соответствует условию

$$\{\mathbf{d}^*\} = \Omega(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)). \quad (2.16)$$

Доказательство. Супердифференциал всегда есть выпуклый компакт. Из выпуклого анализа известно, что множество проекций на любое выпуклое замкнутое множество всегда состоит ровно из одной точки [20, лемма 1.9.1]. Поэтому ближайшим элементом к $\mathbf{0}$ может быть только один \mathbf{d}^* (и ему сонаправлен вектор \mathbf{b}^*). При этом из формулы для производных по направлению (2.14) вытекает

$$\forall \mathbf{b} \in \partial B(\mathbf{0}, 1) \setminus \{\mathbf{b}^*\} \quad \left. \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{b}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \leq \langle \mathbf{b}, \mathbf{d}^* \rangle = \|\mathbf{d}^*\| \cos(\angle(\mathbf{b}, \mathbf{d}^*)) = \|\mathbf{d}^*\| \cos(\angle(\mathbf{b}, \mathbf{b}^*)) < \|\mathbf{d}^*\|, \quad (2.17)$$

здесь $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in [0, \pi]$ означает угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Покажем, что выполняется равенство

$$\left. \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{b}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \langle \mathbf{b}^*, \mathbf{d}^* \rangle. \quad (2.18)$$

Допустим, что (2.18) не выполняется. Тогда найдется точка $\tilde{\mathbf{d}} \in D^+u(\mathbf{x}^*)$, для которой

$$\langle \mathbf{b}^*, \tilde{\mathbf{d}} \rangle < \langle \mathbf{b}^*, \mathbf{d}^* \rangle.$$

Проведем плоскость $\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \langle \mathbf{b}^*, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{d}^*\|\}$. По построению $\tilde{\mathbf{d}}$ расположена в полупространстве, которое ограничено плоскостью Π и содержит начало координат, и точка $\tilde{\mathbf{d}}$ не находится на самой плоскости Π . Вместе с тем плоскость Π является касательной к сфере $\partial B(\mathbf{0}, \|\mathbf{d}^*\|)$ в точке \mathbf{d}^* . Поскольку множество $\Omega(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*))$ состоит ровно из одной точки, то $\tilde{\mathbf{d}} \notin B(\mathbf{0}, \|\mathbf{d}^*\|)$. Значит, отрезок $[\mathbf{d}^*, \tilde{\mathbf{d}}]$ пересекает сферу $\partial B(\mathbf{0}, \|\mathbf{d}^*\|)$ в двух точках, одна из которых $\mathbf{d}^* \neq \tilde{\mathbf{d}}$. В силу выпуклости компакта $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$ можно получить включение

$$\tilde{\mathbf{d}} \in \text{co}\{\mathbf{d}^*, \tilde{\mathbf{d}}\} \subseteq \text{co} D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*) = D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*).$$

Таким образом, супердифференциал содержит две точки, ближайшие к началу координат; противоречие.

Из оценок (2.17) и равенства (2.18) следует, что вектор (2.15) есть направление экстремального роста. \square

З а м е ч а н и е. Если у функции $f(\mathbf{x})$ определен супердифференциал в точке \mathbf{x}^* и он содержит начало координат, то это означает, что производные функции по всем направлениям не положительные. Однако и в этом случае могут существовать векторы $\mathbf{b} \in \partial B(\mathbf{0}, 1)$ такие, что функция $f_{\mathbf{b}}(\varepsilon) \triangleq f(\mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{b})$ монотонно возрастает на некотором отрезке $[0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$.

Теорема 2. Пусть заданы компакт M , массив точек $S_n \subset M$ и массив положительных чисел A_n . Тогда при любом $i = \overline{1, n}$, если для точки $\mathbf{x}^* \in M$ выполняется

$$\mathbf{x}^* \notin \text{co} \Omega^{(i)}(\mathbf{x}^*), \quad (2.19)$$

то в точке \mathbf{x}^* определены супердифференциал $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$ и единственное направление $\mathbf{b}^{(i)}$ экстремального роста функции $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$.

Доказательство. Заметим, что из (2.19) следует, что $\mathbf{x}^* \notin \Omega^{(i)}(\mathbf{x}^*)$, а значит, $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*) > 0$. Поэтому супердифференциал $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$ определен по формуле (2.13).

Покажем, что выполняется условие

$$\mathbf{0} \notin D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*). \quad (2.20)$$

Допустим, (2.20) неверно. Супердифференциал по формулам (2.12) и (2.13) есть выпуклая оболочка векторов, полученных умножением векторов из множества $\{\mathbf{x}^*\} - \Omega^{(i)}(\mathbf{x}^*)$ на положительные константы. Поэтому, если найдется набор точек $\{\mathbf{d}_j\}_{j=1}^k \subseteq D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$ такой, что $\mathbf{0}$ есть выпуклая комбинация $\{\mathbf{d}_j\}_{j=1}^k$, то найдется и

$$\{\beta_j \mathbf{d}_j\}_{j=1}^k \subseteq (\{\mathbf{x}^*\} - \Omega^{(i)}(\mathbf{x}^*)) \quad \forall j = \overline{1, k} \quad \beta_j > 0.$$

Значит, некоторой выпуклой комбинацией точек $\{\beta_j \mathbf{d}_j\}_{j=1}^k$ также будет являться начало координат (подробнее см. [16, лемма 2.1]). Таким образом, можно записать

$$\sum_{j=1}^k \gamma_j \mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^k \gamma_j \mathbf{g}_j,$$

где

$$\sum_{j=1}^k \gamma_j = 1 \quad \forall j = \overline{1, k} \quad \gamma_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1, k} \quad \mathbf{g}_j \in \Omega^{(i)}(\mathbf{x}^*).$$

Отсюда следует, что \mathbf{x}^* может быть представлена как выпуклая комбинация точек $\{\mathbf{g}_j\}_{j=1}^k \subseteq \Omega^{(i)}(\mathbf{x}^*)$, что противоречит условию (2.19).

Согласно лемме, приведенной выше, из условия (2.20) следует, что для функции $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ существует и единственно направление $\mathbf{b}^{(i)}$ экстремального роста в точке \mathbf{x}^* . Его можно найти по формулам (2.15), (2.16) как вектор из $\partial B(\mathbf{0}, 1)$, сонаправленный с минимальным по норме элементом супердифференциала $D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$. \square

На базе теоремы 2 авторы составили алгоритм поэтапной максимизации значений функций (1.2) в центрах шаров упаковки. Для его работы требуется начальная итерация массива точек $\text{int } S_n$, состоящая из попарно различных элементов. Это гарантирует, что в каждой точке $\mathbf{s}_i, i = \overline{1, n}$, существует супердифференциал $D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i), i = \overline{1, n}$.

А л г о р и т м 1. Максимизация функции $\varphi^{(i)}(\cdot)$

1. Ввод значений массива точек $S_n \subset \text{int } M$, массива положительных чисел A_n , параметра $l_0 > 0$ для вычисления вектора сдвига и номера i .
2. Вычисление значения $\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$.
3. Вычисление супердифференциала $D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$.
4. Установка значения счетчика k итераций в $k := 0$.
5. Если $\mathbf{0} \in D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$, то установка значения координаты новой точки $\mathbf{s}_i^* := \mathbf{s}_i$ и переход к п. 11.
6. Вычисление элемента \mathbf{d}^* , наименьшего по норме в $D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$.
7. Определение координат новой точки

$$\mathbf{s}_i^* := \mathbf{s}_i + \frac{l_0 \mathbf{d}^*}{2^k \|\mathbf{d}^*\|}. \quad (2.21)$$

8. Увеличение счетчика итераций k на единицу: $k := k + 1$.
9. Если $\mathbf{s}_i^* \notin M$, то переход к п. 7.
10. Если $\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i^*) < \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$, то переход к п. 7.
11. Построение нового массива $\widehat{S}_n = \{\widehat{\mathbf{s}}_j\}_{j=1}^n$ по формуле

$$\widehat{\mathbf{s}}_j = \begin{cases} \mathbf{s}_j, & j \neq i, \\ \mathbf{s}_i^*, & j = i, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.22)$$

Предложение 2. Пусть заданы выпуклый компакт M , массив точек $S_n \subset M$ и массив положительных чисел A_n . Тогда, если $R_M(S_n, A_n) > 0$, то при любом $i = \overline{1, n}$ и любом $l_0 > 0$ для массива точек \widehat{S}_n с помощью алгоритма 1 за конечное число итераций k может быть получен массив \widehat{S}_n . И справедлива оценка

$$R_M(\widehat{S}_n, A_n) \geq R_M(S_n, A_n). \quad (2.23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $R_M(S_n, A_n) > 0$, то в точке \mathbf{s}_i определен супердифференциал $D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$. Если $\mathbf{0} \in D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$, то число итераций равно нулю, и по формуле (2.22) имеет место $\widehat{S}_n = S_n$. Нестрогое неравенство (2.23) тогда превращается в равенство.

Если же $\mathbf{0} \notin D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$, то выполняется как минимум одна итерация с вычислением новой точки по формуле (2.21). Рассмотрим функцию

$$f_{\mathbf{b}}(\varepsilon) = \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i + \varepsilon\mathbf{b}),$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{d}^* \cdot \|\mathbf{d}^*\|^{-1}$. Согласно лемме и теореме 2 $f_{\mathbf{b}}(\varepsilon)$ имеет в точке 0 положительную одностороннюю производную

$$f'_{\mathbf{b}}(+0) = \|\mathbf{d}^*\|.$$

Поэтому ее можно представить на некотором отрезке $[0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \in (0, \rho(\mathbf{s}_i, \partial M))$, в виде

$$f_{\mathbf{b}}(\varepsilon) = f_{\mathbf{b}}(0) + f'_{\mathbf{b}}(+0)\varepsilon + o(\varepsilon) = \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) + \|\mathbf{d}^*\|\varepsilon + o(\varepsilon),$$

где $o(\varepsilon)$ — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем ε . Значит, найдется такое число ε^* , что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ $|o(\varepsilon)| \leq 0.5\|\mathbf{d}^*\|\varepsilon$, и, следовательно,

$$f_{\mathbf{b}}(\varepsilon) \geq \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) + \|\mathbf{d}^*\|\varepsilon - 0.5\|\mathbf{d}^*\|\varepsilon \geq \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) + 0.5\|\mathbf{d}^*\|\varepsilon > \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i).$$

Поэтому при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $2^{-k} \leq \varepsilon^*/l_0$, справедливо

$$f_{\mathbf{b}}(l_0 2^{-k}) > f_{\mathbf{b}}(0),$$

а значит,

$$\varphi^{(i)}\left(\mathbf{s}_i + \frac{l_0 \mathbf{d}^*}{2^k \|\mathbf{d}^*\|}\right) > \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i).$$

Таким образом, при некотором конечном k строится точка \mathbf{s}_i^* , для которой $\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i^*) \geq \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$, и затем происходит окончание работы алгоритма.

Покажем, что неравенство (2.23) выполняется в случае, если $\widehat{S}_n \neq S_n$. Обозначим через i^* номер элемента массива, который различается в \widehat{S}_n и S_n . По аналогии с формулами (1.1)–(1.3) можно записать

$$\begin{aligned} R_M(\widehat{S}_n, A_n) &= \min_{i=\overline{1, n}} \widehat{\varphi}^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i), \\ \widehat{\varphi}^{(i)}(\mathbf{x}) &= \min_{j=\overline{1, n}} \widehat{\psi}^{(i, j)}(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1, n}, \\ \widehat{\psi}^{(i, j)}(\mathbf{x}) &= \begin{cases} (\alpha_i + \alpha_j)^{-1} \|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{s}}_j\|, & i \neq j, \\ \alpha_i^{-1} \rho(\mathbf{x}, \partial M), & i = j, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Поскольку все точки массивов S_n и \widehat{S}_n кроме i^* , по номеру совпадают, то

$$\forall \mathbf{x} \in M \quad \widehat{\varphi}^{(i^*)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(i^*)}(\mathbf{x}).$$

А по условиям окончания работы алгоритма 1 выполняется $\varphi^{(i^*)}(\widehat{\mathbf{s}}_{i^*}) \geq \varphi^{(i^*)}(\mathbf{s}_{i^*})$. Таким образом, справедливо

$$\widehat{\varphi}^{(i^*)}(\widehat{\mathbf{s}}_{i^*}) \geq \varphi^{(i^*)}(\mathbf{s}_{i^*}) \geq R_M(S_n, A_n). \quad (2.24)$$

Обозначим через I^* множество тех значений i , при которых значение выражения $\widehat{\varphi}^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i)$ отличается от $\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$. При $i \neq i^*$ это возможно только для тех номеров i , при которых $\widehat{\varphi}^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) = \widehat{\psi}^{(i, i^*)}(\widehat{\mathbf{s}}_i)$, потому что все элементы, кроме i^* по номеру, в массивах \widehat{S}_n и S_n совпадают. Но тогда для значений функций $\widehat{\varphi}^{(i)}(\cdot)$ в таких точках выполняется оценка (с учетом (2.24))

$$\widehat{\varphi}^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) = \widehat{\psi}^{(i, i^*)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) \geq \widehat{\varphi}^{(i^*)}(\widehat{\mathbf{s}}_{i^*}) \geq \varphi^{(i^*)}(\mathbf{s}_{i^*}) \geq R_M(S_n, A_n). \quad (2.25)$$

Из неравенств (2.24), (2.25) вытекает

$$\forall i = \overline{1, n} \quad \widehat{\varphi}^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) \geq R_M(S_n, A_n),$$

а значит, и (2.23). □

3. Численные эксперименты

В рамках работы над статьей авторами реализован программный комплекс в среде MATLAB, опирающийся на введенные выше конструкции. Его основу составляет многократное применение алгоритма 1 для различных начальных позиций центров упаковки. Предложение 2 гарантирует, что он по крайней мере не уменьшает радиус шаров упаковки. Для поиска наиболее близкого к оптимальному результату в нем предусмотрена многократная генерация начальных положений центров элементов с помощью генератора случайных чисел. Она происходит поэтапно, для каждой новой точки \mathbf{s}_i выполняется проверка на то, чтобы она принадлежала $\text{int } M$ и не совпадала ни с одной из уже сгенерированных.

При этом могут применяться разбиение компакта M на обобщенные зоны Дирихле и нахождение в них множеств точек, максимально удаленных от границы как с помощью геометрического, так и волнового методов. Применение последнего позволяет избежать вырожденных ситуаций, в которых шары упаковки плотно зажаты друг другом и границей M , но расположены явно не оптимальным способом, например, все в ряд.

Косвенным показателем близости упаковки U_n к оптимальной можно считать ее плотность $\sigma(U_n)$ — отношение суммы объемов всех входящих в нее шаров $B(\mathbf{s}_i, \alpha_i r)$, $i = \overline{1, n}$, к объему $v(M)$ множества M . В качестве тел M выбраны куб и шар, поскольку задачи о построении в них упаковок достаточно известны в геометрии и рассматривались, например, в работах [21] (для куба), [22] (для шара) и [23] (для цилиндра). Авторы решили ограничиться изучением наборов элементов упаковки трех различных радиусов. Этого достаточно, чтобы продемонстрировать эффективность работы программного комплекса, а рост числа различных коэффициентов α_i приводит к увеличению затрат машинного времени.

Пример 1. Требуется решить задачу 1 при $n = 20$, при множестве M — кубе,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1\}, \quad (3.1)$$

и массиве $A_n = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$, состоящем из чисел $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1.5$, $\alpha_i = 1$ при $i = \overline{3, 20}$.

Наилучшее найденное значение $r \approx 0.3049$. Плотность упаковки $\sigma(U_{16}) \approx 0.4360$. Шары упаковки $B(\mathbf{s}_i, \alpha_i r)$, $i = \overline{1, 20}$, и множество M представлены на рис. 1. Массив центров шаров

$$\begin{aligned} S_{20} = \{ & (0.3892, -0.1280, -0.0418), (-0.5044, -0.0368, 0.5408), (-0.2033, 0.1352, -0.6934), \\ & (-0.3219, 0.6930, 0.6930), (0.0732, 0.6934, 0.2235), (-0.4543, -0.6935, -0.3671), \\ & (-0.6936, 0.1105, -0.1863), (-0.0060, -0.6728, 0.6728), (-0.6895, 0.6895, 0.1930), \\ & (0.0654, -0.6930, -0.6930), (-0.6936, -0.2333, -0.6936), (-0.6933, 0.6933, -0.6933), \\ & (0.6951, 0.6951, 0.2144), (0.6945, -0.6945, -0.6945), (0.6814, -0.6814, 0.6814), \\ & (0.1291, 0.6930, -0.6930), (-0.6938, -0.6938, 0.1968), (-0.2825, 0.5596, -0.2578), \\ & (0.6951, 0.3198, 0.6951), (0.6928, 0.4493, -0.6928)\}. \end{aligned}$$

Пример 2. Требуется решить задачу 1 при $n = 20$, при множестве M — шаре, $M = B(\mathbf{01})$, и массиве $A_n = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$, состоящем из чисел $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1.5$, $\alpha_i = 1$ при $i = \overline{3, 20}$.

Наилучшее найденное значение $r \approx 0.2476$. Плотность упаковки $\sigma(U_{16}) \approx 0.4819$. Шары упаковки $B(\mathbf{s}_i, \alpha_i r)$, $i = \overline{1, 20}$, и множество M представлены на рис. 2. Массив центров шаров

$$\begin{aligned} S_{20} = \{ & (-0.2627, 0.4298, 0.0333), (0.4307, 0.0546, 0.4519), \\ & (-0.3205, -0.5124, -0.1701), (-0.1147, 0.1847, 0.7197), (0.6108, -0.4258, 0.1002), \\ & (-0.0312, 0.3455, -0.6676), (0.3278, 0.0037, -0.6767), (0.1267, -0.4425, -0.5944), \\ & (0.5601, -0.3227, -0.3834), (0.7432, 0.0384, -0.0884), (0.1903, -0.1589, -0.0864), \end{aligned}$$

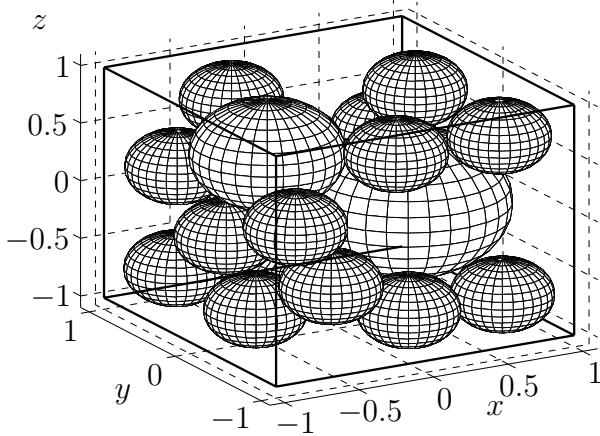


Рис. 1. Аппроксимация U_{20} наилучшей упаковки куба (3.1) 20 шарами в примере 1.

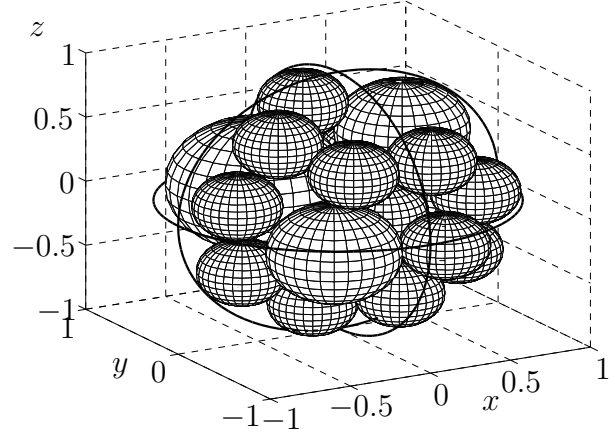


Рис. 2. Аппроксимация U_{20} наилучшей упаковки шара $M = B(\mathbf{0}, 1)$ 20 шарами в примере 2.

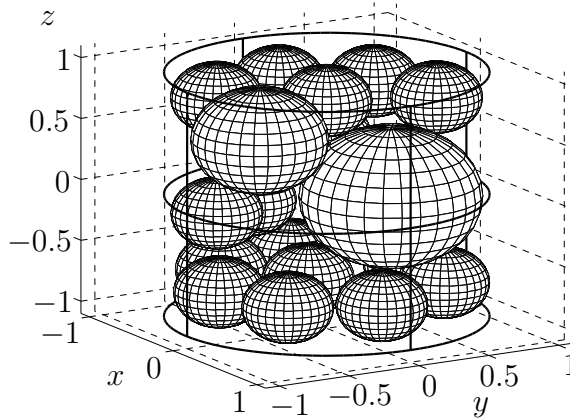


Рис. 3. Аппроксимация U_{20} наилучшей упаковки цилиндра (3.2) 20 шарами в примере 3.

(0.2680, -0.5472, 0.4396), (-0.4589, -0.1442, 0.5771), (-0.2289, -0.5635, 0.4415),
 (-0.6203, -0.0334, -0.4245), (-0.2226, -0.1096, -0.7100), (0.4828, 0.5638, 0.0835),
 (0.5160, 0.3758, -0.3862), (-0.7185, -0.1533, 0.1516), (0.2789, -0.6755, -0.1742)}.

Пример 3. Требуется решить задачу 1 при $n = 20$, при множестве M — цилиндре,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 1\}, \quad (3.2)$$

и массиве $A_n = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$, состоящем из чисел $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1.5$, $\alpha_i = 1$ при $i = \overline{3, 20}$.

Наилучшее найденное значение $r \approx 0.2822$. Плотность упаковки $\sigma(U_{16}) \approx 0.44$. Шары упаковки $B(\mathbf{s}_i, \alpha_i r)$, $i = \overline{1, 20}$, и множество M представлены на рис. 3. Массив центров шаров

$S_{20} = \{(0.3627, 0.2408, 0.0454), (0.1335, -0.5607, 0.5764), (-0.2229, -0.6530, -0.1052),$
 $(-0.3748, -0.1695, 0.2524), (-0.5514, -0.4584, 0.7171), (-0.6972, 0.1615, -0.7156),$
 $(-0.7119, 0.0847, 0.7166), (-0.1064, -0.7043, -0.7123), (0.1355, 0.7044, 0.7174),$
 $(-0.6171, 0.3653, 0.2353), (-0.1427, 0.0807, 0.7152), (-0.5921, -0.3991, -0.7140),$
 $(0.4496, -0.5504, -0.7107), (-0.1756, 0.6954, -0.7171), (-0.4175, 0.5839, 0.7166),$

$$(0.7084, -0.0311, -0.7091), (0.3825, 0.6073, -0.7177), (-0.7014, -0.1262, -0.2189), \\ (-0.5105, 0.5036, -0.3031), (-0.0625, -0.0949, -0.6944)\}.$$

При построении упаковок в общем случае трудной является задача об отыскании проекции текущей точки \mathbf{x} на границу ∂M тела M . Однако в случае, если M — выпуклый многогранник, то достаточно рассмотреть ортогональные проекции \mathbf{x} на все плоскости, проходящие через его грани. Если же M — шар, то проекцией точки \mathbf{x} на ∂M будет точка пересечения прямой, проходящей через \mathbf{x} и центр шара M . Если же M — цилиндр, то в качестве возможных проекций нужно рассмотреть точки двух типов. Один тип — точки пересечения прямой, проходящей через \mathbf{x} параллельно оси симметрии Λ цилиндра, с его плоскими гранями. Второй тип — точка пересечения боковой поверхности цилиндра с прямой, проходящей через \mathbf{x} и Λ , перпендикулярно к Λ .

Для решения примеров 1–3 выполнено в среднем по $15 \div 20$ запусков программного комплекса на каждый из них. Время работы комплекса составляло $4 \div 6$ минут, включая вычисление плотности найденной упаковки.

Отметим, что в ходе вычислительного эксперимента установлено, что применение геометрического метода дает несколько худшие результаты с точки зрения максимизации плотности упаковки по сравнению с волновым. Вместе с тем время работы волнового метода существенно больше, чем геометрического. Комбинация же методов позволяет существенно сократить время вычислений по сравнению с волновым методом и дает выигрыш в точности не только по сравнению с геометрическим, но и с волновым. При этом первым запускается волновой метод, а затем геометрический. Применение методов в обратном порядке к улучшению результатов не приводит.

Заключение

Подводя итог проделанной работе, отметим, что нами продолжены исследования проблемы упаковки шаров в выпуклые компакты M в трехмерном евклидовом пространстве. Ранее был рассмотрен случай, когда все шары являются равными, а на плоскости — когда круги могут иметь два различных радиуса, связанных между собой определенным соотношением. В настоящей статье постановка была еще усложнена. Разработан вычислительный алгоритм, который позволяет решать указанную задачу в случае, когда шары могут иметь до трех различных типов. При этом перенос ранее предложенных подходов на более сложную постановку оказался весьма затратным с точки зрения вычислительных ресурсов, и потребовалось разработать комбинированный алгоритм, который основан на последовательном применении волнового и геометрического методов. Первый развивается авторами [13; 24] уже несколько лет и основан на последовательном многократном пуске волн, скорости движения которых различны и пропорциональны радиусам упаковываемых шаров. Основным элементом второго метода является поэтапная максимизация функций, определяющих наибольший радиус шара с центром в текущей точке, который не выходит за рамки множества M и не пересекается с другими шарами из упаковки (кроме, возможно, граничных точек). Доказано предложение о корректности работы алгоритма.

Разработанные алгоритмы реализованы в виде программного комплекса построения упаковок шаров в тела различной геометрии. Выполнен вычислительный эксперимент, который показал, что наиболее эффективные результаты дает последовательное применение двух подходов: волнового и геометрического. При этом результаты работы первого алгоритма используются в качестве начального приближения для второго.

В дальнейшем предложенный подход авторы планируют распространить на задачу упаковки шаров, все радиусы которых различны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Castillo I., Kampas F.J., Pinter J.D.** Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications // *European J. Operat. Research*. 2008. Vol. 191, no. 3. P. 786–802. doi: 10.1016/j.ejor.2007.01.054.
2. **Harary F., Randolph W., Mezey P.G.** A study of maximum unit-circle caterpillars – tools for the study of the shape of adsorption patterns // *Discrete Appl. Math.* 1996. Vol. 67, no. 1–3. P. 127–135. doi: 10.1016/0166-218X(95)00014-I.
3. **Wang J.** Packing of unequal spheres and automated radiosurgical treatment planning // *J. Combinator. Optim.* 1999. Vol. 3, no. 4. P. 453–463. doi: 10.1023/A:1009831621621.
4. **Hales T.** Cannonballs and honeycombs // *Notices of the American Math. Soc.* 2000. Vol. 47. P. 440–449.
5. **Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T.** Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // *Computational Geometry*. 2010. Vol. 43, no. 5. P. 535–553. doi: 10.1016/j.comgeo.2009.12.003.
6. **Stoyan Y.G., Scheithauer G., Yaskov G.N.** Packing Unequal Spheres into Various Containers // *Cybernetics Syst. Anal.* 2016. Vol. 52, no. 3. P. 419–426. doi: 10.1007/s10559-016-9842-1.
7. **Khlud O.M., Yaskov G.N.** Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm // *Control, Navigation and Communication Systems*. 2017. Vol. 6, no. 46. P. 131–135.
8. **Kubach T., Bortfeldt A., Tilli T., Gehring H.** Greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid // *Asia Pacific J. Operat. Research*. 2011. Vol. 28. P. 739–753. doi: 10.1142/S0217595911003326.
9. **Huang W.Q., Li Y., Akeb H., Li C.M.** Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container // *J. Operat. Research Soc.* 2005. Vol. 56, no. 5. P. 539–548. doi: 10.1057/palgrave.jors.2601836.
10. **Hifi M., Yousef L.** Width beam and hill-climbing strategies for the three-dimensional sphere packing problem // *Annals of Computer Science and Information Systems*, vol. 2: Proc. Federated Conf. on Computer Science and Information Systems. Warsaw, 2014. P. 421–428. (Ser. Polish Information Processing Society). doi: 10.15439/2014F284.
11. **Zeng Z.Z., Huang W.Q., Xu R.C., Fu Z.H.** An algorithm to packing unequal spheres in a larger sphere // *Advanced Materials Research*. 2012. Vol. 546–547. P. 1464–1469. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.546-547.1464.
12. **Yamada S., Kanno J., Miyauchi M.** Multi-sized sphere packing in containers: Optimization formula for obtaining the highest density with two different sized spheres // *IPJSJ Online Transactions*. 2011. Vol. 4. P. 126–133. doi: 10.2197/ipsjtrans.4.126.
13. **Казаков А.Л., Лебедев П.Д.** Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости // *Вычисл. методы и программирование*. Т. 16, вып. 3. 2015. С. 307–317.
14. **Ушаков В.Н., Лебедев П.Д., Лавров Н.Г.** Алгоритмы построения оптимальных упаковок в эллипсы // *Вест. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование*. 2017. Т. 10, no. 3. С. 67–79. doi: 10.14529/mmp170306.
15. **Kazakov A.L., Lempert A.A., Ta T.T.** The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-euclidean space // *IFAC PAPERSONLINE*. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 782–787. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.450.
16. **Лебедев П.Д., Лавров Н.Г.** Алгоритмы построения оптимальных упаковок в эллипсоиды // *Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ*. 2018. Т. 52. С. 59–74. doi: 10.20537/2226-3594-2018-52-05
17. **Тот Л.Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. Москва: Физматлит, 1958. 365 с.
18. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных технологий, 2003. 336 с.
19. **Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.** Недифференцируемая оптимизация. Москва: Наука, 1981. 384 с.
20. **Половинкин Е.С., Балашов М.В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. Москва: Физматлит, 2004. 416 с. ISBN: 5-9221-0499-3.
21. **Tatarevic M.** On limits of dense packing of equal spheres in a cube: [e-resource]. arXiv:1503.07933 [cs.CG]. 2015. 9 p.
22. **Stoyan Y.G., Yaskov, G.** Packing congruent hyperspheres into a hypersphere // *J. Global Optim.* 2012. Vol. 52, no. 4. P. 855–868. doi: 10.1007/s10898-011-9716-z.

23. **Stoyan Yu.G., Yaskov, G.** Packing identical spheres into a cylinder // Intern. Trans. Oper. Research. 2010. Vol. 17, no. 1. P. 51–70. doi: 10.1111/j.1475-3995.2009.00733.x.
24. **Бухаров Д.С., Казаков А.Л.** Программная система “Виголт” для решения задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. Т. 13, № 2. С. 65–74.

Поступила 26.03.2020

После доработки 7.05.2020

Принята к публикации 18.05.2020

Лебедев Павел Дмитриевич

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: pleb@yandex.ru

Казаков Александр Леонидович

д-р физ.-мат. наук, главный науч. сотрудник

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

г. Иркутск

e-mail: kazakov@icc.ru

Лемперт Анна Ананьевна

канд. физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

г. Иркутск

e-mail: lempert@icc.ru

REFERENCES

- Castillo I., Kampas F.J., Pinter J.D. Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications. *European J. Operat. Research*, 2008, vol. 191, no. 3, pp. 786–802. doi: 10.1016/j.ejor.2007.01.054.
- Harary F., Randolph W., Mezey P.G. A study of maximum unit-circle caterpillars – tools for the study of the shape of adsorption patterns. *Discrete Appl. Math.*, 1996, vol. 67, no. 1–3, pp. 127–135. doi: 10.1016/0166-218X(95)00014-I.
- Wang J. Packing of Unequal Spheres and Automated Radiosurgical Treatment Planning. *J. Combin. Optim.*, 1999, vol. 3, no. 4, pp. 453–463. doi: 10.1023/A:1009831621621.
- Hales T. Cannonballs and Honeycombs. *Notices of the American Mathematical Society*, 2000, vol. 47, pp. 440–449.
- Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. *Computational Geometry*, 2010, vol. 43, no. 5, pp. 535–553. doi: 10.1016/j.comgeo.2009.12.003.
- Stoyan Yu.G., Scheithauer G., Yaskov G.N. Packing Unequal Spheres into Various Containers. *Cybernetics Syst. Anal.*, 2016, vol. 52, no. 3, pp. 419–426. doi: 10.1007/s10559-016-9842-1.
- Khlud O.M., Yaskov G.N. Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm. *Control, Navigation and Communication Systems*, 2017, vol. 6, no. 46, pp. 131–135.
- Kubach T., Bortfeldt A., Tilli T., Gehring H. Greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid. *Asia Pacific Journal of Operational Research*, 2011, vol. 28, no. 6, pp. 739–753. doi: 10.1142/S0217595911003326.
- Huang W.Q., Li Y., Akeb H., Li C.M. Greedy algorithms for packing unequal circles. *J. Operat. Research Soc.*, 2005, vol. 56, no. 5, pp. 539–548. doi: 10.1057/palgrave.jors.2601836.
- Hifi M., Yousef L. Width beam and hill-climbing strategies for the three-dimensional sphere packing problem. In: *Annals of Computer Science and Information Systems*, vol. 2, Proc. Federated Conference on Computer Science and Information Systems, Warsaw, 2014, pp. 421–428. doi: 10.15439/2014F284.
- Zeng Z.Z., Huang W.Q., Xu R.C., Fu Z.H. An algorithm to packing unequal spheres in a larger sphere. *Advanced Materials Research*, 2012, vol. 546–547, pp. 1464–1469. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.546-547.1464.

12. Yamada S., Kanno J., Miyauchi M. Multi-sized sphere packing in containers: Optimization formula for obtaining the highest density with two different sized spheres. *IPSSJ Online Transactions*, 2011, vol. 4, pp. 126–133. doi: 10.2197/ipsjtrans.4.126.
13. Kazakov A.L., Lebedev P.D. Algorithms of optimal packing construction for planar compact sets. *Vychisl. Metody Programm.*, 2015, vol. 16, no. 2, pp. 307–317 (in Russian).
14. Ushakov V.N., Lebedev P.D., Lavrov N.G. Algorithms of Optimal Packing Construction in Ellipse. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 67–79 (in Russian). doi: 10.14529/mmp170306.
15. Kazakov A.L. Lempert A.A. Ta T.T. The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-euclidean space. *IFAC PAPERSONLINE*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 782–787. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.450.
16. Lebedev P.D., Lavrov N.G. Algorithms of optimal ball packing into ellipsoids. *Izv. IMI UdGU*, 2018, vol. 52, pp. 59–74 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2018-52-05.
17. Toth L.F. *Regular figures*. N Y: A Pergamon Press Book The Macmillan Co., 1964, 339 p. ISBN: 9780080100586. Translated to Russian under the title *Raspolozheniya na ploskosti, na sfere i v prostranstve*. Moscow: Fizmatlit Publ., 1958, 365 p.
18. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective*. Basel: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1. Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poriyadka: Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*. Moscow; Izhevsk: Inst. Komp'yuter. Issled., 2003, 336 p.
19. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nondifferentiable optimization*. N Y: Springer-Verlag, 1985, 452 p. ISBN: 978-0-387-90951-6. Original Russian text published in Dem'yanov V.F. Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya*. Moscow: Nauka Publ., 1981, 384 p.
20. Polovinkin E.S., Balashov M.V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of convex and strongly convex analysis]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2004, 416 p. ISBN: 5-9221-0499-3.
21. Tatarevic M. On limits of dense packing of equal spheres in a cube. *arXiv:1503.07933 [cs.CG]*, 2015, 9 p.
22. Stoyan Y.G., Yaskov, G. Packing congruent hyperspheres into a hypersphere. *J. Global Optim.*, 2012, vol. 52, no. 4, pp. 855–868. doi: 10.1007/s10898-011-9716-z.
23. Stoyan Yu.G., Yaskov G. Packing identical spheres into a cylinder. *Intern. Trans. Oper. Research*, 2010, vol. 17, no. 1, pp. 51–70. doi: 10.1111/j.1475-3995.2009.00733.x.
24. Bukharov D.S., Kazakov A.L. VIGOLT system for solving transport logistics optimization problems. *Vychisl. Metody Programm.*, 2012, vol. 13, no. 3, pp. 65–74 (in Russian).

Received March 6, 2020

Revised May 7, 2020

Accepted May 18, 2020

Funding Agency: P.D. Lebedev's research is supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00105), A.L. Kazakov's research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-07-00604), and A.A. Lempert's research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-010-00724).

Pavel Dmitrievich Lebedev. Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, Ural Federal University, 620083 Russia, e-mail: pleb@yandex.ru.

Alexander Leonidovich Kazakov. Dr. Phys.-Math. Sci., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: kazakov@icc.ru.

Anna Ananievna Lempert. Cand. Phys.-Math. Sci., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: lempert@icc.ru.

Cite this article as: P. D. Lebedev, A. L. Kazakov, A. A. Lempert. Numerical methods for the construction of packings of different balls into convex compact sets. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, p p. 173–187.

УДК 534.11

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ ПРИ ПОМОЩИ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Л. Литвинов

Задача о колебаниях объектов с движущимися границами, сформулированная в виде дифференциального уравнения с граничными и начальными условиями, является неклассическим обобщением задачи гиперболического типа. Для облегчения построения решения этой задачи и обоснования выбора формы решения строятся эквивалентные интегро-дифференциальные уравнения с симметричными и зависящими от времени ядрами и изменяющимися во времени пределами интегрирования. Преимущества метода интегро-дифференциальных уравнений обнаруживаются при переходе к более сложным динамическим системам, несущим сосредоточенные массы, колеблющиеся под действием подвижных нагрузок. Метод распространен на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость, сопротивление внешней среды и жесткость основания колеблющегося объекта. Особое внимание уделено рассмотрению наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на границах. Решение производится в безразмерных переменных с точностью до величин второго порядка малости относительно малых параметров, характеризующих скорость движения границы. Находится приближенное решение задачи о поперечных колебаниях каната грузоподъемной установки, обладающего изгибной жесткостью, один конец которого наматывается на барабан, а на втором закреплен груз. Приводятся результаты, полученные для амплитуды колебаний, соответствующих n -й динамической моде. Исследуется явление установившегося резонанса и прохождения через резонанс с применением численных методов.

Ключевые слова: резонансные свойства, колебания систем с движущимися границами, законы движения границ, интегро-дифференциальные уравнения, амплитуда колебаний.

V. L. Litvinov. Solution of boundary value problems with moving boundaries by an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations.

The problem of oscillations of objects with moving boundaries formulated as a differential equation with boundary and initial conditions is a nonclassical generalization of the hyperbolic type problem. To facilitate the construction of a solution to this problem and justify the choice of the solution form, we construct equivalent integro-differential equations with symmetric time-dependent kernels and time-varying integration limits. The advantages of the method of integro-differential equations are found in the transition to more complex dynamic systems that carry concentrated masses oscillating under mobile loads. The method is extended to a broader class of model boundary value problems that take into account the bending stiffness, environmental resistance, and stiffness of the base of the oscillating object. Special attention is paid to the analysis of the most common applied case when the boundaries are subject to external perturbations. The problem is solved in dimensionless variables up to the values of the second order of smallness relative to the small parameters that characterize the speed of the boundary movement. We find an approximate solution of a problem on transverse vibrations of a rope with bending stiffness in a lifting device; one end of the rope is wound on a drum and the other is fixed to a load. The results obtained for the oscillation amplitude corresponding to the n th dynamic mode are presented. The phenomena of steady-state resonance and passage through the resonance are studied by numerical methods.

Keywords: resonance properties, oscillations in systems with moving boundaries, laws of motion of the boundaries, integro-differential equations, amplitude of oscillations.

MSC: 74H45, 74K05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-188-199

Введение

Среди всего множества проблем динамики упругих систем с точки зрения технических приложений весьма актуальны задачи о колебаниях в системах с изменяющимися во времени геометрическими размерами. Системы, границы которых движутся, широко распространены

в технике (канаты грузоподъемных установок [1–8], гибкие звенья передач [4; 6; 9], стержни твердого топлива [10; 11], бурильные колонны [10] и т. д.) Исследования многих авторов по динамике подъемных канатов привели к необходимости постановки новых задач механики, касающихся динамики одномерных объектов переменных длин. В математической формулировке это сводится к новым задачам математической физики — к исследованию соответствующих уравнений гиперболического типа в переменных областях изменения обоих аргументов. Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем, поэтому здесь в основном используются приближенные методы решения [1–18].

Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [19; 20], который заключается в подборе новых переменных, останавливающих границы и оставляющих волновое уравнение инвариантным. В [21] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. Эффективен также метод, используемый в [22] и заключающийся в замене геометрической переменной на чисто мнимую переменную, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить для решения методику теории функций комплексного переменного. Однако точные методы решения ограничены волновым уравнением и сравнительно простыми граничными условиями.

Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича — Галеркина [10; 14], а так же метод построения решений интегро-дифференциальных уравнений, описанный в данной работе. Задача о колебаниях объектов с движущимися границами, сформулированная в виде дифференциального уравнения с граничными и начальными условиями, является неклассическим обобщением задачи гиперболического типа. Для облегчения построения решения этой задачи и обоснования выбора формы решения строятся эквивалентные интегро-дифференциальные уравнения с симметричными и зависящими от времени ядрами и изменяющимися во времени пределами интегрирования. В основу построения интегро-дифференциальных уравнений движения объектов переменной длины положено непосредственное интегрирование дифференциальных уравнений в сочетании со стандартной заменой искомой функции новой переменной.

В тривиальных случаях методы интегральных уравнений не имеют преимущества перед методом дифференциальных уравнений в применении к исследованию колебаний системы с бесконечным числом степеней свободы [4; 6]. Преимущества метода интегро-дифференциальных уравнений обнаруживаются при переходе к более сложным динамическим системам, несущим сосредоточенные массы, колеблющиеся под действием подвижных нагрузок и т. д. Данные методы могут оказаться весьма плодотворными в применении к динамике нитей переменных длин и других механических объектов с изменяющимися границами.

В данной работе метод построения решений интегро-дифференциальных уравнений распространяется на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость колеблющегося объекта [5; 7; 11], сопротивление внешней среды [10] и жесткость основания (подложки) объекта [4; 6]. Особое внимание уделено рассмотрению наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на границах. При фиксированной длине объекта построенные интегро-дифференциальные уравнения переходят в классические уравнения Фредгольма II рода.

1. Постановка задачи

Дифференциальное уравнение движения механических объектов переменной длины имеет вид [10]

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] = \phi(\xi, \tau). \quad (1.1)$$

Граничные условия:

$$Y_{ji}[U(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = F_{ji}(\tau); \quad (1.2)$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, 2}.$$

Начальные условия:

$$U(\xi, 0) = \Phi_0(\xi), \quad U_\tau(\xi, 0) = \Phi_1(\xi). \quad (1.3)$$

Здесь

$U(\xi, \tau)$ — функция продольного или поперечного смещения объекта от положения равновесия;

τ — безразмерное время;

ξ — безразмерная пространственная координата;

L — линейный однородный дифференциальный оператор по ξ второго либо четвертого порядка;

Y_{ji} — линейные однородные дифференциальные операторы по ξ до второго порядка включительно;

$\phi(\xi, \tau)$ — заданные функции класса C ;

$\Phi_0(\xi), \Phi_1(\xi), F_{ji}(\tau)$ — заданные функции класса C^2 ;

$\ell_j(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau$ — равномерный закон движения границы;

ε — малый параметр ($\varepsilon = V/a$, V и a — заданные скорости движения границы и распространения колебаний, соответственно).

Движение границ по закону $\ell_j(\varepsilon\tau)$ соответствует режиму медленного движения.

Дифференциальное уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) описывают широкий ряд математических моделей для анализа одномерных краевых задач с движущимися границами с учетом действия сил сопротивления внешней среды, жесткости подложки и изгибной жесткости объекта, когда внешние возмущения действуют на границах.

Для исключения неоднородностей в граничных условиях в уравнение (1.1) вводится новая функция

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (1.4)$$

где

$$H(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) F_{kr}(\tau); \quad (1.5)$$

при этом функция $D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$L[D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)] = 0 \quad (1.6)$$

и условиям

$$Y_{ji}[D_{kr}(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = \begin{cases} 1, & k = j \wedge r = i; \\ 0, & k \neq j \vee r \neq i. \end{cases}$$

При подстановке (1.4) в уравнение (1.1) с учетом (1.5), (1.6) функция $V(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[V(\xi, \tau)] = \phi(\xi, \tau) - H_{\tau\tau}(\xi, \tau) \quad (1.7)$$

$$Y_{ji}[V(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0. \quad (1.8)$$

В работе [6] получено интегро-дифференциальное уравнение, соответствующее задаче (1.7), (1.8), в виде

$$V(\xi, \tau) = - \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \phi(\zeta, \tau) + H_{\tau\tau}(\zeta, \tau)] d\zeta, \quad (1.9)$$

где $K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau)$ — симметричное по ξ и ζ ядро, зависящее от времени через параметр $\varepsilon\tau$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. В интервале времени $\Delta\tau$, соизмеримом с единицей, уравнение колебаний объекта с фиксированным параметром $l = l(\tau_0) = \text{const}$ отличается от соответствующего уравнения колебаний объекта с переменным параметром $l = l(\tau)$ членами, пропорциональными множителю ε при условии ограниченности производной ядра $K(x, s, l)$ по параметру $l(\tau)$.

Доказательство. Разложим правую часть уравнения

$$V(\xi, \tau) = - \int_0^{l(\tau)} K(\xi, \zeta, l(\tau)) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \phi(\zeta, \tau)] d\zeta \quad (1.10)$$

по параметру $l(\tau)$ в окрестности некоторого фиксированного значения безразмерной длины $l(\tau_0)$ в ряд Тейлора.

Полагая $l(\tau_0 + \Delta\tau) = l(\tau_0) + \Delta l(\tau) + \dots$, получим

$$\begin{aligned} V(\xi, \tau) = & - \int_0^{l(\tau_0)} K(\xi, \zeta, l(\tau_0)) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \phi(\zeta, \tau)] d\zeta \\ & - \Delta l(\tau) \left\{ K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0)) [V_{\tau\tau}(l(\tau_0), \tau) - \phi(l(\tau_0), \tau)] \right. \\ & \left. + \int_0^{l(\tau_0)} \frac{\partial K(\xi, \zeta, l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \phi(\zeta, \tau)] d\zeta \right\} - \frac{(\Delta l(\tau))^2}{2!} \left[\frac{\partial K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} \dots \right]. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Будем считать, что функция $l(\tau)$ является функцией медленного времени $l = l(\tau_1)$, $\tau_1 = \varepsilon\tau$, т.е. является функцией времени, производная которой по времени пропорциональна некоторому малому параметру ε . Дифференциал длины объекта $\Delta l(\tau_1)$ в соответствии с правилом дифференцирования функции медленного времени [4; 6] вычисляется по формуле $\Delta l(\tau_1) = \varepsilon \frac{dl(\tau_1)}{d\tau_1} \Delta\tau$.

Выберем интервал времени $\Delta\tau$ в виде

$$\Delta\tau = \theta(\tau), \quad (1.12)$$

где $\theta(\tau)$ — некоторая функция порядка единицы.

Подставляя (1.12) в (1.11), найдем, что в интервале времени $\Delta\tau$, имеющем порядок единицы, разложение (1.11) имеет вид

$$\begin{aligned} V(\xi, \tau) = & - \int_0^{l(\tau_0)} K(\xi, \zeta, l(\tau_0)) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \phi(\zeta, \tau)] d\zeta \\ & - \varepsilon l'(\tau) \theta(\tau) \left\{ K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0)) [V_{\tau\tau}(l(\tau_0), \tau) - \phi(l(\tau_0), \tau)] \right. \\ & \left. + \int_0^{l(\tau_0)} \frac{\partial K(\xi, \zeta, l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \phi(\zeta, \tau)] d\zeta \right\} - \varepsilon^2 l'^2(\tau) \frac{\theta(\tau)}{2!} \left[\frac{\partial K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} \dots \right]. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие теоремы об ограниченности производной ядра $K(x, s, l)$ по параметру $l(\tau)$ и сравнивая (1.13) и (1.10), найдем, что уравнение с фиксированным параметром $l = l(\tau_0) = \text{const}$ отличается от уравнения с переменным параметром в интервале $\Delta\tau \sim 1$ членами, пропорциональными множителю ε . Тем самым теорема доказана.

2. Решение задачи

Решение задачи (1.9) будем искать в виде ряда

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (2.1)$$

где $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ — собственные функции, в качестве которых выбраны формально построенные решения интегрального уравнения

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau) d\zeta,$$

где $\varepsilon\tau$ рассматривается как параметр; $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ — собственные частоты задачи.

Решение (2.1) является точным в случае, если границы неподвижны.

Собственные функции $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяют граничным условиям (1.8) и играют в данном случае роль динамических мод.

Используя результаты [6], разложим симметричное по ξ и ζ ядро в ряд по собственным функциям $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$:

$$K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau)}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}, \quad (2.2)$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ определяется по формуле

$$\frac{1}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)} = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau) d\xi d\zeta.$$

Продифференцируем ряд (2.1) по времени:

$$V_\tau(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [f'_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon X_{n\tau}(\xi, \varepsilon\tau) f_n(\tau)].$$

После повторного дифференцирования получим

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [f''_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + 2\varepsilon X_{n\tau}(\xi, \varepsilon\tau) f'_n(\tau) + \varepsilon^2 X_{n\tau\tau}(\xi, \varepsilon\tau) f_n(\tau)]. \quad (2.3)$$

Подставим ряды (2.1), (2.2), (2.3) в (1.9) с учетом ортогональности функций $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ на интервале $[\ell_1(\varepsilon\tau); \ell_2(\varepsilon\tau)]$ с весом $g(\xi)$ и замены

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{nkr}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\tau), \quad (2.4)$$

где

$$Q_{nkr}(\varepsilon\tau) = - \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi / \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi. \quad (2.5)$$

Заметим, что если разложить функцию $H(\xi, \tau)$ в ряд Фурье $H(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau)$, где

$$\phi_n(\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} H(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi / \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi.$$

Здесь $g(\xi)$ — весовая функция; замену можно произвести в более простом виде

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) - \phi_n(\tau).$$

При резонансных явлениях амплитуды всех динамических мод, за исключением резонансной, малы. Поэтому нерезонансными членами рядов (2.1), (2.3) в связи с их малостью пренебрегают. В этом случае получим расщепленную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [10]

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + \varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_n(\tau) = & E_n(\tau) - 2\varepsilon \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m B_{nkr}(\varepsilon\tau) F_{kr}'(\tau) - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m C_{nkr}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\varepsilon\tau) \\ & - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau) \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{nkr}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\varepsilon\tau). \end{aligned}$$

Здесь $A_{1n}(\varepsilon\tau)$, $A_{2n}(\varepsilon\tau)$, $A_{3n}(\varepsilon\tau)$, $B_{nkr}(\varepsilon\tau)$, $C_{nkr}(\varepsilon\tau)$, $E_n(\tau)$ определены в работе [10].

Коэффициенты взаимовлияния между отдельными уравнениями входят в систему (2.6) с малым параметром. В дальнейшем под точностью порядка ε^2 будем понимать точность, имеющую место после пренебрежения членами с ε^2 и членами вида $\varepsilon F_{ji}'(\varepsilon\tau)$, которые, несмотря на малость порядка ε , на резонансные свойства влияют как члены порядка ε^2 . Система (2.6) с точностью до величин порядка малости ε^2 будет иметь вид

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \quad (2.7)$$

где

$$\theta_n(\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau) \phi_n(\tau) + E_n(\tau).$$

С учетом (1.5), (2.1), (2.4) решение (1.4) запишем следующим образом:

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m F_{kr}(\tau) [D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{nkr}(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau)]. \quad (2.8)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Решение задачи (1.1)–(1.3) может быть представлено в виде*

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \quad (2.9)$$

Доказательство. Величины $Q_{nkr}(\varepsilon\tau)$, определяемые выражением (2.5), являются для функции $-D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$ коэффициентами разложения в ряд Фурье по системе ортогональных с весом $g(\xi)$ собственных функций $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ на интервале $[\ell_1(\varepsilon\tau), \ell_2(\varepsilon\tau)]$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{nkr}(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) = -D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau).$$

Следовательно, выражение в квадратных скобках равенства (2.8) равно нулю.

Теорема доказана.

Для упрощения введем в уравнение (2.9) новую функцию $\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau)$, где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \exp\left(-\int_0^{\tau} \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} d\tau\right).$$

Тогда уравнение (2.7) не будет содержать член с $y'(\tau)$:

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = \frac{\theta_n(\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)}.$$

Начальные условия для функций $y_n(\tau)$ находятся из условий (1.3) как решения уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} y_n(0)X_n(\xi, \ell_j(0)) &= \Phi_0(\xi), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \{y_n'(0)X_n(\xi, \ell_j(0)) + \varepsilon X_{n\tau}(\xi, \ell_j(0))\ell_j'(0)y_n(0)\} &= \Phi_1(\xi). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если в начальный момент движения скорость изменения длины объекта $\ell_j'(0)$ равна нулю, то из (2.10) получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} y_n(0)X_n(\xi, \ell_j(0)) &= \Phi_0(\xi), \\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n'(0)X_n(\xi, \ell_j(0)) &= \Phi_1(\xi). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Принимая во внимание, что $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ образуют ортогональную с весом $g(\xi)$ систему функций, из (2.11) выводим для функций $y_n(0)$, $y_n'(0)$ выражения

$$\begin{aligned} y_n(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ell_1(0)}^{\ell_2(0)} X_n(\xi, \ell_j(0))\Phi_0(\xi)g(\xi)d\xi, \\ y_n'(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ell_1(0)}^{\ell_2(0)} X_n(\xi, \ell_j(0))\Phi_1(\xi)g(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что $y_n(0)$ и $y_n'(0)$ являются коэффициентами разложения в ряд Фурье по функциям $X_n(\xi, \ell_j(0))$ начальных условий (1.3).

Вопрос о сходимости рядов (2.3), (2.9), по крайней мере, в моменты времени, близкие к начальному, может быть разрешен на основании быстроты сходимости разложений (25), т. е. быстроты убывания коэффициентов $y_n(0)$ и $y_n'(0)$. Из теории рядов Фурье известно, что порядок убывания коэффициентов разложения зависит от гладкости функций, разлагаемых в ряды. Поэтому при достаточной гладкости функций $\Phi_0(\xi)$, $\Phi_1(\xi)$, определяющих начальные условия, вопрос о сходимости рядов (2.3), (2.9) решается положительно.

Заметим, что начальные условия не влияют на резонансные свойства линейных систем, поэтому принимаются в виде $y_n(0) = 0$, $y_n'(0) = 0$.

Пусть

$$\phi(\xi, \tau) = B_0(\xi) \cos W_0(\tau), \quad (2.13)$$

$$F_{ji}(\tau) = B_{ji} \cos W_{ji}(\tau), \quad j = \overline{1, 2}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.14)$$

где B_{ji} — постоянные величины; $W_0(\tau)$, $W_{ji}(\tau)$ — монотонно возрастающие функции; $B_0(\xi)$ — функция, характеризующая интенсивность распределенной нагрузки.

Равенства (2.13), (2.14) можно принять в следующих случаях:

- 1) все внешние возмущения $\varphi(\xi, \tau)$, $F_{ji}(\tau)$ равны нулю, кроме какого-то одного;
- 2) производные функций $W_0(\tau)$, $W_{ji}(\tau)$ равны между собой, т. е. сами функции отличаются на постоянную величину;
- 3) резонансные области нагрузок φ , F_{ji} не пересекаются, тогда при рассмотрении резонанса от одной нагрузки действием других можно пренебречь.

Используя математические выкладки, изложенные в работе [10], получим следующее выражение для полной амплитуды колебаний, соответствующей n -й динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}}; \quad F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta)w_n'(\zeta)}; \quad w_n(\tau) = \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\tau;$$

$$M_{nji}(\varepsilon\tau) = \frac{-B_{ji}\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_{nji}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta).$$

3. Поперечные колебания каната грузоподъемной установки

В качестве примера рассмотрим поперечные колебания каната грузоподъемной установки, один конец которого наматывается на барабан, а на втором шарнирно закреплен груз. С помощью приведенной модели можно рассчитывать резонансные свойства несущих звеньев широкого круга грузоподъемных машин.

Уравнение, учитывающее изгибную жесткость и натяжение колеблющегося звена, имеет вид [10]

$$U_{tt}(x, t) + \frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x, t) - a^2 U_{xx}(x, t) = 0. \quad (3.1)$$

Граничные условия:

$$U(0, t) = 0, \quad U_{xx}(0, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$U(l_0(t), t) = B \cos W_0(\omega_0 t), \quad U_x(l_0(t), t) = 0. \quad (3.3)$$

В задаче (3.1)–(3.3) используются следующие обозначения: $U(x, t)$ — поперечное смещение точки звена с координатой x в момент времени t ; I — осевой момент инерции сечения каната; ρ — линейная плотность массы; $a = \sqrt{T/\rho}$ — минимальная скорость распространения волн; T — сила натяжения; $l_0(t) = L_0 - v_0 t$ — закон движения границы каната; L_0 — первоначальная длина каната; v_0 — скорость движения границы; $W_0(z)$ — функция класса C^2 ; B, ω_0 — постоянные величины; E — модуль упругости материала каната.

Введем в задачу (3.1)–(3.3) безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\omega_0 x}{a}, \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}, \quad U(x, t) = BV(\xi, \tau).$$

Тогда задача примет вид

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + \beta^2 V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0, \quad (3.4)$$

$$V(0, \tau) = 0, \quad V_{\xi\xi}(0, \tau) = 0, \quad (3.5)$$

$$V(l(\varepsilon\tau), \tau) = \cos W(\tau), \quad V_\xi(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0, \quad (3.6)$$

где

$$\beta^2 = \frac{EI}{\rho} \frac{\omega_0^2}{a^4}; \quad l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad W(\tau) = W_0(\tau - \gamma_0); \quad \gamma_0 = \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad \varepsilon = \frac{-v_0}{a}.$$

Заметим, что значение величины β в технических задачах обычно не превосходит 0. 25.

Интегрируя уравнение (3.4) по ξ и освобождаясь от неоднородностей в граничных условиях по аналогии с (1.4)–(1.6), получим интегро-дифференциальное уравнение поперечных колебаний каната переменной длины в виде

$$V(\xi, \tau) = - \int_0^{l(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) + H_{\tau\tau}(\zeta, \tau)] d\zeta. \quad (3.7)$$

Ядро уравнения (3.7) в рассматриваемом случае будет определяться функцией

$$K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) = \begin{cases} \left(\frac{l(\varepsilon\tau) - \xi}{\beta}\right)^2 \left(\frac{l(\varepsilon\tau) - \xi}{3} + \frac{\xi - \zeta}{2}\right), & \zeta \leq \xi, \\ \left(\frac{l(\varepsilon\tau) - \zeta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{l(\varepsilon\tau) - \zeta}{3} + \frac{\zeta - \xi}{2}\right), & \zeta \geq \xi. \end{cases} \quad (3.8)$$

Функция (3.8) также симметрична относительно аргументов ξ и ζ и зависит от времени через содержащийся в ней параметр $\varepsilon\tau$. При фиксированном $l(\varepsilon\tau) = \text{const}$ функция (3.8) совпадает с функцией влияния прогибов каната постоянной длины.

Таким образом, задача (3.4)–(3.6) сводится к интегро-дифференциальному уравнению (3.7) с симметричным, изменяющимся во времени ядром (3.8) и переменными во времени пределами интегрирования.

Решение задачи (3.7) будем вести в безразмерных переменных в соответствии с методикой, изложенной выше.

В результате для амплитуды колебаний, соответствующих n -й динамической моде, получим выражение

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{1}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta); \quad F_n(\varepsilon\zeta) = Q_{n21}(\varepsilon\zeta) \sqrt{\omega_{0n}^3(\varepsilon\zeta) A_{1n}(\varepsilon\zeta)}.$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если $W_n(\tau) = w_n(\tau) + \gamma$, где γ — постоянная величина.

При действии на систему гармонического возмущения с частотой ω_0 , когда $W(\tau) = \tau$, на любой из динамических мод может возникнуть явление прохождения через резонанс. Точка резонансной области τ_0 , в которой $\Phi'_n(\tau_0) = 0$, приближенно определяется по формуле

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left[\sqrt{\frac{2\beta^2}{-1 + \sqrt{1 + 4\beta^2}}} \cdot \pi n - 1 \right].$$

Для исследования явления прохождения через резонанс необходимо найти значения τ_1 и τ_2 , при которых квадрат амплитуды

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\varepsilon\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}$$

имеет максимум.

С помощью разработанного программного комплекса численно исследована зависимость максимальной амплитуды поперечных колебаний каната при прохождении через резонанс на

**Зависимость амплитуды колебаний A_n от ε и β
при прохождении через резонанс
на первой и второй динамических модах**

	$\beta \setminus \varepsilon$	0.02	0.04	0.06	0.08
1 мода	0.01	17.3	10.7	8.8	6.7
	0.2	14.1	9.2	7.3	5.4
2 мода	0.01	12.5	7.7	5.1	4.2
	0.2	9.3	5.4	4.3	3.7

первой и второй динамических модах от относительной скорости движения границы при различных значениях безразмерного коэффициента, характеризующего жесткость объекта, которая представлена в таблице выше.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- при уменьшении ε амплитуда колебаний увеличивается;
- при $\varepsilon \rightarrow 0$ амплитуда колебаний стремится к бесконечности;
- с увеличением номера моды и изгибной жесткости объекта максимальная амплитуда колебаний уменьшается.

Заключение

Приближенный метод построения решений интегро-дифференциальных уравнений распространен на более широкий класс модельных краевых задач о колебаниях объектов с движущимися границами при линейной постановке, описываемых уравнениями гиперболического типа. Данный метод позволяет учитывать действие на систему сил сопротивления внешней среды, изгибную жесткость и жесткость подложки объекта. Решение задачи доведено до получения квадратурных формул амплитуды колебаний, соответствующих n -й динамической моде. Приведенные результаты позволяют на стадии проектирования предотвратить возможность возникновения колебаний большой амплитуды в механических объектах с движущимися границами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колосов Л.В., Жигула Т.И. Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. вузов. Горный журнал. 1981. No. 3. С. 83–86.
2. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // J. Vibr. Acoust. 2006. Vol. 128, no. 1. P. 66–78. doi: 10.1115/1.2128640.
3. Shi Y., Wu L., Wang Y. Нелинейный анализ собственных частот тросовой системы // J. Vibr. Eng. 2006. Vol. 19, no. 2. P.173–178.
4. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наук. думка, 1971. 290 с.
5. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Изв. Самар. науч. центра Российской академии наук. 2017. Т. 19, № 4. С. 161–165.
6. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. Киев: Наук. думка, 1962. 332 с.
7. Liu Z., Chen G. Анализ плоских нелинейных свободных колебаний несущего каната с учетом влияния изгибной жесткости // J. Vibr. Eng. 2007. № 1. С. 57–60.
8. Palm J. et al. Simulation of mooring cable dynamics using a discontinuous Galerkin method // V Internat. Conf. on Computational Methods in Marine Engineering. 2013. P. 455–466. ISBN: 978-84-941407-4-7.
9. Литвинов В.Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журн. Средневож. мат. общества. 2014. Т. 16, № 1. С. 83–88.

10. **Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.** Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. 149 с.
11. **Лежнева А.А.** Свободные изгибные колебания балки переменной длины // Ученые записки. Пермь: Изд-во Перм. ун-та. 1966. № 156. С. 143–150.
12. **Wang L., Zhao Y.** Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations // *J. Sound Vibr.* 2009. Vol. 319, no. 1-2. P. 1–14. doi: 10.1016/j.jsv.2008.08.020.
13. **Zhao Y., Wang L.** On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three-to one internal resonance // *J. Sound Vibr.* 2006. Vol. 294, no. 4-5. P. 1073–1093. doi: 10.1016/j.jsv.2006.01.004.
14. **Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.** Применение метода Канторовича — Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // *Изв. Российской академии наук. Механика твердого тела.* 2018. № 2. С. 70–77.
15. **Berlioz A., Lamarque C.-H.** A non-linear model for the dynamics of an inclined cable // *J. of Sound and Vibration.* 2005. Vol. 279, no. 3. P. 619–639. doi: 10.1016/j.jsv.2003.11.069.
16. **Sandilo S.H., van Horsen W.T.** On variable length induced vibrations of a vertical string // *J. of Sound and Vibratio.* 2014. Vol. 333, no. 11. P. 2432–2449. doi: 10.1016/j.jsv.2014.01.011.
17. **Zhang W., Tang Y.** Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations // *Internat. J. of Non-Linear Mechanics.* 2002. Vol. 37, no. 3. P. 505–526. doi: 10.1016/S0020-7462(01)00026-9.
18. **Faravelli L., Fuggini C., Ubertini F.** Toward a hybrid control solution for cable dynamics: Theoretical prediction and experimental validation // *Struct. Control Health Monit.* 2010. Vol. 17, no. 4. P. 386–403. doi: 10.1002/stc.313.
19. **Весницкий А.И.** Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
20. **Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.** Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. “Физико-мат. науки”.* 2012. Вып. 3(28). С. 145–151. doi: 10.14498/vsgtu1079.
21. **Весницкий А.И.** Обратная задача для одномерного резонатора, изменяющего во времени свои размеры // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1971. № 10. С. 1538–1542.
22. **Барсуков К.А., Григорян Г.А.** К теории волновода с подвижными границами // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1976. № 2. С. 280–285.

Поступила 10.03.2020

После доработки 11.05.2020

Принята к публикации 18.05.2020

Владислав Львович Литвинов

канд. техн. наук, доцент

зав. кафедрой общетеоретических дисциплин

Сызранский филиал Самарского государственного технического университета

г. Сызрань;

докторант мех.-мат. факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

REFERENCES

1. Kolosov L.B., Zhigula T.I. Longitudinal-transverse vibrations of a string of a rope of a lifting system. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Gorn. Zh.*, 1981, no. 3, pp. 83–86 (in Russian).
2. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control. *J. Vibr. Acoust.*, 2006, vol. 128, no. 1, pp. 66–78. doi: 10.1115/1.2128640.
3. Shi Y., Wu L., Wang Y. Analysis on nonlinear natural frequencies of cable net. *J. Vibr. Eng.*, 2006, vol. 19, no. 2, pp. 173–178.
4. Goroshko O.A., Savin G.N. *Vvedenie v mekhaniku deformiruemyykh odnomernyykh tel peremennoi dliny* [Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length]. Kiev: Naukova dumka Publ., 1971, 224 p.

5. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations rope moving in longitudinal direction. *Izvestiya Samarskogo Nauchnogo Tsentra Rossiiskoi Akademii Nauk*, 2017, vol. 19, no. 4, pp. 161–165 (in Russian).
6. Savin G.N., Goroshko O.A. *Dinamika niti peremennoi dliny* [Dynamics of a thread of variable length]. Kiev: Nauk. Dumka Publ., 1962, 332 p.
7. Liu Z., Chen G. Analysis of flat non-linear free oscillations of the supporting rope taking into account the effect of flexural rigidity. *J. Vibr. Eng.*, 2007, no. 1, pp. 57–60.
8. J. Palm et al. Simulation of mooring cable dynamics using a discontinuous Galerkin method. In: *V Internat. Conf. on Computational Methods in Marine Engineering*, 2013, pp. 455–466. ISBN: 978-84-941407-4-7.
9. Litvinov V.L. The study of free vibrations of mechanical objects with moving boundaries using the asymptotic method. *Zhurn. Srednevolzh. Mat. Obshchestva.*, 2014, vol. 16, no. 1, pp. 83–88 (in Russian).
10. Litvinov V.L., Anisimov V.N. *Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie kolebaniy odnomernykh mekhanicheskikh sistem s dvizhushchimisya granitsami* [Mathematical modeling and study of oscillations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries]. Samara: Samar. Gos. Tekhn. Univ. Publ., 2017, 149 p. ISBN: 978-5-7964-4984-7.
11. Lezhneva A.A. Free bending vibrations of a beam of variable length. In: *Uchenye zapiski Permskogo gosudarstvennogo universiteta. Mekhanika* [Scientific notes of Perm state University. Mechanics], no. 156. Perm: Perm State Univ. Publ., 1966, pp. 143–150.
12. Wang L., Zhao Y. Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations. *J. Sound Vibr.*, 2009, vol. 319, no. 1–2, pp. 1–14. doi: 10.1016/j.jsv.2008.08.020.
13. Zhao Y., Wang L. On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three-to one internal resonance. *J. Sound Vibr.*, 2006, vol. 294, no. 4–5, pp. 1073–1093. doi: 10.1016/j.jsv.2006.01.004.
14. Anisimov V.N., Korpen I.V., Litvinov V.L. Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving borders. *Mech. Solids.*, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 177–183. doi: 10.3103/S0025654418020085.
15. Berlioz A., Lamarque C.-H. A non-linear model for the dynamics of an inclined cable. *J. Sound Vibr.*, 2005, vol. 279, no. 3, pp. 619–639. doi: 10.1016/j.jsv.2003.11.069.
16. Sandilo S.H., van Horssen W.T. On variable length induced vibrations of a vertical string. *J. Sound Vibr.*, 2014, vol. 333, no. 11, pp. 2432–2449. doi: 10.1016/j.jsv.2014.01.011.
17. Zhang W., Tang Y. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations. *Internat. J. of Non-Linear Mechanics*, 2002, vol. 37, no. 3, pp. 505–526. doi: 10.1016/S0020-7462(01)00026-9.
18. Faravelli L., Fuggini C., Ubertini F. Toward a hybrid control solution for cable dynamics: Theoretical prediction and experimental validation. *Struct. Control Health Monit.*, 2010, vol. 17, no. 4, pp. 386–403. doi: 10.1002/stc.313.
19. Vesnitskii A.I. *Volny v sistemakh s dvizhushchimisya granitsami i nagruzkami* (Waves in Systems with Moving Boundaries and Loads). Moscow: Fizmatlit Publ., 2001, 320 p. ISBN: 5-9221-0172-2.
20. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. On a method of analytical solution of wave equation describing the oscillations of systems with moving boundaries. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, vol. 3(28), pp. 145–151 (in Russian). doi: 10.14498/vsgtu1079.
21. Vesnitskii A.I. The inverse problem for a one-dimensional resonator the dimensions of which vary with time. *Radiophys. Quantum Electron.*, 1971, vol. 14, no. 10, pp. 1209–1215. doi: 10.1007/BF01035071.
22. Barsukov K.A., Grigoryan G.A. Theory of a waveguide with moving boundaries. *Radiophys. Quantum Electron.*, 1976, vol. 19, no. 2, pp. 194–200. doi: 10.1007/BF01038526.

Received March 10, 2020

Revised May 11, 2020

Accepted May 18, 2020

Vladislav L'vovich Litvinov, Cand. Sci.(Tech.), Syzran Branch of Samara State Technical University, Syzran, 446001 Russia; Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: vladlitvinov@rambler.ru.

Cite this article as: V. L. Litvinov. Solution of boundary value problems with moving boundaries by an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 188–199.

УДК 517.444

**ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ
С ВОСПРОИЗВОДЯЩИМ ЯДРОМ,
СВЯЗАННЫХ СПЕЦИАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ**

В. В. Напалков, В. В. Напалков (мл.)

Рассматриваются два гильбертовых пространства H_1 и H_2 с воспроизводящим ядром, состоящие из комплекснозначных функций, заданных на некоторых множествах точек $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$ соответственно. Нормы в пространствах H_1 и H_2 имеют интегральный вид

$$\|f\|_{H_1}^2 = \int_{\Omega_1} |f(t)|^2 d\mu_1(t), \quad f \in H_1, \quad \|q\|_{H_2}^2 = \int_{\Omega_2} |q(z)|^2 d\mu_2(z), \quad q \in H_2.$$

Пусть $\{E(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$ — некоторая полная система функций в пространстве H_1 . Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &\stackrel{def}{=} (E(\cdot, z), f)_{H_1} \quad \forall z \in \Omega_2, \quad \tilde{H}_1 = \{\tilde{f}, f \in H_1\}, \\ (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)_{\tilde{H}_1} &\stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_{H_1}, \quad \|\tilde{f}_1\|_{\tilde{H}_1} = \|f_1\|_{H_1} \quad \forall \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \tilde{H}_1. \end{aligned}$$

В статье доказано, что гильбертовы пространства \tilde{H}_1 и H_2 эквивалентны (т. е. эти пространства состоят из одних и тех же функций, и нормы этих пространств эквивалентны) тогда и только тогда, когда существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор \mathcal{A} , действующий из пространства \tilde{H}_1 на пространство H_2 , который для любого $\xi \in \Omega_1$ переводит функцию $K_{\tilde{H}_1}(\cdot, \xi)$ в функцию $E(\xi, \cdot)$. Здесь \tilde{H}_1 — пространство, состоящее из функций, комплексно-сопряженных к функциям из H_1 , $K_{\tilde{H}_1}(t, \xi)$, $t, \xi \in \Omega_1$ — воспроизводящее ядро пространства \tilde{H}_1 . Получены и другие условия эквивалентности пространств \tilde{H}_1 и H_2 . Также в статье изучаются вопрос эквивалентности пространств \tilde{H}_2 и H_1 , и, кроме того, вопрос существования в пространствах H_1 и H_2 специальных ортогональных систем разложения. Получено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого пространства H_1 и H_2 эквивалентны. Эта работа является продолжением статьи авторов, в которой рассматривался случай совпадения пространств \tilde{H}_1 и H_2 .

Ключевые слова: системы разложения, подобные ортогональным, гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, задача описания сопряженного пространства.

V. V. Napalkov, V. V. Napalkov, Jr. On the equivalence of reproducing kernel Hilbert spaces connected by a special transform.

We consider two reproducing kernel Hilbert spaces H_1 and H_2 consisting of complex-valued functions defined on some sets of points $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$ and $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$, respectively. The norms in the spaces H_1 and H_2 have an integral form:

$$\|f\|_{H_1}^2 = \int_{\Omega_1} |f(t)|^2 d\mu_1(t), \quad f \in H_1, \quad \|q\|_{H_2}^2 = \int_{\Omega_2} |q(z)|^2 d\mu_2(z), \quad q \in H_2.$$

Let $\{E(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$ be some complete system of functions in the space H_1 . Define

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &\stackrel{def}{=} (E(\cdot, z), f)_{H_1} \quad \forall z \in \Omega_2, \quad \tilde{H}_1 = \{\tilde{f}, f \in H_1\}, \\ (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)_{\tilde{H}_1} &\stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_{H_1}, \quad \|\tilde{f}_1\|_{\tilde{H}_1} = \|f_1\|_{H_1} \quad \forall \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \tilde{H}_1. \end{aligned}$$

We prove that the Hilbert spaces \tilde{H}_1 and H_2 are equivalent (i.e., consist of the same functions and have equivalent norms) if and only if there exists a linear continuous one-to-one operator \mathcal{A} acting from the space \tilde{H}_1 onto the space H_2 that for any $\xi \in \Omega_1$ takes the function $K_{\tilde{H}_1}(\cdot, \xi)$ to the function $E(\xi, \cdot)$, where \tilde{H}_1 is the space consisting of functions that are complex conjugate to functions from H_1 and $K_{\tilde{H}_1}(t, \xi)$, $t, \xi \in \Omega_1$, is the reproducing kernel of \tilde{H}_1 . We also obtain other conditions for the equivalence of the spaces \tilde{H}_1 and H_2 . In addition, we study the question of the equivalence of the spaces \tilde{H}_2 and H_1 and the question of the existence of special orthosimilar expansion systems in the spaces H_1 and H_2 . We derive a necessary and sufficient condition for the equivalence of the spaces H_1 and H_2 . This paper continues the authors' paper in which the case of coinciding spaces \tilde{H}_1 and H_2 was considered.

Keywords: orthosimilar decomposition systems, reproducing kernel Hilbert space, problem of describing the dual space.

MSC: 46E22, 47B32, 30H05, 32A38

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-200-215

1. Введение. Постановка задачи

Пусть Ω_1 — некоторое подмножество точек из n -мерного комплексного пространства \mathbb{C}^n , $n \geq 1$. Например, в качестве Ω_1 можно взять область в \mathbb{C}^n . Пусть на Ω_1 задана некоторая счетно-аддитивная мера μ_1 . Мы предполагаем, что пространство Ω_1 счетно-конечно, т. е. может быть представлено в виде счетного объединения подмножеств конечной меры. Пусть H_1 — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из комплекснозначных измеримых функций, заданных на множестве Ω_1 . Термин “гильбертово пространство с воспроизводящим ядром” означает, что функционал δ_ξ , который любой функции $f \in H_1$ ставит в соответствие значение функции f в точке $\xi \in \Omega_1$, является линейным и непрерывным функционалом для произвольной точки $\xi \in \Omega_1$. Более подробно о гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром изложено в [1; 2]. Примерами гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром являются гильбертовы пространства аналитических функций, например, пространства Бергмана, пространство Бергмана — Фока. Пространство H_1 имеет воспроизводящее ядро, т. е. функцию $K_{H_1}(t, \xi)$, $(t, \xi) \in \Omega_1 \times \Omega_1$ такую, что для любого $\xi \in \Omega_1$, $K_{H_1}(\cdot, \xi) \in H_1$, и для любой $f \in H_1$ выполнено соотношение

$$(f, K_{H_1}(\cdot, \xi))_{H_1} = f(\xi).$$

Предположим, что норма в пространстве H_1 имеет интегральный вид

$$\|f\|_{H_1} \stackrel{def}{=} \sqrt{\int_{\Omega_1} |f(t)|^2 d\mu_1(t)}, \quad f \in H_1. \quad (1.1)$$

Пусть Ω_2 — некоторое подмножество точек m -мерного комплексного пространства \mathbb{C}^m , $m \geq 1$ (Ω_2 — пространство со счетно-аддитивной мерой μ_2 ; также предполагаем, что пространство Ω_2 счетно-конечно). Пусть H_2 — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из комплекснозначных измеримых функций, заданных на множестве Ω_2 . Также предполагаем, что норма в пространстве H_2 имеет интегральный вид

$$\|q\|_{H_2} \stackrel{def}{=} \sqrt{\int_{\Omega_2} |q(z)|^2 d\mu_2(z)}, \quad q \in H_2. \quad (1.2)$$

Всюду далее считаем, что гильбертовы пространства H_j , $j = 1, 2$, сепарабельные. Как частный случай, пространства H_j , $j = 1, 2$, могут быть пространствами последовательностей; например, пусть Ω_j — счетный набор точек $\{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots\}$ в \mathbb{C}^p , $p \geq 1$, и H_j — весовое пространство последовательностей комплексных чисел

$$l_w^2 = \left\{ \mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty : \|\mathbf{x}\|_{l_w^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 w_k^2} < \infty, w_k > 0, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Роль μ_j здесь играет следующая мера. Пусть $A = \{\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_l}\}$ — некоторое подмножество множества Ω_j , тогда

$$\mu_j(A) \stackrel{def}{=} \sum_{p=1}^l w_{k_p},$$

где l может быть конечным числом или бесконечностью. Очевидно, справедливо неравенство $|x_{k_0}| w_{k_0} \leq \|\mathbf{x}\|_{l_w^2} \quad \forall \mathbf{x} \in l_w^2$. Отсюда

$$|x_{k_0}| \leq \frac{1}{w_{k_0}} \|\mathbf{x}\|_{l_w^2} \quad \forall \mathbf{x} \in l_w^2.$$

Поэтому l_w^2 — также пространство с воспроизводящим ядром.

Пусть $\{E(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2} \subset H_1$ — некоторая полная система функций в пространстве H_1 . Каждому линейному непрерывному функционалу над H_1 , порождаемому функцией $f \in H_1$, поставим в соответствие функцию

$$\tilde{f}(z) \stackrel{def}{=} (E(\cdot, z), f)_{H_1}, \quad z \in \Omega_2.$$

Совокупность $\{\tilde{f}, f \in H_1\} \stackrel{def}{=} \tilde{H}_1$ образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)_{\tilde{H}_1} \stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_{H_1} \quad \forall \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \tilde{H}_1$$

и нормой $\|\tilde{f}\|_{\tilde{H}_1} = \|f\|_{H_1}$, $\tilde{f} \in \tilde{H}_1$. Во многих задачах комплексного анализа возникает необходимость получить более полную информацию о пространстве \tilde{H}_1 . Необходимо выяснить, из каких функций состоит пространство \tilde{H}_1 , а также существует ли мера ν на Ω_2 такая, что

$$\|g\|_{\tilde{H}_1}^2 \asymp \int_{\Omega_2} |g(z)|^2 d\nu(z) \quad \forall g \in \tilde{H}_1?$$

Знак \asymp означает, что найдутся постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что для любой $g \in \tilde{H}_1$ выполнены неравенства:

$$C_1 \int_{\Omega_2} |g(z)|^2 d\nu(z) \leq \|g\|_{\tilde{H}_1}^2 \leq C_2 \int_{\Omega_2} |g(z)|^2 d\nu(z).$$

Для пространства Баргмана — Фока и преобразования Лапласа такого рода задача рассматривалась в [3]. Отметим также здесь работы [4–6], в которых исследуются подобные вопросы. Эта статья посвящена решению задач 1–4.

З а д а ч а 1. При каких условиях пространства \tilde{H}_1 и H_2 эквивалентны, т. е. состоят из одних и тех же функций, и нормы пространств \tilde{H}_1, H_2 эквивалентны?

Как оказалось, с задачей 1 тесно связана другая задача. Предположим, что система функций $\{E(t, \cdot)\}_{t \in \Omega_1}$ принадлежит пространству H_2 и полна в нем. Каждому линейному непрерывному функционалу, порождаемому функцией $g \in H_2$, поставим в соответствие функцию

$$\check{g}(t) \stackrel{def}{=} (E(t, \cdot), g)_{H_2}, \quad t \in \Omega_1.$$

Совокупность функций $\{\check{g}, g \in H_2\}$ образует гильбертово пространство \check{H}_2 со скалярным произведением

$$(\check{g}, \check{h})_{\check{H}_2} \stackrel{def}{=} (h, g)_{H_2}, \quad h, g \in H_2,$$

и нормой $\|\check{g}\|_{\check{H}_2} = \|g\|_{H_2}$, $g \in H_2$.

З а д а ч а 2. При каких условиях пространство \check{H}_2 эквивалентно пространству H_1 ?

Можно сказать, что фактически задачи 1 и 2 — это задачи об описании сопряженного пространства в терминах специальных систем функций. Так задача 1 — это задача об описании пространства, сопряженного к пространству H_1 в терминах системы функций $\{E(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$, а задача 2 — это задача об описании пространства, сопряженного к пространству H_2 в терминах системы функций $\{E(t, \cdot)\}_{t \in \Omega_1}$. Такого рода задачи часто возникают при решении различных проблем комплексного анализа, например, задач интерполяции, уравнений свертки и других. В этой статье мы решаем и следующую задачу.

З а д а ч а 3. Предположим, что пространства \tilde{H}_1 и H_2 эквивалентны. Найти условия, при выполнении которых пространства H_1 и H_2 оказываются эквивалентными.

Для доказательства результатов статьи мы используем теорию систем разложения, подобных ортогональным (ортоподобным системам разложения) (см. статью Т. П. Лукашенко [7]). Мы докажем также теорему, в которой устанавливается связь вопроса существования ортоподобных систем разложения в пространствах H_1 и H_2 с задачей об описании сопряженного пространства, а именно, решается и четвертая задача.

Задача 4. Найти условия, при которых система функций $\{SE(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$, где S — самосопряженный автоморфизм пространства H_1 , будет ортоподобной системой разложения в пространстве H_1 . Найти условия, при которых система функций $\{QE(t, \cdot)\}_{t \in \Omega_1}$, где Q — самосопряженный автоморфизм пространства H_2 , будет ортоподобной системой разложения в пространстве H_2 . Выяснить, как при этом связаны операторы S и Q .

В статье показано, что задачи 1–4 тесно связаны друг с другом. В разд. 2 установлено, что задачи 1 и 2 между собой эквивалентны; приведено решение этих задач в терминах существования операторов со специальными свойствами. Раздел 3 посвящен решению задачи 3. В разделе 4 решена задача 4.

Следует отметить, что в работе авторов 2019 г. (К вопросу о совпадении гильбертовых пространств с воспроизводящими ядрами, связанных специальным преобразованием //Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Vol. 25, № 2. С. 149–159) изучался случай совпадения пространств \bar{H}_1 и H_2 (а также пространств \bar{H}_2 и H_1). В этой статье исследуется случай эквивалентности пространств.

Через \bar{H}_j , $j = 1, 2$, обозначим гильбертовы пространства комплексно-сопряженных функций к функциям из пространств H_j , $j = 1, 2$. Также нам понадобятся определения антилинейного и антиунитарного операторов (см., например, [8, с. 12, 34]). Оператор инверсии $Inv: f \mapsto \bar{f}$, $f \in H_1$, действует из пространства H_1 на пространство \bar{H}_1 и является антилинейным, антиунитарным оператором (см. [8, с. 41]). В дальнейшем тем же символом Inv мы будем обозначать инверсию $q \rightarrow \bar{q}$, $q \in H_2$, действующую из пространства H_2 на пространство \bar{H}_2 (см. работу авторов 2019 г.).

2. Задача об описании сопряженного пространства и вопрос существования операторов со специальными свойствами

Определим оператор B следующим равенством:

$$B(f) \stackrel{def}{=} \tilde{f} \quad \forall f \in H_1.$$

Теорема 1. *Следующие условия равносильны.*

1. Пространства \bar{H}_1 и H_2 эквивалентны.
2. Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор A_1 , действующий из пространства \bar{H}_1 на пространство H_2 , такой, что

$$A_1: K_{\bar{H}_1}(\cdot, \xi) \mapsto E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1. \quad (2.1)$$

3. Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор A_2 , действующий из пространства \bar{H}_1 на пространство H_2 , такой, что

$$A_2: \overline{E(\cdot, z)} \mapsto K_{H_2}(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_2. \quad (2.2)$$

4. Существует антилинейный взаимно-однозначный оператор B_1 , действующий из пространства H_1 на пространство H_2 , $\|B_1 f\|_{H_2} \asymp \|f\|_{H_1} \quad \forall f \in H_1$, такой, что

$$\begin{aligned} B_1: K_{H_1}(\cdot, \xi) &\mapsto E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1, \\ B_1: E(\cdot, z) &\mapsto Q_1 K_{H_2}(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где Q_1 — некоторый линейный непрерывный взаимнооднозначный самосопряженный оператор, осуществляющий автоморфизм пространства H_2 .

5. Существует антилинейный антиунитарный оператор B_2 , действующий из пространства H_1 на пространство H_2 , такой, что

$$B_2: K_{H_1}(\cdot, \xi) \mapsto Q_2^{-1} E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1, \quad B_2: E(\cdot, z) \mapsto Q_2 K_{H_2}(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_2, \quad (2.4)$$

$$B_2: S_3^{-1} K_{H_1}(\cdot, \xi) \mapsto Q_3^{-1} E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1, \quad B_2: S_3 E(\cdot, z) \mapsto Q_3 K_{H_2}(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_2, \quad (2.5)$$

$$B_2: S_2^{-1} K_{H_1}(\cdot, \xi) \mapsto E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1, \quad B_2: S_2 E(\cdot, z) \mapsto K_{H_2}(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_2, \quad (2.6)$$

где $\mathcal{S}_j: H_1 \rightarrow H_1$, $\mathcal{Q}_j: H_2 \rightarrow H_2$, $j = 2, 3$, — некоторые линейные непрерывные взаимно-однозначные самосопряженные операторы, связанные между собой соотношениями

$$\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_3 \circ \mathcal{Q}_3, \quad \mathcal{S}_3 = \mathcal{B}_2^{-1} \circ \mathcal{Q}_3^{-1} \circ \mathcal{B}_2, \quad \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_3. \quad (2.7)$$

6. Существует антилинейный взаимно-однозначный оператор \mathcal{B}_3 , действующий из пространства H_2 на пространство H_1 , $\|\mathcal{B}_3 f\|_{H_2} \asymp \|f\|_{H_1} \forall f \in H_1$, и обладающий свойствами

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_3: K_{H_2}(\cdot, z) &\mapsto E(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_2, \\ \mathcal{B}_3: E(\xi, \cdot) &\mapsto \mathcal{S}_1 K_{H_1}(\cdot, \xi) \quad \forall \xi \in \Omega_1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где \mathcal{S}_1 — некоторый линейный непрерывный взаимно-однозначный самосопряженный оператор, осуществляющий автоморфизм пространства H_1 .

7. Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор \mathcal{C}_1 , действующий из пространства \overline{H}_2 на пространство H_1 и такой, что

$$\mathcal{C}_1: K_{\overline{H}_2}(\cdot, \tau) \mapsto E(\cdot, \tau) \quad \forall \tau \in \Omega_2. \quad (2.9)$$

8. Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор \mathcal{C}_2 , действующий из пространства \overline{H}_2 на пространство H_1 и такой, что

$$\mathcal{C}_2: \overline{E(\eta, \cdot)} \mapsto K_{H_1}(\cdot, \eta) \quad \forall \eta \in \Omega_1. \quad (2.10)$$

9. Пространства \tilde{H}_2 и H_1 эквивалентны.

Доказательство. Покажем, что из условия 1 следует условие 2. Пусть пространства \tilde{H}_1 и H_2 эквивалентны, т. е. состоят из одних и тех же функций, и нормы этих пространств эквивалентны. На элементах пространства \overline{H}_1 определим оператор \mathcal{A}_1 . Если $g \in \overline{H}_1$, то

$$\mathcal{A}_1 g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_1} (g, K_{\overline{H}_1}(\cdot, t))_{\overline{H}_1} E(t, z) d\mu_1(t) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Заметим, что если $g \in \overline{H}_1$, то $\overline{g} \in H_1$ и (см. лемму 1 из работы авторов 2019 г., отмеченную на с. 203)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\overline{g}(z) &= \overline{\widetilde{g}(z)} = (E(\cdot, z), \overline{g})_{H_1} = \int_{\Omega_1} g(t) E(t, z) d\mu_1(t) \\ &= \int_{\Omega_1} (g, K_{\overline{H}_1}(\cdot, t))_{\overline{H}_1} E(t, z) d\mu_1(t) = \mathcal{A}_1 g(z) \quad \forall z \in \Omega_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Очевидно, что \mathcal{A}_1 — линейный оператор. Оператор $\mathcal{B}: h \rightarrow \tilde{h}$, $h \in H_1$ действует взаимно-однозначно из пространства H_1 на пространство \tilde{H}_1 (см. лемму 1 из работы авторов 2019 г.). Поэтому \mathcal{A}_1 также взаимно-однозначный оператор, действующий из \overline{H}_1 на H_2 . Из того, что пространства H_2 и \tilde{H}_1 эквивалентны, и из (2.11) следует

$$\|\mathcal{A}_1 g\|_{H_2} \asymp \|\mathcal{A}_1 g\|_{\tilde{H}_1} = \|\widetilde{\overline{g}}\|_{\tilde{H}_1} = \|\overline{g}\|_{H_1} = \|g\|_{\overline{H}_1} \quad \forall g \in \overline{H}_1.$$

Таким образом, оператор \mathcal{A}_1 — линейный, непрерывный взаимно-однозначный оператор, действующий из пространства \overline{H}_1 на пространство H_2 . Проверим теперь, что выполнено соотношение (2.1). Действительно, при произвольном $\xi \in \Omega_1$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_1 K_{\overline{H}_1}(\cdot, \xi))(\tau) &= \int_{\Omega_1} (K_{\overline{H}_1}(\cdot, \xi), K_{\overline{H}_1}(\cdot, \eta))_{\overline{H}_1} E(\eta, \tau) d\mu_1(\eta) \\ &= \int_{\Omega_1} K_{\overline{H}_1}(\eta, \xi) E(\eta, \tau) d\mu_1(\eta) = \int_{\Omega_1} \overline{K_{H_1}(\eta, \xi)} E(\eta, \tau) d\mu_1(\eta) = E(\xi, \tau) \quad \forall \tau \in \Omega_2. \end{aligned}$$

Мы доказали, что условие 1 влечет условие 2.

Докажем импликацию $2 \Rightarrow 3$. Построим линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{A}_2: \overline{H}_1 \rightarrow H_2$, обладающий свойством (2.2). Действительно, оператор \mathcal{A}_1 является линейным непрерывным взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства \overline{H}_1 на пространство H_2 . Заметим, что оператор $\mathcal{Q}_1 \stackrel{def}{=} \mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_1^*$ — линейный непрерывный взаимно-однозначный самосопряженный оператор, осуществляющий автоморфизм пространства H_2 . Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 g(z) &= (g, \overline{E(\cdot, z)})_{\overline{H}_1} = ((\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_1^*)^{-1} \mathcal{A}_1 g, \mathcal{A}_1 \overline{E(\cdot, z)})_{H_2} \\ &= (\mathcal{Q}_1^{-1} \mathcal{A}_1 g, \mathcal{A}_1 \overline{E(\cdot, z)})_{H_2} = (\mathcal{A}_1 g, \mathcal{Q}_1^{-1} \mathcal{A}_1 \overline{E(\cdot, z)})_{H_2} \quad \forall z \in \Omega_2, \quad \forall g \in \overline{H}_1. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $\mathcal{Q}_1^{-1} \mathcal{A}_1 \overline{E(\cdot, z)}$ обладает воспроизводящим свойством; в силу единственности воспроизводящего ядра для любого $z \in \Omega_2$ справедливо

$$\mathcal{Q}_1^{-1} \mathcal{A}_1 \overline{E(\cdot, z)} = K_{H_2}(\cdot, z).$$

Отсюда

$$\mathcal{A}_1 \overline{E(\cdot, z)} = \mathcal{Q}_1 K_{H_2}(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_2. \quad (2.12)$$

Тогда $\mathcal{A}_2 \stackrel{def}{=} \mathcal{Q}_1^{-1} \circ \mathcal{A}_1$ — линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор, действующий из пространства \overline{H}_1 на пространство H_2 ; при этом

$$\mathcal{A}_2 \overline{E(\cdot, z)} = \mathcal{Q}_1^{-1} \mathcal{A}_1 \overline{E(\cdot, z)} = K_{H_2}(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Заметим, что $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_1^*)^{-1} \circ \mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}_1^*)^{-1}$. Таким образом, выполнено соотношение (2.2), и условие 3 также выполняется.

Покажем, что из условия 3 следует условие 4. Пусть существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор \mathcal{A}_2 , действующий из пространства \overline{H}_1 на пространство H_2 , такой, что выполнено соотношение (2.2). Докажем, что найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор \mathcal{A}_3 , действующий из пространства \overline{H}_1 на пространство H_2 , такой, что

$$\mathcal{A}_3: K_{\overline{H}_1}(\cdot, \xi) \mapsto E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1. \quad (2.13)$$

Поскольку норма в пространстве H_2 имеет интегральный вид (1.2), система функций $\{K_{H_2}(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2 в пространстве H_2 (см. [9, теорема 2]). Значит, любая функция $q \in H_2$ представляется в виде

$$q(z) = \int_{\Omega_2} (q, K_{H_2}(\cdot, \tau))_{H_2} K_{H_2}(z, \tau) d\mu_2(\tau) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Поддействуем на обе части этого равенства оператором $\mathcal{D} \stackrel{def}{=} \mathcal{A}_2^{-1}$. Применим теорему из [10, с. 128] и воспользуемся соотношением $\mathcal{D}: K_{H_2}(\cdot, \tau) \mapsto \overline{E(\cdot, \tau)}$ $\forall \tau \in \Omega_2$, которое следует из (2.2). Получим

$$\mathcal{D}q(\xi) = \int_{\Omega_2} (q, K_{H_2}(\cdot, \tau))_{H_2} \overline{E(\xi, \tau)} d\mu_2(\tau) \quad \forall \xi \in \Omega_1.$$

Оператор $\mathcal{R}_1 \stackrel{def}{=} \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^*$ является линейным непрерывным взаимно-однозначным самосопряженным оператором, действующим из пространства \overline{H}_1 на \overline{H}_1 . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{D}q(\xi) &= (q, E(\xi, \cdot))_{H_2} = ((\mathcal{D} \circ \mathcal{D}^*)^{-1} \mathcal{D}q, \mathcal{D}E(\xi, \cdot))_{H_1} \\ &= (\mathcal{R}_1^{-1} \mathcal{D}q, \mathcal{D}E(\xi, \cdot))_{H_1} = (\mathcal{D}q, \mathcal{R}_1^{-1} \mathcal{D}E(\xi, \cdot))_{H_1} \quad \forall \xi \in \Omega_1, \quad \forall q \in H_2. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $\mathcal{R}_1^{-1}\mathcal{D}E(\xi, \cdot)$ обладает воспроизводящим свойством; в силу единственности воспроизводящего ядра для любого $\xi \in \Omega_1$ справедливо равенство $\mathcal{R}_1^{-1}\mathcal{D}E(\xi, \cdot) = K_{\overline{H}_1}(\cdot, \xi)$. Из последнего соотношения вытекает, что линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{D}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_1^{-1} \circ \mathcal{D}$ действует из пространства H_2 на пространство \overline{H}_1 , и при этом

$$\mathcal{D}_1: E(\xi, \cdot) \mapsto K_{\overline{H}_1}(\cdot, \xi) \quad \forall \xi \in \Omega_1.$$

Также $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{D} \circ \mathcal{D}^*)^{-1} \circ \mathcal{D} = (\mathcal{D}^*)^{-1}$. Положим

$$\mathcal{A}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_1^{-1} = \mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{R}_1 = \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \mathcal{D}^*.$$

Тогда \mathcal{A}_3 — это линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор, действующий из пространства \overline{H}_1 на пространство H_2 и такой, что выполнено соотношение (2.13). Отсюда легко увидеть, что оператор \mathcal{A}_3 совпадает с оператором \mathcal{A}_1 (см. п. 1 теоремы). Как было доказано выше, найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный самосопряженный оператор $\mathcal{Q}_1: H_2 \rightarrow H_2$ такой, что выполнено соотношение (2.12). В качестве оператора \mathcal{B}_1 возьмем оператор $\mathcal{B}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_3 \circ \text{Inv}$. Очевидно, оператор \mathcal{B}_1 — антилинейный взаимно-однозначный оператор, действующий из пространства H_1 на H_1 , поскольку $\text{Inv}: H_1 \rightarrow \overline{H}_1$ — антилинейный взаимно-однозначный оператор. Отсюда согласно (2.13) и тому, что $K_{\overline{H}_1}(\eta, \xi) = \overline{K_{H_1}(\xi, \eta)}$ $\forall \eta, \xi \in \Omega_1$, получаем $\mathcal{B}_1: K_{H_1}(\cdot, \xi) \mapsto E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1$. Ввиду (2.12)

$$\mathcal{B}_1: E(\cdot, z) \mapsto \mathcal{Q}_1 K_{H_2}(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Таким образом, выполнены соотношения (2.3); отсюда следует выполнение условия 4.

Покажем теперь, что $4 \Rightarrow 5$. Предположим, что существует антилинейный взаимно-однозначный оператор \mathcal{B}_1 , действующий из пространства H_1 на пространство H_2 , $\|\mathcal{B}_1 f\|_{H_2} \asymp \|f\|_{H_1} \quad \forall f \in H_1$, и выполняются соотношения (2.3). Пусть \mathcal{Q}_2 — положительный квадратный корень из оператора \mathcal{Q}_1 , т. е. такой самосопряженный оператор, что $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 \circ \mathcal{Q}_2$ (см., например, [11, с. 284]). Очевидно, что \mathcal{Q}_2 — взаимно-однозначный оператор. Положим $\mathcal{B}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Q}_2^{-1} \circ \mathcal{B}_1$. Нетрудно проверить, что \mathcal{B}_2 — это также антилинейный взаимно-однозначный оператор, действующий из пространства H_1 на пространство H_2 . При этом, как нетрудно увидеть, выполнены соотношения (2.4). Докажем, что \mathcal{B}_2 — антиунитарный оператор, т. е. выполнено соотношение

$$(\mathcal{B}_2 f_1, \mathcal{B}_2 f_2)_{H_2} = (f_2, f_1)_{H_1} \quad \forall f_1, f_2 \in H_1. \quad (2.14)$$

По условию теоремы норма в пространстве H_1 имеет вид (1.1). В пространстве $\overline{H}_1 = \{h, \overline{h} \in H_1\}$ норма также имеет интегральный вид

$$\|h\|_{\overline{H}_1} = \sqrt{\int_{\Omega_1} |h(z)|^2 d\mu_1(z)}, \quad h \in \overline{H}_1.$$

Заметим, что

$$(f_2, f_1)_{H_1} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2)_{\overline{H}_1} \quad \forall f_1, f_2 \in H_1. \quad (2.15)$$

Определим оператор $\mathcal{J}: \mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}_2 \circ \text{Inv}$. Оператор \mathcal{J} , очевидно, является линейным непрерывным взаимно-однозначным оператором, действующим из \overline{H}_1 на H_2 , и при этом

$$\mathcal{J}: K_{\overline{H}_1}(\cdot, \xi) \mapsto \mathcal{Q}_2^{-1} E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1; \quad (2.16)$$

$$\mathcal{J}: \overline{E(\cdot, z)} \mapsto \mathcal{Q}_2 K_{H_2}(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_2. \quad (2.17)$$

В силу равенства (2.15) соотношение (2.14) выполняется тогда и только тогда, когда оператор \mathcal{J} — унитарный оператор, действующий из \overline{H}_1 на H_2 . Докажем, что \mathcal{J} — унитарный

оператор. В пространстве \overline{H}_1 система функций $\{K_{\overline{H}_1}(\cdot, \eta)\}_{\eta \in \Omega_1}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1 на Ω_1 , т.е. любая функция $h \in \overline{H}_1$ может быть представлена в виде

$$h(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_1} (h, K_{\overline{H}_1}(\cdot, \eta))_{\overline{H}_1} K_{\overline{H}_1}(\xi, \eta) d\mu_1(\eta) \quad \forall \xi \in \Omega_1. \quad (2.18)$$

Подействуем на обе части этого равенства оператором \mathcal{J} . Учтем теорему из [10, с. 128] и соотношение (2.16). Имеем

$$(\mathcal{J}h)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_1} (h, K_{\overline{H}_1}(\cdot, \eta))_{\overline{H}_1} \mathcal{Q}_2^{-1} E(\eta, z) d\mu_1(\eta) \quad \forall z \in \Omega_2. \quad (2.19)$$

Так как норма в пространстве H_2 имеет вид (1.2), то нетрудно получить представление

$$\begin{aligned} \mathcal{J}h(z) &= \int_{\Omega_2} (\mathcal{J}h, K_{H_2}(\cdot, \tau))_{H_2} K_{H_2}(z, \tau) d\mu_2(\tau) \\ &= \int_{\Omega_2} (\mathcal{Q}_2^{-1} \mathcal{J}h, K_{H_2}(\cdot, \tau))_{H_2} \mathcal{Q}_2 K_{H_2}(z, \tau) d\mu_2(\tau) \quad \forall z \in \Omega_2, \quad \forall h \in \overline{H}_1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подействуем на обе части равенства (2.20) оператором, обратным к оператору \mathcal{J} . Учитывая теорему из [10, с. 128] и соотношение (2.17), выводим

$$h(\xi) = \int_{\Omega_2} (\mathcal{Q}_2^{-1} \mathcal{J}h, K_{H_2}(\cdot, \tau))_{H_2} \overline{E(\xi, \tau)} d\mu_2(\tau) \quad \forall \xi \in \Omega_1, \quad \forall h \in \overline{H}_1. \quad (2.21)$$

Пусть h_1, h_2 — произвольные функции из пространства \overline{H}_1 . Поскольку норма в пространстве \overline{H}_1 имеет интегральный вид, в силу равенств (2.18), (2.19), (2.21), соотношений (2.16), (2.17) и теоремы из [10, с. 128] имеем

$$\begin{aligned} (h_1, h_2)_{\overline{H}_1} &= \left(\int_{\Omega_1} (h_1, K_{\overline{H}_1}(\cdot, \eta))_{\overline{H}_1} K_{\overline{H}_1}(\xi, \eta) d\mu_1(\eta), \int_{\Omega_2} (\mathcal{Q}_2^{-1} \mathcal{J}h_2, K_{H_2}(\cdot, \tau))_{H_2} \overline{E(\xi, \tau)} d\mu_2(\tau) \right)_{\overline{H}_1} \\ &= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} (h_1, K_{\overline{H}_1}(\cdot, \eta))_{\overline{H}_1} (K_{\overline{H}_1}(\xi, \eta), \overline{E(\xi, \tau)})_{\overline{H}_1} \cdot (K_{H_2}(\cdot, \tau), \mathcal{Q}_2^{-1} \mathcal{J}h_2)_{H_2} d\mu_1(\eta) d\mu_2(\tau) \\ &= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} (h_1, K_{\overline{H}_1}(\cdot, \eta))_{\overline{H}_1} (E(\eta, z), K_{H_2}(z, \tau))_{H_2} \cdot (K_{H_2}(\cdot, \tau), \mathcal{Q}_2^{-1} \mathcal{J}h_2)_{H_2} d\mu_1(\eta) d\mu_2(\tau) \\ &= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} (h_1, K_{\overline{H}_1}(\cdot, \eta))_{\overline{H}_1} (\mathcal{Q}_2^{-1} E(\eta, z), K_{H_2}(z, \tau))_{H_2} \cdot (K_{H_2}(\cdot, \tau), \mathcal{J}h_2)_{H_2} d\mu_1(\eta) d\mu_2(\tau) \\ &= \left(\int_{\Omega_1} (h_1, K_{\overline{H}_1}(\cdot, \eta))_{\overline{H}_1} \mathcal{Q}_2^{-1} E(\eta, z) d\mu_1(\eta), \int_{\Omega_2} (\mathcal{J}h_2, K_{H_2}(\cdot, \tau))_{H_2} K_{H_2}(z, \tau) d\mu_2(\tau) \right)_{H_2} \\ &= (\mathcal{J}h_1, \mathcal{J}h_2)_{H_2} \quad \forall h_1, h_2 \in \overline{H}_1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Опишем действия в последней выкладке. Воспользовавшись равенствами (2.18) и (2.21), мы выписываем интегральные представления элементов h_1 и h_2 ; подставляем эти выражения в скалярное произведение в пространстве \overline{H}_1 . Заметим, что скалярное произведение записывается также с помощью интеграла. Применяя теорему Фубини, выносим знаки интегралов

за скобки скалярного произведения. Далее, воспользовавшись равенством (которое нетрудно проверить)

$$(K_{\overline{H}_1}(\cdot, \eta), \overline{E(\cdot, \tau)})_{\overline{H}_1} = (E(\eta, \cdot), K_{H_2}(\cdot, \tau))_{H_2} \quad \forall \eta \in \Omega_1, \quad \forall \tau \in \Omega_2,$$

мы заменяем в выкладке скалярное произведение в пространстве \overline{H}_1 на скалярное произведение в пространстве H_2 . Используя то, что в пространстве H_2 скалярное произведение записывается тоже с помощью интеграла, и то, что \mathcal{Q}_2^{-1} — самосопряженный оператор, а также используя теорему Фубини, мы переносим знаки интегралов под скобки скалярного произведения. Таким образом, мы получаем равенство (2.22). Далее из равенств (2.15), (2.22) и того, что $\mathcal{J} = \mathcal{B}_2 \circ Inv$, следует

$$(f_2, f_1)_{H_1} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2)_{\overline{H}_1} = (\mathcal{J}\overline{f}_1, \mathcal{J}\overline{f}_2)_{H_2} = (\mathcal{B}_2 f_1, \mathcal{B}_2 f_2)_{H_2} \quad \forall f_1, f_2 \in H_1.$$

Тем самым мы показали, что \mathcal{B}_2 — антиунитарный, антилинейный оператор, действующий из пространства H_1 на пространство H_2 ; при этом из соотношений (2.16), (2.17) следует (2.4). Пусть операторы $\mathcal{Q}_3, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_2$ определены, как в (2.7). Нетрудно показать, что из (2.4) вытекают условия (2.5) и (2.6). Таким образом, из условия 4 следует условие 5.

Далее докажем, что из условия 5 следует условие 6. Положим $\mathcal{S}_1 \stackrel{def}{=} \mathcal{S}_2^{-1} \circ \mathcal{S}_2^{-1}$. Оператор \mathcal{S}_1 — линейный непрерывный самосопряженный оператор, осуществляющий автоморфизм пространства H_1 . Оператор $\mathcal{B}'_3 \stackrel{def}{=} \mathcal{B}_2 \circ \mathcal{S}_2$ является антилинейным взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства H_1 на пространство H_2 , и $\|\mathcal{B}'_3 f\|_{H_2} \asymp \|f\|_{H_1} \quad \forall f \in H_1$. Из соотношений (2.6) вытекает

$$\mathcal{B}'_3 E(\cdot, z) = \mathcal{B}_2 \circ \mathcal{S}_2 E(\cdot, z) = K_{H_2}(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_2, \quad (2.23)$$

и

$$\mathcal{B}'_3 \mathcal{S}_1 K_{H_1}(\cdot, \xi) = \mathcal{B}_2 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_2^{-1} \circ \mathcal{S}_2^{-1} K_{H_1}(\cdot, \xi) = \mathcal{B}_2 \circ \mathcal{S}_2^{-1} K_{H_1}(\cdot, \xi) = E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1. \quad (2.24)$$

Положим $\mathcal{B}_3 \stackrel{def}{=} \mathcal{B}'_3^{-1}$ — обратный оператор к оператору \mathcal{B}'_3 . Тогда в силу (2.23), (2.24) справедливы соотношения (2.8). Тем самым выполнение условия 5 влечет условие 6.

Докажем, что из условия 6 следует условие 7. Положим $\mathcal{C}_1 \stackrel{def}{=} \mathcal{B}_3 \circ Inv$. Оператор \mathcal{C}_1 линеен как композиция двух антилинейных операторов (см. [8, с. 41]). Оператор комплексной инверсии Inv действует взаимно-однозначно из пространства \overline{H}_1 на пространство H_1 ; при этом $\|\overline{g}\|_{H_1} = \|g\|_{\overline{H}_1} \quad \forall g \in H_1$. Докажем непрерывность оператора \mathcal{C}_1 . Для любого элемента $g \in \overline{H}_1$

$$\|\mathcal{C}_1 g\|_{H_2} = \|[\mathcal{B}_3 \circ Inv]g\|_{H_2} = \|\mathcal{B}_3 \overline{g}\|_{H_2} \asymp \|\overline{g}\|_{H_1} = \|g\|_{\overline{H}_1}.$$

Таким образом, оператор \mathcal{C}_1 является линейным непрерывным взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства \overline{H}_1 на пространство H_2 . Учитывая равенство $\overline{K_{H_2}(z, \tau)} \equiv K_{\overline{H}_2}(z, \tau)$, $z, \tau \in \Omega_2$, приходим к соотношению (2.9). Значит, условие 7 выполняется.

Доказательство импликации $7 \Rightarrow 8$ аналогично доказательству импликации $2 \Rightarrow 3$. Поэтому мы приведем здесь лишь схему доказательства и некоторые формулы.

$$\mathcal{C}_1 q(\eta) = \int_{\Omega_2} (q, K_{\overline{H}_2}(\cdot, \tau))_{\overline{H}_2} E(\eta, \tau) d\mu_2(\tau) \quad \forall \eta \in \Omega_1,$$

$$\mathcal{C}_1^* f(z) = \int_{\Omega_1} (f, K_{H_1}(\cdot, t))_{H_1} \overline{E(t, z)} d\mu_1(t) \quad \forall z \in \Omega_2, \quad \forall f \in H_1.$$

Обозначим $\mathcal{T}_0 \stackrel{def}{=} \mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_1^*$. Для любой функции $f \in H_1$ и произвольного $\xi \in \Omega_1$ выполнено соотношение

$$f(\xi) = (f, \mathcal{T}_0^{-1} \mathcal{C}_1 \overline{E(\xi, \cdot)})_{H_1}, \quad \mathcal{T}_0^{-1} \circ \mathcal{C}_1 \overline{E(\xi, \cdot)} = K_{H_1}(\xi, \cdot).$$

Отсюда $\mathcal{C}_1 \overline{E(\xi, \cdot)} = \mathcal{T}_0 K_{H_1}(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1$. Тогда оператор $\mathcal{C}_2 \stackrel{def}{=} \mathcal{T}_0^{-1} \circ \mathcal{C}_1$ действует линейно, непрерывно, взаимно-однозначно из пространства \overline{H}_2 на пространство H_1 ; при этом

$$\mathcal{C}_2 \overline{E(\xi, \cdot)} = \mathcal{T}_0^{-1} \circ \mathcal{C}_1 \overline{E(\xi, \cdot)} = \mathcal{T}_0^{-1} \circ \mathcal{T}_0 K_{H_1}(\xi, \cdot) = K_{H_1}(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1.$$

Таким образом, справедливо соотношение (2.10) и условие 7 влечет условие 8.

Осталось доказать, что из условия 8 вытекает условие 9. Действительно, система функций $\{K_{H_1}(\cdot, \eta)\}_{\eta \in \Omega_1}$, очевидно, полна в пространстве H_1 ; из (2.10) следует

$$(q, \overline{E(\eta, \cdot)})_{\overline{H}_2} = ((\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_2^*)^{-1} \mathcal{C}_2 q, K_{H_1}(\cdot, \eta))_{H_1} \quad \forall \eta \in \Omega_1, \quad \forall q \in \overline{H}_2;$$

отсюда в силу взаимно-однозначности оператора \mathcal{C}_2 система функций $\{\overline{E(\eta, \cdot)}\}_{\eta \in \Omega_1}$ полна в пространстве \overline{H}_2 . Значит, система функций $\{E(\eta, \cdot)\}_{\eta \in \Omega_1}$ полна в пространстве H_2 . Каждому линейному непрерывному функционалу над H_2 , порождаемому функцией $g \in H_2$, поставим в соответствие функцию

$$\check{g}(\eta) \stackrel{def}{=} (E(\eta, \cdot), g)_{H_2} \quad \forall \eta \in \Omega_1.$$

Совокупность функций $\{\check{g}, g \in H_2\}$ образует гильбертово пространство \check{H}_2 со скалярным произведением

$$(\check{g}, \check{h})_{\check{H}_2} \stackrel{def}{=} (h, g)_{H_2} \quad \forall h, g \in H_2,$$

и нормой $\|\check{g}\|_{\check{H}_2} = \|g\|_{H_2}$, $g \in H_2$. Ввиду теоремы 1 из работы [9] воспроизводящее ядро пространства \check{H}_2 имеет вид

$$K_{\check{H}_2}(\eta, \xi) = \int_{\Omega_2} E(\eta, \tau) \overline{E(\xi, \tau)} d\mu_2(\tau) \quad \forall \eta, \xi \in \Omega_1. \quad (2.25)$$

Обозначим через $\mathcal{T}_1 \stackrel{def}{=} \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_2^*$ линейный непрерывный самосопряженный взаимно-однозначный оператор, осуществляющий автоморфизм пространства H_1 . В силу взаимно-однозначности оператора \mathcal{C}_2 и соотношений (2.10), (2.25) получаем

$$\begin{aligned} K_{\check{H}_2}(\eta, \xi) &= \int_{\Omega_2} E(\eta, \tau) \overline{E(\xi, \tau)} d\mu_2(\tau) = (\overline{E(\xi, \cdot)}, \overline{E(\eta, \cdot)})_{\overline{H}_2} \\ &= ((\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_2^*)^{-1} \circ \mathcal{C}_2 [\overline{E(\xi, \cdot)}], \mathcal{C}_2 [\overline{E(\eta, \cdot)}])_{H_1} = (\mathcal{T}_1^{-1} K_{H_1}(\cdot, \xi), K_{H_1}(\cdot, \eta))_{H_1} \\ &= \mathcal{T}_1^{-1} K_{H_1}(\eta, \xi) \quad \forall \eta, \xi \in \Omega_1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Так как \mathcal{T}_1 — линейный непрерывный взаимно-однозначный самосопряженный оператор, то величина $\|f\|_{H'_1} \stackrel{def}{=} \sqrt{(\mathcal{T}_1 f, f)_{H_1}}$, $f \in H_1$, является нормой в пространстве H_1 , которая эквивалентна норме $\|\cdot\|_{H_1}$. Гильбертово пространство, которое состоит из тех же функций, что и пространство H_1 , и имеет норму $\|\cdot\|_{H'_1}$, обозначим через H'_1 . Пространство H'_1 эквивалентно пространству H_1 , поскольку \mathcal{T}_1 — линейный непрерывный взаимно-однозначный самосопряженный оператор. Скалярное произведение в пространстве H'_1 имеет вид

$$(f, g)_{H'_1} = (\mathcal{T}_1 f, g)_{H_1}, \quad f, g \in H'_1.$$

Для произвольной функции $f \in H_1$ и произвольного значения $\xi \in \Omega_1$ справедливо равенство

$$(f, \mathcal{T}_1^{-1} K_{H_1}(\cdot, \xi))_{H'_1} = (\mathcal{T}_1 f, \mathcal{T}_1^{-1} K_{H_1}(\cdot, \xi))_{H_1} = (f, K_{H_1}(\cdot, \xi))_{H_1} = f(\xi).$$

Таким образом, при любом $\xi \in \Omega_1$ функция $\mathcal{T}_1^{-1} K_{H_1}(\cdot, \xi)$ обладает воспроизводящим свойством. В силу единственности воспроизводящего ядра

$$K_{H'_1}(\eta, \xi) = \mathcal{T}_1^{-1} K_{H_1}(\eta, \xi) \quad \forall \eta, \xi \in \Omega_1.$$

Равенство (2.26) означает, что $K_{\tilde{H}_2}(\eta, \xi) \equiv K_{H'_1}(\eta, \xi)$, $\eta, \xi \in \Omega_1$; отсюда вытекает, что гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром \tilde{H}_2 и H'_1 совпадают. Пространства H'_1 и H_1 эквивалентны, поэтому пространства \tilde{H}_2 и H_1 эквивалентны. Таким образом, мы доказали, что условие 8 влечет условие 9. Доказательство импликаций $9 \Rightarrow 8 \Rightarrow \dots \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ проводится аналогично.

Теорема 1 доказана.

Предложение 1. *Выполнение хотя бы одного из 9 условий теоремы 1 влечет существование всех приведенных в формулировке и в доказательстве этой теоремы операторов, которые имеют конкретный явный вид и связаны друг с другом следующими соотношениями:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1: \overline{H}_1 &\longrightarrow H_2, & \mathcal{A}_1 g(z) &= \int_{\Omega_1} (g, K_{\overline{H}_1}(\cdot, t))_{\overline{H}_1} E(t, z) d\mu_1(t), & z \in \Omega_2, & g \in \overline{H}_1, \\ \mathcal{A}_1^*: H_2 &\longrightarrow \overline{H}_1, & \mathcal{A}_1^* h(\xi) &= \int_{\Omega_2} (h, K_{H_2}(\cdot, \tau))_{H_2} \overline{E(\xi, \tau)} d\mu_2(\tau), & \xi \in \Omega_1, & h \in H_2, \\ \mathcal{Q}_1 &= \mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_1^*, & \mathcal{R}_1 &= \mathcal{A}_1^* \circ \mathcal{A}_1, & \mathcal{A}_2 &= \mathcal{Q}_1^{-1} \circ \mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}_1^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Антилинейный оператор \mathcal{B}_1 действует из пространства H_1 на пространство H_2 и имеет вид

$$\mathcal{B}_1 f(z) = \int_{\Omega_1} \overline{(f, K_{H_1}(\cdot, t))_{H_1}} E(t, z) d\mu_1(t) = (E(\cdot, z), f)_{H_1}, \quad z \in \Omega_2, \quad f \in H_1,$$

т. е. $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_1 \circ Inv$. Также справедливы выражения

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= \mathcal{A}_1, & \mathcal{Q}_2 &= \sqrt{\mathcal{Q}_1}, & \mathcal{Q}_3 &= \sqrt{\mathcal{Q}_2}, & \mathcal{B}_2 &= \mathcal{Q}_2^{-1} \circ \mathcal{B}_1, \\ \mathcal{S}_3 &= \mathcal{B}_2^{-1} \circ \mathcal{Q}_3^{-1} \circ \mathcal{B}_2, & \mathcal{S}_2 &= \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_3 = \mathcal{B}_2^{-1} \circ \mathcal{Q}_2^{-1} \circ \mathcal{B}_2, \\ \mathcal{S}_1 &= \mathcal{S}_2^{-1} \circ \mathcal{S}_2^{-1} = \mathcal{B}_2^{-1} \circ \mathcal{Q}_1 \circ \mathcal{B}_2, & \mathcal{B}_3 &= \mathcal{S}_2^{-1} \circ \mathcal{B}_2^{-1}, & \mathcal{S}_1 &= Inv \circ \mathcal{R}_1 \circ Inv, \\ \mathcal{C}_1: \overline{H}_2 &\longrightarrow H_1, & \mathcal{C}_1 q(\xi) &= \int_{\Omega_2} (q, K_{\overline{H}_2}(\cdot, \tau))_{\overline{H}_2} E(\xi, \tau) d\mu_2(\tau) & \forall \xi \in \Omega_1, & \forall q \in \overline{H}_2, \\ \mathcal{C}_1^*: H_1 &\longrightarrow \overline{H}_2, & \mathcal{C}_1^* f(z) &= \int_{\Omega_1} (f, K_{H_1}(\cdot, t))_{H_1} \overline{E(t, z)} d\mu_1(t) & \forall z \in \Omega_2, & \forall f \in H_1, \\ \mathcal{C}_1 &= Inv \circ \mathcal{A}_2^{-1} \circ Inv, & \mathcal{C}_2 &= Inv \circ \mathcal{A}_1^{-1} \circ Inv, \\ \mathcal{T}_0 &= \mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_1^*, & \mathcal{T}_0 &= \mathcal{S}_1, & \mathcal{C}_2 &= \mathcal{T}_0^{-1} \circ \mathcal{C}_1 = (\mathcal{C}_1^*)^{-1}, & \mathcal{T}_1 &= \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_2^* = \mathcal{T}_0^{-1}. \end{aligned}$$

Антилинейный оператор \mathcal{B}_3 действует из пространства H_2 на пространство H_1 и имеет вид

$$\mathcal{B}_3 h(\xi) = \int_{\Omega_2} \overline{(h, K_{H_2}(\cdot, \tau))_{H_2}} E(\xi, \tau) d\mu_2(\tau) = (E(\xi, \cdot), h)_{H_2} \quad \forall \xi \in \Omega_1, \quad \forall h \in H_2,$$

т. е. $\mathcal{B}_3 = \mathcal{C}_1 \circ Inv$. Воспроизводящие ядра пространств \tilde{H}_1 и H_2 , а также пространств \tilde{H}_2 и H_1 связаны соотношениями

$$K_{\tilde{H}_1}(z, \tau) = \mathcal{Q}_1 K_{H_2}(z, \tau) \quad \forall z, \tau \in \Omega_2, \quad K_{\tilde{H}_2}(\xi, \eta) = \mathcal{S}_1 K_{H_1}(\xi, \eta) \quad \forall \eta, \xi \in \Omega_1. \quad (2.27)$$

Доказательство формул фактически приведено в доказательстве теоремы 1. В процессе доказательства указывается явный вид операторов. Например, соотношения (2.27) вытекают из леммы 1 работы 2019 г., указанной на с. 203, и условий 4, 6 теоремы 1. \square

3. Условие эквивалентности пространств H_1 и H_2

Далее мы получим условие, при котором пространства H_1 и H_2 эквивалентны. В этом случае нужно предполагать, что $\Omega_1 = \Omega_2$, поскольку эквивалентность пространств означает, что функции, входящие в эти пространства, имеют одинаковую область определения.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1 и $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega \subset \mathbb{C}^n$. Пространства H_1 и H_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор \mathcal{E} , действующий из пространства H_1 на пространство H_2 и такой, что*

$$\mathcal{E}: E(\cdot, \xi) \mapsto E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Доказательство. Поскольку выполнены условия теоремы 1, мы используем обозначения из доказательства и формулировки этой теоремы. Из теоремы 1 следует, что $\tilde{H}_1 \asymp H_2$, $\check{H}_2 \asymp H_1$. Поэтому пространства H_1 и H_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны пространства \tilde{H}_1 и \check{H}_2 . Покажем, что в пространстве H_1 система функций $\{\mathcal{S}_2 E(\cdot, \xi)\}_{\xi \in \Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2 . Действительно, оператор

$$\mathcal{C}_1^* f(z) = (f, E(\cdot, z))_{H_1}, \quad z \in \Omega, \quad f \in H_1,$$

действует линейно, непрерывно, взаимно-однозначно из пространства H_1 на пространство \overline{H}_2 . Оператор

$$\mathcal{C}_1 q(\xi) = (q, \overline{E(\xi, \cdot)})_{\overline{H}_2}, \quad \xi \in \Omega_1, \quad q \in \overline{H}_2,$$

действует из пространства \overline{H}_2 на пространство H_1 . Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_1^* f(\xi) = \int_{\Omega} (f, E(\cdot, z))_{H_1} E(\xi, z) d\mu_2(z) \quad \forall f \in H_1. \quad (3.1)$$

Заметим, что (см. предложение 1)

$$\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_1^* = \mathcal{T}_0 = \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2^{-1} \circ \mathcal{S}_2^{-1}.$$

Отсюда и из соотношения (3.1) получаем

$$f(\xi) = \int_{\Omega} (f, \mathcal{S}_2 E(\cdot, z))_{H_1} \mathcal{S}_2 E(\xi, z) d\mu_2(z) \quad \forall f \in H_1. \quad (3.2)$$

Последнее означает, что в пространстве H_1 система функций $\{\mathcal{S}_2 E(\cdot, z)\}_{z \in \Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2 . Аналогично доказывается, что в пространстве H_2 система функций $\{\mathcal{Q}_2^{-1} E(t, \cdot)\}_{t \in \Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1 в пространстве H_2 . Применим теорему 1 из работы [12]. Согласно этой теореме пространства \tilde{H}_1 и \check{H}_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор \mathcal{E}' , действующий из пространства H_1 на пространство H_2 и такой, что

$$\mathcal{E}': \mathcal{S}_2 E(\cdot, \xi) \mapsto \mathcal{Q}_2^{-1} E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Отсюда вытекает, что оператор

$$\mathcal{E} \stackrel{def}{=} \mathcal{Q}_2 \circ \mathcal{E}' \circ \mathcal{S}_2$$

является линейным непрерывным взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства H_1 на пространство H_2 и

$$\mathcal{E}: E(\cdot, \xi) \mapsto E(\xi, \cdot) \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Теорема 2 доказана.

Заметим, что случай, когда пространства H_1 и H_2 совпадают, рассмотрен в статье авторов 2019 г.

4. Задача описания сопряженного пространства и вопрос существования специальных ортоподобных систем разложения

Теорема 3. Пусть H_1 — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из измеримых функций, заданных на некотором множестве $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$. Норма в пространстве H_1 имеет интегральный вид

$$\|f\|_{H_1} = \sqrt{\int_{\Omega_1} |f(z)|^2 d\mu_1(z)}, \quad f \in H_1.$$

Допустим, что система функций $\{E(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$ полна в пространстве H_1 . Предположим, что при любом фиксированном $\xi \in \Omega_1$ функция $E(\xi, \omega)$, $\omega \in \Omega_2$, измерима как функция от переменной $\omega \in \Omega_2$. Определим антилинейный оператор \mathcal{B} равенством

$$\mathcal{B}f(z) = (E(\cdot, z), f)_{H_1} \quad \forall f \in H_1, \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Тогда следующие условия эквивалентны.

1. Найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор \mathcal{S} , действующий из H_1 на H_1 , такой, что система функций $\{\mathcal{S}E(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения с некоторой мерой μ_2 , заданной на Ω_2 в пространстве H_1 , т. е. любая функция f из пространства H_1 может быть представлена в виде

$$f(\eta) = \int_{\Omega_2} (f, \mathcal{S}E(\cdot, z))_{H_1} \mathcal{S}E(\eta, z) d\mu_2(z) \quad \forall \eta \in \Omega_1. \quad (4.1)$$

2. Система функций $\{E(\eta, \cdot)\}_{\eta \in \Omega_1}$ обладает свойством

$$\int_{\Omega_2} |E(\eta, \tau)|^2 d\mu_2(\tau) < \infty \quad \forall \eta \in \Omega_1.$$

Замыкание по норме

$$\|q\|_{H_2} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_{\Omega_2} |q(\tau)|^2 d\mu_2(\tau)}$$

линейной оболочки системы функций $\{E(\eta, \cdot)\}_{\eta \in \Omega_1}$ образует гильбертово пространство с воспроизводящим ядром H_2 , состоящее из функций, заданных на множестве Ω_2 . Пространства \tilde{H}_1 и H_2 эквивалентны.

3. Пространства \tilde{H}_2 и H_1 эквивалентны.

4. Найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор \mathcal{Q} , действующий из H_2 на H_2 , такой, что в пространстве H_2 система функций $\{\mathcal{Q}E(\xi, \cdot)\}_{\xi \in \Omega_1}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1 на Ω_1 , т. е. любая функция q из пространства H_2 представляется в виде

$$q(z) = \int_{\Omega_1} (q, \mathcal{Q}E(\xi, \cdot))_{H_2} \mathcal{Q}E(\xi, z) d\mu_1(\xi) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Операторы \mathcal{S} и \mathcal{Q} связаны соотношением

$$\mathcal{S} = \mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{Q} \circ \mathcal{B}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Докажем, что из условия 1 вытекает условие 2. Если в гильбертовом пространстве H_1 система функций $\{SE(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2 , т. е. любой элемент из пространства H_1 представляется в виде (4.1), то нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \int_{\Omega_2} (f, SE(\cdot, z))_{H_1} SE(\eta, z) d\mu_2(z) = \int_{\Omega_2} (\mathcal{S} \circ \mathcal{S}f, E(\cdot, z))_{H_1} E(\eta, z) d\mu_2(z) \\ &= \int_{\Omega_2} (f, E(\cdot, z))_{H'_1} E(\eta, z) d\mu_2(z) \quad \forall \eta \in \Omega_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, система функций $\{E(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве H'_1 , которое эквивалентно пространству H_1 , т. е. состоит из тех же функций, что и пространство H_1 ; при этом норма пространства H'_1 эквивалентна норме пространства H_1 и

$$(f_1, f_2)_{H'_1} = (\mathcal{S} \circ \mathcal{S}f_1, f_2)_{H_1} \quad \forall f_1, f_2 \in H_1. \quad (4.4)$$

Пусть $\mathcal{S}_0 \stackrel{def}{=} \mathcal{S} \circ \mathcal{S}$. Поскольку \mathcal{S}_0 — взаимно-однозначный оператор, то равенство (4.4) влечет соотношение $(\mathcal{S}_0^{-1}f_1, f_2)_{H'_1} = (f_1, f_2)_{H_1} \quad \forall f_1, f_2 \in H_1$. В силу аналога равенства Парсеваля для ортоподобных систем разложения (см. [7]) из (4.3), (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_0^{-1}f\|_{H'_1}^2 &= \int_{\Omega_1} |(\mathcal{S}_0^{-1}f, E(\cdot, \tau))_{H'_1}|^2 d\mu_2(\tau) \\ &= \int_{\Omega_1} |(f, E(\cdot, \tau))_{H_1}|^2 d\mu_2(\tau) = \int_{\Omega_1} |\tilde{f}(\tau)|^2 d\mu_2(\tau) \stackrel{ob}{=} \|\tilde{f}\|_{\mu_2}^2 \quad \forall f \in H_1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Очевидно, $\|\mathcal{S}_0^{-1}f\|_{H'_1} \asymp \|f\|_{H'_1}$, $\|f\|_{H'_1} \asymp \|f\|_{H_1}$ и $\|\tilde{f}\|_{\tilde{H}_1} = \|f\|_{H_1}$. Поэтому, в силу равенства (4.5) нормы $\|\cdot\|_{\tilde{H}_1}$ и $\|\cdot\|_{\mu_2}$ эквивалентны. Нетрудно увидеть, что система функций $\{E(t, \cdot)\}_{t \in \Omega_1}$ принадлежит пространству \tilde{H}_1 , и, следовательно, замыкание по норме $\|\cdot\|_{\mu_2}$ системы функций $\{E(t, \cdot)\}_{t \in \Omega_1}$ образует гильбертово пространство H_2 , которое эквивалентно пространству \tilde{H}_1 . Мы доказали, что из условия 1 следует условие 2.

Докажем, что $2 \Rightarrow 3$. Допустим, что выполнено условие 2. Каждому линейному непрерывному функционалу над H_2 , порождаемому функцией $q \in H_2$, поставим в соответствие функцию $\check{q}(t) = (E(t, \cdot), q)_{H_2}$, $t \in \Omega_1$. Совокупность $\{\check{q}, q \in H_2\}$ образует пространство \check{H}_2 со скалярным произведением

$$(\check{q}_1, \check{q}_2)_{\check{H}_2} \stackrel{def}{=} (q_2, q_1)_{H_2} \quad \forall \check{q}_1, \check{q}_2 \in \check{H}_2$$

и нормой $\|\check{q}\|_{\check{H}_2} = \|q\|_{H_2}$, $\check{q} \in \check{H}_2$. Так как пространство H_2 эквивалентно пространству \tilde{H}_1 , то по теореме 1 пространство \check{H}_2 эквивалентно пространству H_1 . Таким образом, из условия 2 следует условие 3. Покажем, что условие 3 влечет условие 4. Так как пространства \check{H}_2 и H_1 эквивалентны, то, применяя рассуждения, подобные приведенным при доказательстве теоремы 2 (доказательство того, что из условия $\tilde{H}_1 \asymp H_2$ вытекает, что система $\{SE(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$ — ортоподобная система разложения в H_1 (см. (3.1), (3.2))), мы доказываем, что найдется оператор \mathcal{Q} , осуществляющий автоморфизм H_2 , такой, что в пространстве H_2 система функций $\{\mathcal{Q}E(t, \cdot)\}_{t \in \Omega_1}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1 .

Докажем соотношение (4.2). Поскольку выполнены условия теоремы 1, мы используем обозначения операторов и доказанные формулы из теоремы 1 (см. также предложение 1).

Из (2.27) вытекает, что

$$K_{H_2}(z, \tau) = \mathcal{Q}_1^{-1} K_{\tilde{H}_1}(z, \tau) = \int_{\Omega_1} \mathcal{Q}_2^{-1} E(\zeta, z) \mathcal{Q}_2^{-1} E(\zeta, \tau) d\mu_1(\zeta) \quad \forall z, \tau \in \Omega_2,$$

$$K_{H_1}(\xi, \eta) = \mathcal{S}_1^{-1} K_{\tilde{H}_2}(\xi, \eta) = \int_{\Omega_2} \mathcal{S}_2 E(\xi, \tau) \mathcal{S}_2 E(\eta, \tau) d\mu_2(\tau) \quad \forall \xi, \eta \in \Omega_1.$$

Здесь, например, оператор \mathcal{Q}_2^{-1} действует на функцию $E(\zeta, z)$, $z \in \Omega_2$, по переменной z . Соответственно оператор \mathcal{S}_2 действует на функцию $E(\xi, \tau)$, $\xi \in \Omega_1$ по переменной ξ . Отсюда, применяя теорему 1 из [9], получаем, что система функций $\{\mathcal{Q}_2^{-1} E(\zeta, \cdot)\}_{\zeta \in \Omega_1}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1 в пространстве H_2 . Также система функций $\{\mathcal{S}_2 E(\cdot, \tau)\}_{\tau \in \Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2 в пространстве H_1 . Таким образом, справедливы равенства $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_2^{-1}$. Поэтому равенство $\mathcal{S}_2 = \mathcal{B}_2^{-1} \circ \mathcal{Q}_2^{-1} \circ \mathcal{B}_2$ (см. предложение 1) означает, что выполнено равенство (4.2). Импликации $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ доказываются аналогично.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aronszajn N.** Theory of reproducing kernels // Transactions of the AMS. 1950. Vol. 68, no. 3. P. 337–404. doi: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7.
2. **Berlinet A., Thomas–Agnan C.** Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics. N Y: Kluwer Acad. Publ., 2001. 355 p. doi: 10.1007/978-1-4419-9096-9.
3. **Bargmann V.** On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 1, no. 14. С. 187–214. doi: 10.1002/cpa.3160140303.
4. **Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.** Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана // Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т. 68, № 1. С. 5–42.
5. **Напалков В.В. (мл.), Юлмухаметов Р.С.** Весовые преобразования Фурье — Лапласа аналитических функционалов в круге // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 11. С. 139–144.
6. **Напалков В.В. (мл.), Юлмухаметов Р.С.** О преобразовании Гильберта в пространстве Бергмана // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 1. С. 68–78.
7. **Лукашенко Т.П.** О свойствах систем разложения подобных ортогональным // Изв. РАН. Сер. математическая. 1998. Т. 62, № 5. С. 187–206.
8. **Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.** Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1977. 616 с.
9. **Напалков В.В. (мл.)** Ортоподобные системы разложения в пространствах с воспроизводящим ядром // Уфим. мат. журн. 2013. Т. 5, № 4. С. 91–104.
10. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. Москва: ИЛ, 1962. 896 с.
11. **Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. Москва: Мир. 1979. 588 с.
12. **Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.)** Об изоморфизме гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 6. С. 665–667.

Поступила 5.02.2020

После доработки 13.05.2020

Принята к публикации 18.05.2020

Напалков Валентин Васильевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН, главный науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа
e-mail: vnarp@matem.anrb.ru

Напалков Валерий Валентинович
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа
e-mail: vnarp@mail.ru

REFERENCES

1. Aronszajn N. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the AMS*, 1950, vol. 68, no. 3, pp. 337–404. doi: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7.
2. Berliet A., Thomas–Agnan C. *Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics*. N Y: Kluwer Acad. Publ., 2001, 355 p. doi: 10.1007/978-1-4419-9096-9.
3. Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1961, vol. 1, no. 14, pp. 187–214.
4. Isaev K.P., Yulmukhametov R.S. Laplace transforms of functionals on Bergman spaces. *Izv. Math.*, 2004, vol. 68, no. 1, pp. 3–41. doi: 10.1070/IM2004v068n01ABEH000465.
5. Napalkov (Jr.) V.V., Yulmukhametov R.S. Weighted Fourier–Laplace transforms of analytic functionals on the disk. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1994, vol. 77, no. 2, pp. 385–390. doi: 10.1070/SM1994v077n02ABEH003447.
6. Napalkov (Jr.) V.V., Yulmukhametov R.S. On the Hilbert Transform in Bergman Space. *Math. Notes*, 2001, vol. 70, no. 1, pp. 61–70. doi: 10.1023/A:1010221901553.
7. Lukashenko T. P. Properties of expansion systems similar to orthogonal ones. *Izvestiya: Mathematics*, 1998, vol. 62, no. 5, pp. 1035–1054. doi: 10.1070/IM1998v062n05ABEH000215.
8. Bogoliubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., Todorov I.T. *General Principles of Quantum Field Theory*. Dordrecht [Holland]; Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990. ISBN: 0-7923-0540-X. Original Russian text published in Bogolyubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., Todorov I.T. *Obshchie printsipy kvantovoi teorii polya*. Moscow: Nauka Publ., 1977, 616 p.
9. Napalkov (Jr.) V.V. Orthosimilar expansion systems in space with reproducing kernel. *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 88–100. doi: 10.13108/2013-5-4-88.
10. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear Operators. I. General Theory*. N Y: Interscience Publ., 1958, 858 p. ISBN: 0470226056. Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya*. Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962, 896 p.
11. Riesz F., Sz.-Nagy B. *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Budapest: Akademiai Kiado, 1972. Translated to Russian under the title *Lektsii po funktsional'nomu analizu*. Moscow: Mir Publ., 1979, 588 p.
12. Napalkov V.V., Napalkov (Jr.) V.V. On isomorphism of reproducing kernel Hilbert spaces. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 95, no. 3, pp. 270–272. doi: 10.1134/S1064562417030243.

Received February 5, 2020

Revised May 13, 2020

Accepted May 18, 2020

Valentin Vasilievich Napalkov. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, 450077 Russia, e-mail: napalkov@matem.anrb.ru.

Valerii Valentinovich Napalkov Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, 450077 Russia, e-mail: vnap@mail.ru.

Cite this article as: V. V. Napalkov, V. V. Napalkov, Jr. On the equivalence of reproducing kernel Hilbert spaces connected by a special transform. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 200–215.

УДК 519.65

О СВЯЗИ МЕЖДУ ВТОРОЙ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТЬЮ И ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

С. И. Новиков, В. Т. Шевалдин

В работе сформулирована общая задача экстремальной функциональной интерполяции (для конечных разностей это задача Яненко — Стечкина — Субботина) действительных функций, имеющих почти всюду n -ю производную на оси \mathbb{R} . Требуется найти наименьшее значение этой производной в равномерной норме на классе функций, интерполирующих любую заданную последовательность $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ действительных чисел на произвольной, бесконечной в обе стороны сетке узлов $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для класса последовательностей Y , у которых все разделенные разности n -го порядка на такой сетке узлов ограничены сверху по модулю фиксированным положительным числом. В данной работе эта задача решается в случае $n = 2$. Для величины второй производной по схеме Ю. Н. Субботина получены оценки снизу и сверху, которые совпадают между собой для геометрической сетки узлов вида $\Delta_p = \{p^k h\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ($h > 0$, $p \geq 1$). Оценки получены в терминах отношений соседних шагов сетки и интерполируемых значений.

Ключевые слова: интерполяция, разделенная разность, сплайны, производные.

S. I. Novikov, V. T. Shevaldin. On the connection between the second divided difference and the second derivative.

We formulate the general problem of the extremal interpolation of real-valued functions with the n th derivative defined almost everywhere on the axis \mathbb{R} (for finite differences, this is the Yanenko–Stechkin–Subbotin problem). It is required to find the smallest value of this derivative in the uniform norm on the class of functions interpolating any given sequence $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ of real numbers on an arbitrary, infinite in both directions node grid $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ for a class of sequences Y such that the moduli of their n th-order divided differences on this node grid are upper bounded by a fixed positive number. We solve this problem in the case $n = 2$. For the value of the second derivative according to Yu. N. Subbotin’s scheme, we derive upper and lower estimates, which coincide for a geometric node grid of the form $\Delta_p = \{p^k h\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ($h > 0$, $p \geq 1$). The estimates are derived in terms of the ratios of neighboring steps of the grid and interpolated values.

Keywords: interpolation, divided difference, splines, derivatives.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-216-224

Введение. Постановка задачи

Пусть n — произвольное натуральное число и на оси \mathbb{R} задана бесконечная в обе стороны сетка узлов $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ вида

$$a < \dots < x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < \dots < b,$$

где $a = \inf_k x_k$, $b = \sup_k x_k$. Здесь a может быть числом или $a = -\infty$, и аналогично b также может быть числом или $b = +\infty$.

Рассмотрим действительную функцию $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть $f(x_k) = y_k$ ($k \in \mathbb{Z}$), где $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — произвольная последовательность действительных чисел. Как обычно, разделенная разность порядка n на сетке Δ определяется при помощи равенств

$$f[x_{k+1}, x_k] = [y_{k+1}, y_k] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k},$$

$$f[x_{k+2}, x_{k+1}, x_k] = [y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = \frac{[y_{k+2}, y_{k+1}] - [y_{k+1}, y_k]}{x_{k+2} - x_k},$$

... ..

$$f[x_{k+n}, x_{k+n-1}, \dots, x_{k+1}, x_k] = [y_{k+n}, y_{k+n-1}, \dots, y_{k+1}, y_k] = \frac{[y_{k+n}, \dots, y_{k+1}] - [y_{k+n-1}, \dots, y_k]}{x_{k+n} - x_k}.$$

Определим класс последовательностей

$$Y = \{y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty} : \sup_k |[y_{k+n}, y_{k+n-1}, \dots, y_{k+1}, y_k]| \leq 1\}$$

и класс интерполирующих функций

$$F = F(y) = \{f : f^{(n-1)} \in AC, f^{(n)} \in L_{\infty}(a; b), f(x_k) = y_k \quad (k \in \mathbb{Z})\}.$$

Здесь, как обычно, AC — класс локально абсолютно непрерывных функций и $L_{\infty} = L_{\infty}(a; b)$ — класс функций, существенно ограниченных на $(a; b)$ с обычным определением нормы

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_{L_{\infty}(a; b)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in (a; b)} |f(x)|.$$

Задача экстремальной функциональной интерполяции заключается в точном нахождении величины

$$A_n = A_n(\Delta) = \sup_{y \in Y} \inf_{f \in F(y)} \|f^{(n)}\|_{\infty}. \tag{0.1}$$

Эту задачу можно считать обратной к следующему известному свойству разделенных разностей: если n -я производная некоторой действительной функции $f(x)$ ограничена сверху по модулю для всех $x \in (a; b)$ некоторой положительной константой M , то абсолютная величина соответствующей разделенной разности n -го порядка на любой сетке узлов Δ из промежутка $(a; b)$ не превосходит числа $M/(n!)$ (см., например, [1, гл. 1, с. 40]).

Для конечных разностей n -го порядка (т. е. в случае $h_k = x_{k+1} - x_k = h > 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$) эта задача возникла в начале 1960-х годов в исследованиях академика Н. Н. Яненко, а именно, в задачах вычислительной математики при замене дифференциальных операторов разностными. При этом экстремальную постановку в форме (0.1) предложил С. Б. Стечкин, а полностью исследовал задачу Ю. Н. Субботин в пространствах $L_{\infty}(\mathbb{R})$ и $L_q(\mathbb{R})$ ($1 \leq q < \infty$) в работах [2–4]. Все ссылки и многочисленные обобщения и применения в различных направлениях содержатся в недавней обзорной статье (Субботин Ю. Н., Новиков С. И., Шевалдин В. Т. Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225). Отметим также, что оценки производных интерполирующих функций через разделенные разности интерполируемых значений можно найти в работе [5] и приведенной в ней литературе. Однако, рассмотренная там задача отличается от изучаемой в настоящей работе.

В данной работе мы изучаем задачу (0.1) для произвольной сетки Δ , а также для класса геометрических сеток Δ_p вида

$$\frac{h_{k+1}}{h_k} = p, \quad h_k = x_{k+1} - x_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad p \geq 1. \tag{0.2}$$

При $p = 1$ (т. е. для равномерной сетки узлов интерполяции) величину (0.1) при любом натуральном n вычислил Ю. Н. Субботин [2] в 1965 г., в частности, он доказал равенства $A_2(\Delta_1) = 4$, $A_3(\Delta_1) = 18$. Ю. Н. Субботин [2–4] предложил оригинальный метод решения подобных задач, в котором при оценке сверху величины A_n естественным образом возникали полиномиальные сплайны и их обобщения. В свою очередь, его метод нахождения оценки снизу величины (0.1) дал способ построения узлов этих сплайнов (при фиксированных узлах интерполяции $\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$).

Настоящая работа посвящена случаю $n = 2$. Основными результатами являются следующие утверждения.

Теорема 1. Для любой сетки узлов Δ имеет место двойное неравенство

$$A \leq A_2(\Delta) \leq B,$$

где

$$A = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4N} \sum_{k=-N+1}^N \frac{1}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\right)} \left(\frac{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}} + \frac{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}} \right) \right]^{-1},$$

$$B = 2 \left[\inf_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{2\left(1 + \frac{h_k}{h_{k+1}}\right)}{\left(\frac{h_k}{h_{k+1}} + 2 + \frac{h_{k+2}}{h_{k+1}}\right)^2} - \frac{2\left(1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\right)}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\right)^2} \right) \right]^{-1}.$$

З а м е ч а н и е 1. Числа A и B удовлетворяют неравенствам $A \geq 2$, $B \leq 18$.

Теорема 2. Для класса сеток Δ_p ($p \geq 1$) имеет место равенство

$$A_2(\Delta_p) = A = B = \frac{2(p+1)^2}{p^2+1}.$$

З а м е ч а н и е 2. Функция $A_2(\Delta_p)$ убывает по параметру p ($1 \leq p \leq \infty$) от $A_2(\Delta_1) = 4$ до $A_2(\Delta_\infty) = 2$.

Первый раздел данной статьи имеет вспомогательный характер. В нем приведено представление разделенной разности второго порядка в виде суммы интегралов. В разд. 2 найдена оценка снизу величины $A_2(\Delta)$ в теореме 1, в разд. 3 установлена соответствующая оценка сверху. Завершающий раздел работы посвящен доказательству теоремы 2 и замечаний 1 и 2. Они являются следствиями основной теоремы 1.

1. Формула для разделенной разности второго порядка

Пусть $n = 2$ и $y \in Y$. Функцию $f \in F(y)$ с помощью формулы Тейлора запишем в виде

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \int_{x_k}^x (x - t)f''(t) dt \quad (x \in (a; b)).$$

Из этой формулы имеем

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)h_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t)f''(t) dt,$$

$$f(x_{k+2}) = f(x_k) + f'(x_k)(h_{k+1} + h_k) + \int_{x_k}^{x_{k+2}} (x_{k+2} - t)f''(t) dt,$$

$$\begin{aligned} f[x_{k+2}, x_{k+1}, x_k] &= [y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = \frac{f(x_{k+2})}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} - \frac{f(x_{k+1})}{h_{k+1}h_k} + \frac{f(x_k)}{h_k(h_k + h_{k+1})} \\ &= \frac{1}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} \left[f(x_k) + f'(x_k)(h_{k+1} + h_k) + \int_{x_k}^{x_{k+2}} (x_{k+2} - t)f''(t) dt \right] \\ &\quad - \frac{1}{h_k h_{k+1}} \left[f(x_k) + f'(x_k)h_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t)f''(t) dt \right] + \frac{f(x_k)}{h_k(h_k + h_{k+1})} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} \int_{x_k}^{x_{k+2}} (x_{k+2} - t) f''(t) dt - \frac{1}{h_k h_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t) f''(t) dt, \quad (1.1)$$

поскольку все неинтегральные слагаемые взаимно уничтожаются в силу того, что разделенная разность второго порядка обращается в нуль на линейных функциях. Из (1.1) получаем

$$[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = \frac{1}{h_k + h_{k+1}} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{x_{k+2} - t}{h_{k+1}} f''(t) dt + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{t - x_k}{h_k} f''(t) dt \right). \quad (1.2)$$

2. Оценка снизу величины $A_2(\Delta)$

Для получения оценки снизу величины $A_2(\Delta)$ рассмотрим произвольную последовательность $y^* = \{y_k^*\}_{k=-\infty}^{\infty} \in Y$, удовлетворяющую условию

$$[y_{k+2}^*, y_{k+1}^*, y_k^*] = (-1)^k \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (2.1)$$

Таких последовательностей бесконечно много. В самом деле, задавая, например, произвольным образом числа y_0^* и y_1^* , из (2.1) последовательно находим остальные члены этой последовательности.

Из (1.2) и (2.1) при $N \geq 2$ получим

$$\begin{aligned} 2N + 1 &= \sum_{k=-N}^N (-1)^k [y_{k+2}^*, y_{k+1}^*, y_k^*] \\ &= \sum_{k=-N}^N \frac{(-1)^k}{h_k + h_{k+1}} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{x_{k+2} - t}{h_{k+1}} f''(t) dt + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{t - x_k}{h_k} f''(t) dt \right) = S_1 + S_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(-1)^N}{h_N + h_{N+1}} \int_{x_{N+1}}^{x_{N+2}} \frac{x_{N+2} - t}{h_{N+1}} f''(t) dt + \frac{(-1)^N}{h_{-N} + h_{-N+1}} \int_{x_{-N}}^{x_{-N+1}} \frac{t - x_{-N}}{h_{-N}} f''(t) dt, \\ S_2 &= \sum_{k=-N+1}^N (-1)^k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{t - x_k}{h_k} \frac{1}{h_k + h_{k+1}} - \frac{x_{k+1} - t}{h_k} \frac{1}{h_{k-1} + h_k} \right) f''(t) dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.3) имеем

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \left[\frac{1}{h_{N+1}(h_N + h_{N+1})} \int_{x_{N+1}}^{x_{N+2}} (x_{N+2} - t) dt + \frac{1}{h_{-N}(h_{-N} + h_{-N+1})} \int_{x_{-N}}^{x_{-N+1}} (t - x_{-N}) dt \right] \\ &\quad \times \sup_{t \in (a; b)} |f''(t)| \leq \sup_{t \in (a; b)} |f''(t)|, \end{aligned} \quad (2.4)$$

поскольку выражение в квадратных скобках в неравенстве (2.4) не превосходит 1. Для оценки величины S_2 рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_k(t) = \frac{t - x_k}{h_k(h_k + h_{k+1})} - \frac{x_{k+1} - t}{h_k(h_{k-1} + h_k)} \quad (t \in [x_k; x_{k+1}]), \quad k = \overline{-N+1, N}. \quad (2.5)$$

Каждая из этих функций линейна по переменной t и имеет единственный нуль

$$t_k = \frac{x_k(h_{k-1} + h_k) + x_{k+1}(h_k + h_{k+1})}{h_{k-1} + 2h_k + h_{k+1}} \quad (2.6)$$

на интервале $(x_k; x_{k+1})$ ($k = \overline{-N+1, N}$). Далее из (2.3) следует, что

$$|S_2| \leq \left[\sum_{k=-N+1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi_k(t)| dt \right] \sup_{t \in (a;b)} |f''(t)|. \quad (2.7)$$

Из (2.5) после несложных вычислений получаем, что выражение в квадратных скобках в равенстве (2.7) равно

$$\sum_{k=-N+1}^N \frac{h_k}{2(h_{k-1} + 2h_k + h_{k+1})} \left(\frac{h_k + h_{k+1}}{h_{k-1} + h_k} + \frac{h_{k-1} + h_k}{h_k + h_{k+1}} \right). \quad (2.8)$$

Таким образом, при любом натуральном числе $N \geq 2$ из (2.2)–(2.8) приходим к оценке

$$\sup_{t \in (a;b)} |f''(x)| \geq \frac{2N+1}{K}, \quad (2.9)$$

где

$$K = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=-N+1}^N \frac{1}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\right)} \left(\frac{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}} + \frac{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}} \right).$$

Устремляя число N к бесконечности, из неравенства (2.9) для величины $A_2(\Delta)$ получаем оценку снизу

$$A_2(\Delta) \geq A = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4N} \sum_{k=-N+1}^N \frac{1}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\right)} \left(\frac{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}} + \frac{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}} \right) \right]^{-1}. \quad (2.10)$$

Интересно заметить, что в выписанной оценке фигурируют только отношения соседних шагов h_k исходной сетки Δ .

3. Оценка сверху величины $A_2(\Delta)$

Покажем, что для любой последовательности $y \in Y$ существует функция f — интерполяционный параболический сплайн с узлами в точках $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ (см. (2.6)), который интерполирует значения последовательности y в точках $\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ (т. е. $f(x_k) = y_k$ ($k \in \mathbb{Z}$)), и для него справедлива оценка

$$A_2(\Delta) \leq B$$

(см. формулировку теоремы 1).

Построим этот параболический сплайн. Равенства (2.6) задают его узлы $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Для любого числа $k \in \mathbb{Z}$ полагаем

$$f''(t) = \begin{cases} Z_k, & x_k \leq t < t_k, \\ Z_{k+1}, & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ Z_{k+2}, & t_{k+1} \leq t < x_{k+2}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Поскольку $f(x_k) = y_k$, то из (1.2) и (3.1) выводим следующее равенство:

$$\begin{aligned} [y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] &= \frac{1}{h_k + h_{k+1}} \left(Z_{k+2} \int_{t_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{x_{k+2} - t}{h_{k+1}} dt + Z_{k+1} \int_{x_{k+1}}^{t_{k+1}} \frac{x_{k+2} - t}{h_{k+1}} dt \right. \\ &\quad \left. + Z_{k+1} \int_{t_k}^{x_{k+1}} \frac{t - x_k}{h_k} dt + Z_k \int_{x_k}^{t_k} \frac{t - x_k}{h_k} dt \right) = \frac{1}{2} (a_k Z_{k+2} + b_k Z_{k+1} + c_k Z_k), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$a_k = \frac{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})}{(h_k + 2h_{k+1} + h_{k+2})^2}, \quad c_k = \frac{h_k(h_k + h_{k+1})}{(h_{k-1} + 2h_k + h_{k+1})^2}, \quad b_k = 1 - a_k - c_k. \quad (3.3)$$

Лемма 1. При любом $k \in \mathbb{Z}$ имеют место неравенства

$$0 < a_k < \frac{1}{4}, \quad 0 < c_k < \frac{1}{4}, \quad a_k + c_k < \frac{4}{9}.$$

Доказательство. Первые два неравенства легко следуют из (3.3). Для доказательства третьего неравенства обозначим

$$\frac{h_k}{h_{k+1}} = a, \quad \frac{h_{k+2}}{h_{k+1}} = b, \quad \frac{h_{k-1}}{h_k} = c.$$

Тогда $a, b, c > 0$ и

$$a_k + c_k = \frac{a+1}{(a+2+b)^2} + \frac{1+1/a}{(c+2+1/a)^2} < \frac{a+1}{(a+2)^2} + \frac{a(a+1)}{(2a+1)^2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что функция

$$g(a) = \frac{a+1}{(a+2)^2} + \frac{a(a+1)}{(2a+1)^2}$$

положительна при $a > 0$ и имеет максимум в точке $a = 1$, причем $g(1) = 4/9$.

Лемма доказана.

Следствие. При любом $k \in \mathbb{Z}$ имеют место следующие неравенства:

$$\frac{5}{9} < b_k < 1, \quad \frac{1}{9} < 1 - 2a_k - 2c_k < 1.$$

Лемма 2. Для любой последовательности $y \in Y$ разностное уравнение (3.2) имеет ограниченное решение, и это решение единственно.

Доказательство. Равенство (3.2) с учетом (3.3) переписываем в виде

$$a_k(Z_{k+1} - Z_{k+2}) + c_k(Z_{k+1} - Z_k) + 2[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = Z_{k+1} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (3.4)$$

Через $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z})$ обозначаем пространство бесконечных в обе стороны ограниченных последовательностей $V = \{v_k\}_{k=-\infty}^\infty$ с нормой $\|V\|_{l_\infty} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |v_k|$. Рассмотрим нелинейный оператор T , который ставит в соответствие произвольной последовательности $Z = \{Z_k\}_{k=-\infty}^\infty \in l_\infty$ последовательность

$$\{a_k(Z_{k+1} - Z_{k+2}) + c_k(Z_{k+1} - Z_k) + 2[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k]\}_{k=-\infty}^\infty \in l_\infty.$$

В силу леммы 1 и неравенств

$$\begin{aligned} \|TZ^{(1)} - TZ^{(2)}\|_{l_\infty} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| a_k(Z_{k+2}^{(2)} - Z_{k+2}^{(1)}) + a_k(Z_{k+1}^{(1)} - Z_{k+1}^{(2)}) \right. \\ &\quad \left. + c_k(Z_k^{(2)} - Z_k^{(1)}) + c_k(Z_{k+1}^{(1)} - Z_{k+1}^{(2)}) \right| \leq 2(a_k + c_k) \|Z^{(1)} - Z^{(2)}\|_{l_\infty} < \frac{8}{9} \|Z^{(1)} - Z^{(2)}\|_{l_\infty} \end{aligned}$$

этот оператор является сжимающим оператором в полном метрическом пространстве l_∞ с константой сжатия $8/9 < 1$. Здесь $Z^{(1)} = \{Z_k^{(1)}\}_{k=-\infty}^\infty$ и $Z^{(2)} = \{Z_k^{(2)}\}_{k=-\infty}^\infty$. Поэтому согласно известной теореме о сжимающем операторе уравнение $TZ = Z$ (т.е. разностное уравнение (3.4)) имеет решение, и это решение единственно.

Лемма доказана.

Лемма 3. Для решения разностного уравнения (3.2) справедлива следующая оценка:

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |Z_k| \leq \frac{2}{\inf_{k \in \mathbb{Z}} (1 - 2a_k - 2c_k)}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Пусть $Z = \{Z_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — ограниченное решение разностного уравнения (3.2), существование и единственность которого доказаны в лемме 2.

Обозначим левую часть неравенства (3.5) через α , а правую — через γ , α и γ — положительные числа, и нам требуется установить неравенство

$$\alpha \leq \gamma.$$

Будем рассуждать от противного. Пусть $\alpha > \gamma$. Тогда существует положительное число β такое, что $\alpha > \gamma + \beta$ (например, можно взять $\beta = 1/2(\alpha - \gamma)$). Поскольку $\alpha = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |Z_k|$, то для любого числа $k \in \mathbb{Z}$ имеет место неравенство $|Z_k| \leq \alpha$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число m , что

$$\alpha - \varepsilon < |Z_{m+1}| \leq \alpha.$$

Не ограничивая общности, далее будем считать, что $Z_{m+1} > 0$ и поэтому $\alpha - \varepsilon < Z_{m+1} \leq \alpha$. Оценим величину

$$D_m = |a_m Z_{m+2} + b_m Z_{m+1} + c_m Z_m|$$

сверху и снизу и придем тем самым к противоречию.

Поскольку $y \in Y$, то

$$D_m = 2|[y_{m+2}, y_{m+1}, y_m]| \leq 2. \quad (3.6)$$

С другой стороны,

$$D_m \geq |b_m Z_{m+1} - |a_m Z_{m+2} + c_m Z_m||. \quad (3.7)$$

Рассмотрим выражение, стоящее под знаком внешнего модуля в правой части (3.7). Имеем

$$\begin{aligned} b_m Z_{m+1} - |a_m Z_{m+2} + c_m Z_m| &> b_m(\alpha - \varepsilon) - (a_m + c_m)\alpha = \alpha(b_m - a_m - c_m) - b_m \varepsilon \\ &> (\gamma + \beta)(b_m - a_m - c_m) - b_m \varepsilon = \gamma(b_m - a_m - c_m) + \beta(b_m - a_m - c_m) - b_m \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В силу определения числа γ имеем

$$\gamma(b_m - a_m - c_m) = \gamma(1 - 2a_m - 2c_m) \geq 2.$$

Далее в силу леммы 1 и следствия из нее получаем

$$\beta(b_m - a_m - c_m) - b_m \varepsilon > \frac{\beta}{9} - \varepsilon,$$

а затем из (3.7) и (3.8) выводим неравенство

$$D_m > 2 + \frac{\beta}{9} - \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число и $m = m(\varepsilon)$. Устремляем число ε к нулю и получаем, что для некоторого числа $m \in \mathbb{Z}$ имеет место неравенство $D_m > 2$, что противоречит (3.6).

Лемма доказана.

Из леммы 3 следует оценка сверху для $A_2(\Delta)$ в теореме 1

$$A_2(\Delta) \leq B = 2 \left[\inf_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{2(1 + \frac{h_k}{h_{k+1}})}{(\frac{h_k}{h_{k+1}} + 2 + \frac{h_{k+2}}{h_{k+1}})^2} - \frac{2(1 + \frac{h_{k+1}}{h_k})}{(\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k})^2} \right) \right]^{-1}.$$

Оценка снизу для $A_2(\Delta)$ (см. (2.10)) получена в предыдущем разделе.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2 и замечаний 1, 2

Для геометрических сеток Δ_p , удовлетворяющих условию $\frac{h_{k+1}}{h_k} = p$ ($k \in \mathbb{Z}$), $p \geq 1$, величины

$$\alpha_k = \frac{1}{\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k}} \left(\frac{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}} + \frac{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}} \right),$$

$$\beta_k = 1 - \frac{2\left(1 + \frac{h_k}{h_{k+1}}\right)}{\left(\frac{h_k}{h_{k+1}} + 2 + \frac{h_{k+2}}{h_{k+1}}\right)^2} - \frac{2\left(1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\right)}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\right)^2} \quad (4.1)$$

не зависят от k , и нетрудно убедиться в том, что

$$A = B = \frac{2(p+1)^2}{p^2+1} \quad (p \geq 1).$$

Отсюда следует справедливость теоремы 2 и замечания к ней. \square

Лемма 4. *Имеют место равенства*

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k = 1, \quad \inf_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k = \frac{1}{9}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{x+y} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right),$$

где

$$x = 1 + \frac{h_{k-1}}{h_k} \geq 1 \quad \text{и} \quad y = 1 + \frac{h_{k+1}}{h_k} \geq 1.$$

Эта функция от переменной x при фиксированном значении $y \geq 1$ имеет на полуоси $[1; +\infty)$ единственную точку минимума $x_0 = y + y\sqrt{2}$. Кроме того, $\varphi(1, y) = \frac{1+y^2}{y+y^2} \leq 1$ и $\varphi(1, \infty) = 1/y$. Отсюда следует, что $\sup_{x, y \geq 1} \varphi(x, y) = 1$, и поэтому из (4.1) получаем, что

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k = 1.$$

Второе равенство леммы 4 следует из доказательства леммы 1 и следствия из нее.

Лемма доказана.

Из леммы 4 получаем, что $A \geq 2$ и $B \leq 18$, и тем самым замечание 1 доказано. \square

Заключение

Было бы интересно найти все сетки Δ , для которых совпадают величины A и B , фигурирующие в теореме 1 в оценках снизу и сверху минимального значения второй производной в задаче (0.1) экстремальной функциональной интерполяции при $n = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 376 с.
2. Субботин Ю.Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
3. Субботин Ю.Н. Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n -й производной // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.

4. **Субботин Ю.Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.
5. **Kunkle Th.** Favard's interpolation problem in one or more variables // *Constructive Approxim.* 2002. Vol. 18. P. 467–478. doi:10.1007/s00365-001-0015-7.

Поступила 25.03.2020

После доработки 5.05.2020

Принята к публикации 11.05.2020

Новиков Сергей Игоревич

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Шевалдин Валерий Трифонович

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Gel'fond A.O. *Calculus of finite differences*. Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1971, Ser. International Monographs on Advanced Mathematics and Physics, 451 p. Original Russian text published in Gel'fond A.O. *Ischislenie konechnykh raznostei*. Moscow: Nauka Publ., 1967. 376 p.
2. Subbotin Yu.N. On the connection between finite differences and corresponding derivatives. *Proc. Steklov Institute Math.*, 1965, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).
3. Subbotin Yu.N. Functional interpolation in the mean with smallest n derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 88, pp. 31–63.
4. Subbotin Yu.N. Extremal problems of functional interpolation, and mean interpolation splines. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 127–185.
5. Kunkle Th. Favard's interpolation problem in one or more variables. *Constructive Approxim.* 2002, vol. 18, pp. 467–478. doi: 10.1007/s00365-001-0015-7.

Received March 25, 2020

Revised May 5, 2020

Accepted May 11, 2020

Sergey Igorevich Novikov, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru .

Valerii Trifonovich Shevaldin, Dr.Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

Cite this article as: S. I. Novikov, V. T. Shevaldin. On the connection between the second divided difference and the second derivative. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 216–224 .

УДК 517.977

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАЛОВЫСОТНЫМ ПОЛЕТОМ
В РЕЖИМЕ СЛЕДОВАНИЯ РЕЛЬЕФУ МЕСТНОСТИ****А. В. Паршиков**

При полете в режиме огибания рельефа, как правило, важной задачей является минимизация отклонения высоты полета летательного аппарата от заданной высоты. В работе описывается класс оптимальных управлений для задачи “чистого” огибания рельефа. Рассматривается модель управляемого полета в вертикальной плоскости, в которой управлением является угол отклонения руля высоты. При этом функции аэродинамических моментов и сил являются линейными по управлению и непрерывными по всем фазовым переменным. Летательный аппарат рассматривается как абсолютно твердое тело. Исходя из указанных предположений доказывается, что оптимальное управление является функцией, принимающей два крайних значения. Указанный класс управлений используется в численных экспериментах. При расчетах используется модель полета на дозвуковых скоростях в плотных слоях атмосферы. На примере конкретной модели летательного аппарата сравнивается эффективность двух алгоритмов управления, описываемых кусочно-постоянной и непрерывной функциями.

Ключевые слова: задача огибания рельефа, задача следования рельефу, полет в вертикальной плоскости, оптимальное управление летательным аппаратом.

A. V. Parshikov. Optimal control of a low-altitude flight in the terrain-following mode.

In a terrain-following flight, it is important to minimize the deviation of the aircraft altitude from a given height function. The paper describes a class of optimal controls for the pure terrain-following problem. We consider a model of a controlled flight in a vertical plane, where the control is the elevator angle. The functions of the aerodynamic moments and forces are linear in the control and continuous in all phase variables. The aircraft is regarded as a rigid body. Based on these assumptions, it is proved that an optimal control is a function taking two extreme values. The specified class of controls is used in numerical experiments. In calculations we use a model of flight at subsonic speeds in dense layers of the atmosphere. Using a specific aircraft model as an example, we compare the efficiency of two control algorithms described by a piecewise constant function and a continuous function.

Keywords: terrain-following problem, pure terrain-following problem, flight in a vertical plane, optimal control of an aircraft.

MSC: 70E15, 70Q05, 49K15, 49K30

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-225-237

Введение

Возможности современных бортовых вычислительных устройств таковы, что необходимо создавать алгоритмы управления, минимизирующие вероятность обнаружения летательного аппарата (ЛА) при полете на малых высотах. Также при этом должно выполняться такое обязательное условие безопасности полета, как предотвращение столкновения с рельефом. Одним из возможных решений задачи является отслеживание заранее вычисленной функции высоты, которая описывает некоторую идеальную траекторию движения.

Условия задачи могут варьироваться в зависимости от целей исследования. К примеру, помимо управления с помощью рулей может вводиться управление режимом работы двигателя [1]. Кроме того, в некоторых работах также учитываются ветровые возмущения или ставится задача выработки оптимальной траектории не только по высоте, но и в горизонтальной плоскости [2].

Целями данной статьи являются, во-первых, исследование структуры оптимального управления в задаче “чистого” огибания рельефа местности (pure terrain-following problem [1]) и, во-вторых, сравнительный анализ эффективности кусочно-постоянного и непрерывного управлений рулем высоты летательного аппарата с помощью численного эксперимента.

1. Условия задачи

В данной работе используется модель плоской невращающейся Земли, т. е. угловая скорость вращения Земли равна нулю и радиус Земли равен бесконечности. В качестве модели атмосферы применяется стандартная атмосфера (СА) [3]. Атмосферные движения отсутствуют. При моделировании полет ЛА ограничен высотами от -200 м до 5000 м над уровнем моря.

В качестве модели летательного аппарата рассматривается абсолютно твердое тело постоянной массы, которое является осесимметричным в аэродинамическом и динамическом плане, т. е. главные оси инерции совпадают с главными осями связанной системы координат, определяемой через строительную ось ЛА. Угол вектора тяги двигателя относительно строительной оси ЛА $\varphi_P = 0$. Режим работы двигателя постоянен, и тяга зависит от числа Маха и высоты полета: $P = P(M, y)$.

В качестве модели системы навигации используется модель глобальной спутниковой навигации. Запаздывание сигналов в каналах управления и навигации не учитывается и считается, что параметры движения, поступающие из системы навигации, не содержат ошибок.

2. Уравнения движения

Уравнения движения центра масс ЛА в проекциях на оси связанной системы координат можно записать в виде [4]:

$$\begin{cases} m(\dot{v}_x + v_z\omega_y - v_y\omega_z) = R_x + P + G_x, \\ m(\dot{v}_y + v_x\omega_z - v_z\omega_x) = R_y + G_y, \\ m(\dot{v}_z + v_y\omega_x - v_x\omega_y) = R_z + G_z, \end{cases}$$

где m — масса ЛА; $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ и $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ — векторы линейной и угловой скоростей в связанной системе координат соответственно; $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)^T$ — вектор-функция аэродинамической силы; $P = P(M, y) = P(v_x, v_y, y)$ — значение силы тяги двигателя и $\mathbf{G} = (G_x, G_y, G_z)^T$ — сила притяжения Земли. Здесь и далее символ \dot{f} обозначает полную производную по времени функции f , а верхний индекс T есть операция транспонирования. Векторные величины выделяются жирным шрифтом для того, чтобы отличать их от скалярных величин.

Уравнения движения ЛА относительно центра масс в проекциях на оси связанной системы координат имеют вид

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = M_x, \\ I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = M_y, \\ I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y = M_z. \end{cases}$$

Здесь I_x, I_y, I_z — главные моменты инерции ЛА; $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ — вектор-функция момента аэродинамической силы.

Кинематические уравнения движения в земной системе координат могут быть представлены в виде [5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \cos \psi \cos \vartheta + v_y(-\cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma) + v_z(\cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma), \\ \dot{y} = v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta \cos \gamma - v_z \cos \vartheta \sin \gamma, \\ \dot{z} = -v_x \sin \psi \cos \vartheta + v_y(\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma) + v_z(\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} = \omega_x - (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \tan \vartheta, \\ \dot{\psi} = (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \sec \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, \end{cases}$$

где x, y, z — координаты центра масс в земной системе координат, а ϑ, γ, ψ — углы тангажа, крена и рысканья соответственно.

Таким образом, полная система, описывающая движение ЛА, имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = (R_x + P + G_x)/m - v_z \omega_y + v_y \omega_z, \\ \dot{v}_y = (R_y + G_y)/m - v_x \omega_z + v_z \omega_x, \\ \dot{v}_z = (R_z + G_z)/m - v_y \omega_x + v_x \omega_y, \\ \dot{\omega}_x = (M_x - (I_z - I_y)\omega_y \omega_z)/I_x, \\ \dot{\omega}_y = (M_y - (I_x - I_z)\omega_x \omega_z)/I_y, \\ \dot{\omega}_z = (M_z - (I_y - I_x)\omega_x \omega_y)/I_z, \\ \dot{x} = v_x \cos \psi \cos \vartheta + v_y (-\cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma) \\ \quad + v_z (\cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma), \\ \dot{y} = v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta \cos \gamma - v_z \cos \vartheta \sin \gamma, \\ \dot{z} = -v_x \sin \psi \cos \vartheta + v_y (\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma) \\ \quad + v_z (\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} = \omega_x - (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \tan \vartheta, \\ \dot{\psi} = (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \sec \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Аэродинамические силы, действующие по осям связанной системы координат, зависят в том числе от числа Маха M , числа Рейнольдса Re , углов атаки $\alpha = \alpha(\mathbf{v}, \vartheta, \gamma, \psi)$ и скольжения $\beta = \beta(\mathbf{v}, \vartheta, \gamma, \psi)$ следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = c_x(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qS, \\ R_y = c_y(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qS, \\ R_z = c_z(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qS. \end{array} \right.$$

Здесь $q = \rho V^2/2 = \rho(y) \cdot (v_x^2 + v_y^2)/2$ — скоростной напор; $\rho(y)$ — плотность воздуха; S — площадь крыльев, c_x, c_y, c_z — коэффициенты аэродинамических сил.

Аэродинамические моменты, действующие по осям связанной системы координат, могут быть представлены в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = m_x(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qS\bar{c}, \\ M_y = m_y(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qS\bar{c}, \\ M_z = m_z(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qSb, \end{array} \right.$$

где \bar{c} — длина главной хорды крыла, b — размах крыльев, а m_x, m_y, m_z — коэффициенты аэродинамических моментов.

Управляющим воздействием является вектор $\boldsymbol{\delta} = (\delta_v, \delta_n, \delta_\psi)^T$, который описывает значение углов отклонения рулей высоты, направления и крена (элеронов) соответственно. В дальнейшем при моделировании полета в вертикальной плоскости в качестве управления используется только угол отклонения руля высоты δ_v .

3. Управление высотой полета в вертикальной плоскости

В данном разделе рассматривается модель полета ЛА в вертикальной плоскости при постоянной массе. Из системы (2.1) выводится следующая система уравнений движения ЛА.

$$\begin{cases} \dot{\omega}_z = M_z(v_x, v_y, \vartheta, \omega_z, \delta_B)/I_z, \\ \dot{v}_x = (R_x(v_x, v_y, \vartheta, \omega_z, \delta_B) + P(v_x, v_y, h) + G_x)/m + v_y\omega_z, \\ \dot{v}_y = (R_y(v_x, v_y, \vartheta, \omega_z, \delta_B) + G_y)/m - v_x\omega_z, \\ \dot{\vartheta} = \omega_z, \\ \dot{x} = v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta, \\ \dot{y} = v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\delta_B \in [\delta_B^{\min}, \delta_B^{\max}]$.

Пусть коэффициенты аэродинамических сил и моментов являются линейными по переменной δ_B :

$$\begin{aligned} c_x(\cdot) &= \bar{c}_x(\cdot) + c'_x(\cdot)\delta_B, \\ c_y(\cdot) &= \bar{c}_y(\cdot) + c'_y(\cdot)\delta_B, \\ m_z(\cdot) &= \bar{m}_z(\cdot) + m'_z(\cdot)\delta_B. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь функции с чертой и со штрихом не зависят от δ_B . Тогда уравнения движения записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_z = (\bar{m}_z q S b)/I_z + \delta_B (m'_z q S b)/I_z, \\ \dot{v}_x = (\bar{c}_x q S + P + G_x)/m + v_y \omega_z + \delta_B (c'_x q S)/m, \\ \dot{v}_y = (\bar{c}_y q S + G_y)/m - v_x \omega_z + \delta_B (c'_y q S)/m, \\ \dot{\vartheta} = \omega_z, \\ \dot{x} = v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta, \\ \dot{y} = v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta. \end{cases} \quad (3.3)$$

В векторной форме система (3.3) представляется в виде

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f} + \mathbf{g}\delta_B, \text{ где}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ \vartheta \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} (\bar{m}_z q S b)/I_z \\ (\bar{c}_x q S + P + G_x)/m + v_y \omega_z \\ (\bar{c}_y q S + G_y)/m - v_x \omega_z \\ \omega_z \\ v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta \\ v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} (m'_z q S b)/I_z \\ (c'_x q S)/m \\ (c'_y q S)/m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

При рассмотрении маловысотного полета в режиме огибания рельефа поиск оптимального управления $\delta_B(\cdot)$ может осуществляться для двух типов задачи: для задачи огибания рельефа (terrain-following problem) и для задачи “чистого” огибания рельефа (pure terrain following (PTF) problem) [2].

Задача огибания рельефа учитывает время прохождения траектории, т. е. содержит в себе задачу быстродействия. Минимизируемый функционал имеет вид

$$I = \eta T + (1 - \eta) \int_0^T (y(t) - F(x(t)))^2 dt, \quad \eta \in (0, 1), \quad T > 0.$$

Функция заданной высоты полета $F(x)$ создается на основе карты высот рельефа, и в данной задаче мы будем считать ее априорно известной. Поэтому можно упростить задачу, сократив множество оптимальных управлений до релейных, используя принцип максимума Понтрягина.

В задаче “чистого” огибания рельефа имеет значение только отклонение высоты полета $y(x)$ от заданной высоты $F(x)$; в этом случае задачу оптимального управления рулем высоты запишем следующим образом:

$$\int_0^T (y(t) - F(x(t)))^2 dt \rightarrow \min_{\delta_b(\cdot)}, \quad T > 0, \quad (3.5)$$

где $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ — скалярные функции координат ситемы (3.1). Это задача с фиксированным временем T и незакрепленным правым концом.

Функция Понтрягина этой задачи имеет вид

$$H = -\Psi_0 \cdot (y - F(x))^2 + \Psi^T(\mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{g}(\mathbf{X})\delta_b), \quad (3.6)$$

где $\Psi(\cdot)$ — n -вектор-функция ($n = 6$) есть решение следующей задачи Коши для сопряженной системы:

$$\dot{\Psi} + (\mathbf{f}_X + \mathbf{g}_X \delta_b)^T \Psi = \mathbf{h} \Psi_0, \quad \Psi(T) = 0. \quad (3.7)$$

Здесь \mathbf{f}_X и \mathbf{g}_X — (6×6) -матрицы, состоящие из частных производных компонент векторов \mathbf{f} и \mathbf{g} соответственно по компонентам фазового вектора $\mathbf{X} = (\omega_z, v_x, v_y, \vartheta, x, y)^T$ (см. (3.4)); \mathbf{h} — 6-вектор, состоящий из частных производных подынтегральной функции $(y - F(x))^2$ по компонентам фазового вектора \mathbf{X} ; \mathbf{q}_X — (6×6) -матрица, состоящая из частных производных компонент вектора \mathbf{q} по компонентам фазового вектора \mathbf{X} .

Анализ принципа максимума Понтрягина [6; 7] для задач с правой частью, линейной по управлению, приводит (см. [8]) к заключению о том, что у оптимальной траектории могут существовать участки, для которых вектор $(\mathbf{X}^T, \Psi^T)^T$ принадлежит особой поверхности. В рассматриваемом случае, как показано в [8, гл. 8], особая поверхность описывается системой

$$\begin{cases} \Psi^T \mathbf{g} = 0, \\ \Psi^T \mathbf{g}_X \dot{\mathbf{X}} + \dot{\Psi}^T \mathbf{g} = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Введем в рассмотрение n -вектор-функцию

$$\mathbf{q} = \mathbf{g}_X \mathbf{f} - \mathbf{f}_X \mathbf{g}.$$

На особой поверхности (3.8) выполняется равенство $\Psi^T \mathbf{g} = 0$, и при условии

$$\Psi^T (\mathbf{q}_X \mathbf{g} - \mathbf{g}_X \mathbf{q}) \neq 0$$

управление (см. [8, гл. 8])

$$\delta_b = -\frac{\Psi^T (\mathbf{q}_X \mathbf{f} - \mathbf{f}_X \mathbf{g})}{\Psi^T (\mathbf{q}_X \mathbf{g} - \mathbf{g}_X \mathbf{q})} \quad (3.9)$$

удерживает вектор $(\mathbf{X}^T, \Psi^T)^T$ на особой поверхности, обеспечивая тем самым необходимое условие стационарности.

Таким образом, применение принципа максимума Понтрягина к задаче (3.5) на траекториях системы (3.1) позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть для системы (3.1) в задаче (3.5) с фиксированным временем и незакрепленным правым концом выполняются следующие условия.

1. Существует измеримое оптимальное управление $\delta_b^*(\cdot)$.
2. Функции M_z, R_x, R_y являются линейными по управлению, а также непрерывными по всем фазовым переменным.
3. Функция $F(x)$ непрерывна вместе со своей производной.

Тогда функция $\delta_B^*(\cdot)$ оптимального управления рулем высоты либо принимает крайние значения δ_B^{\min} , δ_B^{\max} , либо в случае принадлежности вектора $(\mathbf{X}^T, \Psi^T)^T$ особой поверхности (3.8) и выполнения условия $\Psi^T(\mathbf{q}\mathbf{X}\mathbf{g} - \mathbf{g}\mathbf{X}\mathbf{q}) \neq 0$ значения функции оптимального управления вычисляются по формуле (3.9), в которой матрицы \mathbf{f}_X и \mathbf{g}_X и вектор \mathbf{h} имеют следующий вид:

$$\mathbf{f}_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{m}_z}{\partial \omega_z} qSb/I_z & \frac{\partial \bar{m}_z}{\partial v_x} qSb/I_z & \frac{\partial \bar{m}_z}{\partial v_y} qSb/I_z & \frac{\partial \bar{m}_z}{\partial \vartheta} qSb/I_z & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{c}_x}{\partial \omega_z} qS/m + v_y & \frac{\partial(\bar{c}_x qS + P)}{\partial v_x} /m & \frac{\partial(\bar{c}_x qS + P)}{\partial v_y} /m + \omega_z & \frac{\partial(\bar{c}_x qS + G_x)}{\partial \vartheta} /m & 0 & \frac{\partial P}{\partial y} /m \\ \frac{\partial(\bar{c}_y qS)}{\partial \omega_z} /m - v_x & \frac{\partial(\bar{c}_y qS)}{\partial v_x} /m - \omega_z & \frac{\partial(\bar{c}_y qS)}{\partial v_y} /m & \frac{\partial(\bar{c}_y qS + G_y)}{\partial \vartheta} /m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta & -v_y \cos \vartheta - v_x \sin \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta & v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial m'_z}{\partial \omega_z} qSb/I_z & \frac{\partial m'_z}{\partial v_x} qSb/I_z & \frac{\partial m'_z}{\partial v_y} qSb/I_z & \frac{\partial m'_z}{\partial \vartheta} qSb/I_z & 0 & 0 \\ \frac{\partial c'_x}{\partial \omega_z} qS/m & \frac{\partial c'_x}{\partial v_x} qS/m & \frac{\partial c'_x}{\partial v_y} qS/m & \frac{\partial c'_x}{\partial \vartheta} qS/m & 0 & 0 \\ \frac{\partial c'_y}{\partial \omega_z} qS/m & \frac{\partial c'_y}{\partial v_x} qS/m & \frac{\partial c'_y}{\partial v_y} qS/m & \frac{\partial c'_y}{\partial \vartheta} qS/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \cdot (y - F(x)) \frac{dF(x)}{dx} \\ 2 \cdot (y - F(x)) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $(\mathbf{X}^T, \Psi^T)^T$ не принадлежит особой поверхности. Покажем, что Ψ_0 не может равняться нулю. Действительно, пусть $\Psi_0 = 0$. Тогда из-за отсутствия граничных условий на правом конце выполняется [7] условие трансверсальности $\Psi(T) = 0$. Поскольку по условию 1 теоремы существует некоторое оптимальное управление, то, исходя из принципа максимума Понтрягина в задаче со свободным правым концом [6], необходимо, чтобы

$$\forall t \in [0, T] \quad (\Psi_0, \Psi_1(t), \Psi_2(t), \Psi_3(t), \Psi_4(t), \Psi_5(t), \Psi_6(t))^T \neq 0,$$

что противоречит вышесказанному. Таким образом, можем положить $\Psi_0 = 1$, поскольку необходимое условие оптимальности задано с точностью до множителя.

Из принципа максимума следует, что функция Понтрягина (3.6) должна достигать максимума по δ_B в точках, где $\delta_B(t)$ непрерывна. Так как по условию 2 теоремы функции M_z, R_x, R_y линейны по δ_B , то в зависимости от величины $\Psi^T \mathbf{g}$ максимум достигается на одном из концов отрезка $[\delta_B^{\min}, \delta_B^{\max}]$. Следовательно, если $\Psi^T \mathbf{g} \neq 0$, только два возможных значения функции управления удовлетворяют принципу максимума Понтрягина — это значения из множества $\{\delta_B^{\min}, \delta_B^{\max}\}$.

На участках особого управления вектор $(\mathbf{X}^T, \Psi^T)^T$ находится на особой поверхности. Тогда, если $\Psi^T(\mathbf{q}\mathbf{X}\mathbf{g} - \mathbf{g}\mathbf{X}\mathbf{q}) \neq 0$, то управление будет определяться в соответствии с (3.9).

Теорема доказана.

Ввиду полученным теоретическим результатам класс функций для построения алгоритмов оптимального управления сужается. Это приводит к упрощению построения управления с практической точки зрения.

4. Моделирование

В данной работе в качестве модели ЛА используется модель самолета F-4 Phantom [2]. Для данной модели коэффициенты аэродинамических сил записываются в виде

$$\begin{aligned}
 c_x &= -0.0434 + 2.39 \cdot 10^{-3}\alpha + 2.53 \cdot 10^{-5}\beta^2 - 1.07 \cdot 10^{-6}\alpha\beta^2 + 9.5 \cdot 10^{-4}\delta_B \\
 &\quad - 8.5 \cdot 10^{-7}\delta_B\beta^2 + (180\omega_z\bar{c})/(2\pi v)(8.73 \cdot 10^{-3} + 0.001\alpha - 1.75 \cdot 10^{-4}\alpha^2), \\
 c_y &= +0.131 + 0.538\alpha + 4.76 \cdot 10^{-3}\delta_B + 3.3 \cdot 10^{-5}\delta_B\alpha + 7.5 \cdot 10^{-5}\delta_S^2 \\
 &\quad - (180\omega_z\bar{c})/(2\pi v)(-0.111 + 5.17 \cdot 10^{-3}\alpha - 1.1 \cdot 10^{-3}\alpha^2), \\
 c_z &= -0.012\beta + 1.55 \cdot 10^{-3}\delta_H - 8 \cdot 10^{-6}\delta_H\alpha + (180b)/(2\pi v)(2.25 \cdot 10^{-3}\omega_x + 0.0117\omega_y \\
 &\quad - 3.67 \cdot 10^{-4}\omega_y\alpha + 1.75 \cdot 10^{-4}\omega_y\delta_B).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $v = |\mathbf{v}|$, где $|\mathbf{v}|$ есть модуль вектора \mathbf{v} . Для выбранной модели [2] коэффициенты аэродинамических моментов выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 m_x &= -5.98 \cdot 10^{-4}\beta - 2.83 \cdot 10^{-4}\alpha\beta + 1.51 \cdot 10^{-5}\alpha^2\beta - \delta_S(6.1 \cdot 10^{-4} + 2.5 \cdot 10^{-5}\alpha \\
 &\quad - 2.6 \cdot 10^{-6}\alpha^2) - \delta_H(-2.3 \cdot 10^{-4} + 4.5 \cdot 10^{-6}\alpha) + (180b)(2\pi v)(-4.12 \cdot 10^{-3}\omega_x \\
 &\quad - 5.24 \cdot 10^{-4}\omega_x\alpha + 4.36 \cdot 10^{-5}\omega_x\alpha^2 + 4.36 \cdot 10^{-4}\omega_y + 1.05 \cdot 10^{-4}\omega_y\alpha \\
 &\quad + 5.24 \cdot 10^{-5}\omega_y\delta_B), \\
 m_y &= -2.28 \cdot 10^{-3}\beta - 1.79 \cdot 10^{-6}\beta^3 - 1.4 \cdot 10^{-5}\delta_S - 7.0 \cdot 10^{-6}\delta_S\alpha + 9.0 \cdot 10^{-4}\delta_H \\
 &\quad - 4.0 \cdot 10^{-6}\delta_H\alpha - (180b)(2\pi v)(-6.63 \cdot 10^{-5}\omega_x - 1.92 \cdot 10^{-5}\omega_x\alpha \\
 &\quad + 5.06 \cdot 10^{-6}\omega_x\alpha^2 - 6.06 \cdot 10^{-3}\omega_y - 8.73 \cdot 10^{-5}\omega_y\delta_B + 8.7 \cdot 10^{-6}\omega_y\delta_B\alpha); \\
 m_z &= 6.61 \cdot 10^{-3} + 2.67 \cdot 10^{-3}\alpha + 6.48 \cdot 10^{-5}\beta^2 + 2.65 \cdot 10^{-6}\alpha\beta^2 + 6.54 \cdot 10^{-3}\delta_B \\
 &\quad + 8.49 \cdot 10^{-5}\delta_B\alpha - 3.74 \cdot 10^{-6}\delta_B\beta + 3.5 \cdot 10^{-5}\delta_S^2 \\
 &\quad - (180\omega_z\bar{c})(2\pi v)(-0.0473 - 1.57 \cdot 10^{-3}\alpha).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

В данных функциях коэффициентов все угловые аргументы измеряются в градусах, а угловые скорости — в рад/с.

Функции (4.1), (4.2) раскладываются в соответствии с (3.2) на части следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_z &= 6.61 \cdot 10^{-3} + 2.67 \cdot 10^{-3}\alpha - (180\omega_z\bar{c})(2\pi v)(-0.0473 - 1.57 \cdot 10^{-3}\alpha), \\
 \bar{c}_x &= -0.0434 + 2.39 \cdot 10^{-3}\alpha + (180\omega_z\bar{c})/(2\pi v)(8.73 \cdot 10^{-3} + 0.001\alpha - 1.75 \cdot 10^{-4}\alpha^2), \\
 \bar{c}_y &= 0.131 + 0.538\alpha - (180\omega_z\bar{c})/(2\pi v)(-0.111 + 5.17 \cdot 10^{-3}\alpha - 1.1 \cdot 10^{-3}\alpha^2), \\
 m'_z &= 6.54 \cdot 10^{-3} + 8.49 \cdot 10^{-5}\alpha, \\
 c'_x &= 9.5 \cdot 10^{-4}, \\
 c'_y &= 4.76 \cdot 10^{-3} + 3.3 \cdot 10^{-5}\alpha.
 \end{aligned}$$

Тяга силовой установки (в фунтах) выражается как функция от числа Маха и высоты (в десятках тысяч футов)

$$T_{\max}^* = T_{\max}^*(M, y) = 1000 \cdot [1, M, M^2, M^3, M^4] \begin{bmatrix} 30.21 & -0.668 & -6.877 & 1.951 & -0.1512 \\ -33.80 & 3.347 & 18.13 & -5.865 & 0.4757 \\ 100.80 & -77.56 & 5.441 & 2.864 & -0.3355 \\ -78.99 & 101.40 & -30.28 & 3.236 & -0.1089 \\ 18.74 & -31.60 & 12.04 & -1.785 & 0.09417 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{bmatrix}.$$

В численных экспериментах для обеспечения ограничения по числу Маха $M < 0.8$ режим работы двигателя ЛА принимается равным 30%. После перевода в метрическую систему значение тяги (в ньютонах) при указанном режиме может быть представлено в виде

$$P = T_{max}^*(M, \frac{y}{3048}) \cdot 0.45359237 \cdot 9.80665 \cdot 0.3.$$

Параметры ЛА согласно модели F-4 Phantom [2] имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} m &= 19050 \text{ kg}, & \delta_B^{\max} &= -\delta_B^{\min} = 15^\circ, \\ I_x &= 33854.76 \text{ kg} \cdot m^2, & I_y &= 189543.27 \text{ kg} \cdot m^2, & I_z &= 165667.32 \text{ kg} \cdot m^2, \\ S &= 49.2 \text{ m}^2, & l = \bar{c} &= 4.8768 \text{ m}, & L = b &= 11.796 \text{ m}. \end{aligned}$$

Уравнения движения с учетом (4.1), (4.2) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_z &= 6.036 \cdot 10^{-6} (119.969\rho v^2 (-316017(-0.0899544\alpha - 0.0473)\omega_z v \\ &\quad + 0.27871\alpha\delta_B + 0.15298\alpha + 0.374714\delta_B + 0.00661)), \\ \dot{v}_x &= \frac{1}{19050} \left(P(v_x, v_y, y) + 24.6\rho v^2 \left(\frac{8004.8\omega_z}{v} (-0.574491\alpha^2 + 0.0572958\alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 0.00873) + 0.136937\alpha + 0.054431\delta_B - 0.0434 \right) - G \sin \vartheta \right) + \omega_z v_y, \\ \dot{v}_y &= \frac{1}{19050} \left(24.6\rho v^2 \left(-\frac{8004.8\omega_z}{v} (-3.61109\alpha^2 + 0.296219\alpha - 0.111) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 0.108333\alpha\delta_B + 30.8251\alpha + 0.272728\delta_B + 0.131 \right) - G \cos \vartheta \right) - \omega_z v_x, \\ \dot{\vartheta} &= \omega_z, \\ \dot{x} &= v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta, \\ \dot{y} &= v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Функция Понтрягина выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} H &= \Psi_2 \left[\frac{1}{19050} \left(P(v_x, v_y, y) + 24.6\rho v^2 \left(\frac{8004.8\omega_z}{v} (-0.574491\alpha^2 + 0.0572958\alpha + 0.00873) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 0.136937\alpha + 0.054431\delta_B - 0.0434 \right) - G \sin \vartheta \right) + \omega_z v_y \right] \\ &+ \Psi_3 \left[\frac{1}{19050} \left(24.6\rho v^2 \left(-\frac{8004.8\omega_z}{v} (-3.61109\alpha^2 + 0.296219\alpha - 0.111) + 0.108333\alpha\delta_B \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 30.8251\alpha + 0.272728\delta_B + 0.131 \right) - G \cos \vartheta \right) - \omega_z v_x \right] \\ &+ 6.036 \cdot 10^{-6} \Psi_1 \left[119.969\rho v^2 (-316017(-0.0899544\alpha - 0.0473)\omega_z v + 0.27871\alpha\delta_B \right. \\ &\quad \left. + 0.15298\alpha + 0.374714\delta_B + 0.00661) \right] - (y - F(x))^2 + \omega_z \Psi_4 \\ &+ \Psi_5 (v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta) + \Psi_6 (v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Сопряженная система представима в виде

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1 &= -\Psi_2 (10.3369 (-0.574491\alpha^2 + 0.0572958\alpha + 0.00873) \rho V + v_y) \\ &\quad - \Psi_3 (-10.3369 (-3.61109\alpha^2 + 0.296219\alpha - 0.111) \rho V - v_x) \\ &\quad + 228.846 (-0.0899544\alpha - 0.0473) \Psi_1 \rho V^3 - \Psi_4, \\ \dot{\Psi}_2 &= -\frac{1}{19050} \Psi_2 \frac{\partial P}{\partial v_x} + \omega_z \Psi_3 - \Psi_5 \cos \vartheta - \Psi_6 \sin \vartheta, \\ \dot{\Psi}_3 &= -\frac{1}{19050} \Psi_2 \left(\frac{\partial P}{\partial v_y} + \omega_z \right) + \Psi_5 \sin \vartheta - \Psi_6 \cos \vartheta, \\ \dot{\Psi}_4 &= \frac{1}{19050} G \Psi_2 \cos \vartheta - \frac{1}{19050} G \Psi_3 \sin \vartheta - \Psi_5 (-v_x \sin \vartheta - v_y \cos \vartheta) \\ &\quad - \Psi_6 (v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta), \\ \dot{\Psi}_5 &= -2(y - F(x)) F'(x), \\ \dot{\Psi}_6 &= 2(y - F(x)) - \frac{1}{19050} \Psi_2 \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

Функции \mathbf{f} и \mathbf{g} имеют вид

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 6.036 \cdot 10^{-6} (-3.79123 \cdot 10^7 (-0.0899544\alpha - 0.0473)\omega_z \rho v^3 + 18.3529\alpha \rho v^2 + 0.792997\rho v^2) \\ \frac{P}{19050} + 10.3369 (-0.574491\alpha^2 + 0.0572958\alpha + 0.00873) \omega_z \rho v + 0.000176832\alpha \rho v^2 - \frac{G \sin \vartheta}{19050} + \omega_z v_y - 0.0000560441\rho v^2 \\ -10.3369 (-3.61109\alpha^2 + 0.296219\alpha - 0.111) \omega_z \rho v + 0.0398057\alpha \rho v^2 + 0.0398057\alpha \rho v^2 - \frac{G \cos \vartheta}{19050} - \omega_z v_x + 0.000169165\rho v^2 \\ \omega_z \\ v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta \\ v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 6.036 \cdot 10^{-6} (33.4367\alpha \rho v^2 + 44.9542\rho v^2) \\ 0.0000702888\rho v^2 \\ 0.000139894\alpha \rho v^2 + 0.000352184\rho v^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений особой поверхности (3.8) в данном случае определяется системой

$$\left\{ \begin{array}{l} 6.036 \cdot 10^{-6} \Psi_1 (33.4367\alpha \rho v^2 + 44.9542\rho v^2) + 0.0000702888 \Psi_2 \rho v^2 \\ + \Psi_3 (0.000139894\alpha \rho v^2 + 0.000352184\rho v^2) = 0, \\ (0.000139894\alpha \rho v^2 + 0.000352184\rho v^2) \left(-\Psi_2 \left(\frac{1}{19050} \frac{\partial P}{\partial v_y} + \omega_z \right) + \Psi_5 \sin \vartheta - \Psi_6 \cos \vartheta \right) \\ + 0.0000702888 \rho v^2 \left(-\frac{\Psi_2}{19050} \frac{\partial P}{\partial v_x} + \omega_z \Psi_3 - \Psi_5 \cos \vartheta - \Psi_6 \sin \vartheta \right) \\ + 6.036 \cdot 10^{-6} (33.4367\alpha \rho v^2 + 44.9542\rho v^2) \left[-\Psi_2 (10.3369 (-0.574491\alpha^2 + 0.0572958\alpha + 0.00873) \rho v + v_y) \right. \\ \left. - \Psi_3 (-10.3369 (-3.61109\alpha^2 + 0.296219\alpha - 0.111) \rho v - v_x) \right. \\ \left. + 228.846 (-0.0899544\alpha - 0.0473) \Psi_1 \rho v^3 - \Psi_4 \right] = 0. \end{array} \right.$$

В вычислительном эксперименте будем использовать следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} \omega_z(0) &= 0, & \vartheta(0) &= 0, \\ v_x(0) &= 0.5M, & x(0) &= 0, \\ v_y(0) &= 0, & y(0) &= F(x(0)) = 150. \end{aligned}$$

В инженерной практике управления высотой полета часто используется понятие “упрежденного расстояния” D . Этот параметр системы управления определяет, на какой дальности от ЛА берется значение заданной высоты F . С физической точки зрения данный параметр характеризует удаленность впереди лежащей точки прицеливания, которая принадлежит кривой $F(x)$. В данной работе реализуется система управления, которая стремится повернуть строительную ось ЛА к вектору, направленному из центра масс ЛА в точку прицеливания (рис. 1). Кусочно-постоянная функция управления вводится следующим образом (см. рис. 1):

$$\delta_B = -\delta_B^{\max} \text{sign}(\varphi_1), \quad \text{где } \varphi_1 = \arccos \frac{\vec{i} \hat{\mathbf{v}}}{|\hat{\mathbf{v}}|}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \hat{v}_x \\ \hat{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ F(x+D) - y \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

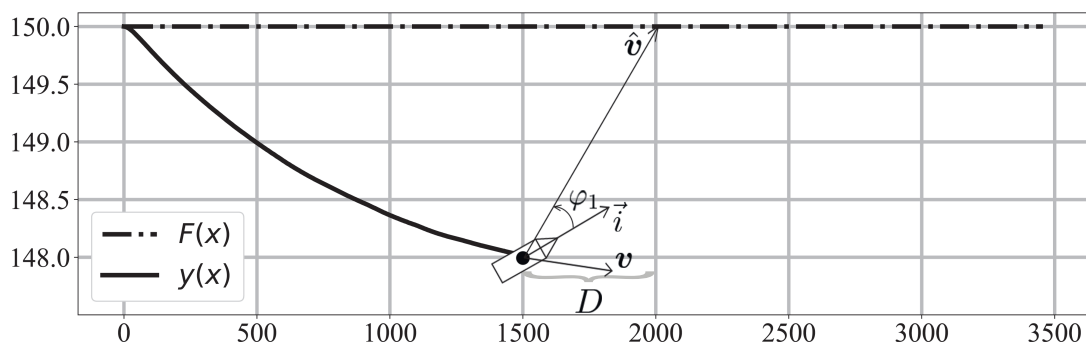


Рис. 1. Векторы, вычисляемые в системе управления.

Здесь \vec{i} — единичный базисный вектор оси Ox связанной системы координат; \hat{v} — направление на график $F(x)$, φ_1 — есть угол между строительной осью ЛА и направлением на график $F(x)$; D — заданный параметр “упрежденное расстояние” системы управления.

В качестве непрерывного аналога кусочно-постоянной функции рассматривается следующая функция:

$$\delta_B = -\delta_B^{\max} \cdot (2\varphi_1)/\pi, \quad -\pi/2 \leq \varphi_1 \leq \pi/2.$$

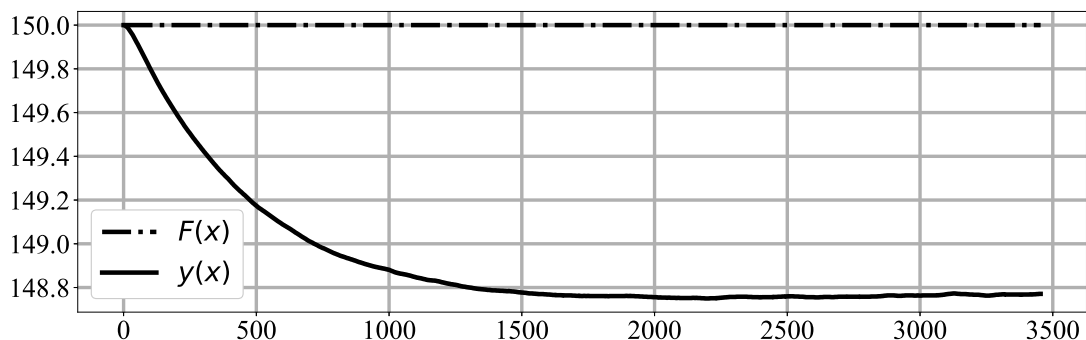
При данном управлении угол отклонения руля высоты может принимать любое значение из отрезка $[-\delta_B^{\max}, \delta_B^{\max}]$.

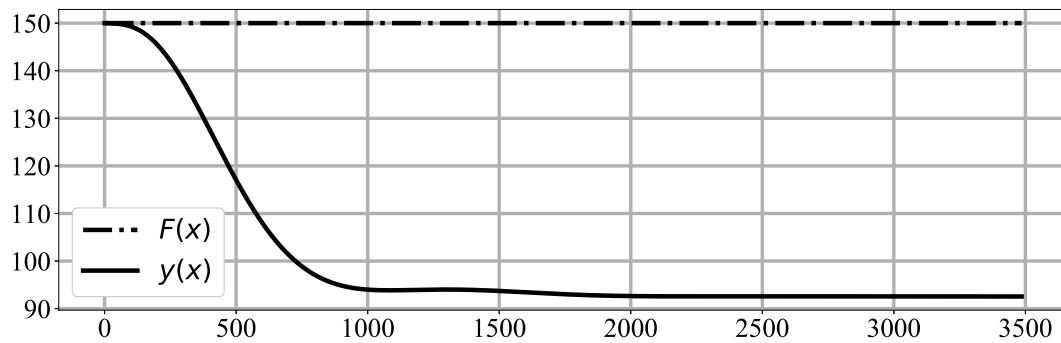
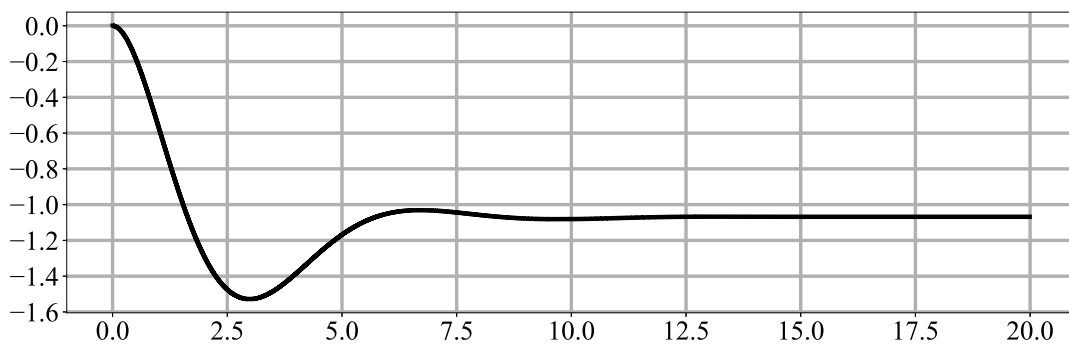
4.1. Результаты моделирования при полете над плоскостью

В данном разделе приведены результаты вычислительного эксперимента со значением “упрежденного расстояния” $D = 500$ м и константной заданной высотой $F(x) = 150$ м. Траектории движения центра масс для кусочно-постоянного и непрерывного управлений показаны на рис. 2 и на рис. 3 соответственно. Как видно из графиков, при полете над плоскостью кусочно-постоянное управление обеспечивает максимальное отклонение высоты полета от $F(x)$ меньше, чем 2 м. Отклонение высоты полета от $F(x)$ при непрерывном управлении достигает 95 м.

Заметим, что кусочно-постоянное управление (4.3) имеет точки переключения почти в каждом шаге интегрирования задачи Коши, в отличие от функции непрерывного управления (рис. 4).

Численное решение сопряженной системы (3.7) показало, что траектория $(\mathbf{X}^T(t), \mathbf{\Psi}^T(t))^T$ не попадает на особую поверхность (3.8) для каждой рассматриваемой функции управления.

Рис. 2. Высота полета при кусочно-постоянном $\delta_B(\cdot)$.


 Рис. 3. Высота полета при непрерывном $\delta_v(\cdot)$.

 Рис. 4. Отклонение руля высоты $\delta_v(t)$ при непрерывном управлении, в градусах.

4.2. Результаты моделирования при полете над препятствием

В данном разделе показаны результаты моделирования полета над препятствием в виде прямоугольника высотой 100 м и протяженностью 20 км. В вычислительном эксперименте в качестве функции заданной высоты используется дискретное приближение гладкой непрерывной функции $F(x)$, график которой изображен на рис. 5, 6 штрихпунктирной линией. Результаты эксперимента показаны для двух значений параметра $D = 500$ м и $D = 1000$ м. Интегрирование производилось на отрезке времени от нуля до $T = 200$ с.

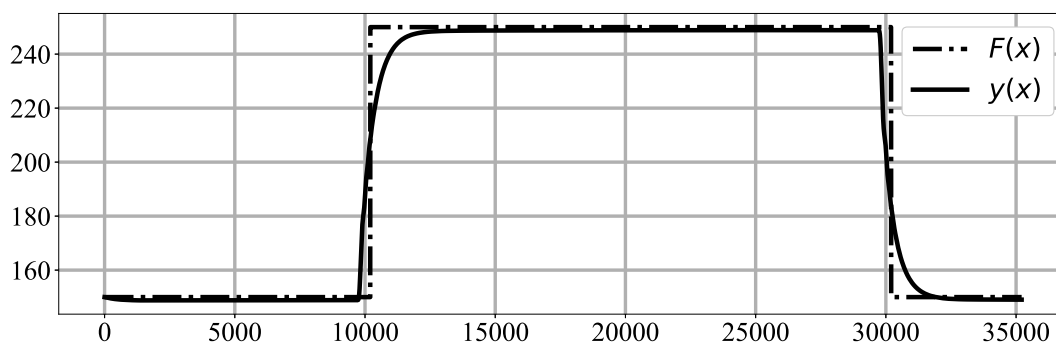
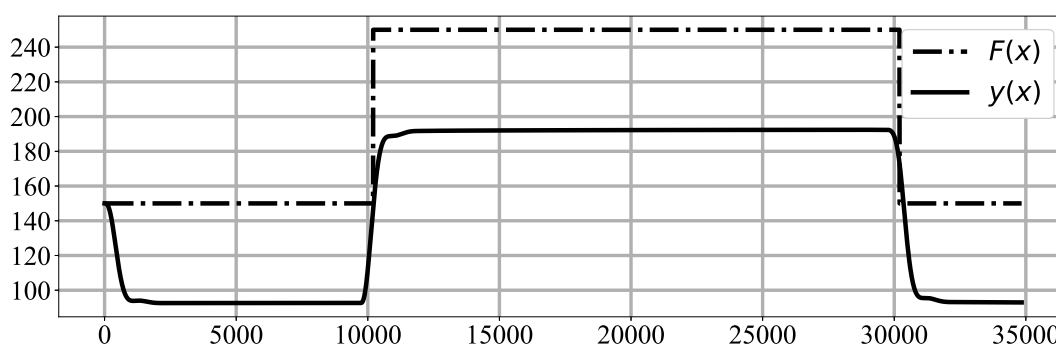
Траектории движения при управлении со значением параметра $D = 500$ м. показаны на рис. 5 и 6 сплошной линией. Кусочно-постоянному управлению соответствует рис. 5, при этом значение функционала (см. (3.5)) $I = 2,27 \cdot 10^6$. Непрерывному управлению соответствует рис. 6, а функционал имеет значение $I = 1,12 \cdot 10^8$.

Вычислительный эксперимент показал, что при увеличении “упрежденного расстояния” качество управления ухудшается. В случае, если параметр $D = 1000$ м, функционал принимает значения $I = 4,85 \cdot 10^6$ при кусочно-постоянном управлении и $I = 4,47 \cdot 10^8$ при непрерывном управлении.

По результатам моделирования можно утверждать, что при указанных условиях эксперимента кусочно-постоянное управление минимизирует функционал на два порядка эффективнее, чем непрерывное.

Заключение

Полученные теоретические результаты позволяют искать оптимальное управление задачи “чистого” огибания рельефа в более узком классе функций. Результаты численных экспери-

Рис. 5. Высота полета при кусочно-постоянном $\delta_B(\cdot)$, $D = 500$ м.Рис. 6. Высота полета при непрерывном $\delta_B(\cdot)$, $D = 500$ м.

ментов показали, что при всей простоте рассматриваемых систем кусочно-постоянное управление обеспечивает требование безопасности полета. Однако оно требует частого переключения. Этот недостаток может быть устранен введением ограничения снизу на длину отрезков постоянства значений $\delta_B(t)$. Непрерывная функция управления допускает большие отклонения от заданной высоты полета, что не может гарантировать выполнение условия безопасности. В совокупности с теоретическими результатами можно заключить, что при последующем совершенствовании алгоритма вычисления кусочно-постоянного управляющего воздействия качество управления можно улучшить.

Автор благодарит своего научного руководителя В.Б. Костоусова за плодотворное обсуждение постановки задачи и результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lu Ping, Pierson Bion.** Optimal aircraft terrain-following analysis and trajectory generation // J. of Guidance, Control, and Dynamics. 1995. Vol. 18. P. 555–560. doi: 10.2514/3.21422.
2. **Williams Paul.** Real-time computation of optimal three-dimensional aircraft trajectories including terrain-following // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit (21–24 August 2006, Keystone, Colorado). No. AIAA-2006-6603. 2006. doi: 10.2514/6.2006-6603.
3. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры, М.: ИПК Издательство стандартов, 2004. 180 с.
4. **Stevens B.L., Lewis F.L., Johnson E.N.** Aircraft control and simulation: Dynamics, controls design, and autonomous systems. Third ed. N Y: Wiley-Blackwell, 2015. 768 p. doi: 10.1002/9781119174882.
5. **Горбатенко С.А., Макашов Э.М., Полушкин Ю.Ф., Шефтель Л.В.** Механика полета (Общие сведения Уравнения движения): Инж. справочник. М.: Машиностроение, 1969. 420 с.
6. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

7. Иoffee А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
8. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Москва: Мир, 1972, 544 с.

Поступила 2.03.2020

После доработки 5.05.2020

Принята к публикации 18.05.2020

Паршиков Андрей Викторович

бакалавр

старший программист

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: a.v.parshikov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lu Ping, Pierson Bion. Optimal aircraft terrain-following analysis and trajectory generation. *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, 1995, vol. 18, pp. 555-560, doi: 10.2514/3.21422.
2. Williams Paul. Real-time computation of optimal three-dimensional aircraft trajectories including terrain-following. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (21–24 August 2006, Keystone, Colorado), no. AIAA-2006-6603. doi: 10.2514/6.2006-6603.
3. Russian Standard GOST 4401-81. *Atmosfera standartnaya. Parametry* [Standard atmosphere. Parameters]. Moscow: IPK Izdatel'stvo standartov, 2004, 180 p.
4. Stevens B.L., Lewis F.L., Johnson E.N. *Aircraft Control and Simulation: Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems*, 3rd ed. N Y: Wiley-Blackwell, 2015, 768 p. DOI: 10.1002/9781119174882.
5. Gorbatenko S.A., Makashov E.M., Polushkin Yu.F., Sheftel L.V. *Mekhanika poleta* [Flight mechanics]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1969, 420 p.
6. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. N Y; London: John Wiley & Sons, 1962, 515 p. doi: 10.1002/zamm.19630431023. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*. Moscow: Nauka Publ., 1983, 392 p.
7. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems*. Ser. Studies in Math. and its Appl., vol. 6. Amsterdam; N Y; Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979, 460 p. ISBN: 0444851674. Original Russian text published in Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*. Moscow: Nauka Publ., 1974, 480 p.
8. Bryson A. E. Jr., Ho Yu-Chi. *Applied optimal control*. Waltham, Mass.: Blaisdell Publ. Comp., 1969, 496 p. Translated to Russian under the title *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya*. Moscow: Mir Publ., 1972, 544 p.

Received March 2, 2020

Revised May 5, 2020

Accepted May 18, 2020

Andrey Victorovich Parshikov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: a.v.parshikov@imm.uran.ru.

Cite this article as: A. V. Parshikov. Optimal control of a low-altitude flight in the terrain-following mode. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 225-237.

УДК 517.5

О ЯВЛЕНИИ ГИББСА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ**А.-Р. К. Рамазанов, А. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова**

В случае функций $f(x)$, непрерывных на данном отрезке $[a, b]$, кроме точек разрыва со скачком исследовано явление Гиббса для рациональных сплайн-функций $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$, определяемых для сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ и набора полюсов $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) равенствами $R_{N,1}(x) = [R_i(x)(x - x_{i-1}) + R_{i-1}(x)(x_i - x)] / (x_i - x_{i-1})$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$); здесь рациональные функции $R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i / (x - g_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) однозначно определяются условиями $R_i(x_j) = f(x_j)$ ($j = i-1, i, i+1$); считаем $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$. Найдены условия на сетки узлов Δ для отсутствия и для наличия явления Гиббса в окрестности точки разрыва.

Ключевые слова: интерполяционный сплайн, рациональный сплайн, явление Гиббса.

A.-R. K. Ramazanov, A. K. Ramazanov, V. G. Magomedova. On the Gibbs phenomenon for rational spline functions.

In the case of functions $f(x)$ continuous on a given closed interval $[a, b]$ except for jump discontinuity points, the Gibbs phenomenon is studied for rational spline functions $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ defined for a knot grid $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ and a family of poles $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) by the equalities $R_{N,1}(x) = [R_i(x)(x - x_{i-1}) + R_{i-1}(x)(x_i - x)] / (x_i - x_{i-1})$ for $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Here the rational functions $R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i / (x - g_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) are uniquely defined by the conditions $R_i(x_j) = f(x_j)$ ($j = i-1, i, i+1$); we assume that $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$. Conditions on the knot grid Δ are found under which the Gibbs phenomenon occurs or does not occur in a neighborhood of a discontinuity point.

Keywords: interpolation spline, rational spline, Gibbs phenomenon.

MSC: 97N50

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-238-251

Введение

Явление Гиббса (см., например, [1, с. 958–959]), обнаруженное как свойство частичных сумм Фурье разрывных со скачком функций, исследовано также для многих других аппаратов приближения функций (см., например, [2, гл. I, § 41; 3; 4] и цитированную в них литературу).

В последние годы продолжают активные исследования явления Гиббса для решения аппроксимационных задач как в математике, так и в других областях науки, например, для подавления эффекта Гиббса при расчетах различных физических полей с граничными условиями, задаваемыми разрывными функциями. Ведется также поиск новых аппаратов приближения функций, для которых нехарактерно явление Гиббса в окрестностях особых точек (см., например, [5–7]).

Переходя к классическим полиномиальным сплайнам, отметим, что они (по терминологии Ю.Н. Субботина [8]) не обладают свойством безусловной сходимости на всем классе $C_{[a,b]}$ непрерывных на $[a, b]$ функций. Поэтому при изучении явления Гиббса для кусочно-непрерывных функций, имеющих изолированные разрывы со скачком, приходится накладывать различные дополнительные ограничения на функцию или на сетку узлов, метрику (см., например, [9, гл. V, § 4; 10; 11; 12]).

Известно также [13], что можно избежать явления Гиббса, например, для кубических сплайнов в окрестности точки разрыва со скачком, если ввести дополнительные узлы сплайнов, не являющиеся узлами интерполяции. Однако это связано с некоторыми осложнениями применения таких сплайнов.

В данной работе для сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам [14; 15] найдены условия наличия и условия отсутствия явления Гиббса для произвольных непрерывных на отрезке функций, исключая изолированные точки разрыва первого рода со скачком.

1. Общая постановка задачи и обозначения

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором отрезке $[a, b]$. Для сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$) положим $h_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), $\Delta_1 = \max\{h_1, h_2\}$, $\Delta_i = \max\{h_{i-1}, h_i, h_{i+1}\}$ ($i = 2, 3, \dots, N-1$), $\Delta_N = \max\{h_{N-1}, h_N\}$, $\|\Delta\| = \max\{h_i | i = 1, 2, \dots, N\}$.

Для сетки Δ и произвольного числа $\lambda > 0$ определим также набор точек $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ таких, что $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$ при $h_{i+1} \leq h_i$ и $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$ при $h_i < h_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$).

Тогда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) однозначно определяется рациональная функция

$$R_i(x) = R_i(x, f) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i} \quad (1.1)$$

по условиям $R_i(x_j) = f(x_j)$ при $j = i-1, i, i+1$. Считаем также, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$.

По рациональным интерполянтам $R_i(x)$ определим сплайн $R_{N,1}(x, f) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ следующей формулой:

$$R_{N,1}(x, f) = R_i(x) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} \quad (1.2)$$

при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$). В работе [14] была доказана принадлежность такого сплайна классу $C_{[a,b]}^{(1)}$.

Вопросы ковыпуклой интерполяции сплайн-функциями $R_{N,1}(x, f)$ рассмотрены в статье 2018 г. (А.-Р.К. Рамазанов, В.Г. Магомедова. Ковыпуклая интерполяция сплайнами по трехточечным рациональным интерполянтам // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 164–175.)

Отметим два свойства сплайнов, определяемых равенствами (1.1) и (1.2).

Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) из (1.1) выражаются через разделенные разности функции $f(x)$ равенствами

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\ \beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i), \\ \gamma_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i). \end{aligned}$$

Поэтому при фиксированной сетке узлов Δ и наборе точек g сплайн $R_{N,1}(x, f)$ представляет собой линейный оператор на классе действительных функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$. Кроме того, и операторы построения интерполянтов, и оператор $R_{N,1}(x, f)$ сохраняют на месте константные функции.

Если при этом через $\omega(\delta, F, [\alpha, \beta])$ обозначить равномерный модуль непрерывности функции $F(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, то в теореме 0.1 из [15] фактически доказано, что для любого $\lambda > 0$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 2, 3, \dots, N-1$) выполняется неравенство

$$|F(x) - R_{N,1}(x, F)| \leq (2 + \max\{1, \lambda\})\omega(\Delta_i, F, [x_{i-2}, x_{i+1}]), \quad (1.3)$$

а при $x \in [x_0, x_1]$ и $x \in [x_{N-1}, x_N]$ в правой части (1.3) вместо модуля непрерывности на $[x_{i-2}, x_{i+1}]$ берутся соответственно значения $\omega(\Delta_1, F, [x_0, x_2])$ и $\omega(\Delta_N, F, [x_{N-2}, x_N])$.

В частности, для любой функции $F \in C_{[a,b]}$ и произвольной сетки узлов Δ для $\lambda = 1$ при всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|F(x) - R_{N,1}(x, F)| \leq 3\omega(\|\Delta\|, F, [a, b]). \quad (1.4)$$

Отсюда получим, что для любой последовательности сеток узлов $\Delta^{(n)}$ с $\|\Delta^{(n)}\| \rightarrow 0$ соответствующая последовательность сплайнов $R_{N_n,1}(x, F, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ сходится к функции $F \in C_{[a,b]}$ равномерно на $[a, b]$.

Эти свойства сплайнов по рациональным интерполянтам позволяют изучить вопрос о явлении Гиббса для них в случае функций, непрерывных на отрезке, исключая изолированные точки разрыва первого рода со скачком.

Действительно, пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$, кроме точек разрыва первого рода $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m \in (a, b)$ со скачками $d_i = f(\tau_i + 0) - f(\tau_i - 0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), причем будем считать, что для всех $x \in (a, b)$ выполняется равенство

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

Обозначим $\psi_i(x) = \text{sign}(x - \tau_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и рассмотрим, как обычно (см., например, [2, гл. I, § 41]), разность

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{2} \psi_i(x),$$

которая является непрерывной функцией на $[a, b]$.

Чтобы исследовать теперь явление Гиббса в окрестности, скажем, точки τ_1 , возьмем внутри отрезка $[a, b]$ окрестность $(\tau_1 - \delta, \tau_1 + \delta)$ этой точки, которая не содержит других точек разрыва и воспользуемся равенством, справедливым в силу линейности оператора $R_{N_n,1}$:

$$R_{N_n,1}(x, f) = \frac{d_1}{2} R_{N_n,1}(x, \psi_1) + \sum_{i=2}^m \frac{d_i}{2} R_{N_n,1}(x, \psi_i) + R_{N_n,1}(x, F).$$

Для функции $F \in C_{[a,b]}$ в силу (1.4) имеет место равномерная сходимость $R_{N_n,1}(x, F)$ к $F(x)$ на $[a, b]$ при $\|\Delta^{(n)}\| \rightarrow 0$. Оператор $R_{N_n,1}$ точен на константах, поэтому при $i = 2, 3, \dots, m$ имеем $R_{N_n,1}(x, \psi_i) \equiv \psi_i(x)$ в окрестности $(\tau_1 - \delta, \tau_1 + \delta)$ для всех n , начиная с некоторого n_1 .

Если $\bar{x} \in [a, b]$ и $\bar{x} \neq \tau_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то возьмем $\delta > 0$ такое, что $E_\delta = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap [a, b]$ не содержит точек разрыва τ_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Тогда для всех n , начиная с некоторого n_0 , и всех $x \in E_\delta$ имеем

$$R_{N_n,1}(x, f) - f(x) = R_{N_n,1}(x, F) - F(x),$$

откуда (в силу равномерной сходимости $R_{N_n,1}(x, F)$ к $F(x)$ на $[a, b]$) следует сходимость $R_{N_n,1}(x, f)$ к $f(x)$ в точке \bar{x} .

Значит, явление Гиббса для функции $f(x)$ в окрестности точки τ_1 определяется функцией $\psi_1(x)$.

Поэтому ниже на данном отрезке $[a, b]$ при некоторой фиксированной точке $t_0 \in (a, b)$ исследуется явление Гиббса для функции $\psi(x) = \text{sign}(x - t_0)$.

Сплайны последовательности $R_{N_n,1}(x, \psi) = R_{N_n,1}(x, \psi, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ определяются в полной аналогии с равенствами (1.1) и (1.2) по последовательностям сеток узлов $\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{N_n}^{(n)} = b$ ($N_n \geq 2$) вместо сетки Δ и наборов точек $g^{(n)} = \{g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \dots, g_{N_n-1}^{(n)}\}$ вместо g .

Как основным результат (теорема 1 из разд. 3) работы для сплайн-функций $R_{N_n,1}(x, \psi, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ с $\|\Delta^{(n)}\| \rightarrow 0$ получены условия на сетки узлов $\Delta^{(n)}$, при которых явление Гиббса отсутствует в окрестности точки $t_0 \in (a, b)$.

Показано также (теорема 2 из разд. 3), что найденные условия существенны для отсутствия явления Гиббса в окрестности такой точки t_0 .

Для доказательства этих утверждений используются приводимые далее некоторые аппроксимационные свойства сплайн-функций по рациональным интерполянтам в случае сигнум-функции.

2. Приближение сигнум-сдвига сплайнами по рациональным интерполянтам

Речь идет о приближении функции $\psi(x) = \text{sign}(x - t_0)$ на отрезке $[a, b]$ при некоторой фиксированной точке $t_0 \in (a, b)$ сплайнами $R_{N,1}(x, \psi) = R_{N,1}(x, \psi, \Delta, g)$ вида (1.2) по заданной сетке узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$) и по соответствующему набору точек $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$.

Всюду ниже для краткости обозначим

$$M_r(t_0) = \sup\{R_{N,1}(x, \psi) - \psi(x) \mid x \in (t_0, b]\}, \quad M_\ell(t_0) = \sup\{\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi) \mid x \in [a, t_0)\}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда точка разрыва отлична от узлов сетки, например, $t_0 \in (x_{i-1}, x_i)$ при некотором i , $1 \leq i \leq N$.

Лемма 1. *Если $t_0 \in (x_{i-1}, x_i)$ для некоторого i , $1 \leq i \leq N$, то при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство $-1 \leq R_{N,1}(x, \psi) \leq 1$.*

Доказательство. При $i = 1, 2, \dots, N - 1$ имеем $R_i(x_{i-1}) = \psi(x_{i-1}) = -1$, $R_i(x_i) = \psi(x_i) = 1$, $R_i(x_{i+1}) = \psi(x_{i+1}) = 1$. Тогда

$$\psi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = -\frac{2}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})} < 0,$$

и имеем

$$R_i''(x) = 2\gamma_i \frac{1}{(x - g_i)^3} = 2\psi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \frac{(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i)}{(x - g_i)^3} < 0.$$

Поэтому функция $y = R_i(x)$ является выпуклой вверх на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, а значит, ее график на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ не может проходить выше прямой $y = 1$ или ниже прямой $y = -1$.

Учтем, что $R_{N,1}(x, \psi) = R_1(x, \psi)$ при $x \in [x_0, x_1]$ ($i = 1$), а при $i = 2, 3, \dots, N$ для другого интерполянта $R_{i-1}(x)$, образующего сплайн $R_{N,1}(x, \psi)$, имеем $R_{i-1}(x_{i-2}) = R_{i-1}(x_{i-1}) = -1$, $R_{i-1}(x_i) = 1$. Поэтому функция $y = R_{i-1}(x)$ является выпуклой вниз на отрезке $[x_{i-2}, x_i]$, а ее график на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ расположен между прямыми $y = 1$ и $y = -1$.

Остается при $i = N$ учесть равенство $R_{N,1}(x, \psi) = R_{N-1}(x, \psi)$, а при $i = 2, 3, \dots, N - 1$ воспользоваться равенством (1.2).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть сплайн $R_{N,1}(x, \psi)$ определяется равенствами (1.1) и (1.2) с $0 < \lambda \leq 1$ и пусть $t_0 \in (x_{i-1}, x_i)$ для некоторого i , $1 \leq i \leq N - 1$.*

Тогда при $h_{i+1} \leq h_i$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{6} \frac{h_{i+1}}{h_i} < M_r(t_0) < \frac{1}{2} \frac{h_{i+1}}{h_i}, \quad (2.1)$$

а при $h_i < h_{i+1}$ (когда мы по определению имеем $\lambda = (x_{i-1} - g_i)/h_i$) справедливо неравенство

$$\frac{4}{81} \lambda < M_r(t_0) < 2\lambda. \quad (2.2)$$

Доказательство. Заметим, что $R_j(x) \equiv 1$ при $j = i+1, i+2, \dots, N$, поэтому в силу точности оператора интерполяции на константах получаем $R_{N,1}(x, \psi) \equiv 1$ при $x \in [x_{i+1}, b]$. По лемме 1 при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем $-1 \leq R_{N,1}(x, \psi) \leq 1$.

Значит, $M_r(t_0)$ достигается на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$M_r(t_0) = \max\{R_{N,1}(x, \psi) - \psi(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

При $x \in [x_i, x_{i+1}]$ из (1.2), взяв $i + 1$ вместо i , получим

$$R_{N,1}(x, \psi) - \psi(x) = (R_i(x) - 1) \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}.$$

Представим $R_i(x)$ в виде

$$R_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + A_i \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{x - g_i}$$

с коэффициентами $a_i = \psi(x_i) = 1$, $b_i = \psi(x_i, x_{i+1}) = 0$,

$$A_i = \psi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i) = \frac{2(g_i - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})}.$$

Действительно, такое представление возможно, так как оно равносильно равенству

$$R_i(x) = a_i + A_i(g_i - x_{i+1}) + (b_i + A_i)(x - x_i) + A_i(g_i - x_i)(g_i - x_{i+1}) \frac{1}{x - g_i}.$$

Сравнивая последнее с представлением (1.1), получим равенства

$$a_i + A_i(g_i - x_{i+1}) = \alpha_i, \quad b_i + A_i = \beta_i, \quad A_i(g_i - x_i)(g_i - x_{i+1}) = \gamma_i.$$

Отсюда и из равенств для коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ в случае функции $\psi(x)$ получим указанные выражения для новых коэффициентов a_i, b_i, A_i .

Тогда при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$R_{N,1}(x, \psi) - \psi(x) = \frac{2(g_i - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})^2}{g_i - x}. \quad (2.3)$$

Если продифференцировать правую часть (2.3) и приравнять числитель полученной дроби к нулю, то (с учетом деления на $x - x_{i+1}$) придем к равенству

$$(x - x_{i+1})(x - x_i) + 2(x - x_i)(g_i - x) + (x - x_{i+1})(g_i - x) = 0.$$

Преобразуем $x - x_{i+1} = (x - x_i) - (x_{i+1} - x_i)$, $g_i - x = -(x - x_i) + (g_i - x_i)$ и запишем левую часть в виде трехчлена относительно $x - x_i$. Имеем

$$-2(x - x_i)^2 + 3(g_i - x_i)(x - x_i) - (g_i - x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0.$$

Отсюда получим, что максимальное свое значение на $[x_i, x_{i+1}]$ правая часть равенства (2.3) принимает в точке $t_1 \in (x_i, x_{i+1})$, для которой

$$2(t_1 - x_i)^2 - 3(g_i - x_i)(t_1 - x_i) + (g_i - x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0. \quad (2.4)$$

В случае $h_{i+1} \leq h_i$ и $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$ отсюда получим $t_1 = x_i + Ah_{i+1}$, где обозначено $A = \frac{3}{4}(1 + \lambda) - \frac{1}{4}\sqrt{(1 + \lambda)(1 + 9\lambda)}$.

Легко проверить, что $A \in [\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$ при $0 < \lambda \leq 1$, а поэтому имеем $t_1 \in (x_i, x_{i+1})$ (другой корень уравнения (2.4) выходит за пределы $[x_i, x_{i+1}]$).

Подставляя полученное в (2.3), находим

$$R_{N,1}(t_1, \psi) - \psi(t_1) = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}} \cdot 2 \left(1 + \lambda \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right) \frac{A(1 - A)^2}{\lambda + 1 - A}. \quad (2.5)$$

Отсюда, используя убывание правой части относительно $\lambda \in (0, 1]$, а также убывание $A(1-A)^2(2-A)^{-1}$ при $A \in [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$, получим

$$R_{N,1}(t_1, \psi) - \psi(t_1) < 2 \frac{h_{i+1}}{h_i} A(1-A) < \frac{1}{2} \frac{h_{i+1}}{h_i},$$

$$R_{N,1}(t_1, \psi) - \psi(t_1) > 2 \frac{h_{i+1}}{h_i} \frac{A(1-A)^2}{2-A} > \frac{1}{6} \frac{h_{i+1}}{h_i},$$

а значит, неравенство (2.1) доказано.

Пусть теперь $h_i < h_{i+1}$ и $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$. Тогда из уравнения (2.4) находим $t_1 = x_i + B_1$, где

$$B_1 = \frac{1}{4} \sqrt{9(x_i - g_i)^2 + 8(x_i - g_i)(x_{i+1} - x_i)} - \frac{3}{4}(x_i - g_i).$$

Покажем, что в этом случае имеем

$$\frac{1}{4}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\sqrt{17} - 3}{4}(x_i - x_{i-1}) < t_1 - x_i < \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_i). \quad (2.6)$$

Действительно, правое неравенство равносильно

$$\sqrt{9(x_i - g_i)^2 + 8(x_i - g_i)(x_{i+1} - x_i)} < 3(x_i - g_i) + \frac{4}{3}(x_{i+1} - x_i),$$

что вытекает из $x_{i+1} - x_i > 0$.

Далее, так как $x_i - x_{i-1} < x_{i+1} - x_i$, имеем

$$4(t_1 - x_i) = 4B_1 \geq [\sqrt{9(1+\lambda)^2 + 8(1+\lambda)} - 3(1+\lambda)](x_i - x_{i-1})$$

$$= (x_i - x_{i-1}) \frac{8}{\sqrt{9 + \frac{8}{1+\lambda}} + 3} > (x_i - x_{i-1})(\sqrt{17} - 3).$$

Применив (2.6) и $x_{i-1} - g_i = \lambda h_i$, из равенства (2.3) при $x = t_1$ и $0 < \lambda \leq 1$ получим

$$R_{N,1}(t_1, \psi) - \psi(t_1) = \frac{2\lambda}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \frac{t_1 - x_i}{t_1 - x_i + x_i - g_i} [(x_{i+1} - x_i) - (t_1 - x_i)]^2$$

$$> \frac{2\lambda}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \frac{\frac{1}{4}(x_i - x_{i-1})}{\frac{1}{4}(x_i - x_{i-1}) + (1+\lambda)(x_i - x_{i-1})} \cdot \frac{4}{9}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$= \frac{8}{9} \cdot \frac{\lambda}{5+4\lambda} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} > \frac{4}{81}\lambda;$$

$$R_{N,1}(t_1, \psi) - \psi(t_1) < \frac{2\lambda(x_{i+1} - x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}} < 2\lambda.$$

Неравенство (2.2) также доказано.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть сплайн $R_{N,1}(x, \psi)$ определяется равенствами (1.1) и (1.2) с $0 < \lambda \leq 1$ и пусть $t_0 \in (x_{i-1}, x_i)$ для некоторого i , $2 \leq i \leq N$.

Тогда при $h_{i-1} < h_i$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{6} \frac{h_{i-1}}{h_i} < M_\ell(t_0) < \frac{1}{2} \frac{h_{i-1}}{h_i}, \quad (2.7)$$

а при $h_i \leq h_{i-1}$ и $\lambda = (g_{i-1} - x_i)/h_i$ — неравенство

$$\frac{4}{81}\lambda < M_\ell(t_0) < 2\lambda. \quad (2.8)$$

Доказательство. В данном случае $R_j(x) \equiv -1$ при $j = 0, 1, \dots, i-2$, а поэтому $R_{N,1}(x, \psi) \equiv -1$ при $x \in [a, x_{i-2}]$. Учитывая еще лемму 1, получим $M_\ell(t_0) = \sup\{\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi) | x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]\}$.

Оценки $M_\ell(t_0)$ получаются по аналогии с оценками (2.1) и (2.2) для $M_r(t_0)$, поэтому укажем лишь, как выражается значение $M_\ell(t_0)$ через узлы.

При $x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]$ имеем $R_{i-2}(x, \psi) \equiv -1$, поэтому

$$\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi) = (-1 - R_{i-1}(x)) \frac{x - x_{i-2}}{x_{i-1} - x_{i-2}}.$$

Учитывая $\psi(x_i) = 1$, $\psi(x_{i-2}) = \psi(x_{i-1}) = -1$, по аналогии с (2.3) отсюда получим

$$\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi) = \frac{-2(g_{i-1} - x_i)}{(x_i - x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2})(x_i - x_{i-2})} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-2})^2}{g_{i-1} - x}. \quad (2.9)$$

На отрезке $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ свое максимальное значение разность $\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi)$ принимает в точке $t_2 \in (x_{i-2}, x_{i-1})$, для которой

$$2(t_2 - x_{i-1})^2 - 3(g_{i-1} - x_{i-1})(t_2 - x_{i-1}) - (g_{i-1} - x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2}) = 0. \quad (2.10)$$

Отсюда в случае $h_{i-1} < h_i$ и $g_{i-1} = x_{i-2} - \lambda h_{i-1}$ получим $t_2 = x_{i-1} - Ah_{i-1}$, где, как и выше,

$$A = \frac{3}{4}(1 + \lambda) - \frac{1}{4}\sqrt{(1 + \lambda)(1 + 9\lambda)}.$$

Тогда при $h_{i-1} < h_i$ вполне аналогично доказательству (2.1) получим

$$\frac{1}{6} \frac{h_{i+1}}{h_i} < \psi(t_2) - R_{N,1}(t_2, \psi) < \frac{1}{2} \frac{h_{i-1}}{h_i},$$

что доказывает (2.7).

Пусть теперь $h_i \leq h_{i-1}$, и докажем неравенство (2.8). В этом случае $g_{i-1} = x_i + \lambda h_i$, и из (2.10) находим $t_2 = x_{i-1} - B_2$, где

$$B_2 = \frac{1}{4}\sqrt{9(g_{i-1} - x_{i-1})^2 + 8(g_{i-1} - x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2})} - \frac{3}{4}(g_{i-1} - x_{i-1});$$

при этом аналогично (2.8) получим неравенство

$$\frac{1}{4}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\sqrt{17} - 3}{4}(x_i - x_{i-1}) < x_{i-1} - t_2 < \frac{1}{3}(x_{i-1} - x_{i-2}).$$

Отсюда и из (2.9) при $x = t_2$ аналогично (2.2) имеем $\frac{4}{81}\lambda < \psi(t_2) - R_{N,1}(t_2, \psi) < 2\lambda$.

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда точка разрыва функции $\psi(x) = \text{sign}(x - t_0)$ совпадает с некоторым узлом сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$), скажем, $t_0 = x_i$ при некотором $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Тогда $\psi(x_j) = -1$ при $j < i$, $\psi(x_i) = 0$, $\psi(x_j) = 1$ при $j > i$. Поэтому при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ имеем

$$R_i(x, \psi) = a_i + b_i(x - x_i) + A_i \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{x - g_i},$$

$$a_i = \psi(x_i) = 0, \quad b_i = \psi(x_i, x_{i+1}) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i},$$

$$A_i = \psi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i) = \frac{(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})};$$

$$R_i''(x, \psi) = 2\psi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \frac{(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i)}{(x - g_i)^3}.$$

Здесь $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$, поэтому при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ имеем $R_i''(x, \psi)\psi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) > 0$, причем

$$\psi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}.$$

Значит, условие выпуклости вверх функции $R_i(x, \psi)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ равносильно выполнению неравенства $x_i - x_{i-1} < x_{i+1} - x_i$, выпуклости вниз — выполнению неравенства $x_{i+1} - x_i < x_i - x_{i-1}$, линейности — выполнению равенства $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$.

Для сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$) и числа $\lambda > 0$ полагаем, как и выше, $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$ при $h_{i+1} \leq h_i$ и $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$ при $h_i < h_{i+1}$.

Из (1.1) ясно, что при $x \in [x_{j-1}, x_j]$ ($j = 1, 2, \dots, N$) имеем $R_j(x, \psi) \equiv -1$ для $j \leq i - 2$ и $R_j(x, \psi) \equiv 1$ для $j \geq i + 2$. Поэтому из (1.2) следует, что разность $R_{N,1}(x, \psi) - \psi(x)$ может быть отличной от нуля лишь при $x \in (x_{i-2}, x_{i+2})$.

Лемма 4. Если $t_0 = x_i$ для некоторого i , $1 \leq i \leq N - 1$, то для функции $\psi(x) = \text{sign}(x - t_0)$ и соответствующих интерполянтов $R_j(x) = R_j(x, \psi)$ ($j = i - 1, i, i + 1$) вида (1.1) выполняются неравенства

$$\begin{aligned} -1 \leq R_i(x) \leq 1 & \quad \text{при } x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \quad \text{и } 0 < \lambda \leq 1; \\ -1 \leq R_{i-1}(x) \leq 0 & \quad \text{при } x \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{и } \lambda > 0; \\ 0 \leq R_{i+1}(x) \leq 1 & \quad \text{при } x \in [x_i, x_{i+1}] \quad \text{и } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть сначала $h_i < h_{i+1}$. Тогда функция $R_i(x)$ выпукла вверх на $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ и при этом график $y = R_i(x)$ проходит через точки $(x_{i-1}, -1)$, $(x_i, 0)$ и $(x_{i+1}, 1)$. Поэтому $-1 \leq R_i(x) \leq 0$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ и $R_i(x) \geq 0$ при $x \in [x_i, x_{i+1}]$, так как в противном случае нарушится выпуклость вверх $R_i(x)$ на $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Остается установить неравенство $R_i(x) \leq 1$ при $x \in (x_i, x_{i+1})$ и $0 < \lambda \leq 1$, которое равносильно

$$\frac{\lambda(x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}} \frac{x - x_i}{x - g_i} \leq 1.$$

Достаточно доказать, что супремум левой части при $x \in (x_i, x_{i+1})$ не превосходит 1, т.е. доказать неравенство

$$\frac{\lambda(x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - g_i} \leq 1,$$

которое можно записать в виде очевидного (при $0 < \lambda \leq 1$) неравенства

$$\lambda \frac{x_{i+1} - x_i - (x_i - x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1} + \lambda(x_i - x_{i-1})} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} \leq 1.$$

Значит, если $h_i < h_{i+1}$ и $0 < \lambda \leq 1$, то при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ имеем $-1 \leq R_i(x) \leq 1$.

Докажем, что последнее двойное неравенство выполняется также в случае $h_{i+1} \leq h_i$ и $0 < \lambda \leq 1$.

Если $x \in [x_i, x_{i+1}]$, то имеем $0 \leq R_i(x) \leq 1$ ввиду выпуклости вниз $R_i(x)$ на $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ с учетом принадлежности точек $(x_{i-1}, -1)$, $(x_i, 0)$ и $(x_{i+1}, 1)$ графику $y = R_i(x)$. Отсюда, в частности, следует, что $R_i(x) < 0$ при $x \in (x_{i-1}, x_i)$.

Остается показать, что при $x \in (x_{i-1}, x_i)$ и $0 < \lambda \leq 1$ выполняется неравенство $R_i(x) \geq -1$, что равносильно выполнению неравенства

$$\lambda \frac{2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \frac{x_i - x}{g_i - x} \leq 1,$$

которое вытекает при $x \in (x_{i-1}, x_i)$ из неравенства

$$\lambda \frac{x_i - x_{i-1} - (x_{i+1} - x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1} + \lambda(x_{i+1} - x_i)} \leq 1.$$

Следовательно, $-1 \leq R_i(x) \leq 1$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и $0 < \lambda \leq 1$.

График $y = R_{i-1}(x)$ проходит через точки $(x_{i-2}, -1)$, $(x_{i-1}, -1)$, $(x_i, 0)$, а функция $R_{i-1}(x)$ выпукла вниз на $[x_{i-2}, x_i]$. Поэтому $-1 \leq R_{i-1}(x) \leq 0$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Аналогично, график $y = R_{i+1}(x)$ проходит через точки $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 1)$, $(x_{i+2}, 1)$, а функция $R_{i+1}(x)$ выпукла вверх на $[x_i, x_{i+2}]$. Поэтому $0 \leq R_{i+1}(x) \leq 1$ при $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Лемма 4 доказана.

3. Основные результаты

На отрезке $[a, b]$ с фиксированной точкой $t_0 \in (a, b)$ рассмотрим функцию $\psi(x) = \text{sign}(x - t_0)$ и по последовательностям сеток узлов $\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{N_n}^{(n)} = b$ ($N_n \geq 2$) и наборов точек $g^{(n)} = \{g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \dots, g_{N_n-1}^{(n)}\}$ в соответствии с равенствами (1.1) и (1.2) определим последовательность сплайн-функций $R_{N_n,1}(x, \psi) = R_{N_n,1}(x, \psi, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$.

Для точки разрыва t_0 и разбиения $\Delta^{(n)}$ при данном номере n через $[x_{\ell-1}, x_{\ell}]$ и $[x_r, x_{r+1}]$ ($\ell = \ell(n), r = r(n)$) обозначим ближайшие соответственно слева и справа к точке t_0 частичные отрезки, не содержащие точку t_0 . При этом $h_{\ell}, h_{\ell+1}, h_r, h_{r+1}$ означают длины частичных отрезков разбиения $\Delta^{(n)}$, правые концы которых совпадают соответственно с точками $x_{\ell}, x_{\ell+1}, x_r, x_{r+1}$. Через g_r обозначим полюс дроби $R_r(x, \psi)$ при условии $h_r < h_{r+1}$, а через $g_{\ell} -$ полюс дроби $R_{\ell}(x, \psi)$ при условии $h_{\ell+1} \leq h_{\ell}$.

Ниже для числовых последовательностей запись $a_n = \bar{o}(b_n)$ означает, как обычно, что существует бесконечно малая последовательность $c_n \rightarrow 0$, для которой выполняется равенство $a_n = c_n b_n$.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для сплайнов $R_{N_n,1}(x, \psi, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ с $\|\Delta^{(n)}\| \rightarrow 0$ явление Гиббса не имеет места в правой (соответственно, левой) полукрестности точки t_0 , если для любой подпоследовательности номеров $n = n_i$ и соответствующих $r = r(n)$ ($\ell = \ell(n)$) с условиями $h_{r+1} < h_r$ и $h_r < h_{r+1}$ ($h_{\ell} < h_{\ell+1}$ и $h_{\ell+1} < h_{\ell}$) выполняются соответственно соотношения $h_{r+1} = \bar{o}(h_r)$ и $x_{r-1} - g_r = \bar{o}(h_r)$ ($h_{\ell} = \bar{o}(h_{\ell+1})$ и $g_{\ell} - x_{\ell+1} = \bar{o}(h_{\ell+1})$) при $n \rightarrow \infty$.*

Доказательство. По ходу доказательства для краткости при рассматриваемом натуральном n обозначим N_n через N и опустим верхний индекс (n) в обозначениях узлов.

Тогда при $t_0 \in (x_{i-1}, x_i)$ для некоторого i , $1 \leq i \leq N - 1$, номер $r = r(n)$ совпадает с i и по лемме 2 (при $N = N_n$) для величины

$$M_r(t_0) = \sup\{R_{N,1}(x, \psi) - \psi(x) \mid x \in (t_0, b]\}$$

при $h_{r+1} \leq h_r$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{6} \frac{h_{r+1}}{h_r} < M_r(t_0) < \frac{1}{2} \frac{h_{r+1}}{h_r}, \quad (3.1)$$

а при $h_r < h_{r+1}$ — неравенство

$$\frac{4}{81} \lambda < M_r(t_0) < 2\lambda, \quad (3.2)$$

причем $\lambda = (x_{r-1} - g_r)/h_r$.

По условию теоремы при $h_{r+1} < h_r$ имеем $h_{r+1} = \bar{o}(h_r)$ ($r = r(n)$, $n \rightarrow \infty$), а при $h_r < h_{r+1}$ имеем $x_{r-1} - g_r = \bar{o}(h_r)$ ($r = r(n)$, $n \rightarrow \infty$), а значит, $\lambda \rightarrow 0$.

Следовательно, в обоих случаях величина $M_r(t_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и явление Гиббса в правой полукрестности точки t_0 отсутствует.

Если точка разрыва t_0 принадлежит интервалу (x_{i-1}, x_i) для некоторого i , $2 \leq i \leq N$, то вполне аналогично предыдущему случаю с применением леммы 3 вместо леммы 2 получим, что величина

$$M_\ell(t_0) = \sup\{\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi) | x \in [a, t_0)\}$$

(при $N = N_n$, $\ell = \ell(n)$) стремится к нулю с ростом n . Действительно, по условию теоремы при $h_\ell < h_{\ell+1}$ выполняется соотношение $h_\ell = \bar{\delta}(h_{\ell+1})$, а при $h_{\ell+1} < h_\ell$ — соотношение $g_\ell - x_{\ell+1} = \bar{\delta}(h_{\ell+1})$.

Пусть теперь точка разрыва t_0 функции $\psi(x)$ совпадает с узлом x_i при некотором $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

Тогда значения сплайна $R_{N,1}(x, \psi)$ на промежутках $[x_{i-1}, x_i)$ и $(x_i, x_{i+1}]$ не могут привести к явлению Гиббса около точки $t_0 = x_i$.

Действительно, если $t_0 = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) и $0 < \lambda \leq 1$, то при $x \in [x_{i-1}, x_i)$ и $(x_i, x_{i+1}]$ соответственно выполняются неравенства

$$-1 \leq R_{N,1}(x, \psi) \leq 0, \quad 0 \leq R_{N,1}(x, \psi) \leq 1,$$

что следует из леммы 4 и равенства (1.2) для i и для $i + 1$ соответственно.

Для случая $t_0 = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N - 2$) поведение сплайна $R_{N,1}(x, \psi)$ на отрезке $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ можно исследовать по полной аналогии с доказательством леммы 2.

При этом, учитывая $\psi(x_i) = 0$ и $\psi(x_j) = 1$ при $j > i$, для $x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]$, имеем

$$\begin{aligned} R_{N,1}(x, \psi) - \psi(x) &= [R_{i+1}(x, \psi) - 1] \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} \\ &= \frac{g_{i+1} - x_i}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_i)} \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})^2}{g_{i+1} - x}, \end{aligned}$$

а при $x \in [x_{i+2}, b]$ получим $R_{N,1}(x, \psi) \equiv 1$.

Значит, при $h_{i+2} \leq h_{i+1}$, $g_{i+1} = x_{i+2} + \lambda h_{i+2}$ и $0 < \lambda \leq 1$ в точке $t_3 = x_{i+1} + Ah_{i+2}$, где A то же, что и в лемме 2, достигается значение

$$\max\{R_{N,1}(x, \psi) - \psi(x) | x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]\} = \frac{h_{i+2}}{h_{i+1}} \left(1 + \lambda \frac{h_{i+2}}{h_{i+2} + h_{i+1}}\right) \frac{A(1 - A)^2}{\lambda + 1 - A}.$$

Отсюда и из леммы 4 получим

$$\frac{1}{12} \frac{h_{i+2}}{h_{i+1}} < M_r(t_0) < \frac{1}{4} \frac{h_{i+2}}{h_{i+1}}, \tag{3.3}$$

если $h_{i+2} \leq h_{i+1}$ и $0 < \lambda \leq 1$.

Если же $h_{i+1} < h_{i+2}$, $g_{i+1} = x_i - \lambda h_{i+1}$ и $0 < \lambda \leq 1$, то получим

$$\frac{2}{81} \lambda < M_r(t_0) < \lambda \tag{3.4}$$

(с $\lambda = (x_i - g_{i+1})/h_{i+1}$).

Заметим, что в данном случае $r = r(n) = i + 1$. Поэтому при выполнении неравенства $h_{r+1} < h_r$ по условию теоремы имеем $h_{r+1} = \bar{\delta}(h_r)$ ($r = r(n)$, $n \rightarrow \infty$), а при выполнении неравенства $h_r < h_{r+1}$ имеем $x_{r-1} - g_r = \bar{\delta}(h_r)$.

Следовательно, в этих случаях из (3.3) и (3.4) соответственно имеем $M_r(t_0) \rightarrow 0$, а значит, явление Гиббса в правой полукрестности точки t_0 отсутствует.

Поведение сплайна $R_{N,1}(x, \psi)$ на отрезке $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ для случая $t_0 = x_i$ ($i = 2, 3, \dots, N$) исследуется по полной аналогии с доказательством леммы 3. При этом для $x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]$ выполняется равенство

$$\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi) = \frac{-(g_{i-1} - x_i)}{(x_i - x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2})(x_i - x_{i-2})} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-2})^2}{g_{i-1} - x}.$$

В этом случае для $0 < \lambda \leq 1$ выполняется равенство

$$M_\ell(t_0) = \max\{\psi(x) - R_{N,1}(x, \psi) \mid x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]\}.$$

Отсюда при $h_{i-1} < h_i$ и $g_{i-1} = x_{i-2} - \lambda h_{i-1}$ получим

$$\frac{1}{12} \frac{h_{i-1}}{h_i} < M_\ell(t_0) < \frac{1}{4} \frac{h_{i-1}}{h_i}, \quad (3.5)$$

а при $h_i \leq h_{i-1}$ и $g_{i-1} = x_i + \lambda h_i$ (а значит, $\lambda = (g_{i-1} - x_i)/h_i$) имеем

$$\frac{2}{81} \lambda < M_\ell(t_0) < \lambda. \quad (3.6)$$

Остается заметить, что в данном случае $\ell = \ell(n) = i - 1$, поэтому из (3.5) и (3.6) имеем $M_\ell(t_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, когда выполнены условия теоремы: $h_\ell = \bar{o}(h_{\ell+1})$ при $h_\ell < h_{\ell+1}$ и $g_\ell - x_{\ell+1} = \bar{o}(h_{\ell+1})$ при $h_{\ell+1} < h_\ell$.

Теорема 1 доказана.

Следующее утверждение показывает существенность условий теоремы 1 для отсутствия явления Гиббса соответственно в правой или в левой окрестности точки разрыва t_0 для функции $\psi(x) = \text{sign}(x - t_0)$.

Теорема 2. Для сплайнов $R_{N_n,1}(x, \psi, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ с $\|\Delta^{(n)}\| \rightarrow 0$ имеет место явление Гиббса в правой (соответственно, левой) полукрестности точки t_0 , если при некотором $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность номеров $n = n_i$, для которой и соответствующих $r = r(n)$ ($\ell = \ell(n)$) выполняется хотя бы одно из двух условий

- 1) $h_r \geq h_{r+1} \geq \varepsilon h_r$ (соответственно, $h_{\ell+1} \geq h_\ell \geq \varepsilon h_{\ell+1}$);
- 2) $h_r < h_{r+1}$ и $x_{r-1} - g_r \geq \varepsilon h_r$ (соответственно, $h_{\ell+1} < h_\ell$ и $g_\ell - x_{\ell+1} \geq \varepsilon h_{\ell+1}$).

Доказательство. Пусть для сетки узлов $\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{N_n}^{(n)} = b$ ($N_n \geq 2$) при данном натуральном n отрезок $[x_r, x_{r+1}]$ ($r = r(n)$) является ближайшим справа к точке разрыва $t_0 \in (a, b)$ частичным отрезком, не содержащим точки t_0 . Для краткости снова обозначим $N = N_n$.

Тогда при $h_{r+1} \leq h_r$ из неравенств (3.1) и (3.3) вытекает неравенство

$$\frac{1}{12} \frac{h_{r+1}}{h_r} < M_r(t_0) < \frac{1}{2} \frac{h_{r+1}}{h_r}, \quad (3.7)$$

а при $h_r < h_{r+1}$ из неравенств (3.2) и (3.4) имеем

$$\frac{2}{81} \lambda < M_r(t_0) < 2\lambda, \quad (3.8)$$

где $\lambda = (x_{r-1} - g_r)/h_r$.

Пусть теперь при некотором $\varepsilon > 0$ в соответствии с условием теоремы существует подпоследовательность номеров $n = n_i$, для которых и $r = r(n)$ выполняется хотя бы одно из двух условий

- 1) $h_r \geq h_{r+1} \geq \varepsilon h_r$;
- 2) $h_r < h_{r+1}$ и $x_{r-1} - g_r \geq \varepsilon h_r$.

Заметим, что последнее неравенство эквивалентно неравенству $\lambda \geq \varepsilon$. Отсюда и из неравенств (3.7) и (3.8) вытекает, что существует подпоследовательность номеров $n = n_i$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{2}{81}\varepsilon < M_r(t_0) < \max \left\{ \frac{1}{2} \frac{h_{r+1}}{h_r}, 2\lambda \right\}.$$

Следовательно, выполняется строгое неравенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} M_{r(n)}(t_0) > 0$, что означает наличие явления Гиббса в правой полуокрестности точки разрыва t_0 .

Вполне аналогично рассматривается случай левой полуокрестности точки разрыва t_0 .

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что в случае равномерных сеток узлов $\Delta^{(n)}$ и $\lambda = 1$ значение предела

$$\overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow t_0+0}} R_{N_n,1}(x, \psi, \Delta^{(n)}, g^{(n)}) \text{ равно } 1 + \frac{3}{4}(5\sqrt{5} - 11) = 1.13525\dots,$$

если при всех достаточно больших n точка разрыва t_0 совпадает с одним из узлов $\Delta^{(n)}$, и оно равно $1 + \frac{3}{4}(5\sqrt{5} - 11)$, если t_0 не совпадает с узлами $\Delta^{(n)}$ при сколь угодно больших номерах n .

Аналогично обстоит дело с соответствующим нижним пределом в левой полуокрестности точки t_0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая энциклопедия. Т.1. М.: Советская Энциклопедия, 1977.
2. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
3. **Jerri A.J.** The Gibbs phenomenon in Fourier analysis, splines and wavelet approximations. Boston: Springer, 1998. 340 p. (Math. Appl.; vol. 446). doi: 10.1007/978-1-4757-2847-7.
4. **Golubov B.I.** On Gibbs phenomenon for Riesz spherical means of multiple Fourier integrals and Fourier series // Analysis Mathematica. 1978. Vol. 4, no. 4, pp. 269–287. doi: 10.1007/BF02020575.
5. **Olevska Yu.B., Olevskiy V.I., Shapka I.V., Naumenko T.S.** Application of two-dimensional Pade-type approximants for reducing the Gibbs phenomenon // AIP Conf. Proc. 2019. Vol. 2164. Art.-no. 060014. doi: 10.1063/1.5130816.
6. **Mohammad M.** On the Gibbs effect based on the quasi-affine dual tight framelets system generated using the mixed oblique extension principle // Mathematics. 2019. Vol. 7, no. 10. Art.-no. 952. 14 p. doi: 10.3390/math7100952.
7. **Lin S., Xu Y., Chen Y., Chang C., Chen Y.E., Chen J.** Gibbs-phenomenon-reduced digital PWM for power amplifiers using pulse modulation // IEEE Access. 2019. Vol. 7. P. 178788–178797. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2958866.
8. **Субботин Ю.Н.** Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. математика. 1997. Т. 3, вып. 4. С. 1043–1058.
9. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
10. **Andreev A. S.** On interpolation by cubic splines of a function possessing discontinuities // C. R. Acad. Bulg. Sci. 1974. Vol. 27. P. 881–884.
11. **Richards F. B.** A Gibbs phenomenon for spline functions // J. Approximation Theory. 1991. Vol. 66. P. 344–351. doi: 10.1016/0021-9045(91)90034-8.
12. **Zhimin Zhang, Clyde F. Martin.** Convergence and Gibbs phenomenon in cubic spline interpolation of discontinuous functions // J. Computational and Applied Mathematics. 1997. Vol. 87. P. 359–371. doi: 10.1016/s0377-0427(97)00199-4.
13. **Квасов Б.И., Кобков В.В.** Некоторые свойства кубических эрмитовых сплайнов с дополнительными узлами // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, № 5. С. 1007–1010.
14. **Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.** Безусловно сходящиеся интерполяционные рациональные сплайны // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 4. С. 592–603. doi: 10.4213/mzm11201.

15. Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г. Сплайны по трехточечным рациональным интерполяциям с автономными полюсами // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 7. С. 16–28. doi: 10.21538/0134-4889-2016-44-4-233-246 .

Поступила 10.12.2019

После доработки 18.05.2020

Принята к публикации 25.05.2020

Рамазанов Абдул-Рашид Кехриманович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Дагестанский государственный университет;
главный науч. сотрудник
Дагестанский научный центр РАН
г. Махачкала
e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Рамазанов Абдулкафар Кехриманович
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой высшей математики и физики
Калужский филиал МГТУ им. Н.Э.Баумана
г. Калуга
e-mail: akramazanov@mail.ru

Магомедова Вазипат Гусеновна
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры математического анализа
Дагестанский государственный университет
г. Махачкала
e-mail: vazipat@rambler.ru

REFERENCES

1. M. Hazewinkel (ed.) *Encyclopaedia of Mathematics*, vol. 1. Dordrecht: D. Reidel, 1987, 488 p. doi: 10.1017/s0016756800022986 . Original Russian text published in *Matematicheskaya entsiklopediya*, T. 1. Moscow: Sovetskaya Entsiklopediya, 1977.
2. Bary N.K. *A treatise on trigonometric series*, vol. I,II. Oxford; New York: Pergamon Press, 1964, 553 p., 508 p. doi: 10.1002/zamm.19650450531. Original Russian text published in Bari N.K. *Trigonometricheskie ryady*. Moscow: GIMFL Publ., 1961, 937 p.
3. Jerri A.J. *The Gibbs phenomenon in Fourier analysis, splines and wavelet approximations*. Ser. Math. Appl.; vol. 446. Boston: Springer, 1998. 340 p. doi: 10.1007/978-1-4757-2847-7 .
4. Golubov B.I. On Gibbs phenomenon for Riesz spherical means of multiple Fourier integrals and Fourier series. *Analysis Mathematica*, 1978, vol. 4, no. 4, pp. 269–287. doi: 10.1007/BF02020575 .
5. Olevska Yu.B., Olevskiy V.I., Shapka I.V., Naumenko T.S. Application of two-dimensional Pade-type approximants for reducing the Gibbs phenomenon. *AIP Conf. Proc.*, 2019, vol. 2164, no. 1, art.-no. 060014. doi: 10.1063/1.5130816 .
6. Mohammad M. On the Gibbs effect based on the quasi-affine dual tight framelets system generated using the mixed oblique extension principle. *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 10, art.-no. 952, 14 p. doi: 10.3390/math7100952 .
7. Lin S., Xu Y., Chen Y., Chang C., Chen Y.E., Chen J. Gibbs-phenomenon-reduced digital PWM for power amplifiers using pulse modulation. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 178788–178797. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2958866 .
8. Subbotin Yu.N. Variations on a spline theme. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 1043–1058 (in Russian).
9. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody spline-funktsii* (Methods of spline-functions). Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p.

10. Andreev A.S. On interpolation by cubic splines of a function possessing discontinuities. *C.R. Acad. Bulg. sci.*, 1974, vol. 27, pp. 881–884.
11. Richards F.B. A Gibbs phenomenon for spline functions. *J. Approximation Theory*. 1991, vol. 66, pp. 344–351. doi: 10.1016/0021-9045(91)90034-8.
12. Zhimin Zhang, Clyde F. Martin. Convergence and Gibbs phenomenon in cubic spline interpolation of discontinuous functions. *J. Computational and Applied Math.*, 1997, vol. 87, pp. 359–371. doi: 10.1016/s0377-0427(97)00199-4.
13. Kvasov B.I., Kobkov V.V. Some properties of cubic Hermitian splines with additional nodes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1974, vol. 217, no. 5, pp. 1007–1010 (in Russian).
14. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Unconditionally convergent rational interpolation splines. *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 3-4, pp. 635–644. doi: 10.1134/S0001434618030318.
15. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Splines for three-point rational interpolants with autonomous poles. *Dagestan. Elektron. Mat. Izv.*, 2017, no. 7, pp. 16–28 (in Russian). doi: 10.31029/demr.7.2.

Received December 10, 2019

Revised May 18, 2020

Accepted May 25, 2020

A.-R.K. Ramazanov, Dr.Phys.-Math., Prof., Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia; Dagestan Scientific Center RAN, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367025 Russia, e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru .

A.K. Ramazanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Bauman Moscow State Technical University (Kaluga Branch), Kaluga, 248000, Russia, e-mail: akramazanov@mail.ru .

V.G. Magomedova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia, e-mail: vazipat@rambler.ru .

Cite this article as: A.-R. K. Ramazanov, A. K. Ramazanov, V. G. Magomedova. On the Gibbs phenomenon for rational spline functions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 238–251 .

УДК 517.9+519.853.3

**О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ
В ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ¹****М. И. Сумин**

Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности (КУО) в выпуклой задаче оптимального управления для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечным фазовым ограничением-равенством и конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства. Множество допустимых управлений задачи по традиции вкладывается в пространство суммируемых с квадратом функций. Однако, целевой функционал не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Получение регуляризованных КУО основано на использовании двух параметров регуляризации. Один из них “отвечает” за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к целевому функционалу исходной задачи. Основное предназначение регуляризованных принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина — устойчивое генерирование минимизирующих приближенных решений в смысле Дж. Варги. Регуляризованные КУО: 1) формулируются как теоремы существования в исходной задаче минимизирующих приближенных решений с одно-временным конструктивным представлением их конкретных представителей; 2) выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона — Понтрягина; 3) являются секвенциальными обобщениями своих классических аналогов и сохраняют их общую структуру; 4) “преодолевают” свойства некорректности КУО и являются регуляризирующими алгоритмами для решения оптимизационных задач.

Ключевые слова: выпуклое оптимальное управление, выпуклое программирование, минимизирующая последовательность, регуляризирующий алгоритм, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, двойственная регуляризация.

M. I. Sumin. On the regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems.

We consider a regularization of the classical optimality conditions (COCs) in a convex optimal control problem for a linear system of ordinary differential equations with a pointwise state equality constraint and a finite number of functional constraints in the form of equalities and inequalities. The set of admissible controls of the problem is traditionally embedded in the space of square integrable functions. However, the objective functional is not, generally speaking, strongly convex. The proof of regularized COCs is based on the use of two regularization parameters. One of them is “responsible” for the regularization of the dual problem, while the other is contained in a strongly convex regularizing addition to the objective functional of the original problem. The main purpose of the regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle is the stable generation of minimizing approximate solutions in the sense of J. Warga. The regularized COCs: (1) are formulated as theorems on the existence of minimizing approximate solutions in the original problem with the simultaneous constructive presentation of their specific representatives; (2) are expressed in terms of regular classical Lagrange and Hamilton–Pontryagin functions; (3) are sequential generalizations of their classical counterparts and retain their general structure; (4) “overcome” the properties of ill-posedness of COCs and are regularizing algorithms for optimization problems.

Keywords: convex optimal control, convex programming, minimizing sequence, regularizing algorithm, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle, dual regularization.

MSC: 49K15, 49N15, 47A52

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-252-269

Введение

Работа посвящена регуляризации принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) в выпуклой задаче оптимального управления для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечным фазовым ограничением типа равенства и

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-07-00782_а, 20-01-00199_а и проект 20-52-00030 Бел_а).

конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства. Множество допустимых управлений задачи по традиции вкладывается в пространство суммируемых с квадратом функций, но целевой функционал при этом не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Основное предназначение доказываемых в работе регуляризованных классических условий оптимальности (КУО) — устойчивое генерирование минимизирующих последовательностей — минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги (см. [1, гл. III]) в рассматриваемой задаче для целей ее непосредственного практического устойчивого решения. Заметим здесь же, что в теории математического программирования такие обобщенные минимизирующие последовательности известны также под названием обобщенных планов (см. [2]). Подчеркнем, что широко используемое в оптимальном управлении понятие МПР органично сочетает в себе учет как запросов строгой математической оптимизационной теории (см. [1, гл. IV–VIII; 2]), так и потребностей инженерной практики, предполагающей неизбежное наличие у приближенных решений ненулевых зазоров и при выполнении ограничений задачи, и при приближении значений функционала цели к ее (обобщенной) нижней грани (см. [1, гл. III]).

Регуляризованные КУО формулируются в данной работе как полностью сохраняющие “структуру” КУО теоремы существования МПР с одновременным конструктивным представлением их конкретных представителей. Их утверждения естественно трактовать так же, как регуляризирующие алгоритмы для решения рассматриваемой задачи оптимального управления. Соответствующее понятие так называемого МПР-образующего алгоритма для ее решения определяется ниже в разд. 1. Первые результаты по регуляризации КУО в задачах условной выпуклой оптимизации в гильбертовых пространствах были получены в работах [3; 4]. В их основе лежат методы двойственной регуляризации (см. [5]). Естественную потребность в такой регуляризации можно связать, по крайней мере, с двумя следующими обстоятельствами.

1. Прежде всего, несмотря на очевидную важность умения решать те или иные задачи условной оптимизации, возникающие при исследованиях как теоретического, так и прикладного характера, возможности непосредственного применения КУО для этой цели существенно ограничиваются свойствами некорректности последних (см. [4; 6]). Здесь в первую очередь мы имеем ввиду такое свойство некорректности КУО, как их неустойчивость по возмущению исходных данных оптимизационных задач (связанные с этим подробности, соответствующие примеры неустойчивости, а также другие примеры некорректности КУО можно найти в [4; 6]). В частности, неустойчивость КУО неизбежно проявляется в задачах бесконечномерной условной оптимизации, возникающих при исследовании широкого спектра обратных задач современного естествознания. Обсуждение автором этого вопроса можно найти в работе 2019 г. (Сумин М.И. Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 279–296).

2. Кроме того, можно в данном контексте указать и на то, что во многих важных задачах условной бесконечномерной оптимизации с операторными ограничениями (т. е. с ограничениями, задаваемыми операторами с бесконечномерными образами) возникают трудности принципиального характера при получении самих КУО. В частности, это относится к задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями-равенствами, возникающим опять же при исследовании обратных задач (см., например, вышеуказанную работу автора 2019 г.). Получение КУО в задачах с такими ограничениями, относящимися к классу так называемых нерегулярных смешанных ограничений (см., например, [7; 8]), как справедливо замечено в [7, с. 92], чрезвычайно сложно. Такое сложное фазовое ограничение-равенство содержит и рассматриваемая ниже задача оптимального управления.

Регуляризация КУО имеет самое непосредственное отношение к указанным выше двум группам вопросов, связанных как с неустойчивостью (и некорректностью) самих КУО, так и с трудностями их формального доказательства. И в том, и в другом случае регуляризованные КУО устойчиво генерируют МПР в исходной оптимизационной задаче, а сами КУО “заменяются” их секвенциальными обобщениями, являясь “пределными вариантами” этих МПР.

Другими словами, можно говорить в обоих случаях о трансформации КУО в устойчивые к ошибкам исходных данных инструменты для решения задач условной оптимизации.

Регуляризация КУО в выпуклых задачах оптимального управления с не сильно выпуклыми целевыми функционалами рассматривалась ранее в работах [6; 9]. Аналогичные результаты, но для задач оптимального управления с сильно выпуклыми целевыми функционалами были получены в [10]. Отличие результатов [6; 9] и [10] кратко можно описать следующим образом. Во-первых, как в том, так и в другом случае МПР конструируется из точек минимума функции Лагранжа задачи, соответствующих значениям двойственных переменных из некоторой последовательности, определяемой регуляризованными КУО. В случае сильно выпуклого целевого функционала сильно выпуклой по исходной переменной является и функция Лагранжа, и, как следствие однозначно и корректно определяются и элементы МПР. В отсутствие же сильной выпуклости при ограниченном множестве допустимых элементов гарантируется лишь существование элемента МПР в соответствующем множестве минималей функции Лагранжа. Таким образом, генерирование МПР в силу регуляризованных КУО в такой ситуации в существенной степени теряет свою конструктивность. В настоящей работе для преодоления этого недостатка регуляризованных КУО (см. [6; 9]) вместо одного используются два параметра регуляризации. Один из них, как и в [6; 9; 10], “отвечает” за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к целевому функционалу исходной задачи.

В заключение вводной части отметим, что интерес к проблемам, так или иначе связанным с вопросами регуляризации КУО, наблюдается на протяжении нескольких последних десятилетий. В частности, укажем здесь на работы самого последнего времени [11; 12] (см. также библиографию этих работ) по обоснованию так называемого SQH метода (Sequential Quadratic Hamiltonian Method) решения задач оптимального управления, представляющего собою основанную на ПМП итерационную схему, предполагающую использование числовых регуляризирующих добавок к гамильтониану задачи. Однако следует подчеркнуть, что указанный SQH метод (см. [11; 12]) нацелен на решение лишь “простейших” задач оптимального управления, т. е. задач только с геометрическими ограничениями.

1. Выпуклая задача оптимального управления с операторным и функциональными ограничениями

Рассмотрим выпуклую задачу оптимального управления с фиксированным временем, с поточечным фазовым ограничением типа равенства, понимаемым как ограничение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \equiv L_2(X)$, и конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства

$$(OC^\delta) \quad f^\delta(u) \equiv \varphi_0^\delta(x^\delta[u](T)) \rightarrow \min, \quad u \in \tilde{\mathcal{D}} \subset L_2^l(0, T),$$

$$G^\delta(u)(t) \equiv \langle \Phi_1^\delta(t), x^\delta[u](t) \rangle = H_1^\delta(t) \quad \text{при п. в. } t \in X,$$

$$g_{1,i}^\delta(u) \equiv \langle \varphi_{1,i}^\delta, x^\delta[u](T) \rangle = h_{1,i}^\delta, \quad i = 1, \dots, k, \quad g_{2,i}^\delta(u) \equiv \varphi_{2,i}^\delta(x^\delta[u](T)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Здесь

$\varphi_0^\delta, \varphi_{2,i}^\delta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1, i = 1, \dots, m$, — выпуклые непрерывные функции;

$\Phi_1^\delta, H_1^\delta \in L_\infty(X)$; $\varphi_{1,i}^\delta \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, k$; $h_1^\delta \equiv (h_{1,1}^\delta, \dots, h_{1,k}^\delta) \in \mathbb{R}^k$;

$\tilde{\mathcal{D}} \equiv \{u \in L_2^l(0, T) : u(t) \in U \text{ при п. в. } t \in (0, T)\}$, $U \subset \mathbb{R}^l$, — выпуклый компакт;

$X \subset [0, T]$, $X = \text{cl } \dot{X}$, — замкнутое множество без изолированных точек с непустой внутренностью;

$x^\delta[u](t), t \in [0, T]$, — решение задачи Коши

$$\dot{x} = \mathcal{A}^\delta(t)x + \mathcal{B}^\delta(t)u(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

с измеримыми по Лебегу ограниченными матрицами $\mathcal{A}^\delta: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{B}^\delta: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times l}$. Верхний индекс δ в исходных данных задачи (ОС $^\delta$) означает, что они либо заданы точно ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), т.е. задаются с ошибкой, величину которой и характеризует параметр $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$, — некоторое фиксированное число². Обозначаем через u^0 оптимальные элементы в задаче (ОС 0) в случае их существования. Всю совокупность оптимальных элементов в этом случае обозначаем через U^0 .

Будем считать, что выполняются следующие оценки для отклонений возмущенных исходных данных задачи от точных:

$$\begin{aligned} \|\Phi_1^\delta - \Phi_1^0\|_{\infty, X} &\leq C\delta, \quad \|H_1^\delta - H_1^0\|_{\infty, X} \leq C\delta, \\ |\varphi_{1,i}^\delta - \varphi_{1,i}^0| &\leq C\delta, \quad |h_{1,i}^\delta - h_{1,i}^0| \leq C\delta, \quad i = 1, \dots, k, \\ |\varphi_0^\delta(x) - \varphi_0^0(x)| &\leq C_M\delta, \quad |\varphi_{2,i}^\delta(x) - \varphi_{2,i}^0(x)| \leq C_M\delta \quad \forall x \in S_M^n, \quad i = 1, \dots, m, \\ \|\mathcal{A}^\delta - \mathcal{A}^0\|_{\infty, (0, T)} &\leq C\delta, \quad \|\mathcal{B}^\delta - \mathcal{B}^0\|_{\infty, (0, T)} \leq C\delta, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где постоянные $C, C_M > 0$ не зависят от δ , $S_M^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq M\}$. Обозначим через f^δ произвольный набор $(\varphi_0^\delta, \Phi_1^\delta, H_1^\delta, \varphi_{1,i}^\delta, h_{1,i}^\delta, i = 1, \dots, k, \varphi_{2,i}^\delta, i = 1, \dots, m, \mathcal{A}^\delta, \mathcal{B}^\delta)$ исходных данных задачи (ОС $^\delta$), удовлетворяющих оценкам (1.2).

Введем обозначения: $g_1^\delta(u) \equiv (g_{1,1}^\delta(u), \dots, g_{1,k}^\delta(u))$, $g_2^\delta(u) \equiv (g_{2,1}^\delta(u), \dots, g_{2,m}^\delta(u))$,

$$\tilde{\mathcal{D}}^{\delta, \epsilon} \equiv \{u \in \tilde{\mathcal{D}}: \|\langle \Phi_1^\delta(\cdot), x^\delta[u](\cdot) \rangle - H_1^\delta(\cdot)\|_{2, X} \leq \epsilon, |g_1^\delta(u) - h_1^\delta| \leq \epsilon, \min_{x \in \mathbb{R}_-^m} |g_2^\delta(u) - x| \leq \epsilon\},$$

где $\mathbb{R}_-^m \equiv \{x \equiv (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m: x_1 \leq 0, \dots, x_m \leq 0\}$, $\epsilon \geq 0$, $\tilde{\mathcal{D}}^{0,0} \equiv \tilde{\mathcal{D}}^0$. Ниже центральным для нас будет понятие МПР в задаче (ОС 0), т.е. последовательности $u^k \in \tilde{\mathcal{D}}$, $k = 1, 2, \dots$, такой, что $f^0(u^k) \rightarrow \beta$, $u^k \in \tilde{\mathcal{D}}^{0, \epsilon^k}$ для некоторой последовательности положительных чисел ϵ^k , $k = 1, 2, \dots$, $\epsilon^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Здесь β — обобщенная нижняя грань: $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon$, $\beta_\epsilon \equiv \inf_{u \in \tilde{\mathcal{D}}^{0, \epsilon}} f^0(u)$, $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\tilde{\mathcal{D}}^{0, \epsilon} = \emptyset$. Очевидно, $\beta \leq \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf_{u \in \tilde{\mathcal{D}}^0} f^0(u)$ — классическая нижняя грань. Однако, в задаче (ОС 0) в силу ее выпуклости и ограниченности $\tilde{\mathcal{D}}$ справедливо равенство $\beta = \beta_0 = \{f^0(u^0)$, если u^0 существует; $+\infty$ в противном случае}.

Введем согласованное с понятием МПР понятие МПР-образующего (регуляризирующего) оператора для задачи (ОС 0).

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k , $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k} , удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^k$, элемент $u^{\delta^k} \in \tilde{\mathcal{D}}$, называется МПР-образующим в задаче (ОС 0), если последовательность u^{δ^k} , $k = 1, 2, \dots$, есть МПР в этой задаче.

З а м е ч а н и е 1. При определении МПР и МПР-образующего оператора использована метрика $L_2(X)$. Однако ввиду компактности в $C(X)$ множества $\{x[u](\cdot): u \in \tilde{\mathcal{D}}\}$ в этих определениях можно было бы вместо нее использовать и метрику $L_p(X)$ с любым $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$. Это объясняется тем, что в силу указанной компактности любое МПР в задаче (ОС 0) в смысле введенного выше определения является таковым же и в случае, когда в нем используется показатель $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$ вместо $p = 2$.

Перепишем задачу (ОС $^\delta$) в более компактной форме

$$(ОС^\delta) \quad f^\delta(u) \rightarrow \min, \quad u \in \tilde{\mathcal{D}},$$

²Здесь и ниже $L_p^l(X)$, $L_p^1(X) \equiv L_p(X)$, — пространство суммируемых со степенью $1 \leq p < \infty$ (измеримых существенно ограниченных в случае $p = \infty$) на множестве X функций $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^l$ с нормой $\|\varphi\|_{p, X}$, $\mathbb{R}^{n \times l}$ — пространство $(n \times l)$ -матриц.

$$\tilde{g}_1^\delta(u) \equiv (G^\delta(u), g_{1,1}^\delta(u), \dots, g_{1,k}^\delta(u)) = \bar{h}^\delta, \quad g_2^\delta(u) \equiv (g_{2,1}^\delta(u), \dots, g_{2,m}^\delta(u)) \leq 0,$$

где $\bar{h}^\delta \equiv (H_1^\delta, h_{1,1}^\delta, \dots, h_{1,k}^\delta) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k$, а затем и в эквивалентной форме задачи выпуклого программирования

$$(\tilde{P}^\delta) \quad f^\delta(u) \rightarrow \min, \quad A^\delta u = h^\delta, \quad g^\delta(u) \leq 0, \quad u \in \tilde{\mathcal{D}}.$$

Здесь

$A^\delta: L_2^l(0, T) \rightarrow L_2(X) \times \mathbb{R}^k \equiv H$ — линейный ограниченный оператор, задаваемый равенством $A^\delta u \equiv (\langle \Phi_1^\delta(\cdot), x_0^\delta[u](\cdot) \rangle, \langle \varphi_{1,1}^\delta, x_0^\delta[u](T) \rangle, \dots, \langle \varphi_{1,k}^\delta, x_0^\delta[u](T) \rangle)$;

$x_0^\delta[u]$ — решение задачи Коши с однородным начальным условием

$$\dot{x} = \mathcal{A}^\delta(t)x + \mathcal{B}^\delta(t)u(t), \quad x(0) = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T];$$

$g^\delta(u) \equiv g_2^\delta(u)$; $h^\delta \equiv \bar{h}^\delta - \tilde{h}^\delta$; $\tilde{h}^\delta \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k$ — элемент, задаваемый равенством

$$\tilde{h}^\delta \equiv (\langle \Phi_1^\delta(\cdot), x^\delta[0](\cdot) \rangle, \langle \varphi_{1,1}^\delta, x^\delta[0](T) \rangle, \dots, \langle \varphi_{1,k}^\delta, x^\delta[0](T) \rangle).$$

Запишем оценки для отклонений исходных данных возмущенной задачи (\tilde{P}^δ) ($\delta > 0$) от соответствующих исходных данных невозмущенной задачи ($\delta = 0$). С помощью хорошо известных стандартных средств легко показать, что справедливы оценки

$$\|x^\delta[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leq C_1(1 + \|u\|_{2,(0,T)}), \quad \|x_0^\delta[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leq C_2\|u\|_{2,(0,T)},$$

$$\|x^\delta[u] - x^0[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leq C_3\delta(1 + \|u\|_{2,(0,T)}), \quad \|x_0^\delta[u] - x_0^0[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leq C_4\delta(1 + \|u\|_{2,(0,T)}),$$

в которых постоянные $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ не зависят ни от матриц $\mathcal{A}^\delta, \mathcal{B}^\delta$, удовлетворяющих оценкам (1.2), ни от δ , ни от $u \in L_2^l(0, T)$, $\|x\|_{[0,T]}^{(0)} \equiv \|x\|_{C[0,T]}$. В свою очередь, эти оценки в совокупности с оценками (1.2) отклонения возмущенных исходных данных от точных для задачи (ОС $^\delta$) приводят к искомым оценкам отклонения исходных данных возмущенной задачи (\tilde{P}^δ) от соответствующих исходных данных точной задачи

$$|f^\delta(u) - f^0(u)| \leq C_5\delta, \quad |g^\delta(u) - g^0(u)| \leq C_6\delta \quad \forall u \in \tilde{\mathcal{D}}, \quad (1.3)$$

$$\|A^\delta u - A^0 u\| \leq C_7\delta(1 + \|u\|_{2,(0,T)}) \quad \forall u \in L_2^l(0, T), \quad \|h^\delta - h^0\| \leq C_8\delta,$$

где постоянные $C_5, C_6, C_7, C_8 > 0$ также не зависят ни от набора f^δ , удовлетворяющего оценкам (1.2), ни от $\delta \in (0, \delta_0]$.

2. Задача выпуклого программирования

Основной нашей целью, как уже было сказано выше, является доказательство регуляризованных ПЛ и ПМП в задаче оптимального управления (ОС 0) с выпуклым (и, вообще говоря, не сильно выпуклым) функционалом качества в случае ограниченного множества \mathcal{D} . Будем опираться для достижения указанной цели на результаты статьи [4], в которой рассматривалась регуляризация ПЛ или, другими словами, теоремы Куна — Таккера для задачи выпуклого программирования в предположении сильной выпуклости целевого функционала (как точного, так и возмущенного).

Перепишем задачу (\tilde{P}^δ) в обозначениях [4]. Отметим сразу, что в отличие от [4] будем иметь дело здесь с задачей без параметров в ограничениях, т. е. в задаче $(P_{p,r})$ из [4] надо формально положить $p = 0, r = 0$. Таким образом, вместо задачи (\tilde{P}^δ) будем непосредственно рассматривать задачу с ограниченным допустимым множеством \mathcal{D}

$$(P^\delta) \quad f^\delta(z) \rightarrow \min, \quad A^\delta z = h^\delta, \quad g_i^\delta(z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

которая совпадает с задачей (\tilde{P}^δ), если мы формально полагаем:

$$\begin{aligned} Z &= L_2^1(0, T); \quad z = u; \quad H = L_2(X) \times \mathbb{R}^k; \\ \mathcal{D} &= \tilde{\mathcal{D}} \equiv \{u \in L_2^1(0, T): u(t) \in U \text{ при п. в. } t \in (0, T)\}; \\ f^\delta(u) &\equiv \varphi_0^\delta(x^\delta[u](T)); \\ A^\delta u &\equiv (\langle \Phi_1^\delta(\cdot), x_0^\delta[u](\cdot) \rangle, \langle \varphi_{1,1}^\delta, x_0^\delta[u](T) \rangle, \dots, \langle \varphi_{1,k}^\delta, x_0^\delta[u](T) \rangle); \\ g^\delta(u) &\equiv g_2^\delta(u); \quad h^\delta \equiv \bar{h}^\delta - \tilde{h}^\delta. \end{aligned}$$

Ее решения в случае их существования обозначаем через z^0 , а множество всех таких решений — через Z^0 .

Для этой задачи, как и в [4], можем записать в силу локальной липшицевости функций $\varphi_0^\delta, \varphi_{2,i}^\delta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ и стандартных оценок для отклонений решений задачи Коши (1.1)

$$|f^\delta(z_1) - f^\delta(z_2)| \leq L_M \|z_1 - z_2\|, \quad |g^\delta(z_1) - g^\delta(z_2)| \leq L_M \|z_1 - z_2\| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{D} \cap S_M,$$

где $L_M > 0$ — независящая от δ постоянная, $S_M \equiv \{z \in Z: \|z\| \leq M\}$, а также в силу (1.3) оценки для отклонений возмущенных исходных данных от точных

$$\begin{aligned} |f^\delta(z) - f^0(z)| &\leq C\delta(1 + \|z\|^2), & \|A^\delta z - A^0 z\| &\leq C\delta(1 + \|z\|), \\ |g^\delta(z) - g^0(z)| &\leq C\delta(1 + \|z\|^2) \quad \forall z \in \mathcal{D}, & \|h^\delta - h^0\| &\leq C\delta, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $C > 0$ не зависит от δ . Здесь мы сохраняем оценки для отклонений в таком виде, как они даны в [4], хотя в силу ограниченности \mathcal{D} сомножители $(1 + \|z\|)$ в правых частях неравенств могут быть формально удалены (см. (1.3)).

Как и в [4], используем обозначения $L^\delta(z, \lambda, \mu) \equiv f^\delta(z) + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta \rangle + \langle \mu, g^\delta(z) \rangle$, $\mathcal{D}^{\delta, \epsilon} \equiv \{z \in \mathcal{D}: \|A^\delta z - h^\delta\| \leq \epsilon, g_i^\delta(z) \leq \epsilon, i = 1, \dots, m\}$, $\epsilon \geq 0$, $\mathcal{D}^{0,0} \equiv \mathcal{D}^0$, а под МПР понимаем последовательность $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$, если $f^0(z^k) \rightarrow \beta$, $z^k \in \mathcal{D}^{0, \epsilon^k}$, для некоторой последовательности положительных чисел ϵ^k , $k = 1, 2, \dots$, $\epsilon^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, где обобщенная нижняя грань $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon$, $\beta_\epsilon \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}^{0, \epsilon}} f^0(z)$, $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0, \epsilon} = \emptyset$. Как и в случае задачи (ОС $^\delta$), здесь в силу ограниченности \mathcal{D} имеет место равенство $\beta = \beta_0 \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}^0} f^0(z)$.

Введем далее, следуя традиции теории некорректных задач, понятие регуляризирующего алгоритма в задаче условной оптимизации (P 0). Предположим, что обобщенная нижняя грань β задачи (P 0) удовлетворяет строгому неравенству $\beta < +\infty$.

О п р е д е л е н и е 2. Зависящий от параметра $\delta \in (0, \delta_0)$, оператор $R(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \delta)$, ставящий в соответствие каждой четверке исходных данных $f^\delta, A^\delta, h^\delta, g^\delta$, удовлетворяющих оценкам (2.1), элемент $R(f^\delta, A^\delta, h^\delta, g^\delta, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$ такой, что $f^0(z^\delta) \rightarrow \beta$, $\|A^0 z^\delta - h^0\| \rightarrow 0$, $\min_{x \in \mathbb{R}^m} |g^0(z^\delta) - x| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, называется *регуляризирующим* в задаче (P 0).

З а м е ч а н и е 2. Определения регуляризирующих алгоритмов для задач математического программирования с конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства можно найти, например, в [13, гл. 9]. Эти определения даны в случае задач первого типа (т.е. задач, в которых ищется только нижняя грань, см. [13, гл. 9, с. 802]) и второго типа (т.е. задач, в которых ищется и нижняя грань, и оптимальный элемент, см. [13, гл. 9, с. 837]). С формальной точки зрения данное выше определение 2 занимает промежуточное положение между двумя указанными выше определениями (см. [13, гл. 9]). В отличие от определения [13, гл. 9, с. 802] в определении 2 речь идет не только о приближении к нижней грани задачи, но и параллельно о выполнении “в пределе” ее ограничений с одновременным представлением “сходящихся” при $\delta \rightarrow 0$, как по функции, так и по “ограничениям” элементов $R(f^\delta, A^\delta, h^\delta, g^\delta, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$. В то же время в отличие от определения [13, гл. 9, с. 837] в определении 2 не идет речь о какой-либо сходимости (сильной, слабой) при $\delta \rightarrow 0$ самих элементов семейства $R(f^\delta, A^\delta, h^\delta, g^\delta, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$ к какому-либо конкретному элементу, например, к точному решению задачи (P 0) в случае существования последнего. Такая сходимость (сильная, слабая) является уже следствием, как того факта, что элементы $R(f^\delta, A^\delta, h^\delta, g^\delta, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$

при $\delta \rightarrow 0$ сходятся одновременно и по функции, и по “ограничениям”, так и дополнительных свойств исходных данных задачи.

Так как основной целью работы является построение МПР в задаче (ОС⁰), а семейство $\{z^\delta \in \mathcal{D}: \delta \in (0, \delta_0]\}$ из определения 2 не является последовательностью, то помимо введенного выше определения регуляризирующего оператора в задаче (P⁰) введем его “след” — определение МПР-образующего оператора в задаче (P⁰) (см. аналогичное определение 1).

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k , $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(f^{\delta^k}, A^{\delta^k}, h^{\delta^k}, g^{\delta^k})$, удовлетворяющих оценкам (2.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $z^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется МПР-образующим в задаче (P⁰), если последовательность z^{δ^k} , $k = 1, 2, \dots$, есть МПР в этой задаче.

2.1. Двойственная регуляризация в задаче выпуклого программирования с сильно выпуклым функционалом цели

Предполагаем в данном разделе, что функции f^δ , $\delta \in [0, \delta_0]$, в задаче (P^δ) являются сильно выпуклыми на \mathcal{D} с постоянной сильной выпуклости κ , которая не зависит от $\delta \in [0, \delta_0]$, а задача (P⁰) имеет решение, которое обозначается через z^0 . Обозначим, как и в [4], через $(\lambda^{\delta, \alpha}, \mu^{\delta, \alpha})$ единственную в $H \times \mathbb{R}_+^m$ точку, дающую на этом множестве максимум сильно вогнутому функционалу

$$R^{\delta, \alpha}(\lambda, \mu) \equiv V^\delta(\lambda, \mu) - \alpha \|\lambda\|^2 - \alpha |\mu|^2, \quad (\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m.$$

Подчеркнем, что в данной работе в отличие от [4] мы рассматриваем, во-первых, непараметрическую задачу (P⁰) (т.е. задачу, не содержащую параметры в ограничениях), у которой, во-вторых, множество \mathcal{D} ограничено. Здесь мы используем все те же обозначения, что и в [4], но пара (p, r) при этом из всех обозначений [4] удаляется.

Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Как и в [4], используем обозначение $z^\delta[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{argmin} \{L^\delta(z, \lambda, \mu), z \in \mathcal{D}\}$ для минималей функций Лагранжа, из которых в конечном итоге и konstrуируется МПР в задаче. Напомним, что в [4] (без предположения ограниченности \mathcal{D}) при условии независимости постоянной сильной выпуклости κ от δ было показано (см. [4, неравенство (3.25)]), что

$$\|z^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}]\| \leq L, \quad (2.3)$$

где постоянная $L > 0$ не зависит от $\delta \in [0, \delta_0]$, но зависит, вообще говоря, от κ . Указанная постоянная L была использована затем в формулировке теоремы сходимости метода двойственной регуляризации (см. [4, теорема 3.1]). При получении этой оценки использовалась, в частности, доказанная в [4, (3.17)], оценка

$$f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}]) \geq K, \quad (2.4)$$

где постоянная K также не зависит от $\delta \in [0, \delta_0]$, но зависит, вообще говоря, от κ . Так как в данной работе множество \mathcal{D} ограничено, то первая из этих оценок выполняется автоматически, например с $L = \sup_{z \in \mathcal{D}} \|z\|$, а вторая выполняется в силу первой из оценок (2.1) и того факта, что непрерывная выпуклая функция на ограниченном замкнутом выпуклом множестве гильбертова пространства достигает минимума. Данное обстоятельство позволяет нам воспользоваться теми результатами из [4], которые были получены с использованием указанных выше двух оценок. Сохраним ниже обозначения L и K для постоянных из этих двух оценок.

С учетом сказанного мы можем применить в данной работе теорему сходимости метода двойственной регуляризации из [4, теорема 3.1] для задачи (P⁰). Но прежде чем сформулировать здесь нужную нам часть этой теоремы, приведем следующие оценки из [4], являющиеся основными при ее доказательстве. Во-первых, это оценка (3.23) (постоянная C в ней — это постоянная из (2.1))

$$f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \leq f^0(z^0) + C\delta(1 + \|z^0\|^2) + C\delta\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|(2 + \|z^0\|) + C\delta|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|(1 + \|z^0\|^2) \equiv f^0(z^0) + \psi(\delta). \quad (2.5)$$

Она является следствием неравенств, во втором из которых используются оценки (2.1),

$$\begin{aligned} L^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}], \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}) &\leq L^\delta(z^0, \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}) \\ &\leq f^0(z^0) + [f^\delta(z^0) - f^0(z^0)] + \|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\| \|A^\delta z^0 - h^\delta\| + |\mu^{\delta,\alpha(\delta)}| |g^\delta(z^0) - g^0(z^0)| \\ &\leq f^0(z^0) + C\delta(1 + \|z^0\|^2) + C\delta\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|(2 + \|z^0\|) + C\delta|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|(1 + \|z^0\|^2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

учитывая [4, неравенство (3.14)]

$$\langle (A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^\delta, g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}])), (\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}) \rangle \geq 0. \quad (2.7)$$

Во вторых, это оценка из [4, (3.18)]

$$\alpha(\delta)\sqrt{\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|^2 + |\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|^2} \leq C_2\delta + \sqrt{C_2^2\delta^2 - 8\alpha(\delta)K(\delta)} \equiv \phi(\delta, \alpha(\delta)), \quad (2.8)$$

где $C_2 = \sqrt{2}C_1(1 + \|z^0\|^2)$ (см. [4, (3.16)]), $C_1 = 3/2C$ (см. (3.15) там же) и, кроме того, $K(\delta) \equiv f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) - f^0(z^0) - C\delta(1 + \|z^0\|^2)$.

Наконец, в третьих, это оценки из [4, (3.20)]

$$\begin{aligned} \|A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^\delta\| &\leq \phi(\delta, \alpha(\delta)) \rightarrow 0, \\ g_i^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) &\leq \phi(\delta, \alpha(\delta)), \quad \phi(\delta, \alpha(\delta)) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Применение оценок (2.3), (2.4) в совокупности с оценками (2.1) в (2.5), (2.8), (2.9) приводит к следующим результатам ($\psi(\delta)$ определено в (2.5), $\phi(\delta, \alpha(\delta))$ — в (2.8))

$$\begin{aligned} &\|A^0 z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^0\| \\ &\leq \|A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^\delta\| + \|A^0 z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\| + \|h^0 - h^\delta\| \\ &\leq \|A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^\delta\| + C\delta(1 + \|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\|) + C\delta \leq \phi(\delta, \alpha(\delta)) + C\delta(2 + L), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} &g_i^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \\ &\leq g_i^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) + g_i^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) - g_i^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \\ &\leq g_i^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) + C\delta(1 + \|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\|^2) \leq \phi(\delta, \alpha(\delta)) + C\delta(1 + L^2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} &f^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \\ &\leq f^0(z^0) + \psi(\delta) + f^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) - f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \\ &\leq f^0(z^0) + \psi(\delta) + C\delta(1 + \|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\|^2) \leq f^0(z^0) + \psi(\delta) + C\delta(1 + L^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Кроме того, оценивая величину $\phi(\delta, \alpha(\delta))$, имеем (напомним, что $C_2 = C(3\sqrt{2}/2)(1 + \|z^0\|^2)$)

$$\begin{aligned} \phi(\delta, \alpha(\delta)) &\equiv C_2\delta + \sqrt{C_2^2\delta^2 - 8\alpha(\delta)K(\delta)} \\ &\equiv C_2\delta + \sqrt{C_2^2\delta^2 - 8\alpha(\delta)(f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) - f^0(z^0) - C\delta(1 + \|z^0\|^2))} \end{aligned}$$

$$\leq C_2\delta + \sqrt{C_2^2\delta^2 - 8\alpha(\delta)(K - f^0(z^0) - C\delta(1 + \|z^0\|^2))}, \quad (2.13)$$

$$\alpha(\delta)\sqrt{\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|^2 + |\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|^2} \leq C_2\delta + \sqrt{C_2^2\delta^2 - 8\alpha(\delta)(K - f^0(z^0) - C\delta(1 + \|z^0\|^2))}. \quad (2.14)$$

Как результат полученных оценок можем сформулировать теорему сходимости метода двойственной регуляризации в задаче (P^0) , являющуюся следом из [4, теорема 3.1] (в данной работе нам нужны не все утверждения этой теоремы)

Теорема 1 (Регуляризирующий двойственный алгоритм). Пусть задача (P^0) имеет решение z^0 . Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, при выполнении условия согласования (2.2) выполняются соотношения:

$$f^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \leq f^0(z^0) + \psi_1(\delta), \quad \psi_1(\delta) \equiv \psi(\delta) + C\delta(1 + L^2) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0; \quad (2.15)$$

$$\|A^0 z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^0\| \leq \phi(\delta, \alpha(\delta)) + C\delta(2 + L) \rightarrow 0; \quad (2.16)$$

$$g_i^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \leq \phi(\delta, \alpha(\delta)) + C\delta(1 + L^2) \rightarrow 0; \quad (2.17)$$

$$\langle (\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}), (A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^\delta, g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}])) \rangle \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad (2.18)$$

где C — независящая от δ постоянная (см. формулу (2.1)), величина L определена в (2.3), а величины $\psi(\delta)$, $\phi(\delta, \alpha(\delta))$ определены в (2.5), (2.8), соответственно.

Если же сильно выпуклый функционал f^0 является и субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках \mathcal{D} , то справедливо и предельное соотношение

$$\|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - z^0\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная задача, алгоритм, задаваемый равенством $R(f^\delta, A^\delta, h^\delta, g^\delta, \delta) = z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$, является регуляризирующим в смысле определения 2, причем в случае субдифференцируемости f^0 в точках \mathcal{D} имеет место и сильная сходимость (2.19). Если же такой субдифференцируемости нет, то можно говорить лишь о слабой сходимости $z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$ к z^0 при $\delta \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е 3. В формулировке теоремы 3.1 в [4] были пропущены полученные при ее доказательстве слагаемые: $\psi(\delta)$ (см. [4, неравенства (3.23), (3.26)]) — в выражении для $\psi_1(\delta)$ в формуле, соответствующей (2.15); $C\delta(2 + L)$ — в правой части неравенства, соответствующего (2.16); $C\delta(1 + L^2)$ — в правой части неравенства, соответствующего (2.17). В приводимой здесь формулировке все указанные слагаемые восстановлены.

2.2. Двойственная регуляризация в задаче выпуклого программирования с выпуклым функционалом цели

В предыдущем разделе была описана процедура двойственной регуляризации в задаче выпуклого программирования с сильно выпуклым функционалом качества и получены оценки сходимости этой процедуры по функции и по ограничениям. В настоящем разделе мы покажем, как эти оценки могут быть применены к задаче выпуклого программирования с выпуклым функционалом качества, который не обязательно является сильно выпуклым. А именно, мы организуем процесс двойственной регуляризации с помощью двух регуляризирующих добавок, один из которых находится, как и ранее, в двойственной задаче, а другой — в функционале качества.

Итак, рассматриваем сформулированную в начале разд. 2 задачу (P^0) , функционал $f^0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ которой является выпуклым на выпуклом замкнутом ограниченном множестве \mathcal{D} ; точнее, выпуклыми являются как точный функционал f^0 , так и его возмущение f^δ . Пусть решение задачи (P^0) существует, т. е. $Z^0 \neq \emptyset$. Далее будем обозначать через z^0 одно конкретное из решений задачи (P^0) , а именно, ее нормальное, т. е. минимальное по норме, решение.

Рассмотрим формально семейство регуляризованных задач

$$(P_\varepsilon^\delta) \quad f^\delta(z) + \varepsilon \|z\|^2 \rightarrow \min, \quad A^\delta z = h^\delta, \quad g_i^\delta(z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

решения которых z_ε^δ при $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ могут и не существовать, $z_0^0 \equiv z^0$. Очевидно, в каждой из задач (P_ε^δ) с $\varepsilon > 0$ функционал качества $f^\delta(\cdot) + \varepsilon \|\cdot\|^2$ является непрерывным и сильно выпуклым на \mathcal{D} с постоянной сильной выпуклости $\varepsilon > 0$.

Как известно из результатов обычной теории тихоновской стабилизации (см. [13, § 4, теорема 4]), в этом случае имеет место предельное соотношение $z_\varepsilon^0 \rightarrow z^0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где, как уже определено выше, $z^0 \in Z^0$ — нормальное решение исходной задачи (P^0) .

Введем регулярный функционал Лагранжа

$$L^{\delta,\varepsilon}(z, \lambda, \mu) \equiv f^\delta(z) + \varepsilon \|z\|^2 + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta \rangle + \langle \mu, g^\delta(z) \rangle, \quad z \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^m,$$

вогнутый функционал значений — двойственный функционал

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda, \mu) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(z, \lambda, \mu), \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}^m, \quad V^{\delta,0}(\lambda, \mu) \equiv V^\delta(\lambda, \mu)$$

и двойственную задачу

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad (\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m.$$

Пусть $z^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{argmin} \{L^{\delta,\varepsilon}(z, \lambda, \mu), z \in \mathcal{D}\}$ при условии, что $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m$, $\varepsilon > 0$, $\delta \geq 0$. Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}) \in H \times \mathbb{R}_+^m$ решение регуляризованной двойственной задачи $V^{\delta,\varepsilon}(\lambda, \mu) - \alpha(\delta) \|(\lambda, \mu)\|^2 \rightarrow \max$, $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m$ с условием согласования (2.2).

Сформулированные условия в силу оценок (2.10)–(2.12) позволяют записать

$$\|A^0 z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}] - h^0 - p\| \leq \phi(\delta, \alpha(\delta), \varepsilon) + C\delta(2 + L), \quad (2.20)$$

$$g_i^0(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}]) \leq \phi(\delta, \alpha(\delta), \varepsilon) + C\delta(1 + L^2), \quad (2.21)$$

$$f^0(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}]) + \varepsilon \|z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}]\|^2 \leq f^0(z_\varepsilon^0) + \varepsilon \|z_\varepsilon^0\|^2 + \psi(\delta, \varepsilon) + C\delta(1 + L^2), \quad (2.22)$$

$$\|z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}]\| \leq L, \quad (2.23)$$

где (см. формулы (2.5), (2.8), (2.13), (2.14))

$$\phi(\delta, \alpha(\delta), \varepsilon) \leq C_2(\varepsilon)\delta + \sqrt{(C_2(\varepsilon))^2\delta^2 - 8\alpha(\delta)(F - f^0(z_\varepsilon^0) - \varepsilon \|z_\varepsilon^0\|^2 - C\delta(1 + \|z_\varepsilon^0\|^2))}, \quad (2.24)$$

$$\psi(\delta, \varepsilon) \equiv C\delta(1 + \|z_\varepsilon^0\|^2) + C\delta(\|z_\varepsilon^0\| + 2) \|\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}\| + C\delta(1 + \|z_\varepsilon^0\|^2) |\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} & \alpha(\delta) \sqrt{\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}\|^2 + |\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}|^2} \\ & \leq C_2(\varepsilon)\delta + \sqrt{(C_2(\varepsilon))^2\delta^2 - 8\alpha(\delta)(F - f^0(z_\varepsilon^0) - \varepsilon \|z_\varepsilon^0\|^2 - C\delta(1 + \|z_\varepsilon^0\|^2))}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

и в силу ограниченности \mathcal{D} можно считать, что существует такое не зависящее от δ , ε число F , для которого выполняется неравенство (вместо неравенства (2.4))

$$f^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}]) + \varepsilon \|z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}]\|^2 \geq F.$$

Здесь постоянная $C > 0$ берется, как и выше, из (2.1) и не зависит от δ ,

$$C_2(\varepsilon) = C(3\sqrt{2}/2)(1 + \|z_\varepsilon^0\|^2).$$

Полученные оценки (2.20)–(2.22) в совокупности с оценкой (2.24), равенством (2.25) и оценкой (2.26), а также с учетом условия согласования (2.2) и предельного соотношения $z_\varepsilon^0 \rightarrow z^0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где z^0 — нормальное решение исходной задачи (P^0) , позволяют записать

$$\begin{aligned} & A^0 z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}] - h^0 \rightarrow 0, \quad g_i^0(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}]) \leq \varphi(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ & f^0(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}]) \leq f^0(z^0) + \varphi_1(\delta, \varepsilon), \quad \varphi_1(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\alpha(\delta)\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}\| \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta)\|\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

Откуда следует, что любая последовательность $z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}, \mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}]$ с $\delta^k \geq 0$, $\delta^k \rightarrow 0$, $\varepsilon^k > 0$, $\varepsilon^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ представляет собою МПР в рассматриваемой задаче (P^0), все слабые предельные точки которой (они заведомо существуют в силу ограниченности \mathcal{D}) являются ее решениями.

Итак, в настоящем разделе построено МПР в задаче (P^0) или, другими словами, доказана теорема.

Теорема 2. Пусть выполняется условие согласования (2.2), $\delta^k \in (0, \delta_0)$, ε^k , $k = 1, 2, \dots$, — последовательности сходящихся к нулю положительных чисел. Оператор $R(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие любому набору исходных данных $\{f^{\delta^k}, A^{\delta^k}, h^{\delta^k}, g^{\delta^k}\}$, удовлетворяющих оценкам (2.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $R(f^{\delta^k}, A^{\delta^k}, h^{\delta^k}, g^{\delta^k}, \delta^k) \equiv z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}, \mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}]$, является МПР-образующим в смысле определения 3.

Данное обстоятельство позволит нам сформулировать и доказать в терминах МПР в следующем разделе регуляризованный ПЛ для задачи (P^0), являющийся одновременно регуляризирующим алгоритмом в задаче в смысле определения 3.

З а м е ч а н и е 4. При каждом фиксированном ε задача (P_ε^0) является задачей выпуклого программирования с сильно выпуклыми функционалами цели $f^\delta(\cdot) + \varepsilon \|\cdot\|^2$ при $\delta \in [0, \delta_0]$. Поэтому к ней могут быть применены результаты теоремы 3.1 в [4] или, другими словами, результаты теоремы 1, следствием которых, по сути дела, и явились оценки (2.20)–(2.22). Учитывая оценку (2.24) и равенство (2.25), а также условие согласования (2.2) в силу теоремы 1 можно утверждать в этой ситуации, что при дополнительном предположении субдифференцируемости f^0 на \mathcal{D} справедливо предельное соотношение $z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}] \rightarrow z_\varepsilon^0$, $\delta \rightarrow 0$. Так как при этом $z_\varepsilon^0 \rightarrow z^0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где z^0 — нормальное решение исходной задачи (P^0), то можно говорить о существовании такой зависимости $\delta = \delta(\varepsilon)$, при которой справедливо предельное соотношение $z^{\delta(\varepsilon),\varepsilon}[\lambda^\varepsilon, \mu^\varepsilon] \rightarrow z^0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где принято обозначение $(\lambda^\varepsilon, \mu^\varepsilon) \equiv (\lambda^{\delta(\varepsilon),\alpha(\delta(\varepsilon)),\varepsilon}, \mu^{\delta(\varepsilon),\alpha(\delta(\varepsilon)),\varepsilon})$. При этом без ограничения общности в силу предельного соотношения (2.18) выполняется и предельное соотношение

$$\langle (\lambda^\varepsilon, \mu^\varepsilon), (A^{\delta(\varepsilon)} z^{\delta(\varepsilon),\varepsilon}[\lambda^\varepsilon, \mu^\varepsilon] - h^{\delta(\varepsilon)}, g^{\delta(\varepsilon)}(z^{\delta(\varepsilon),\varepsilon}[\lambda^\varepsilon, \mu^\varepsilon])) \rangle \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

2.3. Регуляризованный ПЛ в задаче условной оптимизации с ограниченным допустимым множеством

Прежде всего, покажем, что выполняется и предельное соотношение

$$\langle \lambda^{\delta,\varepsilon}, A^\delta z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}] - h^\delta \rangle + \langle \mu^{\delta,\varepsilon}, g^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}]) \rangle \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Здесь и ниже, как и в теореме 2, принято обозначение $(\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}) \equiv (\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon})$.

Для этого сначала заметим, что из трех соотношений (2.27) следует предельное соотношение

$$f^0(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}]) \rightarrow f^0(z^0), \quad \delta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.30)$$

Одновременно в силу (2.6) можем записать в случае задачи (P_ε^δ)

$$\begin{aligned} & f^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}]) + \varepsilon \|z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}]\|^2 + \langle \lambda^{\delta,\varepsilon}, A^\delta z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}] - h^\delta \rangle + \langle \mu^{\delta,\varepsilon}, g^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}]) \rangle \\ & \leq f^0(z_\varepsilon^0) + \varepsilon \|z_\varepsilon^0\|^2 + C\delta(1 + \|z_\varepsilon^0\|^2) + C\delta\|\lambda^{\delta,\varepsilon}\|(2 + \|z_\varepsilon^0\|) + C\delta|\mu^{\delta,\varepsilon}|(1 + \|z_\varepsilon^0\|^2) \\ & \equiv f^0(z_\varepsilon^0) + \varepsilon \|z_\varepsilon^0\|^2 + \psi(\delta, \varepsilon) \end{aligned}$$

или

$$\langle \lambda^{\delta,\varepsilon}, A^\delta z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}] - h^\delta \rangle + \langle \mu^{\delta,\varepsilon}, g^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}]) \rangle \leq f^0(z_\varepsilon^0) + \varepsilon \|z_\varepsilon^0\|^2 + \psi(\delta, \varepsilon) - f^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}]),$$

что с учетом предельного соотношения (2.30), первой из оценок (2.1), оценки (2.23) и предельных соотношений $z_\varepsilon^0 \rightarrow z^0$, $\psi(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ дает оценку

$$\langle \lambda^{\delta, \varepsilon}, A^\delta z^{\delta, \varepsilon}[\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}] - h^\delta \rangle + \langle \mu^{\delta, \varepsilon}, g^\delta(z^{\delta, \varepsilon}[\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}]) \rangle \leq \gamma(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

При этом в силу (2.7) имеем неравенство $\langle \lambda^{\delta, \varepsilon}, A^\delta z^{\delta, \varepsilon}[\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}] - h^\delta \rangle + \langle \mu^{\delta, \varepsilon}, g^\delta(z^{\delta, \varepsilon}[\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}]) \rangle \geq 0$. Две последние оценки дают предельное соотношение (2.29).

Одновременно получаем, что из равенства

$$V^{\delta, \varepsilon}(\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}) = \min_{z \in \mathcal{D}} L^{\delta, \varepsilon}(z, \lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon})$$

$$= f^\delta(z^{\delta, \varepsilon}[\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}]) + \varepsilon \|z^{\delta, \varepsilon}[\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}]\|^2 + \langle \lambda^{\delta, \varepsilon}, A^\delta z^{\delta, \varepsilon}[\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}] - h^\delta \rangle + \langle \mu^{\delta, \varepsilon}, g^\delta(z^{\delta, \varepsilon}[\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}]) \rangle$$

в силу предельных соотношений (2.29), (2.30) и ограниченности \mathcal{D} следует

$$V^{\delta, \varepsilon}(\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}) \rightarrow f^0(z^0), \quad \delta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.31)$$

Далее нам (в случае ограниченного \mathcal{D}) понадобится оценка

$$|V^{\delta, \varepsilon}(\lambda, \mu) - V^0(\lambda, \mu)| \leq K(\delta(1 + \|\lambda\| + |\mu|) + \varepsilon), \quad (2.32)$$

в которой постоянная $K > 0$ (в случае ограниченного \mathcal{D}) зависит от $\sup_{z \in \mathcal{D}} \|z\|$, но не зависит от δ , ε , $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m$. Для доказательства этой оценки предположим без ограничения общности рассуждений, что $V^{\delta, \varepsilon}(\lambda, \mu) \geq V^0(\lambda, \mu)$. Тогда можем записать цепочку равенств и неравенств

$$\begin{aligned} |V^{\delta, \varepsilon}(\lambda, \mu) - V^0(\lambda, \mu)| &= V^{\delta, \varepsilon}(\lambda, \mu) - V^0(\lambda, \mu) \\ &= V^{\delta, \varepsilon}(\lambda, \mu) - \inf_{z \in \mathcal{D}} (L^0(z, \lambda, \mu) - L^{\delta, \varepsilon}(z, \lambda, \mu) + L^{\delta, \varepsilon}(z, \lambda, \mu)) \\ &\leq V^{\delta, \varepsilon}(\lambda, \mu) - V^{\delta, \varepsilon}(\lambda, \mu) - \inf_{z \in \mathcal{D}} (L^0(z, \lambda, \mu) - L^{\delta, \varepsilon}(z, \lambda, \mu)) \\ &= - \inf_{z \in \mathcal{D}} (L^0(z, \lambda, \mu) - L^{\delta, \varepsilon}(z, \lambda, \mu)) \leq \sup_{z \in \mathcal{D}} |L^{\delta, \varepsilon}(z, \lambda, \mu) - L^0(z, \lambda, \mu)|, \end{aligned}$$

очевидным следствием которой с учетом оценок (2.1) и является доказываемая оценка (2.32). Далее в силу оценки (2.32) можем записать

$$|V^{\delta, \varepsilon}(\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}) - V^0(\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon})| \leq K(\delta(1 + \|\lambda^{\delta, \varepsilon}\| + |\mu^{\delta, \varepsilon}|) + \varepsilon),$$

где постоянная $K > 0$ зависит лишь $\sup_{z \in \mathcal{D}} \|z\|$, но не зависит от δ . Поэтому в силу условия согласования (2.2), оценки (2.26) и ограниченности \mathcal{D} имеем

$$V^{\delta, \varepsilon}(\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}) - V^0(\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Это предельное соотношение позволяет переписать (2.31) в виде

$$V^0(\lambda^{\delta, \varepsilon}, \mu^{\delta, \varepsilon}) \rightarrow \sup_{(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m} V^0(\lambda, \mu) = f^0(z^0), \quad \delta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.33)$$

Сформулируем теперь и докажем следующий регуляризованный ПЛ в задаче (P^0) с ограниченным \mathcal{D} . Подчеркнем, что его формулировка за счет применения секвенциального подхода учитывает одновременно, как регулярный, так и нерегулярный случаи задачи.

Теорема 3. Для того, чтобы в задаче (P^0) существовало МПР (и, следовательно, каждая его слабая предельная точка принадлежала множеству Z^0), необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных переменных $(\lambda^k, \mu^k) \in H \times \mathbb{R}_+^m$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и выполняются включения

$$z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k, \gamma^k}, \quad \gamma^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.34)$$

для некоторой последовательности положительных чисел γ^k , $k = 1, 2, \dots$, (она играет роль последовательности ε^k , $k = 1, 2, \dots$ из определения МПР) и предельное соотношение

$$\langle (\lambda^k, \mu^k), (A^{\delta^k} z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k] - h^{\delta^k}, g^{\delta^k} (z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k])) \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.35)$$

где $\varepsilon^k > 0$, $\varepsilon^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Более того, последовательность $z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым МПР. Другими словами, оператор $R(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \delta^k)$, который задается равенством $R(f^{\delta^k}, A^{\delta^k}, h^{\delta^k}, g^{\delta^k}, \delta^k) = z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k]$, является регуляризирующим в смысле определения 3, причем каждая слабая предельная точка последовательности $z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \dots$, есть решение задачи (P^0) . Одновременно с предельным соотношением $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и соотношениями (2.34), (2.35) выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^k, \mu^k) \rightarrow \sup_{(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m} V^0(\lambda, \mu) = f^0(z^0). \quad (2.36)$$

В качестве конкретной последовательности $(\lambda^k, \mu^k) \in H \times \mathbb{R}_+^m$, $k = 1, 2, \dots$ может быть взята, например, последовательность $(\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k})$, $k = 1, 2, \dots$, вырабатываемая МПР-образующим алгоритмом теоремы 2.

Доказательство. Для проверки необходимости, прежде всего, заметим, что задача (P^0) разрешима, т.е. $Z^0 \neq \emptyset$, благодаря условиям на исходные данные и существованию МПР. Теперь включение (2.34) и предельное соотношение (2.35), а также предельное соотношение $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, теоремы вытекают из (2.27), (2.28) с учетом ограниченности \mathcal{D} и (2.29), если в качестве точек (λ^k, μ^k) , $z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k]$ взять точки $(\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k})$, $z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}]$, $k = 1, 2, \dots$, соответственно, с $\delta^k, \varepsilon^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. В свою очередь, предельное соотношение (2.36) является следствием (2.33).

Для доказательства достаточности заметим, прежде всего, что множество Z^0 не пусто ввиду включения $z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k, \gamma^k}$, ограниченности \mathcal{D} и условий на исходные данные задачи (P^0) . Далее, так как $z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k]$ минимизирует функционал $L^{\delta^k, \varepsilon^k}(\cdot, \lambda^k, \mu^k)$, можем записать

$$\begin{aligned} & f^{\delta^k} (z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k]) + \varepsilon^k \|z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k]\|^2 + \langle (\lambda^k, \mu^k), (A^{\delta^k} z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k] - h^{\delta^k}, g^{\delta^k} (z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k])) \rangle \\ & \leq f^{\delta^k} (z) + \varepsilon^k \|z\|^2 + \langle (\lambda^k, \mu^k), (A^{\delta^k} z - h^{\delta^k}, g^{\delta^k} (z)) \rangle \quad \forall z \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

В силу условий теоремы отсюда следует с учетом ограниченности \mathcal{D} , что

$$f^{\delta^k} (z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k]) \leq f^{\delta^k} (z) + \langle (\lambda^k, \mu^k), (A^{\delta^k} z - h^{\delta^k}, g^{\delta^k} (z)) \rangle + \psi^k \quad \forall z \in \mathcal{D}, \quad \psi^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Положим здесь $z = z^0 \in Z^0$ и используем условие согласования $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Тогда получаем $f^0(z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k]) \leq f^0(z^0) + \tilde{\psi}^k$, $\tilde{\psi}^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Так как одновременно мы имеем включение $z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k, \gamma^k}$, то используя классические свойства слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве, получаем, что $f^0(z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k]) \rightarrow f^0(z^0)$, $k \rightarrow \infty$, т.е. последовательность $z^{\delta^k, \varepsilon^k} [\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \dots$ является МПР в задаче (P^0) . Последнее предельное соотношение в совокупности с (2.35) приводят,

в свою очередь, к предельному соотношению $V^{\delta^k, \varepsilon^k}(\lambda^k, \mu^k) \rightarrow f^0(z^0)$, $k \rightarrow \infty$. Далее, так как благодаря оценке (2.32) и предельному соотношению $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, можно утверждать, что справедливо предельное соотношение $V^{\delta^k, \varepsilon^k}(\lambda^k, \mu^k) - V^0(\lambda^k, \mu^k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, то получаем окончательно предельное соотношение (и одновременно равенство) (2.36).

Теорема доказана.

3. Регуляризованные классические условия оптимальности в задаче оптимального управления

Вернемся к задаче оптимального управления (OC⁰), которая в разд. 1 была сведена к задаче выпуклого программирования (P⁰) (см. также начало разд. 2). Для получения анонсированных регуляризованных условий оптимальности в задаче (OC⁰) необходимо далее “расшифровать” утверждения теорем 2 и 3 в терминах исходной задачи (OC⁰). С этой целью определим функцию Лагранжа в задаче оптимального управления (роль двойственной переменной $\lambda \in H$ играет пара $\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k$)

$$\begin{aligned} L^{\delta, \varepsilon}(u, \lambda, \mu) &\equiv L^{\delta, \varepsilon}(u, \lambda_1, \lambda_2, \mu) \equiv f^\delta(u) + \varepsilon \|u\|^2 + \langle \lambda, A^\delta u - h^\delta \rangle + \langle \mu, g_2^\delta(u) \rangle \\ &= f^\delta(u) + \varepsilon \|u\|^2 + \langle \lambda_1, G^\delta(u) - H_1^\delta \rangle + \langle \lambda_2, g_1^\delta(u) - h_1^\delta \rangle + \langle \mu, g_2^\delta(u) \rangle \\ &= \varphi_0^\delta(x^\delta[u](T)) + \varepsilon \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt + \int_0^T \lambda_1(t) (\langle \Phi_1^\delta(t), x^\delta[u](t) \rangle - H_1^\delta(t)) dt \\ &+ \sum_{i=1}^k \lambda_{2,i} (\langle \varphi_{1,i}^\delta, x^\delta[u](T) \rangle - h_{1,i}^\delta) + \sum_{i=1}^m \mu_i (\varphi_{2,i}^\delta(x^\delta[u](T))), \quad L^0(u, \lambda_1, \lambda_2, \mu) \equiv L^{0,0}(u, \lambda_1, \lambda_2, \mu), \end{aligned}$$

где $\lambda_1 \in L_2(X)$, $\lambda_2 \equiv (\lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{2,k}) \in \mathbb{R}^k$, $\mu \equiv (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$. Введем также обозначение $u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu] = u^{\delta, \varepsilon}[\lambda_1, \lambda_2, \mu] = \operatorname{argmin}\{L^{\delta, \varepsilon}(u, \lambda_1, \lambda_2, \mu) : u \in \mathcal{D}\}$. Определим далее двойственную задачу

$$V^{\delta, \varepsilon}(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^{\delta, \varepsilon}(u, \lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad (\lambda, \mu) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^m, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2),$$

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv V^{\delta,0}(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^{\delta,0}(u, \lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad (\lambda, \mu) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^m.$$

Обозначим через $(\lambda^{\delta, \alpha(\delta), \varepsilon}, \mu^{\delta, \alpha(\delta), \varepsilon}) = (\lambda_1^{\delta, \alpha(\delta), \varepsilon}, \lambda_2^{\delta, \alpha(\delta), \varepsilon}, \mu^{\delta, \alpha(\delta), \varepsilon}) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^m$ решение регуляризованной двойственной задачи $V^{\delta, \varepsilon}(\lambda, \mu) - \alpha(\delta) \|(\lambda, \mu)\|^2 \rightarrow \max$, $(\lambda, \mu) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^m$ с условием согласования (2.2). “Расшифровка” теорем 2 и 3 в терминах исходной задачи приводит соответственно к регуляризирующему двойственному алгоритму и регуляризованному ПЛ в задаче оптимального управления (OC⁰).

Теорема 4 (Регуляризирующий двойственный алгоритм). Пусть выполняется условие согласования (2.2), $\varepsilon^k > 0$, $\varepsilon^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, — произвольная фиксированная последовательность. Тогда оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие набору исходных данных f^{δ^k} , удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^k$, управление

$$R(f^{\delta^k}, \delta^k) \equiv u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}], \quad \lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k} = (\lambda_1^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}, \lambda_2^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}),$$

является МПР-образующим в задаче (OC⁰) в смысле определения 1.

Теорема 5 (Регуляризованный ПЛ). Для того, чтобы в задаче (OC⁰) существовало МПР (u , следовательно, каждая ее слабая предельная точка принадлежала множеству U^0), необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных переменных

$(\lambda^k, \mu^k) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^m$, $k = 1, 2, \dots$, $(\lambda^k \equiv (\lambda_1^k, \lambda_2^k))$, такая, что $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и выполняются включения

$$u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \tilde{\mathcal{D}}^{\delta^k, \tilde{\gamma}^k}, \quad \tilde{\gamma}^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

для некоторой последовательности положительных чисел $\tilde{\gamma}^k$, $k = 1, 2, \dots$, (она играет роль последовательности ε^k , $k = 1, 2, \dots$ из определения МПР) и предельное соотношение при $k \rightarrow \infty$

$$\left\langle (\lambda^k, \mu^k), (G^{\delta^k}(u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]) - H_1^{\delta^k}, g_1^{\delta^k}(u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]) - h_1^{\delta^k}, g_2^{\delta^k}(u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k])) \right\rangle \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

где $\varepsilon^k > 0$, $\varepsilon^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Более того, последовательность $u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым МПР. Другими словами, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие набору исходных данных f^{δ^k} , удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^k$, управление $R(f^{\delta^k}, \delta^k) = u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]$, является МПР-образующим в смысле определения 1, причем каждая слабая предельная точка последовательности $u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \dots$, есть решение задачи (ОС⁰). Одновременно с предельным соотношением $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и соотношениями (3.1) и (3.2) выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^k, \mu^k) \rightarrow \sup_{(\lambda, \mu) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^m} V^0(\lambda, \mu) = \varphi_0^0(x^0[u^0](T)).$$

В качестве конкретной последовательности $(\lambda^k, \mu^k) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^m$, $k = 1, 2, \dots$ может быть взята, например, последовательность $(\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k})$, $k = 1, 2, \dots$, о которой идет речь в теореме 4.

Получим из регуляризованного ПЛ теоремы 5 регуляризованный ПМП в задаче (ОС⁰). Рассмотрим с этой целью при фиксированных $(\lambda_1, \lambda_2) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}_+^m$ задачу минимизации функционала Лагранжа $(\lambda = (\lambda_1, \lambda_2))$

$$L^{\delta, \varepsilon}(u, \lambda, \mu) \rightarrow \min, \quad u \in \mathcal{D}. \quad (3.3)$$

В дополнение к ранее сформулированным условиям на исходные данные задачи (ОС⁰) предположим, что функции φ_0^δ , $\varphi_{2,i}^\delta$, $i = 1, \dots, m$, обладают непрерывными в \mathbb{R}^n градиентами $\nabla \varphi_0^\delta$, $\nabla \varphi_{2,i}^\delta$, $i = 1, \dots, m$. В этом случае, очевидно, в силу выпуклости задачи (ОС^δ) необходимым и достаточным условием того, что некоторое управление $u \in \mathcal{D}$ доставляет минимум в задаче (3.3), является выполнимость ПМП для этого управления. Для записи ПМП в задаче (3.3) введем стандартное обозначение: $H^{\delta, \varepsilon}(x, t, u, \psi, \lambda_1) \equiv \langle \psi, \mathcal{A}^\delta(t)x + \mathcal{B}^\delta(t)u \rangle - \varepsilon \langle u, u \rangle - \langle \lambda_1, \Phi_1^\delta(t), x \rangle - H_1^\delta(t)$. Здесь и ниже в случае, если функция $\lambda \in L_2(X)$ рассматривается на всем временном интервале $[0, T]$, то полагается, что $\lambda(t) = 0$ при $t \in [0, T] \setminus X$ и одновременно для этой функции, рассматриваемой на более широком интервале, сохраняется прежнее обозначение. Справедлива следующая стандартная лемма (см., например, [14, §4.2]).

Лемма. При сформулированном выше дополнительном условии дифференцируемости φ_0^δ , $\varphi_{2,i}^\delta$, $i = 1, \dots, m$, управление $u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu]$ ($\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$) при любых $(\lambda, \mu) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^m$ удовлетворяет ПМП в задаче (3.3), т. е. удовлетворяет при $u(\cdot) = u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu](\cdot)$ соотношению максимума при п.в. $t \in [0, T]$

$$H^{\delta, \varepsilon}(x^\delta[u](t), u(t), t, \psi^{\delta, \varepsilon}(t), \lambda_1(t)) = \max_{v \in U} H^{\delta, \varepsilon}(x^\delta[u](t), v, t, \psi^{\delta, \varepsilon}(t), \lambda_1(t)), \quad (3.4)$$

где $\psi^{\delta, \varepsilon}(t)$, $t \in [0, T]$, — решение сопряженной задачи

$$\dot{\psi} = -\nabla_x H^\delta(x^\delta[u](t), u(t), t, \psi(t), \lambda_1(t)), \quad (3.5)$$

$$\psi(T) = -\nabla\varphi_0^\delta(x^\delta[u](T)) - \sum_{i=1}^k \lambda_{2,i} \varphi_{1,i}^\delta - \sum_{i=1}^m \mu_i (\nabla\varphi_{2,i}^\delta(x^\delta[u](T))).$$

Обратно, в силу выпуклости задачи (ОС^δ) любой элемент $u \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий при некоторых $(\lambda, \mu) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^m$ соотношениям (3.4), (3.5), доставляет минимум в задаче (3.3), т. е. $u(\cdot) = u^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu]$.

Обозначим через $U_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu]$ множество всех управлений из \mathcal{D} , удовлетворяющих ПМП в задаче (3.3) при сформулированном выше дополнительном условии непрерывной дифференцируемости функций $\varphi_0^\delta, \varphi_{2,i}^\delta, i = 1, \dots, m$. Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости $f^\delta(\cdot) + \varepsilon\|\cdot\|^2$, это множество состоит из одного элемента $U_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu] \equiv u_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu]$ и справедливо равенство $u_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu] = u^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu]$. Тогда непосредственным следствием теоремы 5 и леммы является регуляризованный ПМП для задачи оптимального управления (ОС⁰).

Теорема 6 (Регуляризованный ПМП). Пусть выполняется сформулированное выше дополнительное условие дифференцируемости $\varphi_0^\delta, \varphi_{2,i}^\delta, i = 1, \dots, m$. Тогда все утверждения теоремы 5 остаются справедливыми и в том случае, если в них $u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]$ заменяется везде на $u_m^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]$.

Заключение

В статье получены регуляризованные ПЛ и ПМП для выпуклой задачи оптимального управления для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с ограниченным множеством допустимых управлений и с не являющимся, вообще говоря, сильно выпуклым целевым функционалом. Они сформулированы как теоремы существования МПР в смысле Дж. Варги, выражаются в терминах регулярных обычных функций Лагранжа и Гамильтона — Понтрягина и представляют собою так называемые МПР-образующие алгоритмы для решения рассматриваемой задачи с одновременным конструктивным представлением конкретных МПР. Устроенные структурно так же, как и классические ПМ и ПМП, они преодолевают возможные свойства некорректности классических КУО и являются теоретической базой для конструирования на своей основе численных алгоритмов для практического решения различных конкретных задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
3. Сумин М. И. Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 12. С. 2083–2102.
4. Сумин М. И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна — Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1594–1615.
5. Сумин М. И. Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 602–625.
6. Сумин М. И. Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 1. С. 25–49. doi: 10.7868/S0044466914010141.
7. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Нормальные и вырожденные задачи. Москва: Факториал, 1997. 256 с.
8. Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. фак-те МГУ, 2004. 168 с.

9. **Сумин М. И.** Об устойчивом секвенциальном принципе Лагранжа в выпуклом программировании и его применении при решении неустойчивых задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 231–240.
10. **Кутерин Ф. А., Сумин М. И.** Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении, I: оптимизация сосредоточенной системы // Вестн. Удмурт. ун-та (Математика. Механика. Компьютерные науки.). 2016. Т. 26, вып. 4. С. 474–489. doi: 10.20537/vm160403.
11. **Breitenbach T., Borzi A.** A sequential quadratic hamiltonian method for solving parabolic optimal control problems with discontinuous cost functionals // J. Dyn. Control Syst. 2019. Vol. 25, no. 3. P. 403–435. doi: 10.1007/s10883-018-9419-6.
12. **Breitenbach T., Borzi A.** On the SQH scheme to solve nonsmooth PDE optimal control problems // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2019. Vol. 40, no. 13. P. 1489–1531. doi: 10.1080/01630563.2019.1599911.
13. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации: в 2-х кн. Москва: МЦНМО, 2011. 1056 с.
14. **Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.** Оптимальное управление. Москва: Наука, 1979. 432 с.

Поступила 24.03.2020

После доработки 2.05.2020

Принята к публикации 18.05.2020

Сумин Михаил Иосифович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
г. Тамбов;

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

г. Нижний Новгород

e-mail: m.sumin@mail.ru

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*. N Y: Acad. Press, 1972, 531 p. ISBN: 0127351507. Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*. Moscow: Nauka Publ., 1977, 624 p.
2. Golshtein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovani i ee prilozheniya* [Duality theory in mathematical programming and its applications]. Moscow: Nauka Publ., 1971, 352 p.
3. Sumin M.I. Parametric dual regularization for an optimal control problem with pointwise state constraints. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2009, vol. 49, no. 12, pp. 1987–2005. doi: 10.1134/S096554250912001X.
4. Sumin M.I. Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1489–1509. doi: 10.1134/S0965542511090156.
5. Sumin M.I. Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 4, pp. 579–600. doi: 10.1134/S0965542507040045.
6. Sumin M.I. Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 22–44. doi: 10.1134/S0965542514010138.
7. Arutyunov A.V. *Optimality conditions. Abnormal and degenerate problems*. Ser. Mathematics and Its Applications (Dordrecht), vol. 526, Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2000, 300 p. doi: 10.1007/978-94-015-9438-7. Original Russian text published in Arutyunov A.V. *Usloviya ekstremuma. Anormal'nye i vyrozhdannye zadachi*. Moscow: Faktorial Publ., 1997, 255 p. ISBN: 5-88688-015-1.
8. Milyutin A.A., Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [Maximum principle in optimal control]. Moscow: Center of Applied Investigations at the Faculty of Mechanics and Mathematics in MSU, 2004, 168 p.
9. Sumin M.I. On the stable sequential Lagrange principle in convex programming and its application for solving unstable problems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 231–240 (in Russian).

10. Kuterin F.A., Sumin M.I. The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. I. Optimization of a lumped system. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 4, pp. 474–489 (in Russian). doi: 10.20537/vm160403.
11. Breitenbach T., Borzi A. A sequential quadratic hamiltonian method for solving parabolic optimal control problems with discontinuous cost functionals. *J. Dyn. Control Syst.*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 403–435. doi: 10.1007/s10883-018-9419-6.
12. Breitenbach T., Borzi A. On the SQH scheme to solve nonsmooth PDE optimal control problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2019, vol. 40, no. 13, pp. 1489–1531. doi: 10.1080/01630563.2019.1599911.
13. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: MTsNMO Publ., 2011. Vol. 1: 620 p., ISBN: 978-5-94057-707-2; Vol. 2: 433 p., ISBN: 978-5-94057-708-9.
14. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal control*. N Y: Plenum Press, 1987, 309 p. doi: 10.1007/978-1-4615-7551-1. Original Russian text published in Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie*. Moscow: Nauka Publ., 1979, 432 p.

Received March 24, 2020

Revised May 2, 2020

Accepted May 18, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19-07-00782_a, 20-01-00199_a, 20-52-00030 Bel_a).

Mikhail Iosifovich Sumin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tambov State University, Tambov, 392000 Russia; Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, 603950 Russia,
e-mail: m.sumin@mail.ru.

Cite this article as: M. I. Sumin. On the regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 252–269.

УДК 517.5

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА ВСЕЙ ОСИ С ВЕСОМ ЧЕБЫШЁВА — ЭРМИТА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

К. Тухлиев, А. М. Туйчиев

Получены точные неравенства типа Джексона—Стечкина между величиной $E_{n-1}(f^{(s)})$ наилучшего среднеквадратического приближения на \mathbb{R} с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ последовательных производных $f^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, r$) функций $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ и усредненных значений обобщенных модулей непрерывности m -го порядка r -х производных. Для классов функций, определенных при помощи указанных модулей непрерывности, в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ вычислены точные значения некоторых экстремальных аппроксимационных характеристик.

Ключевые слова: наилучшие приближения, алгебраический полином, неравенства Джексона—Стечкина, модуль непрерывности m -го порядка, многочлен Чебышева—Эрмита.

K. Tukhliev, A. M. Tuichiev. Mean-square approximation of functions on the whole axis by algebraic polynomials with the Chebyshev–Hermite weight.

We derive exact inequalities of Jackson–Stechkin type between the value $E_{n-1}(f^{(s)})_2$ of the best mean-square approximation on \mathbb{R} with the weight $\rho(x) = e^{-x^2}$ of successive derivatives $f^{(s)}$, $s = 0, 1, \dots, r$, of functions $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ and average values of m th-order generalized moduli of continuity of the r th derivatives. The exact values of some extremal approximation characteristics in the space $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ are found for classes of functions defined in terms of these moduli of continuity.

Keywords: best approximations, algebraic polynomial, Jackson–Stechkin inequalities, m th-order modulus of continuity, Chebyshev–Hermite polynomial.

MSC: 42A10, 41A17, 41A44

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-270-277

1. Введение и постановка задач

Вопросы среднеквадратического приближения функций на всей оси $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ с весом Чебышева—Эрмита

$$\rho(x) = e^{-x^2}$$

в различных постановках рассматривались, например, в работах [1–5]. В [6] найдены точные константы в неравенствах типа Джексона—Стечкина, на некоторых классах функций оценки погрешности приближения подпространствами алгебраических полиномов выражены через \mathcal{K} -функционалы.

Здесь мы продолжим исследование в этом направлении и приведем новые результаты. В частности, найдем точную константу в неравенстве Джексона—Стечкина между величиной $E_{n-1}(f^{(s)})$ наилучшего среднеквадратического приближения на оси \mathbb{R} с весом $\rho(x)$ производной $f^{(s)}$ порядка s ($s = 0, 1, \dots, r$) произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ и обобщенным модулем непрерывности m -го порядка¹ ее r -й производной (см. теорему 1 ниже). Кроме того, получим аналогичный результат в терминах взвешенного p -среднего обобщенного модуля непрерывности m -го порядка r -й производной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, распространив утверждение теоремы 1 из работы [5] на более широкую область изменения параметра $p \in (0, \infty]$, см. теорему 2 ниже

¹Определения используемых здесь терминов будут даны ниже.

и замечание к ней (в процитированной работе [5] этот параметр был обозначен буквой q и областью его изменения являлся полуинтервал $(0, 2]$).

Обозначим через $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ пространство измеримых функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, квадрат модуля которых суммируем с весом ρ на всей оси \mathbb{R} . Пространство $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ наделено скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x) f(x) g(x) dx \quad (1.1)$$

и нормой

$$\|f\| := \sqrt{(f, f)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(x) |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Для функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ величину, определенную равенством

$$E_{n-1}(f) := \inf \{ \|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \}, \quad (1.2)$$

называют *величиной наилучшего среднеквадратического приближения* функции f подпространством алгебраических полиномов \mathcal{P}_{n-1} степени $\leq n-1$ в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Далее мы будем использовать известные факты и обозначения, которые приведены в статьях из списка литературы. Поэтому изложим их кратко. Как известно (см. [2, с. 63]), система многочленов Чебышева — Эрмита

$$H_k(x) := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!2^k}} e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2}), \quad k \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (1.3)$$

является ортонормированной относительно скалярного произведения (1.1); кроме того [2, с. 194], любую функцию $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ можно разложить в ряд Фурье по этой системе:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) H_k(x), \quad (1.4)$$

при этом знак равенства здесь понимается в смысле сходимости в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Величины

$$c_k(f) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x) f(x) H_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

называются коэффициентами Фурье функции f по системе многочленов (1.3), а

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) H_k(x)$$

— частичной суммой $(n-1)$ -го порядка ряда (1.4) и, как известно (см. [2]), она является полиномом наилучшего приближения для функции f , т. е. на ней реализуется точная нижняя грань в (1.2). Таким образом, имеем $E_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{1/2}$.

В пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор обобщенного сдвига с шагом $h \in [-1, 1]$

$$F_h(f; x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x\sqrt{1-h^2} + ht) \rho(t) dt. \quad (1.5)$$

При каждом фиксированном $h \in [-1, 1]$ этот оператор является линейным, его норма, как оператора из $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, равна единице. Кроме того, имеют место следующие два важных свойства:

$$\|F_h - f\|_{2,\rho} \rightarrow 0, \text{ если } h \rightarrow +0; \quad F_h(H_k, x) = (1 - h^2)^{k/2} H_k(x) \text{ при любых } h \in [-1, 1], k \in \mathbb{Z}_+.$$

С помощью оператора обобщенного сдвига определяются [1; 3] конечные разности первого и высших порядков для функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ равенствами

$$\Delta_h^1 f(x) = F_h(f, x) - f(x) = (F_h - I)f(x), \quad (1.6)$$

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (F_h - I)^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k F_h^k f(x),$$

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m = 2, 3, \dots,$$

где I — единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, $F_h^k(f) := F_h^1(F_h^{k-1}(f))$; $F_h^1(f) := F_h(f)$; $F_h^0(f) \equiv f$. В работе [3, с. 4] для функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ определяется ее обобщенный модуль непрерывности натурального порядка m следующим образом: $\Omega_m(f, t) := \sup \{ \|\Delta_h^m(f)\| : |h| \leq t \}$, $t \in [0, 1]$. В силу известного равенства [3, с. 8]

$$\|\Delta_h^m(f)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f) [1 - (1 - h^2)^{k/2}]^{2m}, \quad |h| \leq 1, \quad (1.7)$$

имеем $\Omega_m(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f) [1 - (1 - t^2)^{k/2}]^{2m} \right\}^{1/2}$ при любом $t \in [0, 1]$.

2. Основные теоремы

Через $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ ($r \in \mathbb{N}$) обозначим класс функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны на любом конечном интервале вещественной оси, а производная r -го порядка $f^{(r)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Отметим, что если произвольная функция f принадлежит классу $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, то и все производные $f^{(s)}$, $0 \leq s \leq r$, также принадлежат классу $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq s \leq r$, $0 < t \leq 1$. Тогда для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ справедливо точное неравенство

$$2^{r-s} \alpha_{n-s, r-s} [1 - (1 - t^2)^{(n-r)/2}]^{2m} E_{n-s-1}^2(f^{(s)}) \leq \Omega_m^2(f^{(r)}, t), \quad (2.1)$$

где, ради краткости, положено $\alpha_{n-s, r-s} := (n-s)(n-s-1) \cdots (n-s-(r-s)+1)$,

и существует функция $f_0 \in L_{2,\rho}^{(r)}$, для которой неравенство (2.1) обращается в равенство.

Доказательство. Пользуясь разложением s -й производной $f^{(s)}$ ($0 \leq s \leq r$) функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ в ряд Фурье по ортонормированной системе полиномов Эрмита [3–5]

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=s}^{\infty} c_k(f) \sqrt{2^s \alpha_{k,s}} H_{k-s}(x), \quad (2.2)$$

где равенство понимается в смысле сходимости в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, после выполнения простых выкладок получаем

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)}) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) 2^s \alpha_{k,s}. \quad (2.3)$$

Так как для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ справедливо соотношение [5, с. 34]

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k^2(f) 2^r \alpha_{k,r} [1 - (1 - t^2)^{(k-r)/2}]^{2m}, \quad (2.4)$$

то, учитывая равенство (2.3) и легко проверяемое тождество $\alpha_{k,r} = \alpha_{k-s,r-s} \cdot \alpha_{k,s}$ ($k > r \geq s$), из соотношения (2.4) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(f^{(r)}, t) &\geq \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) 2^r \alpha_{k,r} [1 - (1-t^2)^{(k-r)/2}]^{2m} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2^r \alpha_{k,r}}{2^s \alpha_{k,s}} c_k^2(f) 2^s \alpha_{k,s} [1 - (1-t^2)^{(k-r)/2}]^{2m} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} 2^{r-s} \alpha_{k-s,r-s} c_k^2(f) 2^s \alpha_{k,s} [1 - (1-t^2)^{(k-r)/2}]^{2m} \\ &= 2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s} [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{2m} \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) 2^s \alpha_{k,s} \\ &= 2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s} [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{2m} E_{n-s-1}^2(f^{(s)}), \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (2.1).

Рассмотрим функцию $f_0(x) := H_n(x)$, которая принадлежит классу $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$. В силу (2.2) имеем

$$f_0^{(s)}(x) = \sqrt{2^s \alpha_{n,s}} H_{n-s}(x).$$

Тогда из (2.3) и (2.4) следует, что

$$E_{n-s-1}^2(f_0^{(s)}) = 2^s \alpha_{n,s}, \quad (2.5)$$

$$\Omega_m^2(f_0^{(r)}, t) = 2^r \alpha_{n,s} [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{2m}. \quad (2.6)$$

Теперь, пользуясь равенствами (2.5) и (2.6), получаем

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(f_0^{(r)}, t) &= 2^r \alpha_{n,r} [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{2m} \frac{2^r \alpha_{n,r}}{2^s \alpha_{n,s}} [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{2m} 2^s \alpha_{n,s} \\ &= 2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s} [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{2m} E_{n-s-1}^2(f_0^{(s)}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 1 вытекает

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^{(r)}, \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s} \cdot E_{n-s-1}^2(f^{(s)})}{\Omega_m^2(f^{(r)}, t)} = \frac{1}{[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{2m}}; \quad (2.7)$$

в частности, при $t = \sqrt{2/(n-r)}$, $n > r$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ следует

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N}, \\ n \geq r}} \sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^{(r)}, \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s} \cdot E_{n-s-1}^2(f^{(s)})}{\Omega_m^2(f^{(r)}, \sqrt{2/(n-r)})} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-2m}.$$

Далее условимся под *весовой функцией* на $[0, h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию φ , неэквивалентную нулю на этом же отрезке. Иногда для краткости такую функцию φ будем называть *весом* на $[0, h]$.

Теорема 2. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq s \leq r$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$, φ — весовая функция на отрезке $[0, h]$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R}), \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s} \cdot E_{n-s-1}^2(f^{(s)})}}{\|\Omega_{m,r}\|_p} = \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}, \quad (2.8)$$

где функционал $\|\Omega_{m,r}\|_p$ определен соотношениями

$$\|\Omega_{m,r}\|_p := \left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p} < \infty \quad \text{при } 0 < p < \infty,$$

$$\|\Omega_{m,r}\|_\infty := \lim_{p \rightarrow \infty} \|\Omega_{m,r}\|_p = \max \{ \Omega_m(f^{(r)}, t) : t \in [0, h] \cap \text{supp } \varphi \};$$

при этом функционал, сопоставляющий функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ неотрицательное число $\|\Omega_{m,r}\|_p$, лишь при $1 \leq p \leq \infty$ является полунормой на $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Ясно, что равенство (2.8) достаточно установить лишь при $0 < p < \infty$. Для этого возведем обе части неравенства (2.1) в степень $p/2$, умножим на вес φ и проинтегрируем по переменному t в промежутке $[0, h]$. В итоге получим

$$\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)}) \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}.$$

Так как последнее неравенство верно для любой функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, то из него следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R}), \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \leq \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (2.9)$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, расположенной в левой части равенства (2.8), пользуясь равенствами (2.5) и (2.6) для введенной при доказательстве теоремы 1 функции $f_0(x) = H_n(x)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R}), \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} &\geq \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s}} \cdot E_{n-s-1}(f_0^{(s)})}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f_0^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \\ &= \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n-s,r-s}} \cdot 2^s \cdot \alpha_{n,s}}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Сопоставляя оценку сверху (2.9) с оценкой снизу (2.10), получим требуемое равенство (2.8). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Отметим, что при $0 < p \leq 2$ теорема 2 другим способом доказана в [5].

Выше мы отмечали, что для функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, ее промежуточные производные $f^{(s)}$ ($0 \leq s \leq r$) также принадлежат пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Поэтому определенный интерес представляет изучение поведения величины $E_{n-s-1}(f^{(s)})$ на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ или на самом классе $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, т. е. требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup \{ E_{n-s-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \}. \quad (2.11)$$

Для заданных $r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$ и весовой функции φ на отрезке $[0, h]$ обозначим через $W_{m,p}^{(r)}(\varphi, h) := W_p^r(\Omega_m; \varphi, h)$ множество функций $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых производные r -го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p} \leq 1.$$

Приведем решение задачи (2.11) в случае $\mathfrak{M}^{(r)} = W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)$, используя теорему 2.

Следствие 2. Пусть $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$, $h \in (0, 1]$, φ – весовая функция на отрезке $[0, h]$. Тогда для любого натурального числа $n > r$ и произвольного натурального числа s , удовлетворяющего неравенствам $0 \leq s \leq r$, имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)) = \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)}\alpha_{n-s,r-s}}} \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (2.12)$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (2.9) для любой функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ вытекает, что

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(f^{(s)}) &\leq \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)}\alpha_{n-s,r-s}}} \\ &\times \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из (2.13) в предположении, что $f \in W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)$, сразу получаем оценку сверху величины, расположенной в левой части соотношения (2.12):

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)) \leq \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)}\alpha_{n-s,r-s}} \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}. \quad (2.14)$$

Для получения оценки снизу указанной величины вводим в рассмотрение функцию

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} H_n(x)$$

и покажем, что $g_0 \in W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)$. Действительно, так как

$$g_0^{(r)}(x) = \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p} H_{n-r}(x),$$

то в силу формулы (2.4) имеем

$$\Omega_m(g_0^{(r)}, t) = \frac{[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^m}{\left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}.$$

Возведя обе части полученного равенства в степень p ($0 < p < \infty$), затем умножая на вес $\varphi(t)$ и интегрируя в промежутке $[0, h]$, в итоге получаем

$$\int_0^h \Omega_m^p(g_0^{(r)}, t) \varphi(t) dt = \frac{\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt}{\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt} = 1,$$

откуда и следует включение $g_0 \in W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)$.

Дифференцируя функцию g_0 последовательно s раз, имеем

$$\begin{aligned} g_0^{(s)}(x) &= \frac{\sqrt{2^s \alpha_{n,s}}}{\sqrt{2^s \alpha_{n,r}}} \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p} H_{n-s}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)} \alpha_{n-s,r-s}}} \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} H_{n-s}(x). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из (2.15) в силу (2.3) получаем

$$E_{n-s-1}(g_0^{(s)}) = \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)} \alpha_{n-s,r-s}}} \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Учитывая последнее равенство, запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1}(W_{p,m}^{(r)}(\varphi, h)) &\geq E_{n-s-1}(g_0^{(s)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)} \alpha_{n-s,r-s}} \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Утверждение следствия 2 получаем путем сопоставления неравенств (2.14) и (2.16).

Из следствия 2 вытекает

Следствие 3. Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq s \leq r$, $0 < p < \infty$, $h \in (0, 1]$, φ^* — весовая функция на отрезке $[0, h]$, заданная формулой

$$\varphi^*(t) := (n-r)t(1-t^2)^{(n-r)/2}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W_{p,m}^{(r)}(\varphi^*, h)) = \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)} \alpha_{n-s,r-s}}} \left(\frac{mp+1}{[1 - (1-h^2)^{(n-r)/2}]^{mp+1}} \right)^{1/p};$$

в частности, при $h = \sqrt{2/(n-r)}$ имеем

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W_{p,m}^{(r)}(\varphi^*, \sqrt{2/(n-r)})) \sim \frac{1}{\sqrt{2^{(r-s)} \alpha_{n-s,r-s}}} \left(\frac{\sqrt{2}}{1-e^{-1}} \right)^{2m}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рафальсон С.З. О приближении функций в среднем суммами Фурье—Эрмита // Изв. вузов. Математика. 1968. №7. С. 78-84.
2. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.
3. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье—Эрмита в пространстве $L_2(R; e^{-x^2})$ // Изв. вузов. Математика. 2006. №1. С. 3-12.
4. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. О приближении функций алгебраическими полиномами в среднем на вещественной оси с весом Чебышева—Эрмита // Вісник Дніпропетровського університету. Серія математика. 2011. Т. 19 (6/1). С. 28-31.
5. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшем приближении в среднем с весом Чебышева—Эрмита алгебраическими полиномами на всей вещественной оси // Збірник праць Інституту математики НАН України. 2013. Т. 10, № 1. С. 28-38.

6. Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева — Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2014. Т.95, №5. С. 666-684.

Поступила 20.08.2019

После доработки 16.03.2020

Принята к публикации 23.03.2020

Тухлиев Камаридин

доктор физ.-мат. наук, профессор

Худжандский государственный университет им. академика Б.Гафурова

г. Худжанд

e-mail: kamaridin.t54@mail.ru

Туйчиев Анварджон Махмуджанович

Преподаватель кафедры информатики,

Худжандский государственный университет им. академика Б.Гафурова

г. Худжанд

e-mail: t-87yil@mail.ru

REFERENCES

1. Fourier–Hermite sums. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1968, no. 7, pp. 78–84 (in Russian).
2. Suetin P.K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 416 p. ISBN (3rd ed.): 978-5-9221-0406-7.
3. Abilov V.A., Abilova F.V. Some problems of the approximation of functions by Fourier–Hermite sums in the space $L_2(R; e^{-x^2})$. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2006, vol. 50, no. 1, pp. 1–10.
4. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. Mean approximation of functions by algebraic polynomials on real axis with Chebyshev–Hermite weight. *Dnipr. Univ. Math. Bull.*, 2011, vol. 19, no. 6/1, pp. 28–31 (in Russian).
5. Vakarchuk S.B., Shvachko A.V. On the approximation in the mean with the Chebyshev–Hermite weight by algebraic polynomials on the real axis. *Transactions of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, 2013, vol. 10, no. 1, pp. 28–38 (in Russian).
6. . Vakarchuk S.B. Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyshev–Hermite weight and widths of function classes. *Math. Notes*, 2014, vol. 95, no. 5, pp. 599–614. doi: 10.1134/S0001434614050046.

Received August 28, 2019

Revised March 16, 2020

Accepted March 23, 2020

K. Tukhliev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Khujand State University named after acad. B. Gafurov, Khujand, 735700, Republic of Tajikistan, e-mail: kamaridin.t54@mail.ru.

A. M. Tuichiev, Teacher of Informatics Department, Khujand State University named after acad. B. Gafurov, Khujand, 735700, Republic of Tajikistan, e-mail: t-87yil@mail.ru.

Cite this article as: K. Tukhliev, A. M. Tuichiev. Mean-square approximation of functions on the whole axis by algebraic polynomials with the Chebyshev–Hermite weight, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 270–277.

УДК 517.968.4

О ПОСТРОЕНИИ СУММИРУЕМОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА — НЕМЫЦКОГО НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ¹

Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Исследуется класс нелинейных интегральных уравнений типа свертки с оператором Гаммерштейна — Немыцкого на всей прямой. Указанный класс уравнений имеет непосредственное применение в кинетической теории газов, в теории p -адических открыто-замкнутых струн и в теории переноса излучения. Доказывается конструктивная теорема существования нетривиального неотрицательного ограниченного и суммируемого на всей прямой решения. В конце приводятся конкретные примеры таких уравнений, для которых выполняются все условия основной теоремы.

Ключевые слова: уравнения Гаммерштейна — Немыцкого, последовательные приближения, монотонность, выпуклость, сходимость итерации.

Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan. On the construction of an integrable solution to one class of nonlinear integral equations of Hammerstein–Nemytskii type on the whole axis.

We study one class of nonlinear integral equations of convolution type with the Hammerstein–Nemytskii operator on the whole axis. This class has direct applications in the kinetic theory of gases, the theory of p -adic open-closed strings, and the theory of radiative transfer. We prove a constructive theorem on the existence of a nontrivial nonnegative solution integrable on the whole axis. In the end of the paper, we give specific examples of such equations satisfying all conditions of the main theorem.

Keywords: Hammerstein–Nemytskii equations, successive approximations, monotonicity, convexity, convergence of iterations.

MSC: 45G05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-278-287

1. Введение

Рассмотрим следующий класс нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Немыцкого:

$$f(x) = \mu_0(x, f(x)) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\mu_1(t, f(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

относительно искомой неотрицательной и измеримой функции $f(x)$.

В уравнении (1.1) ядро K — определенная на всей прямой четная функция, удовлетворяющая условиям

$$K(\tau) > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)d\tau = 1, \quad (1.2)$$

$$K \in L_{\infty}(\mathbb{R}), \quad K(\tau) \downarrow \text{ по } \tau \text{ на } \mathbb{R}^+ := [0, +\infty), \quad (1.3)$$

$$m(K) := \int_0^{\infty} tK(t)dt < +\infty. \quad (1.4)$$

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

Здесь $\lambda(x)$ — определенная на множестве \mathbb{R} четная непрерывная функция, обладающая следующими свойствами:

$$0 < \varepsilon_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}} \lambda(x) \leq \lambda(x) \leq 1, \quad \varepsilon_0 < 1, \quad \lambda(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad (1.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = 1, \quad 1 - \lambda \in L_1(\mathbb{R}^+). \quad (1.6)$$

Нелинейности μ_0 и μ_1 , определенные на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, суть измеримые и вещественнозначные функции, удовлетворяющие условию “критичности”

$$\mu_0(x, 0) = \mu_1(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

и некоторым другим условиям (см. ниже).

Уравнение (1.1) кроме чисто математического интереса представляет определенный интерес в разных разделах современной математической физики. В частности, такие уравнения возникают в кинетической теории газов, в теории p -адических открыто-замкнутых струн и в теории переноса излучения в спектральных линиях (см. [1–5]).

В том случае, когда $\nu(K) := \int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx \neq 0$, при различных ограничениях на функции μ_0 и μ_1 уравнение (1.1) исследовалось в [6–8]. В этих работах построены положительные нетривиальные и ограниченные решения для уравнения (1.1). Изучены также некоторые асимптотические свойства построенных решений в $\pm\infty$. Актуальность рассматриваемой задачи подчеркивают и работы [9–12] для случая $\mu_0 \equiv 0$.

В настоящей работе при определенных условиях на μ_0, μ_1 удастся доказать существование нетривиального неотрицательного суммируемого и ограниченного на множестве \mathbb{R} решения $f(x)$ уравнения (1.1). Доказывается также, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. В конце работы приводятся различные примеры функций λ, K, μ_0 и μ_1 , имеющие и теоретический, и прикладной характер.

2. Обозначения и вспомогательные факты

Пусть $y = Q(u)$ — определенная на множестве \mathbb{R} нечетная и непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) существует число $\eta > 0$ такое, что $Q(u) \uparrow$ по u на отрезке $[-\eta, \eta]$ и $Q(\eta) = \eta$;
- 2) функция $y = Q(u)$ выпукла (вниз) на отрезке $[0, \eta]$;
- 3) уравнение $Q(u) = \varepsilon_0^2 u$ (где $\varepsilon_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}} \lambda(x) \in (0, 1)$) обладает положительным решением ξ , причем $\xi < \eta$ (см. рис. 1).

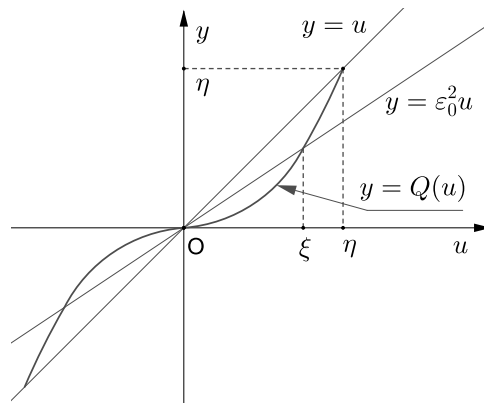


Рис. 1

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\int_0^{\infty} K(t)e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (2.1)$$

относительно неотрицательного числа p .

Из свойства (1.3) функции K и теоремы Больцано — Коши легко следует, что уравнение (2.1) имеет единственное положительное решение $p = p_0$.

Из результатов работы [13] вытекает следующая оценка снизу:

$$\int_0^{\infty} (K(x-t) - K(x+t))(1 - e^{-p_0 t}) dt \geq \varepsilon_0(1 - e^{-p_0 x}), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (2.2)$$

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим нелинейное вспомогательное уравнение на полуоси с суммарно-разностным ядром:

$$Q(\psi(x)) = \int_0^{\infty} (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)\psi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (2.3)$$

относительно искомой функции $\psi(x)$.

Для уравнения (2.3) введем следующие последовательные приближения:

$$Q(\psi_{n+1}(x)) = \int_0^{\infty} (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)\psi_n(t) dt, \\ \psi_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

С учетом неравенства (2.2), выпуклости (вниз) функции Q индукцией по n аналогично рассуждениям в [13] можно доказать, что

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &\downarrow \text{ по } n, & x &\in \mathbb{R}^+, \\ \psi_n(x) &\geq \xi(1 - e^{-p_0 x}), & n = 0, 1, 2, \dots, & x \in \mathbb{R}^+, \\ \psi_n &\in C(\mathbb{R}^+), & n = 0, 1, 2, \dots, & \\ \psi_n(x) &\uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, & n = 0, 1, 2, \dots & \end{aligned}$$

Из этих утверждений следует, что последовательность непрерывных функций $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, когда $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = \psi(x)$; причем предельная функция $\psi(x)$ из себя представляет монотонно неубывающую функцию на \mathbb{R}^+ и удовлетворяет следующему двустороннему неравенству:

$$\xi(1 - e^{-p_0 x}) \leq \psi(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Согласно теореме Б. Леви (см. [14]) функция $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.3). Используя монотонность функций λ, ψ , свойства 1)–3) нелинейности Q и рассуждая, как в доказательстве теоремы 1 работы [13], убеждаемся, что при $\psi \in C(\mathbb{R}^+)$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \eta$$

и имеет место интегральная асимптотика

$$\eta - \psi \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Прямой проверкой показываем, что нечетное продолжение функции ψ на множестве $(-\infty, 0)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{если } x \geq 0, \\ -\psi(-x), & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

является решением нелинейного интегрального уравнения на всей прямой

$$Q(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\lambda(t)\varphi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

и обладает свойствами

$$\varphi(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

$$\eta \pm \varphi \in L_1(\mathbb{R}^{\mp}), \quad (2.6)$$

$$-\eta \leq \varphi(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

$$\varphi \in C(\mathbb{R}). \quad (2.8)$$

Приведенные утверждения в дальнейшем нам существенно понадобятся.

3. Формулировка и доказательство основной теоремы

Сначала заметим, что из свойств 1), 2) функции Q немедленно следует существование обратной функции G к функции Q : $G = Q^{-1}$.

Для краткости дальнейшего изложения введем обозначение

$$\Phi_{\delta}(x) := \delta(1 - \lambda(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

где δ — положительный числовой параметр.

Относительно функций μ_0 и μ_1 предположим выполнение следующих условий:

а) при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ функции $\mu_0(x, z), \mu_1(x, z) \uparrow$ по z на отрезке $[0, \eta]$;

б) функции μ_0 и μ_1 удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу z на множестве $\mathbb{R} \times [0, \eta]$, т. е. при каждом фиксированном $z \in [0, \eta]$ функции μ_0 и μ_1 измеримы по x на \mathbb{R} и почти при всех $x \in \mathbb{R}$ эти функции непрерывны по z на $[0, \eta]$;

с) выполняются неравенства

$$\mu_0(x, \Phi_{\xi}(x)) \geq \Phi_{\xi}(x), \quad \mu_0(x, \eta) \leq \Phi_{\eta}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$0 \leq \mu_1(x, z) \leq \eta - G(\eta - z), \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in [0, \eta].$$

Имеет место следующая теорема существования.

Теорема. При условиях (1.2)–(1.7) и а)–с) уравнение (1.1) имеет неотрицательное ограниченное и суммируемое на \mathbb{R} решение $f(x)$, причем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Доказательство. Сперва наряду с уравнением (1.1) рассмотрим вспомогательное уравнение типа свертки на всей прямой

$$Q(F(x)) = \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)F(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

относительно искомой непрерывной на \mathbb{R} функции $F(x)$, где нелинейность удовлетворяет условиям 1)–3), а функции λ и K обладают свойствами (1.2)–(1.6).

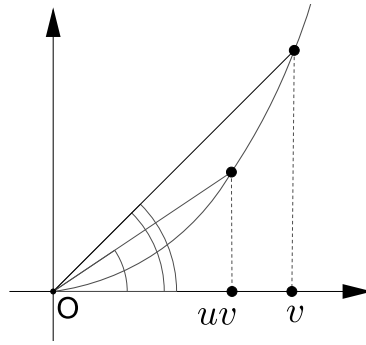


Рис. 2

Введем следующие последовательные приближения:

$$Q(F_{n+1}(x)) = \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)F_n(t)dt, \quad (3.3)$$

$$F_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Используя свойства (1.2)–(1.6), 1)–3) функций λ, K, Q индукцией по n легко убеждаемся в достоверности следующих утверждений:

$$F_n(x) \downarrow \text{ по } n, \quad (3.4)$$

$$F_n(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

$$F_n \in C(\mathbb{R}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Для последовательности функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ниже докажем оценку снизу

$$F_n(x) \geq \lambda(x)|\varphi(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

где $\varphi(x)$ — знакопеременное решение уравнения (2.4), обладающее свойствами (2.5)–(2.8). Для доказательства неравенства (3.7) нам понадобится оценка для выпуклых (вниз) функций

$$uQ(v) \geq Q(uv), \quad (3.8)$$

где $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \eta]$. Неравенство (3.8) при $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = \eta$ сразу следует из свойств 1)–3) функции Q , а при $u \in (0, 1)$, $v \in (0, \eta)$ данное неравенство получается из монотонности функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 2):

$$\frac{Q(v)}{v} \geq \frac{Q(uv)}{uv}.$$

Вернемся к доказательству неравенства (3.7). При $n = 0$ оценка (3.7) сразу вытекает из свойств (2.7), (1.5) и из определения нулевого приближения в итерациях (3.3). Предположим, что (3.7) имеет место при некотором натуральном n . Тогда, учитывая (2.4), (3.8), неотрицательность ядра K и функции λ , а также нечетность функций Q, φ из (3.3) имеем

$$Q(F_{n+1}(x)) \geq \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\lambda(t)|\varphi(t)|dt$$

$$\geq \lambda(x) \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\lambda(t)\varphi(t)dt \right| = \lambda(x)|Q(\varphi(x))| = \lambda(x)Q(|\varphi(x)|) \geq Q(\lambda(x)|\varphi(x)|);$$

откуда в силу монотонности Q следует, что $F_{n+1}(x) \geq \lambda(x)|\varphi(x)|$, $x \in \mathbb{R}$. Итак, мы полу-

чили, что последовательность непрерывных на \mathbb{R} функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$ обладает свойствами (3.4)–(3.7). Таким образом, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где предельная функция $F(x)$ удовлетворяет двустороннему неравенству

$$\lambda(x)|\varphi(x)| \leq F(x) \leq \eta, \quad Q(F(x)) \leq \eta\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Так как $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |\varphi(x)| = \eta$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \lambda(x) = 1$, то из (3.9) вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = \eta.$$

Из (3.5) сразу следует, что предельная функция $F(x)$ является монотонно неубывающей на множестве \mathbb{R} . Применяя предельную теорему Б. Леви, убеждаемся, что $F(x)$ — решение уравнения (3.2). Так как свертка ограниченных и суммируемых функций представляет из себя непрерывную функцию на \mathbb{R} (см. [15]), то в силу непрерывности и монотонности функций Q, λ можно утверждать, что предельная функция F непрерывна на \mathbb{R} .

Таким образом, из приведенных утверждений в силу теоремы Дини заключаем, что сходимость последовательности функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$ к функции $F(x)$ равномерна на каждом компакте из \mathbb{R} . Из (3.9) немедленно следует, что

$$0 \leq \eta - F(x) \leq \eta - \lambda(x)|\varphi(x)| = \eta(1 - \lambda(x)) + \lambda(x)(\eta - |\varphi(x)|). \quad (3.10)$$

Так как $1 - \lambda \in L_1(\mathbb{R}), \eta - |\varphi| \in L_1(\mathbb{R}), \varepsilon_0 \leq \lambda \leq 1$, то из (3.10) заключаем, что $\eta - F \in L_1(\mathbb{R})$. Для основного уравнения (1.1) теперь рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \mu_0(x, f_n(x)) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\mu_1(t, f_n(t))dt, \\ f_0(x) &= \eta - Q(F(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Индукцией по n убедимся, что

- A) $f_n(x)$ измеримы по x на \mathbb{R} , $n = 0, 1, 2, \dots$;
- B) $f_n(x) \downarrow$ по n ;
- C) $f_n(x) \geq \Phi_\xi(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где функция $\Phi_\xi(x)$ задается согласно (3.1).

Измеримость нулевого приближения сразу следует из непрерывности функций F . Ниже докажем, что

$$\begin{aligned} f_1(x) &\leq f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ f_1(x) &\geq \Phi_\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Сначала заметим, что из (3.2) следует

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \eta - Q(F(x)) = \eta - \eta\lambda(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\eta - F(t))dt \\ &\geq \eta(1 - \lambda(x)) = \Phi_\eta(x) \geq \Phi_\xi(x), \end{aligned} \quad (3.13)$$

ибо $0 < \xi < \eta, F(x) \leq \eta, x \in \mathbb{R}$.

Из (3.13), (3.11), (1.2), (1.5) и условия с) в силу монотонности и неотрицательности функций μ_0, μ_1 имеем

$$f_1(x) \geq \mu_0(x, \Phi_\xi(x)) \geq \Phi_\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Докажем теперь (3.12). Используя условие с), из (3.11) получим

$$\begin{aligned} f_1(x) &\leq \mu_0(x, f_0(x)) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\eta - G(\eta - f_0(t)))dt \\ &\leq \mu_0(x, \eta) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\eta - G(Q(F(t))))dt \\ &\leq \Phi_\eta(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\eta - F(t))dt \\ &= \Phi_\eta(x) + \eta\lambda(x) - Q(F(x)) = \eta - Q(F(x)) = f_0(x). \end{aligned}$$

Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$

- $f_n(x)$ измерима на \mathbb{R} ;
- $f_n(x) \leq f_{n-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
- $f_n(x) \geq \Phi_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Тогда в силу условия Каратеодори (см. условие b)) из (3.11) получаем измеримость функции $f_{n+1}(x)$. Учитывая монотонность функций $\mu_0(x, z)$ и $\mu_1(x, z)$ по переменной z , а также неотрицательность функций λ и K из (3.11) и условия с) будем иметь

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &\leq \mu_0(x, f_{n-1}(x)) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\mu_1(t, f_{n-1}(t))dt = f_n(x), \\ f_{n+1}(x) &\geq \mu_0(x, \Phi_\xi(x)) \geq \Phi_\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу утверждений А)–С) заключаем, что последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел при $n \rightarrow \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, причем

$$\Phi_\xi(x) \leq f(x) \leq \eta - Q(F(x)), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Заметим, что

$$\eta - Q(F) \in L_1(\mathbb{R}). \quad (3.15)$$

Действительно, последнее включение сразу следует из (1.2), (1.5), (1.6) и из $\eta - F \in L_1(\mathbb{R})$ с учетом соотношения

$$0 \leq \eta - Q(F(x)) = \eta(1 - \lambda(x)) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\eta - F(t))dt.$$

Из (3.14) и (3.15) получаем, что

$$f \in L_1(\mathbb{R}).$$

Используя теорему Б. Леви, условие Каратеодори можем утверждать, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Для завершения доказательства нам осталось убедиться, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Действительно, так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(F(x)) = Q(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x)) = Q(\eta) = \eta,$$

то из (3.14) приходим к завершению доказательства. Теорема полностью доказана.

4. Примеры функций λ, K, μ_0 и μ_1

Сначала приведем два примера функции Q , удовлетворяющих вышеприведенным условиям:

$$Q(u) = u^p, \quad Q(u) = au^p + (1-a)u, \quad u \in \mathbb{R},$$

где $p > 2$ — нечетное число, а $a \in (0, 1]$ — произвольное число.

В приложениях (см. [3; 4]) возникают следующие конкретные ядра:

$$\lambda(x) = 1 - (1 - \varepsilon_0)e^{-\delta|x|}, \quad 0 < \varepsilon_0 < 1, \quad \delta > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$K(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|s} B(s) ds,$$

где $B(s)$ — положительная измеримая функция на $[a, b]$ ($0 < a < b \leq +\infty$), причем

$$\int_a^b \frac{B(s)}{s} ds = \frac{1}{2}.$$

В качестве функций μ_0 и μ_1 можно выбрать следующие примеры:

$$\circ \mu_0(x, z) = \frac{\Phi_\eta(x)z}{z + \Phi_{\eta-\xi}(x)}, \quad z \geq 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\circ \mu_0(x, z) = \frac{\Phi_\eta(x)z}{z + \Phi_{\eta-\xi}(x)} + \varepsilon(x)z^2, \quad z \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ где } \varepsilon(x) \text{ — любая непрерывная на } \mathbb{R}$$

функция, удовлетворяющая двойному неравенству

$$0 \leq \varepsilon(x) \leq \frac{\Phi_\eta(x)\Phi_{\eta-\xi}(x)}{\eta^3 + \eta^2\Phi_{\eta-\xi}(x)}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\circ \mu_1(x, z) = \eta - \sqrt[3]{\eta - z}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in [0, \eta];$$

$\circ \mu_1(x, z) = \mathcal{L}(x)(\eta - \sqrt[3]{\eta - z})$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in [0, \eta]$, где $p > 2$ — нечетное число, а $\mathcal{L}(x)$ — непрерывная на \mathbb{R} функция, принимающая значения из отрезка $[0, 1]$.

В конце отметим, что вопрос единственности построенного выше решения по-прежнему остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cercignani С.** The Boltzmann equation and its application. N Y: Springer, 1988. 455 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1039-9.
2. **Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 687 с.
3. **Владимиров В.С., Волович Я.И.** О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // Теоретическая и математическая физика. 2004. Т. 138, №3. С. 355-368.
4. **Хачатрян Х.А.** О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p -адической струны // Изв. РАН. Сер. математическая. 2018. Т. 82, №2. С. 172-193.
5. **Хачатрян Х.А.** О решении одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Немыцкого на всей оси // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2013. Т. 21, №2. С. 154-161.
6. **Хачатрян Х.А.** О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой // Изв. РАН. Сер. математическая. 2015. Т. 79, №2. С. 205-224.

7. **Енгибарян Н.Б.** Об одной задаче нелинейного переноса излучения // *Астрофизика*. 1966. Т. 2, № 1. С. 31–36.
8. **Хачатрян Х.А.** О положительных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Немьцкого на всей прямой // *Тр. Моск. мат. общества*. 2014. Т. 75, №1. С. 1–14.
9. **Diekmann O.** Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // *J. Math. Biology*. 1978. Vol. 6, no. 2. P. 109–130.
10. **Владимиров В.С.** О нелинейных уравнениях p -адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн // *Теоретическая и математическая физика*. 2006. Vol. 149, № 3. P. 354–367. doi: 10.4213/tmf5522.
11. **Gomez C., Prado H.** Trofimchuk S. Separation dichotomy and wavefronts for a nonlinear convolution equation // *J. Math. Anal. Appl.* 2014. Vol. 420. P. 1–19. doi: 10.1016/j.jmaa.2014.05.064.
12. **Жуковская Л.В.** Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // *Теоретическая и математическая физика*. 2006. Vol. 146, № 3. P. 402–409. doi: 10.4213/tmf2043.
13. **Хачатрян Х.А.** О разрешимости одной граничной задачи в p -адической теории струн // *Тр. Моск. мат. общества*. 2018. Т. 79, №1. С. 117–132.
14. **Колмогоров А.Н., Фомин В.С.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. 572 с.
15. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 499 с.

Поступила 18.11.2019

После доработки 22.01.2020

Принята к публикации 27.01.2020

Хачатрян Хачатур Агавардович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики НАН Армении,
г. Ереван;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, мех. мат. фак.,
г. Москва
e-mail: Khach82@rambler.ru

Петросян Айкануш Самвеловна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры высшей математики и физики
Национальный аграрный университет Армении,
г. Ереван

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, мех. мат. фак.,
г. Москва
e-mail: Naukuhi25@mail.ru

REFERENCES

1. Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications*. N Y: Springer, 1988. 455 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1039-9.
2. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. Mineola: Dover, 2002, 916 p. ISBN: 9780486420028. Original Russian text published in Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavlenii*. Moscow: Nauka Publ., 1966.
3. Vladimirov V.S., Volovich Ya.I. Nonlinear dynamics equation in p -adic string theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. doi: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29.
4. Khachatryan Kh.A. On the solvability of certain classes of non-linear integral equations in p -adic string theory. *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 407–427. doi: 10.1070/IM8580.

5. Engibaryan N.B. On a problem in non-linear radiative transfer. *Astrophysics*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 12–14. doi: 10.1007/BF01014505.
6. Khachatryan Kh.A. On positive solutions of one class of nonlinear integral equations of Hammerstein–Nemytskii type on the whole axis. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2014, vol. 75, no. 1, pp. 1–12. doi: 10.1090/S0077-1554-2014-00226-0.
7. Khachatryan Kh.A. Positive solubility of some classes of non-linear integral equations of Hammerstein type on the semi-axis and on the whole line. *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 411–430. doi: 10.1070/IM2015v079n02ABEH002748.
8. Khachatryan Kh.A. On solution of a system of Hammerstein–Nemytskii type non-linear integral equations on whole axis. *Tr. Inst. Mat.*, 2013, vol. 21, no. 2, pp. 154–161 (in Russian).
9. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *J. Math. Biology*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130.
10. Vladimirov V.S. Nonlinear equations for p -adic open, closed and open–closed strings. *Theoret. and Mathem. Physics*, 2006, vol. 149, no. 3, pp. 1604–1616. doi: 10.1007/s11232-006-0144-z.
11. Gomez C., Prado H., Trofimchuk S. Separation dichotomy and wavefronts for a nonlinear convolution equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, vol. 420, pp. 1–19. doi: 10.1016/j.jmaa.2014.05.064.
12. Zhukovskaya L.V. Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 335–342. doi: 10.1007/s11232-006-0043-3.
13. Khachatryan Kh.A. On the solvability of a boundary-value problem in p -adic string theory. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2018, pp. 101–115.
14. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis* (Two volumes in one, translated from the first Russian edition 1957–1961). United States: Martino Fine Books. 2012, 280 p. ISBN: 1614273049. The 7th edition of Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*. Moscow: Nauka Publ., 2004, 572 p.
15. Rudin W. *Functional Analysis*. N Y: McGraw-Hill, 1973, 397 p. ISBN: 978-0070542259. Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz*. Moscow: Mir Publ., 1975, 499 p.

Received November 18, 2019

Revised January 22, 2020

Accepted January 27, 2020

Funding Agency: The study was funded by a grant from the Russian Science Foundation (project № 19-11-00223).

Khachatur Aghavardovich Khachatryan, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia, 0019, Yerevan, Republic of Armenia; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: Khach82@rambler.ru.

Haykanush Samvelovna Petrosyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Armenian National Agrarian University, 0009, Yerevan, Republic of Armenia; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: Haykuhi25@mail.ru.

Cite this article as: Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan. On the construction of an integrable solution to one class of nonlinear integral equations of Hammerstein–Nemytskii type on the whole axis. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 278–287.

СОДЕРЖАНИЕ

Г. Акишев. Оценки наилучших приближений функций класса Никольского — Бесова в пространстве Лоренца тригонометрическими полиномами	5
А. Р. Алимов. Выпуклость и монотонная линейная связность множеств с непрерывной метрической проекцией в трехмерных пространствах	28
В. В. Арестов, А. А. Селезнев. Наилучшее L^2 -продолжение алгебраических многочленов с единичной евклидовой сферы на концентрическую сферу	47
В. А. Баранский, Т. А. Сеньчонок. Двудольно-пороговые графы	56
В. А. Бовкун. Прямые и обратные уравнения для вероятностных характеристик процессов типа Леви в пространствах обобщенных функций	68
Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвиряков. Точное решение уравнений Навье — Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости	79
Т. С. Бусел, И. Д. Супруненко. О свойствах неприводимых представлений специальных линейных и симплектических групп, небольших относительно характеристики поля и регулярного унипотентного элемента из подсистемной подгруппы	88
Д. А. Ваулин, Д. А. Дроздов, А. В. Тетенев. О связных компонентах фрактальных кубов	98
Э. Х. Гимади, О. Ю. Цидулко. О некоторых эффективно разрешимых классах сетевой задачи размещения с ограничениями на пропускные способности коммуникаций	108
В. Го, А. С. Кондратьев, Н. В. Маслова, Л. Мяо. Конечные группы, все максимальные подгруппы которых разрешимы или имеют примарные индексы	125
А. Р. Данилин, О. О. Коврижных. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи быстрого действия перевода объекта на множество	132
М. Р. Зиновьева. О конечных простых группах исключительного лиева типа над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают	147
Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант. Некоторые свойства степенных операторных рядов	161
П. Д. Лебедев, А. Л. Казаков, А. А. Лемперт. Численные методы построения упаковок из различных шаров в выпуклые компакты	173
В. Л. Литвинов. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений	188
В. В. Напалков, В. В. Напалков (мл.). Об эквивалентности гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром, связанных специальным преобразованием	200
С. И. Новиков, В. Т. Шевалдин. О связи между второй разделенной разностью и второй производной	216

А. В. Паршиков. Оптимальное управление маловысотным полетом в режиме следования рельефу местности.....	225
А.-Р. К. Рамазанов, А. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова. О явлении Гиббса для рациональных сплайн-функций.....	238
М. И. Сумин. О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления.....	252
К. Тухлиев, А. М. Туйчиев. Среднеквадратическое приближение функций на всей оси с весом Чебышёва — Эрмита алгебраическими полиномами.....	270
Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян. О построении суммируемого решения одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Немьцкого на всей прямой.....	278

REFERENCES

- G. Akishev.** Estimates for the best approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class in the Lorentz space by trigonometric polynomials 5
- A. R. Alimov.** Convexity and monotone linear connectivity of sets with a continuous metric projection in three-dimensional spaces 28
- V. V. Arestov, A. A. Seleznev.** Best L^2 -extension of algebraic polynomials from the unit Euclidean sphere to a concentric sphere 47
- V. A. Baransky, T. A. Senchonok.** Bipartite threshold graphs 56
- V. A. Bovkun.** Forward and backward equations for the probability characteristics of Levy type processes in spaces of distributions 68
- N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov.** Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid 79
- T. S. Busel, I. D. Suprunenko.** On the properties of irreducible representations of special linear and symplectic groups that are not large with respect to the field characteristic and regular unipotent elements from subsystem subgroups 88
- D. A. Vaulin, D. A. Drozdov, A. V. Tetenov.** On connected components of fractal cubes 98
- E. Kh. Gimadi, O. Yu. Tsidulko.** On some efficiently solvable classes of the network facility location problem with constraints on the capacities of communication lines 108
- W. Guo, A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, L. Miao.** Finite groups whose maximal subgroups are solvable or have prime power indices 125
- A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh.** Asymptotics of a solution to a singularly perturbed time-optimal control problem of transferring an object to a set 132
- M. R. Zinov'eva.** On finite simple groups of exceptional Lie type over fields of different characteristics with coinciding prime graphs 147
- L. F. Korkina, M. A. Rekant.** Some properties of power operator series 161
- P. D. Lebedev, A. L. Kazakov, A. A. Lempert.** Numerical methods for the construction of packings of different balls into convex compact sets 173
- V. L. Litvinov.** Solution of boundary value problems with moving boundaries by an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations 188
- V. V. Napalkov, V. V. Napalkov, Jr.** On the equivalence of reproducing kernel Hilbert spaces connected by a special transform 200
- S. I. Novikov, V. T. Shevaldin.** On the connection between the second divided difference and the second derivative 216
- A. V. Parshikov.** Optimal control of a low-altitude flight in the terrain-following mode... 225

A.-R. K. Ramazanov, A. K. Ramazanov, V. G. Magomedova. On the Gibbs phenomenon for rational spline functions	238
M. I. Sumin. On the regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems	252
K. Tukhliev, A. M. Tuichiev. Mean-square approximation of functions on the whole axis by algebraic polynomials with the Chebyshev–Hermite weight	270
Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan. On the construction of an integrable solution to one class of nonlinear integral equations of Hammerstein–Nemytskii type on the whole axis	278

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26

№ 2

2020

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN (print) 0134-4889

ISSN (online) 2658-4786

Редакторы Н. Н. Моргунова, Е. Е. Понизовкина
TeX-редактор Г. Ф. Корнилова

Английский редактор Е. В. Васильева

Отв. за выпуск А. Е. Эльберт

Поддержка электронных версий журнала
С. Е. Желтышева, Н. Н. Моргунова

Выпускающие редакции Л. К. Бабинцева, Р. Х. Комарова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 1.06.2020. Формат 60 × 84¹/₈. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 33. Уч.-изд. л. 32,0 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
<http://journal.imm.uran.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО “Типография ДЛЯ ВАС”
620026, г. Екатеринбург, ул. Розы Люксембург, 52а, оф. 3