

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

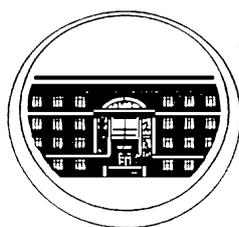
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 26

№ 1

2020



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 26, № 1.
Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2020. 312 с.

ISSN (print) 0134-4889

ISSN (online) 2658-4786

DOI журнала: 10.21538/0134-4889

Главный редактор акад. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора д-р физ.-мат. наук А. М. Тарасьев

Научные редакторы д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

Редакционная коллегия

д-р физ.-мат. наук Б. П. Андреянов (Франция), чл.-корр. РАН С. М. Асеев,
д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко, д-р физ.-мат. наук А. В. Васильев,
д-р физ.-мат. наук Э. Х. Гимади, д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай),
канд. физ.-мат. наук М. И. Гомоюнов, д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев,
д-р физ.-мат. наук Х. Г. Гусейнов (Турция),
д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев, д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий,
д-р физ.-мат. наук П. Крейчи (Чешская Республика), чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров,
акад. РАН С. В. Матвеев, д-р физ.-мат. наук А. Д. Медных,
д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Беларусь), чл.-корр. РАН И. А. Панин,
д-р физ.-мат. наук Е. Ю. Панов, д-р физ.-мат. наук И. Ф. Сивергина (США),
д-р физ.-мат. наук И. Д. Супруненко (Беларусь), чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов,
академик НАН Украины А. А. Чикрий (Украина), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай,
канд. физ.-мат. наук Л. В. Камнева (*отв. секретарь*)

Попечительский совет

академик РАН А. Б. Куржанский, академик РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН В. В. Васин, чл.-корр. РАН Н. Ю. Лукоянов,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин,
чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
д.ф.-м.н. Н. Ю. Антонов, д.ф.-м.н. В. В. Кабанов, д.ф.-м.н. В. И. Максимов

Отв. редакторы выпуска д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев,
д-р физ.-мат. наук Т. Ф. Филиппова

Журнал индексируется в *российских базах*: РИНЦ, MathNet;
в *зарубежных базах*: MathSciNet, Scopus (2019),
Emerging Sources Citation Index Web of Science

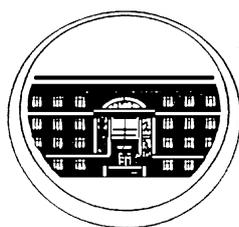
© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской
академии наук, 2020

TRUDY
INSTITUTA
MATEMATIKI I MEKHANIKI
URO RAN

Vol. 26

No. 1

2020



YEKATERINBURG

Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. Vol. 26, no. 1. Yekaterinburg:
IMM UrO RAN, 2020. 312 p.

ISSN (print) 0134–4889

ISSN (online) 2658–4786

DOI: 10.21538/0134-4889

Editor-in-Chief RAS Academician V. I. Berdyshev

Deputy Editor-in-Chief Dr. Phys.-Math. Sci. A. M. Taras'ev

Science Editors Dr. Phys.-Math. Sci. A. L. Ageev,
Dr. Phys.-Math. Sci. A. R. Danilin

Editorial Board

Dr. Phys.-Math. Sci. B. P. Andreianov (France), RAS Corresponding Member S. M. Aseev,
Dr. Phys.-Math. Sci. A. G. Babenko, RAS Corresponding Member A. G. Chentsov,
Ukrainian NAS Academician A. A. Chikrii (Ukraine),
Dr. Phys.-Math. Sci. E. H. Gimadi, Cand. Sci. (Phys.-Math.) M. I. Gomoyunov,
Dr. Phys.-Math. Sci. Wenbin Guo (China), Dr. Phys.-Math. Sci. Kh. G. Guseinov (Turkey),
Dr. Phys.-Math. Sci. M. I. Gusev,
Dr. Phys.-Math. Sci. M. Yu. Khachai, Dr. Phys.-Math. Sci. A. S. Kondrat'ev,
Dr. Phys.-Math. Sci. A. I. Korotkii, Dr. Phys.-Math. Sci. P. Krejčí (Czech Republic),
RAS Academician S. V. Matveev, RAS Corresponding Member V. D. Mazurov,
Dr. Phys.-Math. Sci. A. D. Mednykh,
Dr. Phys.-Math. Sci. V. S. Monakhov (Republic of Belarus),
RAS Corresponding Member I. A. Panin, Dr. Phys.-Math. Sci. E. Yu. Panov,
Dr. Phys.-Math. Sci. I. F. Sivergina (USA),
Dr. Phys.-Math. Sci. I. D. Suprunenko (Republic of Belarus),
Dr. Phys.-Math. Sci. A. V. Vasil'ev,
Cand. Sci. (Phys.-Math.) L. V. Kamneva (*Assistant Editor*)

Supervisory Board

RAS Academician A.B. Kurzhanski,
RAS Academician Yu.S. Osipov,
RAS Corresponding Member N.Yu. Lukoyanov,
RAS Corresponding Member A.A. Makhnev,
RAS Corresponding Member Yu.N. Subbotin,
RAS Corresponding Member N.N. Subbotina,
RAS Corresponding Member V.N. Ushakov,
RAS Corresponding Member V.V. Vasin,
Dr. Phys.-Math. Sci. N.Yu. Antonov,
Dr. Phys.-Math. Sci. V.V. Kabanov,
Dr. Phys.-Math. Sci. V.I. Maksimov

Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN is abstracted and/or indexed in Elibrary,
MathNet, Mathematical Reviews, Scopus (2019), Emerging Sources Citation Index WoS

© N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
(IMM UB RAS)



DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-7-11

АЛЕКСАНДР БОРИСОВИЧ КУРЖАНСКИЙ*(К 80-летию юбилею)*

19 октября 2019 г. исполнилось 80 лет выдающемуся российскому математику и механику, специалисту в области процессов управления, действительному члену Российской Академии наук Александру Борисовичу Куржанскому.

С именем А. Б. Куржанского связаны фундаментальные достижения в математической теории управления, в теории обратных задач наблюдения и идентификации, нелинейном анализе и оптимизации. Им развита теория гарантированного оценивания динамики систем по результатам измерений — методы идентификации, фильтрации и интерполяции для обыкновенных и распределенных процессов. Ему принадлежат важные результаты по дуальности задач игрового управления и позиционного наблюдения, по теории синтеза управлений в условиях неполной информации. В его работах построена теория трубок траекторий для нелинейных дифференциальных включений, отвечающих задачам моделирования недоопределенных динамических систем и целевого управления ансамблями траекторий. Созданы конструктивные методы решения задач оценивания и идентификации для динамических систем со статистически неопределенными параметрами. Развита теория наблюдения для эволюционных систем, описываемых уравнениями в частных производных. Предложена единая схема построения регуляризаторов для некорректных обратных задач оценивания в таких системах. Разработаны новые вычислительные методы эллипсоидального и полиэдрального исчисления в теории управления и оценивания, теория синтеза импульсных управлений и быстрых управлений.

В 1957 г. после окончания с медалью средней школы № 1 в Свердловске А. Б. Куржанский поступил на энергетический факультет Уральского политехнического института (УПИ). Лекции по высшей математике студентам факультета читал профессор Николай Николаевич Красовский, он же вел упражнения в группе, где учился А. Б. Куржанский. Именно с этого времени под сильным впечатлением от общения с Н. Н. Красовским началось увлечение Александра Борисовича математикой. Во время учебы в УПИ он одновременно посещал лекции на заочном отделении физико-математического факультета Уральского государственного университета им. А. М. Горького (УрГУ), где сдал экзамены по всем основным курсам факультета. После защиты в 1962 г. диплома с отличием в УПИ А. Б. Куржанский продолжил обучение в аспирантуре математико-механического факультета УрГУ под руководством Н. Н. Красовского. В 1965 г. он защитил кандидатскую диссертацию и затем продолжил работу на организованной в те годы Н. Н. Красовским кафедре прикладной математики Уральского государственного университета.

В 1967 г. Александр Борисович был приглашен на работу в Свердловское отделение Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР (СОМИ, ныне Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН — ИММ УрО РАН).

В 1971 году Александр Борисович успешно защитил докторскую диссертацию “Управление экстремально связанным движением и позиционное наблюдение”. Развита в диссертации концепция позиционного наблюдения привела его в дальнейшем к созданию теории гарантированного апостериорного оценивания состояний и параметров динамических систем по результатам наблюдений. Результаты этой теории составили основу будущей монографии А. Б. Куржанского “Теория управления и наблюдения в условиях неопределенности”, опубликованной в издательстве “Наука” в 1977 г. и сразу ставшей востребованной среди специалистов по теории управления и ее приложениям. В 1973 г. он возглавил созданную в Институте лабораторию (позднее отдел) оптимального управления, состоящую из его учеников — выпускников УрГУ. В 1976 г. за цикл работ по математической теории управления А. Б. Куржанскому совместно с Н. Н. Красовским, Ю. С. Осиповым, А. И. Субботиным была присуждена Ленинская премия. В 1977 г. А. Б. Куржанский был назначен директором Института, сменив на этом посту академика Н. Н. Красовского. Директором ИММ А. Б. Куржанский работал до 1983 г., много сил и времени отдавая укреплению авторитета ведущих научных направлений Института, развитию его международных контактов, оснащению современной вычислительной техникой. В 1981-м он был избран членом-корреспондентом, а в 1990-м — действительным членом АН СССР по Отделению механики и процессов управления.

Результаты исследований А. Б. Куржанского получили и международное признание. В 1984 г. он получает приглашение возглавить методологическую программу “Системы и принятие решений” в Международном институте прикладного системного анализа (IIASA, Лаксенбург, Австрия). В этом институте А. Б. Куржанский проработал с 1984 по 1992 г., осуществляя руководство исследованиями по программе и созданному в ее рамках проекту “Динамические системы”. Деятельность Александра Борисовича на этом посту способствовала значительному укреплению авторитета программы и Института прикладного системного анализа в целом. К работе в проектах программы он сумел привлечь ведущих ученых Австрии, СССР, США, Франции, Японии и других стран. В этот период при его непосредственном участии было организовано несколько десятков научных конференций, издано большое количество научных статей и ряд монографий. В течении нескольких лет А. Б. Куржанский был одновременно заместителем директора IIASA. В 1992 г. он был удостоен звания Почетного ученого Института прикладного системного анализа (IIASA Honorary Scholar).

С 1992 г. А. Б. Куржанский — профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (МГУ), организатор и заведующий кафедрой системного анализа на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, где много сил и энергии уделяет подготовке молодых специалистов, магистров и аспирантов по новым направлениям теории процессов управления и системного анализа, математического моделирования сложных систем с обратной связью.

Широкий и разнообразный круг научных интересов А. Б. Куржанского. Он автор более 250 научных работ, в том числе ряда монографий, опубликованных в ведущих отечественных и зарубежных издательствах.

Созданные А. Б. Куржанским методы гарантированного оценивания были распространены как им самим, так и его коллегами и учениками на статистически неопределенные системы со случайными возмущениями, имеющими неточно известные характеристики. Теория гарантированного оценивания была развита также для систем с запаздыванием и систем, описываемых уравнениями в частных производных. Для указанных систем была разработана конструкция вспомогательной задачи гарантированного оценивания, динамическая оценка в которой в форме уравнений минимаксного фильтра служит регуляризованным решением обратной задачи.

Во многих разделах теории управления и дифференциальных игр возникают задачи описания траекторных трубок динамических систем с неопределенными параметрами. В серии работ Александра Борисовича и его учеников, посвященных проблемам многозначного анализа, были предложены аналоги дифференциальных уравнений в пространствах множеств и развита

теория таких уравнений. Были созданы конструктивные методы описания семейств траекторий дифференциальных включений, сохраняющихся (выживающих) в течение предписанного времени в пределах заданного множества фазового пространства. Получены эволюционные уравнения (уравнения интегральной воронки), описывающие динамику во времени областей достижимости дифференциальных включений с фазовыми ограничениями. Был введен и исследован новый класс эволюционных уравнений, в терминах решений которых дано описание конфликтно-достижимых областей управляемой системы, множеств разрешимости задачи об управлении при наличии фазовых ограничений и противодействия, семейств сильно и слабо инвариантных отображений.

Важное место в исследованиях А. Б. Куржанского занимает разработка вычислительных алгоритмов решения задач гарантированного оценивания и управления. Им была разработана техника эллипсоидальных аппроксимаций выпуклых множеств и на ее базе получены эволюционные уравнения для внешних и внутренних эллипсоидальных оценок различных многозначных интегралов, представляющих, в частности, прямые и попятные области (трубки) достижимости систем высокой размерности. Принципиальной особенностью развиваемых А. Б. Куржанским методов (в отличие от других известных результатов по эллипсоидальным оценкам в теории управления) является возможность получения сколь угодно точных двусторонних приближений решений путем пересечения внешних и объединения внутренних эллипсоидальных оценок по множествам управляющих параметров. Поскольку отдельные оценки вычисляются независимо, процедуры аппроксимации допускают эффективное распараллеливание вычислений. Основы развиваемых методов эллипсоидального оценивания отражены в монографии (А.В. Kurzhanski, I. Valyi, *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhäuser, Boston, 1997, 321 p.) Подобные идеи были также заложены в схему построения оценок при помощи другого конечно-параметрического класса множеств — параллелотопов. На основе предложенных алгоритмов были разработаны эффективные вычислительные процедуры и созданы пакеты прикладных программ для решения оценивания и синтеза управлений в линейных системах с неопределенными возмущениями.

Теория гарантированного апостериорного оценивания послужила основой для разработки новых оригинальных методов синтеза стратегий управления, когда в качестве состояний системы рассматриваются информационные множества. А. Б. Куржанским сформулирован принцип оптимальности при неопределенности и принцип разделения для таких задач. Задачу синтеза оказалось возможным разделить на конечномерную задачу оценивания и бесконечномерную (в классе траекторных трубок) задачу управления. Решение каждой из подзадач, получаемое посредством применения соответствующего варианта гамильтонова формализма, в линейном случае сводится к построениям в конечномерных пространствах. Теория и вычислительные методы решения задач программного управления и задач синтеза управлений по неполным данным изложены в монографии (А.В. Kurzhanski, P. Varaiya, *Dynamics and Control of Trajectory Tubes, Theory and Computation, Systems & Control: Foundations & Appl.*, Birkhäuser, Boston, 2014, 445 p.)

Существенное продвижение в работах А. Б. Куржанского и его учеников из МГУ получило решение трудной проблемы синтеза управлений для импульсных систем. Разработанная теория синтеза опирается на обобщения вариационных неравенств Гамильтона — Якоби — Беллмана. В рамках созданной теории допускается использование “быстрых” управлений, содержащих импульсы высших порядков. Программный вариант подобных управлений изучался еще в ранних работах Александра Борисовича. Разработка теории синтеза импульсных управлений позволила в рамках единой формализации исследовать и задачи управления для гибридных систем, содержащих скачкообразные перестройки состояний. Последние результаты в данной области содержатся в недавно вышедшей книге (А.В. Kurzhanski, A.N. Daryin. *Dynamic Programming for Impulse Feedback and Fast Controls*, Springer-Verlag, London Ltd., 2020, 275 p.)

Заметное место в работах А. Б. Куржанского последних лет занимает актуальная тематика

координированного целевого синтеза управления группой управляемых объектов, совершающих совместное движение к целевому множеству. Разрабатываемые подходы к решению опираются на развитые им ранее теорию и методы синтеза управлений системами с многозначными траекториями, учитывающие эффект нелинейности систем, недоопределенность моделей и неполноту текущих измерений в каналах обратной связи.

Обширна и многогранна научно-организационная деятельность Александра Борисовича. Он входит в состав редакционных коллегий многих ведущих отечественных и международных научных журналов и серий монографий издательств Springer и Birkhäuser. В качестве председателя и члена оргкомитетов и программных комитетов Куржанский принимает активное участие в организации и проведении многих международных конференций высокого уровня. Он выступал с пленарными и приглашенными докладами на престижных международных конгрессах и конференциях, с лекциями и докладами во многих ведущих университетах и научных центрах в России и за рубежом.

А. Б. Куржанский возглавляет Национальный комитет России по автоматическому управлению, он член бюро Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, член Национальных комитетов России по теоретической и прикладной механике и по системному анализу при Президиуме РАН.

Высокий авторитет А. Б. Куржанского в международных научных кругах позволяет ему достойно представлять интересы России в международных организациях. Он давно и плодотворно работает в ИФАК (IFAC — Международная федерация автоматического управления), был членом Руководящего совета ИФАК. Александр Борисович удостоен знака Почетного деятеля федерации. Во многом благодаря его авторитету и энергии удалось провести в России в последние годы несколько крупных международных конференций ИФАК, а также привлечь ведущих мировых специалистов к участию в ряде организуемых в нашей стране, в том числе в Екатеринбурге, конференций по теории управления.

Работа со студентами и аспирантами всегда была в числе основных приоритетов для А. Б. Куржанского. С 1965 по 1984 г. он трудился на математико-механическом факультете Уральского государственного университета им. А. М. Горького в качестве ассистента, далее доцента и, наконец, профессора кафедры прикладной математики. Им было прочитано большое количество общих и специальных курсов по современным разделам математики. Его увлеченность и эрудиция, глубина и оригинальность изложения материала всегда привлекали студентов на его лекции и семинары. Среди учеников Александра Борисовича — более 30 докторов и кандидатов наук (в их числе несколько заведующих кафедрами и профессоров ведущих вузов), успешно занимающихся математическими исследованиями и преподавательской деятельностью в России и за рубежом.

Возглавив в 1992 г. созданную им кафедру системного анализа на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, А. Б. Куржанский за короткий промежуток времени сумел собрать команду высококлассных специалистов, разработать программы и организовать обучение студентов по ряду новых перспективных направлений теории управления и системного анализа. Несмотря на большую занятость административной и научной работой, А. Б. Куржанский и по сей день несет значительную лекционную нагрузку, читая для студентов кафедры несколько специальных курсов. В 1999 г. А. Б. Куржанскому было присвоено звание “Заслуженный профессор Московского государственного университета”.

А. Б. Куржанский возглавляет известную научную школу по теории управления, объединяющую как сотрудников и аспирантов кафедры системного анализа в МГУ, так и его учеников из Екатеринбурга. На протяжении многих лет А. Б. Куржанский продолжает поддерживать тесные контакты с Уральским отделением АН в целом и Институтом математики и механики им. Н. Н. Красовского в частности. Он руководит научной тематикой отдела оптимального управления ИММ УрО РАН, состоящего из его учеников (среди которых 4 доктора наук). Ученики Александра Борисовича и руководство Института всегда высоко ценят его искреннюю

заинтересованность и деятельное участие в проблемах и делах Института, его постоянную поддержку, помощь и конструктивные советы при решении многих научных и организационных вопросов. В 2017 г. А. Б. Куржанский награжден Президиумом УрО РАН медалью имени Н. Н. Красовского за научные труды, научные открытия и изобретения, имеющие большое значение для науки и практики в области математики, механики и информатики.

Александра Борисовича отличает широта интересов и незаурядная эрудиция. Он прекрасно разбирается во многих вопросах, не связанных непосредственно с его исследовательской работой, является тонким ценителем классической музыки и литературы, знатоком мировой и отечественной истории. А. Б. Куржанский всегда был и остается настоящим патриотом России, глубоко и искренне переживающим за судьбу страны.

Александр Борисович встречает свой юбилей полным творческой энергии, новых идей и планов, активно продолжая плодотворную научную и педагогическую работу.

Коллектив Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, редколлегия журнала, ученики, коллеги и друзья сердечно поздравляют Александра Борисовича со славным юбилеем, желают ему крепкого здоровья, новых творческих свершений и успехов!

УДК 519.216.3

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ МНОГОШАГОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Б. И. Ананьев

Рассмотрены многошаговые стохастические включения вида $z_k \in H_k(z_{k-1}, \omega)$, где $z_k \in Z_k = X_k Y_k$, $k \in 1 : N$. Проекция z_k на X_k считается ненаблюдаемым, а проекция на Y_k — наблюдаемым состоянием. Элемент ω принадлежит вероятностному пространству (Ω, \mathcal{F}, P) , а мультиотображение $H_k(z, \cdot)$ является измеримым относительно σ -алгебры \mathcal{G}_k . Последние σ -алгебры полагаются независимыми при разных k , а их объединение $\mathcal{F}_k = \sigma(\bigcup_{i \in 1:k} \mathcal{G}_i) \subset \mathcal{F}$ характеризует возрастающее накопление информации. Исследуются три способа оценивания ненаблюдаемых состояний, которые основаны на разных подходах к формированию множества переходных вероятностей. Показано, что эти способы приводят к различным множествам условных распределений для ненаблюдаемых состояний процесса. Частично изучен вопрос о достаточных условиях совпадения рассмотренных схем фильтрации и доказано, что для конечных фазовых пространств эти схемы совпадают в случае неатомического вероятностного пространства. Введен новый класс лебеговских селекторов для произвольных мультиотображений и установлено, что он не пуст, в частности, для измеримых простых прямоугольников на неатомическом пространстве. Доказано, что в лебеговском классе для простых включений и селекторов, заданных на неатомическом вероятностном пространстве, схемы фильтрации также совпадают.

Ключевые слова: оценивание, фильтрация, стохастические включения, селекторы, переходные вероятности, условные распределения.

B. I. Ananyev. Estimation of states of multistage stochastic inclusions.

Multistage stochastic inclusions of the form $z_k \in H_k(z_{k-1}, \omega)$, where $z_k \in Z_k = X_k Y_k$ and $k \in 1 : N$, are considered. We regard the projection of z_k to X_k as an unobservable state and the projection of z_k to Y_k as an observable state. The element ω belongs to a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) , and the multifunction $H_k(z, \cdot)$ is measurable with respect to a σ -algebra \mathcal{G}_k . These σ -algebras are supposed to be independent for different k , and their union $\mathcal{F}_k = \sigma(\bigcup_{i \in 1:k} \mathcal{G}_i) \subset \mathcal{F}$ characterizes an increasing accumulation of information. We consider three ways of estimating the unobservable states based on different methods of forming the set of transition probabilities. It is shown that these ways result in different sets of conditional distributions for the unobservable states of the process. The question of sufficient conditions for the coincidence of the considered filtering schemes is partially studied, and it is proved that, for finite state spaces, these schemes coincide in the case of a nonatomic probability space. A new class of Lebesgue selections is introduced for arbitrary multifunctions and is shown to be nonempty, in particular, for measurable simple rectangles on a nonatomic space. It is proved that the filtering schemes also coincide in the Lebesgue class for simple inclusions and selections defined on a nonatomic probability space.

Keywords: estimation, filtering, stochastic inclusions, selections, transition probabilities, conditional distributions.

MSC: 93E10, 62L12, 34G25

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-12-26

1. Введение

Данная статья продолжает исследования [1]. Результаты настоящей работы могут использоваться в задачах восстановления входных воздействий и задачах коррекции движения механических систем при наличии коммуникационных ограничений в виде неточных цифровых каналов связи [2; 3]. Другие возможные подходы к оцениванию в статистически неопределенных ситуациях были предложены, например, в публикациях [4–6], где содержится обширная библиография по теме. Вместе с тем за последние 10–15 лет тематика статистически неопределенного оценивания постоянно развивалась в разных направлениях. Так, например,

в книге [7] представлены задачи оценивания, решаемые с использованием интервального анализа и теории размытых множеств. В статье [8] доказано, что множества достижимости стохастических дифференциальных включений являются подмножествами некоторых многозначных стохастических уравнений. В монографии [9] содержатся многочисленные примеры задач нелинейной фильтрации и их инженерные применения. Новые возможности для исследования задач стохастически-неопределенного оценивания открываются при использовании подхода из [10], где случайные множества рассматриваются как результат неточных наблюдений случайных переменных. Авторы изучают верхние и нижние вероятности, индуцированные случайными множествами, и дают оценку для вероятностных распределений. Проблема увязывается с существованием селекторов для многозначных отображений. Данный подход применяется в настоящей работе для задач статистически-неопределенного оценивания. Для решения абстрактной задачи фильтрации с заданными вероятностями перехода используется известная теория из монографии [11].

Введем ряд обозначений и понятий, принятых в статье. *Измеримым пространством* называется пара (Ω, \mathcal{F}) , состоящая из произвольного множества Ω и заданной на нем σ -алгебры \mathcal{F} . Если на пространстве задана счетно-аддитивная мера P , то тройка (Ω, \mathcal{F}, P) определяется как *вероятностное пространство*. *Борелевская σ -алгебра* на топологическом пространстве X обозначается символом \mathbb{B}_X . Если X — метризуемое пространство, то под символом $\mathbb{P}(X)$ понимается множество всех вероятностных мер на измеримом пространстве (X, \mathbb{B}_X) . В задачах оценивания и стохастического управления рассматриваемые метризуемые пространства часто должны обладать дополнительными свойствами. А именно вводятся *борелевские пространства*. Пространство X называется *борелевским*, если оно гомеоморфно борелевскому подмножеству полного сепарабельного метрического пространства (польского). Всякое несчетное борелевское пространство имеет мощность c (континуума). Более того, два борелевских пространства борелевски изоморфны тогда и только тогда, когда они обладают одинаковой мощностью, [11, предложение 7.16]. В частности, всякое борелевское пространство борелевски изоморфно $[0, 1]$ с σ -алгеброй $\mathbb{B}_{[0,1]}$. *Декартово произведение* (счетное) множеств X_1, X_2, \dots обозначается через $X_1 X_2 \dots$. Если в множествах X_1, X_2, \dots заданы σ -алгебры $\mathcal{F}_{X_1}, \mathcal{F}_{X_2}, \dots$, то их произведением $\mathcal{F}_{X_1} \mathcal{F}_{X_2} \dots$ в $X_1 X_2 \dots$ является наименьшая σ -алгебра, содержащая все множества вида $A_1 A_2 \dots$, где $A_i \in \mathcal{F}_{X_i}$, $i = 1, 2, \dots$. В случае топологических пространств имеем $\mathbb{B}_{X_1} \mathbb{B}_{X_2} \dots = \mathbb{B}_{X_1 X_2 \dots}$, где в $X_1 X_2 \dots$ введена *топология произведения*. Для произвольного семейства \mathcal{P} подмножеств какого-либо множества X порождаемая семейством σ -алгебра обозначается как $\sigma(\mathcal{P})$. Если $f : \Omega \rightarrow X$ — отображение из одного измеримого пространства (Ω, \mathcal{F}) в другое (X, \mathcal{A}) , то f называется *$\mathcal{F}|\mathcal{A}$ -измеримым* при условии, что $f^{-}(A) = \{\omega \mid f(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \mathcal{A}$. *Математическое ожидание* обозначается символом E . Для числовой $\mathcal{F}|\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ -измеримой и интегрируемой ($E|f| < \infty$) функции f на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) *условное математическое ожидание* относительно σ -алгебры $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ маркируется символом $E(f|\mathcal{B})$. Для случайных функций в гильбертовом или банаховом пространстве X также определяется условное среднее по формуле $h(E(f|\mathcal{B})) = E(h(f)|\mathcal{B})$, $\forall h \in X^*$, где X^* — сопряженное пространство к X . В случае $\mathcal{B} = y^{-}(\mathcal{A})$, где $y : \Omega \rightarrow X$ есть $\mathcal{F}|\mathcal{A}$ -измеримое отображение из (Ω, \mathcal{F}) в (X, \mathcal{A}) , часто пишут $E(f|y)$ вместо $E(f|y^{-}(\mathcal{A}))$.

При повторении случайного эксперимента некоторые случайные величины и отображения относятся к “наблюдаемым”, а другие к “ненаблюдаемым”. Далее кавычки при упоминании состояний опускаются. Пусть имеется $\mathcal{F}|\mathbb{B}_X$ -измеримое ненаблюдаемое отображение $x : \Omega \rightarrow X$ из вероятностного пространства (Ω, \mathcal{F}, P) в борелевское пространство X , а также $\mathcal{F}|\mathbb{B}_Y$ -измеримое наблюдаемое отображение $y : \Omega \rightarrow Y$ из того же вероятностного пространства в другое борелевское пространство Y . Тогда по теореме [12, теорема II.7.5] существует регулярное условное распределение $q(A|y) = P(x \in A|y) = E(I_{x^{-}(A)}|y)$ (равенство понимается почти наверное по мере $P_{y^{-}}$ при фиксированном $A \in \mathbb{B}_X$). Здесь $q(\cdot|y) \in \mathbb{P}(X)$ при фиксированном $y \in Y$, I_B — характеристическая функция множества B . Такое распределение $q(A|y)$ называется *стохастическим ядром* на X при условии Y или *переходной вероятностью* из Y в X . Извест-

но [11, следствие 7.25.1], что если X — борелевское пространство, то $\mathbb{P}(X)$ также борелевское пространство, когда оно наделено *слабой топологией*. Каждое стохастическое ядро $q(\cdot|y)$ представляет собой семейство вероятностных мер из $\mathbb{P}(X)$, параметризованное посредством $y \in Y$. Борелевская измеримость ядер означает следующее. Пусть $\gamma : Y \rightarrow \mathbb{P}(X)$ — отображение вида $\gamma(y) = q(\cdot|y)$, тогда $\gamma^{-1}(\mathbb{B}_{\mathbb{P}(X)}) \subset \mathbb{B}_Y$. Понятие *борелевской измеримости* ядер эквивалентно борелевской измеримости функций $q(A|y)$ по y для всех $A \in \mathbb{B}_X$. Стохастическое ядро $q(\cdot|y)$ называется непрерывным, если отображение γ непрерывно.

Пусть отображение $f : X \rightarrow H$ таково, что оно $\mathbb{B}_X|\mathbb{B}_H$ -измеримо и конечен интеграл $E\|f(x)\|$ для композиции $f(x)$ отображений f и x , где H — гильбертово пространство. Тогда с помощью стохастического ядра $q(\cdot|y)$ можно записать равенство для условного ожидания $E(f(x)|y) = \int_X f(x)q(dx|y)$. Если же $E\|f(x)\|^2 < \infty$, то последний интеграл решает задачу наилучшего приближения отображения $f(x)$ с помощью наблюдаемых данных:

$$E\|f(x) - g(y)\|^2 \rightarrow \min_{g(\cdot)}$$

по всем $\mathbb{B}_Y|\mathbb{B}_H$ -измеримым отображениям $g : Y \rightarrow H$ со свойством $E\|g(y)\|^2 < \infty$.

Нам потребуется следующая теорема о разложении стохастических ядер на произведении борелевских пространств.

Теорема 1 [11, предложение 7.27]. *Пусть (Z, \mathcal{B}) — измеримое пространство, X и Y — борелевские пространства, и пусть $q(\cdot|z)$ — стохастическое ядро на XY при условии Z . Предположим, что функция $q(B|z)$ \mathcal{B} -измерима по z при любом множестве $B \in \mathbb{B}_{XY}$. Тогда существуют стохастическое ядро $r(\cdot|z, y)$ на X при условии ZY и стохастическое ядро $s(\cdot|z)$ на Y при условии Z такие, что $r(A|z, y)$ $\mathcal{B}\mathbb{B}_Y$ -измеримо по (z, y) для любых множеств $A \in \mathbb{B}_X$, $s(B|z)$ \mathcal{B} -измеримо по z для любых множеств $B \in \mathbb{B}_Y$, и*

$$q(AB|z) = \int_B r(A|z, y)s(dy|z) \quad \forall A \in \mathbb{B}_X, \quad \forall B \in \mathbb{B}_Y, \quad (1.1)$$

причем $s(B|z) = q(XB|z)$.

Если $x : \Omega \rightarrow X$ и $y : \Omega \rightarrow Y$ — борелевски измеримые случайные отображения, то из приведенной теоремы, в частности, следует существование регулярной условной вероятности. Действительно, определим меру $q(AB) = P(x^{-1}(A) \cap y^{-1}(B))$. Применяя теорему, получаем стохастическое ядро $r(A|y)$, которое и является регулярной условной вероятностью.

2. Проблема многошаговой фильтрации

В данном разделе рассмотрим задачу фильтрации с известными и неопределенными переходными вероятностями.

2.1. Фильтрация с известными вероятностями перехода

Пусть заданы борелевские пространства X_0, \dots, X_N (ненаблюдаемые состояния) и пространства Y_0, \dots, Y_N (наблюдаемые состояния). Число N — конечный горизонт. Введем произведения пространств $Z_0 = X_0Y_0, \dots, Z_N = X_NY_N$. Пусть также заданы вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) и многошаговые уравнения

$$z_k = h_k(z_{k-1}, \omega), \quad k \in 1 : N, \quad (2.1)$$

осуществляющие случайный переход из Z_{k-1} в Z_k . Отображения $h_k : Z_{k-1}\Omega \rightarrow Z_k$ предполагаются $\mathbb{B}_{Z_{k-1}}\mathcal{G}_k|\mathbb{B}_{Z_k}$ -измеримыми, где возрастающий поток σ -алгебр $\mathcal{F}_k = \sigma(\bigcup_{i=1:k} \mathcal{G}_i) \subset \mathcal{F}$

характеризует накопление информации. Набор σ -алгебр $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_N$ примем независимым в совокупности. Начальное состояние $z_0 : \Omega \rightarrow Z_0$ является также случайным $\mathcal{F}_0|\mathbb{B}_{Z_0}$ -измеримым отображением, где \mathcal{F}_0 независимо от \mathcal{F}_N . Таким образом, основное вероятностное пространство предполагается достаточно “богатым”. Последовательность z_k образует *марковский процесс*. Введем стохастические ядра на Z_k при условии Z_{k-1} и распределение начального состояния:

$$\begin{aligned} q_k(D|z) &= P(h_k^-(D)|z) \quad \forall D \in \mathbb{B}_{Z_k}, \quad \forall z \in Z_{k-1}, \\ q_0(D) &= P(z_0^-(D)) \quad \forall D \in \mathbb{B}_{Z_0}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где символом U_z обозначено сечение множества $U \subset Z_{k-1}\Omega$ (в нашем случае $U = h_k^-(D)$). Стохастические ядра $q_k(\cdot|z)$ являются борелевскими. Данный факт вытекает из следующего, более общего, утверждения.

Лемма 1. Пусть $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2$, — два измеримых пространства и $q(\cdot|x)$ — переходная вероятность из Ω_1 в Ω_2 , такая что при каждом $x \in \Omega_1$ мера $q(\cdot|x)$ является вероятностной на измеримом пространстве $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ и при каждом множестве $B \in \mathcal{F}_2$ функция $q(B|x)$ $\mathcal{F}_1|\mathbb{B}_{[0,1]}$ -измерима. Тогда для всякого множества $D \in \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2$, измеримого в σ -алгебре произведения, функция $\Lambda_D(x) = q(D|x)$ будет $\mathcal{F}_1|\mathbb{B}_{[0,1]}$ -измеримой.

Доказательство. Похожее утверждение содержится в [11, следствие 7.26.1], но там предполагается, что измеримые пространства — борелевские. Мы же устанавливаем более общий факт. Согласно [13, предложение III.1.2] выполняется включение $D_x \in \mathcal{F}_2$ для всякого $x \in \Omega_1$. Поэтому функция $\Lambda_D(x)$ корректно определена. Пусть \mathcal{D} — семейство подмножеств из $\Omega_1\Omega_2$, для которых функция $\Lambda_D(x)$ измерима по x . Это семейство замкнуто относительно пересечений, поскольку $\Lambda_{D_1 \cap D_2}(x) = \Lambda_{D_1}(x) \wedge \Lambda_{D_2}(x)$, где $a \wedge b = \min\{a, b\}$. Кроме того, $\Lambda_{D_2 \setminus D_1}(x) = \Lambda_{D_2}(x) - \Lambda_{D_1}(x)$, если $D_1 \subset D_2$. Если же $\cup_{i=1}^{\infty} D_i = D$ и $D_i \subset D_{i+1}$, то $\Lambda_{D_i}(x) \uparrow \Lambda_D(x)$. Таким образом, семейство \mathcal{D} представляет собой систему Дынкина, устойчивую относительно пересечений. К тому же любой прямоугольник $D_1 D_2 \in \mathcal{D}$. По теореме [12, теорема II.3.2] имеем $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 \subset \sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. \square

Здесь и далее символ \square означает окончание доказательства.

Используя начальное распределение, определим стохастическое ядро $r_0(\cdot|y_0)$ на X_0 при условии Y_0 для ненаблюдаемого состояния согласно теореме 1 и формуле (1.1):

$$q_0(AB) = \int_B r_0(A|y) s_0(dy), \quad (2.3)$$

где $s_0(B) = q_0(X_0 B)$. Далее иногда полагается, что $s_0(B) = \delta_{y_0}(B)$, где δ_{y_0} — δ -функция Дирака. На первом шаге введем прогноз условного распределения на Z_1 за один шаг: $\bar{f}_1(D|r_0) = \int_{X_0} q_1(D|x, y_0) r_0(dx|y_0)$. Теперь для этого прогноза, еще раз используя теорему, определим стохастическое ядро $r_1(\cdot|r_0, y_1)$ на X_1 при условии $Y_0 Y_1 \ni [y_0; y_1]$ для ненаблюдаемых состояний из X_1 , исходя из формулы $\bar{f}_1(AB|r_0) = \int_B r_1(A|r_0, y) s_1(dy|r_0)$, где $s_1(B|r_0) = \bar{f}_1(X_1 B|r_0)$. Процесс фильтрации может быть продолжен. Пусть условное ядро $r_{k-1}(\cdot|r_0, y^{k-1})$ на X_{k-1} в ситуации, когда $Y_0 Y_1 \dots Y_{k-1} \ni [y_0; y^{k-1}]$, где символ y^i означает упорядоченный набор $[y_1; \dots; y^i]$, уже найдено. Тогда на k -м шаге вводим прогноз условного распределения на Z_k за один шаг:

$$\bar{f}_k(D|r_{k-1}) = \int_{X_{k-1}} q_k(D|x, y_{k-1}) r_{k-1}(dx|r_0, y^{k-1}), \quad k \in 2 : N. \quad (2.4)$$

Теперь для прогноза из (2.4), используя теорему 1, определим стохастическое ядро $r_k(\cdot|r_0, y^k)$ на X_k при условии $Y_0 Y_1 \cdots Y_k \ni [y_0; y^k]$ для ненаблюдаемых состояний из X_k , исходя из формулы

$$\bar{f}_k(AB|r_{k-1}) = \int_B r_k(A|r_0, y^{k-1}, y) s_k(dy|r_{k-1}), \quad (2.5)$$

где $s_k(B|r_{k-1}) = \bar{f}_k(X_k B|r_{k-1})$.

Для отображений из (2.1) будем иметь равенство $P(h_k(z_{k-1}, \omega) \in AY_k | y_0, y^k) = r_k(A|r_0, y^k)$ для $\forall A \in \mathbb{B}_{X_k}$ почти наверное по $[y_0; y^k]$.

Рассмотрим также частный случай многошаговой фильтрации, где вместо уравнений (2.1) имеются уравнения

$$z_k = h_k(x_{k-1}, \omega), \quad k \in 1 : N, \quad (2.6)$$

и отображения $h_k : X_k \Omega \rightarrow Z_k \mathbb{B}_{X_{k-1}} \mathcal{G}_k | \mathbb{B}_{Z_k}$ -измеримы. Начальное состояние $x_0 : \Omega \rightarrow X_0$ предполагается $\mathcal{F}_0 | \mathbb{B}_{X_0}$ -измеримым. Тогда начальным распределением служит мера $r_0(\cdot)$, не зависящая от y_0 , а условные распределения $r_k(A|r_0, y^k)$ также не зависят от y_0 . Отметим, что согласно [11, пр. 7.29] зависимость ядер r_k от r_0, y^k является борелевской, а также, что переходные вероятности (2.2) играют основную роль в процессе фильтрации и могут быть заданы априори без уравнений (2.1) или (2.6).

Рассмотрим случай абсолютно непрерывных мер. Пусть для простоты $X_k = \mathbb{R}^n$, $Y_k = \mathbb{R}^m$ и $q_k(D|z_{k-1}) = \int_D u_k(z|z_{k-1}) dz$, где $D \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$, $0 \leq u_k(z|z_{k-1})$ — борелевские по переменным z, z_{k-1} плотности вероятности при условии z_{k-1} . Пусть также $q_0(D) = \int_D u_0(z) dz$, где u_0 — начальная борелевская плотность вероятности. Тогда для условной меры r_0 из (2.3) плотность имеет вид $\hat{u}_0(x|y_0) = u_0(x, y_0) / \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x, y_0) dx$, а плотность условного прогноза (2.4) запишется как

$$\bar{u}_k(z|y_0, y^{k-1}) = \int_{\mathbb{R}^n} u_k(z|x, y_{k-1}) \hat{u}_{k-1}(x|y_0, y^{k-1}) dx, \quad k \in 2 : N. \quad (2.7)$$

Наконец, плотность для условного ядра $r_k(\cdot|r_0, y^k)$ из (2.5) будет иметь вид

$$\hat{u}_k(x|y_0, y^k) = \bar{u}_k(x, y_k | y_0, y^{k-1}) / \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}_k(x, y_k | y_0, y^{k-1}) dx. \quad (2.8)$$

В частном случае (2.6) в формулах (2.7), (2.8) не будет зависимости от y_0 .

2.2. Фильтрация в статистически неопределенном случае

Предположим, что случайный переход из Z_{k-1} в Z_k осуществляется согласно включению

$$z_k \in H_k(z_{k-1}, \omega), \quad (2.9)$$

что соответствует отсутствию некоторых статистических данных о распределении переходной вероятности. Здесь H_k — *многозначное отображение* (далее *мультиотображение* или *мультифункция*). Множество всех подмножеств множества X будет обозначаться через $\mathcal{P}(X)$. Пусть $H : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ является произвольным мультиотображением. *Верхний прообраз* множества B для H определяется как $H^*(B) = \{x \in X \mid H(x) \cap B \neq \emptyset\}$. *Нижний прообраз* для H задается формулой $H_*(B) = \{x \in X \mid H(x) \subset B\}$. Если H зафиксировано, то прообразы будем записывать как B^* и B_* соответственно. Свойства прообразов перечислены в [14, леммы 1.2.3, 1.2.4]. Если на множествах X, Y заданы σ -алгебры \mathcal{A}, \mathcal{B} соответственно, то вводится

понятие *сильной измеримости* ($\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримости), что означает $H^*(B) \in \mathcal{A}$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Поскольку $(H_*(B^c))^c = H^*(B)$, где $B^c = Y \setminus B$, то понятие сильной измеримости можно формулировать с помощью нижнего прообраза $H_* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. Если на измеримом пространстве (X, \mathcal{A}) задана вероятностная мера P , то на измеримом пространстве (Y, \mathcal{B}) с помощью мультиотображения H определяются функции множества $P^*(B) = P(B^*)$ и $P_*(B) = P(B_*)$. Эти функции множества (верхняя вероятность и нижняя вероятность), вообще говоря, не являются вероятностными мерами. Они *сопряжены* в том смысле, что $P_*(B) = 1 - P^*(B^c)$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Верхняя вероятность — полунепрерывная снизу и бесконечно альтернирующая [15]. В некоторых случаях будем писать P_H^* , чтобы подчеркнуть зависимость верхней вероятности от мультиотображения H .

Для $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримой мультифункции $H : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ определяется множество *измеримых селекторов*:

$$S(H) = \{h : X \rightarrow Y \mid \text{отображение } h - \mathcal{A}|\mathcal{B} \text{ измеримо и } h(x) \in H(x) \forall x \in Y^*\}.$$

На дополнении $X \setminus Y^*$ селектор задается произвольным постоянным значением из Y . Для всякого селектора $h \in S(H)$ символом P_h обозначается его вероятностное распределение на Y , задаваемое как $P_h(B) = P(h^-(B)) \forall B \in \mathcal{B}$, где $h^-(B) = \{x \mid h(x) \in B\}$. Объединяя все такие распределения, получаем множество $P_H = \{P_h \mid h \in S(H)\} \subset \mathbb{P}(Y)$ и числовое множество $P_H(B) = \{P_h(B) \mid h \in S(H)\} \subset [0, 1]$. При условии $P(Y^*) = 1$, которое *всегда предполагается* в данной работе, будем иметь включение $h^-(B) \cap Y^* \subset H^*(B)$, откуда $P_h(B) \leq P^*(B) \forall B \in \mathcal{B}$. Но тогда в силу сопряженности имеем неравенство $P_*(B) \leq P_h(B)$. Следовательно, для всякого селектора $h \in S(H)$ при условии $P(Y^*) = 1$ выполняется включение $P_h(B) \in [P_*(B), P^*(B)] \forall B \in \mathcal{B}$. Вводятся множества

$$\Delta_H = \{p \in \mathbb{P}(Y) \mid p(B) \in P_H(B) \forall B \in \mathcal{B}\}, \quad M_H = \{p \in \mathbb{P}(Y) \mid p(B) \leq P^*(B) \forall B \in \mathcal{B}\}. \quad (2.10)$$

Ясно, что выполняются включения $P_H \subset \Delta_H \subset M_H$. Множество M_H всегда выпукло и во многих случаях слабо компактно. Однако селекторов упомянутой мультифункции может не существовать. Достаточным условием существования служит теорема Куратовского [16, теорема 5.1], согласно которой для сепарабельного метрического пространства Y с $\mathcal{B} = \mathbb{B}_Y$ и $\mathcal{A}|\mathbb{B}_Y$ -измеримого мультиотображения $H : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ с полными значениями в Y имеется хотя бы один измеримый селектор. Далее предполагается, что во включениях (2.9) мультиотображения $H_k(z_{k-1}, \omega)$ являются $\mathbb{B}_{Z_{k-1}}\mathcal{G}_k|\mathbb{B}_{Z_k}$ -измеримыми и $S(H_k) \neq \emptyset$ для всех $k \in 1 : N$. Включения (2.9) формируют *многозначный марковский процесс*.

3. Три схемы фильтрации для включений

Для каждого $\mathbb{B}_{Z_{k-1}}\mathcal{G}_k|\mathbb{B}_{Z_k}$ -измеримого селектора $h_k(z, \omega)$ из $S(H_k)$ определяем стохастическое ядро $q_k(\cdot|z)$ согласно (2.2). Объединяя все такие ядра, введем множество

$$\mathcal{Q}_k = \{q_k(\cdot|z) \text{ из (2.2)} \mid h_k \in S(H_k)\}, \quad k \in 1 : N. \quad (3.1)$$

Далее на первом шаге вычисляем множество ядер прогноза:

$$\bar{F}_1 = \bigcup_{q_1 \in \mathcal{Q}_1} \left\{ \bar{f}_1 \mid \bar{f}_1(\cdot|r_0) = \int_{X_0} q_1(\cdot|x, y_0) r_0(dx|y_0) \right\}$$

и для каждого $\bar{f}_1 \in \bar{F}_1$ по формуле $\bar{f}_1(AB|r_0) = \int_B r_1(A|r_0, y) s_1(dy|r_0)$ построим семейство условных распределений $\mathcal{R}_1 = \bigcup_{\bar{f}_1 \in \bar{F}_1} \{r_1(\cdot|r_0, y_1)\}$. Пусть множество условных распределений

$\mathcal{R}_{k-1} = \{r_{k-1}(\cdot|r_0, y^{k-1})\}$, $k \geq 2$, уже построено. Тогда можем найти множество ядер прогноза на шаге k :

$$\bar{F}_k = \bigcup_{q_k \in \mathcal{Q}_k, r_{k-1} \in \mathcal{R}_{k-1}} \{\bar{f}_k(\cdot|r_{k-1}) \text{ из (2.4)}\}. \quad (3.2)$$

Множество условных распределений на шаге k выводим по формуле

$$\mathcal{R}_k = \bigcup_{\bar{f}_k \in \bar{F}_k} \{r_k(\cdot|r_0, y^k) \text{ из (2.5)}\}. \quad (3.3)$$

Назовем схему построения условных распределений по формулам (3.1), (3.2), (3.3) *селекторной схемой*. Нетрудно видеть, что основную роль в этой процедуре играют семейства ядер \mathcal{Q}_k .

Сформируем переходные вероятности иными способами. Обозначим символом \mathbf{P}_k набор всевозможных борелевских ядер $q(\cdot|z_{k-1})$ на Z_k при условии Z_{k-1} . Каждое ядро из (3.1) принадлежит \mathbf{P}_k . Введем числовое семейство $\mathcal{Q}_k^z(D) = \{q_k(D|z) \text{ из (2.2)} \mid h_k \in S(H_k)\}$, $k \in 1 : N$. Теперь можем определить множества

$$\mathcal{D}_k = \{q \in \mathbf{P}_k \mid q(D|z) \in \mathcal{Q}_k^z(D) \quad \forall D \in \mathbb{B}_{Z_k} \quad \forall z \in Z_{k-1}\}. \quad (3.4)$$

По построению ясно, что $\mathcal{Q}_k \subset \mathcal{D}_k$. Для определения еще одного множества переходных вероятностей рассмотрим верхний прообраз $H_k^*(D) = \{[z, \omega] \mid H_k(z, \omega) \cap D \neq \emptyset\}$ и введем верхнюю вероятность $P_k^{*z}(D) = P(H_k^*(D)_z)$ в зависимости от $z \in Z_{k-1}$. Введем также множество

$$\mathcal{M}_k = \{q \in \mathbf{P}_k \mid q(D|z) \leq P_k^{*z}(D) \quad \forall D \in \mathbb{B}_{Z_k} \quad \forall z \in Z_{k-1}\}. \quad (3.5)$$

Введенные множества включаются друг в друга:

$$\mathcal{Q}_k \subset \mathcal{D}_k \subset \mathcal{M}_k \quad \forall k \in 1 : N. \quad (3.6)$$

Далее сконструируем две рекуррентные процедуры построения условных распределений, подобные (3.2), (3.3), используя множества (3.4), (3.5) вместо (3.1). Обозначим данные множества условных средних символами \mathcal{R}_k^D и \mathcal{R}_k^M соответственно. Согласно включениям (3.6) получаем:

$$\mathcal{R}_k \subset \mathcal{R}_k^D \subset \mathcal{R}_k^M \quad \forall k \in 1 : N. \quad (3.7)$$

Введем мультиотображение $H_k^z(\cdot) = H_k(z, \cdot)$ при фиксированном $z \in Z_{k-1}$. Наряду с множествами (3.4), (3.5) будем рассматривать множества, образующие включения

$$P_{H_k^z} \subset \Delta_{H_k^z} \subset M_{H_k^z} \quad \forall k \in 1 : N, \quad (3.8)$$

для фиксированных $z \in Z_{k-1}$ согласно (2.10).

Рассмотрим

Пример 1. Задан одношаговый процесс с конечным фазовым пространством $Z_0 = Z_1 = \{0, 1, 2, 3\}^2$. Пусть начальное распределение сосредоточено в двух точках: $P(\{z_0 = z_{01}\}) = P(\{z_0 = z_{02}\}) = 1/2$, где $z_{01} = (1, 1)$, $z_{02} = (2, 2)$. На первом шаге к начальному распределению независимо добавляется вероятностное пространство с равномерным распределением в двух точках $\{a, b\}$. Мультиотображения из (2.9) задаются соотношениями

$$\begin{aligned} H(z_{01}, a) &= \{(0, 1), (2, 1)\}, & H(z_{01}, b) &= \{(1, 0), (1, 2)\}, \\ H(z_{02}, a) &= \{(1, 2), (3, 2)\}, & H(z_{02}, b) &= \{(2, 1), (2, 3)\}. \end{aligned}$$

Перебирая селекторы, получаем:

$$\begin{aligned} h_1(z_{01}, a) &= (0, 1), & h_1(z_{01}, b) &= (1, 0), & h_2(z_{01}, a) &= (2, 1), & h_2(z_{01}, b) &= (1, 0), \\ h_3(z_{01}, a) &= (0, 1), & h_3(z_{01}, b) &= (1, 2), & h_4(z_{01}, a) &= (2, 1), & h_4(z_{01}, b) &= (1, 2), \\ h_5(z_{02}, a) &= (1, 2), & h_5(z_{02}, b) &= (2, 1), & h_6(z_{02}, a) &= (3, 2), & h_6(z_{02}, b) &= (2, 1), \\ h_7(z_{02}, a) &= (1, 2), & h_7(z_{02}, b) &= (2, 3), & h_8(z_{02}, a) &= (3, 2), & h_8(z_{02}, b) &= (2, 3). \end{aligned}$$

Комбинируя любой из первых четырех селекторов с любым из последних четырех, имеем 16 возможных вариантов уравнений (2.1). Далее находим множество \mathcal{Q}_1 в виде четырех вариантов распределений при условии z_{01} :

$$q_{11}(z_1 = (0, 1)|z_{01}) = q_{11}(z_1 = (1, 0)|z_{01}) = 0.5, \quad q_{12}(z_1 = (2, 1)|z_{01}) = q_{12}(z_1 = (1, 0)|z_{01}) = 0.5,$$

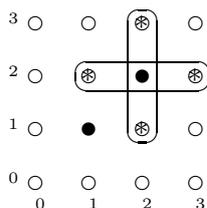
$$q_{13}(z_1 = (0, 1)|z_{01}) = q_{13}(z_1 = (1, 2)|z_{01}) = 0.5, \quad q_{14}(z_1 = (2, 1)|z_{01}) = q_{14}(z_1 = (1, 2)|z_{01}) = 0.5,$$

и еще четырех вариантов распределений при условии z_{02} :

$$q_{15}(z_1 = (1, 2)|z_{02}) = q_{15}(z_1 = (2, 1)|z_{02}) = 0.5, \quad q_{16}(z_1 = (3, 2)|z_{02}) = q_{16}(z_1 = (2, 1)|z_{02}) = 0.5,$$

$$q_{17}(z_1 = (1, 2)|z_{02}) = q_{17}(z_1 = (2, 3)|z_{02}) = 0.5, \quad q_{18}(z_1 = (3, 2)|z_{02}) = q_{18}(z_1 = (2, 3)|z_{02}) = 0.5.$$

С учетом структуры множества \mathcal{Q}_1 в множество \mathcal{D}_1 не может входить никакое другое распределение при условии z_{01} , кроме четырех, указанных выше. Аналогичное можно сказать и про распределения при условии z_{02} . Итак, $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{D}_1$. Множество \mathcal{M}_1 состоит из распределений при условии z_{01} , сосредоточенных на множестве $\{(1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ из четырех точек при условиях: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, $p_i \leq 1/2$. Распределения при условии z_{02} в множестве \mathcal{M}_1 сосредоточены на множестве $\{(2, 1), (1, 2), (3, 2), (2, 3)\}$ и удовлетворяют тем же условиям. Рассмотрим, как устроено множество \mathcal{R}_1 условных распределений для ненаблюдаемого параметра x_1 . Поскольку вероятности на начальном этапе имеют вид $r_0(x_0 = y_0|y_0) = 1$, где $y_0 \in \{1, 2\}$, то и после измерений на первом этапе распределения получают вид δ -функций. Например, $r_1(x_1 = 0|y_0 = 1, y_1 = 1) = 1$, $r_1(x_1 = 1|y_0 = 1, y_1 = 0) = 1$, $r_1(x_1 = 1|y_0 = 2, y_1 = 2) = 1$, $r_1(x_1 = 2|y_0 = 2, y_1 = 1) = 1$. Рассматриваемый одношаговый процесс нетрудно превратить в многошаговый, если на каждом шаге добавлять независимое вероятностное пространство $\{a_k, b_k\}$ с равномерным распределением. При попадании точки на “границу” точка отражается с вероятностью 1 “внутрь” под прямым углом. Во внутренних точках с равной вероятностью происходит переход либо в вертикальное, либо в горизонтальное множество из двух точек. В данном многошаговом процессе последовательность наблюдений $y^k = [y_1; \dots; y_k]$ позволяет точно определить значение x_k . Развитие процесса в примере показано на схеме:



В примере 1 два множества из (3.6) оказались совпадающими. Приведем пример, где все множества в (3.6), а значит и в (3.7), различны.

Пример 2. Рассмотрим снова одношаговую систему с дискретным фазовым пространством $Z_0 = Z_1 = \{0, 1\}^2$. Для удобства занумеруем точки пространства числами 1, 2, 3, 4, где 1 — это (1, 0). Далее нумеруем по часовой стрелке. Вероятностное пространство задается двумя точками $\{a, b\}$ с распределением $P(a) = 1/3$. Пусть начальное распределение является равномерным. Мультифункция H задается следующим образом: $H(2, a) = \{1, 2, 3\}$, $H(2, b) = \{1, 2\}$, $H(3, a) = \{2, 3, 4\}$, $H(3, b) = \{2, 3\}$, $H(4, a) = \{3, 4, 1\}$, $H(4, b) = \{3, 4\}$, $H(1, a) = \{4, 1, 2\}$, $H(1, b) = \{4, 1\}$. При каждом начальном состоянии $i \in 1 : 4$ у мультифункции H имеется шесть селекторов. В соответствии с этим множество \mathcal{Q}_1 при условии 2 состоит из шести распределений

$$(1, 0, 0, 0), \quad (2/3, 1/3, 0, 0), \quad (2/3, 0, 1/3, 0), \quad (1/3, 2/3, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (0, 2/3, 1/3, 0).$$

Здесь (p_1, p_2, p_3, p_4) — набор вероятностей, соответствующих данному состоянию. Аналогично получаем при условиях 3, 4, 1 соответственно:

$$\begin{aligned} &(0, 1, 0, 0), (0, 2/3, 1/3, 0), (0, 2/3, 0, 1/3), (0, 1/3, 2/3, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 2/3, 1/3); \\ &(0, 0, 1, 0), (0, 0, 2/3, 1/3), (1/3, 0, 2/3, 0), (0, 0, 1/3, 2/3), (0, 0, 0, 1), (1/3, 0, 0, 2/3); \\ &(0, 0, 0, 1), (1/3, 0, 0, 2/3), (0, 1/3, 0, 2/3), (2/3, 0, 0, 1/3), (1, 0, 0, 0), (2/3, 1/3, 0, 0). \end{aligned}$$

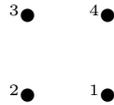
Эти наборы вероятностей выводятся циклической перестановкой. Каждая из них включает состояние с нулевой вероятностью. Теперь заметим, что в множество \mathcal{D}_1 помимо указанных распределений войдут еще распределения

$$(1/3, 1/3, 1/3, 0), (0, 1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 0, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 0, 1/3).$$

Что касается выпуклых множеств вероятностей, принадлежащих \mathcal{M}_1 при фиксированном начальном состоянии, то они будут содержать также распределения

$$(1/2, 1/2, 0, 0), (0, 1/2, 1/2, 0), (0, 0, 1/2, 1/2), (1/2, 0, 0, 1/2).$$

Более того, при условии, например, 2 в \mathcal{M}_1 войдут все распределения, для которых $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_3 \leq 1/3$. Рассмотрим построение множества \mathcal{R}_1 условных распределений. На начальном этапе величины x_0 и y_0 являются независимыми. Поэтому условное распределение x_0 совпадает с безусловным: $P(x_0 = 1) = P(x_0 = 2) = 0.5$. Измерение y_1 дает существенную информацию. Так, для третьего распределения при условии 2 будем иметь $q(x_1 = 1|2, y_1 = 0) = 1$, $q(x_1 = 0|2, y_1 = 1) = 1$. Найдя все условные распределения $q_m(x_1 = j|i, y_1 = l)$, где $j, l \in 1 : 2$, $i \in 1 : 4$, $m \in 1 : 6$, получим множество \mathcal{R}_1 в виде совокупности распределений $\left\{ \sum_{i=1}^4 q_m(x_1 = j|i, y_1 = l)/4 \mid m \in 1 : 6 \right\}$. Данный процесс можно продолжать, добавляя на каждом шаге независимое вероятностное пространство $\{a_k, b_k\}$ с распределением $P(a_k) = 1/3$ и считая, что мультифункция H постоянна на каждом шаге k . Фазовое пространство $Z_k = \{0, 1\}^2$ показано на схеме:



4. Достаточные условия совпадения схем фильтрации для включений

Нас будут интересовать прежде всего условия совпадения множеств во включениях (3.6). На основное вероятностное пространство налагаются дополнительные условия.

О п р е д е л е н и е 1. Множество $A \in \mathcal{F}$ с $P(A) > 0$ в вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) называется *атомом*, если для всех подмножеств B со свойством $\mathcal{F} \ni B \subset A$ имеем $P(B) = P(A)$ или $P(B) = 0$. Вероятностное пространство называется *неатомическим*, если оно не содержит атомов.

Далее примем

Предположение 1. Основное вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) является неатомическим.

С учетом [17, лемма 4.9] или [10, теорема 2] получаем теорему.

Теорема 2. Пусть выполнено предположение 1 и все множества Z_k , $k \in 1 : N$, конечны. Тогда все множества в (3.6), (3.7) совпадают.

Кратко поясним доказательства. Пусть мультифункция $H_k : Z_{k-1}\Omega \rightarrow \mathcal{P}(Z_k)$ $\mathbb{B}_{Z_{k-1}}\mathbb{B}_\Omega|\mathbb{B}_{Z_k}$ -измерима. Тогда для всякого стохастического ядра $q_k(\cdot|z) \in \mathcal{M}_k$ найдется $\mathbb{B}_{Z_{k-1}}\mathbb{B}_{[0,1]}|\mathbb{B}_{Z_k}$ -измеримое отображение h_k , такое что $q_k(D|z) = \lambda(h_k^-(D)_z)$. Здесь λ — мера Лебега и множество \mathcal{M}_k определяется согласно (3.5). Указанное отображение строится так же, как в [17] или [10], с помощью функции квантили и с учетом конечности множеств Z_k . Далее используется результат из [10], согласно которому на каждом неатомическом пространстве существует измеримое отображение $\alpha : \Omega \rightarrow [0, 1]$ с равномерным распределением. Подставив это отображение в h_k , получим композицию $h_k(z, \alpha(\omega))$, которая обладает нужными свойствами. Итак, $\mathcal{Q}_k = \mathcal{D}_k = \mathcal{M}_k$.

В работе [17] имеется ряд результатов о совпадении множеств $P_H = \Delta_H = M_H$ для мультиотображений из неатомических пространств в интервалы из \mathbb{R} , а также утверждается, что возможно перенести результаты на многомерные случайные интервалы. Однако доказательств данного факта в доступной литературе найти не удалось. Контрпримеры также пока не построены, даже в \mathbb{R}^2 . Поэтому рассмотрим более узкие и специальные классы мультифункций и их селекторов.

О п р е д е л е н и е 2. Множество всех борелевских ядер $q_k(\cdot|z) \in \mathbf{P}_k$ на Z_k при условии Z_{k-1} , для которых существует $\mathbb{B}_{Z_{k-1}}\mathbb{B}_{[0,1]}|\mathbb{B}_{Z_k}$ -измеримое отображение $f_k : Z_{k-1}[0, 1] \rightarrow Z_k$, такое что $\lambda(f_k^-(D)_z) = q_k(D|z)$, $\forall D \in \mathbb{B}_{Z_k}$, $\forall z \in Z_{k-1}$, где λ — мера Лебега, обозначим через $\tilde{\mathbf{P}}_k$ и назовем множеством *лебеговских ядер*. Пусть H_k является $\mathbb{B}_{Z_{k-1}}\mathcal{F}|\mathbb{B}_{Z_k}$ -измеримым мультиотображением в правой части включения (2.9). Измеримый селектор $h_k \in S(H_k)$ определим как *лебеговский*, если $P(h_k^-(D)_z) = q_k(D|z)$, $\forall D \in \mathbb{B}_{Z_k}$, $\forall z \in Z_{k-1}$ и $q_k(\cdot|z) \in \tilde{\mathbf{P}}_k$. Множество всех лебеговских селекторов обозначим как $\tilde{S}(H_k)$, а множество всех лебеговских распределений на Z — как $\tilde{\mathbb{P}}(Z)$.

Вопрос о существовании лебеговских селекторов для достаточно широкого класса измеримых мультиотображений остается пока открытым. Назовем мультиотображение *простым*, если оно имеет конечное число многозначных значений. Рассмотрим множество простых измеримых полуоткрытых прямоугольников в \mathbb{R}^2 , заданных на неатомическом вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) . Для них множество лебеговских селекторов непусто. Отображение $\Pi(\omega) = (a(\omega), b(\omega))|(c(\omega), d(\omega))$ — *измеримый прямоугольник (полуоткрытый)*, если $a(\omega) < b(\omega)$, $c(\omega) < d(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, и функции a, b, c, d измеримы. Простые прямоугольники имеют конечное число прямоугольных значений, которые могут пересекаться. Сформулируем лемму.

Лемма 2. *Множество $\tilde{S}(\Pi)$ лебеговских селекторов для измеримого простого прямоугольника Π на неатомическом полном пространстве непусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим вначале, что прямоугольник постоянен: $\Pi(\omega) \equiv \Pi$. Возьмем непрерывную функцию распределения $F(x, y)$ некоторой двумерной случайной величины со свойствами: неравенство $F(x, y) \leq F(u, v)$ влечет $x \leq u$, $y \leq v$; $q(\Pi) = 1$. Здесь q — вероятностная мера на \mathbb{R}^2 , порождаемая функцией F . В множестве уровня $\{z \mid F(z) \leq \alpha\}$ выберем непрерывный селектор $h(\alpha) \in \mathbb{R}^2$, такой что $F(h(\alpha)) = \alpha$. Имеем $\lambda(\{\alpha \mid h(\alpha) \leq z\}) = \lambda(\{\alpha \mid \alpha \leq F(z)\}) = F(z)$. Таким образом, отображение $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ обладает функцией распределения F . Согласно [17] существует измеримое отображение $\alpha : \Omega \rightarrow [0, 1]$ с равномерным распределением, что означает $P(\{\omega \mid \alpha(\omega) \in A\}) = \lambda(A)$. Определив композицию $h(\alpha(\omega))$, выводим равенство $P(\{\omega \mid h(\alpha(\omega)) \in \Pi\}) = P(\{\omega \mid \alpha(\omega) \in h^-(\Pi)\}) = \lambda(h^-(\Pi)) = q(\Pi) = 1$. Пользуясь полнотой, можем считать, что включение $h(\alpha(\omega)) \in \Pi$ выполняется всюду. Получили искомый селектор из $\tilde{S}(\Pi)$. Одну упомянутую функцию F для прямоугольника можно построить так. Пусть $d = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$ — длина диагонали. Если z — точка диагонали с координатами (\bar{x}, \bar{y}) , то на отрезках, соединяющих z с точками (b, \bar{y}) и (\bar{x}, d) , функция $F(x, y)$ постоянна и равна $\sqrt{(\bar{x}-a)^2 + (\bar{y}-c)^2}/d \in [0, 1]$. Функция F удовлетворяет нужным свойствам возрастания и $F(x+\alpha, y+\beta) + F(x, y) - F(x+\alpha, y) - F(x, y+\beta) \geq 0$ для всех $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и для всех $(x, y) \in \Pi$. Значит, построенная функция действительно является функцией распределения. Рассмотрим измеримый простой прямоугольник. Тогда он может быть представлен в

виде $\Pi = \bigcup_{i=1}^n \Pi_i I_{B_i}$, где $\{B_1, \dots, B_n\}$ — разбиение Ω на непересекающиеся множества $B_i \in \mathcal{F}$; I_B — характеристическая функция множества B . Представленная формула означает, что $\Pi \equiv \Pi_i$ на B_i . Определим класс подмножеств $\mathcal{D} = \left\{ H_1 \cap \dots \cap H_n \mid H_i = \Pi_i \text{ или } H_i = \tilde{\Pi} \setminus \Pi_i \right\} = \{E_1, \dots, E_l\}$, где $\tilde{\Pi}$ — наименьший полуоткрытый прямоугольник, содержащий все Π_i . Класс \mathcal{D} является разбиением $\tilde{\Pi}$ на непересекающиеся подмножества. Каждый элемент $E_j \in \mathcal{D}$ в свою очередь подразделяется на полуоткрытые непересекающиеся прямоугольники. Окончательно получим $\bigcup_{i=1}^n \Pi_i = \bigcup_{j=1}^m D_j$, где D_j — полуоткрытые прямоугольники, причем $D_i \cap D_j = \emptyset$ и для каждого D_j найдется хотя бы одно множество Π_i , такое что $D_j \subset \Pi_i$. В соответствии с количеством m элементов D_j разобьем интервал $(0, 1] = \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j]$ на пересекающиеся части. Выбирая взаимно однозначное отображение из $(0, 1]$ на $(a_j, b_j]$ и комбинируя их с функциями распределения F_j для каждого прямоугольника D_j , построенными, как и выше, найдем общую функцию F с нужными свойствами. Далее, выбирая селектор h со свойством $F(h(\alpha)) = \alpha$ и используя свойство неатомичности, получим нужный селектор из Ω в $\Pi(\omega)$. \square

З а м е ч а н и е. Лемму можно распространить на полуоткрытые прямоугольники в \mathbb{R}^n . Действительно, в прямоугольнике $\Pi = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i]$ выберем диагональ и обозначим ее длину через d . Для любой точки z на диагонали с координатами $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ строим n отрезков, соединяющих z с точками $(\bar{x}_1, \dots, b_i, \dots, \bar{x}_n)$. На эти отрезки натягиваем многогранную коническую поверхность и определяем функцию F на этой поверхности постоянной и равной $|z - a|/d$, где $a = (a_1, \dots, a_n)$. Далее рассуждения леммы повторяются.

Важность введенного класса лебеговских селекторов заключается в том, что для простых мультиотображений, заданных на неатомическом пространстве, множества в (3.8) не различаются, если учитывать только селекторы из $\tilde{S}(H_k)$. В случае совпадения множеств в (3.8) для каждого z при конечных множествах Z_k совпадают и множества (3.4)–(3.7). Однако для континуальных множеств Z_{k-1} это далеко не очевидно. Назовем мультиотображение H_k из правой части включения (2.9) *простым*, если существуют конечные разбиения $\{A_1, \dots, A_n\}$ и $\{B_1, \dots, B_m\}$ множеств Z_{k-1} и Ω (соответственно) на непересекающиеся множества, такие что $H_k(z, \omega) = \bigcup_{i \in 1:n, j \in 1:m} H_k(i, j) I_{A_i}(z) I_{B_j}(\omega)$, где $H_k(i, j) \in \mathbb{B}_{Z_k}$, $A_i \in \mathbb{B}_{Z_{k-1}}$, $B_j \in \mathcal{G}_k$. Представленная формула означает, что $H_k(z, \omega) = H_k(i, j)$ на множестве $A_i B_j$. Назовем борелевское ядро $q(\cdot|z)$ *простым*, если найдется разбиение $\{A_1, \dots, A_l\}$ множества Z_{k-1} такое, что $q(\cdot|z) \equiv q_i(\cdot)$ на множестве A_i . Аналогично определяются и простые селекторы из $S(H_k)$ и из $\tilde{S}(H_k)$. Сформулируем теорему об упомянутом совпадении множеств, где меру P на основном вероятностном пространстве будем считать полной.

Теорема 3. Пусть выполнено предположение 1 и все множества $\tilde{S}(H_k) \neq \emptyset$ для простых мультиотображений H_k . Тогда множества во включениях (3.6), а значит и в (3.7), совпадают, если учитывать только простые лебеговские селекторы и простые лебеговские ядра.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Его достаточно провести только для первого шага, поскольку для последующих шагов рассуждения аналогичны. Для упрощения опустим индексы k , положим $Z = Z_1$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$ и запишем соотношение $H(z, \omega) = \bigcup_{i \in 1:n, j \in 1:m} H(i, j) I_{A_i}(z) I_{B_j}(\omega)$, где $H(i, j) \in \mathbb{B}_Z$, $A_i \in \mathbb{B}_{Z_0}$, $B_j \in \mathcal{G}$. Напомним, что σ -алгебры \mathcal{F}_0 и \mathcal{G} независимы, множества A_i и B_j образуют разбиения множеств Z_0 и Ω соответственно. Пусть $n = m = 1$, тогда $H(z, \omega) \equiv H$. Возьмем любое ядро $q(\cdot|z) \in \tilde{\mathbf{P}}$, для которого $q(D|z) \leq P^{*z}(D) \quad \forall D \in \mathbb{B}_Z \quad \forall z \in Z_0$. Но верхняя вероятность $P^{*z}(D) = 1$, если $H \cap D \neq \emptyset$. В противном случае $P^{*z}(D) = 0$. Значит, $q(H|z) = 1$. По условию найдется $\mathbb{B}_{Z_0} \mathbb{B}_{[0,1]}$ -измеримое отображение $f : Z_0[0, 1] \rightarrow Z$, такое что $\lambda(f^-(D)_z) = q(D|z)$, $\forall D \in \mathbb{B}_Z, \forall z \in Z_0$. Как при доказательстве леммы 2, существует измеримое отображение $\alpha : \Omega \rightarrow [0, 1]$ с равномерным распределением, что означает $P(\{\omega \mid \alpha(\omega) \in A\}) = \lambda(A)$. Поскольку σ -алгебра $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, то вероятностное пространство (Ω, \mathcal{G}, P) также является неатомическим. Поэтому функцию α можно считать измеримой относительно σ -алгебры \mathcal{G} . Подставив α в f , получим селектор $f(z, \alpha(\omega))$. Для него $P(\{\omega \mid f(z, \alpha(\omega)) \in H\}) =$

$P(\{\omega \mid \alpha(\omega) \in f^-(H)_z\}) = \lambda(f^-(H)_z) = q(H|z) = 1$. Изменяя, если нужно, функцию α на множестве нулевой меры, получаем включение $f(z, \alpha(\omega)) \in H$ в каждой точке ω . Итак, утверждение доказано для постоянных мультиотображений. Рассмотрим общий случай. Нужно показать, что для любого простого ядра $q(\cdot|z) \in \tilde{\mathbb{P}}$, для которого $q(D|z) \leq P^{*z}(D) \forall D \in \mathbb{B}_H$, $\forall z \in Z_0$, найдется измеримое отображение $h : Z_0\Omega \rightarrow Z$, такое что $P(h^-(D)_z) = q(D|z) \forall D \in \mathbb{B}_H$, $\forall z \in Z_0$. Поскольку ядро является простым, можно полагать, что разбиения постоянства для ядра и мультиотображения совпадают. Иначе берем их измельчение. Более того, можно рассмотреть включения отдельно для каждого множества A_i из соответствующего разбиения. Поэтому, не ограничивая общности, полагаем, что $H(\omega) = \bigcup_{j \in 1:m} H(j)I_{B_j}(\omega)$, т. е. есть мультиотображение не зависит от z , и $q(\cdot|z) \equiv q(\cdot) \in \tilde{\mathbb{P}}(Z)$. Пусть $\tilde{H} = \bigcup_{j \in 1:m} H(j)$. Определим класс $\mathcal{D} = \{E_1 \cap \dots \cap E_m \mid E_j = H(j) \text{ или } E_j = \tilde{H} \setminus H(j)\} = \{D_1, \dots, D_l\}$. Класс \mathcal{D} является разбиением \tilde{H} на непересекающиеся подмножества D_i , $i \in 1:l$. Здесь $l < 2^m$. Далее считается, что пустые множества из \mathcal{D} удалены. Пусть $F : \mathcal{D} \rightarrow \{1, \dots, l\}$ — биекция такая что $F(\bigcup_{i \in I} D_i) = I$. Рассмотрим мультиотображение $\mathcal{H} = F(H) : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, l\})$, определенное как $\mathcal{H}(\omega) = F(H(\omega))$. Это будет сильно измеримое мультиотображение из Ω в конечное множество. Действительно, имеем для $I \subset \mathcal{P}(\{1, \dots, l\})$:

$$\mathcal{H}^*(I) = H^*\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{H(j) \supset D_i} B_j \in \mathcal{G}. \quad (4.1)$$

Мы получаем $P_{\mathcal{H}} = M_{\mathcal{H}}$ согласно теореме 2.

Возьмем любое ядро $q(\cdot) \in \tilde{\mathbb{P}}(Z)$, для которого $q(D) \leq P_H^*(D) \forall D \in \mathbb{B}_{\tilde{H}}$. Мы ограничиваемся объединением \tilde{H} , поскольку вне этого множества верхняя вероятность равна нулю. Напомним, что $P_H^*(D) = P(H^*(D))$. Теперь определим ядро $q'(\cdot)$ на $\mathcal{P}(\{1, \dots, l\})$ следующим образом: $q'(I) = q(F^{-1}(I))$. Мы получаем

$$\begin{aligned} q'(I) &= q(F^{-1}(I)) = q\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) \leq P_{\tilde{H}}^*\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) = \sum_{H(j) \cap (\bigcup_{i \in I} D_i) \neq \emptyset} P(B_j) \\ &= P(\mathcal{H}^*(I)) = P_{\mathcal{H}}^*(I), \end{aligned}$$

принимая во внимание (4.1). Поэтому $q'(\cdot) \in M_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}}$. Из последнего включения выводим существование измеримого селектора $u(\omega) \in \mathcal{H}(\omega) \forall \omega \in \Omega$, такого что $P(u^-(I)) = q'(I)$. Введем множества $G_i = u^-(i) \in \mathcal{G}$ для каждого $i \in 1:l$ и определим мультиотображения

$$Q_i(\omega) = \begin{cases} D_i, & \text{если } \omega \in G_i, \\ \emptyset, & \text{если } \omega \notin G_i. \end{cases}$$

Рассмотрим ядро $q_i(\cdot)$, задаваемое формулой $q_i(A) = q(A \cap D_i)$ для всех $A \in \mathbb{B}_{\tilde{H}}$. Тогда $q_i(A) \leq P(Q_i^*(A)) \forall A \in \mathbb{B}_{D_i}$, потому что $q_i(D_i) = P(G_i)$ для всех i и $P(Q_i^*(A)) = P(G_i) \forall A \in \mathbb{B}_{D_i}$. Здесь учитываются равенства $P(u^-(i)) = q'(i) = q(F^{-1}(i))$. Для каждого i мы получаем ситуацию с постоянным мультиотображением Q_i , заданным на неатолическом пространстве $(G_i, \mathcal{G} \cap G_i, P)$, где мера $P(G_i) \leq 1$, и некоторым ядром $q_i(\cdot)$ с $q_i(D_i) = P(G_i) = d_i$. Вводя новую меру $\tilde{P} = P/d_i$, если $d_i > 0$, сводим задачу к случаю постоянного мультиотображения на вероятностном пространстве, исследованному вначале. Если $d_i = 0$, номер i исключается из рассмотрения. Значит, для каждого номера i найдется лебеговский селектор $w_i : G_i \rightarrow D_i$ такой, что $P_{w_i}(A) = q_i(A) \forall A \in \mathbb{B}_{D_i}$. Теперь определяем отображение

$$w : \Omega \rightarrow Z, \text{ как } \omega \mapsto w_i(\omega), \text{ если } \omega \in G_i.$$

Отображение w — измеримый селектор для $H(\omega)$, такой что $P_w(D) = q(D)$, $\forall D \in \mathbb{B}_Z$.

Проверим необходимые свойства отображения w . В самом деле, $\{G_1, \dots, G_l\} = \{u^-(1), \dots, u^-(l)\}$ — это разбиение множества Ω . Кроме того, $Q_i(\omega) \neq \emptyset \forall \omega \in G_i$. Значит, отображение w

корректно определено. Если $\omega \in G_i$, то

$$\begin{aligned} w(\omega) &= w_i(\omega) \in Q_i(\omega) = D_i = F^-(i) = F^-(u(\omega)) \in F^-(\mathcal{H}(\omega)) \\ &= \{D_j \mid D_j \subset H(\omega)\}, \text{ следовательно } w(\omega) \in H(\omega). \end{aligned}$$

Для множества $A \in \mathbb{B}_Z$ имеем $w^-(A) = \bigcup_{i \in 1:l} (w_i^-(A) \cap G_i) \in \mathcal{G}$. Итак, w — измеримый лебеговский селектор для H . Пусть опять $A \in \mathbb{B}_Z$, тогда

$$\begin{aligned} P_w(A) &= \sum_{i \in 1:l} P(w^-(A) \cap G_i) = \sum_{i \in 1:l} P(w_i^-(A) \cap G_i) = \sum_{i \in 1:l} q_i(A) \\ &= \sum_{i \in 1:l} q(A \cap D_i) = q(A). \end{aligned}$$

Следовательно, утверждение теоремы доказано. \square

Заключение

- Рассмотрены три способа оценивания состояний для многошаговых стохастических включений, основанные на разных способах формирования множества переходных вероятностей.
- Показано на примерах, что эти способы могут приводить к различным множествам условных распределений для текущих ненаблюдаемых состояний процесса.
- Поставлен вопрос о достаточных условиях совпадения рассмотренных схем фильтрации для включений и доказано, что для конечных фазовых пространств эти схемы совпадают в случае неатомического вероятностного пространства.
- Введен новый класс лебеговских селекторов для произвольных мультиотображений и показано, что он не пуст, в частности, для измеримых простых прямоугольников на неатомическом вероятностном пространстве.
- Доказано, что в лебеговском классе для простых включений и селекторов, заданных на неатомическом вероятностном пространстве, схемы фильтрации также совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ananyev B.I.** One problem of statistically uncertain estimation // Proc. of Intern. Conf. SCDG2019: Short paper (Yekaterinburg, 16–20 Sept. 2019) / IMM UB of RAS. Yekaterinburg, 2019. P. 375–379. ISBN 978-5-8295-0652-0.
2. **Ананьев Б.И., Аникин С.А.** Задача восстановления входных воздействий при коммуникационных ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 73–84.
3. **Ананьев Б.И.** О коррекции движения при коммуникационных ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2010. № 3. С. 3–15.
4. **Кац И.Я., Куржанский А.Б.** Минимаксное оценивание в многошаговых системах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221, № 3. С. 535–538.
5. **Anan'ev B.I.** Minimax estimation of statistically uncertain systems under the choice of a feedback parameter // J. Math. Systems, Estimation, and Control. 1995. Vol. 5, no. 2. P. 1–17.
6. **Лебедев М.В., Семенихин К.В.** Минимаксная фильтрация в стохастической дифференциальной системе с нестационарными возмущениями неизвестной интенсивности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 45–56.
7. **Nguyen Hung T.** et al. Computing statistics under interval and fuzzy uncertainty. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. 432 p. doi: 10.1007/978-3-642-24905-1.
8. **Kisielewicz M.** Relationship between attainable sets of functional and set-valued functional stochastic inclusions. *Stochastic Anal. Appl.* 2016. Vol. 34, no. 6. P. 1094–1110.
9. **Raol J.R., Gopalratnam G., Twala B.** Nonlinear filtering. Concepts and engineering applications. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017. 556 p.

10. Miranda E., Couso I., Gil P. Approximations of upper and lower probabilities by measurable selections // *Information Sciences*. 2010. Vol. 180, no. 8. P. 1407–1417. doi: 10.1016/j.ins.2009.12.005.
11. Бертсекас Д., Шрив С. Стохастическое оптимальное управление. М.: Наука, 1985. 279 с.
12. Ширяев А.Н. Вероятность-1: в 2 кн. Кн. 1. М.: МЦНМО, 2004. 520 с.
13. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 431 с.
14. Борисович Ю.Г. и др. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005. 215 с.
15. Nguyen Hung T. On random sets and belief functions // *J. Math. Anal. Appl.* 1978. Vol. 65, no. 3. P. 531–542. doi: 10.1016/0022-247X(78)90161-0.
16. Himmelberg C. Measurable relations // *Fund. Math.* 1975. Vol. 87. P. 53–72. doi: 10.4064/fm-87-1-53-72.
17. Miranda E., Couso I., Gil P. Random intervals as a model for imprecise information // *Fuzzy Sets and Systems*. 2005. Vol. 154. P. 386–412. doi: 10.1016/j.fss.2005.03.001.

Поступила 13.11.2019

После доработки 22.01.2020

Принята к публикации 27.01.2020

Ананьев Борис Иванович

д-р физ.-мат. наук

ведущий научный сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: abi@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Ananyev B.I. One problem of statistically uncertain estimation. In: *Proc. Intern. Conf. SCDG2019* (Yekaterinburg, 16–20 Sept.), 2019, Yekaterinburg: IMM UB of RAS, pp. 375–379. ISBN: 978-5-8295-0652-0.
2. Anan'ev B.I., Anikin S.A. Problem of reconstructing input signals under communication constraints. *Autom. Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 7, pp. 1153–1164. doi: 10.1134/S0005117909070078.
3. Anan'ev B.I. Correction of motion under communication constraints. *Autom. Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 3, pp. 367–378. doi: 10.1134/S000511791003001X.
4. Kats I.Ya., Kurzhanski A.B. Minimax estimation in multistage systems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 221, no. 3, pp. 535–538 (in Russian).
5. Anan'ev B.I. Minimax estimation of statistically uncertain systems under the choice of a feedback parameter. *J. Math. Systems, Estimation, and Control*, 1995, vol. 5, no. 2, pp. 1–17.
6. Lebedev M.V., Semenikhin K.V. Minimax filtering in a stochastic differential system with non-stationary perturbations of unknown intensity. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2007, vol. 46, no. 2, pp. 206–217. doi: 10.1134/S1064230707020062.
7. Nguyen Hung T. et al. Computing statistics under interval and fuzzy uncertainty. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. 432 p. doi: 10.1007/978-3-642-24905-1.
8. Kisielewicz M. Relationship between attainable sets of functional and set-valued functional stochastic inclusions. *Stochastic Analysis and Applications*, 2016, vol. 34, no. 6, pp. 1094–1110.
9. Raol J.R., Gopalratnam G., Twala B. Nonlinear filtering. Concepts and engineering applications. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017. ISBN: 9781498745178.
10. Miranda E., Couso I., Gil P. Approximations of upper and lower probabilities by measurable selections. *Information Sciences*, 2010, vol. 180, no. 8, pp. 1407–1417. doi: 10.1016/j.ins.2009.12.005.
11. Bertsekas D.P., Shreve S.E. *Stochastic optimal control: the discrete time case*. Burlington, MA: Elsevier, 1978, 341 p. ISBN: 9780080956480. Translated to Russian under the title *Stokhasticheskoe optimal'noe upravlenie: sluchai diskretnogo vremeni*. Moscow: Nauka Publ., 1985, 279 p.
12. Shiryaev A.N. *Probability*. N Y etc.: Springer-Verlag, 1995, Ser. Graduate Texts in Mathematics, vol. 95, 624 p. ISBN: 0387945490. Original Russian text (3rd ed.) published in Shiryaev A.N. *Veroyatnost'-1*. Moscow: Nauka Publ., 2004, 520 p.

13. Neveu J. *Mathematical foundations of the calculus of probability*. San Francisco: Holden-Day, 1965, 223 p. Translated to Russian under the title *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnosti*. Moscow: Mir Publ., 1969, 309 p.
14. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii* [Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions]. Moscow: KomKniga Publ., 2005, 215 p. ISBN: 5-484-00172-2.
15. Nguyen Hung T. On random sets and belief functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 1978, vol. 65, no. 3, pp. 531–542. doi: 10.1016/0022-247X(78)90161-0.
16. Himmelberg C. Measurable relations. *Fund. Math.*, 1975, vol. 87, pp. 53–72. doi: 10.4064/fm-87-1-53-72.
17. Miranda E., Couso I., Gil P. Random intervals as a model for imprecise information. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, vol. 154, no. 3, pp. 386–412. doi: 10.1016/j.fss.2005.03.001.

Received November 13, 2019

Revised January 22, 2020

Accepted January 27, 2020

Boris Ivanovich Ananyev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: abi@imm.uran.ru.

Cite this article as: B. I. Ananyev. Estimation of states of multistage stochastic inclusions, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 12–26.

УДК 519.62

ТРАЕКТОРИЯ, МИНИМИЗИРУЮЩАЯ ОБЛУЧЕНИЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов

В пространстве $X = \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) задан “коридор” Y для движения объекта, вне коридора расположено конечное число излучателей s_i с фиксированными выпуклыми конусами излучения $K(s_i)$ и интенсивностью излучения $F(y)$, $y > 0$, удовлетворяющей условию $F(y) \geq \lambda F(\lambda y)$ при $y > 0$, $\lambda > 1$. В классе траекторий равномерного движения $\mathcal{T} = \{t(\tau): 0 \leq \tau \leq 1, t(0) = t_*, t(1) = t^*\} \subset Y$, $t_*, t^* \in \partial Y$, $t_* \neq t^*$, требуется найти траекторию, минимизирующую величину

$$J(\mathcal{T}) = \sum_i \int_0^1 F(\|s_i - t(\tau)\|) d\tau.$$

В работе предлагаются способы приближенного построения оптимальных траекторий в случае, когда кратность покрытия “коридора” Y конусами $K(s_i)$ не более двух.

Ключевые слова: навигация, оптимальная траектория, облучение, движущийся объект.

V. I. Berdyshev, V. B. Kostousov. A trajectory minimizing the exposure of a moving object.

A corridor Y for the motion of an object is given in the space $X = \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$). A finite number of emitters s_i with fixed convex radiation cones $K(s_i)$ are located outside the corridor. The intensity of radiation $F(y)$, $y > 0$, satisfies the condition $F(y) \geq \lambda F(\lambda y)$ for $y > 0$, $\lambda > 1$. It is required to find a trajectory minimizing the value

$$J(\mathcal{T}) = \sum_i \int_0^1 F(\|s_i - t(\tau)\|) d\tau$$

in the class of uniform motion trajectories $\mathcal{T} = \{t(\tau): 0 \leq \tau \leq 1, t(0) = t_*, t(1) = t^*\} \subset Y$, $t_*, t^* \in \partial Y$, $t_* \neq t^*$. We propose methods for the approximate construction of optimal trajectories in the case when the multiplicity of covering the corridor Y with the cones $K(s_i)$ is at most 2.

Keywords: navigation, optimal trajectory, irradiation, moving object.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-27-38

1. Введение

В статье изучается задача построения маршрута, двигаясь с постоянной скоростью по которому объект получит наименьшую суммарную дозу облучения от нескольких источников. Задача рассматривается на плоскости и в пространстве \mathbb{R}^3 . Маршрут должен соединять фиксированные начальную и конечную точки и не выходить за границу заданного коридора Y . Граница ∂Y коридора представляет собой замкнутую непрерывную линию в \mathbb{R}^2 или замкнутую непрерывную поверхность в \mathbb{R}^3 ; более точно, анализируется случай, когда граница ∂Y гомеоморфна сфере. Источники расположены вне коридора и являются направленными, т. е. каждый из них излучает в некоторый свой выпуклый конус (*конус излучения*) с вершиной в точке расположения источника. В работе рассматриваются источники, конусы излучения которых полностью перекрывают коридор Y . Считается, что источники являются “однотипными” в том смысле, что они имеют одинаковую зависимость убывания интенсивности излучения от расстояния до источника. В статье исследование ограничено случаем, когда кратность перекрытия коридора Y конусами излучения источников не превышает двух.

Результаты данной работы могут быть полезны, например, для задач планирования оптимальных путей автономных мобильных роботов в среде с препятствиями [1].

В заданном коридоре $Y \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) движется объект t с постоянной скоростью из начальной точки t_* в конечную точку t^* ($t_*, t^* \in \partial Y$, $t_* \neq t^*$), \mathbb{T} — совокупность траекторий

$$\mathcal{T} = \{t(\tau): 0 \leq \tau \leq 1, t(0) = t_*, t(1) = t^*\} \subset Y.$$

Граница ∂Y коридора Y гомеоморфна сфере. Вне коридора расположены неподвижные источники излучения s_i ($i = 1, \dots, n$). Излучение осуществляется вдоль лучей l из заданного фиксированного выпуклого открытого конуса $K_i = K(s_i) = \{l\}$ с вершиной s_i , при этом $t_* \notin K_i$, $t^* \notin K_i$. Каждый конус $K(s_i)$ удовлетворяет условию

$$K(s_i) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}.$$

Через $K_Y(s_i)$ обозначим ближайшее к s_i связное подмножество из $K(s_i) \cap Y$, удовлетворяющее указанному условию.

Возможны два варианта: граница ∂Y коридора пропускает либо не пропускает излучение. Для определенности будем считать вначале, что граница коридора препятствует распространению излучения. В этом случае через $K_Y(s)$ будем обозначать множество облучаемых (видимых) из источника s точек множества $K_Y(s)$. Интенсивность излучения каждого источника $s = s_i$ одинакова вдоль всех лучей из $K(s_i)$ и характеризуется положительной убывающей функцией $\tilde{F}_i(y)$ вещественной переменной $y > 0$. Положим

$$F_i(x) = \begin{cases} \tilde{F}_i(\|s_i - x\|) & \text{при } x \in l \in K(s_i), \\ 0 & \text{при } x \notin K(s_i). \end{cases}$$

Пусть

$$J(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 F_i(t(\tau)) d\tau$$

— суммарное облучение, полученное объектом при движении по траектории \mathcal{T} , n — количество излучателей.

В данной работе рассматривается задача построения траектории $\hat{\mathcal{T}}$, доставляющей точную нижнюю грань

$$J = \inf\{J(\mathcal{T}): \mathcal{T} \in \mathbb{T}\}, \quad (1)$$

при этом предполагается, что кратность покрытия коридора Y конусами $K(s_i)$ не более двух. Это задача вариационного исчисления с негладкими (если граница ∂Y не является гладкой) ограничениями, усложненная наличием нескольких источников излучения. Очевидно, что возможна постановка задачи (1) как задачи оптимального управления движением объекта при фазовых ограничениях [2]. Здесь предлагаются геометрические способы поиска оптимальной или близкой к оптимальной траектории — в зависимости от взаимного расположения конусов $K(s_i)$. Задача о движении объекта в радиоактивной среде в иной постановке рассматривалась в [3; 4].

Естественно предположить, что функция \tilde{F} не только убывает, но и обладает следующим свойством:

$$\int_{C_\rho} F(x) dx > \int_{C_{\lambda\rho}} F(x) dx \quad \forall \lambda > 1, \quad (2)$$

при любом $\rho > 0$, где $C_\rho = \{x \in K(s): \|s - x\| = \rho\}$. Это свойство, в частности, имеет функция, для которой выполняется условие

$$\tilde{F}(\rho) > \lambda \tilde{F}(\lambda\rho) \quad \text{при } \rho > 0, \lambda > 1. \quad (3)$$

В самом деле,

$$\int_{C_\rho} F(x) dx = \tilde{F}(\rho)|C_\rho| > \lambda \tilde{F}(\lambda\rho)|C_\rho| = \tilde{F}(\lambda\rho)|C_{\lambda\rho}| = \int_{C_{\lambda\rho}} F(x) dx,$$

где $|C_\rho|$ — площадь (длина дуги) C_ρ .

В случае \mathbb{R}^2 отметим следующие соотношения для функции \tilde{F} , удовлетворяющей условию (3):

— пусть $[a, b]$, $[\lambda a, \lambda b]$ ($\lambda > 1$) — отрезки, лежащие на луче $l \in K(s)$ с вершиной $s = 0$, тогда

$$\int_a^b F(x) dx > \int_a^b \lambda F(\lambda x) dx = \int_a^b F(\lambda x) d\lambda x = \int_{\lambda a}^{\lambda b} F(x) dx;$$

— пусть Φ — растров конуса $K = K(s)$, $\Phi < \pi$, $s = 0$ — начало координат полярной системы, $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ и часть этой траектории, $\mathcal{T}_K = \mathcal{T} \cap K_Y$, задана функцией $\rho = \rho(\varphi)$, и пусть $\lambda \mathcal{T}_K \subset K_Y$ для $\lambda > 1$, тогда

$$\int_0^\Phi \tilde{F}(\rho(\varphi)) d\varphi > \int_0^\Phi \lambda \tilde{F}(\lambda\rho(\varphi)) d\varphi > \int_0^\Phi \tilde{F}(\lambda\rho(\varphi)) d\varphi. \quad (4)$$

Таким образом, интеграл $\int_0^\Phi \tilde{F}(\lambda\rho(\varphi)) d\varphi$ как функция от λ также монотонно убывает с ростом λ .

Примером функции, удовлетворяющей условию (3), является функция

$$\tilde{F}(\rho) = \rho^{-\alpha} \quad \text{при } \alpha \geq 1.$$

2. Случай единственного источника излучения s в \mathbb{R}^2

Рассмотрим случай единственного источника излучения s на плоскости, тогда

$$J(\mathcal{T}) = \int_0^1 F(t(\tau)) d\tau.$$

Поскольку $t_*, t^* \in \partial Y$, граница ∂Y разбивается точками t_*, t^* на две части. Пусть Γ — противоположная по отношению к s часть границы коридора Y . По кривой Γ определим в полярной системе координат с началом s функцию $\rho = \rho_\Gamma(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \Phi$, так, что величина $\rho_\Gamma(\varphi)$ является расстоянием от s до Γ по лучу $l_\varphi \subset K(s)$, исходящему из s под углом φ . Функция $\rho_\Gamma(\varphi)$ может иметь точки разрыва. Дополним график функции $\rho_\Gamma(\varphi)$ в каждой точке разрыва φ отрезком $[\rho'_\varphi, \rho''_\varphi]$, $\rho'_\varphi < \rho''_\varphi$ луча l_φ так, чтобы получилась непрерывная кривая, и обозначим ее через $\text{gr } \rho(\cdot)$ (см. рис. 1). Заметим, что при движении объекта по полуинтервалу $(\rho'_\varphi, \rho''_\varphi) \subset l_\varphi$ объект не облучается, так как точка (ρ'_φ, φ) принадлежит границе Γ . На первый взгляд, можно ожидать, что $\text{gr } \rho(\cdot)$ и есть оптимальная траектория. Следующие примеры показывают, что кривая $\text{gr } \rho(\cdot)$ не всегда оптимальна.

П р и м е р 1. Пусть Γ — график функции $\rho = \rho(\varphi) = 1 + \varepsilon \sin k\varphi$ ($\varepsilon < 1/2$) (см. рис. 2), тогда при достаточно большом k функция ρ имеет большую вариацию $\bigvee_0^\Phi \rho$ и, значит, большую величину $J(\text{gr } \rho(\cdot))$. Предпочтительней в данном случае траектория, совпадающая на $K(s)$ с дугой окружности с центром s радиуса $1 - \varepsilon$.

П р и м е р 2. Для $\rho_1 < \rho_2$, и углов φ_1, φ_2 , $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq \Phi < \pi$, определим кривую Γ , состоящую из двух дуг — (ρ_1, φ) , $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$; (ρ_2, φ) , $\varphi_2 \leq \varphi \leq \Phi$, — и двух отрезков,

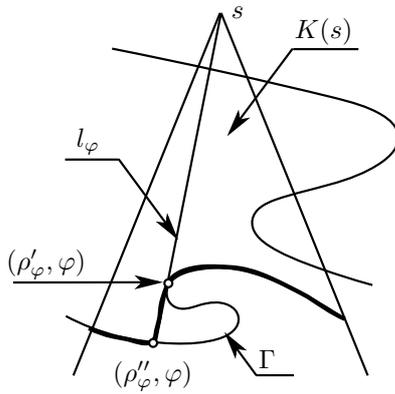


Рис. 1

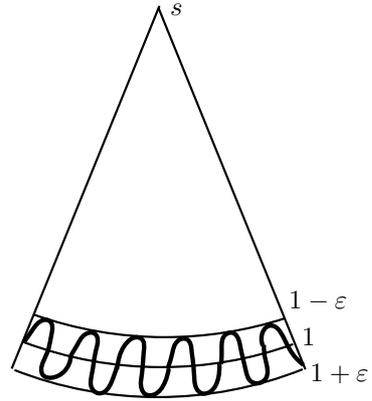


Рис. 2

соединяющих точку $(\rho_2, (\varphi_1 + \varphi_2)/2)$ с точками (ρ_1, φ_1) , (ρ_1, φ_2) . При большой величине $\rho_2 - \rho_1$ дуга окружности C_{ρ_1} более предпочтительна в качестве траектории в сравнении с Γ .

Данные примеры и свойство монотонности функции \tilde{F} показывают, что оптимальная траектория должна располагаться по возможности дальше от s и иметь на малых по площади участках малую длину.

Исходная задача является задачей вариационного исчисления поиска непрерывной функции $\rho(\varphi)$:

$$\inf_{\rho(\varphi)} \left\{ \int_0^\Phi \tilde{F}(\rho(\varphi)) d\varphi : \rho(\varphi) \leq \rho_\Gamma(\varphi) \right\}. \tag{5}$$

Трудность этой задачи определяется свойствами функции $\rho_\Gamma(\varphi)$.

Предположим, что функция $\rho_\Gamma(\varphi)$ кусочно монотонна. Пусть $x = (\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ — точка локального максимума функции (см. рис. 3) $\rho_\Gamma(\varphi)$; она, возможно, принадлежит отрезку, состоящему из точек максимума, т. е. существуют $\varphi' \leq \varphi''$ такие, что

$$\rho_\Gamma(\bar{\varphi}) \geq \rho_\Gamma(\varphi) \text{ при } \varphi' \leq \varphi \leq \varphi'' \text{ и } \rho_\Gamma(\bar{\varphi}) > \min\{\rho(\varphi'), \rho(\varphi'')\}.$$

Для $\rho < \bar{\rho}$, близких к $\bar{\rho}$, обозначим через $a = a(\rho) = a(\rho, \varphi_\rho)$, $b = b(\rho) = b(\rho, \varphi^\rho)$, $\varphi_\rho < \varphi^\rho$, ближайшие к $l_{\bar{\varphi}}$ точки из $C_\rho \cap \text{gr } \rho(\cdot)$ и через $\rho^* = \rho_x^*$ — наибольшее из чисел ρ , для которых одна

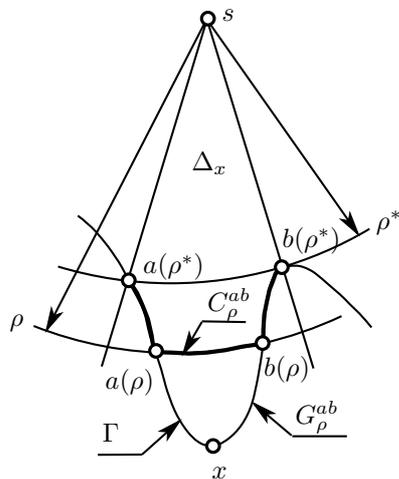


Рис. 3

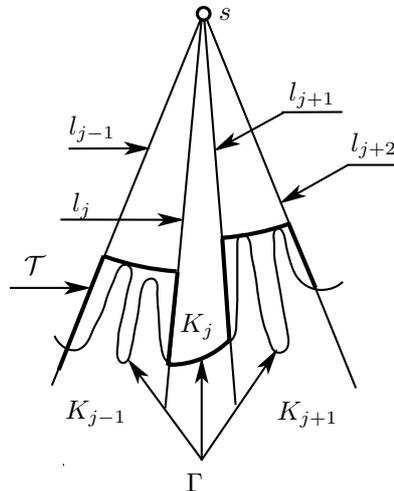


Рис. 4

из точек a, b есть точка одностороннего локального минимума функции $\rho_\Gamma(\varphi)$ на конусе K . Обозначим

$$\Delta = \Delta_x = [\varphi_{\rho^*}, \varphi^{\rho^*}].$$

Если точка максимума x не является точкой строгого локального максимума, то указанный отрезок Δ порождается и другими точками y , для которых $\Delta = \Delta_y$. Пусть C_ρ^{ab} — дуга окружности C_ρ между точками a, b , пересекающая отрезок $[s, x]$, и G_ρ^{ab} — часть графика $\text{gr } \rho(\cdot)$ между точками a, b , содержащая x .

Требуется решить следующую задачу поиска непрерывной функции $\gamma = \gamma(\varphi)$ на Δ , доставляющую минимум

$$J_{\Delta_x} = \min_{\gamma} \left\{ \int_{\Delta} \tilde{F}(\gamma(\varphi)) d\varphi : \gamma(\varphi) \leq \rho_\Gamma(\varphi) \text{ для } \varphi \in \Delta, \gamma(\varphi_{\rho^*}) = \gamma(\varphi^{\rho^*}) = \rho^* \right\}. \quad (6)$$

Ясно, что график функции $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\varphi)$, являющейся решением задачи (6) расположен между кривыми $C_{\rho^*}^{ab}$, $G_{\rho^*}^{ab}$. Заметим, что на тех отрезках $[\varphi_1, \varphi_2] \subset \Delta$, $\varphi_1 < \varphi_2$, где $\hat{\gamma}(\varphi) < \rho_\Gamma(\varphi)$, функция $\hat{\gamma}$ является выпуклой вниз. В самом деле, если это не так, то найдутся φ', φ'' , $\varphi_1 \leq \varphi' < \varphi'' < \varphi_2$ такие, что график функции $\hat{\gamma}(\varphi)$, $\varphi' < \varphi < \varphi''$, расположен между s и прямолинейным отрезком, соединяющим точку $(\hat{\gamma}(\varphi'), \varphi')$, $(\hat{\gamma}(\varphi''), \varphi'')$. Зеркально отобразив этот график относительно указанного прямолинейного отрезка, легко, воспользовавшись свойством (2), построить траекторию с меньшей величиной облучения в сравнении с $(\hat{\gamma}(\varphi), \varphi)$.

Для каждой точки локального максимума x (точнее, для каждого отрезка, состоящего из точек локального минимума) решим задачу (6) на Δ_x . Справедлива

Теорема. Пусть функция $\rho_\Gamma(\varphi)$ кусочно монотонна. Экстремальная траектория задачи (5) задается функцией $\hat{\rho}(\varphi) = \hat{\rho}(\varphi, s)$ ($0 \leq \varphi \leq \Phi$), которая совпадает с функцией $\hat{\gamma}(\varphi)$ ($\varphi \in \Delta$) на каждом отрезке $\Delta = \Delta_x$, а на множестве $\Phi \setminus \bigcup_x \Delta_x$ совпадает с $\rho_\Gamma(\varphi)$.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что ввиду монотонности функций F , на множестве $\Phi \setminus \bigcup_x \Delta_x$ экстремальная траектория совпадает с $\rho_\Gamma(\varphi)$, а вне этого множества она построена оптимально и совпадает с $\hat{\gamma}(\varphi)$. \square

Таким образом, исходная задача (5) сводится к серии экстремальных задач вида (6).

Для числа ρ , $\rho^* \leq \rho \leq \bar{\rho}$ определим функцию

$$\delta_\rho(\varphi) = \min\{\rho_\Gamma(\varphi), \rho\} \text{ для } \varphi \in \Delta_x.$$

Представляет интерес более простая в сравнении с (6) задача поиска минимума на более узком классе функций:

$$\bar{J}_\Delta = \min_{\rho^* \leq \rho \leq \bar{\rho}} \int_{\Delta} \tilde{F}(\delta_\rho(\varphi)) d\varphi; \quad (7)$$

решение данной задачи аппроксимирует функцию $\hat{\gamma}(\cdot)$.

Отметим еще один способ построения траектории \mathcal{T} , близкой к оптимальной. Разобьем конус $K(s)$ на частичные конусы K_i , ограниченные лучами l_j , l_{j+1} , где $l_j = l_{\varphi_j}$ ($0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_m = \Phi$), $\Delta_j = \Delta_j \varphi = [\varphi_j, \varphi_{j+1}]$. В простейшем случае разбиение является равномерным либо оно определяется свойствами границы Γ . Построим траекторию \mathcal{T} , основываясь на функции $t(\varphi)$, постоянной на некоторых частичных интервалах Δ_j с большой вариацией функции $\rho_\Gamma(\varphi)$. Не нарушая ограничения $\rho(\varphi) \leq \rho_\Gamma(\varphi)$, ввиду отмеченного выше (см. (4)) свойства монотонности по λ величины $\int \tilde{F}(\lambda \rho(\varphi)) d\varphi$ естественно на этих интервалах взять кусочно постоянной функцию

$$t(\varphi) = \rho_j = \min\{\rho_\Gamma(\alpha) : \alpha \in \Delta_j \varphi\} \text{ при } \varphi \in \Delta_j \varphi.$$

Траектория $\mathcal{T} \subset Y$ движения объекта на выбранных интервалах строится пополнением графика функции $t(\varphi)$ в каждой точке разрыва φ_j отрезком $[a_j, b_j]$ луча l_j , где $a_j = (\rho_j, \varphi_j)$, $b_j = (\rho_{j-1}, \varphi_j)$. На оставшихся частичных интервалах \mathcal{T} совпадает с $\rho_\Gamma(\varphi)$ (рис. 4).

3. Случай двух источников в \mathbb{R}^2

Точки t_* , t^* разбивают границу ∂Y на две части Γ_1 , Γ_2 . Далее считаем $s_i \in \Gamma_i$ ($i = 1, 2$), т. е. источники расположены на противоположных частях границы ∂Y и

$$F_1 = F_2 \stackrel{\text{def}}{=} F, \quad [s_1, s_2] \cap ((\overset{\circ}{K}_Y(s_1) \cup \overset{\circ}{K}_Y(s_2))) = \emptyset$$

(см. рис. 5). Обозначим $K_Y(s_1) \cap K_Y(s_2) = \mathcal{D}$, а через l_i, l'_i — “левый” и “правый” лучи, ограничивающие конус $K(s_i)$, $i = 1, 2$. Рассмотрим возможные варианты расположения источников s_1, s_2 и способы построения оптимальных траекторий. Пусть L — прямая, ортогональная отрезку $[s_1, s_2]$, содержащая точку $(s_1 + s_2)/2$.

Если $\mathcal{D} \cap L = \emptyset$ и множества \mathcal{D} , $K_Y(s_1) \cap \Gamma_1$, к примеру, лежат по одну сторону от L , то, как можно видеть, оптимальной является траектория $\mathcal{T}_{2,1}$, пересекающая конус $K_Y(s_2)$ по отрезку $A_2 = l_1 \cap K_Y(s_2)$, а конус $K_Y(s_1)$ — по графику функции $\rho_{\Gamma_2}: G_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\text{gr } \rho_2(\cdot)) \cap K_Y(s_1)$ (на рис. 6) эти участки траектории отмечены жирной пунктирной линией).

Теперь предположим, что $\overset{\circ}{\mathcal{D}} \cap L \neq \emptyset$.

Среди траекторий, не пересекающих множество $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, имеется две траектории, претендующие на оптимальность; это $\mathcal{T}_{1,2}$, $\mathcal{T}_{2,1}$, пересекающие конусы $K_Y(s_i)$ поочередно. Вторая определена выше, а траектория $\mathcal{T}_{1,2}$ пересекается с $K_Y(s_1)$ — по отрезку $A_1 = l_2 \cap K_Y(s_1)$ и с конусом $K_Y(s_2)$ — по графику функции $\rho_{\Gamma_1}: G_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\text{gr } \rho_1(\cdot)) \cap K_Y(s_2)$ (рис. 7). Этим траекториям соответствуют величины облучения

$$J_{1,2} = \int_{A_1} F(s_1 - x) dx + \int_{G_2} F(s_2 - x) dx, \quad J_{2,1} = \int_{A_2} F(s_2 - x) dx + \int_{G_1} F(s_1 - x) dx.$$

Рассмотрим траектории, пересекающие множество $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Все они содержат отрезок $[a, a'] = L \cap \mathcal{D}$, обозначенный с учетом направления движения от t_* к t^* . В самом деле, дифференцируя по α функцию $F(s_1 - x - \alpha(s_1 - s_2)) + F(s_2 - x - \alpha(s_1 - s_2))$, убеждаемся, что минимум по α этой функции достигается при $\alpha = 0$ для всех $x \in [a, a']$. Поиск оптимальной траектории вне множества \mathcal{D} может осуществляться посредством решения следующей задачи.

Пусть l — луч из $K(s)$, η — отрезок из l , c — точка из $K_Y(s) \setminus l$, $\mathbb{T}(x, c)$ — совокупность траекторий вида $\mathcal{T}_x = \{t(\tau): 0 \leq \tau \leq 1, t(0) = x, t(1) = c\} \subset K_Y(s)$, $x \in \eta$. Требуется найти величину

$$J(\eta, c) = \inf_{x \in \eta} \inf \left\{ \int_0^1 F_s(t(\tau)) d\tau : \mathcal{T} \in \mathbb{T}(x, c) \right\}. \quad (8)$$

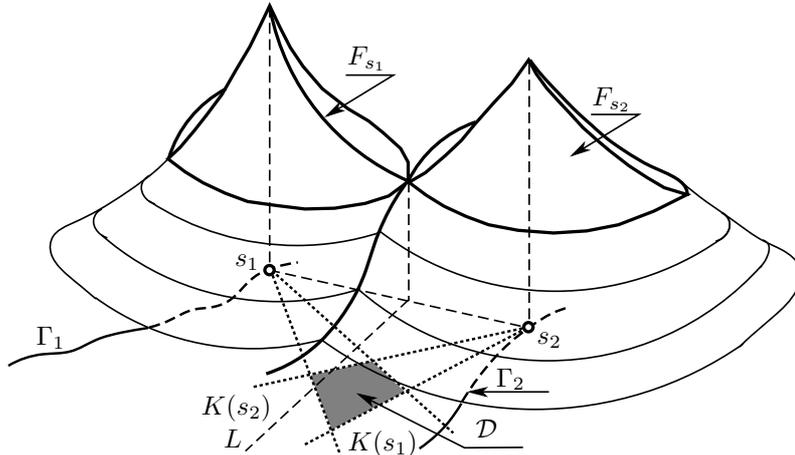


Рис. 5

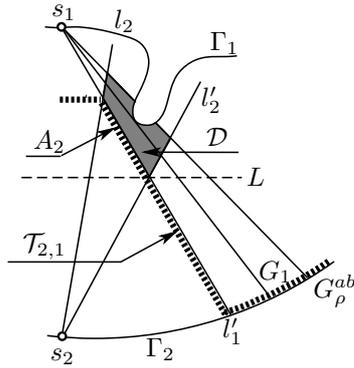


Рис. 6

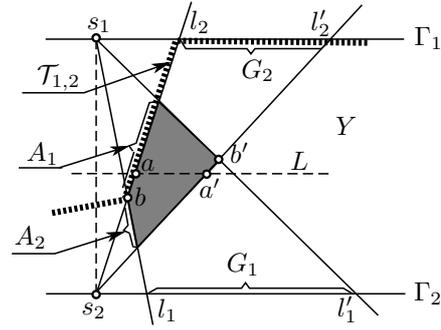


Рис. 7

Обозначим $[q, q'] = L \cap (K_Y(s_1) \cup K_Y(s_2))$, $b = l_1 \cap l_2$, $q'_{1,2} = l'_1 \cap \Gamma_2$, $q'_{2,1} = l'_2 \cap \Gamma_1$. Легко убедиться, что для оптимального подхода из точки t_* в точку a объект должен пересечь отрезок $[q, b]$, используя решение задачи $J([q, b], a)$, а для выхода из точки a' в сторону точки t_* он должен пересечь отрезок $[q', q'_{1,2}]$, если $q' \in l'_1$ (рис. 8а), и пересечь отрезок $[q', q'_{2,1}]$, если $q' \in l'_2$ (рис. 8б).

Далее понадобится

Лемма. Пусть $s = 0$, точки v, w принадлежат конусу $K_Y(s)$, $w \notin l = \{\alpha v, \alpha > 0\}$,

$$J(\alpha) = \int_0^1 F_s(\lambda \alpha v + (1 - \lambda)w) d\lambda, \quad \alpha > 0.$$

Тогда функция $J(\alpha)$ является убывающей.

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\alpha} [J(\alpha + \Delta\alpha) - J(\alpha)] &= \frac{1}{\Delta\alpha} \int_0^1 [F(\lambda(\alpha + \Delta\alpha)v + (1 - \lambda)w) - F(\lambda\alpha v + (1 - \lambda)w)] d\lambda \\ &\xrightarrow{\Delta\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 F'_\alpha(\lambda\alpha v + (1 - \lambda)w) \lambda d\lambda < 0. \end{aligned}$$

□

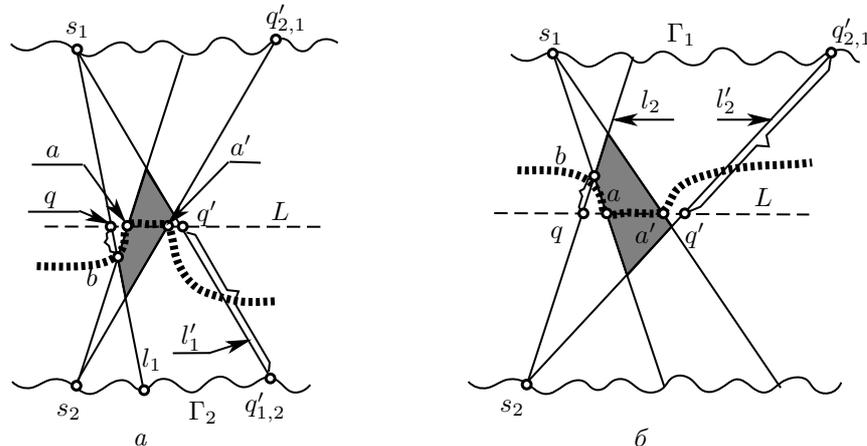


Рис. 8

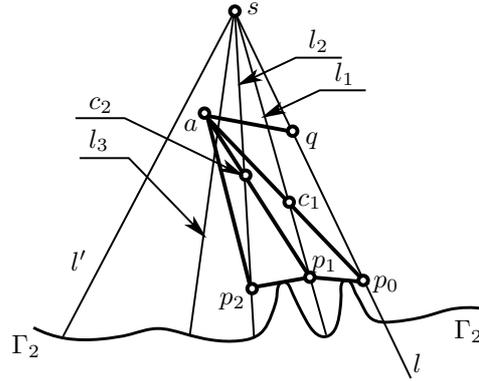


Рис. 9

Используя лемму, приходим к выводу, что одна искомая часть траектории до точки a совпадает с отрезком $[a, b]$ (см. рис. 8а и 8б). Для построения другой части траектории от точки a' до t^* используем следующий алгоритм поиска приближенного решения задачи $J([q, p_0], a)$ (8), где $a \in \overset{\circ}{K}(s)$, l' и l — граничные лучи с вершиной s конуса $K(s)$, $p_0 \in l$, $q \in (s, p)$. Будем использовать обозначение $\int_a^b = \int_a^b F(x) dx$, где $[a, b]$ — прямолинейный отрезок.

Зафиксируем конечный набор лучей $l_i \in K(s)$ с вершиной s , пересекающих интервал (a, q) в порядке от точки q к точке a . Пусть $p_1 \in l_1$ — наиболее удаленная от s точка такая, что отрезок $[p_1, p_0]$ не пересекается внутренностью множества $X \setminus Y$. Обозначим $c_i = l_i \cap [a, p_{i-1}]$. Применяя лемму (см. рис. 9),

$$\text{при } w = a, \text{ получим неравенство } \int_a^q > \int_a^{p_0}; \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } w = p_0 - \text{ неравенство } \int_a^{p_0} > \int_a^{p_1}; \\ \text{при } w = a - \text{ неравенство } \int_a^{c_1} > \int_a^{p_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^{p_0} > \int_a^{p_1} + \int_a^{p_0}.$$
 (10)

Пусть $p_2 \in l_2$ — наиболее удаленная от s точка, такая что отрезок $[p_1, p_2]$ не пересекается с внутренностью множества $X \setminus Y$. Применяя лемму,

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } w = p_1 \text{ получаем } \int_a^{p_1} > \int_a^{p_2}; \\ \text{при } w = a \text{ получаем } \int_a^{c_2} > \int_a^{p_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^{p_1} > \int_a^{p_2} + \int_a^{p_1}.$$
 (11)

Из (9)–(11) следует, что

$$\int_a^q > \int_a^{p_0} > \int_a^{p_1} + \int_a^{p_0} > \int_a^{p_2} + \int_a^{p_1} + \int_a^{p_0}.$$

Таким образом, построены четыре траектории: $[a, q]$, $[a, p_0]$, $[a, p_1] \cup [p_1, p_0]$, $[a, p_2] \cup [p_2, p_1] \cup [p_1, p_0]$ — с убывающей величиной совокупного облучения, которые соединяют точку a с отрезком $[q, p_0]$. Процесс построения траекторий можно продолжить, используя все лучи из

заданного набора $\{l_i\}$. Увеличивая набор $\{l_i\}$, мы построим траекторию, для которой участок $[p_0, p_1] \cup [p_1, p_2] \dots [p_k, p_{k+1}]$ лучше аппроксимирует участок границы Γ_2 . Более того, можно задать бесконечный набор лучей в l_i , приближающихся к точке, и построить “сходящуюся” последовательность траекторий.

Таким образом, при наличии пары источников s_1, s_2 , имеющих непустое пересечение $\overset{\circ}{K}_Y(s_1) \cap \overset{\circ}{K}_Y(s_2)$, для поиска оптимальной траектории следует определить, к какому из рассмотренных случаев относится взаимоположение конусов $K_Y(s_i)$.

Если источники лежат на одной части границы ∂Y , например на Γ_1 и $\overset{\circ}{K}_Y(s_1) \cap \overset{\circ}{K}_Y(s_2) \neq \emptyset$, то в силу остаются рассуждения, проведенные в случае единственного облучателя.

4. Приближенное построение оптимальных траекторий в \mathbb{R}^3

Рассмотрим случай единственного излучателя s . Предполагаем, что граница ∂Y не препятствует излучению, т. е. не образует теней, $s \notin Y$, любая траектория $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ пересекает внутренность усеченного конуса $K_Y(s) = K(s) \cap Y$ и при этом K_Y — ближайшая к s связная часть коридора Y , обладающая указанным свойством. Будем исходить из того, что раствор конуса $K(s)$ меньше π . Построим при выбранном m два однопараметрических семейства плоскостей

$$\{P^i\}, \{Q^j\}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Пусть \mathcal{L} и \mathcal{R} — левая и, соответственно, правая стороны поверхности $Y \cap \partial K(s)$ (в том смысле, что любая траектория из \mathbb{T} входит в усеченный конус $K_Y(s)$ через \mathcal{L} и выходит из него через \mathcal{R}), p_l и p_r — точки из пересечения коридора Y и поверхностей \mathcal{L}, \mathcal{R} соответственно, P_l, P_r — касательные плоскости к \mathcal{L} и \mathcal{R} в точках p_l и p_r . Ясно, что $s \in P_l \cap P_r$. Пусть Q_I, Q_{II} — плоскости, содержащие точку s , опорные $K_Y(s)$ с разных сторон коридора Y . Определим

$$P^i = \frac{1}{i}P_l + \left(1 - \frac{1}{i}\right)P_r, \quad Q^j = \frac{1}{j}Q_I + \left(1 - \frac{1}{j}\right)Q_{II}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (12)$$

при заданном m . Плоскости P^i, Q^j разбивают конус $K(s)$ на частичные конусы K_{ij} , ограниченные плоскостями $P^i, P^{i+1}, Q^j, Q^{j+1}$. Пусть для луча $l \subset K_{ij}$ точка $z(l) \in l \cap K_Y(s)$ наиболее удалена от s . Среди таких лучей найдем луч $l = l_{ij}$, для которого величина $\|s - z(l_{ij})\|$ наибольшая. Обозначим $z_{ij} = z(l_{ij})$. Построим граф, вершинами которого являются точки z_{ij} , ребрами — отрезки, соединяющие точки $z_{ij}, z_{i'j'}$ из соседних частичных конусов, т. е. конусов, имеющих общее ребро или общую грань, содержащие точку s . Для определения веса ребра $[z_{ij}, z_{i'j'}]$ найдем расстояние ρ_z от s до границы ∂Y вдоль луча $\{s + \alpha(z - s), \alpha > 0\}$, где $z = \lambda z_{ij} + (1 - \lambda)z_{i'j'}$. Вес ребра определим в виде

$$\int_0^1 \tilde{F}(\rho_z(\lambda z_{ij} + (1 - \lambda)z_{i'j'})) d\lambda.$$

Пусть Z_l — множество вершин z_{ij} графа, которые соответствуют частичным конусам K_{ij} , пересекающимся с левой стороной \mathcal{L} множества $Y \cap \partial K(s)$, аналогично определяется множество вершин Z_r . Задача построения траектории, аппроксимирующей оптимальную, сводится к поиску пути на графе, соединяющего множества Z_l и Z_r и имеющего наименьшую сумму весов его ребер.

Рассмотрим случай двух излучателей s_1, s_2 в \mathbb{R}^3 . Далее предполагаем, что $F_{s_1} = F_{s_2}$, множество $\mathcal{D} = \overset{\circ}{K}_Y(s_1) \cap \overset{\circ}{K}_Y(s_2)$ не пусто; кроме того, можно считать, что $[s_1, s_2] \cap \overset{\circ}{\mathcal{D}} = \emptyset$, поскольку излучатели s_1, s_2 не должны облучать друг друга. Здесь, как и ранее, используются обозначения $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}K_Y(s_i), \mathcal{R}_i = \mathcal{R}K_Y(s_i)$ — левая и правая стороны усеченного конуса $K_Y(s_i)$, а часть коридора Y , расположенная, например, справа от \mathcal{R}_2 и слева от \mathcal{L}_1 , называемая боксом,

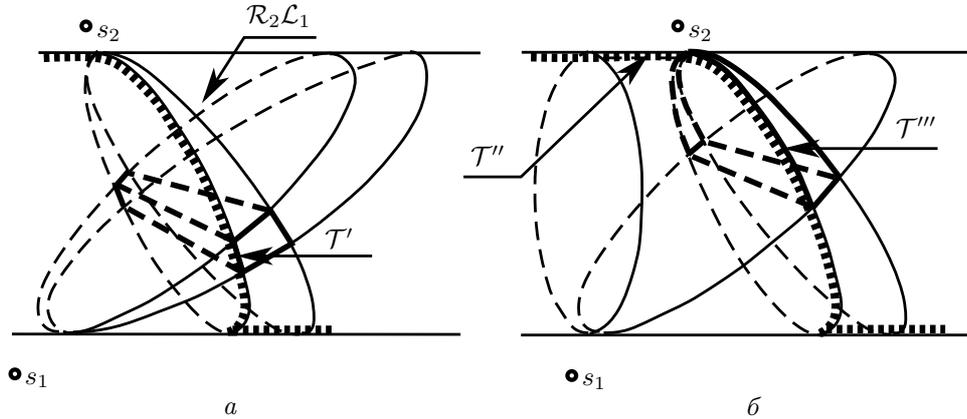


Рис. 10

обозначается через $\mathcal{R}_2\mathcal{L}_1$. Возможные положения конусов $K(s_1)$, $K(s_2)$ изображены на рис. 10. Ребра границы множества \mathcal{D} отмечены жирными непрерывной и пунктирной линиями. Имеем $s_1 \notin K(s_2)$, $s_2 \notin K(s_1)$ и \mathcal{D} является пересечением с Y четырехгранника с выпуклыми коническими гранями в случае *a*; в случае *b* $s_2 \in K(s_1)$ и $\mathcal{D} = Y \cap K(s_1) \cap K(s_2)$.

Для определенности будем считать, что отрезок $[s_1, s_2]$ расположен “слева” от множества \mathcal{D} . Обозначим через L плоскость, ортогональную этому отрезку и содержащую точку $(s_1 + s_2)/2$.

Сперва предположим, что $L \cap \mathcal{D} = \emptyset$. В этом случае оптимальная траектория \mathcal{T} не пересекается с \mathcal{D} , поскольку если $t \in \mathcal{T} \cap \mathcal{D}$ и $\rho(s_1, t) \neq \rho(s_2, t)$, то точку t можно сместить в точку $t' \in \mathcal{D}$ такую, что

$$\rho(s_1, t) + \rho(s_2, t) < \rho(s_1, t') + \rho(s_2, t').$$

В самом деле, когда $\rho(s_1, t) > \rho(s_2, t)$, можно взять $t' = s_2 + \varepsilon(t - s_2)$ при малом $\varepsilon > 0$. Отсюда \mathcal{T} пересекает последовательно конусы $K(s_i)$, например сперва $K(s_1)$ и затем $K(s_2)$ (случай другой очередности рассматривается аналогично). Итак, задача состоит в поиске траектории \mathcal{T} , оптимально пересекающей $K(s_1)$ при переходе из бокса $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ в бокс $\mathcal{R}_1\mathcal{L}_2$; далее надо найти траекторию, оптимально пересекающую $K(s_2)$ при переходе из бокса $\mathcal{R}_1\mathcal{L}_2$ в бокс $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$. Оптимальность означает минимизацию совокупного облучения объекта на каждом участке $\delta\mathcal{T}_i = \mathcal{T} \cap K(s_i)$, $i = 1, 2$. Поведение оптимальной траектории на коротком участке можно отслеживать по точкам пересечения с плоскостями специально подобранного однопараметрического семейства, подобного семейству $P_\lambda = \lambda P_l + (1 - \lambda)P_r$ (см. (12)). Это семейство должно рассекать часть пространства и траекторию, которая заведомо содержит участок $\delta\mathcal{T}_i$ траектории. Учитывая выпуклость конусов $K(s_i)$ ($i = 1, 2$) и подбирая подходящее однопараметрическое семейство плоскостей, убеждаемся, что

– в случае *a* наиболее далекая от s_1 траектория пересечения конуса $K(s_1)$, обозначим ее как \mathcal{T}' , принадлежит множеству $Y \cap K(s_1) \cap \mathcal{L}_2$,

– в случае *b* наиболее удаленная от s_1 траектория составлена из двух частей \mathcal{T}'' , \mathcal{T}''' , первая из которых \mathcal{T}'' принадлежит ∂Y и соединяет \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 , а вторая \mathcal{T}''' принадлежит множеству $Y \cap K(s_1) \cap \mathcal{L}_2$.

В обоих случаях осталось построить траекторию \mathcal{T}_2 , оптимально пересекающую конус $K(s_2)$. Как отмечалось выше, наиболее удаленная от s_i кривая не всегда является оптимальной; необходимо учитывать ее длину. Для поиска траектории, близкой к оптимальной, можно использовать способы, предложенные в предыдущих разделах: при построении \mathcal{T}' и \mathcal{T}''' – методы, изложенные в разделе, в котором исследуется задача в \mathbb{R}^2 , а для поиска \mathcal{T}'' – алгоритм поиска траектории в \mathbb{R}^3 в случае единственного излучателя. На рис. 10 одна из оптимальных траекторий изображена точечной линией.

Пусть $L_{\mathcal{D}} \stackrel{\text{def}}{=} L \cap \mathcal{D}$. Точки $x \in \mathcal{D}$ получают облучение величины $2F(\|s_1 - x\|)$ из виртуального источника $(s_1 + s_2)/2$. Множество \mathcal{D} есть пересечение Y с выпуклым множеством, граница которого состоит в случае a из фрагментов четырех (трех в случае b) конических поверхностей

$$\mathcal{L}_1 \cap K_2, \quad \mathcal{R}_1 \cap K_2, \quad \mathcal{L}_2 \cap K_1, \quad \mathcal{R}_2 \cap K_1,$$

где $K_i = K(s_i)$. В простейшем случае, когда плоскость L пересекает ребра $\tilde{l} = (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) \cap Y$, $\tilde{r} = (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \cap Y$, задача сводится к поиску оптимальной плоской кривой из $L_{\mathcal{D}}$, соединяющей точки пересечения L с указанными ребрами, которую можно построить с помощью приведенной выше леммы. Оптимальная траектория вне \mathcal{D} принадлежит боксам $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2$, которые лежат вне зоны облучения.

В общем случае найдем расстояния

$$\min \{\|x - d\| : x \in \tilde{l}, d \in L_{\mathcal{D}}\}, \quad \min \{\|y - d\| : y \in \tilde{r}, d \in L_{\mathcal{D}}\}$$

и пары точек $x_l \in \tilde{l}$, $d_l \in L_{\mathcal{D}}$, $y_r \in \tilde{r}$, $d_r \in L_{\mathcal{D}}$, реализующие эти нижние грани. Для решения задачи достаточно построить оптимальную траекторию в $L_{\mathcal{D}}$, соединяющую точки d_l , d_r , и две траектории в $\overline{\mathcal{D}}$: одна соединяет точки x_l , d_l , другая — точки y_r , d_r .

Приведенные способы позволяют в разных случаях расположения конусов $K(s)$ строить либо оптимальную, либо близкую к оптимальной траекторию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лю В.** Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58. doi: 10.24108/mathm.0118.0000098.
2. **Арутюнов А.В., Магарил–Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. Москва: Факториал Пресс, 2006. 144 с.
3. **Коробкин В.В., Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Ченцов А.Г.** Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности атомных станций. Москва: Новые технологии, 2012. 234 с.
4. **Chentsov A.G., Grigoryev A.M., Chentsov A.A.** Optimization “In windows” for routing problems with constraints // Mathematical Optimization Theory and Operations Research — 18th International Conference / eds. I. Bykadorov, V. Strusevich, T. Tchemisova (MOTOR 2019): Revised Selected Papers. N Y, Berlin: Springer Verlag, 2019. pp. 470–485. (Communications in Computer and Information Science; vol. 1090 CCIS). doi: 10.1007/978-3-030-33394-2_36.

Поступила 25.12.2019

После доработки 23.01.2020

Принята к публикации 27.01.2020

Бердышев Виталий Иванович

академик РАН

научный руководитель

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г.Екатеринбург

e-mail: bvi@imm.uran.ru

Костоусов Виктор Борисович

канд. физ.-мат. наук

зав. отд.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г.Екатеринбург

e-mail: vkost@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Liu W. Path planning methods in an environment with obstacles (A review). *Matematika i Mat. Modelirovanie*, 2018, no. 1, pp. 15–58 (in Russian). doi: 10.24108/mathm.0118.0000098.
2. Arutyunov A.V., Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M. *Princip maxima Pontryagina. Dokazatel'stvo i prilozheniya* [The Pontryagin maximum principle. Proof and applications]. Moscow: Faktorial Press Publ., 2006, 144 p. ISBN: 5886880828. (in Russian).
3. Korobkin V.V., Sesekin A.N., Tashlyikov O.L., Chentsov A.G. *Metody marshrutizatsii i ih prilozheniya v zadachah povysheniya bezopasnosti i effektivnosti atomnykh stantsii* [Methods of routing and their appendix in problems of increase of efficiency and safety of operation of nuclear power plants]. Moscow: Novyie Tekhnologii Publ., 2012, 234 p. (in Russian).
4. Chentsov A.G., Grigoryev A.M., Chentsov A.A. Optimization “In windows” for routing problems with constraints. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research – 18th International Conference* / eds. I. Bykadorov, V. Strusevich, T. Tchemisova (MOTOR 2019): Revised Selected Papers, Communications in Computer and Information Science; vol. 1090 CCIS, N Y, Berlin: Springer Verlag, 2019. P. 470–485. doi: 10.1007/978-3-030-33394-2_36.

Received December 25, 2019

Revised January 23, 2020

Accepted January 27, 2020

Vitalii Ivanovich Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: bvi@imm.uran.ru.

Viktor Borisovich Kostousov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg 620108 Russia,
e-mail: vkost@imm.uran.ru.

Cite this article as: V.I. Berdyshev, V.B. Kostousov. A trajectory minimizing the exposure of a moving objects, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 27–38.

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ¹**М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов**

Рассматривается задача оптимального управления динамической системой, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$. Промежуток времени процесса управления зафиксирован и конечен. Управляющие воздействия стеснены геометрическими ограничениями. Целью управления является минимизация заданного терминально-интегрального показателя качества. Предлагается следующий подход к построению решения. Сначала рассматриваемая задача сводится к вспомогательной задаче оптимального управления линейной системой первого порядка с сосредоточенными запаздываниями, которая аппроксимирует исходную систему. Затем вспомогательная задача редуцируется до задачи оптимального управления обыкновенной дифференциальной системой. На этой основе строится схема оптимального управления исходной системой по принципу обратной связи с использованием поводыря, роль которого играет аппроксимирующая система. При этом управление в аппроксимирующей системе формируется при помощи оптимальной позиционной стратегии управления из редуцированной задачи. Работоспособность развиваемого подхода иллюстрируется на задаче с показателем качества в виде нормы терминального состояния системы.

Ключевые слова: оптимальное управление, линейные системы, производные дробного порядка, аппроксимация, системы с запаздыванием, управление по принципу обратной связи.

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov. Construction of solutions to control problems for fractional-order linear systems based on approximation models.

We consider an optimal control problem for a dynamical system whose motion is described by a linear differential equation with the Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (0, 1)$. The time interval of the control process is fixed and finite. The control actions are subject to geometric constraints. The aim of the control is to minimize a given terminal-integral quality index. In order to construct a solution, we develop the following approach. First, from the considered problem, we turn to an auxiliary optimal control problem for a first-order linear system with lumped delays, which approximates the original system. After that, the auxiliary problem is reduced to an optimal control problem for an ordinary differential system. Based on this, we propose a closed-loop scheme of optimal control of the original system that uses the approximating system as a guide. In this scheme, the control in the approximating system is formed with the help of an optimal positional control strategy from the reduced problem. The effectiveness of the developed approach is illustrated by a problem in which the quality index is the norm of the terminal state of the system.

Keywords: optimal control, linear systems, fractional-order derivatives, approximation, time-delay systems, closed-loop control.

MSC: 49N05, 34A08

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-39-50

Введение

Рассматривается задача оптимального управления динамической системой, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$. Промежуток времени процесса управления зафиксирован и конечен. Управляющие воздействия стеснены геометрическими ограничениями. Целью управления является минимизация заданного терминально-интегрального показателя качества.

Идеология исследования восходит к теоретико-игровому подходу [1–5], некоторые конструкции которого для систем дробного порядка были развиты в [6; 7]. В статье на базе результатов из [6; 8] рассматриваемая задача сводится к вспомогательной задаче оптимального

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-11-00105).

управления линейной системой первого порядка с сосредоточенными запаздываниями, которая аппроксимирует исходную систему. Затем с опорой на результаты из [9; 10] вспомогательная задача редуцируется до задачи оптимального управления обыкновенной дифференциальной системой. Далее на этой основе предлагается схема оптимального управления исходной системой по принципу обратной связи с использованием поводыря [1], роль которого играет аппроксимирующая система. При этом управление в аппроксимирующей системе формируется при помощи оптимальной позиционной стратегии управления [2] из редуцированной задачи. Таким образом, полученные результаты позволяют применять для построения решений задач управления системами дробного порядка методы, разработанные в теории управления для обыкновенных дифференциальных систем. Работоспособность развиваемого подхода иллюстрируется в статье на задаче с показателем качества в виде нормы терминального состояния системы. Подчеркнем также, что особенность предложенной схемы оптимального управления заключается в том, что она естественным образом распространяется на задачи управления в условиях помех или противодействия.

Отметим, что в настоящее время задачи оптимального управления линейными системами с дробными производными Капуто исследуются достаточно активно. Рассматриваются различные постановки, включая линейно-квадратичные задачи (см., например, [11]), задачи на минимум интегрального показателя качества (см., например, [12]), задачи о переводе системы в заданное состояние за наименьшее время или с минимумом нормы управления (см., например, [13–15]). В основном применяются подходящие варианты принципа максимума, методы вариационного исчисления и выпуклого анализа, а также методы, связанные с проблемой моментов. В настоящей статье акцент сделан на сведениях задач управления линейными системами дробного порядка к задачам управления обыкновенными дифференциальными системами.

1. Постановка задачи

Пусть движение динамической системы на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ описывается линейным дифференциальным уравнением дробного порядка

$$({}^C D^\alpha x)(t) = A(t)x(t) + f(t, u(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (1.1a)$$

при начальном условии

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.1b)$$

Здесь t — время, $x(t)$ — состояние системы в момент времени t , $u(t)$ — текущее управляющее воздействие; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние системы; \mathbb{U} — компактное множество; через $({}^C D^\alpha x)(t)$ обозначена дробная производная Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$ в момент t (см., например, [16, Sect. 3.1]):

$$({}^C D^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau) - x(t_0)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau,$$

где Γ — гамма-функция. Полагаем, что функции $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, и $f(t, u) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $u \in \mathbb{U}$, непрерывны.

Пусть $AC^\alpha([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ — множество функций $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \vartheta]$, для каждой из которых найдется измеримая существенно ограниченная функция $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \vartheta]$, такая, что

$$x(t) = x(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Другими словами, функция $x(\cdot)$ представима в виде суммы начального значения $x(t_0)$ и интеграла Римана — Лиувилля порядка α от функции $\varphi(\cdot)$ (см., например, [16, Sect. 2.1]).

Допустимым (программным) управлением считаем любую измеримую функцию $u(t) \in \mathbb{U}$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Множество всех таких управлений обозначаем через \mathcal{U} . Под движением системы (1.1a), (1.1b), отвечающим управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, понимаем функцию $x(\cdot) \in AC^\alpha([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет равенству (1.1b) и вместе с $u(\cdot)$ при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет уравнению (1.1a). При указанных условиях такое движение, обозначаемое далее как $x(\cdot | u(\cdot))$, существует и единственно (см., например, [17, Theorem 3.1]).

Целью управления является минимизация показателя качества

$$\gamma(u(\cdot)) = \sigma(x(\vartheta | u(\cdot))) + \int_{t_0}^{\vartheta} \chi(t, u(t)) dt, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (1.1c)$$

где $\sigma(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, и $\chi(t, u) \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $u \in \mathbb{U}$, — заданные непрерывные функции.

Определим величину оптимального результата в задаче (1.1)

$$\rho = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \gamma(u(\cdot)).$$

Для $\zeta > 0$ управление $u_0(\cdot) \in \mathcal{U}$ назовем ζ -оптимальным, если

$$\gamma(u_0(\cdot)) \leq \rho + \zeta.$$

В настоящей статье представлен подход, позволяющий находить величину ρ и ζ -оптимальные управления $u_0(\cdot)$ посредством аппроксимации задачи (1.1) вспомогательной задачей оптимального управления для динамической системы, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка с сосредоточенными запаздываниями. В разд. 2 и 3 рассматриваются программные ζ -оптимальные управления. В разд. 4 изучается вопрос о построении таких управлений по принципу обратной связи.

2. Аппроксимирующая задача

Зафиксируем значение параметра аппроксимации $h > 0$. При этом всюду далее считаем, что $\vartheta - t_0 = Nh$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\vartheta_i = \vartheta - ih, \quad k_i(t) = \begin{cases} (-1)^i \binom{1-\alpha}{i} h^{\alpha-1}, & t \in [t_0 + ih, \vartheta], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad i \in \overline{0, N}, \quad (2.1)$$

где $\binom{1-\alpha}{i}$ — биномиальные коэффициенты. Положим

$$g(t, u) = A(t)x_0 + f(t, u), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in \mathbb{U}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления для динамической системы

$$\dot{y}(t) = A(t) \sum_{i=0}^N k_i(t)y(t - ih) + g(t, p(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n, \quad p(t) \in \mathbb{U}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (2.2a)$$

начального условия

$$y(t_0) = 0 \quad (2.2b)$$

и показателя качества

$$\gamma_y^{(h)}(p(\cdot)) = \sigma\left(x_0 + \sum_{i=0}^N k_i(\vartheta)y(\vartheta_i | p(\cdot))\right) + \int_{t_0}^{\vartheta} \chi(t, p(t)) dt, \quad p(\cdot) \in \mathcal{U}. \quad (2.2c)$$

Здесь $y(t)$ — состояние вспомогательной системы в момент времени t ; $p(t)$ — текущее управляющее воздействие; $\dot{y}(t) = dy(t)/dt$. Подчеркнем, что для каждого $i \in \overline{1, N}$ при $t - ih < t_0$ значения $y(t - ih)$ участвуют в уравнении (2.2a) лишь формально, так как $k_i(t) = 0$ в силу (2.1). Поэтому, в частности, в качестве начального условия (2.2b) для этого уравнения достаточно задать только значение $y(t_0)$. В (2.2c) через $y(\cdot | p(\cdot))$ обозначено порожденное управлением $p(\cdot) \in \mathcal{U}$ движение вспомогательной системы — абсолютно непрерывная функция $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \vartheta]$, которая удовлетворяет равенству (2.2b) и вместе с $p(\cdot)$ при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет уравнению (2.2a). При сделанных предположениях такое движение существует и единственно (см., например, [9; 10]). Цель управления — минимизация показателя (2.2c).

Оптимальным результатом во вспомогательной задаче (2.2) будет величина

$$\rho_y^{(h)} = \inf_{p(\cdot) \in \mathcal{U}} \gamma_y^{(h)}(p(\cdot)).$$

Для $\zeta > 0$ управление $p_0(\cdot) \in \mathcal{U}$ будет ζ -оптимальным в этой задаче, если

$$\gamma_y^{(h)}(p_0(\cdot)) \leq \rho_y^{(h)} + \zeta.$$

Следующее утверждение устанавливает связь между задачами (1.1) и (2.2). Его справедливость вытекает из равномерной близости [8, Theorem 2] движений $x(\cdot | u(\cdot))$ исходной и $y(\cdot | p(\cdot))$ вспомогательной систем при $p(\cdot) = u(\cdot)$ и равномерной ограниченности [17, Proposition 5.1] движений $x(\cdot | u(\cdot))$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Утверждение 1. Для любого $\zeta > 0$ найдутся такие $h_* > 0$ и $\zeta_* > 0$, что для каждого $h \in (0, h_*]$ будет справедливо неравенство $|\rho - \rho_y^{(h)}| \leq \zeta$, а всякое ζ_* -оптимальное управление во вспомогательной задаче (2.2) будет ζ -оптимальным в исходной задаче (1.1).

Таким образом, задача (1.1) аппроксимируется задачей (2.2). Следующий раздел посвящен редукции задачи (2.2) до задачи оптимального управления динамической системой, движение которой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением.

3. Редукция аппроксимирующей задачи

Пусть $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица. Определим функцию $Y^{(h)}(\tau, t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, $t \in [t_0, \vartheta]$, которая при каждом $\tau \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет условиям

$$Y^{(h)}(\tau, \tau) = E, \quad Y^{(h)}(\tau, t) = 0, \quad t \in (\tau, \vartheta], \quad (3.1)$$

является абсолютно непрерывной по t на промежутке $[t_0, \tau]$ и почти всюду на этом промежутке удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} Y^{(h)}(\tau, t) = - \sum_{i=0}^N k_i(t + ih) Y^{(h)}(\tau, t + ih) A(t + ih). \quad (3.2)$$

По аналогии с (2.2a) для каждого $i \in \overline{1, N}$ при $t + ih > \vartheta$ значения $Y^{(h)}(\tau, t + ih)$ и $A(t + ih)$ участвуют в уравнении (3.2) лишь формально, так как $k_i(t + ih) = 0$ в силу (2.1). Положим

$$g_i(t, u) = Y^{(h)}(\vartheta_i, t) g(t, u), \quad i \in \overline{0, N}, \quad \mathbf{g}^{(h)}(t, u) = \{g_i(t, u) \in \mathbb{R}^n : i \in \overline{0, N}\} \in \mathbb{R}^{(N+1)n}, \quad (3.3)$$

где $t \in [t_0, \vartheta]$, $u \in \mathbb{U}$. Последняя запись в (3.3) означает, что первые n координат вектора $\mathbf{g}^{(h)}(t, u)$ совпадают с координатами вектора $g_0(t, u)$, следующие n координат $\mathbf{g}^{(h)}(t, u)$ совпадают с координатами $g_1(t, u)$ и так далее, последние n координат вектора $\mathbf{g}^{(h)}(t, u)$ совпадают с координатами вектора $g_N(t, u)$. Рассмотрим задачу оптимального управления для системы

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{g}^{(h)}(t, p(t)), \quad \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{(N+1)n}, \quad p(t) \in \mathbb{U}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (3.4a)$$

начального условия

$$\mathbf{z}(t_0) = 0 \quad (3.4b)$$

и показателя качества

$$\gamma_{\mathbf{z}}^{(h)}(p(\cdot)) = \sigma\left(x_0 + \sum_{i=0}^N k_i(\vartheta) z_i(\vartheta | p(\cdot))\right) + \int_{t_0}^{\vartheta} \chi(t, p(t)) dt, \quad p(\cdot) \in \mathcal{U}. \quad (3.4c)$$

Здесь $\mathbf{z}(t) = \{z_i(t) \in \mathbb{R}^n : i \in \overline{0, N}\}$ — состояние системы в момент t . Целью управления является минимизация показателя (3.4c), где через $z_i(\cdot | p(\cdot))$, $i \in \overline{0, N}$, обозначены соответствующие компоненты движения $\mathbf{z}(\cdot | p(\cdot))$ системы (3.4a), (3.4b), порожденного управлением $p(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Задачи (2.2) и (3.4) связаны следующим образом (см., например, [10, лемма 1] и соотношения (4.7) ниже). Каково бы ни было управление $p(\cdot) \in \mathcal{U}$, для движений $y(\cdot | p(\cdot))$ системы (2.2a), (2.2b) и $\mathbf{z}(\cdot | p(\cdot))$ системы (3.4a), (3.4b) справедливы равенства $y(\vartheta | p(\cdot)) = z_i(\vartheta | p(\cdot))$, $i \in \overline{0, N}$. В частности, значения $\gamma_y^{(h)}(p(\cdot))$ и $\gamma_{\mathbf{z}}^{(h)}(p(\cdot))$ показателей качества (2.2c) и (3.4c) совпадают при всех $p(\cdot) \in \mathcal{U}$, и, следовательно, задача (2.2) эквивалентна задаче (3.4).

Отметим, что численное решение задачи (3.4) осложняется тем, что размерность $(N+1)n$ состояния $\mathbf{z}(t)$ системы (3.4a) возрастает при уменьшении параметра аппроксимации h . Однако то обстоятельство, что в показателе (3.4c) терминальное состояние $\mathbf{z}(\vartheta | p(\cdot))$ оценивается только через линейную комбинацию компонент $z_i(\vartheta | p(\cdot))$, $i \in \overline{0, N}$, позволяет перейти в задаче (3.4) от переменной $\mathbf{z} = \{z_i \in \mathbb{R}^n : i \in \overline{0, N}\}$ к новой переменной $z \in \mathbb{R}^n$ по правилу

$$z = x_0 + \sum_{i=0}^N k_i(\vartheta) z_i. \quad (3.5)$$

Тогда, полагая

$$g^{(h)}(t, u) = \sum_{i=0}^N k_i(\vartheta) g_i(t, u), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in \mathbb{U}, \quad (3.6)$$

приходим к редуцированной задаче оптимального управления для системы

$$\dot{z}(t) = g^{(h)}(t, p(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n, \quad p(t) \in \mathbb{U}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (3.7a)$$

начального условия

$$z(t_0) = x_0 \quad (3.7b)$$

и показателя качества

$$\gamma_z^{(h)}(p(\cdot)) = \sigma(z(\vartheta | p(\cdot))) + \int_{t_0}^{\vartheta} \chi(t, p(t)) dt, \quad p(\cdot) \in \mathcal{U}. \quad (3.7c)$$

Подчеркнем, что размерность состояния $z(t)$ системы (3.7a) совпадает с размерностью состояния $x(t)$ исходной системы (1.1a) и не зависит от параметра аппроксимации h . В (3.7c) через $z(\cdot | p(\cdot))$ обозначено движение системы (3.7a), (3.7b), отвечающее управлению $p(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Рассмотрим величину оптимального результата в задаче (3.7):

$$\rho_z^{(h)} = \inf_{p(\cdot) \in \mathcal{U}} \gamma_z^{(h)}(p(\cdot)),$$

и ζ -оптимальные управления $p_0(\cdot) \in \mathcal{U}$:

$$\gamma_z^{(h)}(p_0(\cdot)) \leq \rho_z^{(h)} + \zeta. \quad (3.8)$$

В силу утверждения 1 и указанной связи между задачами (2.2), (3.4) и (3.7) имеет место

Утверждение 2. Для любого $\zeta > 0$ найдутся такие $h_* > 0$ и $\zeta_* > 0$, что для каждого $h \in (0, h_*]$ будет справедливо неравенство $|\rho - \rho_z^{(h)}| \leq \zeta$, а всякое ζ_* -оптимальное управление в редуцированной задаче (3.7) будет ζ -оптимальным в исходной задаче (1.1).

Итак, задача (1.1) сводится к задаче (3.7). В следующем разделе предложенная конструкция сведения применяется для построения ζ -оптимальных управлений в исходной задаче (1.1) по принципу обратной связи.

З а м е ч а н и е 1. Согласно (3.3) и (3.6) имеем

$$g^{(h)}(t, u) = \sum_{i=0}^N k_i(\vartheta) Y^{(h)}(\vartheta_i, t) g(t, u), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in \mathbb{U}.$$

Поэтому для того чтобы перейти к редуцированной задаче (3.7), вместо определения для каждого $i \in \overline{0, N}$ значений $Y^{(h)}(\vartheta_i, t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, достаточно найти их линейную комбинацию

$$\Phi^{(h)}(t) = \sum_{i=0}^N k_i(\vartheta) Y^{(h)}(\vartheta_i, t), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (3.9)$$

а это в силу (3.1) и (3.2) можно сделать непосредственно. Действительно, пусть $q \in \overline{0, N-1}$ и при $t \in (\vartheta_q, \vartheta]$ значения $\Phi^{(h)}(t)$ уже найдены. Тогда на промежутке $(\vartheta_{q+1}, \vartheta_q]$ функцию $\Phi^{(h)}(\cdot)$ определяем как решение дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi}^{(h)}(t) = - \sum_{i=0}^q k_i(t+ih) \Phi^{(h)}(t+ih) A(t+ih), \quad t \in (\vartheta_{q+1}, \vartheta_q],$$

удовлетворяющее условию

$$\Phi^{(h)}(\vartheta_q) = \Phi^{(h)}(\vartheta_q + 0) + k_q(\vartheta) E.$$

При этом полагаем $\Phi^{(h)}(\vartheta + 0) = 0$ и $\Phi^{(h)}(t_0) = \Phi^{(h)}(t_0 + 0) + k_N(\vartheta) E$. Здесь через $\Phi^{(h)}(\vartheta_q + 0)$ обозначен предел справа в точке ϑ_q .

З а м е ч а н и е 2. Как альтернативу предложенному выше подходу к решению аппроксимирующей задачи (2.2), следуя идеям, восходящий к работам [18–20] (см. также [5; 21; 22] и библиографию к этим статьям), можно рассмотреть другой подход, основанный на дальнейшей аппроксимации дифференциального уравнения с сосредоточенными запаздываниями (2.2а) при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Управление по принципу обратной связи

Следуя [2], под позиционной стратегией управления в редуцированной задаче (3.7) понимаем любую функцию

$$P(t, z, \varepsilon) \in \mathbb{U}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0,$$

где ε — параметр точности. Пусть Δ — разбиение промежутка $[t_0, \vartheta]$:

$$\Delta = \{\tau_j\}_{j \in \overline{1, k+1}}, \quad \tau_1 = t_0, \quad \tau_j < \tau_{j+1}, \quad j \in \overline{1, k}, \quad \tau_{k+1} = \vartheta. \quad (4.1)$$

Тройку $\{P, \varepsilon, \Delta\}$ называем законом управления. В системе (3.7а), (3.7б) этот закон в цепи обратной связи по шагам разбиения Δ формирует кусочно-постоянное управление

$$p(t) = P(\tau_j, z(\tau_j), \varepsilon), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j \in \overline{1, k}. \quad (4.2)$$

Стратегия $P_0^{(h)}$ будет оптимальной в задаче (3.7), если для любого $\zeta > 0$ найдутся число $\varepsilon_* > 0$ и функция $\delta_*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, такие, что, каковы бы ни были $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и разбиение Δ вида (4.1), удовлетворяющее условию

$$\max_{j \in \overline{1, k}} (\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \delta_*(\varepsilon), \quad (4.3)$$

управление $p(\cdot)$, определяемое законом $\{P_0^{(h)}, \varepsilon, \Delta\}$, является ζ -оптимальным, т. е. удовлетворяет неравенству (3.8). Отметим, что при рассматриваемых условиях такая оптимальная стратегия $P_0^{(h)}$ существует (см., например, [2, теорема 29.1]).

Управление в аппроксимирующей системе (2.2a), (2.2b) будем формировать на базе закона $\{P_0^{(h)}, \varepsilon, \Delta\}$ следующим образом. Пусть $j \in \overline{1, k}$ и к моменту времени τ_j реализовалась история движения этой системы $y_{\tau_j}(t) = y(t)$, $t \in [t_0, \tau_j]$. Тогда согласно (4.2) полагаем

$$p(t) = P_0^{(h)}(\tau_j, w^{(h)}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot)), \varepsilon), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}). \quad (4.4)$$

Здесь

$$w^{(h)}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot)) = x_0 + \sum_{i=0}^N k_i(\vartheta) w_i(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot)), \quad (4.5)$$

где для каждого $i \in \overline{0, N}$ имеем

$$w_i(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot)) = \begin{cases} Y^{(h)}(\vartheta_i, \tau_j) y(\tau_j) + \sum_{q=0}^N \int_{\tau_j}^{\tau_j + qh} k_q(\tau) Y^{(h)}(\vartheta_i, \tau) A(\tau) y(\tau - qh) d\tau, & \tau_j < \vartheta_i, \\ y(\vartheta_i), & \tau_j \geq \vartheta_i. \end{cases} \quad (4.6)$$

Следуя [9; 10; 23], вектор $w^{(h)}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot))$ называем информационным образом пары $(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot))$. Отметим, что в силу (2.1) и (2.2b) справедливы равенства

$$w_i(t_0, y(t_0)) = 0, \quad i \in \overline{0, N}, \quad w^{(h)}(t_0, y(t_0)) = x_0, \quad (4.7)$$

в соответствии с которыми были заданы начальные условия (3.4b) и (3.7b).

Согласно [10, теорема 1] с учетом связи (3.5) между задачами (3.4) и (3.7) получаем

Утверждение 3. Для любых $h > 0$ и $\zeta > 0$ можно указать число $\varepsilon_* > 0$ и функцию $\delta_*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, такие, что, каковы бы ни были $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и разбиение Δ вида (4.1), (4.3), управление $p(\cdot)$, определяемое по правилу (4.4), является ζ -оптимальным в аппроксимирующей задаче (2.2).

Далее задачу (1.1) рассматриваем при дополнительном предположении, что интегральное слагаемое в показателе (1.1c) отсутствует, т. е.

$$\chi(t, u) = 0, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in \mathbb{U}. \quad (4.8)$$

Управление по принципу обратной связи исходной системой (1.1a), (1.1b) осуществляем с использованием поводыря (см., например, [1, § 57]), роль которого играет оптимальным образом управляемая аппроксимирующая система (2.2a), (2.2b). А именно, задавшись значениями параметров $h > 0$, $\varepsilon > 0$ и разбиением Δ вида (4.1), управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $p(\cdot) \in \mathcal{U}$ в исходной и аппроксимирующей системах формируем в соответствии со следующим пошаговым правилом. Пусть $j \in \overline{1, k}$ и к моменту времени τ_j реализовались состояние $x(\tau_j)$ исходной системы и история движения $y_{\tau_j}(\cdot)$ аппроксимирующей системы. Тогда на следующем шаге полагаем

$$u(t) = u_j \in \operatorname{argmin}_{u \in \mathbb{U}} \langle x(\tau_j) - x_0 - \sum_{i=0}^N k_i(\tau_j) y(\tau_j - ih), f(\tau_j, u) \rangle, \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad (4.9)$$

и определяем значения $p(t)$, $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$, согласно (4.4). В (4.9) символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов.

Утверждение 4. Пусть выполнено условие (4.8). Тогда для любого $\zeta > 0$ найдется такое $h_* > 0$, при котором для каждого $h \in (0, h_*]$ можно указать число $\varepsilon_* > 0$ и функцию $\delta_*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, такие, что, каковы бы ни были $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и разбиение Δ вида (4.1), (4.3), управление $u(\cdot)$, формируемое по процедуре управления с поводырём (4.4), (4.9), является ζ -оптимальным в задаче (1.1).

Справедливость этого утверждения вытекает из утверждения 3 и [6, Theorem 1].

Таким образом, на основе оптимальной позиционной стратегии управления $P_0^{(h)}$ в редуцированной задаче (3.7) можно в исходной задаче (1.1) построить ζ -оптимальные управления по принципу обратной связи. Кроме того, подчеркнем, что предложенная процедура управления с поводырём может быть естественным образом распространена на задачи управления в условиях помех или противодействия.

З а м е ч а н и е 3. По аналогии с замечанием 1 для каждого $j \in \overline{1, k}$ информационный образ $w^{(h)}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot))$ пары $(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot))$, определяемый согласно (4.5) и (4.6), можно найти непосредственно:

$$w^{(h)}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot)) = x_0 + \Phi^{(h)}(\tau_j)y(\tau_j) + \int_{\tau_j}^{\vartheta} \Phi^{(h)}(\tau)A(\tau) \sum_{i=[(\tau-\tau_j)/h]+1}^{[(\tau-t_0)/h]} k_i(\tau)y(\tau - ih) d\tau + \sum_{i=[(\vartheta-\tau_j)/h]+1}^N k_i(\vartheta)y(\vartheta_i),$$

где $\Phi^{(h)}(\cdot)$ — функция из (3.9), $[t]$ — целая часть числа $t \geq 0$ и суммирование по убывающему индексу приравнивается к нулю.

5. Пример

Рассмотрим случай, когда показатель качества (1.1с) имеет вид

$$\gamma(u(\cdot)) = \mu(K(x(\vartheta) | u(\cdot)) - c), \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (5.1)$$

где $K \in \mathbb{R}^{d \times n}$, $d \in \overline{1, n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ и функция $\mu(s) \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^d$, является нормой. Тогда для величины оптимального результата $\rho_z^{(h)}$ и оптимальной позиционной стратегии управления $P_0^{(h)}$ в соответствующей редуцированной задаче (3.7) будут справедливы (см., например, [23] и библиографию к этой статье) репрезентативные формулы

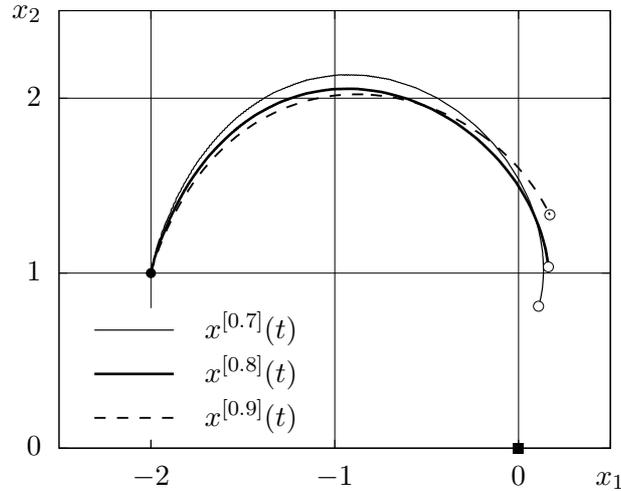
$$\rho_z^{(h)} = \max_{l \in G} (\langle l, Kx_0 \rangle + \psi^{(h)}(t_0, l)), \quad P_0^{(h)}(t, z, \varepsilon) \in \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{U}} \langle l_0^{(h)}(t, z, \varepsilon), Kg^{(h)}(t, u) \rangle, \quad (5.2)$$

где $t \in [t_0, \vartheta]$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ и

$$l_0^{(h)}(t, z, \varepsilon) \in \operatorname{argmax}_{l \in G} \left(\langle l, Kz \rangle + \psi^{(h)}(t, l) - \sqrt{(\varepsilon + (t - t_0)\varepsilon)(1 + \|l\|^2)} \right),$$

$$\psi^{(h)}(t, l) = \int_t^{\vartheta} \min_{u \in \mathcal{U}} \langle l, Kg^{(h)}(\tau, u) \rangle d\tau - \langle l, Kc \rangle, \quad G = \{l \in \mathbb{R}^d : \max_{s \in \mathbb{R}^d : \mu(s) \leq 1} \langle l, s \rangle \leq 1\}.$$

Применительно к исходной задаче об управлении системой дробного порядка (1.1a), (1.1b) на минимум показателя качества (5.1), формулы (5.2) в согласии с утверждениями 2 и 4 позволяют эффективно (см. замечания 1 и 3) вычислять величину оптимального результата ρ и строить ζ -оптимальные управления по принципу обратной связи.



Траектории движений $x^{[\alpha]}(\cdot)$ системы (5.3а), (5.3б) при действии процедуры управления с поводьрем (4.4), (4.9) при различных порядках дифференцирования $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$ и $\alpha = 0.9$.

Приведем результаты моделирования для задачи оптимального управления системой

$$\begin{cases} ({}^C D^\alpha x_1)(t) = 0.2 \cos(\pi t)x_1(t) + x_2(t) + 0.5u_1(t) + 0.3 \sin(\pi t), \\ ({}^C D^\alpha x_2)(t) = -2x_1(t) - 0.3x_2(t) + u_2(t), \end{cases} \quad (5.3a)$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2, \quad u_1^2(t) + u_2^2(t) \leq 1, \quad t \in [0, 1],$$

при начальном условии

$$x(0) = x_0 = (-2, 1) \quad (5.3b)$$

на минимум показателя качества

$$\gamma(u(\cdot)) = \sqrt{x_1^2(1 | u(\cdot)) + x_2^2(1 | u(\cdot))}, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}. \quad (5.3c)$$

Вычисления проводились для различных значений $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$ и $\alpha = 0.9$ при выборе параметра аппроксимации $h = 0.01$, параметра точности $\varepsilon = 0.01$ и равномерного разбиения Δ вида (4.1) с шагом $\delta = 0.002$. В каждом из случаев для формирования управления использовалась процедура управления с поводьрем (4.4), (4.9). На рисунке выше изображены траектории соответствующих движений $x^{[\alpha]}(\cdot)$ системы (5.3а), (5.3б). Ниже приведены найденные значения $\rho^{[\alpha]}$ величины оптимального результата в задаче (5.3) и реализовавшиеся значения $\gamma^{[\alpha]}$ показателя качества (5.3с):

$$\begin{aligned} \rho^{[0.7]} &\approx 0.751, & \gamma^{[0.7]} &\approx \sqrt{(0.109)^2 + (0.811)^2} \approx 0.818, \\ \rho^{[0.8]} &\approx 1.019, & \gamma^{[0.8]} &\approx \sqrt{(0.162)^2 + (1.036)^2} \approx 1.049, \\ \rho^{[0.9]} &\approx 1.333, & \gamma^{[0.9]} &\approx \sqrt{(0.169)^2 + (1.334)^2} \approx 1.345. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

4. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр систем с последствием // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 2. С. 300–311.
5. **Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.** Стохастический поводырь для объекта с последствием в позиционной дифференциальной игре // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 97–104.
6. **Гомоюнов М.И.** Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations // Dyn. Games Appl. 2019. P. 1–27. doi: 10.1007/s13235-019-00320-4.
7. **Сурков П.Г.** Задача динамического восстановления правой части системы дифференциальных уравнений нецелого порядка // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 6. С. 865–874. doi: 10.1134/S037406411906012.
8. **Гомоюнов М.И.** Approximation of fractional order conflict-controlled systems // Progr. Fract. Differ. Appl. 2019. Vol 5, № 2. P. 143–155. doi: 10.18576/PFDA/050205.
9. **Лукоянов Н.Ю., Решетова Т.Н.** Задачи конфликтного управления функциональными системами высокой размерности // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 4. С. 586–597.
10. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.** Оптимизация гарантии в функционально-дифференциальных системах с последствием по управлению // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 4. С. 515–525.
11. **Idczak D., Walczak S.** On a linear-quadratic problem with Caputo derivative // Opuscula Math. 2016. Vol. 36, № 1. P. 49–68. doi: 10.7494/OpMath.2016.36.1.49.
12. **Kamocki R., Majewski M.** Fractional linear control systems with Caputo derivative and their optimization // Optim. Control Appl. Meth. 2015. Vol. 36, № 6. P. 953–967. doi: 10.1002/oca.2150.
13. **Кубышкин В.А., Постнов С.С.** Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 3–17.
14. **Kaczorek T.** Minimum energy control of fractional positive electrical circuits with bounded inputs // Circuits Syst. Signal Process. 2016. Vol. 35, iss. 6. P. 1815–1829. doi: 10.1007/s00034-015-0181-7.
15. **Matychyn I., Onyshchenko V.** Optimal control of linear systems with fractional derivatives // Fract. Calc. Appl. Anal. 2018. Vol. 21, № 1. P. 134–150. doi: 10.1515/fca-2018-0009.
16. **Diethelm K.** The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010. 247 p. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2.
17. **Гомоюнов М.И.** Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // Frac. Calc. Appl. Anal. 2018. Vol. 21, № 5. P. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066.
18. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
19. **Репин Ю.М.** О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 226–235.
20. **Куржанский А.Б.** К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2094–2107.
21. **Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R.** On approximations of time-delay control systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, iss. 25. P. 178–182. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.080.
22. **Chávez J.P., Zhang Z., Liu Y.** A numerical approach for the bifurcation analysis of nonsmooth delay equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2020. Vol. 83. doi: 10.1016/j.cnsns.2019.105095.
23. **Lukoyanov N.Yu., Gomoynov M.I.** Differential games on minmax of the positional quality index // Dyn. Games Appl. 2019. Vol. 9, iss. 3. P. 780–799. doi: 10.1007/s13235-018-0281-7.

Поступила 25.12.2019

После доработки 24.01.2020

Принята к публикации 27.01.2020

Гомоюнов Михаил Игоревич

канд. физ.-мат. наук

старший научный сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

доцент

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Лукоянов Николай Юрьевич

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН,

директор

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

профессор

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: nyul@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. New York: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*. Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 520 p.
3. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
4. Osipov Yu.S. On the theory of differential games of systems with aftereffect. *J. Appl. Math. Mech.*, 1971, vol. 35, no. 2, pp. 262–272. doi: 10.1016/0021-8928(71)90032-3.
5. Krasovskii N.N., Kotelnikova A.N. Stochastic guide for a time-delay object in a positional differential game. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, suppl. 1, pp. 145–151. doi: 10.1134/S0081543812050148.
6. Gomoyunov M.I. Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations. *Dyn. Games Appl.*, 2019, pp. 1–27. doi: 10.1007/s13235-019-00320-4.
7. Surkov P.G. Dynamic right-hand side reconstruction problem for a system of fractional differential equations. *Diff. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 6, pp. 849–858. doi: 10.1134/S0012266119060120.
8. Gomoyunov M.I. Approximation of fractional order conflict-controlled systems. *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2019, vol. 5, no. 2, pp. 143–155. doi: 10.18576/PFDA/050205.
9. Lukoyanov N.Yu., Reshetova T.N. Problems of conflict control of high dimensionality functional systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 4, pp. 545–554. doi: 10.1016/S0021-8928(98)00071-9.
10. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. Guarantee optimization in functional-differential systems with a control aftereffect. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 369–377. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.002.
11. Idczak D., Walczak S. On a linear-quadratic problem with Caputo derivative. *Opuscula Math.*, 2016, vol. 36, no. 1, pp. 49–68. doi: 10.7494/OpMath.2016.36.1.49.
12. Kamocki R., Majewski M. Fractional linear control systems with Caputo derivative and their optimization. *Optim. Control Appl. Meth.*, 2015, vol. 36, no. 6, pp. 953–967. doi: 10.1002/oca.2150.
13. Kubyshkin V.A., Postnov S.S. Optimal control problem for a linear stationary fractional order system in the form of a problem of moments: Problem setting and a study. *Autom. Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 5, pp. 805–817. doi: 10.1134/S0005117914050014.
14. Kaczorek T. Minimum energy control of fractional positive electrical circuits with bounded inputs. *Circuits Syst. Signal Process.*, 2016, vol. 35, no. 6, pp. 1815–1829. doi: 10.1007/s00034-015-0181-7.
15. Matychyn I., Onyshchenko V. Optimal control of linear systems with fractional derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2018, vol. 21, no. 1, pp. 134–150. doi: 10.1515/fca-2018-0009.
16. Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations*. Berlin: Springer, 2010, 247 p. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2.
17. Gomoyunov M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems. *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 2018, vol. 21, no. 5, pp. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066.
18. Krasovskii N.N. The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag. *J. Appl. Math. Mech.*, 1964, vol. 28, no. 4, pp. 876–885. doi: 10.1016/0021-8928(64)90073-5.

19. Repin Yu.M. On the approximate replacement of systems with lag by ordinary dynamical systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1965, vol. 29, no. 2, pp. 254–264. doi: 10.1016/0021-8928(65)90029-8.
20. Kurzhanski A.B. On the approximation of linear differential equations with lag. *Differ. Uravn.*, 1967, vol. 3, no. 12, pp. 2094–2107 (in Russian).
21. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. On approximations of time-delay control systems. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, no. 25, pp. 178–182. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.080.
22. Chávez J.P., Zhang Z., Liu Y. A numerical approach for the bifurcation analysis of nonsmooth delay equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2020, vol. 83. doi: 10.1016/j.cnsns.2019.105095.
23. Lukoyanov N.Yu., Gomoyunov M.I. Differential games on minmax of the positional quality index. *Dyn. Games Appl.*, 2019, vol. 9, no. 3, pp. 780–799. doi: 10.1007/s13235-018-0281-7.

Received December 25, 2019

Revised January 24, 2020

Accepted January 27, 2020

Funding Agency: This work was supported by RSF (project no. 19-11-00105).

Mikhail Igorevich Gomoyunov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com.

Nikolai Yur'evich Lukoyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: nyul@imm.uran.ru.

Cite this article as: M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov. Construction of solutions to control problems for fractional-order linear systems based on approximation models, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 39–50.

УДК 517.982.252+519.858+519.853.3

**СТУПЕНЧАТО-АФФИННЫЕ ФУНКЦИИ, ПОЛУПРОСТРАНСТВА
И ОТДЕЛИМОСТЬ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ
К ВЫПУКЛЫМ ЗАДАЧАМ ОПТИМИЗАЦИИ¹****В. В. Гороховик**

В статье приводится определение ступенчато-аффинных функций, определенных на вещественном векторном пространстве, и устанавливается их двойственность полупространствам — выпуклым множествам, дополнения которых также выпуклы. С использованием этой двойственности доказывается, что два выпуклых подмножества вещественного векторного пространства не пересекаются тогда и только тогда, когда они отделимы некоторой ступенчато-аффинной функцией. Фактически данный критерий непересекаемости выпуклых множеств является аналитическим вариантом критерия Какутани — Тьюки об отделимости непересекающихся выпуклых множеств полупространствами. В качестве приложений получены критерий минимальности решений для выпуклых задач векторной оптимизации, рассматриваемых в вещественных векторных пространствах без топологии, и критерий оптимальности допустимых точек в классических задачах выпуклого программирования, не удовлетворяющих условию регулярности Слейтера.

Ключевые слова: ступенчато-аффинные функции, полупространства, отделимость выпуклых множеств, выпуклые задачи векторной оптимизации, выпуклое программирование.

V. V. Gorokhovich. Step-affine functions, half-spaces, and separation of convex sets with applications to convex optimization problems.

We present the definition of step-affine functions defined on a real vector space and establish the duality between step-affine functions and half-spaces, i.e., convex sets whose complements are convex as well. Using this duality, we prove that two convex sets are disjoint if and only if they are separated by some step-affine function. This criterion is actually the analytic version of the Kakutani–Tukey criterion of the separation of disjoint convex sets by half-spaces. As applications of these results, we derive a minimality criterion for solutions of convex vector optimization problems considered in real vector spaces without topology and an optimality criterion for admissible points in classical convex programming problems not satisfying the Slater regularity condition.

Keywords: step-affine functions, half-spaces, separation of convex sets, convex vector optimization problems, convex programming.

MSC: 52A05, 52A41, 49K27, 90C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-51-70

Введение

Классические теоремы об отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями играют ключевую роль не только в выпуклом анализе, но и в других разделах математики и ее многочисленных приложениях, в частности, в теории оптимизации. Геометрически отделимость двух подмножеств векторного пространства некоторой гиперплоскостью означает, что эти подмножества принадлежат различным алгебраически замкнутым полупространствам, порождаемым этой гиперплоскостью. Вследствие двойственности, существующей между гиперплоскостями и аффинными функциями, свойство отделимости может быть записано в аналитическом виде. В конечномерных векторных пространствах для любых двух непересекающихся выпуклых множеств существует отделяющая их гиперплоскость. В то же время в любом бесконечномерном векторном пространстве существуют непересекающиеся выпуклые множества,

¹Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы “Конвергенция-2020” (проект 1.4.01).

которые нельзя отделить никакой гиперплоскостью (см., например, [1, с.131]). По этой причине в целом ряде задач анализа применение классических теорем об отделимости либо оказывается вовсе невозможным, либо обеспечивается некоторыми дополнительными предположениями относительно данных задачи. Хорошо известно, что достаточным условием, обеспечивающим существование отделяющей гиперплоскости для двух непересекающихся выпуклых подмножеств бесконечномерного векторного пространства, является требование, чтобы хотя бы одно из них имело непустую алгебраическую внутренность.

Другой особенностью классических теорем об отделимости является то, что они, вообще говоря, необратимы: из отделимости множеств некоторой гиперплоскостью не следует то, что эти множества не пересекаются. Для того чтобы обеспечить пустоту пересечения множеств, требуется усиленный вариант отделимости, назовем его истинной отделимостью множеств гиперплоскостью (В. Кли [2] называет такой тип отделимости “nicely separation”). Геометрически истинная отделимость характеризуется таким взаимным расположением двух множеств и гиперплоскости, при котором одно из множеств лежит в алгебраически замкнутом полупространстве, порожденным гиперплоскостью, а другое принадлежит дополняющему его алгебраически открытому полупространству. Однако даже в конечномерных пространствах и, более того, на плоскости существуют непересекающиеся выпуклые множества, которые не могут быть истинно отделены никакой гиперплоскостью. Например, непересекающиеся выпуклые множества $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0, x_2 \leq 0\}$ и $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq \max\{0, -x_1^3\}\}$ отделимы гиперплоскостью $H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$, но их нельзя истинно отделить никакой гиперплоскостью.

Таким образом, существует разрыв между необходимыми и достаточными условиями непересекаемости выпуклых множеств, формулируемыми в терминах отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями. Это обстоятельство находит отражение и в различных приложениях классических теорем об отделимости, в частности в теории оптимизации. Продемонстрируем это на примере задач выпуклого программирования.

Оптимальность допустимых решений в задачах выпуклого программирования может быть охарактеризована геометрически как условие непересечения двух выпуклых множеств, связанных с исследуемым допустимым решением. Применение классических теорем об отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями позволяет получить из этого геометрического критерия как необходимые, так и достаточные условия оптимальности, между которыми, однако, существует разрыв (в необходимом условии оптимальности гарантируется лишь неотрицательность множителя Лагранжа, соответствующего целевому функционалу, тогда как в достаточном условии требуется его положительность). Критерий оптимальности Куна — Таккера справедлив для решений лишь тех задач выпуклого программирования, которые удовлетворяют дополнительному условию регулярности Слейтера. По существу, это условие выделяет те задачи выпуклого программирования, в которых соответствующие выпуклые множества в геометрическом критерии расположены так, что любая отделяющая их гиперплоскость является и истинно отделяющей. Благодаря этому условию оптимальности, которое в общем случае является лишь достаточным, становится и необходимым. Естественно, что достигается это за счет существенного сужения класса рассматриваемых задач выпуклого программирования.

Подобная ситуация возникает и при исследовании выпуклых задач векторной оптимизации. Любая минимальная точка выпуклого подмножества упорядоченного векторного пространства доставляет минимум на этом множестве некоторому положительному линейному функционалу. Однако не всякая точка, доставляющая минимум положительному линейному функционалу, является минимальной относительно заданного на векторном пространстве упорядочения. Для минимальности любой такой точки надо потребовать, чтобы минимизируемый линейный функционал был сильно положительным.

В 1930-е гг. прошлого века Ш. Какутани [3] и Дж. Тьюки [4] независимо доказали, что непересекаемость двух выпуклых подмножеств векторного пространства эквивалентна их отделимости полупространствами (из более доступных источников см. [5, с. 23]).

Напомним, что полупространствами называются такие выпуклые множества, дополнения которых также выпуклы.

Теорема (Какутани — Тьюки). Пусть A и B — выпуклые множества из векторного пространства X . Для того чтобы $A \cap B = \emptyset$, необходимо и достаточно, чтобы в X существовало полупространство $H \subset X$ такое, что $A \subset H$, а $B \subset X \setminus H$.

Нетрудно видеть, что алгебраически замкнутые и алгебраически открытые полупространства, порожденные гиперплоскостями, образуют собственное подсемейство в семействе всех полупространств. В силу этого теорема Какутани — Тьюки является прямым обобщением классических теорем об отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями. Несмотря на общность, теорема Какутани — Тьюки не нашла достаточно широкого применения в анализе. Одна из возможных причин такого положения — отсутствие аналитического варианта этой теоремы. Для того чтобы сформулировать теорему Какутани — Тьюки аналитически, фактически, следует найти аналитическое представление произвольных полупространств. Решение этой проблемы в конечномерных векторных пространствах было дано Х.-Э. Мартинец-Легазом и И. Зингером [6] (см. ниже теорему 1).

Альтернативный подход, позволивший получить аналитическое представление полупространств в бесконечномерных векторных пространствах, был развит в работах [7–13]. Для этих целей был введен новый класс вещественнозначных функций, названных ступенчато-аффинными, и было показано, что функции этого класса двойственны полупространствам, причем для алгебраически замкнутых и алгебраически открытых полупространств эта двойственность совпадает с известной двойственностью, существующей между аффинными функциями и гиперплоскостями. Это позволило сформулировать и доказать аналитический вариант теоремы Какутани — Тьюки об отделимости выпуклых множеств полупространствами в произвольных вещественных векторных пространствах в виде теоремы об отделимости выпуклых множеств ступенчато-аффинными функциями (см. ниже предложение 4). В качестве приложений полученного аналитического варианта теоремы Какутани — Тьюки установлены критерии минимальности решений выпуклых задач векторной оптимизации и критерии оптимальности решений задач выпуклого программирования без каких-либо предположений о регулярности задачи. Если же задача выпуклого программирования удовлетворяет условию регулярности Слейтера, то установленный критерий совпадает с критерием Куна — Таккера.

Интерес к данной тематике по-прежнему сохраняется, о чем свидетельствуют появляющиеся в печати работы (см., например, [14–16]). Так, в статье [14] в рамках конечномерных пространств рассматриваются вопросы, связанные со специальным видом (open separation) отделимости выпуклых множеств полупространствами, при этом авторы существенно используют более ранние результаты из [6]. В то же время анализ работ [15; 16], опубликованных в весьма авторитетных международных журналах, показывает, что их авторам (и не только им) не известны во многом окончательные результаты из [2; 6; 8–13; 17–20]. Как следствие, представленные в [15] результаты, касающиеся геометрической структуры конических полупространств в конечномерных пространствах, повторяют (без ссылок на первоисточники) уже известные результаты из [6; 9; 17; 19; 20], а выводы из [16] о структуре бесконечномерных полупространств вовсе содержит ошибочные утверждения (об этом несколько подробнее будет сказано ниже).

Настоящая статья написана под влиянием работ [15; 16] и имеет своей целью привлечь внимание исследователей к данной тематике, известным в ней результатам и некоторым открытым вопросам; при этом изложение ведется в бесконечномерных действительных векторных пространствах.

Исследования по данной тематике, начатые автором в семидесятые годы прошлого века, в значительной мере были стимулированы и неизменно поддерживались (тогда и позднее) Александром Борисовичем Куржанским, за что автор искренне ему благодарен.

1. Ступенчато-аффинные функции

Здесь и всюду далее X — вещественное векторное пространство, $\mathcal{A}(X)$ — векторное пространство, элементами которого являются аффинные функции, определенные на X . Ниже будем использовать то, что $\mathcal{A}(X) = L(X) \times \mathbb{R}$, где $L(X)$ — векторное пространство линейных функций на X . Если $f \in \mathcal{A}(X)$, то соответствующую ей пару из $L(X) \times \mathbb{R}$ будем обозначать через (l_f, α_f) , тогда $f : x \rightarrow l_f(x) + \alpha_f$.

Для любого семейства $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(X)$, совершенно (линейно) упорядоченного² некоторым отношением $\preceq_{\mathcal{F}}$, и любого $f \in \mathcal{F}$ определим множества

$$E_f := \{x \in X \mid \bar{f}(x) = 0 \text{ для всех } \bar{f} \in \mathcal{F} \text{ таких, что } \bar{f} \preceq_{\mathcal{F}} f, \bar{f} \neq f\}$$

и

$$\widehat{E}_f := \{x \in X \mid \bar{f}(x) = 0 \text{ для всех } \bar{f} \in \mathcal{F} \text{ таких, что } \bar{f} \preceq_{\mathcal{F}} f\};$$

если f является наименьшим (первым) элементом в \mathcal{F} , то положим $E_f = X$.

Нетрудно убедиться, что E_f и \widehat{E}_f являются аффинными многообразиями в X .

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(X)$ образует *кортеж аффинных функций* на X , если

- (а) \mathcal{F} совершенно упорядочено некоторым отношением $\preceq_{\mathcal{F}}$;
- (б) для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ соответствующее ей аффинное многообразие E_f является непустым и $f(E_f) = \mathbb{R}$;
- (в) для каждого $x \in X$ либо подсемейство $\mathcal{F}_x := \{f \in \mathcal{F} \mid f(x) \neq 0\}$ пусто, либо в \mathcal{F}_x существует наименьший (относительно $\preceq_{\mathcal{F}}$) элемент f_x .

Порядковый тип³ совершенно упорядоченного множества $(\mathcal{F}, \preceq_{\mathcal{F}})$ будем называть *рангом кортежа* \mathcal{F} .

Отметим, что для любого кортежа аффинных функций $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(X)$ условие (б) эквивалентно условию

(б') для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ существует точка $x \in X$ такая, что $f = f_x$ или, другими словами, каждая функция $f \in \mathcal{F}$ является наименьшим элементом подсемейства \mathcal{F}_x для некоторого $x \in X$.

Кортеж аффинных функций \mathcal{F} будем называть *кортежем линейных функций*, если каждая функция $f \in \mathcal{F}$ является фактически линейной.

Из свойства (б) кортежа \mathcal{F} следует, что $l_f \neq 0$ для любой функции $f \in \mathcal{F}$, т. е. кортеж аффинных функций не содержит константных функций, а кортеж линейных функций не содержит нулевую функцию.

Кортеж аффинных функций \mathcal{F} будем называть *регулярным (сингулярным)*, если аффинное подпространство

$$E_{\mathcal{F}} = \{x \in X \mid f(x) = 0 \text{ } f \in \mathcal{F}\}$$

является непустым (пустым).

²Бинарное отношение \preceq , определенное на множестве Z , называется отношением совершенного (или линейного) порядка, если оно является полным отношением частичного порядка.

³Говорят, что совершенно упорядоченные множества (U, \preceq_U) и (V, \preceq_V) имеют один и тот же порядковый тип, если между ними может быть установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок. Два совершенно упорядоченных множества, имеющих одинаковый порядковый тип, являются равномошными. Более того, два конечных совершенно упорядоченных множества имеют один и тот же порядковый тип, если и только если они равномошны, при этом их порядковый тип отождествляется с числом их элементов. Бесконечные совершенно упорядоченные множества могут быть равномошными и иметь различный порядковый тип. Например, множество натуральных чисел \mathbb{N} , множество целых чисел \mathbb{Z} и множество рациональных чисел \mathbb{Q} имеют одну и ту же мощность \aleph_0 и в то же время порядковые типы всех трех множеств различны.

Семейства линейных функций, удовлетворяющие условиям (а) и (в) впервые были введены и рассматривались В. Кли [17; 18] в связи с аналитическим представлением семипространств (максимальных выпуклых множеств, не содержащих заданную точку). Термин кортеж линейных функций для таких семейств был введен В. В. Гороховиком [7; 8]. Кортежи аффинных функций были впервые введены в [12; 13; 20]. Данное здесь определение кортежа аффинных функций отличается от определения, приведенного ранее в [12; 13], дополнительным условием (б), что позволяет избежать в дальнейшем необходимости выделять из всех кортежей несократимые кортежи.

Каждому кортежу аффинных функций \mathcal{F} поставим в соответствие семейство линейных функций

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}) := \{l \in L(X) \mid \text{существует } f \in \mathcal{F} \text{ такой, что } l = l_f\}.$$

Будем считать, что $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ упорядочено так же, как и \mathcal{F} , т. е. $l_{f_1} \preceq_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} l_{f_2} \iff f_1 \preceq_{\mathcal{F}} f_2$.

Покажем, что семейство $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ является кортежем линейных функций. Действительно, условие (а) из определения 1 выполнено, так как $(\mathcal{L}(\mathcal{F}), \preceq_{\mathcal{L}(\mathcal{F})})$ — совершенно упорядоченное семейство. Кроме того, векторное пространство E_{l_f} является параллельным непустому аффинному подпространству E_f и, следовательно, также является непустым, при этом $l_f(E_{l_f}) = f(E_f) = \mathbb{R}$. Это доказывает справедливость условия (б) для семейства $\mathcal{L}(\mathcal{F})$. Для доказательства условия (в) предположим, что $(\mathcal{L}(\mathcal{F}))_x \neq \emptyset$ для некоторого $x \in X$. Выберем произвольный $l_f \in (\mathcal{L}(\mathcal{F}))_x$. Поскольку для любого $a \in \tilde{E}_f$ имеем $l_{f'}(a) = -\alpha_{f'}$ для всех $f' \in \mathcal{F}$, $f' \preceq_{\mathcal{F}} f$, то $l_{f'}(x) = l_{f'}(x+a) - l_{f'}(a) = f'(x+a)$ для всех $f' \in \mathcal{F}$, $f' \preceq_{\mathcal{F}} f$. Значит, $f(x+a) = l_f(x) \neq 0$ и, следовательно, $\mathcal{F}_{x+a} \neq \emptyset$, причем $f \in \mathcal{F}_{x+a}$. Так как $f_{x+a} \preceq_{\mathcal{F}} f$, то $l_{f_{x+a}}(x) = f_{x+a}(x+a) \neq 0$, что влечет $l_{f_{x+a}} \in (\mathcal{L}(\mathcal{F}))_x$. Из равенства $l_{f'}(x) = f'(x+a)$ для $f' \preceq_{\mathcal{F}} f$ следует также, что $l_{f'}(x) = 0$ для всех $f' \preceq_{\mathcal{F}} f_{x+a}$, $f' \neq f_{x+a}$. Итак, $l_{f_{x+a}}$ является наименьшим элементом в $(\mathcal{L}(\mathcal{F}))_x$. Это завершает доказательство того, что $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ есть кортеж линейных функций.

Всюду ниже будем называть $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ *кортежем линейных функций, соответствующим кортежу аффинных функций \mathcal{F}* .

Из свойства (в) кортежа следует, что кортеж линейных функций, соответствующий любому кортежу аффинных функций, является линейно независимым семейством в векторном пространстве $L(X)$ и, следовательно, любой кортеж аффинных функций \mathcal{F} на конечномерном векторном пространстве конечен, причем число его элементов не превосходит коразмерности аффинного пространства $E_{\mathcal{F}}$.

Любое вполне упорядоченное линейно независимое семейство линейных функций является кортежем. В частности, любое конечное упорядоченное семейство линейных функций является кортежем в том и только том случае, когда оно линейно независимо.

О п р е д е л е н и е 2 [12; 13]. Вещественнозначную функцию $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *ступенчато-аффинной* (соответственно *ступенчато-линейной*), если существует кортеж аффинных функций (соответственно кортеж линейных функций) \mathcal{F} такой, что $u(x) = u_{\mathcal{F}}(x)$ для всех $x \in X$, где

$$u_{\mathcal{F}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{F}_x = \emptyset, \\ f_x(x), & \text{если } \mathcal{F}_x \neq \emptyset. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ранг ступенчато-аффинной функции $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ будем считать равным рангу порождающего ее кортежа \mathcal{F} , т. е. такого кортежа \mathcal{F} , что $u = u_{\mathcal{F}}$.

Если кортеж аффинных функций $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ конечен, то соотношение (1.1) может быть записано следующим образом:

$$u_{\mathcal{F}}(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } f_1(x) \neq 0, \\ f_2(x), & \text{если } f_1(x) = 0, f_2(x) \neq 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ f_{m-1}(x), & \text{если } f_1(x) = \dots = f_{m-2}(x) = 0, f_{m-1}(x) \neq 0, \\ f_m(x), & \text{если } f_1(x) = \dots = f_{m-1}(x) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Любая ненулевая линейная функция является ступенчато-линейной, тогда как аффинная функция ступенчато-аффинна в том и только том случае, когда она не равна константе. Из однородности линейных функций следует, что каждая ступенчато-линейная функция также однородна.

Пусть $X = \mathbb{R}^n$. Так как пространство $L(\mathbb{R}^n)$ линейных функций, определенных на \mathbb{R}^n , изоморфно \mathbb{R}^n , то любой кортеж $\mathcal{F} = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ линейных функций из $L(\mathbb{R}^n)$ может быть отождествлен с упорядоченным линейно независимым семейством векторов $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ из \mathbb{R}^n , которое будем называть *кортежем векторов* в \mathbb{R}^n . Если векторы, образующие кортеж Λ , взаимно ортогональны, то такой кортеж векторов Λ будем называть *ортогональным*.

Предложение 1. *Ненулевая функция $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является ступенчато-линейной тогда и только тогда, когда на \mathbb{R}^n существует единственным образом определенный ортогональный кортеж векторов $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}, 1 \leq k \leq n$, такой, что*

$$u_{\mathcal{F}}(x) = \begin{cases} \langle \lambda_1, x \rangle, & \text{если } \langle \lambda_1, x \rangle \neq 0, \\ \langle \lambda_2, x \rangle, & \text{если } \langle \lambda_1, x \rangle = 0, \langle \lambda_2, x \rangle \neq 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \langle \lambda_{m-1}, x \rangle, & \text{если } \langle \lambda_1, x \rangle = \dots = \langle \lambda_{m-2}, x \rangle = 0, \langle \lambda_{m-1}, x \rangle \neq 0, \\ \langle \lambda_m, x \rangle, & \text{если } \langle \lambda_1, x \rangle = \dots = \langle \lambda_{m-1}, x \rangle = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

О п р е д е л е н и е 2. Ступенчато-аффинную функцию $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *регулярной* (соответственно *сингулярной*), если кортеж, который порождает ее является регулярным (соответственно сингулярным).

Заметим, что любая сингулярная ступенчато-аффинная функция отлична от нуля на всем пространстве X . Из этого следует, что любая ступенчато-линейная функция, рассматриваемая как ступенчато-аффинная, является регулярной. Более того, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Ступенчато-аффинная функция $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ является регулярной тогда и только тогда, когда существуют ступенчато-линейная функция $c : X \rightarrow \mathbb{R}$ и точка $a \in X$ такие, что*

$$u(x) = c(x - a) \text{ для всех } x \in X.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ — регулярная ступенчато-аффинная функция и пусть \mathcal{F} — кортеж аффинных функций, порождающий u . Тогда аффинное многообразие $E_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, при этом для каждого $a \in E_{\mathcal{F}}$ и для каждого $f \in \mathcal{F}$ выполняется равенство $f(a) = l_f(a) + \alpha_f = 0$. Из этого следует, что $f(x) = l_f(x) + \alpha_f = l_f(x - a)$ для всех $x \in X$ и для всех $f \in \mathcal{F}$. Значит, $(\mathcal{L}(\mathcal{F}))_{x-a} = \{l_f \in L(X) \mid f \in \mathcal{F}_x\}$ и, следовательно, $u_{\mathcal{F}}(x) = u_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}(x - a)$ для всех $x \in X$.

Обратное утверждение следует из того, что для любого кортежа линейных функций \mathcal{L} и любой точки $a \in X$ семейство $\mathcal{F} = \{x \rightarrow l(x - a) \mid l \in \mathcal{L}\}$ является регулярным кортежем аффинных функций. \square

2. Полупространства

Подмножество H действительного векторного пространства X называется *полупространством* в X , если H и его дополнение $X \setminus H$ являются выпуклыми подмножествами в X . Выпуклые конусы, дополнения к которым также являются выпуклыми конусами, называются *коническими полупространствами*.

Непосредственно из определения следует, что дополнение любого полупространства также является полупространством. В частности, пустое множество \emptyset и все пространство X являются взаимно дополняющими друг друга несобственными полупространствами. Полупространства, отличные от пустого множества и всего пространства X , будем называть *собственными*.

Наиболее широко распространенную пару взаимно дополняющих собственных полупространств образуют подмножества

$$H_{<}(l, \alpha) := \{x \in X \mid l(x) < \alpha\} \text{ и } H_{\geq}(l, \alpha) := \{x \in X \mid l(x) \geq \alpha\},$$

где $l : X \mapsto \mathbb{R}$ ($l \neq 0$) — ненулевой линейный функционал на X , а $\alpha \in \mathbb{R}$ — вещественное число.

Другой известный пример взаимно дополняющих собственных полупространств задается семипространством и его дополнением.

Напомним, что подмножество $S \subset X$ называется *семипространством, порожденным точкой* $a \in X$ (или просто *семипространством в точке* $a \in X$), если S является максимальным выпуклым множеством, не содержащим точку a .

Семипространства были введены П.К. Хаммером [21]. Им было показано, что совокупность всех семипространств образует наименьшую базу выпуклости в X (каждое выпуклое множество из X есть пересечение некоторого семейства семипространств). В. Кли [17; 18] изучил геометрическую структуру семипространств и использовал полученные при этом результаты для аналитического представления и классификации семипространств. М. Лассак и А. Прушински [22; 23] распространили класс семипространств, порожденных точками, до класса обобщенных семипространств, порожденных аффинными многообразиями. В частности, введенное выше полупространство $H_{<}(l, \alpha)$ является обобщенным семипространством, порожденным гиперплоскостью $H_{=}(l, \alpha) := \{x \in X \mid l(x) = \alpha\}$.

Ниже, говоря о полупространствах, будем иметь в виду собственные полупространства.

В конечномерных векторных пространствах геометрическая структура и аналитическое представление полупространств были исследованы в работах [6; 9; 19; 20]. Наиболее исчерпывающее исследование конечномерных полупространств было проведено Х.-Э. Мартинец-Легазом и И. Зингером [6; 24]. В частности, ими была осуществлена классификация конечномерных полупространств, основанная на их аналитическом представлении, при этом каждый класс полупространств характеризуется двумя инвариантами — типом $\tau(H)$ и рангом $r(H)$ полупространства H .

Теорема 1 [6; 24]. *Пусть X — конечномерное векторное пространство. Собственное подмножество $H \subset X$ является полупространством в X тогда и только тогда, когда найдутся натуральное число $m \in \{1, 2, \dots, \dim X\}$, сюръективный линейный оператор $A : X \mapsto \mathbb{R}^m$ и вектор $\alpha := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \in \mathbb{R}^m$ такие, что либо*

$$H = \{x \in X \mid Ax <_L \alpha\}, \tag{2.1}$$

либо

$$H = \{x \in X \mid Ax \leq_L \alpha\}. \tag{2.2}$$

Здесь $<_L$ и \leq_L обозначают соответственно отношение строгого лексикографического порядка и отношение лексикографического порядка на \mathbb{R}^m .

Напомним, что для любых $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ и $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ соотношения $u <_L v$ и $u \leq_L v$ определяются следующим образом:

$$u <_L v \iff u \neq v \text{ и } u_k < v_k \text{ для } k = \min\{i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid u_i \neq v_i\},$$

$$u \leq_L v \iff u = v \text{ или } u <_L v.$$

В классификации Мартинец-Легаза и Зингера тип $\tau(H)$ полупространства H отождествляется с типом неравенства в аналитическом представлении, заданном либо (2.1), либо (2.2), т. е. $\tau(H) \in \{<_L, \leq_L\}$, а ранг $r(H)$ принимается равным рангу линейного оператора $A : X \mapsto \mathbb{R}^m$, т. е. $r(H) = m$. Согласно классификации Х.-Э. Мартинец-Легаза и И. Зингера два полупространства H_1 и H_2 принадлежат одному и тому же классу, если $\tau(H_1) = \tau(H_2)$ и $r(H_1) = r(H_2)$, т. е. если они имеют один и тот же тип и ранг.

В работах [10–13] понятие типа и ранга было распространено на бесконечномерные полупространства.

Понятие типа полупространства основано на следующей порядковой характеристике полупространств.

Предложение 3 [10; 13]. *Подмножество H векторного пространства X является полупространством в том и только том случае, когда пара подмножеств $(X \setminus H, H)$ образует сечение пространства X относительно полного отношения предпорядка \preceq_H , определенного на X условием*

$$x \preceq_H y \iff y - x \in 0^+H,$$

где $0^+H := \{h \in X \mid x + th \in H \text{ для всех } x \in H \text{ и } t \geq 0\}$ — рецессивный конус множества H .

Нетрудно убедиться, что подмножество $H \subset X$ является полупространством в X в том и только том случае, когда его рецессивный конус 0^+H является коническим полупространством в X . Так как 0^+H — выпуклый конус, то \preceq_H является отношением предпорядка⁴ на X , согласованным с алгебраическими операциями пространства X , а из того, что $X = 0^+H \cup (-0^+H)$, следует, что отношение \preceq_H является полным.

В [10; 13] тип полупространства $H \subset X$ отождествляется с типом порождаемого им сечения $(X \setminus H, H)$ пространства X по отношению \preceq_H .

Напомним, что под сечением (A, B) множества V , упорядоченного полным отношением предпорядка \preceq , понимается такое разбиение V на два непересекающиеся подмножества A и B , что $u \preceq v, v \not\preceq u$ для любых $u \in A$ и $v \in B$. Подмножество A называется нижним классом сечения (A, B) , а подмножество B — верхним классом.

Известно (см., например, [25]), что в множествах, упорядоченных полным отношением предпорядка, могут существовать четыре типа сечений: скачок (в нижнем классе сечения есть наибольший элемент, а в верхнем классе есть наименьший), нижнее дедекиндово сечение (в нижнем классе сечения есть наибольший элемент, а в верхнем классе нет наименьшего элемента), верхнее дедекиндово сечение (в нижнем классе сечения нет наибольшего элемента, а в верхнем классе есть наименьший элемент) и щель (в нижнем классе сечения нет наибольшего элемента, а в верхнем классе нет наименьшего элемента).

В [10; 13] показано, что среди сечений $(X \setminus H, H)$ векторного пространства X , порожденных полупространствами H , а) не существует скачков; б) в любом векторном пространстве существуют верхние и нижние дедекиндовы сечения; в) в конечномерных векторных пространствах не существует сечений-щелей; г) в каждом бесконечномерном векторном пространстве существуют полупространства, порождающие сечения-щели.

Полупространства, порождающие верхнее (соответственно нижнее) дедекиндово сечение, названы заостренными (соответственно незаостренными) дедекиндовыми полупространствами, а полупространства, порождающие сечения-щели, — недедекиндовыми полупространствами.

Таким образом, в каждом бесконечномерном векторном пространстве существуют три типа полупространств: два (заостренное и незаостренное) дедекиндовы и одно недедекиндово.

⁴Говорят, что отношение предпорядка (рефлексивное и транзитивное бинарное отношение) \preceq , заданное на векторном пространстве X , согласовано с алгебраическими операциями пространства X , если

$$x \preceq y \implies x + z \preceq y + z \quad \forall x, y, z \in X$$

и

$$x \preceq y \implies \lambda x \preceq \lambda y \quad \forall x, y \in X, \lambda > 0.$$

Если \preceq — согласованное отношение предпорядка, то

$$x \preceq y \iff y - x \in P_{\preceq},$$

где $P_{\preceq} := \{x \in X \mid 0 \preceq x\}$ — (выпуклый) конус положительных элементов отношения \preceq .

В то же время в конечномерных векторных пространствах существуют только два типа полупространств: заостренное и незаостренное дедекиндовы. В классификации конечномерных полупространств, принадлежащей Х.-Э. Мартинец-Легазу и И. Зингеру, заостренным дедеккиндовым полупространствам соответствует тип \leq_L , а незаостренным дедеккиндовым полупространствам — тип $<_L$. Если H — заостренное (незаостренное) дедеккиндово полупространство, то его дополнение $X \setminus H$ является незаостренным (заостренным) дедеккиндовым, если же H — недедеккиндово полупространство, то $X \setminus H$ также недедеккиндово полупространство. Любое коническое полупространство является заостренным или незаостренным дедеккиндовым полупространством. Алгебраически замкнутое полупространство является заостренным дедеккиндовым, а алгебраически открытое полупространство — незаостренным дедеккиндовым. Семейство всех незаостренных дедеккиндовых полупространств совпадает с семейством обобщенных семипространств.

Перейдем к определению ранга бесконечномерных полупространств. Для этого воспользуемся тем, что, как это показано в [12; 13], любое (конечномерное или бесконечномерное) полупространство может быть задано аналитически при помощи ступенчато-аффинных функций. Если быть более точным, то справедливы следующие утверждения.

Предложение 4. Пусть H — собственное подмножество векторного пространства X .

а) H является заостренным дедеккиндовым полупространством в X тогда и только тогда, когда существует регулярная ступенчато-аффинная функция $u_H : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$H = \{x \in X \mid u_H(x) \leq 0\};$$

б) H является незаостренным дедеккиндовым полупространством в X тогда и только тогда, когда существует регулярная ступенчато-аффинная функция $u_H : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$H = \{x \in X \mid u_H(x) < 0\};$$

в) H является недедеккиндовым полупространством в X тогда и только тогда, когда существует сингулярная ступенчато-аффинная функция $u_H : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$H = \{x \in X \mid u_H(x) \leq 0\} = \{x \in X \mid u_H(x) < 0\};$$

г) H является коническим заостренным (незаостренным) дедеккиндовым полупространством в X тогда и только тогда, когда существует ступенчато-линейная функция $w_H : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$H = \{x \in X \mid w_H(x) \leq 0\}$$

$$(H = \{x \in X \mid w_H(x) < 0\}).$$

Равенство двух представлений $H = \{x \in X \mid u_H(x) < 0\}$ и $H = \{x \in X \mid u_H(x) \leq 0\}$ для недедеккиндовых полупространств обусловлено тем, что сингулярные ступенчато-аффинные функции отличны от нуля на всем пространстве X .

Как гиперплоскость может быть задана различными аффинными функциями, так и каждое полупространство H может быть задано аналитически различными ступенчато-аффинными функциями $u_H : X \rightarrow \mathbb{R}$. Общим для всех ступенчато-аффинных функций, задающих аналитическое представление одного и того же полупространства H , является то, что они имеют один и тот же ранг. Это свойство приводит к следующему определению ранга полупространства.

Ранг полупространства H отождествляется с рангом ступенчато-аффинной функции $u_H : X \rightarrow \mathbb{R}$, задающей аналитическое представление H .

Нетрудно видеть, что ранг алгебраически замкнутых и алгебраически открытых полупространств равен единице.

В конечномерных пространствах приведенное выше определение ранга полупространства совпадает с определением ранга, данным в работах Х.-Э. Мартинец-Легаза и И. Зингера [6; 24].

Будем говорить, что два *полупространства* H_1 и H_2 *принадлежат одному классу*, если они имеют один и тот же тип и их ранги равны.

Поскольку ступенчато-аффинные функции u и $-u$ имеют один и тот же ранг, то ранги полупространства H и дополняющего его полупространства $X \setminus H$ также равны. Если H — дедекиндово полупространство, то H и $X \setminus H$ имеют различный тип и, следовательно, принадлежат различным классам, хотя имеют один и тот же ранг. Если же полупространство H недедекиндово, то H и $X \setminus H$ принадлежат одному классу, поскольку имеют один и тот же тип и равные ранги.

З а м е ч а н и е 1. Согласованное отношение предпорядка \preceq , определенное на векторном пространстве X , является полным в том и только том случае, когда соответствующий ему конус положительных элементов P_{\preceq} есть заостренное коническое полупространство. Для согласованных отношений совершенного порядка и только для них конус P_{\preceq} удовлетворяет, кроме того, дополнительному условию $P_{\preceq} \cap (-P_{\preceq}) = \{0\}$. Характеризуя геометрическое строение конусов положительных элементов P_{\preceq} , соответствующих согласованным отношениям совершенного порядка \preceq , определенным в сепарабельном гильбертовом пространстве, авторы работы [16] ошибочно полагают, что любой такой конус имеет непустую внутренность. На самом деле это верно лишь для весьма частного вида таких конусов, наряду с которыми в сепарабельном гильбертовом пространстве существуют такие заостренные конические полупространства P_{\preceq} со свойством $P_{\preceq} \cap (-P_{\preceq}) = \{0\}$, ранг которых равен порядковому типу любого счетного совершенно упорядоченного множества, в частности существуют полупространства, ранг которых равен порядковому типу множества целых чисел. Естественно, что ошибочное исходное положение приводит авторов работы [16] к ошибочным выводам о геометрическом строении всего семейства конусов положительных элементов, соответствующих согласованным отношениям совершенного порядка, определенным на сепарабельном гильбертовом пространстве (см. теорему 3.5 из [16]).

3. Аналитические критерии отделимости выпуклых множеств

Основная цель настоящего раздела — получить эквивалентные теореме Какутани — Тьюки аналитические критерии непересекаемости выпуклых множеств, используя при этом в качестве аналитических средств, отделяющих непересекающиеся множества друг от друга, ступенчато-аффинные и ступенчато-линейные функции.

Начнем со следующего критерия отделимости выпуклых множеств полными согласованными отношениями предпорядка.

Теорема 2. *Для того чтобы выпуклые множества A и B вещественного векторного пространства X не пересекались, необходимо и достаточно, чтобы на X существовало полное согласованное отношение предпорядка \preceq такое, что*

$$y \prec x \text{ для всех } x \in A \text{ и всех } y \in B.$$

Здесь \prec — асимметричная часть \preceq , т.е.

$$y \prec x \iff y \preceq x, x \not\preceq y.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность* следует из асимметричности отношения \prec .

Необходимость. Предположим, что $A \cap B = \emptyset$. По теореме Какутани — Тьюки существует полупространство $H \subset X$ такое, что $A \subset H$ и $B \subset X \setminus H$. Воспользуемся далее предложением 3, согласно которому подмножество $H \subset X$ является полупространством в X тогда и только тогда, когда пара $(X \setminus H, H)$ является сечением пространства X относительно полного

согласованного отношения предпорядка \preceq_H . Из определения сечения получаем, что $y \prec_H x$ для всех $x \in H$ и всех $y \in X \setminus H$, а поскольку $A \subset H$ и $B \subset X \setminus H$, то $y \prec_H x$ для всех $x \in A$ и $y \in B$. \square

Далее нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 5. *Согласованное отношение предпорядка \preceq , определенное на X , является полным тогда и только тогда, когда существует ступенчато-линейная функция $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что*

$$x \preceq y \iff y - x \in P_{\preceq} \iff w(y - x) \geq 0.$$

Доказательство. Как уже указывалось в замечании 1, согласованное отношение предпорядка \preceq , определенное на X , является полным тогда и только тогда, когда соответствующий ему конус положительных элементов P_{\preceq} является коническим заостренным дедикиндовым полупространством. В силу предложения 4 для P_{\preceq} в этом случае существует ступенчато-линейная функция $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $P_{\preceq} = \{z \in X \mid w(z) \geq 0\}$. Следовательно,

$$x \preceq y \iff y - x \in P_{\preceq} \iff w(y - x) \geq 0. \quad \square$$

Используя предложение 4, получим в качестве следствия порядкового критерия из теоремы 2 критерий отделимости выпуклых множеств ступенчато-линейными функциями.

Теорема 3. *Для того чтобы выпуклые множества A и B вещественного векторного пространства X не пересекались, необходимо и достаточно, чтобы существовала ступенчато-линейная функция $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что*

$$w(x - y) > 0 \text{ для всех } x \in A \text{ и всех } y \in B.$$

Покажем далее, что для случая, когда множества A и B являются выпуклыми конусами в X , теорема 3 может быть несколько уточнена и приведена к более удобной для приложений форме, поскольку условия, которым в них подчинены отделяемые множества, в ней разделены.

Заметим, что если два выпуклых конуса не пересекаются, то, по крайней мере, один из них не содержит нулевой точки и, следовательно, является асимметричным. Поэтому предположение об асимметричности одного из конусов в условиях следующей теоремы не ограничивает на самом деле общности рассматриваемой ситуации.

Теорема 4. *Пусть K_1 и K_2 — выпуклые конусы в векторном пространстве X , причем конус K_1 асимметричен. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- а) $K_1 \cap K_2 = \emptyset$;
- б) существует коническое заостренное полупространство H такое, что $K_1 \cap H = \emptyset$, $K_2 \subset H$;
- в) существует ступенчато-линейная функция $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$w(x) > 0 \text{ для всех } x \in K_1, \quad w(x) \leq 0 \text{ для всех } x \in K_2.$$

Доказательство. Докажем последовательно импликации а) \Rightarrow б) \Rightarrow в) \Rightarrow а). Обозначим символом $\mathcal{C}(K_1)$ семейство, состоящее из таких выпуклых конусов $K \subset X$, которые не пересекаются с K_1 . Нетрудно убедиться, что семейство $\mathcal{C}(K_1)$ индуктивно упорядочено отношением включения. Следовательно, в силу леммы Цорна (см., например, [26, с. 40]) семейство $\mathcal{C}(K_1)$ обладает максимальными элементами, причем для любого $K \in \mathcal{C}(K_1)$ в $\mathcal{C}(K_1)$ существует максимальный выпуклый конус, содержащий K . Так как $K_2 \in \mathcal{C}(K_1)$, то для него тоже можно указать максимальный выпуклый конус $C \in \mathcal{C}(K_1)$ такой, что $K_2 \subset C$. Из условия $0 \notin K_1$ и максимальной C следует, что $0 \in C$. Поскольку $K_1 \cap C = \emptyset$, то по теореме Какутани — Тьюки в X существует полупространство H такое, что $C \subset H$ и $K_1 \subset X \setminus H$. Рассмотрим

коническую оболочку полупространства H , которую обозначим через $\text{cone } H$. Из выпуклости H следует, что $\text{cone } H$ есть выпуклый конус, причем $C \subset H \subset \text{cone } H$. Условие $K_1 \cap H = \emptyset$ влечет за собой (поскольку K_1 — асимметричный конус) соотношение $K_1 \cap \text{cone } H = \emptyset$ и, следовательно, $\text{cone } H \in \mathcal{C}(K_1)$. В силу максимальности C заключаем, что $C = H = \text{cone } H$. Таким образом, C — заостренное коническое полупространство, удовлетворяющее условию б). Импликация а) \Rightarrow б) доказана.

Чтобы доказать б) \Rightarrow в), достаточно воспользоваться утверждением г) предложения 4 и тем, что $0 \in H$.

Так как импликация в) \Rightarrow а) очевидна, то теорема доказана полностью. \square

Сформулируем и докажем наконец общую теорему об отделимости выпуклых множеств ступенчато-аффинными функциями.

Теорема 5. *Для того чтобы выпуклые подмножества A и B вещественного векторного пространства X не пересекались, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая ступенчато-аффинная функция $u : X \rightarrow \mathbb{R}$, что либо*

$$u(x) > 0 \text{ для всех } x \in A, \quad u(y) \leq 0 \text{ для всех } y \in B, \quad (3.1)$$

либо

$$u(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in A, \quad u(y) < 0 \text{ для всех } y \in B. \quad (3.2)$$

Доказательство. Необходимость. В силу теоремы Какутани — Тьюки, сформулированной во введении, выпуклые множества A и B не пересекаются в том и только том случае, когда в X существует полупространство H такое, что $A \subset H$ и $B \subset X \setminus H$. Из утверждений предложения 4 следует существование такой ступенчато-аффинной функции $u : X \rightarrow \mathbb{R}$, что либо $H = \{x \in X \mid u(x) > 0\}$, либо $H = \{x \in X \mid u(x) \geq 0\}$.

Так как $A \subset H$, а $B \subset X \setminus H$, то легко видеть, что функция $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет либо условию (3.1), либо условию (3.2).

Достаточность. То, что из каждого условия (3.1) и (3.2) следует пустота пересечения множеств A и B , проверяется непосредственно. \square

4. Критерий оптимальности решений в выпуклой задаче векторной оптимизации

В наиболее общем виде задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом.

Пусть заданы некоторое множество Q и отношение предпорядка \preceq , определенное на Q .

Точка $x^0 \in Q$ называется \preceq -минимальной в Q (минимальной в Q относительно \preceq), если в Q не существует точки $\bar{x} \in Q$ такой, что $\bar{x} \prec x^0$ (здесь $y \prec x \iff y \preceq x, x \not\preceq y$).

Множество \preceq -минимальных точек множества Q будем обозначать символом $\text{Min}(Q \mid \preceq)$.

Задача оптимизации, определенная парой (Q, \preceq) , состоит в нахождении для заданного множества Q и определенного на нем отношения предпорядка \preceq множества \preceq -минимальных элементов $\text{Min}(Q \mid \preceq)$.

Множество Q называется при этом *множеством допустимых решений* задачи оптимизации, отношение \preceq — *отношением предпочтения*, а $\text{Min}(Q \mid \preceq)$ — *множеством оптимальных решений*.

Если отношение предпочтения \preceq обладает функцией полезности, т. е. если существует вещественнозначная функция $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$x \preceq y \iff f(x) \leq f(y) \text{ для любых } x, y \in Q,$$

то $x^0 \in \text{Min}(Q \mid \preceq)$ тогда и только тогда, когда

$$f(x^0) = \min_{x \in Q} f(x).$$

В этом случае задача оптимизации приобретает классический вид и заключается в минимизации на Q вещественнозначной функции f .

Задача оптимизации (Q, \preceq) называется *задачей векторной оптимизации*, если множество Q — подмножество некоторого векторного пространства X , а отношение предпочтения \preceq определено на всем X и является согласованным с алгебраическими операциями.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 6. *Для того чтобы $x^0 \in Q$ было оптимальным решением в задаче векторной оптимизации (Q, \preceq) , необходимо и достаточно, чтобы*

$$(Q - \{x^0\}) \cap (-P_{\prec}) = \emptyset, \quad (4.1)$$

где $P_{\prec} := \{x \in X \mid 0 \prec x\}$ — конус строго положительных векторов отношения \preceq .

Задача векторной оптимизации (Q, \preceq) называется *выпуклой*, если выпуклым является множество $\widehat{Q} := \{x \in X \mid \exists y \in Q : y \preceq x\}$.

Говорят, что однородная функция $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ является *сильно \preceq -положительной*, если

$$\varphi(x) > 0 \text{ для всех } x \in X \text{ таких, что } 0 \prec x \text{ и } \varphi(x) = 0 \text{ для всех } x \in X \text{ таких, что } x \sim 0,$$

где $x \sim 0 \iff 0 \preceq x, x \preceq 0$.

Теорема 6. *Для того чтобы x^0 было оптимальным решением выпуклой задачи векторной оптимизации (Q, \preceq) , необходимо и достаточно, чтобы существовала сильно \preceq -положительная ступенчато-линейная функция $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что*

$$w(x - x^0) \geq 0 \text{ для всех } x \in Q. \quad (4.2)$$

Доказательство. *Необходимость.* Прежде всего отметим, что для выпуклых задач векторной оптимизации критерий минимальности (4.1) эквивалентен условию

$$\text{cone}(\widehat{Q} - \{x^0\}) \cap (-P_{\prec}) = \emptyset, \quad (4.3)$$

где $\text{cone}(\widehat{Q} - \{x^0\})$ — коническая оболочка множества $\widehat{Q} - \{x^0\}$. Так как множество \widehat{Q} выпукло, то $\text{cone}(\widehat{Q} - \{x^0\})$ — выпуклый конус. Поскольку P_{\prec} — асимметричный выпуклый конус, то, применяя теорему 4, получим, что условие (4.3) равносильно существованию ступенчато-линейной функции $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$w(x) < 0 \text{ для всех } x \in -P_{\prec} \quad (4.4)$$

и

$$w(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in \text{cone}(\widehat{Q} - \{x^0\}). \quad (4.5)$$

Поскольку $0 \in Q - \{x^0\}$, то $P_{\preceq} := \{x \in X \mid 0 \preceq x\} \subset \text{cone}(\widehat{Q} - \{x^0\})$. Поэтому из (4.5) имеем

$$w(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in P_{\preceq}. \quad (4.6)$$

Условия (4.4) и (4.6) показывают, что ступенчато-линейная функция $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ сильно \preceq -положительна; кроме того, из условия (4.5) следует (4.2). Необходимость доказана.

Достаточность. Любая сильно \preceq -положительная ступенчато-линейная функция $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (4.4) и (4.6), а условия (4.6) и (4.2) влекут за собой (4.5). Следовательно, при выполнении условий достаточной части теоремы имеют место неравенства (4.4) и (4.5), равносильные (4.3), а (4.3) в свою очередь эквивалентно (4.1). \square

Кортеж линейных функций $\mathcal{F} \subset L(X)$ назовем *сильно \preceq -положительным*, если соответствующая ему ступенчато-линейная функция $w_{\mathcal{F}}$ является сильно \preceq -положительной.

Предложение 7. Допустимое решение $x^0 \in \Omega$ является оптимальным в задаче (ВП) тогда и только тогда, когда вектор $F(x^0)$ является \preceq_{x^0} -минимальным в множестве $F(\Omega) = \{y \in \mathbb{R}^{1+m} \mid y = F(x), x \in \Omega\}$, где \preceq_{x^0} — согласованное отношение предпорядка на \mathbb{R}^{1+m} , конус положительных векторов которого есть

$$P_{\preceq}(x^0) := \{y \in \mathbb{R}^{1+m} \mid y_0 > 0, y_i \geq 0, i \in I_a(x^0)\} \cup E(x^0).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $x^0 \in \Omega$ — оптимальное решение задачи (ВП). Предположим вопреки утверждению предложения, что существует вектор $\bar{x} \in \Omega$ такой, что $F(\bar{x}) \prec_{x^0} F(x^0)$. Исходя из определений отношения \preceq_{x^0} и множества $I_a(x^0)$, получаем, что

$$f_0(\bar{x}) < f_0(x^0), \quad f_i(\bar{x}) \leq 0, \quad i \in I_a(x^0). \quad (5.1)$$

Рассмотрим вектор $x_\alpha = x^0 + \alpha(\bar{x} - x^0)$. В силу выпуклости множества Q и функций $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, имеем $x_\alpha \in Q$ и $f_i(x_\alpha) = f_i(\alpha\bar{x} + (1 - \alpha)x^0) \leq \alpha f_i(\bar{x}) + (1 - \alpha)f_i(x^0) = f_i(x^0) + \alpha(f_i(\bar{x}) - f_i(x^0))$ для всех $\alpha \in [0, 1]$ и всех $i = 0, \dots, m$. Учитывая неравенства (5.1), из предыдущих неравенств получаем

$$f_0(x_\alpha) < f_0(x^0), \quad f_i(x_\alpha) \leq 0, \quad i \in I_a(x^0) \text{ для всех } \alpha \in (0, 1]. \quad (5.2)$$

Кроме того, так как $f_i(x^0) < 0$ для всех $i \in I \setminus I_a(x^0)$, то существует число $\alpha_0 \in (0, 1]$ такое, что $f_i(x_\alpha) \leq f_i(x^0) + \alpha(f_i(\bar{x}) - f_i(x^0)) \leq 0$ для всех $i \in I \setminus I_a(x^0)$ и всех $\alpha \in [0, \alpha_0)$. Объединив последние неравенства с (5.2), имеем

$$f_0(x_\alpha) < f_0(x^0), \quad f_i(x_\alpha) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x_\alpha \in Q \text{ для всех } \alpha \in (0, \alpha_0).$$

Это, однако, противоречит оптимальности x^0 в задаче (ВП). Необходимость доказана.

Достаточность. Условие \preceq_{x^0} -минимальности вектора $F(x^0)$ в $F(\Omega)$ эквивалентно несовместности относительно x системы неравенств

$$f_0(x) < f_0(x^0), \quad f_i(x) \leq f_i(x^0) = 0, \quad i \in I_a(x^0), \quad x \in Q.$$

Тем более несовместна относительно x система неравенств

$$f_0(x) < f_0(x^0), \quad f_i(x) \leq 0, \quad i \in I, \quad x \in Q,$$

что эквивалентно условию

$$f_0(x) \geq f_0(x^0) \text{ для всех } x \in Q.$$

Следовательно, x^0 — оптимальное решение (ВП). □

Теорема 7. Допустимое решение $x^0 \in \Omega$ является оптимальным решением задачи (ВП) тогда и только тогда, когда существуют вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ и упорядоченное разбиение $\{I_1, I_2, \dots, I_k\}$, $1 \leq k \leq |I_a(x^0)| + 1$ множества индексов $I = \{1, 2, \dots, m\}$, удовлетворяющие

а) условию неотрицательности

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \dots, \quad \lambda_m \geq 0;$$

б) условию дополняющей нежесткости

$$\lambda_i f_i(x^0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

в) условиям минимума

$$\sum_{i \in I_s} \lambda_i f_i(x^0) = \min_{x \in Q_s} \sum_{i \in I_s} \lambda_i f_i(x), \quad s = 1, 2, \dots, k - 1, \quad (5.3)$$

$$f_0(x^0) + \sum_{i \in I_k} \lambda_i f_i(x^0) = \min_{x \in Q_k} \left(f_0(x) + \sum_{i \in I_k} \lambda_i f_i(x) \right), \quad (5.4)$$

где $Q_1 = Q$, $Q_{s+1} = \left\{ x \in Q_s \mid \sum_{i \in I_s} \lambda_i f_i(x) = \min_{z \in Q_s} \sum_{i \in I_s} \lambda_i f_i(z) \right\}$, $s = 1, 2, \dots, k - 1$.

Доказательство. В силу предложения 7 допустимое решение $x^0 \in \Omega$ оптимально в задаче (ВП) тогда и только тогда, когда вектор $F(x^0) \preceq_{x^0}$ -минимальный в множестве $F(\Omega) := \{y \in \mathbb{R}^{1+m} \mid y = F(x), x \in \Omega\}$. Используя выпуклость множества Q и функций $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, m$, нетрудно убедиться в том, что множество $\widehat{F}(Q) := \{z \in \mathbb{R}^{1+m} \mid \exists y \in F(Q) \text{ такой, что } y \preceq_{x^0} z\}$ также выпукло. Следовательно, задача векторной оптимизации $(F(Q), \preceq_{x^0})$ выпукла и к ней применим критерий минимальности, доказанный в теореме 1. Согласно этому критерию вектор $F(x^0)$ является \preceq_{x^0} -минимальным в множестве $F(Q)$ тогда и только тогда, когда существует сильно \preceq_{x^0} -положительная ступенчато-линейная функция $w : \mathbb{R}^{1+m} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$w(F(x) - F(x^0)) \geq 0 \text{ для всех } x \in Q. \quad (5.5)$$

Так как функция $w : \mathbb{R}^{1+m} \rightarrow \mathbb{R}$ является сильно \preceq_{x^0} -положительной, то $E(x^0) \subset E^0 := \{x \in X \mid w(x) = 0\}$ и, следовательно, $\text{codim} E^0 \leq \text{codim} E(x^0) = |I(x^0)| + 1$. Из этого замечания и предложения 1 следует, что в \mathbb{R}^{1+m} существует ортогональный сильно \preceq_{x^0} -положительный кортеж векторов $\Lambda = \{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(k)}\}$ ($1 \leq k \leq |I_a(x^0)| + 1$) такой, что ступенчато-линейная функция $w : \mathbb{R}^{1+m} \rightarrow \mathbb{R}$ представима с его помощью в виде (1.3). Используя это представление, нетрудно показать, что (5.5) эквивалентно условиям

$$(\lambda^{(i)}, F(x^0)) = \min_{x \in Q_i} (\lambda^{(i)}, F(x)), \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad (5.6)$$

где $Q_1 = Q, Q_{i+1} = \{x \in Q_i \mid (\lambda^{(i)}, F(x)) = \min_{z \in Q_i} (\lambda^{(i)}, F(z))\}, i = 1, 2, \dots, k-1$.

С учетом конкретного вида конуса $P_{\preceq(x^0)}$ и ортогональности кортежа $\Lambda = \{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(k)}\}$ непосредственно проверяется, что условие сильной \preceq_{x^0} -положительности кортежа Λ эквивалентно условиям

- 1) $\lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(2)} = \dots = \lambda_0^{(k-1)} = 0, \lambda_0^{(k)} > 0;$
- 2) существует разбиение $\{J_1, J_2, \dots, J_k\}$ множества индексов $I_a(x^0)$ такое, что

$$\lambda_i^{(s)} \geq 0, \quad i \in J_s, \quad \lambda_i^{(s)} = 0, \quad i \in I \setminus J_s; \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

Заметим, что число подмножеств в разбиении $\{J_1, J_2, \dots, J_k\}$ множества индексов $I_a(x^0)$ равно рангу ступенчато-линейной функции w , удовлетворяющей условию (5.5).

Нетрудно видеть, что семейство $\{I_1, I_2, \dots, I_k\}$, где $I_s = J_s$ для $s = 1, 2, \dots, k-1$ и $I_k = J_k \cup (I \setminus I_a(x^0))$, является разбиением множества индексов $I = \{1, 2, \dots, m\}$. Используя векторы кортежа $\Lambda = \{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(k)}\}$ образуем вектор $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \in \mathbb{R}^m$ такой, что $\lambda_i = \lambda_i^{(s)}$ для $i \in I_s, s = 1, 2, \dots, k-1$, и $\lambda_i = \lambda_i^{(k)}/\lambda_0^{(k)}$ для $i \in I_k$. Кортеж λ удовлетворяет указанным выше свойствам 1) и 2); отсюда следует, что вектор $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ удовлетворяет условиям а) и б) теоремы, а из условий (5.6) выводим выполнение условий минимума (5.3) и (5.4). Необходимость доказана.

Достаточность. Из условий а), б) и (5.3) следует, что множество допустимых точек $\Omega = \{x \in Q \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ принадлежит каждому $Q_s, s = 1, 2, \dots, k$, и, в частности, Ω принадлежит Q_k . Учитывая это, из условия (5.4) и условий а), б) получаем, что

$$f_0(x^0) \leq f_0(x) + \sum_{i \in I_k} \lambda_i f_i(x) \leq f_0(x)$$

для всех $x \in \Omega$, а это и означает оптимальность $x^0 \in \Omega$ в задаче (ВП). \square

З а м е ч а н и е 2. Если для задачи (ВП) выполняется условие регулярности Слейтера, что означает существование точки $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $f_i(\hat{x}) < 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$, то в доказательстве необходимой части теоремы 7 можно показать, что ранг ступенчато-линейной функции $w : \mathbb{R}^{1+m} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию (5.5), равен единице, т.е. фактически

$w(y) = l(y), y \in \mathbb{R}^{1+m}$, где l — линейная функция на \mathbb{R}^{1+m} . Поскольку число k подмножеств в разбиении множества индексов I на подмножества J_1, \dots, J_k равно рангу функции w , то при выполнении условий регулярности Слейтера разбиение в теореме 7 совпадает с самим I , при этом условия а)–в) совпадают с критерием Куна — Таккера. Таким образом, доказанный в теореме 7 критерий оптимальности решений задачи (ВП) является распространением критерия Куна — Таккера на нерегулярные по Слейтеру задачи.

Заключение

В работе представлены аналитические критерии непересекаемости выпуклых подмножеств вещественного векторного пространства, основанные на отделимости выпуклых множеств ступенчато-линейными и ступенчато-аффинными функциями. Данные критерии являются, по существу, аналитическими версиями критерия Какутани — Тьюки об отделимости выпуклых множеств полупространствами. Интерес к данным критериям обусловлен их приложениями к нерегулярным выпуклым задачам оптимизации, исследования которых невозможны при помощи классических теорем об отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями; некоторые из таких приложений представлены в работе.

Существует ряд открытых вопросов, связанных с отделимостью выпуклых множеств полупространствами или, эквивалентно, отделимостью ступенчато-аффинными функциями. В частности, неясно, при каких дополнительных условиях непересекающиеся выпуклые множества отделимы именно дедекиндовым (недедекиндовым) полупространством (эквивалентно, именно регулярной (сингулярной) ступенчато-аффинной функцией). Неизвестно также, как определить по непересекающимся выпуклым множествам отделяющее их полупространство наименьшего ранга и всегда ли существует такое полупространство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Райков Д.Ф. Векторные пространства. М.: Физматгиз, 1962. 212 с.
2. Klee V. Separation and support properties of convex sets. A survey // Control Theory and the Calculus of Variations /ed. A.V. Balakrishnan. N Y: Acad. Press, 1969. P. 235–303.
3. Kakutani S. Ein Beweis des Satzen von M. Eidelheit über konvexe Mengen // Proc. Imp. Acad. Tokio. 1938. Vol. 14. P. 93–94. doi: 10.3792/pia/1195579980.
4. Tukey J.W. Some notes on the separation of convex sets // Portugaliae Math. 1942. Vol. 3, no. 2. P. 95–102.
5. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962. 830 с.
6. Martinez-Legaz J.-E., Singer I. The structure of hemispaces in \mathbb{R}^n // Linear Algebra Appl. 1988. Vol. 110. P. 117–179. doi: 10.1016/0024-3795(83)90135-0.
7. Гороховик В.В. Минимальность и квазимиимальность в упорядоченных векторных пространствах // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 8. С. 685–688.
8. Гороховик В.В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и Техника, 1990. 240 с.
9. Гороховик В.В., Семенкова Е.А. Ступенчато-линейные функции в конечномерных векторных пространствах. Определение, свойства и их связь с полупространствами // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41, № 5. С. 10–14.
10. Гороховик В.В., Семенкова Е.А. Классификация полупространств по типам в бесконечномерных векторных пространствах // Мат. заметки. 1998. Т. 64, вып. 2. С. 191–198.
11. Гороховик В.В., Шинкевич Е.А. Теоремы об отделимости выпуклых множеств ступенчато-линейными функциями и их приложения к выпуклым задачам оптимизации // Нелинейный анализ и приложения / Национальная Академия наук Беларуси. Труды Института математики. 1998. Т. 1. С. 58–85.

12. **Гороховик В.В., Шинкевич Е.А.** Аналитическое представление бесконечномерных полупространств ступенчато-аффинными функциями // Нелинейный анализ и смежные вопросы / Национальная Академия наук Беларуси. Труды Института математики. 1999. Т. 2. С. 63–72.
13. **Gorokhovich V.V., Shinkevich E.A.** Geometric structure and classification of infinite-dimensional halfspaces // Algebraic Analysis and Related Topics. Banach Center Publications. Vol. 53. Warsaw: Institute of Mathematics PAN, 2000. P. 121–138.
14. **Martinez-Legaz J.-E., Vicente-Perez J.** Lexicographical representation of convex sets // J. Convex Analysis. 2012. Vol. 19, no. 2. P. 485–496.
15. **Küçük M., Soyertem M., Küçük Ya.** On constructing total orders and solving vector optimization problems with total orders // J. Global Optim. 2011. Vol. 50, no. 2. P. 235–247.
doi: 10.1007/s10898-010-9576-y.
16. **Küçük M., Soyertem M., Küçük Ya.** The generalization of total ordering cones and vectorization to separable Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 389, no. 2. P. 1344–1351.
doi: 10.1016/j.jmaa.2012.01.017.
17. **Klee V.** The structure of semispaces // Math. Scand. 1956. Vol. 4. P. 54–64.
doi: 10.7146/math.scand.a-10455.
18. **Klee V.** Maximal separation theorems for convex sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 134, no. 1. P. 133–147. doi: 10.1090/S0002-9947-1968-0235457-9.
19. **Лейхтвейс К.М.** Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 336 с.
20. **Семенкова Е.А.** Об аналитическом представлении полупространств в конечномерных векторных пространствах // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1996. № 2. С. 35–40.
21. **Hammer P.C.** Maximal convex sets // Duke Math. J. 1955. Vol. 22. P. 103–106.
doi: 10.1215/S0012-7094-55-02209-2.
22. **Lassak M.** Convex half-spaces // Fund. Math. 1984. Vol. 120, no. 1. P. 7–13.
doi: 10.4064/fm-120-1-7-13.
23. **Lassak M.A., Prószyński A.** Translate-inclusive sets, orderings and convex halfspaces // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1986. Vol. 34, no. 3–4. P. 195–201.
24. **Martinez-Legaz J.-E., Singer I.** Lexicographical separation in \mathbb{R}^n // Linear Algebra Appl. 1987. Vol. 90. P. 147–163. doi: 10.1016/0024-3795(87)90312-0.
25. **Александров П.С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
26. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.

Поступила 11.11.2019

После доработки 10.01.2020

Принята к публикации 14.01.2020

Гороховик Валентин Викентьевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

чл.-корр. НАН Беларуси

зав. отделом

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск

e-mail: gorokh@im.bas-net.by

REFERENCES

1. Raikov D.A. *Vector Spaces*. Groningen: Noordhoff, 1965, 190 p. Original Russian text published in Raikov D.A. *Vektornye prostranstva*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1962, 212 p.
2. Klee V. Separation and support properties of convex sets. A survey. In: *Control Theory and the Calculus of Variations*, A.V. Balakrishnan (ed), N Y: Acad. Press, 1969, pp. 235–303. ISBN: 0120769530.
3. Kakutani S. Ein Beweis des Satzen von M. Eidelheit über konvexe Mengen. *Proc. Imp. Acad. Tokio*, 1938, vol. 14, pp. 93–94. doi: 10.3792/pia/1195579980.
4. Tukey J.W. Some notes on the separation of convex sets. *Portugaliae Math.*, 1942, vol. 3, no. 2, pp. 95–102.

5. Hille E., Phillips R.S. *Functional analysis and semi-groups*. Coll. Publ., vol. 31, Providence: AMS, 1957, 810 p. ISBN: 0821810316. Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz i polugruppy*. Moscow: IL Publ., 1962, 830 p.
6. Martinez-Legaz J.-E., Singer I. The structure of hemispaces in \mathbb{R}^n . *Linear Algebra Appl.*, 1988, vol. 110, pp. 117–179. doi: 10.1016/0024-3795(83)90135-0.
7. Gorokhovik V.V. Minimality and quasiminimality in ordered vector spaces. *Dokl. Akad. Nauk BSSR*, 1981, vol. 25, no. 8, pp. 685–688 (in Russian).
8. Gorokhovik V.V. *Vypuklye i negladkie zadachi vektornoj optimizatsii* [Convex and nonsmooth problems of vector optimization]. Minsk: Navuka i Tekhnika Publ., 1990, 240 p. ISBN: 5-4343-00519-5.
9. Gorokhovik V.V., Semenkova E.A. Step-linear functions in finite-dimensional vector spaces. Definition, properties and their relation to half-spaces. *Dokl. Akad. Nauk Belarusi*, 1997, vol. 41, no. 5, pp. 10–14 (in Russian).
10. Gorokhovik V.V., Semenkova E.A. Classification of semispaces according to their types in infinite-dimensional vector spaces. *Math. Notes*, 1998, vol. 64, no. 2, pp. 164–169. doi: 10.1007/BF02310300.
11. Gorokhovik V.V., Shinkevich E.A. Theorems on the separation of convex sets by step-linear functions and their applications to convex optimization problems. In: *Nonlinear analysis and applications*, Tr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Belarusi, vol. 1. Minsk: Natl. Akad. Nauk Belarusi, 1998, pp. 58–85 (in Russian).
12. Gorokhovik V.V., Shinkevich E.A. Analytic representation of infinite-dimensional half-spaces by step-affine functions. In: *Nonlinear analysis and related problems*, Tr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Belarusi, vol. 2., Minsk: Natl. Akad. Nauk Belarusi, 1999, pp. 63–72 (in Russian).
13. Gorokhovik V.V., Shinkevich E.A. Geometric structure and classification of infinite-dimensional halfspaces. In: *Algebraic Analysis and Related Topics*. Banach Center Publications, vol. 53. Warsaw: Institute of Mathematics PAN, 2000, pp. 121–138.
14. Martinez-Legaz J.-E., Vicente-Perez J. Lexicographical representation of convex sets. *J. Convex Analysis*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 485–496.
15. Küçük M., Soyertem M., Küçük Ya. On constructing total orders and solving vector optimization problems with total orders. *J. Global Optim.*, 2011, vol. 50, no. 2, pp. 235–247. doi: 10.1007/s10898-010-9576-y.
16. Küçük M., Soyertem M., Küçük Ya. The generalization of total ordering cones and vectorization to separable Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 389, no. 2, pp. 1344–1351. doi: 10.1016/j.jmaa.2012.01.017.
17. Klee V. The structure of semispaces. *Math. Scand.*, 1956, vol. 4, pp. 54–64. doi: 10.7146/math.scand.a-10455.
18. Klee V. Maximal separation theorems for convex sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1968, vol. 134, no. 1, pp. 133–147. doi: 10.1090/S0002-9947-1968-0235457-9.
19. Leichtweiss K. *Konvexe Mengen*. Berlin: Springer, 1980, 330 p. ISBN: 978-3-540-09071-7. Translated to Russian under the title *Vypuklye mnozhestva*. Moscow: Nauka Publ., 1985, 335 p.
20. Semenkova E.A. On analytical representation of half-spaces in finite-dimensional vector spaces. *Izv. Akad. Nauk Belarusi, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1996, no. 2, pp. 35–40 (in Russian).
21. Hammer P.C. Maximal convex sets. *Duke Math. J.*, 1955, vol. 22, no. 1, pp. 103–106. doi: 10.1215/S0012-7094-55-02209-2.
22. Lassak M. Convex half-spaces. *Fund. Math.*, 1984, vol. 120, no. 1, pp. 7–13. doi: 10.4064/fm-120-1-7-13.
23. Lassak M.A., Prószynski A. Translate-inclusive sets, orderings and convex halfspaces. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 1986, vol. 34, no. 3–4, pp. 195–201.
24. Martinez-Legaz J.-E., Singer I. Lexicographical separation in \mathbb{R}^n . *Linear Algebra Appl.*, 1987, vol. 90, pp. 147–163. doi: 10.1016/0024-3795(87)90312-0.
25. Alexandroff P.S. *Einführung in die Mengenlehre und in die allgemeine Topologie*. (Introduction to set theory and to general topology). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1984, 336 p. Original Russian text published in Aleksandrov P.S., *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu*, Moscow: Nauka Publ., 1977, 368 p.

26. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*. USA: Martino Fine Books, 2012, 280 p. ISBN: 1614273049. Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V., *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*, Moscow: Nauka Publ., 1981, 544 p.

Received November 11, 2019

Revised January 10, 2020

Accepted January 14, 2020

Funding Agency: This work was supported by the National Program for Scientific Research of the Republic of Belarus for 2016–2020 “Convergence 2020” (project no. 1.4.01).

Valentin Vikent'evich Gorokhovich, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of NAS of Belarus, Prof., Institute of Mathematics, The National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072 Belarus, e-mail: gorokh@im.bas-net.by.

Cite this article as: V. V. Gorokhovich. Step-affine functions, half-spaces, and separation of convex sets with applications to convex optimization problems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 51–70.

УДК 517.977.1

**ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ЛЕЧЕНИЯ РАКОВЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ ЛОТКИ — ВОЛЬТЕРРЫ¹****Н. Л. Григоренко, Е. Н. Хайлов, Э. В. Григорьева, А. Д. Клименкова**

Для описания взаимодействия концентраций здоровых и раковых клеток при заболеваниях, связанных с раком крови, используется модель конкуренции Лотки — Вольтерры. В эту модель добавляется дифференциальное уравнение, описывающее изменение концентрации химиотерапевтического препарата. Это уравнение содержит скалярное ограниченное управление, которое задает интенсивность поступления такого препарата в организм. Для рассматриваемой управляемой системы ставится задача минимизации взвешенной разности концентраций раковых и здоровых клеток в конечный момент времени заданного периода лечения. С помощью принципа максимума Понтрягина аналитически устанавливаются свойства оптимального управления. Выделяются ситуации, когда такое управление является релейной функцией, а также ситуации, когда наряду с релейными участками оно может также содержать и участок с особым режимом. Полученные результаты подтверждаются соответствующими численными расчетами.

Ключевые слова: модель конкуренции Лотки — Вольтерры, нелинейная управляемая система, принцип максимума Понтрягина, функция переключений, релейное управление, особый режим.

N. L. Grigorenko, E. N. Khailov, E. V. Grigorieva, A. D. Klimenkova. Optimal strategies in the treatment of cancers in the Lotka–Volterra mathematical model of competition.

The Lotka–Volterra competition model is applied to describe the interaction between the concentrations of healthy and cancer cell in diseases associated with blood cancer. The model is supplemented with a differential equation characterizing the change in the concentration of a chemotherapeutic drug. The equation contains a scalar bounded control that specifies the intensity of drug intake. We consider the problem of minimizing the weighted difference between the concentrations of cancer and healthy cells at the end time of the treatment period. The properties of an optimal control are established analytically with the use of the Pontryagin maximum principle. We describe situations in which the optimal control is a relay function and situations in which the control may contain a segment with a singular arc in addition to relay segments. The results obtained are confirmed by corresponding numerical calculations.

Keywords: Lotka–Volterra competition model, nonlinear control system, Pontryagin maximum principle, switching function, bang-bang control, singular arc.

MSC: 49K15, 93A30

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-71-88

Введение

По данным Всемирной Организации Здравоохранения (ВОЗ), каждый год от рака умирает около 7.6 миллионов человек, что составляет 13% в структуре общей смертности в мире. На лечение раковых заболеваний тратятся миллиарды долларов. На сегодняшний день известно, что рак — это не одна болезнь, а, по крайней мере, двести, причем каждая из них имеет свои симптомы, методы диагностики и лечения. ВОЗ считает, что число случаев заболеваний раком возрастет в ближайшие двадцать лет на 70%. Одним из характерных признаков рака является быстрое образование аномальных клеток, прорастающих за пределы своих обычных границ и способных проникать в близлежащие части тела и распространяться в другие органы.

Среди всевозможных раковых заболеваний особое место занимает рак крови, объединяющий в себе раковые заболевания кроветворной (лейкемия), лимфатической (лимфома) систем и плазмы крови (миелома). На сегодняшний день эти заболевания считаются неизлечимыми.

¹Работа первых двух авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ДНТ в рамках научного проекта 18-51-45003 ИНД_а.

Однако с помощью современных методов лечения зачастую удается добиться полной ремиссии, избавить пациента от симптомов и улучшить качество его жизни. Такие заболевания удается доводить до состояния, близкого к хронической форме; их можно лечить при каждом рецидиве. При этом значительный вклад здесь вносит математическое моделирование, позволяющее описывать поведение клеток и органов до заболевания, при его развитии и лечении, обходясь без сложнейших и дорогостоящих наблюдений. При отыскании эффективных в том или ином смысле стратегий лечения широко применяется математическая теория оптимального управления.

Не приводя здесь полный обзор работ, связанных как с математическим моделированием лейкемии, лимфомы и миеломы, так и с поиском эффективных стратегий их лечения на основе теории оптимального управления, мы бы хотели выделить работы [1–6], которые по ряду причин важны для нас. Во-первых, в этих работах такие обзоры представлены. Во-вторых, взаимодействие между здоровыми и раковыми клетками в них описывается с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, использующих логистический закон и закон Гомперца. В-третьих, в них осуществляется поиск как оптимальных, так и альтернативных стратегий лечения указанных заболеваний.

Для описания взаимодействия концентраций здоровых и раковых клеток при лейкемии, лимфоме и миеломе также может быть использована и математическая модель конкуренции Лотки–Вольтерры [7–9], которая тоже записывается с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Работа [10] демонстрирует применение теории оптимального управления в такой модели. Настоящая работа является ее продолжением. В отличие от [10], в эту модель добавлено дифференциальное уравнение, описывающее изменение концентрации химиотерапевтического препарата. Это уравнение содержит скалярное ограниченное управление, которое задает интенсивность поступления такого препарата в организм. Эффективность применяемого лечения описывается с помощью монотонной функции терапии. Для рассматриваемой управляемой системы ставится задача минимизации терминального функционала, представляющего собой взвешенную разность концентраций раковых и здоровых клеток в конечный момент времени заданного периода лечения. С использованием принципа максимума Понтрягина аналитически устанавливаются свойства оптимального управления. Выделены ситуации, когда такое управление является релейной функцией на всем отрезке времени, а также ситуации, когда наряду с релейными участками оно может содержать и особый участок с особым режимом. Полученные свойства оптимального управления подтверждаются соответствующими численными расчетами, выполненными в среде VOCOP–2.0.5.

1. Постановка задачи минимизации

Будем использовать для описания взаимодействия между популяциями здоровых и раковых клеток математическую модель конкуренции Лотки — Вольтерры [11, с. 121; 12, с. 43]

$$\begin{cases} N_1'(\tau) = r_1 (1 - K_1^{-1}N_1(\tau) - a_{12}K_2^{-1}N_2(\tau)) N_1(\tau), \\ N_2'(\tau) = r_2 (1 - K_2^{-1}N_2(\tau) - a_{21}K_1^{-1}N_1(\tau)) N_2(\tau). \end{cases} \quad (1.1)$$

Как уже отмечалось ранее, эта модель удобна для математического описания таких раковых заболеваний, как лейкемия, лимфома, миелома (рак крови). Здесь $N_1(\tau)$ и $N_2(\tau)$ — количество здоровых и раковых клеток в момент времени $\tau \geq 0$ соответственно. Величины $r_1, r_2, K_1, K_2, a_{12}, a_{21}$ являются положительными параметрами системы (1.1): r_1 и r_2 суть внутренние скорости роста, а K_1 и K_2 — максимальные размеры соответствующих популяций. Наконец, a_{12} — скорость инактивации здоровых клеток раковыми и a_{21} — скорость инактивации раковых клеток здоровыми. Анализ устойчивости положений равновесия системы (1.1) подробно изложен в [11, с. 121; 12, с. 43].

Уменьшим количество параметров рассматриваемой модели с шести до трех с помощью следующего масштабирования и переобозначения фазовых переменных и параметров системы:

$$x = K_1^{-1}N_1, \quad y = K_2^{-1}N_2, \quad t = r_2\tau, \quad r = r_1r_2^{-1}.$$

Тогда система (1.1) примет вид

$$\begin{cases} x'(t) = r(1 - x(t) - a_{12}y(t))x(t), \\ y'(t) = (1 - y(t) - a_{21}x(t))y(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

В этой системе мы считаем $x(t)$ и $y(t)$ концентрациями здоровых и раковых клеток в момент времени $t \geq 0$ соответственно. Величины r , a_{12} , a_{21} являются положительными параметрами системы (1.2): r есть внутренняя скорость роста здоровых клеток. Смысл a_{12} и a_{21} не меняется. Именно, a_{12} — скорость инактивации здоровых клеток раковыми и a_{21} — скорость инактивации раковых клеток здоровыми. Выбор значений параметров r , a_{12} , a_{21} представляет самостоятельную задачу и определяется конкретным видом ракового заболевания. Мы также считаем, что в дальнейших рассуждениях справедливо неравенство

$$a_{12} \cdot a_{21} \neq 1. \quad (1.3)$$

Добавим в уравнения системы (1.2) слагаемые, отражающие влияние химиотерапевтического воздействия на здоровые и раковые клетки при лечении, убивающем раковые клетки. В результате приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} x'(t) = r(1 - x(t) - a_{12}y(t))x(t) - m_1g(z(t))x(t), \\ y'(t) = (1 - y(t) - a_{21}x(t))y(t) - m_2g(z(t))y(t). \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь $z(t)$ — концентрация химиотерапевтического препарата в момент времени $t \geq 0$, а $g(z)$ — функция терапии, которая непосредственно задает влияние химиотерапевтического воздействия на здоровые и раковые клетки. Положительные величины m_1 и m_2 определяют уровни смертности популяций соответственно здоровых и раковых клеток во время лечения. В дальнейших рассуждениях мы также считаем выполненным неравенство

$$m_2 > m_1, \quad (1.5)$$

отражающее более сильное воздействие применяемого лечения на популяцию раковых клеток, чем на популяцию здоровых клеток.

Будем предполагать, что $g(z)$ — достаточно гладкая, монотонно возрастающая функция: $g(z) > 0$ при $z > 0$ и $g(0) = 0$; $g'(z) > 0$ при $z \geq 0$. Примерами таких функций являются $g(z) = z$ и $g(z) = z(\mu + z)^{-1}$, где μ — заданная положительная константа. Более подробно такие функции терапии обсуждаются в [2; 3; 5].

Теперь добавим к системе (1.4) уравнение, описывающее изменение концентрации химиотерапевтического препарата с течением времени:

$$z'(t) = -\gamma z(t) + u(t), \quad (1.6)$$

где $u(t)$ — управление, характеризующее интенсивность поступления химиотерапевтического средства в момент времени $t \geq 0$, и γ — коэффициент диссипации. Пусть множество допустимых управлений $\Omega(T)$ образуют всевозможные измеримые по Лебегу функции $u(t)$, которые при почти всех $t \geq 0$ удовлетворяют ограничениям

$$0 \leq u(t) \leq M, \quad (1.7)$$

где M — заданная положительная константа.

Начальные условия для уравнений системы (1.4) и (1.6) имеют вид

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = 0, \quad (1.8)$$

где величины x_0 и y_0 удовлетворяют включениям

$$x_0, y_0 \in (0, 1). \quad (1.9)$$

Пусть задан отрезок времени $[0, T]$, определяющий длительность периода лечения. Зададим произвольное управление $u(\cdot) \in \Omega(T)$. Тогда, благодаря (1.8) решение $z(t)$ уравнения (1.6) определено на всем отрезке $[0, T]$ и выражается формулой

$$z(t) = e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} u(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (1.10)$$

Из ограничений (1.7) и формулы (1.10) вытекают неравенства

$$0 \leq z(t) \leq \gamma^{-1} M (1 - e^{-\gamma t}) \leq \gamma^{-1} M, \quad t \in [0, T]. \quad (1.11)$$

Теперь подставим функцию $z(t)$ в уравнения системы (1.4). Привлекая соответствующие начальные условия из (1.8), имеем решение $(x(t), y(t))$ этой системы, определенное на некотором отрезке $[0, T_0]$. Перепишем уравнения системы (1.4) как линейные однородные дифференциальные уравнения вида

$$\begin{aligned} x'(t) &= [r(1 - x(t) - a_{12}y(t)) - m_1g(z(t))] x(t) = P(t)x(t), \\ y'(t) &= [(1 - y(t) - a_{21}x(t)) - m_2g(z(t))] y(t) = Q(t)y(t). \end{aligned}$$

Учитывая соответствующие начальные условия из (1.8), мы видим, что справедливы равенства

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t P(s) ds}, \quad y(t) = y_0 e^{\int_0^t Q(s) ds}, \quad t \in [0, T_0],$$

из которых немедленно следует положительность функций $x(t)$ и $y(t)$ всюду на отрезке $[0, T_0]$.

Благодаря этому свойству, а также вытекающей из (1.11) неотрицательности функции $z(t)$ находим дифференциальные неравенства

$$x'(t) \leq r(1 - x(t))x(t), \quad y'(t) \leq (1 - y(t))y(t), \quad (1.12)$$

являющиеся следствием соответствующих уравнений системы (1.4).

Далее мы будем рассматривать только первое неравенство. Рассуждения для второго неравенства проводятся аналогично. Перепишем первое неравенство в (1.12) в виде

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} \leq \frac{r}{x(t)} - r, \quad \text{или} \quad \left(\frac{e^{rt}}{x(t)} \right)' \geq r e^{rt}.$$

Интегрируя это неравенство на отрезке $[0, t]$ с соответствующим начальным условием из (1.8), получаем неравенство

$$x(t) \leq \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0)e^{-rt}}.$$

При $t = 0$ его правая часть равна x_0 . Согласно соответствующему включению из (1.9) правая часть неравенства является монотонно возрастающей до значения 1 при $t \rightarrow +\infty$ функцией. Поэтому $x(t) \in (0, 1)$ при всех $t \in [0, T_0]$. Следовательно, имеет место и включение $y(t) \in (0, 1)$ для всех $t \in [0, T_0]$. С учетом [13, с. 26] эти включения гарантируют продолжимость решения $(x(t), y(t))$ системы (1.4) на отрезок времени $[0, T]$ в случае $T_0 < T$. Если $T_0 \geq T$, то такие включения уже имеют место на отрезке $[0, T]$.

Таким образом, нами установлена справедливость следующей леммы.

Лемма 1. Для любого управления $u(\cdot) \in \Omega(T)$ соответствующее решение $(x(t), y(t), z(t))$ уравнений системы (1.4) и (1.6) с начальными условиями (1.8) определено на всем отрезке $[0, T]$ и удовлетворяет включению

$$(x(t), y(t), z(t)) \in \Lambda, \quad t \in [0, T],$$

где

$$\Lambda = \left\{ (x, y, z) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 \leq z \leq \gamma^{-1}M \right\}.$$

Для уравнений системы (1.4) и (1.6) с начальными условиями (1.8) на множестве допустимых управлений $\Omega(T)$ рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u(\cdot)) = y(T) - \alpha x(T),$$

который представляет собой взвешенную разность концентраций раковых и здоровых клеток в конечный момент времени T периода лечения $[0, T]$. Здесь α есть положительный весовой коэффициент. При этом если $\alpha > 1$, то оказывается предпочтительнее максимизировать концентрацию здоровых клеток $x(T)$; если же $\alpha < 1$, то важной становится минимизация концентрации раковых клеток $y(T)$.

В силу леммы 1 и теоремы 4 [14, гл. 4] в рассматриваемой задаче минимизации существует оптимальное решение, состоящее:

- из оптимального управления $u_*(t)$;
- из соответствующего оптимального решения $(x_*(t), y_*(t), z_*(t))$ уравнений системы (1.4) и (1.6) с начальными условиями (1.8).

2. Принцип максимума Понтрягина

Для анализа оптимального решения, состоящего из управления $u_*(t)$ и отвечающего ему решения $(x_*(t), y_*(t), z_*(t))$, применим принцип максимума Понтрягина [15, гл. 6, теорема 1].

Сначала выпишем функцию Гамильтона — Понтрягина

$$H(x, y, z, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = (r(1-x-a_{12}y) - m_1g(z))x\psi_1 + ((1-y-a_{21}x) - m_2g(z))y\psi_2 + (-\gamma z + u)\psi_3,$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 — сопряженные переменные.

Теперь вычислим требуемые частные производные функции $H(x, y, z, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$

$$\begin{aligned} H'_x(x, y, z, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3) &= (r(1-x-a_{12}y) - m_1g(z))\psi_1 - rx\psi_1 - a_{21}y\psi_2, \\ H'_y(x, y, z, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3) &= ((1-y-a_{21}x) - m_2g(z))\psi_2 - ra_{12}x\psi_1 - y\psi_2, \\ H'_z(x, y, z, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3) &= -g'(z)(m_1x\psi_1 + m_2y\psi_2) - \gamma\psi_3, \\ H'_u(x, y, z, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3) &= \psi_3. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с принципом максимума Понтрягина существует вектор-функция $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ такая, что:

- 1) функция $\psi(t)$ является решением сопряженной системы

$$\left\{ \begin{aligned} \psi'_1(t) &= -H'_x(x_*(t), y_*(t), z_*(t), u_*(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)) \\ &= -(r(1-x_*(t) - a_{12}y_*(t)) - m_1g(z_*(t)))\psi_1(t) \\ &\quad + rx_*(t)\psi_1(t) + a_{21}y_*(t)\psi_2(t), \\ \psi'_2(t) &= -H'_y(x_*(t), y_*(t), z_*(t), u_*(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)) \\ &= -((1-y_*(t) - a_{21}x_*(t)) - m_2g(z_*(t)))\psi_2(t) \\ &\quad + ra_{12}x_*(t)\psi_1(t) + y_*(t)\psi_2(t), \\ \psi'_3(t) &= -H'_z(x_*(t), y_*(t), z_*(t), u_*(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)) \\ &= g'(z_*(t))(m_1x_*(t)\psi_1(t) + m_2y_*(t)\psi_2(t)) + \gamma\psi_3(t), \\ \psi_1(T) &= \alpha, \quad \psi_2(T) = -1, \quad \psi_3(T) = 0; \end{aligned} \right. \quad (2.1)$$

2) управление $u_*(t)$ максимизирует функцию Гамильтона — Понтрягина

$$H(x_*(t), y_*(t), z_*(t), u, \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$$

по переменной $u \in [0, M]$ при почти всех $t \in [0, T]$, а потому оно удовлетворяет следующему соотношению:

$$u_*(t) = \begin{cases} M, & \text{если } L_u(t) > 0, \\ \text{любое } u \in [0, M], & \text{если } L_u(t) = 0, \\ 0, & \text{если } L_u(t) < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $L_u(t) = \psi_3(t)$ есть функция переключений, которая описывает поведение управления $u_*(t)$ согласно формуле (2.2).

Теперь преобразуем дифференциальные уравнения системы (2.1) вместе с отвечающими им начальными условиями, введя в рассмотрение новые сопряженные переменные

$$\phi_1(t) = -x_*(t)\psi_1(t), \quad \phi_2(t) = -y_*(t)\psi_2(t), \quad \phi_3(t) = \psi_3(t).$$

Выполняя необходимые вычисления, имеем новую сопряженную систему

$$\begin{cases} \phi_1'(t) = rx_*(t)\phi_1(t) + a_{21}x_*(t)\phi_2(t), \\ \phi_2'(t) = ra_{12}y_*(t)\phi_1(t) + y_*(t)\phi_2(t), \\ \phi_3'(t) = \gamma\phi_3(t) - g'(z_*(t))(m_1\phi_1(t) + m_2\phi_2(t)), \\ \phi_1(T) = -\alpha x_*(T), \quad \phi_2(T) = y_*(T), \quad \phi_3(T) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

При этом функция переключений $L_u(t)$ будет определяться через новую переменную $\phi_3(t)$ формулой $L_u(t) = \phi_3(t)$.

Учитывая этот факт, перепишем новую сопряженную систему (2.3) в виде

$$\begin{cases} \phi_1'(t) = rx_*(t)\phi_1(t) + a_{21}x_*(t)\phi_2(t), \\ \phi_2'(t) = ra_{12}y_*(t)\phi_1(t) + y_*(t)\phi_2(t), \\ L_u'(t) = \gamma L_u(t) - g'(z_*(t))(m_1\phi_1(t) + m_2\phi_2(t)), \\ \phi_1(T) = -\alpha x_*(T), \quad \phi_2(T) = y_*(T), \quad L_u(T) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Установим важное свойство новых сопряженных переменных $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ с помощью следующей леммы.

Лемма 2. *Сопряженные переменные $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ знакоопределены на отрезке $[0, T]$, т. е. справедливы неравенства*

$$\phi_1(t) < 0, \quad \phi_2(t) > 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.5)$$

Доказательство. Из леммы 1 и соответствующих начальных условий из (2.4) вытекают неравенства

$$\phi_1(T) < 0, \quad \phi_2(T) > 0. \quad (2.6)$$

Далее, не существует такого значения $t_0 \in [0, T)$, при котором одновременно выполнены равенства $\phi_1(t_0) = 0$, $\phi_2(t_0) = 0$. В противном случае, поскольку первые два дифференциальных уравнения системы (2.4) образуют линейную однородную систему, то $\phi_1(t) = 0$ и $\phi_2(t) = 0$ при всех $t \in [0, T]$, что противоречит неравенствам (2.6). Также из анализа этих неравенств мы заключаем, что возможны следующие два случая.

С л у ч а й 1. Пусть определено такое значение $t_1 \in [0, T)$, что

$$\phi_1(t_1) = 0, \quad (2.7)$$

и справедливы соотношения

$$\phi_1(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in (t_1, T], \quad (2.8)$$

$$\phi_2(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1 - \epsilon_1, T] \quad (2.9)$$

для некоторого малого $\epsilon_1 > 0$. Подставляя (2.7) в первое уравнение системы (2.4) и учитывая при этом лемму 1 и неравенство (2.9), получаем $\phi_1'(t_1) = a_{21}x_*(t_1)\phi_2(t_1) > 0$, которое вместе с равенством (2.7) означает, что функция $\phi_1(t)$ при переходе через точку t_1 меняет свой знак с отрицательного на положительный, что противоречит (2.8). Значит, такой случай невозможен.

С л у ч а й 2. Пусть определено такое значение $t_2 \in [0, T]$, что

$$\phi_2(t_2) = 0, \quad (2.10)$$

и выполнены соотношения

$$\phi_1(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_2 - \epsilon_2, T], \quad (2.11)$$

$$\phi_2(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (t_2, T], \quad (2.12)$$

где ϵ_2 — малое положительное число. Подставляя (2.10) во второе уравнение системы (2.4) и учитывая при этом лемму 1 и неравенство (2.11), находим $\phi_2'(t_2) = ra_{12}y_*(t_2)\phi_1(t_2) < 0$, которое вместе с равенством (2.10) означает, что функция $\phi_2(t)$ при переходе через точку t_2 меняет свой знак с положительного на отрицательный, что противоречит (2.12). Поэтому и такой случай также невозможен.

Невозможность случаев 1 и 2 позволяет нам сделать вывод, что переменные $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ не обращаются в нуль всюду на отрезке $[0, T]$. Тогда неравенства (2.6) приводят к выполнению требуемых соотношений (2.5). Утверждение доказано.

Наконец, рассмотрим вместе формулу (2.2) и уравнения системы (2.4). Их анализ показывает, каким может быть поведение функции переключений $L_u(t)$, а значит и отвечающего ей оптимального управления $u_*(t)$. Поскольку $L_u(t)$ является непрерывно-дифференцируемой функцией, то управление $u_*(t)$ может иметь релейный вид и переключаться между значениями 0 и M . Это будет происходить, если при переходе через значения t , в которых функция $L_u(t)$ обращается в нуль, имеет место смена знака этой функции. Такие значения t являются переключениями оптимального управления $u_*(t)$. Помимо участков релейного типа управление $u_*(t)$ может содержать также и особые участки, на которых имеют место особые режимы (singular arcs) [16, гл. 2.8; 17, с. 393; 18]. Такое происходит, когда функция переключений $L_u(t)$ обращается тождественно в нуль на некоторых интервалах отрезка $[0, T]$.

Следующий раздел как раз посвящен подробному изучению возможного существования особого режима у оптимального управления $u_*(t)$, а также выяснению особенностей релейного управления $u_*(t)$.

3. Свойства оптимального управления

Выделим из системы (2.4) дифференциальное уравнение для функции переключений $L_u(t)$:

$$L_u'(t) = \gamma L_u(t) - g'(z_*(t))(m_1\phi_1(t) + m_2\phi_2(t)) \quad (3.1)$$

с соответствующим начальным условием

$$L_u(T) = 0. \quad (3.2)$$

Продифференцируем это уравнение, используя первые два уравнения системы (2.4). В результате получаем дифференциальное уравнение

$$L_u''(t) = \gamma L_u'(t) - g''(z_*(t))z_*'(t)(m_1\phi_1(t) + m_2\phi_2(t)) - g'(z_*(t))(r(m_1x_*(t) + a_{12}m_2y_*(t))\phi_1(t) + (a_{21}m_1x_*(t) + m_2y_*(t))\phi_2(t)). \quad (3.3)$$

Далее сначала найдем из уравнения (3.1) выражение $(m_1\phi_1(t) + m_2\phi_2(t))$ и подставим во второе слагаемое уравнения (3.3). Затем выделим из (3.1) выражение $g'(z_*(t))\phi_1(t)$ и подставим в третье слагаемое этого уравнения. В итоге мы получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка для функции переключений $L_u(t)$:

$$L_u''(t) - (\gamma + b(t))L_u'(t) + \gamma b(t)L_u(t) = d(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.4)$$

где

$$b(t) = (g'(z_*(t)))^{-1}g''(z_*(t))z_*'(t) + rm_1^{-1}(m_1x_*(t) + a_{12}m_2y_*(t)), \\ d(t) = m_1^{-1}g'(z_*(t))(m_1(rm_2 - a_{21}m_1)x_*(t) + m_2(ra_{12}m_2 - m_1)y_*(t))\phi_2(t).$$

Рассмотрим отвечающее уравнению (3.4) однородное дифференциальное уравнение

$$H''(t) - (\gamma + b(t))H'(t) + \gamma b(t)H(t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.5)$$

Легко видеть, что функция $v(t) = e^{\gamma t}$ положительна и является решением этого уравнения. Поэтому на отрезке $[0, T]$ справедлив критерий неосцилляции Валле — Пуссена [19, с. 53], а значит, любое нетривиальное решение уравнения (3.5) имеет на этом отрезке не более одного нуля (говорят, что такое уравнение является неосциллирующим). Тогда для его левой части, а следовательно и для левой части уравнения (3.4), имеет место разложение Пойа — Маммана [19, с. 45]:

$$\rho_2(t) \frac{d}{dt} \left(\rho_1(t) \frac{d}{dt} \left(\rho_0(t) L_u(t) \right) \right) = d(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.6)$$

где $\rho_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, являются положительными функциями, заданными формулами

$$\rho_0(t) = e^{\gamma(T-t)}, \quad \rho_1(t) = e^{\int_t^T b(s)ds - \gamma(T-t)}, \quad \rho_2(t) = e^{-\int_t^T b(s)ds}.$$

Теперь пусть для параметров r , a_{12} , a_{21} , m_1 , m_2 выполнены либо неравенства

$$rm_2 - a_{21}m_1 \geq 0, \quad ra_{12}m_2 - m_1 \geq 0, \quad (3.7)$$

либо неравенства

$$rm_2 - a_{21}m_1 \leq 0, \quad ra_{12}m_2 - m_1 \leq 0. \quad (3.8)$$

Легко видеть, что благодаря (1.3) неравенства в (3.7) и (3.8) одновременно не обращаются в равенства. Поэтому функция $d(t)$ принимает на отрезке $[0, T]$ только положительные значения, если справедливы неравенства (3.7), или только отрицательные значения, если имеют место неравенства (3.8). Тогда, применяя в разложении (3.6) обобщенную теорему Ролля [19, с. 45], мы заключаем, что функция переключений $L_u(t)$ имеет на отрезке $[0, T]$ не более двух различных нулей. Значит, благодаря (3.2) эта функция имеет на полуинтервале $[0, T)$ не более одного нуля.

Перепишем дифференциальное уравнение (3.4) в виде

$$(L_u'(t) - \gamma L_u(t))' - b(t)(L_u'(t) - \gamma L_u(t)) = d(t). \quad (3.9)$$

После чего введем новую функцию переключений $G_u(t)$ формулой $G_u(t) = e^{\gamma(T-t)}L_u(t)$. Легко убедиться, что функции $L_u(t)$ и $G_u(t)$ при одних и тех же значениях t обращаются в нуль, а также для одних и тех же значений t принимают положительные и отрицательные значения.

Поэтому новая функция переключений $G_u(t)$ задает оптимальное управление $u_*(t)$ соотношением

$$u_*(t) = \begin{cases} M, & \text{если } G_u(t) > 0, \\ \text{любое } u \in [0, M], & \text{если } G_u(t) = 0, \\ 0, & \text{если } G_u(t) < 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

которое подобно (2.2).

Тогда перепишем уравнение (3.9) следующим образом:

$$G_u''(t) + (\gamma - b(t))G_u'(t) = e^{\gamma(T-t)}d(t). \quad (3.11)$$

Пусть $\theta \in [0, T)$ — нуль функции переключений $L_u(t)$. Благодаря (3.2) функция $L_u(t)$, а значит, и функция $G_u(t)$ имеют два различных нуля на отрезке $[0, T]$. Тогда в силу обычной теоремы Ролля между ними лежит нуль $\chi \in [0, T]$ производной $G_u'(t)$, т. е.

$$G_u'(\chi) = 0, \quad (3.12)$$

и в этой точке функция $G_u(t)$ достигает либо локального минимума, либо локального максимума. Учитывая (3.12) в уравнении (3.11), находим

$$G_u''(\chi) = e^{\gamma(T-\chi)}d(\chi).$$

Следовательно, в точке χ при выполнении неравенств (3.7) функция переключений $G_u(t)$ имеет локальный минимум, а при выполнении неравенств (3.8) — локальный максимум.

В силу формулы (3.10) из проделанных рассуждений мы заключаем, что справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Имеет место одно из следующих утверждений.*

1. При выполнении неравенств (3.7) оптимальное управление $u_*(t)$ является либо постоянной функцией, принимающей значение 0 или M , либо кусочно-постоянной функцией с одним переключением $\theta_* \in (0, T)$ вида

$$u_*(t) = \begin{cases} M, & \text{если } 0 \leq t \leq \theta_*, \\ 0, & \text{если } \theta_* < t \leq T. \end{cases} \quad (3.13)$$

2. При выполнении неравенств (3.8) оптимальное управление $u_*(t)$ является либо постоянной функцией, принимающей значение 0 или M , либо кусочно-постоянной функцией с одним переключением $\theta_* \in (0, T)$ вида

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq \theta_*, \\ M, & \text{если } \theta_* < t \leq T. \end{cases} \quad (3.14)$$

Пусть теперь для параметров r , a_{12} , a_{21} , m_1 , m_2 справедливы неравенства, отличные от (3.7) и (3.8). Именно мы считаем выполненными либо неравенства

$$rm_2 - a_{21}m_1 > 0, \quad ra_{12}m_2 - m_1 < 0, \quad (3.15)$$

либо неравенства

$$rm_2 - a_{21}m_1 < 0, \quad ra_{12}m_2 - m_1 > 0. \quad (3.16)$$

Тогда функция $d(t)$ может обращаться в нуль и, например, иметь конечное число нулей на интервале $(0, T)$. Это приведет к росту числа нулей функции переключений $L_u(t)$ и одновременно к росту числа переключений соответствующего оптимального управления $u_*(t)$. Заметим, что обобщенная теорема Ролля, примененная опять к разложению (3.6), и равенство (3.2) приведут к выводу о связи числа нулей функции $L_u(t)$ на полуинтервале $[0, T)$ с числом нулей

функции $d(t)$ на интервале $(0, T)$. Именно если функция $d(t)$ имеет k различных нулей на $(0, T)$, то функция переключений $L_u(t)$ будет иметь не более $(k+2)$ различных нулей на $[0, T)$.

Другая ситуация для функции $d(t)$ возникает, когда функция переключений $L_u(t)$ тождественно обращается в нуль на некотором интервале отрезка $[0, T]$. В такой ситуации оптимальное управление $u_*(t)$ может иметь особый режим на этом интервале, который тогда называется особым участком [16, гл. 2.8; 17, с. 393; 18]. Рассмотрим эту ситуацию подробнее.

Пусть функция переключений $L_u(t)$ равна тождественно нулю на некотором интервале $\Delta \subset [0, T]$. Тогда первая производная $L'_u(t)$ функции $L_u(t)$ обращается в нуль всюду на этом интервале. Из уравнения (3.1) и монотонности функции $g(z)$ вытекает

$$m_1\phi_1(t) + m_2\phi_2(t) = 0, \quad t \in \Delta. \quad (3.17)$$

Поэтому и вторая производная $L''_u(t)$ функции переключений $L_u(t)$ также обращается в нуль на интервале Δ . Значит, из уравнения (3.3) и монотонности функции $g(z)$ мы можем вывести равенство

$$r(m_1x_*(t) + a_{12}m_2y_*(t))\phi_1(t) + (a_{21}m_1x_*(t) + m_2y_*(t))\phi_2(t) = 0, \quad t \in \Delta. \quad (3.18)$$

Рассмотрим при каждом $t \in \Delta$ соотношения (3.17) и (3.18) как систему линейных алгебраических уравнений, которая в силу леммы 2 имеет нетривиальное решение $(\phi_1(t), \phi_2(t))$. Тогда определитель матрицы такой системы при всех $t \in \Delta$ равен нулю. Это приводит к равенству

$$m_1(rm_2 - a_{21}m_1)x_*(t) + m_2(ra_{12}m_2 - m_1)y_*(t) = 0, \quad t \in \Delta, \quad (3.19)$$

из которого немедленно следует, что функция $d(t)$ обращается в нуль на интервале Δ .

З а м е ч а н и е 1. Равенство (3.19) можно получить, непосредственно подставляя равенства

$$L_u(t) = 0, \quad L'_u(t) = 0, \quad L''_u(t) = 0 \quad (3.20)$$

в уравнение (3.4). Тогда функция $d(t)$ также будет равна нулю, и из монотонности функции $g(z)$ находим требуемое равенство.

З а м е ч а н и е 2. Формула (3.19) задает прямую

$$m_1(rm_2 - a_{21}m_1)x + m_2(ra_{12}m_2 - m_1)y = 0,$$

которая при выполнении неравенств (3.15) или неравенств (3.16) пересекает множество

$$\{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

Поэтому фазовые переменные $x_*(t)$ и $y_*(t)$ будут находиться на этой прямой, когда оптимальное управление $u_*(t)$ будет иметь особый режим на интервале Δ .

Анализируя уравнение (3.4), мы видим, что вторая производная $L''_u(t)$ функции $L_u(t)$ не имеет слагаемых, содержащих управление $u_*(t)$. Значит, согласно [18, с. 40] порядок q возможного особого режима больше единицы и необходимо дальше продолжить процесс дифференцирования функции переключений $L_u(t)$.

Далее, вычислим третью производную $L'''_u(t)$ функции $L_u(t)$. Для этого будем опять использовать уравнение (3.4). Согласно равенствам (3.19) и (3.20) имеем

$$L'''_u(t) = m_1^{-1}g'(z_*(t)) [m_1(rm_2 - a_{21}m_1)x_*(t) + m_2(ra_{12}m_2 - m_1)y_*(t)]' \phi_2(t), \quad t \in \Delta. \quad (3.21)$$

Привлекая уравнения системы (1.4), выполним в формуле (3.21) требуемое дифференцирование. В результате приходим к соотношению

$$\begin{aligned} L'''_u(t) = & m_1^{-1}g'(z_*(t)) \left(rm_1(rm_2 - a_{21}m_1)(1 - x_*(t) - a_{12}y_*(t))x_*(t) \right. \\ & \left. + m_2(ra_{12}m_2 - m_1)(1 - y_*(t) - a_{21}x_*(t))y_*(t) \right. \\ & \left. - g(z_*(t)) (m_1^2(rm_2 - a_{21}m_1)x_*(t) + m_2^2(ra_{12}m_2 - m_1)y_*(t)) \right) \phi_2(t). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Приравняем эту производную к нулю: $L_u'''(t) = 0$, $t \in \Delta$. Благодаря лемме 2 и монотонности функции $g(z)$ из (3.22) получаем выражение

$$\begin{aligned} & g(z_*(t)) \left(m_1^2 (rm_2 - a_{21}m_1)x_*(t) + m_2^2 (ra_{12}m_2 - m_1)y_*(t) \right) \\ &= rm_1 (rm_2 - a_{21}m_1)(1 - x_*(t) - a_{12}y_*(t))x_*(t) + m_2 (ra_{12}m_2 - m_1)(1 - y_*(t) - a_{21}x_*(t))y_*(t). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Упростим его. Для этого подставим в (3.23) формулу

$$y_*(t) = -\frac{m_1 (rm_2 - a_{21}m_1)}{m_2 (ra_{12}m_2 - m_1)} x_*(t), \quad (3.24)$$

вытекающую из (3.19). После несложных преобразований находим

$$(m_2 - m_1)g(z_*(t)) = (1 - r) + \left[(r - a_{21}) + (1 - ra_{12}) \frac{m_1 (rm_2 - a_{21}m_1)}{m_2 (ra_{12}m_2 - m_1)} \right] x_*(t). \quad (3.25)$$

Поскольку существуют ограничения на фазовые переменные $x_*(t)$ и $z_*(t)$, вытекающие из леммы 1, а также ограничения на параметры r , a_{12} , a_{21} , m_1 , m_2 в виде неравенств (1.5), (3.15) и (3.16), то равенство (3.25) может оказаться либо противоречивым, либо нет. Тогда в первом случае исходное предположение о возможности обращения функции переключений $L_u(t)$ тождественно в нуль на интервале Δ становится неверным. Особый режим у оптимального управления $u_*(t)$ будет отсутствовать. Это управление окажется релейной функцией на всем отрезке $[0, T]$, принимающей значения 0 и M . Во втором случае в силу монотонности функции $g(z)$ формула (3.25) дает возможность определить фазовую переменную $z_*(t)$ на интервале Δ .

Продолжим дифференцирование функции переключений $L_u(t)$ и найдем ее четвертую производную $L_u''''(t)$ с помощью формулы (3.22). Согласно (3.23) в результате дифференцирования имеем

$$\begin{aligned} L_u''''(t) &= m_1^{-1} g'(z_*(t)) \left[h(x_*(t), y_*(t)) \right. \\ &\left. - g(z_*(t)) \left(m_1^2 (rm_2 - a_{21}m_1)x_*(t) + m_2^2 (ra_{12}m_2 - m_1)y_*(t) \right) \right]' \phi_2(t), \quad t \in \Delta, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где

$$\begin{aligned} h(x_*(t), y_*(t)) &= rm_1 (rm_2 - a_{21}m_1)(1 - x_*(t) - a_{12}y_*(t))x_*(t) \\ &+ m_2 (ra_{12}m_2 - m_1)(1 - y_*(t) - a_{21}x_*(t))y_*(t). \end{aligned}$$

Используя при дифференцировании выражения в квадратных скобках в формуле (3.26) уравнения системы (1.4) и (1.6), выводим желаемое соотношение

$$\begin{aligned} L_u''''(t) &= m_1^{-1} g'(z_*(t)) \left(-u_*(t) \left(m_1^2 (rm_2 - a_{21}m_1)x_*(t) + m_2^2 (ra_{12}m_2 - m_1)y_*(t) \right) \right. \\ &\left. + p(x_*(t), y_*(t), z_*(t)) \right) \phi_2(t), \quad t \in \Delta, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где функция $p(x_*(t), y_*(t), z_*(t))$ содержит только слагаемые, в которых управление $u_*(t)$ отсутствует.

Получив (3.27), проверим выполнение необходимого условия оптимальности особого режима (условие Келли — Коппа — Мойера) из [18, с. 40]. Для этого оценим множитель при управлении $u_*(t)$:

$$-\left(m_1^2 (rm_2 - a_{21}m_1)x_*(t) + m_2^2 (ra_{12}m_2 - m_1)y_*(t) \right). \quad (3.28)$$

Подставляя в него формулу (3.24) и затем преобразуя, находим

$$m_1(m_2 - m_1)(rm_2 - a_{21}m_1)x_*(t).$$

Вследствие леммы 1 и неравенства (1.5) анализ этого выражения приводит к следующим выводам:

1) при $rm_2 - a_{21}m_1 > 0$, что означает выполнение неравенств (3.15), условие Келли — Коппа — Мойера не выполнено. Значит, особого режима у оптимального управления $u_*(t)$ не существует. Оно является релейной функцией на всем отрезке $[0, T]$, принимающей значения 0 и M ;

2) при $rm_2 - a_{21}m_1 < 0$, что означает выполнение неравенств (3.16), условие Келли — Коппа — Мойера выполнено, и более того, в усиленной форме (имеет место строгое неравенство). Тогда у оптимального управления $u_*(t)$ может существовать особый режим.

Приравнивая четвертую производную $L_u''''(t)$ из (3.27) к нулю и учитывая преобразование, совершенное в (3.28), находим формулу особого режима для управления $u_*(t)$:

$$u_{\text{sing}}(t) = \frac{p(x_{\text{sing}}(t), y_{\text{sing}}(t), z_{\text{sing}}(t))}{m_1(m_2 - m_1)(rm_2 - a_{21}m_1)x_{\text{sing}}(t)}, \quad t \in \Delta.$$

Здесь $x_{\text{sing}}(t)$, $y_{\text{sing}}(t)$, $z_{\text{sing}}(t)$ — компоненты оптимального решения $(x_*(t), y_*(t), z_*(t))$ на особом режиме. Легко видеть, что такая формула задает управление $u_{\text{sing}}(t)$ в виде обратной связи, т.е. в виде зависимости только от $x_{\text{sing}}(t)$, $y_{\text{sing}}(t)$, $z_{\text{sing}}(t)$. Естественно предполагать, что это управление является допустимым всюду на интервале Δ . Также понятно, что если управление $u_{\text{sing}}(t)$ оказывается недопустимым на этом интервале, то снова приходим к выводу об отсутствии особого режима у оптимального управления $u_*(t)$. Тогда управление $u_*(t)$ опять является релейной функцией на отрезке $[0, T]$, принимающей значения 0 и M .

Обсудим теперь расположение интервала Δ на отрезке $[0, T]$. Важен вопрос о том, может ли этот интервал примыкать к концу T отрезка $[0, T]$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. Пусть имеет место неравенство

$$\alpha \neq -\frac{rm_2 - a_{21}m_1}{ra_{12}m_2 - m_1}. \quad (3.29)$$

Тогда интервал Δ , на котором оптимальное управление $u_*(t)$ может иметь особый режим, не примыкает к концу T отрезка $[0, T]$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть интервал Δ примыкает к T . Тогда из формулы (3.24) при $t = T$ получаем

$$\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{y_*(T)}{x_*(T)} = -\frac{rm_2 - a_{21}m_1}{ra_{12}m_2 - m_1}. \quad (3.30)$$

Из уравнения (3.1), взятого при $t = T$, и начального условия (3.2) вытекает соотношение

$$L'_u(T) = -m_1^{-1}g'(z_*(T))x_*(T) \left[-\alpha + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{y_*(T)}{x_*(T)} \right].$$

Подставляя в него (3.30), имеем

$$L'_u(T) = -m_1^{-1}g'(z_*(T))x_*(T) \left[-\alpha - \frac{rm_2 - a_{21}m_1}{ra_{12}m_2 - m_1} \right].$$

Благодаря монотонности функции $g(z)$, лемме 1 и (3.29) мы приходим к противоречивому заключению о том, что $L'_u(T) \neq 0$. Значит наше предположение неверно. Утверждение доказано.

Будем предполагать в дальнейших рассуждениях, что неравенство (3.29) выполнено. Тогда, как следует из леммы 4, к концу T отрезка $[0, T]$ примыкает интервал, на котором функция переключений $L_u(t)$ принимает либо только положительные, либо только отрицательные значения. Следовательно, далее важно обсудить вопрос о том, каким образом происходит соединение интервала Δ (особого участка), на котором оптимальное управление $u_*(t)$ может иметь

особый режим, с неособыми участками, на которых это управление релейно. Именно считая, что на интервале Δ управление $u_{\text{sing}}(t)$ принимает значения только из интервала $(0, M)$ и привлекая теорему А.3.3 [17], мы заключаем, что соединение между интервалом Δ с заданным на нем управлением $u_{\text{sing}}(t)$ и неособыми участками, где оптимальное управление $u_*(t)$ является релейной функцией и принимает значения 0 и M , возможно и данные соединения могут происходить с обеих концов интервала Δ . Кроме того, такие неособые участки содержат счетное число переключений управления $u_*(t)$, которые накапливаются к соответствующим точкам соединения особого и неособого участков. У этих точек соединения возникает такое явление, как четтеринг [16, гл. 2.11; 17, с. 401; 18].

З а м е ч а н и е 3. Понятно, что оптимальное управление $u_*(t)$, содержащее четтеринг, не может являться эффективной стратегией лечения рассматриваемых заболеваний. Поэтому в случае его возникновения могут быть использованы некоторые способы аппроксимации с помощью кусочно-постоянных управлений, представленных в [17, гл. 6.3] и [20–23].

Таким образом, на основании проделанных рассуждений мы приходим к следующему выводу.

Утверждение. *Оптимальное управление $u_*(t)$ может быть одного из следующих четырех видов:*

- постоянной функцией, принимающей значение 0 или M ;
- кусочно-постоянной функцией с одним переключением типа (3.13) или (3.14);
- релейной функцией с конечным числом переключений, принимающей значения 0 и M ;
- функцией, содержащей особый режим на особом участке, который при помощи четтеринга соединяется с неособыми, релейными участками.

4. Результаты численных расчетов

Теперь мы продемонстрируем результаты численных расчетов, выполненных с использованием среды VOCOP–2.0.5 [24]. Она представляет собой специальную среду, реализованную в MATLAB, для решения задач оптимального управления с общими концевыми и фазовыми ограничениями со свободным или фиксированным конечным временем. После дискретизации по времени такие задачи аппроксимируются конечномерными задачами оптимизации, которые затем решаются с помощью хорошо известного программного обеспечения IPOPT, использующего точно вычисленные производные благодаря ADOL-C. При этом IPOPT является программным пакетом с открытым исходным кодом для решения задач нелинейной оптимизации большой размерности.

Рассматривая временной интервал в 30 и 50 дней, мы использовали временную сетку с 5000 узлами. Поскольку наша задача решалась прямым методом, а значит итерационно, мы требовали на каждом шаге точность $\varepsilon = 10^{-14}$. Кроме того, мы применяли правило дискретизации Лобатто III C шестого порядка. Такие особенности более подробно описаны в [24].

На графиках ниже (см. рис. 1 и 2) показаны результаты для двух случаев наборов параметров. Для каждого случая приведены оптимальное управление $u_*(t)$, отвечающие ему оптимальные траектории $x_*(t)$ и $y_*(t)$ и концентрация химиотерапевтического препарата $z_*(t)$. Заметим, что в представленных расчетах она также является функцией терапии ($g(z) = z$). Ниже располагаются фазовые портреты для каждого случая.

Черные сплошные линии отражают оптимальные решения на выбранном отрезке времени лечения $[0, T]$. Для иллюстрации преимуществ лечения серыми пунктирными линиями приведено решение неуправляемой системы (1.2), т. е. траектории при отсутствии лечения ($u(t) \equiv 0$).

На рис. 1 представлен случай, когда выражения $(rm_2 - a_{21}m_1)$ и $(ra_{12}m_2 - m_1)$ удовлетворяют неравенствам (3.7). В этом случае, как следует из предшествующего анализа, оптимальное управление $u_*(t)$ имеет вид (3.13). Сравним оптимальные траектории и траектории, полученные в результате отсутствия лечения. Нетрудно видеть, что оптимальное управление $u_*(t)$

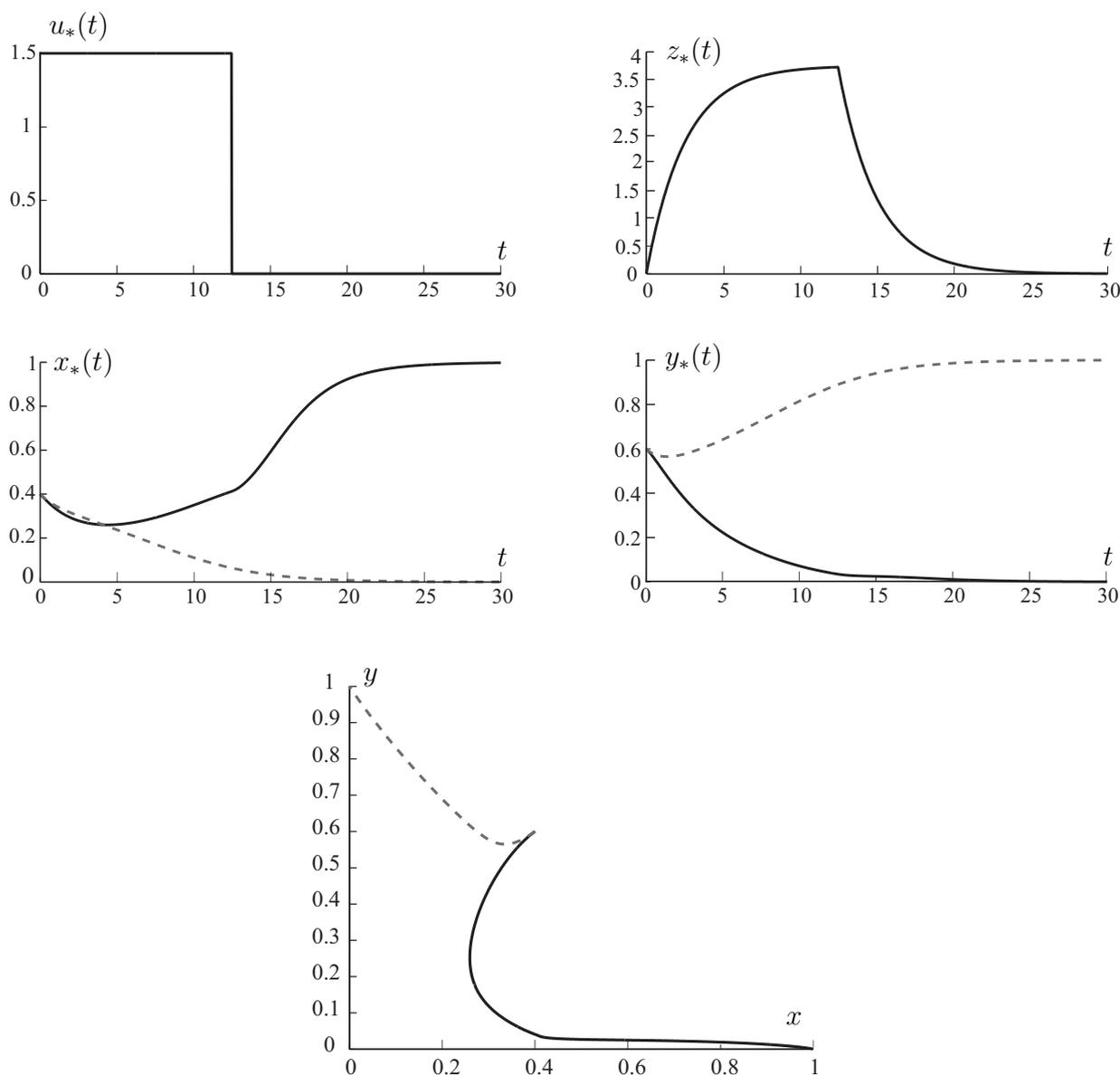


Рис. 1. Первый случай набора параметров. Начальные условия $x(0) = 0.4$, $y(0) = 0.6$. Коэффициенты $r = 0.8$, $a_{12} = 1.4$, $a_{21} = 1.3$, $m_1 = 0.1$, $m_2 = 0.2$, $\gamma = 0.4$, $\alpha = 1.2$, $M = 1.5$, $T = 30$. Значение функционала $J_* = -1.19664$

переводит траекторию системы из области притяжения устойчивого положения равновесия на вертикальной оси (что соответствует вымиранию здоровых клеток) в область притяжения устойчивого положения равновесия на горизонтальной оси (что соответствует вымиранию раковых клеток). В данном случае лечение приводит к полному выздоровлению пациента, “перетягивая” траекторию в выгодное для этого устойчивое положение равновесия.

На рис. 2 рассмотрим случай, когда выражения $(rm_2 - a_{21}m_1)$ и $(ra_{12}m_2 - m_1)$ удовлетворяют неравенствам (3.16). В представленных расчетах оптимальное управление $u_*(t)$ имеет особый режим на особом участке, который при помощи четтеринга соединяется с неособыми, релейными участками, что полностью согласуется с полученным теоретическим результатом. Здесь так же, как и в предыдущем примере, оптимальное управление $u_*(t)$ переводит траекторию системы из области притяжения устойчивого положения равновесия на вертикальной оси в область притяжения устойчивого положения равновесия на горизонтальной оси. Это означает, что лечение приводит к полному выздоровлению пациента, “перетягивая” траекторию в

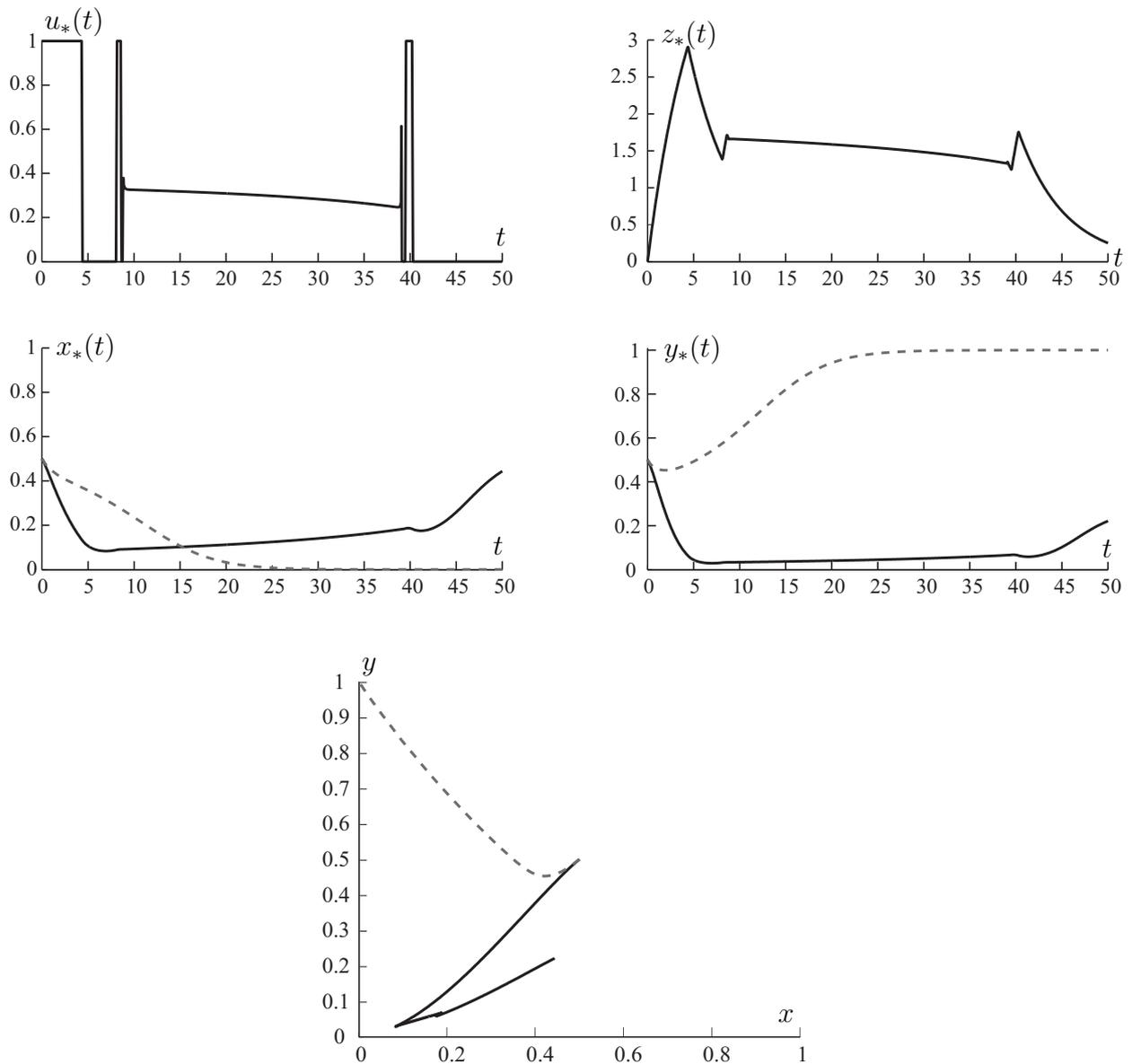


Рис. 2. Второй случай набора параметров. Начальные условия $x(0) = 0.5$, $y(0) = 0.5$. Коэффициенты $r = 0.6$, $a_{12} = 1.5$, $a_{21} = 1.3$, $m_1 = 0.3$, $m_2 = 0.5$, $\gamma = 0.2$, $\alpha = 1.0$, $M = 1.0$, $T = 50$. Значение функционала $J_* = -0.222657$

выгодное для этого устойчивое положение равновесия. Такой вывод подтверждают расчеты для $T = 100$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Todorov Y., Fimmel E., Bratus A.S., Semenov Y.S., Nuernberg F.** A optimal strategies for leukemia therapy: a multi-objective approach // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2011. Vol. 26, no. 6. P. 589–604. doi: 10.1515/rjnamm.2011.035.
2. **Bratus A.S., Fimmel E., Todorov Y., Semenov Y.S., Nürnberg F.** On strategies on a mathematical model for leukemia therapy // Nonlinear Analysis: Real World Appl. 2012. Vol. 13, no. 3. P. 1044–1059. doi: 10.1016/j.nonrwa.2011.02.027.
3. **Bratus A.S., Goncharov A.S., Todorov I.T.** Optimal control in a mathematical model for leukemia therapy with phase constraints // Moscow Univ. Comput. Math. Cybern. 2012. Vol. 36, no. 4. P. 178–182. doi: 10.3103/S0278641912040024.

4. **Bratus A., Todorov Y., Yegorov I., Yurchenko D.** Solution of the feedback control problem in the mathematical model of leukemia therapy // *J. Optim. Theory Appl.* 2013. Vol. 159, no. 3. P. 590–605. doi: 10.1007/s10957-013-0324-6.
5. **Fimmel E., Semenov Y.S., Bratus A.S.** On optimal and suboptimal treatment strategies for a mathematical model of leukemia // *Math. Biosci. Eng.* 2013. Vol. 10, no. 1. P. 151–165. doi: 10.3934/mbe.2013.10.151.
6. **Egorov I.E.** Assessing alternative control strategies for systems with asymptotically stable equilibrium positions // *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.* 2013. Vol. 37, no. 3, P. 112–120. doi: 10.3103/S0278641913030059.
7. **Solé R.V., Deisboeck T.S.** An error catastrophe in cancer? // *J. Theor. Biol.* 2004. Vol. 228. P. 47–54. doi 10.1016/j.jtbi.2003.08.018.
8. **Solé R.V., Garcia I.G., Costa J.** Spatial dynamics in cancer // *Complex Systems Science in Biomedicine* / eds. T.S. Deisboeck, J.Y. Kresh. N Y: Springer, 2006. P. 557–572. (Topics in Biomedical Engineering International Book Series.) doi 10.1016/j.jtbi.2003.08.018.
9. **Кучумов А.Г.** Математическое моделирование и биомеханический подход к описанию развития, диагностике и лечения онкологических заболеваний // *Российский журнал биомеханики.* 2010. Т. 14, № 4. С. 42–69.
10. **Khailov E.N., Klimenkova A.D., Korobeinikov A.** Optimal control for anticancer therapy // *Extended abstracts spring 2018* / eds. A. Korobeinikov, M. Caubergh, T. Lázaro, J. Sardanyés. Basel: Birkhäuser, 2019. P. 35–43. (Trends in mathematics; vol. 11). doi: 10.1007/978-3-030-25261-8_6.
11. **Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П.** Динамические системы и модели биологии. М.: Физматлит, 2010. 400 с.
12. **Тарасевич Ю.Ю.** Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. М.: Либроком, 2013. 152 с.
13. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
14. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
15. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
16. **Schättler H., Ledzewicz U.** Geometric optimal control: theory, methods and examples. N Y; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2012. 640 p.
17. **Schättler H., Ledzewicz U.** Optimal control for mathematical models of cancer therapies: an applications of geometric methods. N Y; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2015. 496 p. doi: 10.1007/978-1-4939-2972-6.
18. **Zelikin M.I., Borisov V.F.** Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering. Boston: Birkhäuser, 1994. 244 p. doi: 10.1007/978-1-4612-2702-1.
19. **Левин А.Ю.** Неосцилляция решений уравнения $x^n + p_1(t)x^{n-1} + \dots + p_n(t)x = 0$ // *Успехи мат. наук.* 1969. Т. 24, вып. 2. С. 43–96.
20. **Зеликин М.И., Зеликина Л.Ф.** Уклонение функционала от оптимального значения при четтеринге экспоненциально убывает с ростом числа переключений // *Дифференц. уравнения.* 1999. Т. 35, № 11. С. 1468–1472.
21. **Zhu J., Trélat E., Cerf M.** Planar titling maneuver of a spacecraft: singular arcs in the minimum time problem and chattering // *Discrete Cont. Dyn. Ser. B.* 2016. Vol. 21, no. 4. P. 1347–1388. doi: 10.3934/dcdsb.2016.21.1347.
22. **Yegorov I., Mairet F., Gouzé J.-L.** Optimal feedback strategies for bacterial growth with degradation, recycling, and effect of temperature // *Optim. Control Appl. Meth.* 2018. Vol. 39, no. 2. P. 1084–1109. doi: 10.1002/oca.2398.
23. **Grigorieva E., Khailov E.** Chattering and its approximation in control of psoriasis treatment // *Discrete Cont. Dyn. Ser. B.* 2019. Vol. 24, no. 5. P. 2251–2280. doi: 10.3934/dcdsb.2019094.
24. **Bonnans F., Martinon P., Giorgi D., Grélard V., Maindrault S., Tissot O., Liu J.** BOCOP 2.0.5 – User guide [e-resource]. 2017. URL: <http://bocop.org>.

Поступила 16.01.2020

После доработки 28.01.2020

Принята к публикации 3.02.2020

Григоренко Николай Леонтьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

г. Москва

e-mail: grigor@cs.msu.su

Хайлов Евгений Николаевич

канд. физ.-мат. наук, доцент

фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

г. Москва

e-mail: khailov@cs.msu.su

Григорьева Эллина Валерьевна

канд. физ.-мат. наук, профессор

Техасский женский университет, США

e-mail: egrigorieva@mail.twu.edu

Клименкова Анна Дмитриевна

студент

фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

г. Москва

e-mail: klimenkovaad@mail.ru

REFERENCES

1. Todorov Y., Fimmel E., Bratus A., Semenov Y., Nuernberg F. An optimal strategy for leukemia therapy: a multi-objective approach. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.*, 2011, vol. 26, no. 6, pp. 589–604. doi: 10.1515/rjnamm.2011.035.
2. Bratus A.S., Fimmel E., Todorov Y., Semenov Y.S., Nürnberg F. On strategies on a mathematical model for leukemia therapy. *Nonlinear Analysis: Real World Appl.*, 2012, vol. 13, no. 3, pp. 1044–1059. doi: 10.1016/j.nonrwa.2011.02.027.
3. Bratus A.S., Goncharov A.S., Todorov I.T. Optimal control in a mathematical model for leukemia therapy with phase constraints. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2012, vol. 36, no. 4, pp. 178–182. doi: 10.3103/S0278641912040024.
4. Bratus A., Todorov Y., Yegorov I., Yurchenko D. Solution of the feedback control problem in the mathematical model of leukaemia therapy. *J. Optim. Theory Appl.*, 2013, vol. 159, no. 3, pp. 590–605. doi: 10.1007/s10957-013-0324-6.
5. Fimmel E., Semenov Y., Bratus A. On optimal and suboptimal treatment strategies for a mathematical model of leukemia. *Math. Biosci. Eng.*, 2013, vol. 10, no. 1, pp. 151–165. doi: 10.3934/mbe.2013.10.151.
6. Egorov I.E. Assessing alternative control strategies for systems with asymptotically stable equilibrium positions. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2013, vol. 37, no. 3, pp. 112–120. doi: 10.3103/S0278641913030059.
7. Solé R.V., Deisboeck T.S. An error catastrophe in cancer? *J. Theor. Biol.*, 2004, vol. 228, pp. 47–54. doi 10.1016/j.jtbi.2003.08.018.
8. Solé R.V., Garcia I.G., Costa J. Spatial dynamics in cancer. In: Deisboeck T.S., Kresh J.Y. (eds), *Complex Systems Science in Biomedicine*. Topics in Biomedical Engineering International Book Series. N Y: Springer, 2006, pp. 557–572. doi: 10.1007/978-0-387-33532-2_24.
9. Kuchumov A.G. Mathematical modelling and biomechanical approach to describe the development, the diagnostics, and the treatment of oncological diseases. *Russian Journal of Biomechanics*, 2010, vol. 14, no. 4, pp. 42–69. (in Russian)
10. Khailov E.N., Klimenkova A.D., Korobeinikov A. Optimal control for anticancer therapy. In: Korobeinikov A., Caubergh M., Lázaro T., Sardanyés J. (eds), *Extended Abstracts Spring 2018*. Ser. Trends in Mathematics, vol. 11. Basel: Birkhäuser, 2019, pp. 35–43. doi: 10.1007/978-3-030-25261-8_6.
11. Bratus' A.S., Novozhilov A.S., Platonov A.P. *Dinamicheskie sistemy i modeli biologii* [Dynamic systems and models in biology]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2010, 400 p. ISBN: 978-5-9221-1192-8.
12. Tarasevich Yu.Yu. *Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie: Vvodnyi kurs* [Mathematical and computer modeling: Introductory course]. Moscow: Librokom Publ., 2013, 152 p. ISBN: 978-5-397-03828-7.
13. Hartman Ph. *Ordinary differential equations*. N Y: John Wiley & Sons, 1964, 612 p. Translated to Russian under the title *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya*. Moscow: Mir Publ., 1970, 720 p.

14. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. N.Y.; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. ISBN: 9780471522638. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p.
15. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Factorial Press, 2002, 824 p. ISBN: 5-88688-056-9.
16. Schättler H., Ledzewicz U. *Geometric optimal control: theory, methods and examples*. N Y; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2012, 640 p. ISBN: 978-1-4614-3834-2.
17. Schättler H., Ledzewicz U. *Optimal control for mathematical models of cancer therapies: an applications of geometric methods*. N Y; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2015, 496 p. doi: 10.1007/978-1-4939-2972-6.
18. Zelikin M.I., Borisov V.F. *Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering*. Boston: Birkhäuser, 1994, 244 p. doi: 10.1007/978-1-4612-2702-1.
19. Levin A.Yu. Non-oscillation of solutions of the equation $x^n + p_1(t)x^{n-1} + \dots + p_n(t)x = 0$. *Russian Math. Surveys*, 1969, vol. 24, no. 2, pp. 43–99. doi: 10.1070/RM1969v024n02ABEH001342.
20. Zelikin M.I., Zelikina L.F. The deviation of a functional from its optimal value under chattering decreases exponentially as the number of switchings grows. *Differ. Equ.*, 1999, vol. 35, no. 11, pp. 1489–1493.
21. Zhu J., Trélat E., Cerf M. Planar titling maneuver of a spacecraft: singular arcs in the minimum time problem and chattering. *Discrete Cont. Dyn.-B*, 2016, vol. 21, no. 4, pp. 1347–1388. doi: 10.3934/dcdsb.2016.21.1347.
22. Yegorov I., Mairet F., Gouzé J.-L. Optimal feedback strategies for bacterial growth with degradation, recycling, and effect of temperature. *Optim. Control Appl.*, 2018, vol. 39, no. 2, pp. 1084–1109. doi: 10.1002/oca.2398.
23. Grigorieva E., Khailov E. Chattering and its approximation in control of psoriasis treatment. *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B*, 2019, vol. 24, no. 5, pp. 2251–2280. doi: 10.3934/dcdsb.2019094.
24. Bonnans F., Martinon P., Giorgi D., Grélard V., Maindault S., Tissot O., Liu J. *BOCOP 2.0.5 – user guide*. 2017. Available at: URL: <http://bocop.org>.

Received January 16, 2020

Revised January 28, 2020

Accepted February 3, 2020

Funding Agency: The work of the first two authors was supported by the Russian Foundation for Basic Research jointly with the Department of Science and Technology of the Government of India (project no. 18-51-45003 IND_a).

Nikolai Leont'evich Grigorenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State Lomonosov University, Moscow, 119992, Russia,
e-mail: grigor@cs.msu.su.

Evgenii Nikolaevich Khailov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State Lomonosov University, Moscow, 119992, Russia,
e-mail: khailov@cs.msu.su.

Ellina Valer'evna Grigorieva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Department of Mathematics and Computer Sciences, Texas Woman's University, Denton, TX 76204, USA,
e-mail: egrigorieva@mail.twu.edu.

Anna Dmitrievna Klimenkova, undergraduate student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State Lomonosov University, Moscow, 119992, Russia,
e-mail: klimenkovaad@mail.ru.

Cite this article as: N. L. Grigorenko, E. N. Khailov, E. V. Grigorieva, A. D. Klimenkova. Optimal strategies in the treatment of cancers in the Lotka–Volterra mathematical model of competition. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 71–88.

УДК 517.977.1

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МАЛЫХ ВРЕМЕННЫХ ПРОМЕЖУТКАХ

М. И. Гусев

В данной работе изучается задача приближенного описания множеств достижимости на малых временных промежутках для аффинных по управлению систем с изопериметрическими ограничениями на управление. Под изопериметрическим ограничением понимается интегральное ограничение типа неравенства с подынтегральной функцией, зависящей от управляющих параметров и фазовых переменных системы. Ранее подобная задача рассматривалась в предположении, что подынтегральная функция зависит только от управляющих параметров, относительно которых является положительно определенной квадратичной формой. В этом случае было показано, что при дополнительных предположениях об асимптотике грамиана управляемости линеаризованной системы, такое множество достижимости оказывается выпуклым и асимптотически близким по форме к эллипсоиду в пространстве состояний при достаточно малой длине промежутка времени. Данный эллипсоид представляет собой множество достижимости линеаризованной вдоль траектории, отвечающей нулевому управлению, системы. В настоящей работе доказывается, что при небольшом усилении условий, накладываемых на грамиан управляемости, данный результат остается справедливым, если подынтегральная функция, задающая изопериметрическое ограничение, имеет вид суммы положительно определенной квадратичной формы от управляющих параметров и неотрицательной функции фазовых переменных. Данное асимптотическое представление имеет место, в частности, для достаточно широкого класса аффинных по управлению систем второго порядка при условии полной управляемости линеаризованной системы. Доказательство опирается на результаты теории сильно выпуклых множеств и функций.

Ключевые слова: управляемая система, изопериметрические ограничения, множество достижимости, асимптотика, грамиан управляемости.

M. I. Gusev. Asymptotic behavior of small-time reachable sets of nonlinear systems with isoperimetric constraints.

We study the problem of an approximate description of reachable sets over small time intervals for affine-control systems with isoperimetric control constraints. An isoperimetric constraint is understood as an integral constraint of inequality type with the integrand depending on the control parameters and state variables of the system. Previously, a similar problem was considered under the assumption that the integrand depends only on the control parameters and is a positive definite quadratic form in these parameters. In this case, it was shown that, under certain conditions imposed on the controllability Gramian of the linearized system, the reachable set is convex and asymptotically close in shape to an ellipsoid in the state space for a sufficiently small length of the time interval. This ellipsoid is the reachable set of the system linearized along the trajectory corresponding to the null control. In this paper, it is proved that, under a slight strengthening of the conditions imposed on the controllability Gramian, this result remains valid if the integrand defining the isoperimetric constraints has the form of the sum of a positive definite quadratic form in the control parameters and a nonnegative function of the state variables. This asymptotic representation holds, in particular, for a fairly wide class of second-order systems affine in the control under the condition that the linearized system is completely controllable. The proof is based on the results of the theory of strongly convex sets and functions.

Keywords: control system, isoperimetric constraints, reachable set, asymptotics, controllability Gramian.

MSC: 93B03

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-89-101

Введение

В данной работе исследуется задача описания множеств достижимости на малых временных промежутках для аффинных по управлению систем

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2(x(t))u(t), \quad x(0) = x^0, \quad (0.1)$$

с изопериметрическими ограничениями на управление. Под изопериметрическим ограничением мы далее подразумеваем интегральное ограничение типа неравенства с подынтегральной функцией, зависящей от управляющих параметров и фазовых переменных системы вида

$$J(u(\cdot)) := \int_0^{t_1} (Q(x(t)) + u^\top(t)Ru(t))dt \leq \mu^2, \quad (0.2)$$

где R — симметричная положительно определенная матрица, $Q(x)$ — неотрицательная функция, u , x — конечномерные векторы управляющих параметров и состояния системы, $\mu > 0$ — заданное число. Если управляемая системы линейна, начальное состояние системы фиксировано и $Q(x)$ — неотрицательно определенная квадратичная форма, то множество достижимости есть эллипсоид в пространстве состояний. Это следует из результатов монографии [1], где соответствующий факт доказан для информационных множеств в задаче наблюдения; частным случаем последних являются множества достижимости. Параметры эллипсоида в данном случае допускают конструктивное описание в виде решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для нелинейных управляемых систем множества достижимости в случае как геометрических, так и интегральных ограничений имеют более сложную структуру; они, как правило, невыпуклы и их построение требует значительных вычислительных затрат. При изучении свойств и вычислении множеств достижимости и траекторных трубок управляемых систем используются теория уравнений и неравенств Гамильтона — Якоби и принцип сравнения [2], методы эллипсоидальных и полиэдральных аппроксимаций [3–6], конечно-разностные и пиксельные методы [7; 8], методы, основанные на принципе максимума Понтрягина [9; 10]. Алгоритмы построения множеств достижимости для систем с интегральными ограничениями изучались в работах [11; 12]. Свойства выпуклости множеств достижимости нелинейных систем исследованы в [13; 14].

В данной статье мы рассматриваем поведение множеств достижимости нелинейных систем на малых промежутках времени. Геометрическая структура множеств достижимости на промежутках времени малой длины имеет важное значение при решении задач локального синтеза. Для систем с геометрическими ограничениями на управление данные вопросы были предметом исследования в ряде работ (см., например, [15; 16]). Асимптотическое поведение множеств достижимости линейных управляемых систем с интегральными ограничениями на управление на малых промежутках времени изучалось в [17].

Асимптотика множеств достижимости нелинейных систем с интегральными ограничениями была исследована в недавней работе (Гусев М.И., Осипов И.О. Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 86–99) в предположении, что подынтегральная функция в ограничении зависит только от управляющих параметров, относительно которых является положительно определенной квадратичной формой, т. е. при $Q(x) = 0$. Здесь выяснялись условия, при которых множество достижимости исходной нелинейной системы выпукло и ведет себя подобно множеству достижимости линеаризованной системы, когда длина промежутка времени стремится к нулю. Эти условия определяются поведением грамиана управляемости системы, линеаризованной вдоль траектории, которая отвечает нулевому управлению системы. Минимальное собственное число грамиана не должно стремиться к нулю слишком быстро; в этом случае множество достижимости оказывается асимптотически эквивалентным эллипсоиду в пространстве состояний при малой длине промежутка времени. Асимптотическая эквивалентность множеств определялась при этом через оценки хаусдорфова расстояния между множествами. В настоящей работе доказывается, что при небольшом усилении условий, накладываемых на грамиан управляемости, асимптотическая эквивалентность множеств имеет место для изопериметрического ограничения вида (0.2). Данные условия выполняются, в частности, для достаточно широкого класса аффинных по управлению систем второго порядка при

полной управляемости линеаризованной системы. Следуя [17], два выпуклых множества, зависящие от малого параметра, мы считаем асимптотически эквивалентными, если расстояние Банаха — Мазура между этими множествами стремится к нулю при стремлении к нулю малого параметра.

Схема доказательства в предлагаемой статье опирается на результаты [19]. Используя замену времени, исходное множество достижимости можно заменить множеством достижимости для управляемой системы на единичном интервале времени. При такой замене малый параметр (длина временного интервала для исходной системы) появляется в уравнениях системы и ограничениях. При этом ограничения на управление оказываются заданы сильно выпуклым множеством, принадлежащим шару малого радиуса в гильбертовом пространстве \mathbb{L}_2 , если величина малого параметра удовлетворяет неравенству (см., например, [13]), содержащему минимальное собственное число грамиана управляемости. Множество достижимости является образом данного множества при нелинейном отображении его в \mathbb{R}^n , который приближенно заменяется образом шара при линейной аппроксимации отображения. Дальнейшее доказательство использует соотношение между расстояниями Хаусдорфа и Банаха — Мазура, установленное в следующем ниже разделе.

1. Вспомогательные результаты

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые компактные множества; предполагаем, что нулевой вектор является внутренней точкой каждого из этих множеств. Расстояние Банаха — Мазура $\rho(X, Y)$ между X и Y определяется равенством

$$\rho(X, Y) := \log(r(X, Y) \cdot r(Y, X)), \quad r(X, Y) = \inf\{t \geq 1 : tX \supset Y\}.$$

Для выпуклых замкнутых множеств X, Y включение $tX \supset Y$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$t\delta(y|X) \geq \delta(y|Y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \|y\| = 1,$$

где $\delta(y|X)$ — опорная функция множества X . Отсюда следует формула

$$r(X, Y) = \max \left\{ 1, \sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|X)}{\delta(y|Y)} \right\}. \quad (1.1)$$

Заметим, что в силу условия $0 \in \text{int}Y$ выполняется неравенство $\delta(y|Y) > 0$ при $\|y\| \neq 0$.

Предположим далее, что рассматриваемые множества зависят от малого положительного параметра, при этом $X = X(\varepsilon), Y = Y(\varepsilon)$ — выпуклые компактные множества и нулевой вектор является внутренней точкой каждого из этих множеств для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Будем также считать, что многозначные отображения $X(\varepsilon), Y(\varepsilon)$ ограничены. Множества $X(\varepsilon), Y(\varepsilon)$ называются асимптотически эквивалентными [17], если $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из формулы (1.1) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Для того чтобы $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|X(\varepsilon))}{\delta(y|Y(\varepsilon))} = 1, \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|Y(\varepsilon))}{\delta(y|X(\varepsilon))} = 1. \quad (1.2)$$

Доказательство. Если выполнено условие (1.2), то из формулы (1.1) вытекает, что $r(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 1, r(Y(\varepsilon), X(\varepsilon)) \rightarrow 1$ и, следовательно, $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Докажем необходимость условий (1.2). Допустим, от противного, что данное условие не выполнено и пусть, для определенности, нарушается первое из двух предельных соотношений в (1.2). Тогда найдутся $\sigma > 0$ и последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ такие, что для бесконечного числа членов последовательности имеют место соотношения

$$\sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|X(\varepsilon_k))}{\delta(y|Y(\varepsilon_k))} \geq 1 + \sigma \quad \text{либо} \quad \sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|X(\varepsilon_k))}{\delta(y|Y(\varepsilon_k))} \leq 1 - \sigma.$$

В первом случае мы имеем $r(X(\varepsilon_k), Y(\varepsilon_k)) \geq 1 + \sigma$ и, соответственно, $\rho(X(\varepsilon_k), Y(\varepsilon_k)) \geq \log(1 + \sigma) > 0$. Во втором получаем

$$\frac{\delta(y|X(\varepsilon_k))}{\delta(y|Y(\varepsilon_k))} \leq 1 - \sigma, \quad \forall y, \quad \|y\| = 1$$

и, значит,

$$\frac{\delta(y|Y(\varepsilon_k))}{\delta(y|X(\varepsilon_k))} \geq \frac{1}{1 - \sigma},$$

откуда следует, что

$$\rho(X(\varepsilon_k), Y(\varepsilon_k)) \geq \log\left(1 + \frac{\sigma}{1 - \sigma}\right) > 0$$

для бесконечного числа членов последовательности ε_k . Последнее противоречит сходимости $\rho(X(\varepsilon_k), Y(\varepsilon_k))$ к нулю.

Лемма доказана.

Из условия $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выводим, что $h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где h обозначает хаусдорфово расстояние между множествами. Действительно, из леммы 1 мы получаем, что в этом случае выполняется соотношение (1.2). Следовательно, для любого $\sigma > 0$ найдется $\bar{\varepsilon}$ такое, что неравенства

$$\frac{\delta(y|X(\varepsilon))}{\delta(y|Y(\varepsilon))} \leq 1 + \sigma, \quad \frac{\delta(y|Y(\varepsilon))}{\delta(y|X(\varepsilon))} \leq 1 + \sigma$$

выполняются для всех $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| = 1$, $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. Из данных неравенств следует оценка

$$h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = \sup_{\|y\|=1} |\delta(y|X(\varepsilon)) - \delta(y|Y(\varepsilon))| \leq \sigma \max \left\{ \sup_{\|y\|=1} \delta(y|Y(\varepsilon)), \sup_{\|y\|=1} \delta(y|X(\varepsilon)) \right\},$$

которая означает, что $h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Обратное утверждение неверно, что показывает следующий пример. Пусть $X(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \varepsilon, |x_2| \leq \varepsilon\}$, $Y(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon^2\}$. Тогда $h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = (\sqrt{2} - 1)\varepsilon \rightarrow 0$, при этом $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = \log \sqrt{2} > 0$. Тем не менее при дополнительном предположении о скорости сходимости к нулю хаусдорфова расстояния между множествами в приведенной далее теореме доказано, что $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для $A \subset \mathbb{R}^n$ введем следующее обозначение: $\delta_{\min}(A) := \inf_{\|y\|=1} \delta(y|A)$.

Теорема 1. *Для того чтобы $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ достаточно выполнения условий*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon))}{\delta_{\min}(Y(\varepsilon))} = 0.$$

Доказательство. Обозначим $h(\varepsilon) = h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon))$, $\delta(\varepsilon) = \delta_{\min}(Y(\varepsilon))$. Из равенства $h(\varepsilon) = h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = \sup_{\|y\|=1} |\delta(y|X(\varepsilon)) - \delta(y|Y(\varepsilon))|$ следуют неравенства

$$-h(\varepsilon) \leq \delta(y|X(\varepsilon)) - \delta(y|Y(\varepsilon)) \leq h(\varepsilon),$$

справедливые для всех $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| = 1$. Поделив эти неравенства на положительную величину $\delta(y|Y(\varepsilon))$, получим оценку

$$\left| \sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|X(\varepsilon))}{\delta(y|Y(\varepsilon))} - 1 \right| \leq \sup_{\|y\|=1} \frac{h(\varepsilon)}{\delta(y|Y(\varepsilon))} \leq \frac{h(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}.$$

При делении неравенств на $\delta(y|X(\varepsilon))$ выводим

$$\left| \sup_{\|y\|=1} \frac{\delta(y|Y(\varepsilon))}{\delta(y|X(\varepsilon))} - 1 \right| \leq \sup_{\|y\|=1} \frac{h(\varepsilon)}{\delta(y|X(\varepsilon))} \leq \frac{h(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon) - h(\varepsilon)},$$

учитывая, что при достаточно малых ε в силу условий теоремы $\delta(\varepsilon) - h(\varepsilon) > 0$. Из полученных неравенств имеем соотношения (1.2) и, значит, в силу леммы 1 $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема доказана.

Заметим, что множества X, Y входят симметричным образом в определение $\rho(X, Y)$. Поэтому в формулировке теоремы можно $\delta_{\min}(Y(\varepsilon))$ заменить на $\delta_{\min}(X(\varepsilon))$.

2. Асимптотика множеств достижимости на малых временных промежутках

Рассмотрим аффинную по управлению нелинейную управляемую систему вида (0.1) на промежутке $0 \leq t \leq t_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, функции $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ считаем непрерывными и непрерывно дифференцируемыми. Начальное состояние x^0 фиксировано. Пусть интегральные ограничения на управление и траекторию заданы неравенством (0.2), где R — симметричная положительно определенная матрица, $Q(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, μ — положительное число. Далее будем обозначать через \mathbb{L}_2 гильбертово пространство интегрируемых с квадратом вектор-функций на отрезке $[0, t_1]$, скалярное произведение в котором определено равенством

$$(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^{t_1} u^\top(t) R v(t) dt;$$

$B(0, \mu) = \{u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : (u(\cdot), u(\cdot)) \leq \mu^2\}$ — шар радиуса $\mu > 0$ с центром в нуле. Множество управлений, удовлетворяющих ограничению (0.2), принадлежит $B(0, \mu)$. Будем предполагать, что для некоторого $t_1 = \bar{t}_1 > 0$ и для любого $u(\cdot) \in B(0, \mu)$ существует и единственно решение $x(t)$ системы (0.1), это решение определено на промежутке $[0, \bar{t}_1]$ и все траектории системы (0.1), отвечающие управлениям из $B(0, \mu)$, принадлежат компактному множеству $D \subset \mathbb{R}^n$. Далее будем рассматривать значения t_1 , не превосходящие \bar{t}_1 .

Обозначим через

$$G(t_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : J(u(\cdot)) \leq \mu^2, x = x(t_1, u(\cdot))\}$$

множество достижимости системы (0.1) в заданный момент t_1 . Напомним, что $J(u(\cdot))$ — интегральный функционал, задающий ограничения (0.2). Далее будем считать выполненным следующее условие.

Предположение. *Функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $Q(x)$ имеют непрерывные производные по x , которые удовлетворяют условиям Липшица: для всех $x_1, x_2 \in D$*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_1) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_2) \right\| &\leq L_3 \|x_1 - x_2\|, & \left\| \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_1) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_2) \right\| &\leq L_4 \|x_1 - x_2\|, \\ \left\| \frac{\partial Q}{\partial x}(x_1) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x_2) \right\| &\leq L_5 \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

где $L_i \geq 0$, $i = 3, 4, 5$.

Мы изучаем асимптотику множеств достижимости $G(t_1)$ при фиксированном μ в предположении, что интервал $[0, t_1]$ является малым. С использованием замены времени задача описания множества достижимости на малом интервале может быть сведена к аналогичной задаче на фиксированном интервале для системы, уравнения которой и интегральные ограничения на управление зависят от малого параметра [19]. Малый параметр далее будем обозначать через ε : $t_1 = \varepsilon$.

Произведя замену времени $t = \varepsilon\tau$ и положив $y(\tau) = x(\varepsilon\tau)$, $v(\tau) = \varepsilon R^{1/2} u(\varepsilon\tau)$, мы приходим к уравнению

$$\dot{y}(\tau) = \varepsilon f_1(y(\tau)) + f_2(y(\tau)) R^{-1/2} v(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad y(0) = x^0; \quad (2.1)$$

ограничения на управление $v(\cdot)$ при данной замене преобразуются в неравенство

$$\int_0^1 (\varepsilon^2 Q(y(\tau)) + v^\top(\tau)v(\tau)) dt \leq (\mu\sqrt{\varepsilon})^2. \quad (2.2)$$

Здесь $R^{1/2}$ — квадратный корень из положительно определенной матрицы R . Заметим, что траектории системы (2.1), (2.2), как и ранее, принадлежат D . Множество достижимости системы (2.1), (2.2) в момент $\tau = 1$, как нетрудно заметить, совпадает с множеством достижимости исходной системы $G(\varepsilon)$. Далее мы сохраним обозначение \mathbb{L}_2 для пространства вектор-функций на $[0, 1]$ со скалярным произведением

$$(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^1 u^\top(\tau)v(\tau) d\tau,$$

а через $B(a, \mu)$ будем обозначать шар радиуса μ с центром в точке a в данном пространстве. Будем далее также использовать обозначение $\mu(\varepsilon) = \mu\sqrt{\varepsilon}$.

Определим функционал $\varphi(v(\cdot)) : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$\varphi(v(\cdot)) = \int_0^1 Q(y(t)) dt,$$

где $y(t)$ — решение системы (2.1). Из [19, лемма 2] следует, что $\varphi(v(\cdot))$ имеет производную, которая удовлетворяет условию Липшица с константой, обозначаемой далее через $L_2(\varepsilon)$, на шаре $B(0, \mu(\varepsilon)) \subset \mathbb{L}_2$.

Обозначим через U_ε множество управлений для системы (2.1), удовлетворяющих неравенству (2.2). С учетом введенных обозначений данное множество можно представить в виде

$$U_\varepsilon = \{v(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : \varepsilon^2 \varphi(v(\cdot)) + (v(\cdot), v(\cdot)) \leq \mu^2(\varepsilon)\}.$$

При ε , удовлетворяющем неравенству $\varepsilon \varphi(0) \leq \mu^2$, справедливо включение $0 \in U_\varepsilon$. Обозначим $\alpha(\varepsilon) := h(U_\varepsilon, B(0, \mu(\varepsilon)))$ — хаусдорфово расстояние между множествами U_ε и $B(0, \mu(\varepsilon))$.

Лемма 2. *Существует не зависящая от ε константа $k > 0$ такая, что для достаточно малых ε выполняется неравенство*

$$\alpha(\varepsilon) \leq k\varepsilon^{3/2} \quad (\alpha(\varepsilon) \leq k\varepsilon^2, \text{ если } \varphi(0) = 0).$$

Доказательство. Далее считаем, что $\varepsilon \varphi(0) \leq \mu^2$, $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_1$, и, следовательно, $U_\varepsilon \neq \emptyset$. Поскольку $U_\varepsilon \subset B(0, \mu(\varepsilon))$, то достаточно доказать, что для любого $v \in B(0, \mu(\varepsilon))$ найдется $\bar{v} \in U_\varepsilon$ такой, что $\|v - \bar{v}\| \leq k\varepsilon^{3/2}$ (либо $\|v - \bar{v}\| \leq k\varepsilon^2$), где $k > 0$ не зависит от ε и v . Будем искать \bar{v} в виде $\bar{v} = (1 - p)v$, $0 \leq p < 1$. Число p должно удовлетворять неравенству

$$\varepsilon^2 \varphi((1 - p)v) + (1 - p)^2 (v, v) \leq \mu^2(\varepsilon). \quad (2.3)$$

По теореме о среднем $\varphi((1 - p)v) - \varphi(0) = (1 - p)\varphi'(\xi)v$, где вектор ξ принадлежит отрезку $[0, (1 - p)v] \subset B(0, \mu(\varepsilon))$. Из липшицевости φ' на шаре $B(0, \mu(\varepsilon))$ следует

$$\|\varphi'(\xi) - \varphi'(0)\| \leq L_2(\varepsilon)(1 - p)\|v\| \leq L_2(\varepsilon)\mu(\varepsilon) \leq m\sqrt{\varepsilon},$$

где константа m не зависит от ε . Последнее неравенство здесь вытекает из ограниченности функции $L_2(\varepsilon)$, можно положить, например, $m = L_2(\bar{\varepsilon}_1)\mu$. Таким образом, при достаточно малых ε

$$\varphi((1 - p)v) \leq \varphi(0) + M(\varepsilon)\|v\|(1 - p),$$

где

$$M(\varepsilon) = \begin{cases} 2\|\phi'(0)\|, & \text{если } \phi'(0) \neq 0, \\ m\sqrt{\varepsilon}, & \text{если } \phi'(0) = 0. \end{cases}$$

Используя полученное неравенство, оценим левую часть (2.3) сверху следующим числом

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\varphi(0) + M(\varepsilon)\|v\|(1-p)) + (1-p)^2\|v\|^2 &\leq \varepsilon^2(\varphi(0) + M(\varepsilon)\|v\|) + (1-p)\|v\|^2 \\ &\leq \varepsilon^2(\varphi(0) + M(\varepsilon)\mu(\varepsilon)) + (1-p)\mu^2(\varepsilon). \end{aligned}$$

С учетом последнего неравенства можно утверждать, что (2.3) будет выполнено, если положить

$$p = \frac{\varepsilon^2(\varphi(0) + M(\varepsilon)\mu(\varepsilon))}{\mu^2(\varepsilon)} = \varepsilon\varphi(0)/\mu^2 + M(\varepsilon)\varepsilon^{3/2}/\mu.$$

При достаточно малых ε при $\varphi(0) \neq 0$ выполняется неравенство $p \leq k_1\varepsilon$, где $k_1 = 2\varphi(0)/\mu^2$, следовательно,

$$\|v - \bar{v}\| = \|v - (1-p)v\| \leq p\|v\| \leq k_1\varepsilon\mu(\varepsilon) = k_1\mu\varepsilon^{3/2}.$$

Если $\varphi(0) = 0$, то $p = M(\varepsilon)\varepsilon^{3/2}/\mu$, и мы получаем

$$\|v - \bar{v}\| = \|v - (1-p)v\| \leq p\|v\| \leq \mu(\varepsilon)M(\varepsilon)\varepsilon^{3/2}/\mu \leq k\varepsilon^2.$$

Заметим, что если выполняются одновременно равенства $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = 0$, то $\alpha(\varepsilon) \leq k\varepsilon^{5/2}$.

Лемма доказана.

Из доказательства леммы следует включение

$$B(0, \mu\varepsilon^{1/2} - k\varepsilon^{3/2}) \subset U_\varepsilon \subset B(0, \mu\varepsilon^{1/2}). \quad (2.4)$$

Рассмотрим семейство отображений $F_\varepsilon : \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ определяемых равенством

$$F_\varepsilon(v(\cdot)) = y_\varepsilon(1, v(\cdot)).$$

Здесь $y_\varepsilon(t, v(\cdot))$ — соответствующее управлению $v(\cdot)$ решение системы (2.1). Тогда, в силу того что $y_\varepsilon(1, v(\cdot)) = x(\varepsilon, u(\cdot))$ при соответствующей замене времени и управления, множество достижимости $G(\varepsilon)$ представимо в виде $G(\varepsilon) = \{F_\varepsilon(v(\cdot)) : v(\cdot) \in U_\varepsilon\}$.

Отображение $F_\varepsilon(v(\cdot))$ дифференцируемо, его производная определяется соотношением

$$F'_\varepsilon(v(\cdot))\Delta v(\cdot) = \Delta y(1).$$

Здесь $\Delta y(\tau)$ — решение линеаризованной в окрестности $y(\tau, v(\cdot)), v(\cdot)$ системы

$$\dot{\Delta y}(\tau) = \varepsilon A(\tau)\Delta y(\tau) + B(\tau)\Delta v(\tau), \quad \tau \in [0, 1], \quad \Delta y(0) = 0, \quad (2.5)$$

где

$$A(\tau) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(y(\tau)) + \sum_{i=1}^r \frac{\partial f_2^i}{\partial x}(y(\tau))v_i(\tau), \quad B(\tau) = f_2(y(\tau))R^{-1/2}.$$

Отображение $F'_\varepsilon(v(\cdot))$ удовлетворяет условию Липшица с константой

$$L(\varepsilon) = L_0 + L_1\varepsilon(L_0, L_1 \geq 0).$$

Если функция f_2 в уравнении системы не зависят от состояния ($f_2(x) = f_2$ — постоянная матрица), то $L_0 = 0$ [20].

Наряду с множеством $G(\varepsilon)$ будем далее рассматривать множество

$$\hat{G}(\varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n : y = F'_\varepsilon(0)v(\cdot), v(\cdot) \in B(0, \mu(\varepsilon))\} = F'_\varepsilon(0)B(0, \mu(\varepsilon)).$$

Данное множество является множеством достижимости линеаризованной системы (2.5), отвечающей траектории системы (2.1), порожденной нулевым управлением. При этом ограничения на управление $\Delta v(\tau)$ заданы неравенством

$$\int_0^1 \Delta v^\top(\tau) \Delta v(\tau) d\tau \leq \mu^2(\varepsilon) = (\mu\sqrt{\varepsilon})^2.$$

Если сделать обратную замену времени $\tau = t/\varepsilon$ и обозначить $\Delta u(t) = 1/\varepsilon R^{-1} \Delta v(t/\varepsilon)$, то нетрудно убедиться, что $\hat{G}(\varepsilon)$ — это множество достижимости, полученное при линеаризации исходной системы (0.1) вдоль траектории $x(t, x^0, 0)$, если изопериметрическое ограничение (0.2) заменено на ограничение

$$\int_0^\varepsilon \Delta u^\top(\tau) R \Delta u(\tau) d\tau \leq \mu^2.$$

Далее мы изучаем соотношение между множествами достижимости нелинейной системы $G(\varepsilon)$ и ее линеаризации $\hat{G}(\varepsilon)$ при ε , стремящемся к нулю. Наша цель — получить достаточные условия, при которых данные множества являются асимптотически эквивалентными с точностью до сдвига.

Обозначим через W_ε грамиан управляемости линеаризованной системы (2.1), который определяется равенством

$$W_\varepsilon = \int_0^1 X_\varepsilon(1, \xi) B(\xi) B^\top(\xi) X_\varepsilon^\top(1, \xi) d\xi.$$

Здесь $X_\varepsilon(\tau, \xi)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы

$$\dot{X}_\varepsilon(\tau, \xi) = \varepsilon A(\tau) X_\varepsilon(\tau, \xi), \quad X_\varepsilon(\xi, \xi) = I,$$

I — единичная матрица.

Известно (см., например, [19]), что симметричная, неотрицательно определенная матрица W_ε связана с оператором $F'_\varepsilon(0)$ равенством $W_\varepsilon = F'_\varepsilon(0) F'_\varepsilon(0)^*$, где $F'_\varepsilon(0)^*$ — сопряженный оператор.

Заметим, что полная управляемость линеаризованной системы (2.5) на отрезке $[0, 1]$ эквивалентна невырожденности грамиана W_ε . В этом случае оператор $F'_\varepsilon(0)$ является сюръективным ($F'_\varepsilon(0)\mathbb{L}_2 = \mathbb{R}^n$) и множество достижимости $\hat{G}(\varepsilon)$ имеет вид

$$\hat{G}(\varepsilon) = F'_\varepsilon(0)B(0, \mu(\varepsilon)) = \mu(\varepsilon)F'_\varepsilon(0)B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top W_\varepsilon^{-1}x \leq \mu^2(\varepsilon)\},$$

т. е. это множество есть эллипсоид в пространстве \mathbb{R}^n . Для опорной функции множества $\hat{G}(\varepsilon)$ и величины $\delta_{\min}(\hat{G}(\varepsilon))$ мы получаем выражения

$$\delta(x|\hat{G}(\varepsilon)) = \mu(\varepsilon)\sqrt{x^\top W_\varepsilon x}, \quad \delta_{\min}(\hat{G}(\varepsilon)) = \min_{\|x\|=1} \delta(x|\hat{G}(\varepsilon)) = \mu(\varepsilon)\sqrt{\nu(\varepsilon)},$$

где $\nu(\varepsilon)$ — минимальное собственное число грамиана управляемости W_ε . Заметим, что $\nu(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon > 0$, если линеаризованная система (2.5) вполне управляема на отрезке $[0, 1]$.

Теорема 2. Пусть линеаризованная система (2.5) вполне управляема на $[0, 1]$ и выполнены следующие условия:

$$\frac{\mu^2(\varepsilon)L^2(\varepsilon)}{\nu(\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \frac{\alpha(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)\sqrt{\nu(\varepsilon)}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.6)$$

Тогда при достаточно малых ε множество $G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0)$ выпукло и асимптотически эквивалентно множеству $\hat{G}(\varepsilon)$, т. е. $\rho(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0), \hat{G}(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из управляемости линеаризованной системы следует, что $\hat{G}(\varepsilon)$ — невырожденный эллипсоид с центром в нуле. Значит, нулевой вектор является внутренней точкой $\hat{G}(\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$.

Покажем, что нулевой вектор принадлежит внутренности $G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Действительно, из (2.4) вытекает, что $B(0, \mu\varepsilon^{1/2}/2) \subset U_\varepsilon$ при $\varepsilon \leq \mu/2k$, $\varepsilon\varphi(0) \leq \mu^2$, $\varepsilon \leq \bar{t}_1$. Выберем $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее данным неравенствам. Рассмотрим отображение $g_\varepsilon(v) = F_\varepsilon(v) - F_\varepsilon(0)$. Очевидно, $g_\varepsilon(0) = 0$, $g'_\varepsilon(0) = F'_\varepsilon(0)$ и, значит, $g'_\varepsilon(0)\mathbb{L}_2 = \mathbb{R}^n$. По теореме Люстерника [21, с. 11] найдутся $a > 0$, $\bar{\rho} > 0$ такие, что для любого $\rho \leq \bar{\rho}$ имеет место включение $g_\varepsilon(B(0, \rho)) \supset B(g_\varepsilon(0), a\rho) = B(0, a\rho)$. Следовательно, при $\rho \leq \min\{\mu\varepsilon^{1/2}/2, \bar{\rho}\}$ мы получаем включение

$$g_\varepsilon(U_\varepsilon) \supset g_\varepsilon(B(0, \rho)) \supset B(0, a\rho),$$

означающее, что нуль — внутренняя точка $G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0) = g_\varepsilon(U_\varepsilon)$. Заметим, что мы используем здесь одно и то же обозначение $B(0, \rho)$ для шара в разных пространствах (\mathbb{L}_2 и \mathbb{R}^n).

Введем множество $\bar{G}(\varepsilon) := F'_\varepsilon(0)U_\varepsilon$ и оценим хаусдорфово расстояние между $\bar{G}(\varepsilon)$ и $G(\varepsilon)$. Обозначим через $L_1(\varepsilon)$ константу Липшица для функционала $\varphi(v)$ на шаре $B(0, \mu(\varepsilon))$, и пусть $\bar{m}(\varepsilon) = \sup\{\|\varphi'(v)\| : v \in B(0, \mu(\varepsilon))\}$. Тогда из результатов работы [19] имеем, что если выполнены неравенства

$$\varepsilon^2 \leq \min\left\{\frac{1}{L_1(\varepsilon)}, \frac{\mu(\varepsilon)}{\bar{m}(\varepsilon)}\right\}, \quad 16\mu^2(\varepsilon)L^2(\varepsilon) \leq \nu(\varepsilon),$$

то множество $U_\varepsilon \subset \mathbb{L}_2$ сильно выпукло и множество $G(\varepsilon)$ выпукло. Из выпуклости множества U_ε следует выпуклость $\bar{G}(\varepsilon)$. Так как $\mu(\varepsilon) = \mu\sqrt{\varepsilon}$, то первое из приведенных неравенств всегда выполнено для достаточно малых ε . Если какой-то из знаменателей дробей в этом неравенстве обращается в нуль, то вместо него можно подставить любую положительную константу. Второе неравенство выполняется для достаточно малых ε , это следует из условия (2.6). Таким образом, существует $\bar{\varepsilon} > 0$ такое, что множества $G(\varepsilon), \bar{G}(\varepsilon)$ выпуклы при $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. В дальнейшем мы предполагаем, что $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.

Пусть $v = v(\cdot) \in U_\varepsilon$, тогда

$$F_\varepsilon(v) - F_\varepsilon(0) = F'_\varepsilon(0)v + r(\varepsilon, v),$$

где $\|r(\varepsilon, v)\| \leq L(\varepsilon)\|v\| \leq L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon)$. Отсюда получаем по схеме работы [18], что

$$h(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0), \bar{G}(\varepsilon)) \leq L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon). \quad (2.7)$$

Далее, очевидно, что

$$h(\hat{G}(\varepsilon), \bar{G}(\varepsilon)) \leq \|F'_\varepsilon(0)\|h(U_\varepsilon, B(0, \mu(\varepsilon))). \quad (2.8)$$

Норма оператора $F'_\varepsilon(0)$ определяется следующим выражением:

$$\|F'_\varepsilon(0)\| = \max_{\|v\| \leq 1} \|F'_\varepsilon(0)v\| = \max\{\|x\| : x \in F'_\varepsilon(0)B(0, 1)\} = \max\{\|x\| : x^\top W_\varepsilon^{-1}x \leq 1\}.$$

Решим задачу максимизации $\|x\|^2$ при ограничении, заданном квадратичным неравенством $x^\top W_\varepsilon^{-1}x \leq 1$. Приравняв нулю градиент функции Лагранжа $\|x\|^2 - \lambda x^\top W_\varepsilon^{-1}x$, где λ — неотрицательный множитель Лагранжа, получим

$$W_\varepsilon^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x, \quad \|x\|^2 = \lambda.$$

Отсюда следует, что $\frac{1}{\lambda}$ — минимальное собственное число матрицы W_ε^{-1} , и значит λ — максимальное собственное число грамиана управляемости W_ε , которое обозначим через $\eta(\varepsilon)$. Таким образом, $\|F'_\varepsilon(0)\| = \sqrt{\eta(\varepsilon)}$, где $\eta(\varepsilon)$ — ограниченная на любом конечном отрезке функция. Поэтому далее можно считать, что при $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ выполняется неравенство $\|F'_\varepsilon(0)\| \leq k_1$ для некоторой константы k_1 .

В силу неравенств (2.7), (2.8) справедлива оценка

$$h(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0), \hat{G}(\varepsilon)) \leq L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon) + kh(U_\varepsilon, B(0, \mu(\varepsilon))) = L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon) + k_1\alpha(\varepsilon),$$

из которой с учетом леммы 2 получаем, что $h(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0), \hat{G}(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом в силу условий теоремы имеем

$$\frac{h(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0), \hat{G}(\varepsilon))}{\delta_{\min}(\hat{G}(\varepsilon))} \leq \frac{L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon) + k_1\alpha(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)\sqrt{\nu(\varepsilon)}} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из леммы 1 следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Если $\varphi(0) = 0$, то в силу леммы 2 $\alpha(\varepsilon) \leq k\varepsilon^2$. В этом случае условие $\alpha(\varepsilon)/(\mu(\varepsilon)\sqrt{\nu(\varepsilon)}) \rightarrow 0$ теоремы 2 будет выполнено, если $\varepsilon^3/\nu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Величина $L^2(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon)$ имеет порядок ε^3 , если f_2 не зависит от x ; в этом случае требование $L^2(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon)/\nu(\varepsilon) \rightarrow 0$ также эквивалентно условию $\varepsilon^3/\nu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если же $f_2 = f_2(x)$, то $L^2(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon)$ имеет, вообще говоря, порядок ε .

Ранее аналог теоремы 2 доказан для случая, когда изопериметрические ограничения на управление не зависят от траектории системы: $Q(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Если $Q(x(t, 0)) \equiv 0$, то $\varphi(0) = 0$. В данном случае добавление ограничений на траекторию системы не влияет на качественный характер поведения множеств достижимости при малых ε .

Принимая во внимание асимптотику минимального собственного числа грамиана управляемости для линейных стационарных систем с малым параметром [20], получим

Следствие. Пусть управляемая система второго порядка имеет вид

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2u(t), \quad x(0) = x^0, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon,$$

$x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$, f_2 — постоянная матрица размеров $2 \times r$. Пусть $f_1(x^0) = 0$ и пара $A := \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^0)$, f_2 вполне управляема. Пусть $Q(x^0) = 0$.

Тогда множество $G(\varepsilon) - x^0$ выпукло при достаточно малых ε и асимптотически эквивалентно $\hat{G}(\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Управление $u(t) = 0$, $0 \leq t \leq \varepsilon$ порождает траекторию $x(t, 0) \equiv x^0$, $0 \leq t \leq \varepsilon$. В этом случае $Q(x(t, 0)) \equiv 0$ и, следовательно, $\varphi(0) = 0$. Кроме того, имеют место равенства $F_\varepsilon(0) = y_\varepsilon(1, 0) = x(\varepsilon, 0) = x^0$.

Если число управляющих параметров $r \geq 2$ и матрица f_2 имеет ранг 2, то $\nu(\varepsilon) \geq k$, где k — положительное число. Если $\text{rank} f_2 = 1$, то при достаточно малых ε имеет место неравенство $\nu(\varepsilon) \geq k_1\varepsilon^2$ для некоторого $k_1 > 0$ [18]. В любом из этих случаев $\varepsilon^3/\nu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и, следовательно, $\rho(G(\varepsilon) - x^0, \hat{G}(\varepsilon)) \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е. Для расстояния Банаха — Мазура справедливо очевидное равенство $\rho(sX, sY) = \rho(X, Y)$ для $s > 0$. Поэтому при выполнении условий теоремы 2 имеет место соотношение $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(s(\varepsilon)(G(\varepsilon) - F_\varepsilon(0)), s(\varepsilon)\hat{G}(\varepsilon)) = 0$ для любой функции $s(\varepsilon)$ с положительными значениями. Масштабирующий множитель $s(\varepsilon)$ можно выбирать из условия (см., например, [18])

$$\delta_{\max}(s(\varepsilon)\hat{G}(\varepsilon)) = \max_{\|x\|=1} \delta(x|s(\varepsilon)\hat{G}(\varepsilon)) = s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)\sqrt{\eta(\varepsilon)} = 1,$$

что позволяет избежать стягивания к нулю сравниваемых множеств. Равенство

$$s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)\sqrt{\eta(\varepsilon)} = 1,$$

как нетрудно заметить, означает, что наибольшая из полуосей эллипсоида $s(\varepsilon)\hat{G}(\varepsilon)$ равна единице.

Заключение

В данной работе исследовано асимптотическое поведение множеств достижимости нелинейных управляемых систем на малых промежутках времени. Ограничения на управление и траекторию заданы интегральным неравенством, в котором подынтегральная функция представляет собой сумму дифференцируемой функции от состояния системы и квадратичной выпуклой функции управляющих параметров. Получены достаточные условия, при выполнении которых множество достижимости нелинейной системы является выпуклым и асимптотически эквивалентным множеству достижимости линеаризованной вдоль траектории, отвечающей нулевому управлению, системы при достаточно малой длине промежутка. Эти достаточные условия зависят от поведения минимального собственного числа грамиана управляемости линеаризованной системы, которая после замены времени описывается линейным дифференциальным уравнением с малым параметром в правой части. Если подынтегральная функция в ограничениях обращается в нуль на нулевом управлении, данные условия близки к ранее полученным для случая квадратичных интегральных ограничений на управление. Асимптотическая близость множеств ранее нами определялась через поведение хаусдорфова расстояния между ними, в этой статье мы определяем соответствующее понятие, используя метрику Банаха — Мазура. Отдельный раздел статьи посвящен выяснению соотношения между используемыми конструкциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Boston: Birkhäuser, 2014. 445 с.
3. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
4. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
5. Althoff M., Krogh V.H. Reachability analysis of nonlinear differential-algebraic systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2014. Vol. 59, iss. 2. P. 371–383. <https://doi.org/10.1109/TAC.2013.2285751>.
6. Костоусова Е.К. Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.
7. Lempio F., Veliov V.M. Discrete approximations of differential inclusions // Mitteilungen der GAMM. 1998. Vol. 21, no. 2. С. 101–135.
8. Незнахин А. А., Ушаков В. Н. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 6. С. 895–908.
9. Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.
10. Baier R., Gerdtts M., Xausa I. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2013. Vol. 3, no. 3. P. 519–548. <https://doi.org/10.3934/naco.2013.3.519>.
11. Guseinov Kh.G., Nazlipinar A.S. Attainable sets of the control system with limited resources // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 261–268.
12. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Differential Equations Appl. 2007. Vol. 14, no. 1-2. P. 57–73.
13. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Ser. A: Math. Analysis. 2004. Vol. 11, no. 2-3. P. 255–267.
14. Райсиг Г. Выпуклость множеств достижимости систем управления // Автоматика и телемеханика. 2007. № 9. С. 64–78.
15. Krener A., Schättler H. The structure of small-time reachable sets in low dimensions // SIAM J. Control Optim. 1989. Vol. 27, no. 1. P. 120–147. <https://doi.org/10.1137/0327008>.

16. **Schättler H.** Small-time reachable sets and time-optimal feedback control // *Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control* / eds. B.S. Mordukhovich, H.J. Sussmann. N Y: Springer, 1996. P. 203–225. (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications.; vol. 78). https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8489-2_9.
17. **Goncharova E., Ovseevich A.** Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set // *J. Optim. Theory Appl.* 2016. Vol. 168, no. 2. P. 615–624. <https://doi.org/10.1007/s10957-015-0754-4>.
18. **Gusev M.I., Osipov I.O.** On convexity of small-time reachable sets of nonlinear control systems // *AIP Conference Proceedings* / M.D. Todorov. N Y, Melville: American Institute of Physics, 2019. Vol. 2164, iss. 1. Paper 060007. 9 p. <https://doi.org/10.1063/1.5130809>.
19. **Gusev M.I.** On Convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints // *IFAC-PapersOnLine*. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 207–212. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.382>.
20. **Gusev M.I.** Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter // *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Proc. Internat. Conf. (MOTOR 2019)*. 2019. P. 461–473. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11548). https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_32.
21. **Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.** Теорема Люстерника и теория экстремума // *Успехи мат. наук* 1980. Т. 35, № 6. С. 11–46.

Поступила 24.12.2019

После доработки 7.02.2020

Принята к публикации 10.02.2020

Гусев Михаил Иванович

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;

ведущий науч. сотрудник

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: gmi@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation*. Basel: Birkhäuser, 2014, 445 p. ISBN: 978-3-319-10277-1.
3. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997, 321 p. ISBN: 978-0-8176-3699-9.
4. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem: Metod ellipsoidov* [Estimation of the phase state of dynamical systems: The method of ellipsoids]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 320 p. ISBN: 5-02-013899-1.
5. Althoff M., Krogh B.H. Reachability analysis of nonlinear differential-algebraic systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2014, vol. 59, no. 2, pp. 371–383. doi: 10.1109/TAC.2013.2285751.
6. Kostousova E.K. External and internal parallelotopic estimates for attainability sets. *Vychisl. Tekhnol.*, 1998, vol. 3, no. 2, pp. 11–20 (in Russian).
7. Lempio F., Veliov V.M. Discrete approximations of differential inclusions. *Mitteilungen der GAMM*, 1998, vol. 21, no. 2, pp. 101–135.
8. Neznakhin A.A., Ushakov V.N. A grid method for the approximate construction of the viability kernel for a differential inclusion. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2001, vol. 41, no. 6, pp. 846–859.
9. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Computer Systems Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
10. Baier R., Gerdtts M., Xausa I. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2013, vol. 3, no. 3, pp. 519–548. doi: 10.3934/naco.2013.3.519.
11. Guseinov Kh.G., Nazlipinar A.S. Attainable sets of the control system with limited resources. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 261–268 (in Russian).

12. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 2007, vol. 14, no. 1-2, pp. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6.
13. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Math. Analysis*, 2004, vol. 11, no. 2-3, pp. 255–267.
14. Reißig G. Convexity of reachable sets of nonlinear ordinary differential equation. *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 9, pp. 1527–1543. doi: 10.1134/S000511790709007X.
15. Krener A., Schättler H. The structure of small-time reachable sets in low dimensions. *SIAM J. Control Optim.*, 1989, vol. 27, no. 1, pp. 120–147. doi: 10.1137/0327008.
16. Schättler H. Small-time reachable sets and time-optimal feedback control. In: B.S. Mordukhovich, H.J. Sussmann (eds.) *Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control*, The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, vol. 78, N Y: Springer, 1996, pp. 203–225. doi: 10.1007/978-1-4613-8489-2_9.
17. Goncharova E., Ovseevich A. Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set. *J. Optim. Theory Appl.*, 2016, vol. 168, no. 2, pp. 615–624. doi: 10.1007/s10957-015-0754-4.
18. Gusev M.I., Osipov I.O. On convexity of small-time reachable sets of nonlinear control systems. In: M.D. Todorov (eds.) *AMiTaNS'19, AIP Conference Proceedings*, N Y, Melville: American Institute of Physics, 2019, vol. 2164, iss. 1. Paper 060007. doi: 10.1063/1.5130809.
19. Gusev M.I. On Convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 207–212. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.382.
20. Gusev M.I. Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter. In: *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, Proc. Internat. Conf. (MOTOR 2019), Lecture Notes in Computer Science, vol. 11548, 2019, pp. 461–473. doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_32.
21. Dmitruk A.V., Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. Lyusternik's theorem and the theory of extrema. *Russian Math. Surveys*, 1980, vol. 35, no. 6, pp. 11–51. doi: 10.1070/RM1980v035n06ABEH001973.

Received December 24, 2019

Revised February 7, 2020

Accepted February 10, 2020

Mikhail Ivanovich Gusev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: gmi@imm.uran.ru.

Cite this article as: M.I. Gusev. Asymptotic behavior of small-time reachable sets of nonlinear systems with isoperimetric constraints, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 89–101.

УДК 517.977

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ДВУМЯ МАЛЫМИ СОПОДЧИНЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

А. Р. Данилин

Рассматривается задача оптимального граничного управления решениями уравнения эллиптического типа в ограниченной области с гладкой границей с малым коэффициентом при операторе Лапласа и малым, соподчиненным с первым, коэффициентом при граничном условии и интегральными ограничениями на управление.

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon := -\varepsilon^2 \Delta z + a(x)z = f(x), & x \in \Omega, \quad z \in H^1(\Omega), \\ l_{\varepsilon, \beta} z := \varepsilon^\beta \frac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), & x \in \Gamma, \end{cases}$$

со следующим функционалом качества

$$J(u) := \|z - z_d\|^2 + \nu^{-1} \|u\|^2 \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U},$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\beta \geq 0$, $\beta \in \mathbb{Q}$, $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций, $\partial z / \partial n$ — производная функции z в точке $x \in \Gamma$ по направлению внешней (по отношению к области Ω) нормали,

$$a(\cdot), f(\cdot), z_d(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad g(\cdot) \in C^\infty(\Gamma), \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad a(x) \geq \alpha^2 > 0,$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_r := \{u(\cdot) \in L_2(\Gamma) : \|u\| \leq r\}.$$

Здесь через $\|\cdot\|$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Omega)$, а через $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2(\Gamma)$. Получено полное асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения рассматриваемой задачи в случае, когда $0 < \beta < 3/2$.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

A. R. Danilin. Asymptotics of a solution to a problem of optimal boundary control with two small cosubordinate parameters.

We consider a problem of optimal boundary control for solutions of an elliptic type equation in a bounded domain with smooth boundary with a small coefficient at the Laplace operator, a small coefficient, cosubordinate with the first, at the boundary condition, and integral constraints on the control:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon := -\varepsilon^2 \Delta z + a(x)z = f(x), & x \in \Omega, \quad z \in H^1(\Omega), \\ l_{\varepsilon, \beta} z := \varepsilon^\beta \frac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), & x \in \Gamma, \end{cases}$$

$$J(u) := \|z - z_d\|^2 + \nu^{-1} \|u\|^2 \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U},$$

where $0 < \varepsilon \ll 1$, $\beta \geq 0$, $\beta \in \mathbb{Q}$, $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ is the Sobolev function space, $\partial z / \partial n$ is the derivative of z at the point $x \in \Gamma$ in the direction of the outer (with respect to the domain Ω) normal,

$$a(\cdot), f(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad g(\cdot) \in C^\infty(\Gamma), \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad a(x) \geq \alpha^2 > 0,$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_r := \{u(\cdot) \in L_2(\Gamma) : \|u\| \leq r\}.$$

Here $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|$ are the norms in the spaces $L_2(\Omega)$ and $L_2(\Gamma)$, respectively. We find the complete asymptotic expansion of the solution of the problem in the powers of the small parameter in the case where $0 < \beta < 3/2$.

Keywords: singular problems, optimal control, boundary value problems for systems of partial differential equations, asymptotic expansions.

MSC: 35C20, 35B25, 76M45, 93C70

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-102-111

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) — ограниченная область с границей $\Gamma := \partial\Omega$. Будем предполагать, что $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ есть многообразие с краем Γ класса C^∞ , расположенное по одну сторону от Γ .

Рассматривается следующая задача граничного оптимального управления [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.9)]

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon := -\varepsilon^2 \Delta z + a(x)z = f(x), & x \in \Omega, \quad z \in H^1(\Omega), \\ l_{\varepsilon, \beta} z := \varepsilon^\beta \frac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$J(u) := \|z - z_d\|^2 + \nu^{-1} \|u\|^2 \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U}, \quad (1.2)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\beta \geq 0$, $\beta \in \mathbb{Q}$, $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций [2; 3], $\partial z / \partial n$ — производная функции z в точке $x \in \Gamma$ по направлению внешней (по отношению к области Ω) нормали,

$$a(\cdot), f(\cdot), z_d(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad g(\cdot) \in C^\infty(\Gamma), \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad a(x) \geq \alpha^2 > 0, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_r := \{u(\cdot) \in L_2(\Gamma) : \|u\| \leq r\}.$$

Здесь через $\|\cdot\|$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Gamma)$. Скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$ будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В пространстве $L_2(\Omega)$ для нормы и скалярного произведения используются обозначения $\|\cdot\|$ и (\cdot, \cdot) соответственно.

Исследование задач оптимального управления, определяемых уравнениями в частных производных, не теряет своей актуальности (см., например, [4–6] и библиографию в них).

В данной работе рассматривается обобщение задач из работ [7; 8] ($\beta = 2$) и [9] ($\beta = 0$).

Другие сингулярные задачи оптимального управления решениями эллиптических уравнений рассматривались в [10; 11].

Умножив граничное условие в (1.1) на $\varepsilon^{2-\beta}$, получим задачу стандартного вида (см. [1, гл. 2, соотношение (2.41)]) с новыми $\tilde{g} = \varepsilon^{2-\beta} g$, $\tilde{u} = \varepsilon^{2-\beta} u$, $\tilde{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon^{2-\beta}}$ и $\tilde{\nu} = \nu \varepsilon^{4-2\beta}$. В силу [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.36), (2.49)] и [7, лемма 1, соотношение (2.5)] найдется $\tilde{\lambda}_\varepsilon$ такое, что единственное оптимальное управление в получившейся задаче и соответствующее ему $z_\varepsilon(\cdot)$ находятся как единственное решение следующей задачи:

$$\tilde{u}_\varepsilon(\cdot) = \tilde{\lambda}_\varepsilon p_\varepsilon \Big|_\Gamma,$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f(x), & \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d(x), \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + \tilde{\lambda}_\varepsilon p_\varepsilon(x) = \tilde{g}(x), & \varepsilon^2 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\tilde{\lambda}_\varepsilon \in (0; \tilde{\nu}] : \left(\tilde{\lambda}_\varepsilon \|p_\varepsilon\| \leq \varepsilon^{2-\beta} \right) \wedge \left((\tilde{\nu} - \tilde{\lambda}_\varepsilon)(\varepsilon^{2-\beta} - \tilde{\lambda}_\varepsilon \|p_\varepsilon\|) = 0 \right). \quad (1.5)$$

Обозначив $\lambda_\varepsilon := \varepsilon^{\beta-2} \tilde{\lambda}_\varepsilon$ и вернувшись к исходным переменным, получим (1.4) и (1.5) в виде

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f(x), & \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d(x), \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ l_{\varepsilon, \beta} z_\varepsilon + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon(x) = g(x), & l_{\varepsilon, \beta} p_\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$u_\varepsilon(\cdot) = \lambda_\varepsilon p_\varepsilon \Big|_\Gamma, \quad \lambda_\varepsilon \in (0; \nu \varepsilon^{2-\beta}] : (\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| \leq 1) \wedge \left((\nu \varepsilon^{2-\beta} - \lambda_\varepsilon)(1 - \lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\|) = 0 \right). \quad (1.7)$$

Таким образом, оптимальное управление u_ε и состояние z_ε в задаче (1.1), (1.2) определяются из решения задачи (1.6), (1.7).

В [11, теорема 1] показано, что задача вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z = f_1(x), & \mathcal{L}_\varepsilon p - z = f_2(x), & z, p \in H^1(\Omega), \\ l_{\varepsilon,\beta} z + \lambda p(x) = g_1(x), & l_{\varepsilon,\beta} p = g_2(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.8)$$

при выполнении условий (1.3) и

$$f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad g_1(\cdot), g_2(\cdot) \in C^\infty(\Gamma) \quad (1.9)$$

разрешима единственным образом при любом $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ и справедливы соотношения $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Цель работы — изучить поведение $z_\varepsilon, p_\varepsilon$ и λ_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ и построить асимптотическое разложение $z_\varepsilon, p_\varepsilon$ и λ_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ с точностью до любой степени параметра ε .

2. Априорные оценки и разрешимость краевых задач

Отметим, что решение краевой задачи (1.1) понимается в обобщенном смысле (см., например, [1, гл. 1, § 3, п. 3.4]): для любого $\varphi \in H^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\varepsilon^2(\nabla z_\varepsilon, \nabla \varphi) + (a(\cdot)z_\varepsilon, \varphi) - \varepsilon^{2-\beta}\langle g + u_\varepsilon, \varphi \rangle = (f, \varphi). \quad (2.1)$$

Как и в [7], для получения априорных оценок используются априорные оценки для эллиптических операторов [3, гл. 2, теорема 5.1; 12, гл. III, формула (1.11)] и частный случай неравенства Эрлинга

$$\|u\|_0^2 \leq K(\delta^{-1}\|u\|^2 + \delta\|\nabla u\|^2), \quad 0 < \delta \leq \delta_0 \quad (2.2)$$

(см., например, [13, гл. XIV, § 3, (3.3); 14, гл. I, § 6, (6.19)]). Отметим, что K в (2.2) зависит от δ_0 .

В дальнейшем различные положительные константы, зависящие только от области Ω , коэффициента $a(\cdot)$ и неизменяемых величин (например, δ_0), часто будем обозначать одной и той же буквой — K или C .

Лемма 1. Пусть выполнены условия (1.3) и (1.9), а z, p — решение задачи (1.8). Тогда

$$\|z\|^2 + \lambda\varepsilon^{2-\beta}\|p\|^2 = (f_1, p) - (f_2, z) + \varepsilon^{2-\beta}\langle g_1, p \rangle - \varepsilon^{2-\beta}\langle g_2, z \rangle. \quad (2.3)$$

Доказательство. В силу (2.1) — определения обобщенного решения задачи (1.8) — для $z, p \in H^1(\Omega)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\nabla z, \nabla p) + (a(\cdot)z, p) + \varepsilon^{2-\beta}\langle \lambda p - g_1, p \rangle &= (f_1, p), \\ \varepsilon^2(\nabla p, \nabla z) + (a(\cdot)p, z) - (z, z) - \varepsilon^{2-\beta}\langle g_2, z \rangle &= (f_2, z). \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим (2.3). \square

Лемма 2. Пусть выполнено условие (1.3), $\bar{f} \in L_2(\Omega)$, $q \in L_2(\Gamma)$ и z_ε есть решение задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = \bar{f}(x), \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H^1(\Omega), \quad l_{\varepsilon,\beta} z_\varepsilon = q(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.4)$$

Тогда существует $K > 0$ такое, что

$$\max \{ \|z_\varepsilon\|, \varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon\|, \varepsilon\|\nabla z_\varepsilon\| \} \leq K(\|\bar{f}\| + \varepsilon^{3/2-\beta}\|q\|) =: K \cdot D(\bar{f}, q; \varepsilon, \beta). \quad (2.5)$$

Доказательство. В силу (2.1) и условий (1.3) для z_ε — решения задачи (2.4) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|\nabla z_\varepsilon\|^2 + \alpha^2 \|z_\varepsilon\|^2 &\leq \|z_\varepsilon\| \cdot \|\bar{f}\| + \varepsilon^{2-\beta} \|q\| \cdot \|z_\varepsilon\| \\ &\stackrel{(2.2)}{\leq} \|z_\varepsilon\| (\|\bar{f}\| + K\delta^{-1}\varepsilon^{2-\beta}\|q\|) + \|\nabla z_\varepsilon\| K\delta\varepsilon^{2-\beta}\|q\|. \end{aligned}$$

Решая данное квадратичное неравенство относительно величин $\|z_\varepsilon\|$ и $\|\nabla z_\varepsilon\|$, имеем

$$\begin{aligned} \|z_\varepsilon\| &\leq \frac{\|\bar{f}\| + K\delta^{-1}\varepsilon^{2-\beta}\|q\|}{\alpha^2} + \frac{K\delta\varepsilon^{2-\beta}\|q\|}{2\alpha\varepsilon}, \\ \|\nabla z_\varepsilon\| &\leq \frac{K\delta\varepsilon^{2-\beta}\|q\|}{\varepsilon^2} + \frac{\|\bar{f}\| + K\delta^{-1}\varepsilon^{2-\beta}\|q\|}{2\alpha\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При $\delta = \varepsilon^{1/2}$ из (2.6) получим (2.5). \square

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1.3) и (1.9). Если z, p — решения задачи (1.8), то существует $K > 0$ такое, что справедливы оценки

$$\begin{aligned} \max\{\|z\|, \varepsilon^{1/2}\|z\|, \varepsilon\|\nabla z\|\} &\leq K(1 + \lambda\varepsilon^{1-\beta})\tilde{D}(f_1, f_2, g_1, g_2; \varepsilon, \beta), \\ \max\{\|p\|, \varepsilon^{1/2}\|p\|, \varepsilon\|\nabla p\|\} &\leq K(1 + \lambda\varepsilon^{1-\beta})\tilde{D}(f_1, f_2, g_1, g_2; \varepsilon, \beta), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\tilde{D}(f_1, f_2, g_1, g_2; \varepsilon, \beta) := \|f_1\| + \|f_2\| + \varepsilon^{3/2-\beta}(\|g_1\| + \|g_2\|)$.

Доказательство. Представим z и p в виде $z = z_1 + z_2$ и $p = p_1 + p_2$, где

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_1 = f_1, \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_1 = z_1 + f_2, \quad l_{\varepsilon, \beta} z_1 = g_1, \quad l_{\varepsilon, \beta} p_1 = g_2,$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_2 = 0, \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_2 - z_2 = 0, \quad l_{\varepsilon, \beta} z_2 + \lambda p_2 = -\lambda p_1, \quad l_{\varepsilon, \beta} p_2 = 0.$$

Для z_1 и p_1 согласно (2.5) справедливы неравенства

$$D(f_1, g_1; \varepsilon, \beta) \leq \tilde{D}(f_1, f_2, g_1, g_2; \varepsilon, \beta)$$

и

$$D(f_2 + z_1, g_2; \varepsilon, \beta) \leq \tilde{D}(f_1, f_2, g_1, g_2; \varepsilon, \beta).$$

В силу (2.3) для z_2 и p_2 имеем

$$\|z_2\|^2 + \lambda\varepsilon^{2-\beta}\|p_2\|^2 = \varepsilon^{2-\beta}\langle -\lambda p_1, p_2 \rangle.$$

Отсюда $\lambda\varepsilon^{2-\beta}\|p_2\|^2 \leq \lambda\varepsilon^{2-\beta}\|p_1\| \cdot \|p_2\|$, т. е. $\|p_2\| \leq \|p_1\|$.

Поэтому

$$D(0, \lambda(p_1 + p_2); \varepsilon, \beta) \leq 2\lambda\varepsilon^{3/2-\beta}\|p_1\| \leq 2\lambda\varepsilon^{3/2-\beta}\varepsilon^{-1/2}\tilde{D}(f_1, f_2, g_1, g_2; \varepsilon, \beta),$$

а $D(z_2, 0; \varepsilon, \beta) \leq \|z_2\|$. Наконец, вследствие неравенства треугольника выводим оценки (2.7). \square

Утверждение 1. Пусть $a(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ удовлетворяют условиям (1.3).

Если $z_\varepsilon(\cdot), p_\varepsilon(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ есть решение задачи (1.6), (1.7), то при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned} \|z_\varepsilon\| &= O(1) + O(\varepsilon^{3/2-\beta}), \quad \|z_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{-1/2}) + O(\varepsilon^{1-\beta}), \\ \|\nabla z_\varepsilon\| &= O(\varepsilon^{-1}) + O(\varepsilon^{1/2-\beta}), \quad \|p_\varepsilon\| = O(1) + O(\varepsilon^{3/2-\beta}), \\ \|p_\varepsilon\| &= O(\varepsilon^{-1/2}) + O(\varepsilon^{1-\beta}), \quad \|\nabla p_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{-1}) + O(\varepsilon^{1/2-\beta}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Доказательство. В силу того что $\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| \leq 1$ для z_ε , имеем

$$D(f, -\lambda p_\varepsilon + g; \varepsilon, \beta) \leq \|f\| + \varepsilon^{3/2-\beta} (\|p_\varepsilon\| + 1) = O(1) + O(\varepsilon^{3/2-\beta});$$

это согласно (2.5) доказывает асимптотические оценки для z_ε . Теперь для p_ε получим

$$D(z_\varepsilon - z_d, 0; \varepsilon, \beta) \leq \|z_d\| + \|z_\varepsilon\| = O(1) + O(\varepsilon^{3/2-\beta});$$

это согласно (2.5) доказывает асимптотические оценки для p_ε . \square

В силу (2.8) и того, что $\lambda_\varepsilon = O(\varepsilon^{2-\beta})$ (см. (1.7)), выводим $\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{3/2-\beta}) + O(\varepsilon^{3-2\beta})$.

Тем самым если $3 > 2\beta$, то $\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и, следовательно, в силу (1.7) $\lambda_\varepsilon = \nu \varepsilon^{2-\beta}$.

В дальнейшем будем считать, что

$$\frac{3}{2} > \beta, \quad \lambda_\varepsilon = \nu \varepsilon^{2-\beta}. \quad (2.9)$$

В этом случае справедлива следующая теорема аппроксимации для z_ε и p_ε .

Теорема 2. Пусть функции $f_{1,\varepsilon,m}(\cdot), f_{2,\varepsilon,m}(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega}), g_{1,\varepsilon,m}(\cdot), g_{2,\varepsilon,m}(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Gamma})$ и выполнены условия (1.3) и (2.9). Если

$$\max \{ \|f_{i,\varepsilon,m}\|, \|g_{i,\varepsilon,m}\| : i = 1, 2 \} = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

а z_m, p_m — решение задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_m = f(x) + f_{1,\varepsilon,m}(x), & \mathcal{L}_\varepsilon p_m + z_m = -z_d(x) + f_{2,\varepsilon,m}(x), & z_m, p_m \in H^1(\Omega), \\ l_{\varepsilon,\beta} z_m + \nu \varepsilon^{2-\beta} p_m(x) = g(x) + g_{1,\varepsilon,m}(x), & l_{\varepsilon,\beta} p_m = g_{2,\varepsilon,m}(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (2.10)$$

то для $z_{\varepsilon,m} := z_\varepsilon - z_m$ и $p_{\varepsilon,m} := p_\varepsilon - p_m$, где $z_\varepsilon, p_\varepsilon$ — решение задачи (1.6), (2.9), справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\max \left\{ \|z_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon^{1/2} \|z_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon \|\nabla z_{\varepsilon,m}\|, \|p_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon^{1/2} \|p_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon \|\nabla p_{\varepsilon,m}\| \right\} = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Доказательство. Функции $z_{\varepsilon,m}$ и $p_{\varepsilon,m}$ удовлетворяют системе вида (2.10) с правыми частями порядка $O(\varepsilon^m)$. В силу теоремы 1 с учетом соотношения (2.9) получим

$$\tilde{D}(f_{1,\varepsilon,m}, f_{2,\varepsilon,m}, g_{1,\varepsilon,m}, g_{2,\varepsilon,m}; \varepsilon, \beta) = O(\varepsilon^m) + O(\varepsilon^m) + \varepsilon^{3/2-\beta} (O(\varepsilon^m) + O(\varepsilon^m)) = O(\varepsilon^m). \quad \square$$

Отметим, что вследствие гладкости коэффициентов всех разложений из априорных оценок Шаудера (см., например, [3, гл. 2, теорема 5.1]) и теоремы вложения Соболева [2, гл. I, п. 8, теорема 1] следует, что соотношения (2.11) справедливы и в равномерной норме.

3. Построение асимптотики

В силу теоремы 2 для построения асимптотического разложения решения рассматриваемой задачи нужно построить его *формальное асимптотическое решение* (ф. а. р.) (см., например, [15, с. 10]), которое осуществляется аналогично тому, как это делается в случае одного уравнения [16; 17].

Внешнее разложение решения ищем в виде рядов

$$z_{out}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_k(x), \quad p_{out}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_k(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Коэффициенты $z_k(x), p_k(x)$ находятся из соответствующей рекуррентной системы

$$\begin{cases} z_0(x) = -\frac{f(x)}{a(x)}, & p_0(x) = \frac{z_0(x) - z_d(x)}{a(x)}, \\ z_{2k}(x) = \frac{\Delta z_{2k-2}}{a(x)}, & p_{2k} = \frac{\Delta p_{2k-2} + z_{2k}}{a(x)}, \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Все $z_{2k}(x), p_{2k}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, но не удовлетворяют граничным условиям.

Для того чтобы устранить невязку в граничных условиях, построим экспоненциально убывающие функции в окрестности всей границы Γ , удовлетворяющие соответствующей однородной системе.

С учетом гладкости Γ в ее малой окрестности можно ввести систему координат $(s; \tau)$, где s — это координаты на Γ , а τ — расстояние от текущей точки $x \in \Omega$ до Γ .

Пограничный слой имеет ширину порядка ε , а поправочные функции (внутреннее разложение) нужны не во всей области Ω , а лишь в ее малой окрестности. Поэтому после построения поправочные функции необходимо умножить на срезающую функцию η , т. е. функцию с носителем в малой окрестности границы и равной тождественно 1 в некоторой меньшей окрестности границы.

В пограничном слое перейдем к новым, *растянутым*, координатам (см., например, [15, с. 31–34]) $\xi = \tau\varepsilon^{-1}$.

При этом оператор \mathcal{L}_ε перейдет в оператор

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon Z = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Z - \varepsilon L_1 \frac{\partial}{\partial \xi} Z - \varepsilon^2 L_2 Z + \tilde{a}(s, \varepsilon \xi) Z =: -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Z + \tilde{a}(s, \varepsilon \xi) Z + \varepsilon \mathcal{M}_\varepsilon Z. \quad (3.3)$$

Здесь L_1 и L_2 — дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядка, содержащие лишь дифференцирование по переменной s , с гладкими коэффициентами от s и $\tau = \varepsilon \xi$, а $\tilde{a}(s, \tau)$ — это функция $a(x)$ в переменных s, τ .

Таким образом, однородная система для функций пограничного слоя в переменных s и ξ , соответствующая системе из (1.4), имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}_{0,\varepsilon} Z := -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Z + \tilde{a}(s, \varepsilon \xi) Z = -\varepsilon \mathcal{M}_\varepsilon Z, & \tilde{\mathcal{L}}_{0,\varepsilon} P - Z = -\varepsilon \mathcal{M}_\varepsilon P. \end{cases} \quad (3.4)$$

Для граничных условий, с учетом того что

$$\frac{\partial}{\partial n} Z(s, \tau/\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial \tau} Z(s, \tau/\varepsilon) = -\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} Z(s, \xi),$$

выводим следующие соотношения:

$$\begin{cases} -\varepsilon^{\beta-1} \frac{\partial}{\partial \xi} Z(s, 0) + \varepsilon^\beta \frac{\partial}{\partial n} \widetilde{z_{out}}(s, 0) + \nu \varepsilon^{2-\beta} \left(P(s, 0) + \widetilde{p_{out}}(s, 0) \right) \stackrel{as}{=} \tilde{g}(s), \\ -\varepsilon^{\beta-1} \frac{\partial}{\partial \xi} P(s, 0) + \varepsilon^\beta \frac{\partial}{\partial n} \widetilde{p_{out}}(s, 0) \stackrel{as}{=} 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь волна над функцией, определенной в переменных x , означает выражение этой функции в переменных s и τ .

Система (3.4) показывает, что если Z имеет порядок γ (т. е. $Z = O(\varepsilon^\gamma)$), то и P имеет тот же порядок. В этом случае порядки слагаемых в (3.5) таковы: $\beta - 1 + \gamma$, β , $2 - \beta + \gamma$ и $2 - \beta$. Главное слагаемое должно иметь порядок 0. В силу условий (2.9) это $\beta - 1 + \gamma$. Тем самым $\gamma = 1 - \beta$. Последнее соотношение определяет вид разложения в пограничном слое.

Пусть $\beta = \tilde{n}/\tilde{m}$ — несократимая дробь. Тогда

$$Z_{in}(s, \xi, \varepsilon) = \varepsilon^{1-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/\tilde{m}} Z_m(s, \xi), \quad P_{in}(s, \xi, \varepsilon) = \varepsilon^{1-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/\tilde{m}} P_m(s, \xi). \quad (3.6)$$

Подставляя ряды (3.6) в систему (3.4) и разлагая коэффициенты в уравнениях системы и операторов $\tilde{\mathcal{L}}_{0,\varepsilon}$ и \mathcal{M}_ε , определенных в (3.3), в ряды Тейлора по переменной $\tau = \varepsilon\xi$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}_0 Z_0 := -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Z_0 + \tilde{a}_0(s) Z_0 = 0, & \tilde{\mathcal{L}}_0 P_0 + Z_0 = 0, \\ \tilde{\mathcal{L}}_0 Z_m = F_m(s, \xi), & \tilde{\mathcal{L}}_0 P_m + Z_m = G_m(s, \xi), \quad m > 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $F_m(s, \xi)$ и $G_m(s, \xi)$ линейно выражаются через предыдущие функции Z_k, P_k и их производные и полиномиально зависят от ξ и гладко от s , а функция

$$a(x) = \tilde{a}(s, \varepsilon\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \xi^i \tilde{a}_i(s)$$

разложена в ряд по степеням малого параметра.

Подстановка соответствующих рядов в граничные условия приведет к следующим системам:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \xi} Z_0(s, 0) = \tilde{g}(s), & -\frac{\partial}{\partial \xi} P_0(s, 0) = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial \xi} Z_m(s, 0) = \tilde{g}_{1,m}(s), & -\frac{\partial}{\partial \xi} P_m(s, 0) = \tilde{g}_{2,m}(s), \quad m > 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

где функции $g_m(\cdot), q_m(\cdot)$ определяются внешним разложением, функциями Z_k, P_k при $k < m$, при этом Z_m и P_m должны экспоненциально убывать при $\xi \rightarrow +\infty$.

Таким образом, задачи для нахождения Z_m и P_m имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}_0 Z = F, & \tilde{\mathcal{L}}_0 P + Z = G, \\ -\frac{\partial}{\partial \xi} Z(s, 0) = \tilde{g}_1(s), & -\frac{\partial}{\partial \xi} P(s, 0) = \tilde{g}_2(s). \end{cases} \quad (3.9)$$

Как хорошо известно, первое уравнение из (3.9) имеет нужное нам решение вида

$$Z(s, \xi) = C_1(s) e^{-\sqrt{\tilde{a}_0(s)}\xi} + \widehat{Z}(s, \xi), \quad (3.10)$$

где $C_1(s)$ — функция, подлежащая определению, а $\widehat{Z}(s, \xi)$ — какое-нибудь частное решение уравнения $\tilde{\mathcal{L}}_0 Z = F$. При этом если

$$F(s, \xi) = e^{-\sqrt{\tilde{a}_0(s)}\xi} Q_l(s, \xi),$$

где $Q_l(s, \xi)$ — полином степени l по ξ с коэффициентами, зависящими от s , то

$$\widehat{Z}(s, \xi) = e^{-\sqrt{\tilde{a}_0(s)}\xi} \xi Q_{l,1}(s, \xi).$$

Здесь $Q_{l,1}(s, \xi)$ — тоже полином степени l по ξ с коэффициентами, зависящими от s , однозначно определяемый по $Q_l(s, \xi)$.

Теперь второе уравнение из (3.9) в силу (3.10) можем записать как

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 P = C_1(s) e^{-\sqrt{\tilde{a}_0(s)}\xi} + \widehat{Z}(s, \xi) + G(s, \xi),$$

а любое, экспоненциально убывающее при $\xi \rightarrow +\infty$ решение этого уравнения определяется формулой

$$P(s, \xi) = C_2(s)e^{-\sqrt{\tilde{a}_0(s)}\xi} + C_1(s) \frac{\xi}{2\sqrt{\tilde{a}_0(s)}} e^{-\sqrt{\tilde{a}_0(s)}\xi} + \hat{P}(s, \xi), \quad (3.11)$$

где $\hat{P}(s, \xi)$ — какое-нибудь частное решение уравнения $\tilde{\mathcal{L}}_0 P = \hat{Z}(s, \xi) + G(s, \xi)$.

Неизвестные функции $C_1(s)$ и $C_2(s)$ определяются из граничных условий задачи (3.9) — они (в силу (3.10) и (3.11)) являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \xi} Z(s, 0) = \sqrt{\tilde{a}_0(s)} C_1(s) - \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{Z}(s, 0) = \tilde{g}_1(s), \\ -\frac{\partial}{\partial \xi} P(s, 0) = \sqrt{\tilde{a}_0(s)} C_2(s) - C_1(s) \frac{1}{2\sqrt{\tilde{a}_0(s)}} - \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{P}(s, 0) = \tilde{g}_2(s), \end{cases}$$

из которой получим

$$C_1(s) = \frac{\tilde{g}_1(s) + \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{Z}(s, 0)}{\sqrt{\tilde{a}_0(s)}}, \quad C_2(s) = \frac{\tilde{g}_2(s) + \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{P}(s, 0) + \frac{C_1(s)}{2\sqrt{\tilde{a}_0(s)}}}{\sqrt{\tilde{a}_0(s)}}.$$

Таким образом, задача (3.7), (3.8) при каждом $m \geq 0$ имеет единственное экспоненциально убывающее решение $\{Z_m, P_m\}$.

Теперь ряды

$$\begin{aligned} z_{it} &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_k(x) + \eta(s, \tau) \varepsilon^{1-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/\tilde{m}} Z_m(s, \xi) \\ p_{it} &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_k(x) + \eta(s, \tau) \varepsilon^{1-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/\tilde{m}} P_m(s, \xi), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где x и τ, s связаны введенной системой координат, хорошо аппроксимируют всю задачу (1.6), (2.9). Поэтому справедлива следующая основная теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (1.3) и (2.9). Тогда ряды (3.12), коэффициенты которых для рядов (3.1) определяются по формулам (3.2), а для рядов (3.6) — как решения задач (3.7), (3.8), суть равномерные (как в смысле пространства $H^1(\Omega)$, так и в смысле пространства $C(\bar{\Omega})$) асимптотические разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ функций $z_\varepsilon(x)$ и $p_\varepsilon(x)$ — решения задачи (1.6), (2.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
3. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
4. **Casas E.** A review on sparse solutions in optimal control of partial differential equations // SeMA J. 2017. Vol. 74. P. 319–344. doi: 10.1007/s40324-017-0121-5.
5. **Lou H., Yong J.** Second-order necessary conditions for optimal control of semilinear elliptic equations with leading term containing controls // Math. Control Relat. Fields. 2018. Vol. 8, no. 1. P. 57–88. doi: 10.3934/mcrf.2018003.
6. **Betz Livia M.** Second-order sufficient optimality conditions for optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations // SIAM J. Control Optim. 2019. Vol. 57, no. 6. P. 4033–4062. doi: 10.1137/19M1239106.

7. Данилин А.Р., Зорин А.П. Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 95–107.
8. Данилин А.Р., Зорин А.П. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 4. С. 1–4.
9. Зорин А.П. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления ограниченным потоком на границе // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 115–121.
10. Капустян В.Е. Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. Сер. Математика, естествознание, технические науки. 1992. № 2. С. 70–74.
11. Данилин А.Р. Оптимальное граничное управление в области с малой полостью // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 87–100.
12. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964. 540 с.
13. Морен К. Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. 570 с.
14. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
15. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
16. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12, вып. 5. С.3–122.
17. Ильин А.М. Пграничный слой // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34. М.: ВНИТИ, 1988. С. 175–214. (Итоги науки и техники ВНИТИ АН СССР.)

Поступила 4.11.2019

После доработки 10.01.2020

Принята к публикации 14.01.2020

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: dar@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lions J.-L. *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1971, 396 p. ISBN: 9783540051152. Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisываемыми уравнениями с частными производными*. Moscow: Mir Publ., 1972, 414 p.
2. Sobolev S.L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991, 286 p. ISBN: 0-8218-4549-7. Original Russian text (1st ed.) published in Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike*. Leningrad: Leningr. Gos. Univ. Publ., 1950, 255 p.
3. Lions J.-L., Magenes E. *Non-homogeneous boundary value problems and their applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1972, 357 p. ISBN: 3540053638. Translated to Russian under the title *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya*. Moscow: Mir Publ., 1971, 371 p.
4. Casas Eduardo. A review on sparse solutions in optimal control of partial differential equations. *SeMA J.*, 2017, vol. 74, pp. 319–344. doi: 10.1007/s40324-017-0121-5.
5. Lou H., Yong J. Second-order necessary conditions for optimal control of semilinear elliptic equations with leading term containing controls. *Math. Control Relat. Fields*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 57–88. doi: 10.3934/mcrf.2018003.
6. Betz Livia M. Second-order sufficient optimality conditions for optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations. *SIAM J. Control Optim.*, 2019, vol. 57, no. 6, pp. 4033–4062. doi: 10.1137/19M1239106.

7. Danilin A.R., Zorin A.P. Asymptotics of a solution to an optimal boundary control problem. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S81–S94. doi: 10.1134/S0081543810060088.
8. Danilin A.R., Zorin A.P. Asymptotic expansion of solutions to optimal boundary control problems. *Dokl. Math.*, 2011, vol. 84, no. 2, pp. 665–668. doi: 10.1134/S106456241106024X.
9. Zorin A.P. Asymptotic expansion of a solution to the problem of optimal control of a bounded flow at a boundary. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 115–120 (in Russian).
10. Kapustyan V.E. Asymptotics of bounded controls in optimal elliptic problems. *Dokl. Akad. Nauk Ukrainy*, 1992, no. 2, pp. 70–74 (in Russian).
11. Danilin A.R. Optimal boundary control in a small concave domain. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 87–100 (in Russian).
12. Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. *Linear and quasilinear elliptic equations*. N Y; London: Acad. Press, 1968, 495 p. ISBN: 9780080955544. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa*. Moscow: Nauka Publ., 1964, 540 p.
13. Maurin K. *Methods of Hilbert spaces*. Warsaw: PWN, 1967, 553 p. ISBN: 9780900318061. Translated to Russian under the title *Metody gil'bertova prostranstva*. Moscow: Mir Publ., 1965, 570 p.
14. Ladyzhenskaya O.A. *The boundary value problems of mathematical physics*. N Y: Springer-Verlag, 1985, 332 p. ISBN: 978-1-4757-4317-3. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki*. Moscow: Nauka Publ., 1973, 407 p.
15. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. Providence: American Mathematical Society, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published in Il'in A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach*. Moscow: Nauka Publ., 1989, 336 p.
16. Vishik M.I., Lyusternik L.A. A regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122 (in Russian).
17. Il'in A.M. A boundary layer. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.*, 1988, vol. 34, pp. 175–213 (in Russian).

Received December 14, 2019

Revised January 10, 2020

Accepted January 14, 2020

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru.

Cite this article as: A. R. Danilin. Asymptotics of a solution to a problem of optimal boundary control with two small cosubordinate parameters, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 102–111.

УДК 517.977

ТРАЕКТОРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАБЛЮДЕНИЯМИ В 3D С БОРТА БПЛА ПО УГЛОМЕРНОЙ ИНФОРМАЦИИ¹**Д. Д. Емельянов, Е. Я. Рубинович**

В 3D рассматривается задача управления траекторией беспилотного летательного аппарата (БПЛА). Цель управления – повышение точности оценивания пространственных координат БПЛА по дискретным угловым измерениям положения некоторого неподвижного маяка в процессе наведения БПЛА на заданное терминальное множество. Измерения зашумлены дискретным белым шумом с известными характеристиками. Общее время наведения задано.

Ключевые слова: БПЛА, угловые измерения, управление наблюдениями, терминальное наведение.

D. D. Emeliyanov, E. Ya. Rubinovich. Trajectory control of 3D observations from an UAV by angular measurements.

We consider the 3D problem of controlling the trajectory of an unmanned aerial vehicle (UAV). The purpose of the control is to increase the accuracy of estimating the spatial coordinates of the UAV from discrete angular measurements of the position of a fixed beacon in the process of guidance of the UAV to a given terminal set. The measurements are contaminated by a discrete white noise with known characteristics. The total guidance time is specified.

Keywords: UAV, angular measurements, control of observations, terminal guidance.

MSC: 49N30, 49N35, 93B52

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-112-130

Введение

При выполнении автономных миссий беспилотными летательными аппаратами (БПЛА) часто ставится навигационная задача определения на борту БПЛА собственных элементов движения (координат и скоростей) на основе текущей информации от неподвижного радиомаяка. Однако точность оценки этих элементов движения (ЭД) существенно зависит от траектории, по которой БПЛА, играя роль мобильного наблюдателя, движется в процессе наблюдения (слежения), что связано с проблемой наблюдаемости [1].

В связи с этим естественно возникает проблема построения в реальном масштабе времени рациональной (с точки зрения повышения точности оценки ЭД) траектории движения БПЛА. Другими словами – задача траекторного управления наблюдениями с борта подвижного наблюдателя.

Целью данной работы является оптимизация описанного выше процесса слежения.

Фактически процесс слежения состоит из двух взаимосвязанных процессов: процесса сбора информации о цели (объекте наблюдения) и процесса обработки этой информации. Управление процессом сбора информации называется управлением наблюдениями, а сам процесс обработки наблюдений называется фильтрацией.

Сложность построения оптимальных процедур сбора и обработки информации при движении в реальном времени напрямую связана с нелинейностью как уравнений движения системы “наблюдатель-цель”, так и уравнений, описывающих угловые измерения (пеленг цели и угол ее возвышения) [2; 3].

Для получения оценок ЭД могут быть использованы хорошо известные расширенные (линеаризованные в окрестности текущей оценки) фильтры Калмана (ЕКФ фильтры), методы

¹Работа выполнена при частичной поддержке Программы 7 Президиума РАН.

псевдоизмерений [4] или различные байесовские методы фильтрации: метод Монте-Карло [5] или метод гауссовской суммы [6]. Последние методы могут быть легко распространены на случай нескольких датчиков [7]. Однако в [8] показано, что оценки ЭД, полученные с помощью приведенных выше методов фильтрации, имеют примерно одинаковую точность.

Из-за габаритных и энергетических ограничений бортовые вычислители БПЛА, как правило, являются относительно малопродуктивными, что требует достаточно простых (рекуррентных) алгоритмов фильтрации, построенных, например, на основе расширенного (линеаризованного) фильтра Калмана. "Простота" таких алгоритмов и, в частности, ошибки линеаризации компенсируются лучшей информацией о цели, получаемой при оптимизации процесса наблюдения. Численные эксперименты показывают, что линеаризованный фильтр Калмана с траекторным управлением наблюдениями дает оценки ЭД не хуже, а иногда и лучше, чем сложные нелинейные алгоритмы фильтрации при произвольном (не оптимальном) движении наблюдателя [9].

В случае локализации неподвижной цели одна задача построения оптимальной траектории БПЛА была исследована в [2].

Один субоптимальный метод построения траекторий БПЛА рассмотрен в [3], где управление БПЛА на фиксированном временном интервале $[0, T]$ строится в виде линейной комбинации первых N базисных функций некоторого ортонормированного на $[0, T]$ базиса. В качестве такого базиса предлагается система ортогональных многочленов Чебышева.

Такой подход позволяет свести задачу оптимального управления к задаче нахождения максимума функций многих переменных (коэффициентов разложения по базису). Однако выбор числа N в [3] не обсуждается, поэтому получить оценки потерь в значении функционала при переходе к субоптимальному методу решения задачи не представляется возможным.

В [10] задача оптимального управления БПЛА ставится в терминах частично наблюдаемых марковских процессов принятия решений. В частности, рассматривается задача построения траектории БПЛА, осуществляющего наблюдения по азимуту и углу места в течение фиксированного интервала наблюдения $[0, T]$ за движущейся целью. Соответствующие задачи оптимального управления Майера сформулированы и решены численно с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина.

В настоящей статье рассматривается пространственная задача управления движущимся наблюдателем, который оценивает вектор своих координат и строит свое управление на основе дискретных измерений углового положения неподвижного маяка, расположенного в начале координат.

Специфика задачи заключается в том, что наблюдатель (БПЛА) имеет оптическую систему визирования с фиксированным фокусным расстоянием, которая в силу своих конструктивных особенностей способна измерять тангенсы углов азимута и возвышения (а не сами углы!) с некоторыми ошибками, которые мы будем считать независимыми и нормально распределенными. Требуется построить управление наблюдателем, которое переводило бы его за заданное время на некоторое конечное многообразие и одновременно повышало бы точность оценки трехмерного координатного вектора наблюдателя с помощью ЕКФ-фильтра.

При решении этой задачи используется подход, изложенный в [11], который обобщается на случай пространственного движения наблюдателя. Близкая постановка рассматривалась в [9] с иной динамикой наблюдателя, где измерению были доступны собственно угловые координаты цели, а не их тангенсы.

1. Постановка задачи

1.1. Геометрия задачи

Рассмотрим пространственную задачу управления точечным объектом — наблюдателем P — по угломерной информации. Для описания движения объекта P введем декартову систему координат $OXYZ$ (рис. 1).

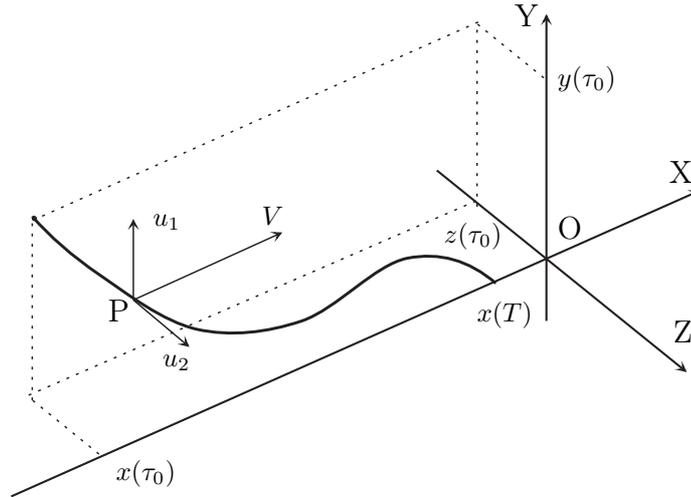


Рис. 1. К постановке задачи

В начальный момент времени $t = \tau_0$ наблюдатель P находится в точке с координатами $(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0))$. Дальнейшее его движение описывается следующей системой уравнений:

$$\dot{x} = V, \quad \dot{y} = u_1, \quad \dot{z} = u_2. \quad (1.1)$$

Здесь

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — компоненты радиус-вектора $R(t)$ наблюдателя в системе OXYZ;

$u = (u_1(t), u_2(t))$ — двумерный вектор управления наблюдателя;

V — заданная постоянная скорость, $V > 0$.

Управляя скоростями $u_1(t)$ и $u_2(t)$ своего движения вдоль осей OY и OZ, наблюдатель должен в заданный момент $t = T$ попасть на ось OX. Особенностью динамики наблюдателя является то, что его движение вдоль оси OX (со скоростью V) не зависит от управления.

Предполагается, что точные координаты начальной точки $(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0))$ не известны, задана только их априорная оценка

$$Z = (Z_x, Z_y, Z_z)$$

и известно, что $x(\tau_0) < V(\tau_0 - T)$, т. е. наблюдатель P всегда находится слева от плоскости OYZ.

В процессе движения наблюдатель производит в дискретные моменты времени $t_i = \tau_0 + i\Delta$ измерения $\zeta_i = \zeta(t_i)$ вида (тангенсы углов возвышения и азимута относительно неподвижного маяка, расположенного в точке O начала координат)

$$\zeta_{1i} = \frac{y_i}{x_i} + \sigma_0 \eta_{1i}, \quad \zeta_{2i} = \frac{z_i}{x_i} + \sigma_0 \eta_{2i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Здесь

$\zeta_i = (\zeta_{1i}, \zeta_{2i})$ — двумерный вектор измерений;

$x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, $z_i = z(t_i)$, $\eta_i = (\eta_{1i}, \eta_{2i})$ — последовательность независимых гауссовских случайных векторов с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей;

σ_0 — среднеквадратическая ошибка измерений;

Δ — интервал между измерениями, $\Delta \ll T - \tau_0$.

Задачей наблюдателя является построение оценки \hat{R} вектора $R = (x, y, z)$ к моменту T по данным наблюдений ζ_i . Для построения оценки $\hat{R} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ наблюдатель применяет расширенный фильтр Калмана (ЕКФ-фильтр), алгоритм которого в рассматриваемом случае записывается следующим образом.

1.2. ЕKF-фильтр

1) Одношаговая экстраполяция ($i = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &= \hat{x}_{i-1} + V \Delta, & \tilde{y}_i &= \hat{y}_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u_1(s) ds, \\ \tilde{z}_i &= \hat{z}_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u_2(s) ds, & \tilde{\gamma}(t_i) &= \gamma(t_{i-1}),\end{aligned}$$

где $\gamma(\cdot)$ — ковариационная матрица ошибок оценивания размера 3×3 . Начальная оценка $\hat{R}(t_0)$ и начальная ковариационная матрица $\gamma(t_0)$ фильтра Калмана имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{x}(t_0) &= Z_x, & \hat{y}(t_0) &= Z_y, \\ \hat{z}(t_0) &= Z_z, & \gamma(t_0) &= G,\end{aligned}$$

где $Z = (Z_x, Z_y, Z_z)$ — вектор априорной оценки, G — заданная ковариационная матрица ошибок априорного оценивания.

2) Матрица коэффициента усиления:

$$K_i = \tilde{\gamma}(t_i) H_i^T \left(H_i \tilde{\gamma}(t_i) H_i^T + \sigma_0^2 I_2 \right)^{-1}.$$

Здесь символ T обозначает транспонирование, I_k — единичная матрица размера $k \times k$, $H_i = H(\tilde{R}_i)$ — линеаризованная в окрестности прогнозируемой одношаговой оценки матрица наблюдений вида

$$H(\tilde{R}) = \frac{1}{\tilde{x}} \begin{bmatrix} -\varphi(\tilde{R}) & 1 & 0 \\ -\psi(\tilde{R}) & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где введены обозначения: $\tilde{R} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$,

$$\varphi(\tilde{R}) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}, \quad \psi(\tilde{R}) = \frac{\tilde{z}}{\tilde{x}}.$$

3) Оценка фильтрации и ковариационная матрица ошибок оценивания:

$$\hat{R}(t_i) = \tilde{R}(t_i) + K_i \begin{bmatrix} \zeta_{1i} - \varphi(\tilde{R}(t_i)) \\ \zeta_{2i} - \psi(\tilde{R}(t_i)) \end{bmatrix}, \quad \gamma(t_i) = (I_3 - K_i H_i) \tilde{\gamma}(t_i).$$

Требуется построить управление u , которое переводит наблюдателя P в момент T на прямую ОХ по траектории, обеспечивающей эффективную работу применяемого фильтра Калмана. Критерием эффективности работы фильтра является точность оценивания компонент вектора R к моменту T , которая характеризуется диагональными элементами ковариационной матрицы $\gamma(T)$. Поэтому в качестве критерия предлагается следующий функционал:

$$J(T) = \sum_{j=1}^3 \beta_j \gamma_{jj}(T), \quad (1.2)$$

где β_j , $j = 1, 2, 3$, — весовые коэффициенты, определяющие чувствительность критерия J к точности оценивания отдельных компонент вектора $R(T)$.

2. Вспомогательная задача оптимального управления

Заметим, что поставленная задача является нелинейной задачей стохастической оптимизации с критерием (1.2), зависящим от ковариационной матрицы $\gamma(T)$. Эта задача содержит в себе следующую принципиальную трудность. Дело в том, что находясь в процессе движения в произвольной точке $(R(t), \gamma(t))$, вычислить будущее значение матрицы $\gamma(T)$ не представляется возможным. В самом деле, как видно из уравнений расширенного фильтра Калмана, элементы матрицы $\gamma(T)$ суть случайные величины, зависящие от всей реализации наблюдений $\{\zeta_i\}$ от момента τ_0 до момента T . Данная зависимость обусловлена тем, что в выражение для линеаризованной матрицы наблюдений $H(\cdot)$ явно входят компоненты экстраполированного вектора \tilde{R} , который, в свою очередь, зависит от вектора оценки \hat{R} и, следовательно, от реализации наблюдений. В текущий же момент t реализация будущих наблюдений, очевидно, неизвестна.

Создавшиеся проблемы снимет переход к так называемым *условно-программным* управлениям наблюдателя. Суть такого подхода – в следующем. Примем текущий момент времени τ за начальный t_0 , а текущую оценку вектора $\hat{R}(\tau)$ – за точное его значение, т. е. оценка $\hat{R}(\tau)$ принимается за точно известную начальную позицию наблюдателя. Тогда траектория наблюдателя $R(t)$ при $t > \tau$ находится путем интегрирования уравнений (1.1) с управлением $u(t)$. В случае частых наблюдений дальнейшую эволюцию ковариационной матрицы $\gamma(t)$ при $t > \tau$ можно аппроксимировать дифференциальным уравнением [12, теорема 10.3]

$$\dot{\Gamma}(t) = -\frac{1}{\sigma^2} \Gamma(t) H^T(R(t)) H(R(t)) \Gamma(t), \quad (2.1)$$

где $\Gamma(\tau) = \gamma(\tau)$, $\sigma = \sigma_0 \sqrt{\Delta}$. В рамках такой аппроксимации значение матрицы $\gamma(T)$ будем считать известным и равным значению $\Gamma(T)$, которое находится путем интегрирования уравнения (2.1) с начальным условием $\gamma(\tau)$ вдоль известной траектории $R(t)$. Таким образом, уравнения (2.1) и (1.1) задают связь между терминальным значением матрицы $\gamma(T)$ и управлением наблюдателя.

Найдем оптимальное управление $u^*(t)$, переводящее наблюдателя из точки $R(\tau)$ на ось ОХ в момент T и минимизирующее терминальный критерий как функцию аппроксимированной матрицы $\gamma(T)$.

Пусть эта вспомогательная задача оптимального управления решена и найдено оптимальное управление из класса программных, т. е. являющихся функциями времени, начального момента τ , начальной позиции $\hat{R}(\tau)$ и начальной ковариационной матрицы $\gamma(\tau)$.

Далее в течение некоторого отрезка времени $\Delta\tau$ наблюдатель движется по выработанной программе, обрабатывая результаты наблюдений, после чего производится корректировка программного управления, т. е. вычисление нового оптимального управления как функции времени, нового начального момента, новой начальной позиции и обновленной ковариационной матрицы. Управление, получаемое описанным способом, и называется условно-программным.

Фактически в рамках данного подхода решение стохастической задачи траекторного управления наблюдениями сводится к решению вспомогательной задачи оптимального управления с периодически обновляющимися начальными условиями и терминальным условием, означающим попадание наблюдателя на ось ОХ в момент T . Критерий оптимизации при этом должен характеризовать качество оценивания компонент вектора R к моменту T .

Применим описанный подход для решения рассматриваемой задачи. В качестве критерия оптимизации для вспомогательной задачи возьмем следующий функционал

$$J(T) = \sum_{j=1}^3 \beta_j \Gamma_{jj}(T) + \int_{t_0}^T (u_1^2(s) + u_2^2(s)) ds, \quad (2.2)$$

где Γ_{jj} , $j = 1, 2, 3$ — диагональные элементы матрицы Γ , β_j — положительные весовые коэффициенты. Заметим, что критерий (2.2) отличается от критерия (1.2) дополнительно введенной интегральной частью, которая предназначена для предотвращения появления реализаций условно-программного управления, требующих значительного расхода управляющего воздействия, а также для регуляризации вспомогательной задачи при малых значениях весовых коэффициентов. Из критерия (2.2), в частности, видно, что матричная переменная $\Gamma(t)$, подчиняющаяся уравнению (2.1), играет роль дополнительной фазовой переменной в вспомогательной задаче оптимального управления.

Для дальнейших выкладок удобно в критерии (2.2) перейти от матрицы $\Gamma(t)$ к обратной матрице $D(t) = \Gamma^{-1}(t)$. Эволюция матрицы $D(t)$ описывается уравнением

$$\dot{D}(t) = \frac{1}{\sigma^2} H^T H \quad \text{с начальным условием} \quad D(t_0) = \gamma^{-1}(t_0).$$

Тогда математическая модель вспомогательной задачи оптимального управления наблюдателем P принимает следующий вид.

1. Дифференциальные уравнения динамики управляемой системы при $t \in [t_0, T]$

$$\dot{x} = V, \quad \dot{y} = u_1, \quad \dot{z} = u_2, \quad \dot{r} = u_1^2 + u_2^2, \quad (2.3)$$

$$\dot{D} = \frac{1}{(\sigma x)^2} \begin{bmatrix} \varphi^2 + \psi^2 & -\varphi & -\psi \\ -\varphi & 1 & 0 \\ -\psi & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где $D = D(t)$, $\varphi = \varphi(R(t))$, $\psi = \psi(R(t))$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$; $r = r(t)$ — характеризует расход управляющего воздействия к моменту t .

2. Начальные условия при $t = t_0$

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, & y(t_0) &= y_0, & z(t_0) &= z_0, \\ r(t_0) &= 0, & D(t_0) &= \gamma^{-1}(t_0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

3. Терминальные условия при $t = T$

$$y(T) = 0, \quad z(T) = 0. \quad (2.6)$$

4. Критерий оптимизации

$$J(T) = \sum_{j=1}^3 \beta_j (D^{-1}(T))_{jj} + r(T) \longrightarrow \min. \quad (2.7)$$

При решении задачи (2.3)–(2.7) рассмотрим вначале случай произвольных весовых коэффициентов β_j , $j = 1, 2, 3$, после чего на основании полученных результатов исследуем частный случай $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$, при котором, как следует из вида функционала (2.7), нас интересует точность оценивания только x -компоненты вектора R на момент T .

3. Решение вспомогательной задачи оптимального управления

Для решения задачи (2.3)–(2.7) применим необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума. В соответствии с этой методикой запишем функцию Гамильтона для рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \lambda_1 V + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 u_2 + \lambda_4 (u_1^2 + u_2^2) \\ &+ \frac{1}{(\sigma x)^2} (\lambda_5 (\varphi^2 + \psi^2) - (\lambda_6 + \lambda_7)\varphi - (\lambda_8 + \lambda_9)\psi + \lambda_{10} + \lambda_{11}), \end{aligned}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{11})$ — вектор сопряженных переменных (множителей Лагранжа), не обращающихся в нуль одновременно. Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ отвечают переменным (2.3), а $\lambda_5, \dots, \lambda_{11}$ — переменным $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{13}, d_{31}, d_{22}, d_{33}$ соответственно, где d_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, — элементы матрицы $D(T)$. Сопряженные переменные удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \dot{\lambda}_1 &= s(x) (4\lambda_5 (\varphi^2 + \psi^2) - 3(\lambda_6 + \lambda_7)\varphi - 3(\lambda_8 + \lambda_9)\psi + 2(\lambda_{10} + \lambda_{11})), \\ \text{б) } \dot{\lambda}_2 &= s(x) (\lambda_6 + \lambda_7 - 2\lambda_5\varphi), \\ \text{в) } \dot{\lambda}_3 &= s(x) (\lambda_8 + \lambda_9 - 2\lambda_5\psi), \\ \text{г) } \dot{\lambda}_i &= 0, \quad i = 4, \dots, 11, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $s(x) = (\sigma^2 x^3)^{-1}$. Из уравнений (3.1 г) следует, что

$$\lambda_i = \text{const}, \quad i = 4, \dots, 11. \quad (3.2)$$

В соответствии с принципом максимума в момент T имеет место условие трансверсальности

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \delta x + \lambda_2 \delta y + \lambda_3 \delta z + (\lambda_4 + 1) \delta r + (\lambda_5 + \kappa_{11}) \delta d_{11} \\ &+ (\lambda_6 + \kappa_{12}) \delta d_{12} + (\lambda_7 + \kappa_{21}) \delta d_{21} + (\lambda_8 + \kappa_{13}) \delta d_{13} \\ &+ (\lambda_9 + \kappa_{31}) \delta d_{31} + (\lambda_{10} + \kappa_{22}) \delta d_{22} + (\lambda_{11} + \kappa_{33}) \delta d_{33} = 0, \end{aligned}$$

где κ_{ij} — частные производные функционала (2.7) по элементам d_{ij} матрицы $D(T)$, $i, j = 1, 2, 3$.

Из (2.6) следует, что вариации δy и δz в момент T равны нулю, а остальные вариации, в частности δr и δd_{ij} , произвольны. С учетом этого обстоятельства и равенств (3.2) находим

$$\begin{aligned} \lambda_4 &\equiv -1, & \lambda_5 &\equiv -\kappa_{11}, & \lambda_6 &\equiv -\kappa_{12}, & \lambda_7 &\equiv -\kappa_{21}, \\ \lambda_8 &\equiv -\kappa_{13}, & \lambda_9 &\equiv -\kappa_{31}, & \lambda_{10} &\equiv -\kappa_{22}, & \lambda_{11} &\equiv -\kappa_{33}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Дифференцирование функционала (2.7) по d_{ij} с учетом симметричности матрицы $D(T)$ дает

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= -\sum_{j=1}^3 \beta_j (D^{-1}(T))_{1j}^2, \\ \kappa_{12} &\equiv \kappa_{21} = -\beta_3 \frac{d_{12}}{m} - (D^{-1}(T))_{12} \sum_{j=1}^3 \beta_j (D^{-1}(T))_{jj}, \\ \kappa_{13} &\equiv \kappa_{31} = -\beta_2 \frac{d_{13}}{m} - (D^{-1}(T))_{13} \sum_{j=1}^3 \beta_j (D^{-1}(T))_{jj}, \end{aligned}$$

где введено обозначение $m = \det D(T)$.

Оптимальное управление $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ должно доставлять максимум гамильтониану \mathcal{H} . Так как ограничения на компоненты u_1, u_2 отсутствуют, условия максимума \mathcal{H} дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} &= \lambda_2 + 2\lambda_4 u_1 = 0, & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_1^2} &= 2\lambda_4 \equiv -2 < 0, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} &= \lambda_3 + 2\lambda_4 u_2 = 0, & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_2^2} &= 2\lambda_4 \equiv -2 < 0. \end{aligned}$$

С учетом тождества $\lambda_4 \equiv -1$ оптимальные управления принимают вид

$$u_1^*(t) = \frac{\lambda_2(t)}{2}, \quad u_2^*(t) = \frac{\lambda_3(t)}{2}. \quad (3.4)$$

Подставим оптимальные управления (3.4) в уравнения движения (2.3):

$$\dot{y}(t) = \frac{\lambda_2(t)}{2}, \quad \dot{z}(t) = \frac{\lambda_3(t)}{2}.$$

Продифференцируем по времени правые и левые части данных соотношений и подставим в правые части получившихся после дифференцирования уравнений выражения для $\dot{\lambda}_2$ и $\dot{\lambda}_3$ из (3.1б,в). С учетом условий (3.3) выводим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\dot{\lambda}_2}{2} = \frac{1}{\sigma^2 x^3} \left(\kappa_{11} \frac{y}{x} - \kappa_{12} \right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\dot{\lambda}_3}{2} = \frac{1}{\sigma^2 x^3} \left(\kappa_{11} \frac{z}{x} - \kappa_{13} \right). \end{aligned}$$

Сделаем в этих уравнениях замену аргумента и перейдем от времени t к координате x по формуле, вытекающей из уравнения движения наблюдателя вдоль оси ОХ:

$$t = \frac{x - x_0}{V}, \quad \frac{d}{dx} = \frac{1}{V} \frac{d}{dt}.$$

После замены аргумента получаем систему дифференциальных уравнений второго порядка, которая определяет вид оптимальной траектории $y(x)$, $z(x)$. Имеем

$$y'' = -\varepsilon^2 \frac{y}{x^4} + \varepsilon^2 \frac{B_1}{x^3}, \quad z'' = -\varepsilon^2 \frac{z}{x^4} + \varepsilon^2 \frac{B_2}{x^3}, \quad (3.5)$$

где ' обозначает дифференцирование по x , $x = x_0 + V(t - t_0)$, а

$$\varepsilon^2 = -\frac{\kappa_{11}}{(\sigma V)^2}, \quad B_1 = \frac{\kappa_{12}}{\kappa_{11}}, \quad B_2 = \frac{\kappa_{13}}{\kappa_{11}}. \quad (3.6)$$

Общее решение системы (3.5) выглядит следующим образом:

$$y(x) = A_1 x \sin\left(\frac{\varepsilon}{x} + f_1\right) + B_1 x, \quad (3.7)$$

$$z(x) = A_2 x \sin\left(\frac{\varepsilon}{x} + f_2\right) + B_2 x, \quad (3.8)$$

где A_i , f_i , $i = 1, 2$, — константы, которые находятся из краевых условий (2.5), (2.6) для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Эти условия дают

$$\begin{aligned} A_1 \sin\left(\frac{\varepsilon}{x_0} + f_1\right) &= \varphi_0 - B_1, & A_1 \sin\left(\frac{\varepsilon}{a} + f_1\right) &= -B_1, \\ A_2 \sin\left(\frac{\varepsilon}{x_0} + f_2\right) &= \psi_0 - B_2, & A_2 \sin\left(\frac{\varepsilon}{a} + f_2\right) &= -B_2, \end{aligned}$$

где $\varphi_0 = \varphi(R(t_0))$, $\psi_0 = \psi(R(t_0))$, $a = x(T) = x_0 + V(T - t_0)$. Решая данную систему уравнений относительно A_i и f_i , $i = 1, 2$, и подставляя результат в (3.7), (3.8), получаем

$$y(x) = \frac{x}{\sin \xi} \left(B_1 \sin\left(\frac{\varepsilon}{x} - \frac{\varepsilon}{x_0}\right) + (\varphi_0 - B_1) \sin\left(\frac{\varepsilon}{x} - \frac{\varepsilon}{a}\right) \right) + B_1 x, \quad (3.9)$$

$$z(x) = \frac{x}{\sin \xi} \left(B_2 \sin\left(\frac{\varepsilon}{x} - \frac{\varepsilon}{x_0}\right) + (\psi_0 - B_2) \sin\left(\frac{\varepsilon}{x} - \frac{\varepsilon}{a}\right) \right) + B_2 x, \quad (3.10)$$

где $\xi = \varepsilon(x_0^{-1} - a^{-1})$. Заметим, что вид оптимальной траектории (3.9), (3.10) не меняется при замене ε на $-\varepsilon$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon > 0$. Характерный вид траекторий, описываемых уравнениями (3.9), (3.10) показан на рис. 2.

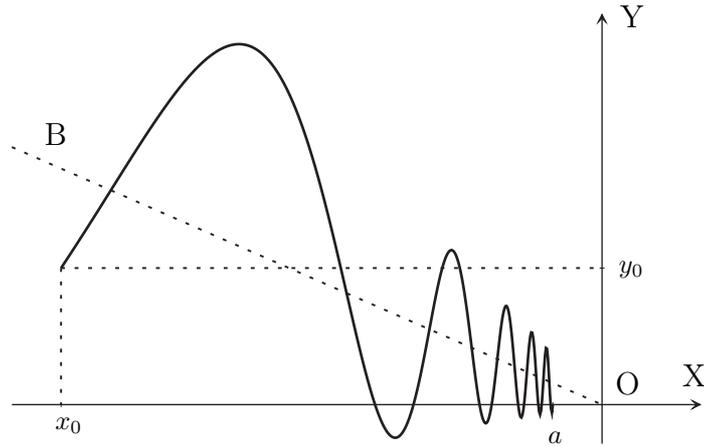


Рис. 2. Характерный вид траектории наблюдателя

Прямая OB , показанная пунктиром, имеет угловой коэффициент равный B_1 . Из рис. 2 видно, что на траектории (3.9), (3.10) движение наблюдателя представляет собой характерное колебание относительно прямой OB , амплитуда которого убывает с уменьшением модуля $x(t)$, а частота — возрастает. При этом параметр ε имеет смысл начальной пространственной частоты колебаний.

Входящие в уравнения (3.9), (3.10) параметры ε , B_1 и B_2 задаются равенствами (3.6), которые после подстановки значений производных κ_{11} , κ_{12} , κ_{13} принимают следующий вид

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\beta_1 \Gamma_{11}^2(T) + \beta_2 \Gamma_{12}^2(T) + \beta_3 \Gamma_{13}^2(T)}}{\sigma V}, \quad (3.11)$$

$$B_1 = \frac{\Gamma_{12}(T) (\beta_1 \Gamma_{11}(T) + \beta_2 \Gamma_{22}(T)) + \beta_3 \Gamma_{13}(T) \Gamma_{23}(T)}{\beta_1 \Gamma_{11}^2(T) + \beta_2 \Gamma_{12}^2(T) + \beta_3 \Gamma_{13}^2(T)}, \quad (3.12)$$

$$B_2 = \frac{\Gamma_{13}(T) (\beta_1 \Gamma_{11}(T) + \beta_3 \Gamma_{33}(T)) + \beta_2 \Gamma_{12}(T) \Gamma_{23}(T)}{\beta_1 \Gamma_{11}^2(T) + \beta_2 \Gamma_{12}^2(T) + \beta_3 \Gamma_{13}^2(T)}, \quad (3.13)$$

где для краткости записи вместо элементов матрицы $D(T)$ подставлены соответствующие элементы матрицы $\Gamma(T) = D^{-1}(T)$. Сама матрица $D(T)$ находится путем интегрирования уравнений (2.4) на оптимальной траектории, описываемой уравнениями (3.9), (3.10). Результаты интегрирования имеют вид

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{11}(t_0) + L(2Q(\xi) [B_1(\varphi_0 - 2B_1) + B_2(\psi_0 - 2B_2)] \\ &\quad + 4C(\xi) [B_1(\varphi_0 - B_1) + B_2(\psi_0 - B_2)] \\ &\quad + S(\xi) [(\varphi_0 - 2B_1)^2 + (\psi_0 - 2B_2)^2] + B_1^2 + B_2^2), \\ d_{12} &= d_{12}(t_0) - L(B_1 + Q(\xi)(\varphi_0 - 2B_1)), \\ d_{13} &= d_{13}(t_0) - L(B_2 + Q(\xi)(\psi_0 - 2B_2)), \\ d_{22} &= d_{22}(t_0) + L, \quad d_{23} = d_{23}(t_0), \\ d_{33} &= d_{33}(t_0) + L, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} Q(\xi) &= \frac{1}{\xi} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}, \quad L = \frac{1}{V\sigma^2} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{a} \right), \\ C(\xi) &= \frac{(1 + \cos \xi)(\xi - \sin \xi)}{2\xi(1 - \cos 2\xi)}, \quad S(\xi) = \frac{2\xi - \sin 2\xi}{2\xi(1 - \cos 2\xi)}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое решение вспомогательной задачи оптимального управления (2.3)–(2.7) задается уравнениями (3.9), (3.10) с константами ε , B_1 и B_2 , которые находятся из решения системы уравнений (3.11)–(3.14).

Перейдем теперь к исследованию частного случая задачи (2.3)–(2.7), когда в критерии (2.7) весовой коэффициент β_1 отличен от нуля, а коэффициенты β_2, β_3 равны нулю.

3.1. Исследование частного случая вспомогательной задачи

Как отмечалось в разделе, посвященном постановке вспомогательной задачи оптимального управления, мы полагаем $\beta_2 = 0, \beta_3 = 0$ в случае, когда требуется построить управление, повышающее точность оценивания x -компоненты вектора R на момент T .

При $\beta_2 = 0, \beta_3 = 0$ уравнения (3.11)–(3.13) упрощаются и приводятся к следующему виду

$$\begin{aligned} \text{а) } B_1 d_{22} + B_2 d_{23} + d_{12} &= 0, \\ \text{б) } B_1 d_{23} + B_2 d_{33} + d_{13} &= 0, \\ \text{в) } \sigma V \varepsilon (d_{11} - B_1^2 d_{22} - 2B_1 B_2 d_{23} - B_2^2 d_{33}) &= \sqrt{\beta_1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Подставляя в (3.15 а,б) значения $d_{12}, d_{13}, d_{22}, d_{23}$ и d_{33} из равенств (3.14) и разрешая получившуюся систему уравнений относительно B_1 и B_2 , находим

$$\begin{aligned} B_1(\xi) &= \frac{M_{12} + \mu(\xi) (\varphi_0 d_{33}^0 - \psi_0 d_{23}^0 - 2d_{12}^0) + 2\mu^2(\xi)\varphi_0}{M_{11} + 2\mu(\xi) (d_{22}^0 + d_{33}^0) + 4\mu^2(\xi)}, \\ B_2(\xi) &= \frac{M_{13} + \mu(\xi) (\psi_0 d_{22}^0 - \varphi_0 d_{23}^0 - 2d_{13}^0) + 2\mu^2(\xi)\psi_0}{M_{11} + 2\mu(\xi) (d_{22}^0 + d_{33}^0) + 4\mu^2(\xi)}, \end{aligned}$$

где введены обозначения $d_{ij}^0 = d_{ij}(t_0)$, $\mu(\xi) = LQ(\xi)$ и

$$\begin{aligned} M_{12} &= d_{23}^0 d_{13}^0 - d_{12}^0 d_{33}^0, & M_{13} &= d_{23}^0 d_{12}^0 - d_{13}^0 d_{22}^0, \\ M_{11} &= d_{22}^0 d_{33}^0 - (d_{23}^0)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что выражения для $B_1(\xi), B_2(\xi)$ можно представить в следующем виде:

$$B_1(\xi) = \frac{\varphi_0}{2} - W_1(\xi), \quad B_2(\xi) = \frac{\psi_0}{2} - W_2(\xi). \quad (3.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} W_1(\xi) &= \frac{\varphi_0 M_{11}/2 - M_{12} + \mu(\xi) (\varphi_0 d_{22}^0 + \psi_0 d_{23}^0 + 2d_{12}^0)}{M_{11} + 2\mu(\xi) (d_{22}^0 + d_{33}^0) + 4\mu^2(\xi)}, \\ W_2(\xi) &= \frac{\psi_0 M_{11}/2 - M_{13} + \mu(\xi) (\psi_0 d_{33}^0 + \varphi_0 d_{23}^0 + 2d_{13}^0)}{M_{11} + 2\mu(\xi) (d_{22}^0 + d_{33}^0) + 4\mu^2(\xi)}. \end{aligned}$$

После подстановки в (3.15 в) значений $d_{11}, d_{22}, d_{23}, d_{33}$ и равенств (3.16), уравнение (3.15 в) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\sigma L \sqrt{\beta_1}}{\xi} &= d_{11}^0 + B_1^2(\xi) d_{22}^0 + B_2^2(\xi) d_{33}^0 + 2B_1(\xi) d_{12}^0 + 2B_2(\xi) d_{13}^0 + 2B_1(\xi) B_2(\xi) d_{23}^0 \\ &+ \frac{L}{\xi} \left\{ \left(\frac{\varphi_0^2}{4} + \frac{\psi_0^2}{4} \right) \frac{\xi - \sin \xi}{1 - \cos \xi} + (W_1^2(\xi) + W_2^2(\xi)) \frac{\xi + \sin \xi}{1 + \cos \xi} \right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где ξ можно рассматривать как новое неизвестное, введенное вместо ε ; при этом $\xi > 0$.

Предложение 1. Уравнение (3.17) всегда имеет решение.

Доказательство. Обозначим через $F_1(\xi)$ левую часть уравнения (3.17), а через $F_2(\xi)$ — правую часть этого уравнения и исследуем поведение функций $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ при $\xi \geq 0$.

Графики функций $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ показаны на рис. 3.

Отметим основные свойства функции $F_2(\xi)$. Во-первых, функция $F_2(\xi)$ положительна при $\xi > 0$. Действительно, первые шесть слагаемых в правой части уравнения (3.17) можно рассматривать как функцию двух переменных — B_1 и B_2 . Эта функция имеет вид

$$\Phi(B_1, B_2) = d_{11}^0 + 2B_1 d_{12}^0 + 2B_2 d_{13}^0 + B_1^2 d_{22}^0 + 2B_1 B_2 d_{23}^0 + B_2^2 d_{33}^0. \quad (3.18)$$

В силу непрерывности функции $\Phi(B_1, B_2)$ по обоим аргументам, для доказательства того что $\Phi(B_1, B_2) > 0$, достаточно показать, что $\min \Phi(B_1, B_2) > 0$. Матрица q вторых производных функции Φ имеет вид

$$q = 2 \begin{bmatrix} d_{22}^0 & d_{23}^0 \\ d_{23}^0 & d_{33}^0 \end{bmatrix}.$$

В силу положительной определенности матрицы $D(t_0)$ матрица q также положительно определена. Следовательно экстремум функции $\Phi(B_1, B_2)$ является минимумом. Дифференцируя $\Phi(B_1, B_2)$ по B_1 и B_2 , находим, что точка минимума (B_1^*, B_2^*) определяется уравнениями

$$d_{12}^0 + B_1 d_{22}^0 + B_2 d_{23}^0 = 0, \quad d_{13}^0 + B_2 d_{33}^0 + B_1 d_{23}^0 = 0.$$

Отсюда

$$B_1^* = \frac{d_{23}^0 d_{13}^0 - d_{12}^0 d_{33}^0}{d_{22}^0 d_{33}^0 - (d_{23}^0)^2}, \quad B_2^* = \frac{d_{23}^0 d_{12}^0 - d_{13}^0 d_{22}^0}{d_{22}^0 d_{33}^0 - (d_{23}^0)^2}.$$

Подставляя эти значения в (3.18), вычисляем минимум функции $\Phi(B_1, B_2)$

$$\Phi(B_1^*, B_2^*) = \frac{\det D(t_0)}{d_{22}^0 d_{33}^0 - (d_{23}^0)^2} = \frac{1}{\gamma_{11}(t_0)} > 0.$$

Таким образом, функция $\Phi(B_1, B_2)$ положительна при всех значениях параметров B_1, B_2 . Далее, выражение в фигурных скобках в правой части уравнения (3.17) также положительно, поскольку $\xi > |\sin \xi|$ при $\xi > 0$; следовательно функция $F_2(\xi)$ положительна при всех $\xi > 0$.

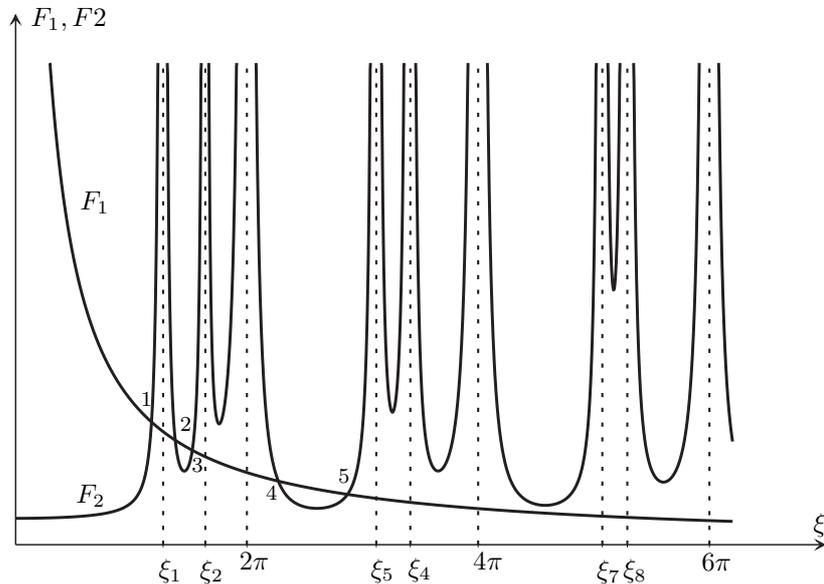


Рис. 3. Функции $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$

Во-вторых, функция $F_2(\xi)$ имеет конечный положительный предел при $\xi \rightarrow +0$, так как существуют следующие пределы:

$$\begin{aligned}\lim_{\xi \rightarrow +0} \left(\frac{\xi + \sin \xi}{\xi(1 + \cos \xi)} \right) &= 1, & \lim_{\xi \rightarrow +0} \mu(\xi) &= \frac{L}{2}, \\ \lim_{\xi \rightarrow +0} \left(\frac{\xi - \sin \xi}{\xi(1 - \cos \xi)} \right) &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Кроме того, функция $F_2(\xi)$ стремится к $+\infty$ при $\xi \rightarrow \xi_i$, $i = 1, 2, \dots$, где

$$\xi_i = \begin{cases} 2\pi n, & n = 1, 2, \dots, \\ \text{корни уравнения} \\ M_{11} + 2\mu(\xi)(d_{22}^0 + d_{33}^0) + 4\mu^2(\xi) = 0, \end{cases}$$

Как показано на рис. 3, график функции $F_2(\xi)$ имеет в точках ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, вертикальные асимптоты, отмеченные пунктиром.

В свою очередь функция $F_1(\xi)$, будучи гиперболой, непрерывна и положительна при $\xi > 0$, монотонно стремится к нулю при $\xi \rightarrow +\infty$ и стремится к $+\infty$ при $\xi \rightarrow +0$ (рис. 3).

Описав поведение функций $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$, перейдем к доказательству того, что уравнение (3.17) всегда имеет решение. Рассмотрим функцию $f(\xi) = F_2(\xi) - F_1(\xi)$ на интервале $(0, \xi_1)$. В силу свойств $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ функция $f(\xi)$ стремится к $-\infty$ при $\xi \rightarrow +0$ и к $+\infty$ при $\xi \rightarrow \xi_1$. Следовательно по определению бесконечного предела, на интервале $(0, \xi_1)$ всегда найдутся две точки ω_1, ω_2 , такие что $f(\omega_1) < 0$ и $f(\omega_2) > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(\xi)$ на отрезке $[\omega_1, \omega_2]$ есть хотя бы одна точка ξ^* , в которой $f(\xi^*) = 0$, что эквивалентно существованию хотя бы одного решения уравнения (3.17).

Предложение доказано.

Таким образом, уравнение (3.17) всегда имеет решение, хотя, возможно, и не единственное. Например, на рис. 3 показан случай, когда существуют пять корней уравнения (3.17) (обозначены цифрами от 1 до 5). Неединственность решения означает, что необходимые условия оптимальности, из которых и было получено уравнение (3.17), не позволяют однозначно определить параметры $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$ и $\varepsilon(\xi)$ и, следовательно, траекторию, доставляющие минимум функционалу (2.7) или эквивалентному ему функционалу (2.2). Чтобы устранить эту неоднозначность и выбрать один из корней уравнения (3.17), рассмотрим значение критерия (2.2) как функции $J^*(\xi)$ на траектории (3.9), (3.10) при $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$. Имеем

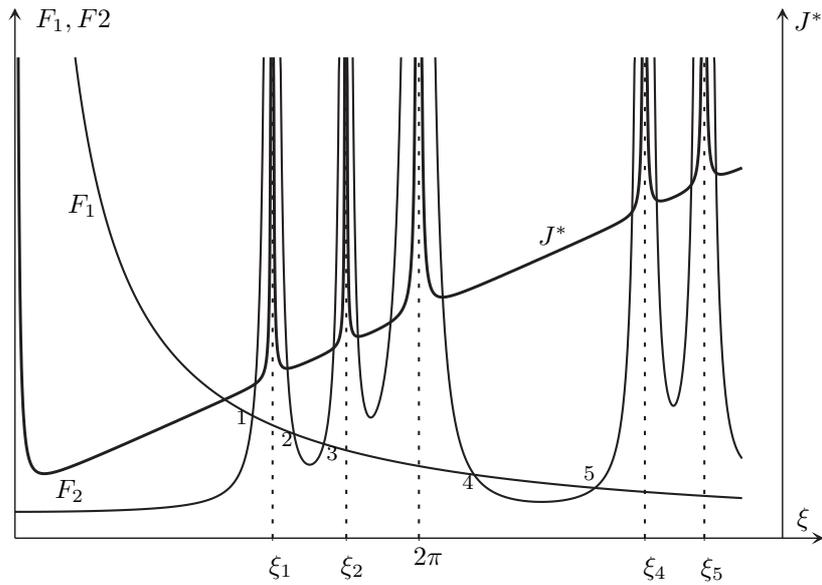
$$J^*(\xi) = J_\Gamma(\xi) + J_R(\xi),$$

где через J_Γ , J_R обозначены соответственно значения первого слагаемого (зависящего от $\Gamma(T)$) и второго слагаемого функционала (2.2). График функции $J^*(\xi)$ показан на рис. 4, где для наглядности представлены также графики функций $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ и обозначены точки их пересечения, т. е. решения уравнения (3.17).

Как следует из (2.2), при $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$ величина $J_\Gamma(\xi)$ равна произведению весового коэффициента β_1 на значение элемента ковариационной матрицы $\Gamma_{11}(T)$, отвечающего за точность оценивания x -компоненты вектора $R(T)$. Непосредственные вычисления показывают, что на траектории (3.9), (3.10) при $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$ функция $J_\Gamma(\xi)$ имеет вид

$$J_\Gamma(\xi) = \frac{\xi\sqrt{\beta_1}}{L}. \quad (3.19)$$

Таким образом, на траектории (3.9), (3.10) величина $J_\Gamma(\xi)$ пропорциональна значению корня ξ уравнения (3.17). Следовательно в рамках вспомогательной задачи оптимального управления максимальная точность оценивания величины $R_x(T)$ достигается при движении по траектории, соответствующей *минимальному* корню ξ^* уравнения (3.17).

Рис. 4. Функция $J^*(\xi)$

Заметим, что слагаемое J_R было добавлено в функционал (2.2) для регуляризации вспомогательной задачи оптимального управления при малых значениях весовых коэффициентов, а также для избежания значительного расхода управляющего воздействия на начальном участке условно-программной траектории при плохом знании компонент вектора $R(t)$. При этом главная цель управления наблюдателем состоит в повышении точности оценивания компонент вектора $R(T)$, т. е. в минимизации первого слагаемого функционала (2.2). С учетом этих замечаний выберем в качестве искомого значения ξ минимальный корень ξ^* , который, как следует из (3.19), дает наименьшее по сравнению с остальными корнями уравнения (3.17) значение первой части J_Γ функционала (2.2).

Как было показано выше, минимальный корень ξ^* уравнения (3.17) всегда существует и локализован на интервале $(0, \xi_1)$, где ξ_1 – минимальный корень уравнения

$$M_{11} + 2\mu(\xi)(d_{22}^0 + d_{33}^0) + 4\mu^2(\xi) = 0.$$

Решая данное квадратное уравнение относительно μ , получаем

$$\mu_{1,2} = \frac{-d_{22}^0 - d_{33}^0 \pm \sqrt{(d_{22}^0 - d_{33}^0)^2 + 4(d_{23}^0)^2}}{4},$$

где знак “плюс” перед квадратным корнем соответствует решению μ_1 , а знак “минус” – решению μ_2 . В силу положительной определенности матрицы $D(t_0)$ оба корня $-\mu_1$ и μ_2 – отрицательны и $\mu_2 < \mu_1$. Искомое значение ξ_1 будет минимальным ненулевым корнем уравнений

$$\mu(\xi) = \mu_1, \quad \mu(\xi) = \mu_2, \quad \text{где } \mu(\xi) = \frac{L}{\xi} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}.$$

Такой корень дает уравнение с параметром μ_2 , поскольку функция $\operatorname{tg}(\cdot)$ является возрастающей. Поскольку $\mu_2 < 0$, искомый минимальный корень ξ_1 локализован на интервале $(\pi, 2\pi)$. Следовательно, значение минимального корня ξ^* уравнения (3.17), локализованного на интервале $(0, \xi_1)$, удовлетворяет неравенству

$$\xi^* < 2\pi. \quad (3.20)$$

Заметим, что величина ξ в уравнениях траектории (3.9), (3.10) характеризует количество колебаний, которые произойдут в процессе движения на отрезке $[x_0, a]$, т. е. чем больше величина ξ ,

тем большее число колебаний будет иметь место. Тогда из неравенства (3.20) следует, что на оптимальной траектории, соответствующей минимальному корню ξ^* , пространственное колебательное движение наблюдателя длится меньше одного периода.

Таким образом, для окончательного решения задачи (2.3)–(2.7) необходимо найти корень уравнения (3.17) на интервале $(0, \xi_1)$. Для численного решения уравнения (3.17) авторами успешно применялся метод Ньютона. В качестве начального приближения выбиралась точка $\xi^{(0)}$, расположенная слева от точки ξ_1 : $\xi^{(0)} = \xi_1 - \delta\xi$. Малый положительный параметр $\delta\xi$ подбирался так, чтобы выполнялось неравенство $F_2(\xi^{(0)}) - F_1(\xi^{(0)}) > 0$. Заметим, что при больших значениях весового коэффициента β_1 корень уравнения (3.17) расположен рядом с точкой ξ_1 . Поэтому выбор в качестве начального приближения точки $\xi^{(0)}$ обеспечивает быструю сходимость метода Ньютона, что было подтверждено при численном моделировании.

4. Условно-программный алгоритм управления наблюдателем

Сформулируем алгоритм условно-программного управления наблюдателем, используя решение вспомогательной задачи оптимального управления, полученное для частного случая весовых коэффициентов в критерии (2.7). Будем считать, что обновление условно-программного управления происходит в моменты времени $t_k = \tau_0 + k\Delta\tau$, $k = 0, 1, \dots$, где $\Delta\tau$ — период обновления управления, кратный интервалу между наблюдениями. Пусть в момент t_k имеются оценка фильтра $\hat{R}(t_k)$ и ковариационная матрица ошибок оценивания фильтра $\gamma(t_k)$. Примем момент t_k за начальный момент t_0 и решим вспомогательную задачу оптимального управления (2.3)–(2.7) при $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$ со следующими начальными условиями

$$\begin{aligned} x_0 &= \hat{R}_x(t_k), & y_0 &= \hat{R}_y(t_k), \\ z_0 &= \hat{R}_z(t_k), & D(t_0) &= \gamma^{-1}(t_k). \end{aligned} \quad (4.1)$$

При решении вспомогательной задачи находится минимальный корень ξ^* уравнения (3.17) и вычисляются значения параметров $\varepsilon(\xi^*)$, $B_1(\xi^*)$ и $B_2(\xi^*)$, определяющих оптимальную траекторию (3.9), (3.10) с $x = x_0 + V(t - t_0)$. Затем в течение времени $\Delta\tau$ наблюдатель движется по этой расчетной траектории, после чего происходит обновление программного управления путем решения задачи (2.3)–(2.7) с $t_0 = t_{k+1}$ и начальными условиями

$$\begin{aligned} x_0 &= \hat{R}_x(t_{k+1}), & y_0 &= \hat{R}_y(t_{k+1}), \\ z_0 &= \hat{R}_z(t_{k+1}), & D(t_0) &= \gamma^{-1}(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Управление наблюдателем заканчивается при $t = T$.

Таким образом, условно-программное управление наблюдателя, построенное в соответствии с описанным алгоритмом, представляет собой совокупность участков программного движения на временных отрезках $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots$. На каждом из этих участков программное управление соответствует траектории (3.9), (3.10) с $x = \hat{R}_x(t_k) + V(t - t_k)$ и параметрами ε , B_1 , B_2 , найденными из решения задачи (2.3)–(2.7) с начальными условиями (4.1). Реальная траектория наблюдателя при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} R_x(t) &= R_x(t_k) + V(t - t_k), \\ R_y(t) &= R_y(t_k) + y \left(\hat{R}_x(t_k) + V(t - t_k) \right) - \hat{R}_y(t_k), \\ R_z(t) &= R_z(t_k) + z \left(\hat{R}_x(t_k) + V(t - t_k) \right) - \hat{R}_z(t_k), \end{aligned}$$

где $y(\cdot)$, $z(\cdot)$ — оптимальная программная траектория (3.9), (3.10).

Рассмотрим вопрос выбора интервала времени $\Delta\tau$ между обновлениями программного управления при численной реализации предложенного алгоритма управления наблюдателем.

Заметим, что в рассматриваемой задаче численное решение вспомогательной задачи оптимального управления требует в несколько раз большего машинного времени, чем один такт работы алгоритма расширенного фильтра Калмана. По этой причине целесообразно решать задачу оптимального управления не в каждый такт времени (т. е. не после каждого измерения), а через несколько тактов работы алгоритма фильтрации. Целесообразность такого подхода оправдана еще и тем, что при малой длительности интервала между измерениями оценки вектора R , получаемые на двух последовательных тактах работы фильтра, мало отличаются друг от друга, и отвечающие этим оценкам оптимальные программные траектории наблюдателя будут практически совпадать. Исходя из этих соображений при проведении моделирования на ЭВМ, результаты которого описываются ниже, обновление программного управления производилось через 5 тактов работы алгоритма фильтрации, т. е. $\Delta\tau = 5\Delta$.

5. Результаты численного моделирования

Для проверки эффективности условно-программного управления наблюдателем, построенного на основании решения вспомогательной задачи оптимального управления (2.3)–(2.7), было проведено численное моделирование для частного случая $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$. В ходе моделирования исследовалось поведение расширенного фильтра Калмана при движении наблюдателя по траектории, которая строилась в соответствии с алгоритмом, описанным в предыдущем разделе.

Синтез условно-программного управления проводился для трех значений весового коэффициента β_1 при следующих начальных условиях

$$\begin{aligned} \tau_0 = 0 \text{ с}, & \quad T = 80 \text{ с}, & \quad \Delta = 0,2 \text{ с}, \\ \Delta\tau = 1,0 \text{ с}, & \quad V = 100 \text{ м/с}, & \quad \sigma_0 = 0,002. \end{aligned}$$

Весовой коэффициент β_1 принимал значения $\beta_1 = 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $\beta_1 = 0,1 \text{ с}^{-1}$ и $\beta_1 = 10,0 \text{ с}^{-1}$.

Эффективность работы фильтра Калмана при движении по условно-программным траекториям оценивалась при помощи статистического моделирования, суть которого заключалась в следующем. Считалось, что компоненты вектора начального положения наблюдателя $R_x(\tau_0)$, $R_y(\tau_0)$, $R_z(\tau_0)$ — независимые гауссовские случайные величины со средними Z_x , Z_y , Z_z и среднеквадратическими отклонениями (с.к.о.) $S_x(\tau_0)$, $S_y(\tau_0)$, $S_z(\tau_0)$, численные значения которых определялись как

$$\begin{aligned} Z_x = -10000 \text{ м}, & \quad Z_y = 50 \text{ м}, & \quad Z_z = -100 \text{ м}, \\ S_x(\tau_0) = 800 \text{ м}, & \quad S_y(\tau_0) = 20 \text{ м}, & \quad S_z(\tau_0) = 20 \text{ м}. \end{aligned}$$

Предполагалось, что ковариационная матрица ошибок априорного оценивания G имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} S_x^2(\tau_0) & 0 & 0 \\ 0 & S_y^2(\tau_0) & 0 \\ 0 & 0 & S_z^2(\tau_0) \end{bmatrix}.$$

В ходе моделирования условно-программное управление строилось для 5000 реализаций каждой из величин $R_x(\tau_0)$, $R_y(\tau_0)$, $R_z(\tau_0)$ и при движении по каждой реализовавшейся траектории в моменты обновления программного управления t_k , $k = 0, 1, \dots$, вычислялись значения ошибки $e(t)$ оценивания x -компоненты вектора $R(t)$:

$$e(t_k) = \widehat{R}_x(t_k) - R_x(t_k).$$

Результаты численного моделирования

	β_1	\bar{E} , м	$S_x(T)$, м	промах $M(T)$, м	расход $L(T)$, м
1	10^{-6}	-4,4	142,5	$0,95 \pm 0,67$	$150,3 \pm 30,3$
2	0,1	3,2	62,6	$0,69 \pm 0,44$	$179,4 \pm 26,6$
3	10,0	0,97	21,1	$0,59 \pm 0,34$	$537,8 \pm 140,9$

Кроме того, на каждой реализации вычислялись ошибка оценивания $E = e(T)$ в момент T окончания процесса управления, значение расхода управляющего воздействия $L(T)$ и терминальный промах $M(T)$. Последние две величины находились по формулам

$$L(t) = \int_{\tau_0}^t (|u_1(s)| + |u_2(s)|) ds, \quad M(T) = \sqrt{R_y^2(T) + R_z^2(T)}.$$

Затем по набору реализаций определялась эволюция с.к.о. $S_x(t)$ ошибки оценивания компоненты $R_x(t)$, строился интегральный закон распределения случайной величины E , вычислялось ее среднее значение \bar{E} , а также среднее значение и с.к.о. величины $L(T)$.

Результаты статистического моделирования представлены в таблице выше и показаны на рис. 5–8. На всех рисунках график 1 построен для значения весового коэффициента $\beta_1 = 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, график 2 — для $\beta_1 = 0,1 \text{ с}^{-1}$ и график 3 — для $\beta_1 = 10,0 \text{ с}^{-1}$. На рис. 5 приведен вид интегрального закона распределения терминальной ошибки оценивания E , а на рис. 6 отражена эволюция с.к.о. ошибки оценивания x -компоненты вектора $R(t)$. Рисунок 7 демонстрирует распределения величины $L(T)$, которые позволяют судить о расходе управляющего воздействия к моменту T при различных значениях коэффициента β_1 .

На рис. 8 изображены типичные реализации условно-программных траекторий $R_x(t)$, $R_y(t)$, $R_z(t)$ для трех значений весового коэффициента β_1 . Выделена траектория наблюдателя, построенная для $\beta_1 = 10,0 \text{ с}^{-1}$, и показана ее проекция на плоскость OXZ .

Анализ результатов моделирования позволяет сделать следующие выводы.

1. Управление, построенное на основании решения вспомогательной задачи оптимального управления, при увеличении коэффициента β_1 оказывает существенное влияние на точность оценивания x -компоненты вектора R с помощью расширенного фильтра Калмана. При этом выигрыш в точности оценивания величины $R_x(T)$ составляет один-два порядка по дисперсии.

2. Построенное управление при увеличении коэффициента β_1 уменьшает терминальный промах $M(T)$, обеспечивая более точное наведение.

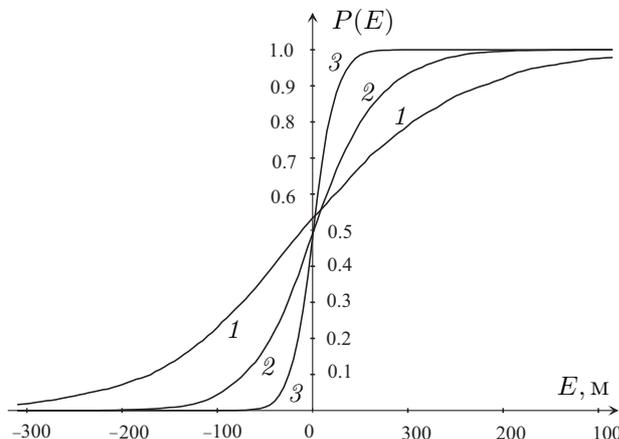


Рис. 5. Распределение терминальной ошибки оценивания E

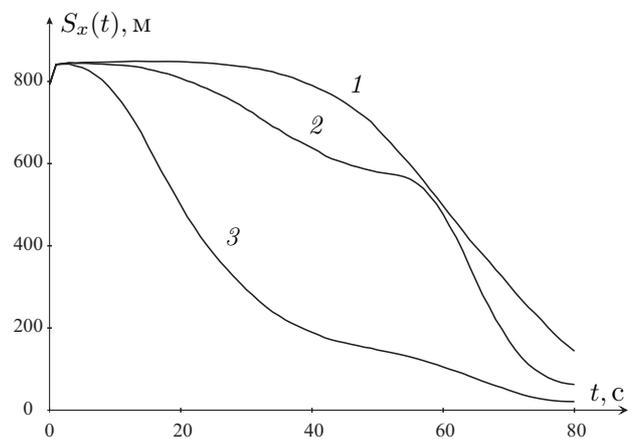


Рис. 6. Эволюция с.к.о. ошибки оценивания величины R_x

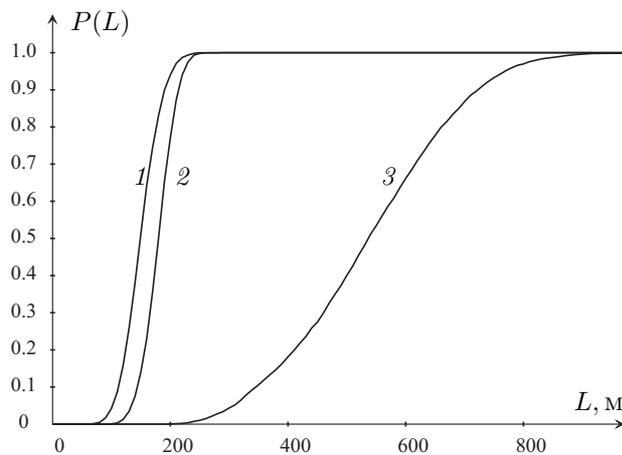
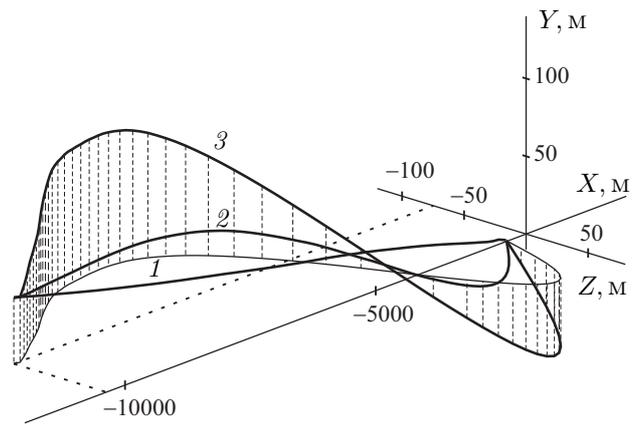
Рис. 7. Распределение величины $L(T)$ 

Рис. 8. Вид типичных реализаций условно-программных траекторий

3. Увеличение коэффициента β_1 приводит также к более быстрому убыванию с.к.о. $S_x(t)$ почти на всем отрезке управления. На отдельных реализациях это проявляется в ускорении сходимости оценки расширенного фильтра Калмана к точному значению.

4. Как видно из рис. 7 и таблицы, платой за повышение точности оценивания при увеличении коэффициента β_1 является рост расхода управляющего воздействия.

5. Для данных условий моделирования вид условно-программной траектории, функции $S_x(t)$ и распределения терминальной ошибки оценивания E качественно меняется лишь при увеличении коэффициента β_1 в $10^2 - 10^3$ раз. Поэтому при построении управления, обеспечивающего как эффективную работу фильтра, так и приемлемый расход управления, возможный диапазон значений β_1 достаточно широк и нет необходимости в точном подборе этого коэффициента при настройке алгоритма условно-программного управления.

Заключение

1. Рассмотрена пространственная задача управления наблюдателем, который оценивает вектор своих координат по дискретным угломерным наблюдениям при помощи расширенного фильтра Калмана.

2. Решение задачи осуществлялось на классе условно-программных управлений, что позволило свести задачу синтеза траектории наблюдателя к решению вспомогательной задачи оптимального управления с критерием, обеспечивающим эффективную работу фильтра, и начальными условиями, обновляющимися после каждого такта (или после нескольких тактов) работы фильтра.

3. Получено аналитическое решение вспомогательной задачи оптимального управления, найден вид оптимальной траектории наблюдателя, проведено исследование оптимального решения для частного случая задачи.

4. Сформулирован условно-программный алгоритм управления наблюдателем.

5. Эффективность построенного управления наблюдателем проверена при помощи статистического моделирования. Анализ полученных результатов показал, что применение траекторного управления наблюдениями в рассматриваемой задаче повышает точность оценивания координат на один-два порядка по дисперсии и ускоряет сходимость оценок расширенного фильтра Калмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Nardone S.C., Aidala V.J.** Optimization of observer trajectories for bearings-only target localization // *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst.* 1981. Vol. AES-17, no. 2. P. 162–166. doi: 10.1109/TAES.1981.309141.
2. **Liu P.T.** An optimum approach in target tracking with bearing measurements // *J. Optim. Theory Appl.* 1988. Vol. 56, no. 2. P. 205–214. doi: 10.1007/BF00939407.
3. **Oshman Y., Davidson V.** Optimization of observer trajectories for bearings-only target localization // *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst.* 1999. Vol. 35, no. 3. P. 892–902. doi: 10.1109/7.784059.
4. **Miller A., Miller B.** Tracking the UAV trajectory on the basis of bearing-only observations // *Proc. 53rd IEEE Conf. Decision and Control — CDC2014.* 2014. N Y: IEEE, 2014. P. 4178–4184. doi: 10.1109/CDC.2014.7040040.
5. **Zajic T., Mahler R.P.S.** Particle-systems implementation of the PHD multitarget tracking filter // *Proc. SPIE Conf. Series.* 2003. Vol. 5096. P. 291–299.
6. **Lanneville D., Houssineau J.** Passive multi-target tracking with GM-PHD filter // *Proc. 13th Conf. Inform. Fusion.* N Y: IEEE, 2010. P. 1–7. doi: 10.1109/ICIF.2010.5711954.
7. **Bar-Shalom Y., Willett P.K., Tian X.** Tracking and data fusion: A handbook of algorithms. Storrs, CT: YBS-Press, 2011. 1235 p.
8. **Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y.** [et al.] Comparison of EKF pseudomeasurement and particle filters for a bearing-only target tracking problem // *Proc. SPIE Conf. Series Signal and Data Processing of Small Targets* / eds. Oliver E. Drummond. 2002. Vol. 4728. P. 240–250. doi: 10.1117/12.478508.
9. **Андреев К.В., Рубинович Е.Я.** Траекторное управление наблюдателем за мобильной целью по угломерной информации // *Автоматика и телемеханика.* 2016. № 1. С. 134–162.
10. **Miller S.A., Harris Z.A., Chong E.K.P.** A POMDP framework for coordinated guidance of autonomous uavs for multitarget tracking // *EURASIP J. Adv. Signal Process. Special issue on signal processing advances in robots and autonomy.* 2009. Article ID: 724597. 17 p. doi: 10.1155/2009/724597.
11. **Емельянов** Об одной задаче траекторного управления наблюдениями // *Автоматика и телемеханика.* 1997. Вып. 10. С. 47–58.
12. **Liptser R.S., Shiryaev A.N.** Statistics of random processes. NY: Springer-Verlag, 1978. 457 p. doi: 10.1007/978-3-662-13043-8.

Поступила 15.01.2020

После доработки 2.02.2020

Принята к публикации 10.02.2020

Емельянов Дмитрий Дмитриевич
канд. техн. наук
ведущий науч. сотрудник
STFC Rutherford Appleton Laboratory
Harwell, OX11 0QX UK
e-mail: d.emelianov@outlook.com

Рубинович Евгений Яковлевич
д-р техн. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
г. Москва
e-mail: rubinvch@ipu.rssi.ru

REFERENCES

1. Nardone S.C., Aidala V.J. Optimization of observer trajectories for bearings-only target localization. *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst.*, 1981, vol. AES-17, no. 2, pp. 162–166. doi: 10.1109/TAES.1981.309141.
2. Liu P.T. An optimum approach in target tracking with bearing measurements. *J. Optim. Theory Appl.*, 1988, vol. 56, no. 2, pp. 205–214. doi: 10.1007/BF00939407.

3. Oshman Y., Davidson V. Optimization of observer trajectories for bearings-only target localization. *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst.*, 1999, vol. 35, no. 3, pp. 892–902. doi: 10.1109/7.784059.
4. Miller A., Miller B. Tracking the UAV trajectory on the basis of bearing-only observations. In: *Proc. 53rd IEEE Conf. Decision and Control – CDC2014*, N Y: IEEE, 2014. pp. 4178–4184. doi: 10.1109/CDC.2014.7040040.
5. Zajic T., Mahler R.P.S. Particle-systems implementation of the PHD multitarget tracking filter. In: *Proc. SPIE Conf. Series*, 2003, vol. 5096, pp. 291–299.
6. Lanneville D., Houssineau J. Passive multi-target tracking with GM-PHD filter. In: *Proc. 13th Conf. Inform. Fusion*, N Y: IEEE, 2010, pp. 1–7. doi: 10.1109/ICIF.2010.5711954.
7. Bar-Shalom Y., Willett P.K., Tian X. *Tracking and data fusion: A handbook of algorithms*. Storrs, CT: YBS-Press, 2011, 1235 p. ISBN: 0964831279.
8. Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., et al. Comparison of EKF pseudomeasurement and particle filters for a bearing-only target tracking problem. In: *Proc. SPIE Conf. Series Signal and Data Processing of Small Targets* / ed. Oliver E. Drummond, 2002, vol. 4728, pp. 240–250. doi: 10.1117/12.478508.
9. Andreev K.V., Rubinovich E.Ya. Moving Observer trajectory control by angular measurements in tracking problem. *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 1, pp. 106–129. doi: 10.1134/S0005117916010069.
10. Miller S.A., Harris Z.A., Chong E.K.P. A POMDP framework for coordinated guidance of autonomous UAVs for multitarget tracking. *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, 2009, Article ID: 724597, 17 p. doi: 10.1155/2009/724597.
11. Emel'yanov D.D. To the problem of trajectory control of observations. *Autom. Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 10, pp. 1592–1600.
12. Liptser R.S., Shiryaev A.N. *Statistics of random processes*. Berlin: Springer, 1978. 457 p. doi: 10.1007/978-3-662-13043-8.

Received January 15, 2020

Revised February 2, 2020

Accepted February 10, 2020

Funding Agency: This work was partially supported by the Program fundamental research No. 7 of the Presidium of the Russian Academy of Sciences.

Dmitry Dmitrievich Emeliyanov, Cand. Sci. (Engineering), Particle Physics Department of STFC Rutherford Appleton Laboratory, Harwell Science and Innovation Campus, OX11 0QX UK, e-mail: d.emeliyanov@outlook.com.

Evgeny Yakovlevich Rubinovich, Dr. Sci. Engineering, Prof., Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997 Russia, e-mail: rubinvch@ipu.rssi.ru.

Cite this article as: D. D. Emeliyanov, E. Ya. Rubinovich. Trajectory control of 3D observations from an UAV by angular measurements, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 112–130.

УДК 517.977

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В ОДНОЙ ГИБРИДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТРЕМЯ УЧАСТНИКАМИ

А. Ф. Клейменов

Уравнения движения управляемой системы в рассматриваемой двухшаговой задаче на фиксированном промежутке времени содержат управления либо первого игрока, либо первого и второго игроков, либо первого и третьего игроков, либо всех игроков одновременно. На первом шаге (этапе) управляемого процесса (от начального момента до некоторого заданного момента) на систему действует управление только первого игрока, который решает задачу оптимального управления с заданным терминальным функционалом. В начале второго шага (этапа) процесса первый игрок решает, будут ли участвовать в процессе управления на оставшемся промежутке времени другие игроки или нет. Если да, то участвующие игроки разыгрывают неантагонистическую дифференциальную игру с заданными терминальными функционалами игроков, причем это может быть игра двух или трех лиц. В игре в качестве решения принимается равновесие по Нэшу, неуплучшаемое по Парето. Если нет, то первый игрок продолжает решать задачу оптимального управления до окончания процесса.

Ключевые слова: задача оптимального управления, неантагонистическая позиционная дифференциальная игра, терминальные показатели качества, нэшевское равновесие.

A. F. Kleimenov. Decision making in a hybrid two-step problem of dynamic control with three participants.

The equations of motion of a control system in a two-step problem on a fixed time interval contain the controls of either the first player, or the first and second players, or the first and third players, or all players simultaneously. At the first step (stage) of the control process (from the initial time up to a certain predefined moment), the system is controlled only by the first player, who solves an optimal control problem with a given terminal functional. At the beginning of the second step (stage) of the process, the first player decides whether the other players will participate in the control process for the remaining time period. If yes, then the participants play a nonantagonistic differential game with given terminal functionals, and it can be a game of two or three persons. A Pareto-optimal Nash equilibrium is taken as a solution in this game. If no, then the first player continues to solve the optimal control problem until the end of the process.

Keywords: optimal control problem, nonantagonistic positional differential game, terminal payoff functionals, Nash equilibrium.

MSC: 20D10, 20D25

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-131-140

Введение

Работа посвящена приложению теории позиционных дифференциальных игр [1; 2] к анализу одного класса гибридных неантагонистических игр [3–5] и является продолжением статьи [6], в которой рассматривалась гибридная задача управления с двумя участниками.

Управляемая система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями на заданном отрезке времени. Максимальное число участников управляемого процесса (игроков) равно трем (первый игрок $P1$, второй игрок $P2$ и третий игрок $P3$). Игроки действуют в классе позиционных стратегий; движения, порожденные этими стратегиями, определяются аналогично [7; 8].

На первом шаге (этапе) процесса (от начального момента до некоторого заданного момента) правая часть уравнений движения содержит управляющее воздействие только первого игрока, который решает задачу оптимального управления на отрезке с заданным терминальным функционалом выигрыша.

В начале второго шага (этапа) первый игрок решает, будет ли кто из остальных игроков (второй и третий игроки с заданными терминальными функционалами выигрыша) также участвовать в управляемом процессе на оставшемся промежутке времени или нет. Если да, то участвующие игроки разыгрывают неантагонистическую дифференциальную игру двух или трех лиц, в которой в качестве решения берется наилучшее по Парето нэшевское решение. Если нет, то первый игрок по-прежнему решает задачу оптимального управления вплоть до окончания процесса.

Задача состоит в нахождении наилучшей стратегии первого игрока, а также стратегий второго и третьего игроков (в случае их участия в управляемом процессе).

1. Постановка задачи

На заданном отрезке времени $[t_0, \vartheta]$ рассматривается следующая двухшаговая задача управления. Управляемая система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Максимальное число участников управляемого процесса (игроков) равно трем (игрок $P1$, игрок $P2$ и игрок $P3$). Игроки действуют в классе позиционных стратегий $U = \{u(t, x, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\}$, $V = \{v(t, x, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\}$ и $W = \{w(t, x, \varepsilon), \beta_3(\varepsilon)\}$ соответственно (см. подробно [7, с. 16]). Здесь первая компонента является произвольной функцией позиции (t, x) и положительного параметра точности ε , принимающая значения в ограничивающем множестве. Функция

$$\beta_i: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

непрерывная монотонная и удовлетворяет условию $\beta_i(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для фиксированного ε величина $\beta_i(\varepsilon)$ является верхней границей шага разбиения отрезка $[t_0, \vartheta]$, которое игрок P_i применяет при формировании пошаговых движений.

Движения (пошаговые и предельные), порожденные этими стратегиями, определяются аналогично [1; 2; 7].

На первом шаге (этапе) процесса от начального момента t_0 до заданного момента T , $t_0 < T < \vartheta$, правая часть уравнений движения содержит управляющее воздействие u только игрока $P1$, который решает следующую задачу оптимального управления Γ^1 с заданным терминальным функционалом выигрыша I_1 :

$$\dot{x} = f^{[0]}(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P^0 \subset \mathbb{R}^p, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad I_1 = \sigma_1(x(T)). \quad (1.1)$$

Решение задачи оптимального управления Γ^1 (1.1) обозначим через $u = u^\circ(t)$; оно порождает траекторию $x = x^\circ(t)$, $t_0 \leq t \leq T$.

В начале второго шага (этапа), т. е. в заданный момент времени T , игрок $P1$ должен решить, кто из остальных игроков также будет участвовать в управляемом процессе на оставшемся промежутке времени $[T, \vartheta]$. Всего у игрока $P1$ имеется четыре варианта выбора: 1°) участвует игрок $P2$; 2°) участвует игрок $P3$; 3°) участвуют оба игрока $P2$ и $P3$; 4°) никто из игроков $P2$, $P3$ не участвует.

Примем, что игрок $P2$ располагает ресурсом управления v , $v(t) \in Q^0 \subset \mathbb{R}^q$, и имеет заданный терминальный функционал выигрыша I_2 , а игрок $P3$ располагает ресурсом управления w , $w(t) \in S^0 \subset \mathbb{R}^s$, и имеет заданный терминальный функционал выигрыша I_3 . Предполагаем также, что выигрыши игроков являются трансферабельными [3] и что за участие в управляемом процессе на отрезке $[T, \vartheta]$ вновь вошедшие игроки выплачивают игроку $P1$ платеж в размере $L > 0$ единиц.

Если игрок $P1$ выбрал вариант 4°), т. е. если никто из игроков $P2$, $P3$ не будет участвовать в процессе, то на отрезке $[T, \vartheta]$ игрок $P1$ продолжает решать задачу оптимального управления Γ^1 :

$$\dot{x} = f^{[0]}(t, x, u), \quad u \in P^0, \quad T \leq t \leq \vartheta, \quad x(T) = x^\circ(T), \quad I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)). \quad (1.2)$$

Выигрыш игрока $P1$, получаемый в конечной точке $x^{(0)}(\vartheta)$ оптимальной траектории $x^{(0)}(\cdot)$ в задаче Γ^1 (1.2), обозначим через $I_1^{(0)}$.

Если игрок $P1$ выбрал вариант 1°), то игроки $P1$ и $P2$ на отрезке $[T, \vartheta]$ разыгрывают следующую неантагонистическую позиционную дифференциальную игру двух лиц Γ^{12} :

$$\dot{x} = f^{[1]}(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q^0, \quad T \leq t \leq \vartheta, \quad x(T) = x^\circ(T), \quad I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)), \quad I_2 = \sigma_2(x(\vartheta)), \quad (1.3)$$

причем в этой игре игрок $P1$ распоряжается выбором управления u уже из другого множества $u \in P$, а игрок $P2$ распоряжается выбором управления $v \in Q^0$. При этом множество $P \subset P^0$ выбирается таким, что два множества — вектограмма уравнений динамики дифференциальной игры Γ^{12} (где $u \in P, v \in Q^0$) и вектограмма уравнений динамики задачи оптимального управления Γ^1 (где $u \in P^0$) — совпадают. Полагаем, что игроки выбирают одно из $P(NE)$ -решений [7] игры Γ^{12} (1.3), порождающее траекторию $x^{(1)}(\cdot)$. Обозначим значения выигрышей на выбранном $P(NE)$ -решении через $I_1^{(1)}$ — для игрока $P1$ и через $I_2^{(1)}$ — для игрока $P2$.

Аналогично если игрок $P1$ выбрал вариант 2°), то $P1$ вместе с $P3$ на отрезке $[T, \vartheta]$ разыгрывает неантагонистическую позиционную дифференциальную игру двух лиц Γ^{13} :

$$\dot{x} = f^{[2]}(t, x, u, w), \quad u \in P, \quad w \in S^0, \quad T \leq t \leq \vartheta, \quad x(T) = x^\circ(T), \quad I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)), \quad I_3 = \sigma_3(x(\vartheta)). \quad (1.4)$$

При этом множество $P \subset P^0$ выбирается таким, что два множества — вектограмма уравнений динамики дифференциальной игры Γ^{13} (где $u \in P, w \in S^0$) и вектограмма уравнений динамики задачи оптимального управления Γ^1 (где $u \in P^0$) — совпадают. Значения выигрышей на траектории $x^{(2)}(\cdot)$, порожденной выбранным $P(NE)$ -решением игры Γ^{13} (1.4), обозначим через $I_1^{(2)}$ — для игрока $P1$ и через $I_3^{(2)}$ — для игрока $P3$.

Предположение 1. Игрок $P1$ решает, что игрок $Pi, i \in \{2, 3\}$, участвует в управляемом процессе на промежутке времени $[T, \vartheta]$, если имеют место неравенства

$$I_1^{(i-1)} + L > I_1^{(0)}, \quad (1.5)$$

$$I_i^{(i-1)} - L > I_i^{(0)}, \quad (1.6)$$

где $I_i^{(0)}$ — значение функционала I_i в точке $x^0(\vartheta)$.

Неравенство (1.5) означает, что при участии игрока Pi в управляемом процессе игрок $P1$ получает выигрыш (с учетом полученного платежа в размере L) больший, чем в случае, если это участие не состоится. Неравенство (1.6) означает, что игроку Pi тоже выгодно участвовать в управляемом процессе, даже заплатив за участие игроку $P1$ платеж в размере L .

Итак, определены задачи оптимального управления Γ^1 (1.1), (1.2) и неантагонистические позиционные дифференциальные игры двух лиц Γ^{12} (1.3) и Γ^{13} (1.4). Предполагаем, что функции $f^{[0]}(\cdot, \cdot, \cdot)$ (1.1), (1.2), $f^{[1]}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ (1.3), $f^{[2]}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ (1.4) непрерывны по совокупности переменных, липшицевы по x , удовлетворяют условию подлинейного роста по x , а также условию седловой точки в маленькой игре [1], а функции $\sigma_i(\cdot)$, задающие терминальные выигрыши игроков, непрерывны.

З а д а ч а 1.и, $i \in \{2, 3\}$. Найти $P(NE)$ -решение игры Γ^{1i} (1.3),(1.4) и число $L > 0$ такие, что для порожденной этим решением траектории выполняются неравенства (1.5) и (1.6).

В общем случае задачи 1.и решений не имеют.

Наконец, если игрок $P1$ выбрал вариант 3°), то игроки $P1, P2$ и $P3$ на отрезке $[T, \vartheta]$ разыгрывают следующую неантагонистическую позиционную дифференциальную игру трех лиц Γ^{123} :

$$\dot{x} = f^{[3]}(t, x, u, v, w), \quad u \in P, \quad v \in Q \subset Q^0, \quad w \in S \subset S^0, \quad T \leq t \leq \vartheta, \quad x(T) = x^\circ(T), \\ I_1 = \sigma_1(x(T)), \quad I_2 = \sigma_2(x(T)), \quad I_3 = \sigma_3(x(T)); \quad (1.7)$$

причем в игре Γ^{123} игрок $P1$ распоряжается выбором управления из множества $u \in P$, игрок $P2$ — выбором управления $v \in Q$, а игрок $P3$ — выбором управления $w \in S$. При этом множество $P \subset P^0$ выбирается так, что два множества — вектограмма уравнений динамики дифференциальной игры Γ^{123} (где $u \in P$, $v \in Q$, $w \in S$) и вектограмма уравнений динамики задачи оптимального управления Γ^1 (где $u \in P^0$) — совпадают. В игре Γ^{123} (1.7) игроки выбирают одно из $P(NE)$ -решений игры; выигрыши, получаемые в конечной точке $x^{(3)}(\vartheta)$ траектории $x^{(3)}(\cdot)$, порожденной выбранным $P(NE)$ -решением, обозначим через $I_1^{(3)}$ — для игрока $P1$, через $I_2^{(3)}$ — для игрока $P2$ и через $I_3^{(3)}$ — для игрока $P3$.

Предположение 2. Игрок $P1$ решает, что игроки $P2$ и $P3$ участвуют в управляемом процессе на промежутке времени $[T, \vartheta]$, если имеют место следующие неравенства:

$$I_1^{(3)} + L > I_1^{(0)}, \quad (1.8)$$

$$I_2^{(3)} + I_3^{(3)} - L > I_2^{(0)} + I_3^{(0)}. \quad (1.9)$$

Примем, что функция $f^{[3]}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ (1.7) непрерывна по совокупности переменных, липшицева по x , удовлетворяют условию подлинейного роста по x , а также условию седловой точки в соответствующих маленьких играх [1].

З а д а ч а 2. Найти $P(NE)$ -решение игры трех лиц Γ^{123} (1.7) и число $L > 0$ такие, что для порожденной этим решением траектории выполняются неравенства (1.8) и (1.9).

В общем случае задача 2 также решений не имеет.

З а м е ч а н и е. Можно дать следующую интерпретацию действий игроков на втором шаге (см. также работу [4]). Игрок $P1$ продает часть своих активов за цену L либо игроку $P2$ (вариант 1°), либо игроку $P3$ (вариант 2°), либо игрокам $P2$ и $P3$ (вариант 3°), если такая продажа является взаимовыгодной (оба неравенства хотя бы в одной из систем — в системе (1.5), (1.6) или в системе (1.8), (1.9) — выполнены). Если продажа невыгодна (по крайней мере, одно из неравенств как в системе (1.5), (1.6), так и в системе (1.8), (1.9) не выполнено), то она не состоится (вариант 4°).

2. Вспомогательные антагонистические позиционные дифференциальные игры

Выше было отмечено, что в возникающих в вариантах 1°)–3°) неантагонистических дифференциальных играх двух или трех лиц используются $P(NE)$ -решения этих игр. $P(NE)$ -решения в играх двух лиц введены в [7, с. 28–29], где они были обозначены как P^* -решения. Там же выявлена структура NE -решений и $P(NE)$ -решений в играх двух лиц. Обобщение понятия $P(NE)$ -решения на игру трех лиц можно найти в недавней работе автора (Альтруистический и агрессивный типы поведения в неантагонистической позиционной дифференциальной игре трех лиц // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 108–117.)

Введем вспомогательные антагонистические позиционные дифференциальные игры Γ_1^{12} , Γ_2^{12} , Γ_1^{13} , Γ_3^{13} , Γ_1^{123} , Γ_2^{123} , Γ_3^{123} . Динамика игр Γ_1^{12} и Γ_2^{12} описывается уравнением (1.3). В игре Γ_i^{12} , $i = 1, 2$, игрок i максимизирует свой функционал I_i , а игрок $(3 - i)$ противодействует ему.

Аналогично динамика игр Γ_1^{13} и Γ_3^{13} описывается уравнением (1.4). В игре Γ_i^{13} , $i = 1, 3$, игрок i максимизирует свой функционал I_i , а игрок $(4 - i)$ противодействует ему.

Наконец, динамика игр Γ_1^{123} , Γ_2^{123} и Γ_3^{123} описывается уравнением (1.7). В игре Γ_i^{123} , $i = 1, 2, 3$, игрок i максимизирует свой функционал I_i , а два других игрока совместно противодействуют ему. Из [1; 2] следует, что при сделанных предположениях относительно правых частей уравнений движений и функционалов выигрыша игроков каждая из упомянутых семи антагонистических игр имеет универсальную седловую точку и непрерывную функцию

цены $\gamma_i^{12}(t, x)$, $\gamma_j^{13}(t, x)$, $\gamma_k^{123}(t, x)$, $i = 1, 2, j = 1, 3, k = 1, 2, 3$. Свойство универсальности стратегий означает, что они являются оптимальными не только для фиксированной начальной позиции (t_0, x_0) , но и для любой позиции (t_*, x_*) , рассматриваемой в качестве начальной.

Заметим, что величина $\gamma_i(t, x)$ представляет собою гарантированный выигрыш игрока i в позиции (t, x) игры. Для каждой NE - и $P(NE)$ -траектории $x^*(t)$ имеет место следующее свойство [7, с. 26]:

С в о й с т в о А. Точка $t = \vartheta$ является точкой максимума функции гарантированного выигрыша игрока i , вычисленной вдоль этой траектории, т. е.

$$\max_{t \in [t_0, \vartheta]} \gamma_i(t, x^*(t)) = \gamma_i(\vartheta, x^*(\vartheta)), \quad i = 1, 2, 3.$$

В следующем разделе рассмотрим один класс задач, в котором задачи 1 и 2 имеют решения.

3. Задача управления на плоскости с динамикой простых движений

Рассмотрим следующую двухшаговую задачу управления на плоскости с динамикой простых движений и с тремя участниками.

На первом шаге решается задача оптимального управления Γ^1 для игрока $P1$:

$$\dot{x} = u, \quad x, u \in \mathbb{R}^2, \quad \|u\| \leq 2\mu, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad I_1 = \sigma_1(x(T)). \quad (3.1)$$

На втором шаге, т. е. на отрезке $[T, \vartheta]$, в зависимости от варианта выбора игроком решается одна из следующих четырех задач:

4°) задача оптимального управления Γ^1 для игрока $P1$:

$$\dot{x} = u, \quad \|u\| \leq 2\mu, \quad T \leq t \leq \vartheta, \quad x(T) = x^\circ(T), \quad I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)); \quad (3.2)$$

1°) неантагонистическая дифференциальная игра двух лиц Γ^{12} :

$$\dot{x} = u + v, \quad \|u\| \leq \mu, \quad \|v\| \leq \mu, \quad T \leq t \leq \vartheta, \quad x(T) = x^\circ(T), \quad I_1 = \sigma_1(x(T)), \quad I_2 = \sigma_2(x(T)); \quad (3.3)$$

2°) неантагонистическая дифференциальная игра двух лиц Γ^{13} :

$$\dot{x} = u + w, \quad \|u\| \leq \mu, \quad \|w\| \leq \mu, \quad T \leq t \leq \vartheta, \quad x(T) = x^\circ(T), \quad I_1 = \sigma_1(x(T)), \quad I_3 = \sigma_3(x(T)); \quad (3.4)$$

3°) неантагонистическая дифференциальная игра трех лиц Γ^{123} :

$$\dot{x} = u + v + w, \quad \|u\| \leq \mu, \quad \|v\| \leq 0.5\mu, \quad \|w\| \leq 0.5\mu, \quad T \leq t \leq \vartheta, \quad x(T) = x^\circ(T), \quad (3.5)$$

$$I_1 = \sigma_1(x(T)), \quad I_2 = \sigma_2(x(T)), \quad I_3 = \sigma_3(x(T)).$$

Зададим следующие функционалы выигрыша игроков $P1$, $P2$ и $P3$:

$$I_i = \sigma_i(x(\vartheta)) = M - \|x(\vartheta) - a^{(i)}\|, \quad i = 1, 2, 3,$$

т. е. игрок Pi стремится привести точку $x(\vartheta)$ как можно ближе к целевой точке $a^{(i)}$.

Очевидно, что вектограммы уравнений динамики дифференциальных игр Γ^{12} (3.3), Γ^{13} (3.4) и Γ^{123} (3.5) совпадают друг с другом, а также с вектограммой уравнений динамики задачи оптимального управления Γ^1 (3.2).

Зададим следующие начальные условия и значения параметров:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = (-2, 0), \quad \vartheta = 5.0, \quad T = 1.0, \quad \mu = 0.5, \quad a^{(1)} = (12, 0),$$

$$a^{(2)} = (-8.5, 8.5), \quad a^{(3)} = (8.5, 8.5), \quad M = 20.$$

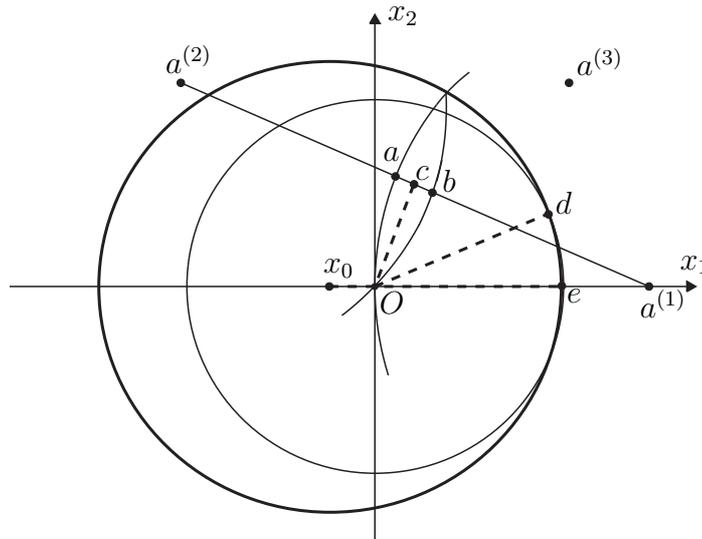


Рис. 1. Опции 4°, 1°, 2°).

На рис. 1 и рис. 2 большой круг с центром в точке x_0 есть множество достижимости $G(\vartheta, t_0, x_0)$, построенное для момента ϑ . Очевидно, что рассматриваемое на первом шаге решение задачи оптимального управления Γ^1 (3.1) может быть представлено как $u = u^\circ(t) = (2, 0)$, $0 \leq t \leq 1$. Оптимальной траекторией будет $x = x^\circ(t) = (-2 + 2t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$; на рис. 1 и рис. 2 она изображена отрезком x_0O .

Переходим ко второму шагу. Прежде всего отметим, что на рис. 1 и рис. 2 малый круг с центром в точке O изображает множество достижимости $G(\vartheta, T, x^\circ(T))$ из состояния O в момент $T = 1$, построенное для момента $\vartheta = 5$. На этом шаге решение задачи оптимального управления Γ^1 (3.2) (опция 4°) следующее: $u = u^0(t) = (2, 0)$, $1 \leq t \leq 5$. Оптимальной траекторией будет $x = x^0(t) = (2t, 0)$, $1 \leq t \leq 5$; на рис. 1 она изображена пунктирной линией Oe . В точке e выигрыши игроков составят величины $I_1^{(0)} = 16.0$, $I_2^{(0)} = 1.4$, $I_3^{(0)} = 11.6$.

Переходим к нахождению $P(NE)$ -решений игр (3.3)–(3.5); сначала выпишем формулы для функций цены $\gamma_i^{12}(t, x)$, $\gamma_j^{13}(t, x)$, $\gamma_k^{123}(t, x)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 3$, $k = 1, 2, 3$:

$$\gamma_i^{12}(t, x) = 20 - \|x - a^{(i)}\|, \quad i = 1, 2, \quad (3.6)$$

$$\gamma_j^{13}(t, x) = 20 - \|x - a^{(j)}\|, \quad j = 1, 3,$$

$$\gamma_1^{123}(t, x) = 20 - \|x - a^{(1)}\|,$$

$$\gamma_k^{123}(t, x) = 20 - \|x - a^{(k)}\| - (\vartheta - t), \quad k = 2, 3.$$

Нетрудно проверить, что в игре двух лиц Γ^{12} (3.3) (опция 1°) множество концов траекторий, порожденных $P(NE)$ -решений игры, составляет отрезок ab , где a и b – точки пересечения отрезка $a^{(1)}a^{(2)}$ с дугами окружностей $\|x - a^{(1)}\| = \|Oa^{(1)}\|$ и $\|x - a^{(2)}\| = \|Oa^{(2)}\|$ соответственно. Эти окружности являются сечениями поверхностей уровня функций $\gamma_1^{12}(t, x)$ и $\gamma_2^{12}(t, x)$ (3.6) плоскостями $t = \text{const}$.

Выбираем $P(NE)$ -решение, приводящее в точку $c = (1.7, 4.25)$ – середину отрезка ab . Убеждаемся, что это решение порождено следующими стратегиями игроков $P1$ и $P2$:

$$U^{*1} = \{u^{*1}(t, x, \varepsilon), \beta_1^{*1}(\varepsilon)\}, \quad V^{*1} = \{v^{*1}(t, x, \varepsilon), \beta_2^{*1}(\varepsilon)\}, \quad (3.7)$$

$$u^{*1}(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} (0.372, 0.929), & \|x - x^{*1}(t)\| < \varepsilon, \\ (0, -1), & \|x - x^{*1}(t)\| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

$$v^{*1}(t, x, \varepsilon) = (0.372, 0.929),$$

где

$$x^{*1}(t) = ((0.744(t - 1), 1.858(t - 1)), 1 \leq t \leq 3.288; (1.7, 4.25), 3.288 < t \leq 5),$$

$$\beta_i^{*1}(\varepsilon) = 0.1\varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Порожденная выбранным $P(NE)$ -решением траектория представляет собой отрезок Oc (на рис. 1 выделен пунктирной линией). Выигрыши игроков $P1$ и $P2$ в точке c составляют величины $I_1^{(1)} = 8.9$, $I_2^{(1)} = 8.9$. Подставляя эти значения в неравенства (1.5),(1.6), имеем $8.9 + L > 16$, $8.9 - L > 1.4$ или

$$7.1 < L < 7.5. \tag{3.8}$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. Пара стратегий игроков $P1$ и $P2$ (U^{*1}, V^{*1}) (3.7) и число L (3.8) составляют решение задачи 1.2.

Далее, в игре двух лиц Γ^{13} (3.4) (опция 2°) можно проверить, что точка $d = (7.4, 3.04)$, являющаяся граничной точкой множества достижимости $G(\vartheta, T, x^\circ(T))$, будет концом траектории, порожденной $P(NE)$ -решением игры. Убеждаемся, что это решение порождено следующими стратегиями игроков $P1$ и $P3$:

$$U^{*2} = \{u^{*2}(t, x, \varepsilon), \beta_1^{*2}(\varepsilon)\}, \quad W^{*2} = \{w^{*2}(t, x, \varepsilon), \beta_3^{*2}(\varepsilon)\}, \tag{3.9}$$

$$u^{*2}(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} (0.925, 0.380), & \|x - x^{*2}(t)\| < \varepsilon, \\ (0, -1), & \|x - x^{*2}(t)\| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

$$w^{*1}(t, x, \varepsilon) = (0.372, 0.929),$$

где $x^{*2}(t) = ((1.850(t - 1), 0.760(t - 1)), 1 \leq t \leq 5)$, $\beta_i^{*2}(\varepsilon) = 0.1\varepsilon$, $i = 1, 2$.

Эта траектория представляет собой отрезок Od (на рис. 1 выделен пунктирной линией). Выигрыши игроков $P1$ и $P3$ в точке d составляют величины $I_1^{(2)} = 14.5$, $I_3^{(2)} = 14.5$. Подставляя эти значения в неравенства (1.5),(1.6), получаем $14.5 + L > 16$, $14.5 - L > 11.6$ или

$$1.5 < L < 2.9. \tag{3.10}$$

Утверждение 2. Пара стратегий игроков $P1$ и $P3$ (U^{*2}, W^{*2}) (3.9) и число L (3.10) составляют решение задачи 1.3.

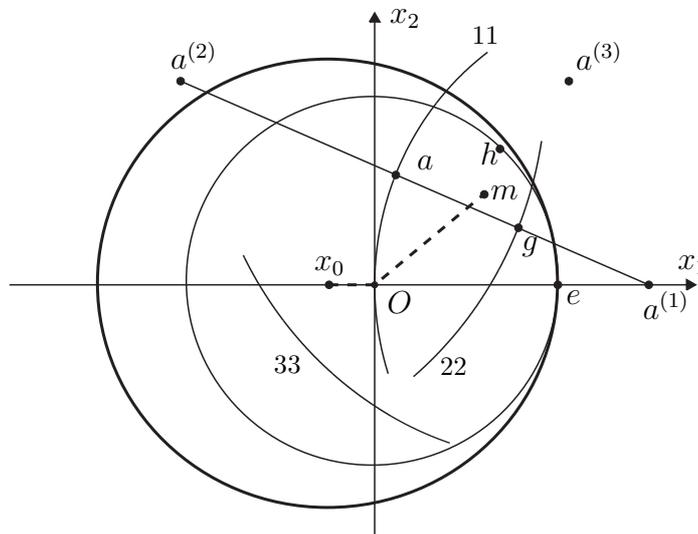


Рис. 2. Опция 3°).

Переходим к игре трех лиц Γ^{123} (3.5) (опция 3°).

На рис. 2 линии 11, 22 и 33 суть дуги окружностей $\|x - a^{(1)}\| = \|Oa^{(1)}\|$, $\|x - a^{(2)}\| = \|Oa^{(2)}\| + (\vartheta - T)$, $\|x - a^{(3)}\| = \|Oa^{(3)}\| + (\vartheta - T)$ соответственно. Эти окружности являются сечениями поверхностей уровня функций $\gamma_1^{123}(t, x)$ (3.19), $\gamma_2^{123}(t, x)$ и $\gamma_3^{123}(t, x)$ (3.20) плоскостью $t = T$. Согласно свойству A из разд. 2 множество, являющееся пересечением соответствующих кругов, содержит концы траекторий, порожденных $P(NE)$ -решениями игры. При этом траектории, заканчивающиеся в точках $g = (6.3, 2.4)$, $a = (0.9, 6.5)$ и $h = (5.7, 5.7)$, порождены $P(NE)$ -решениями, наилучшими для игроков $P1$, $P2$ и $P3$ соответственно. Построим точку $m = (4.8, 3.8)$, являющуюся взвешенным средним точек g , a и h (с весами 0.5, 0.25 и 0.25, соответственно). На рис. 2 $P(NE)$ -траектория, приводящая в точку m , выделена пунктирной линией Om . Убеждаемся, что эта траектория порождена следующими стратегиями игроков $P1$, $P2$ и $P3$:

$$U^{*3} = \{u^{*3}(t, x, \varepsilon), \beta_1^{*3}(\varepsilon)\}, \quad V^{*3} = \{v^{*3}(t, x, \varepsilon), \beta_2^{*3}(\varepsilon)\}, \quad W^{*3} = \{w^{*3}(t, x, \varepsilon), \beta_3^{*3}(\varepsilon)\}, \quad (3.11)$$

$$u^{*3}(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} (0.621, 0.784), & \|x - x^{*3}(t)\| < \varepsilon, \\ (0, -1), & \|x - x^{*3}(t)\| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

$$v^{*3}(t, x, \varepsilon) = (0.311, 0.392),$$

$$w^*(t, x, \varepsilon) = (0.311, 0.392),$$

где

$$x^{*3}(t) = ((1.241(t - 1), 1.568(t - 1)), \quad 1 \leq t \leq 4.061; \quad (4.8, 3.8), \quad 4.061 < t \leq 5),$$

$$\beta_i^{*3}(\varepsilon) = 0.1\varepsilon, \quad i = 1, 2, 3.$$

Выигрыши игроков $P1$, $P2$ и $P3$ в точке m составляют величины $I_1^{(3)} = 11.9$, $I_2^{(3)} = 5.9$, $I_3^{(3)} = 14.1$. Подставляя эти значения в неравенства (1.8), (1.9), получим $11.9 + L > 16$, $5.9 + 14.1 - L > 1.4 + 11.6$ или

$$4.1 < L < 7 \quad (3.12)$$

Утверждение 3. *Тройка стратегий игроков $P1$, $P2$ и $P3$ (U^{*3}, V^{*3}, W^{*3}) (3.11) и число L (3.12) доставляют решение задачи 2.*

Заключение

В работе рассматривается двухшаговая задача динамического управления на фиксированном отрезке времени $[t_0, \vartheta]$, динамика которой описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями и формируется под воздействием управлений трех участников (игроков). У каждого игрока имеется свой терминальный функционал выигрыша.

На первом шаге $[t_0, T]$ в формировании управляющего воздействия участвует только первый игрок, который решает задачу оптимального управления с терминальным функционалом выигрыша I_1 .

На оставшемся промежутке времени $[T, \vartheta]$ в соответствии с выбором первого игрока может реализоваться один из следующих четырех вариантов: 1) разыгрывается неантагонистическая дифференциальная игра первого и второго игроков с терминальными функционалами I_1 и I_2 ; 2) разыгрывается неантагонистическая дифференциальная игра первого и третьего игроков с терминальными функционалами I_1 и I_3 ; 3) разыгрывается неантагонистическая дифференциальная игра первого, второго и третьего игроков с терминальными функционалами I_1 , I_2 и I_3 ; 4) продолжается решение задачи оптимального управления с терминальным функционалом выигрыша I_1 . Предполагается, что в каждом из четырех вариантов вектограмма правой части уравнений движения одна и та же. В вариантах 1)–3) игроки действуют в классе позиционных стратегий. В качестве решений здесь принимаются $P(NE)$ -решения игры двух или трех лиц.

Выигрыши игроков считаются трансферабельными. За участие в управляемом процессе на отрезке $[T, \vartheta]$ вновь вошедшие игроки выплачивают первому игроку платеж в размере $L > 0$ единиц. Ставятся задачи 1.1 и 2.

Получено решение задач 1.1 и 2 в примере с уравнениями простой динамики на плоскости и функционалами игроков, имеющих смысл минимума расстояния от целевой точки до конечной точки на траектории (утверждения 1–3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. Москва: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой*. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр*. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
4. Peter M. Kort, Stefan Wrzaczek. Optimal firm growth under the threat of entry // *Eur. J. Oper. Res.* 2015. Vol. 246, no. 1. P. 281–292. doi: 10.1016/j.ejor.2015.04.030.
5. Gromov D., Gromova E. On a class of hybrid differential games // *Dyn. Games Appl.* 2017. Vol. 7, no. 2. P. 266–288. doi: 10.1007/s13235-016-0185-3.
6. Клейменов А.Ф. Принятие решений в одной гибридной двухшаговой задаче динамического управления // *Вестн. Тамбов. ун-та. Сер.: Естественные и технические науки*. 2018. Т. 23, №. 123. С. 415–423.
7. Клейменов А.Ф. *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры*. Екатеринбург: Наука, 1993. 185 с.
8. Клейменов А.Ф. О решениях в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // *Прикл. математика и механика*. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 739–746.

Поступила 25.12.2019

После доработки 30.01.2020

Принята к публикации 3.02.2020

Клейменов Анатолий Федорович

д-р физ.-мат. наук, профессор,

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igrы*. Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
3. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Shevkoplyas E.V. *Teoriya igr* [Game theory]. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg Publ., 2012, 432 p. ISBN: 978-5-9775-0484-3.
4. Kort P.M., Wrzaczek S. Optimal firm growth under the threat of entry. *Eur. J. Oper. Res.*, 2015, vol. 246, no. 1, pp. 281–292. doi: 10.1016/j.ejor.2015.04.030.
5. Gromov D., Gromova E. On a class of hybrid differential games. *Dyn. Games Appl.*, 2017, vol. 7, no. 2, pp. 266–288. doi: 10.1007/s13235-016-0185-3.
6. Kleimenov A.F. Decision-making in a hybrid two-step problem of dynamic control. *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 415–423. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-415-423.
7. Kleimenov A.F. *Neantagonisticheskie pozitsionnye differentsial'nye igrы* [Nonantagonistic positional differential games]. Ekaterinburg: Nauka Publ., 1993, 185 p. ISBN: 5-7691-0353-1.

8. Kleimenov A.F. On solutions in a nonantagonistic positional differential game. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 717–723. doi: 10.1016/S0021-8928(97)00094-4.

Received December 25, 2019

Revised January 30, 2020

Accepted February 3, 2020

Anatolii Fedorovich Kleimenov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: kleimenov@imm.uran.ru.

Cite this article as: A.F. Kleimenov. Decision making in a hybrid two-step problem of dynamic control with three participants, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 131–140.

УДК 517.977

О ПОЛИЭДРАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ В “РАСШИРЕННОМ” ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ МАТРИЦАМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Е. К. Костюсова

Рассматриваются задачи достижимости и построения оценок множеств достижимости (МД) многошаговых систем с исходно линейной структурой и неопределенностями в начальных условиях, матрицах и аддитивных воздействиях. Неопределенности стеснены заданными параллелепипедозначными, интервальными и интегральными неквадратичными ограничениями соответственно. Ввиду неопределенности в матрицах системы оказываются билинейного типа. МД рассматриваются не только в исходном пространстве \mathbb{R}^n , но и в “расширенном” пространстве \mathbb{R}^{n+1} , где последняя координата μ соответствует текущему резерву аддитивного входного воздействия. Дано точное описание МД $\mathcal{Z}[k]$ в “расширенном” пространстве с помощью многозначных рекуррентных соотношений. При этом используется представление множеств в виде объединения их μ -сечений, а рекуррентные соотношения включают операции с множествами, одна из которых (умножение на интервальную матрицу) действует на каждое сечение независимо, а еще одна комбинирует операции суммы Минковского и объединения по сечениям. МД $\mathcal{X}[k]$ в \mathbb{R}^n определяются сечениями $\mathcal{Z}[k]$, соответствующими $\mu = 0$. Однако вычислить точно $\mathcal{Z}[k]$ из вышеупомянутых соотношений обычно трудно. Предлагаются способы построения параметризованных семейств внешних и внутренних полиэдральных оценок множеств $\mathcal{Z}[k]$ в виде политопов специального типа. На их основе строятся внешние параллелепипедозначные и внутренние параллелотопозначные оценки для $\mathcal{X}[k]$. Все оценки находятся по явным формулам из систем рекуррентных соотношений.

Ключевые слова: множество достижимости, интегральные ограничения, неопределенность в матрице, полиэдральные оценки, параллелепипеды, параллелотопы.

E. K. Kostousova. On polyhedral estimation of reachable sets in the “extended” space for discrete-time systems with uncertain matrices and integral constraints.

The problems of reachability and construction of estimates of reachable sets are considered for discrete-time systems with initially linear structure and uncertainties in the initial conditions, matrices, and additive input actions. The uncertainties are restricted by given parallelepiped-valued, interval, and integral nonquadratic constraints, respectively. The systems under consideration turn out to be of bilinear type due to the uncertainty in the matrices. The reachable sets are considered not only in the original space \mathbb{R}^n but also in the “extended” space \mathbb{R}^{n+1} , where the last coordinate μ corresponds to the current reserve of the additive input action. An exact description is given for the reachable sets $\mathcal{Z}[k]$ in the “extended” space using multivalued recurrence relations. Here, the representation of sets in the form of the union of their μ -sections is used, and the recurrence relations include operations with sets; one of the operations (multiplication by an interval matrix) acts on each cross-section independently, and another combines the Minkowski sum and the union over cross-sections. The reachable sets $\mathcal{X}[k]$ in \mathbb{R}^n are determined by the cross-sections of $\mathcal{Z}[k]$ corresponding to $\mu = 0$. However, it is usually difficult to calculate $\mathcal{Z}[k]$ exactly from the above relations. Methods are proposed for the construction of parametrized families of external and internal polyhedral estimates of the sets $\mathcal{Z}[k]$ in the form of polytopes of a special type. On this basis, external parallelepiped-valued and internal parallelotope-valued estimates of $\mathcal{X}[k]$ are constructed. All estimates are found by explicit formulas from systems of recurrence relations.

Keywords: reachable set, integral constraints, uncertain matrix, polyhedral estimates, parallelepipeds, parallelotopes.

MSC: 93B03, 93C10, 93C55, 93C41, 93B40

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-141-155

Введение

Решение многих задач управления и оценивания в условиях неопределенности основывается на построении множеств достижимости (МД), их аналогов и трубок траекторий, описывающих динамику этих множеств [1–4]. Поскольку их точное построение является, как правило,

непростой задачей, активно развиваются численные методы, в том числе полиэдральные [5] и пиксельные [6], а также значительно менее трудоемкие методы, основанные на аппроксимации множеств простыми областями, в частности, эллипсоидами [3; 7–9], зонотопами [10], параллелотопами (параллелепипедами) [11–13] и боксами (интервальными векторами) [14] (здесь для примера были упомянуты лишь некоторые из многочисленных публикаций; см. также ссылки в них).

Работа посвящена построению и оцениванию МД многошаговых систем с исходно линейной структурой и неопределенностями в начальных условиях, матрицах и аддитивных воздействиях, причем последние стеснены интегральными ограничениями. Подход, предложенный в [13] для линейных систем, развивается здесь на более сложный случай систем с билинейностью, вызванной неопределенностью в матрицах, которая может приводить к возможной невыпуклости МД (см., например, [15–17]) и тем самым привносит в исследование дополнительные трудности. При этом для построения оценок привлекаются также конструкции из [18]. Дано подробное описание и обоснование соотношений, доставляющих точные представления МД, и способов построения параметризованных семейств внешних и внутренних полиэдральных оценок для них. При этом рассматриваются МД $\mathcal{X}[k]$ в исходном пространстве \mathbb{R}^n и МД $\mathcal{Z}[k]$ в “расширенном” пространстве \mathbb{R}^{n+1} , где последняя координата μ соответствует текущему резерву аддитивного входного воздействия; указывается явная связь между этими множествами. Для множеств $\mathcal{Z}[k]$ строятся оценки в виде политопов специального типа. Определенные сечения таких оценок дают внешние параллелепипедозначные и внутренние параллелотопозначные оценки для $\mathcal{X}[k]$. Упомянем, что ранее в [19] были анонсированы алгоритмы построения внешних оценок и приведен пример их нахождения.

Исследуемые системы можно рассматривать как дискретные аналоги импульсных систем. В этом плане полезно отметить публикации, в которых исследованы свойства и аппроксимации МД дифференциальных систем с интегральными ограничениями на управления из L_p с $p > 1$ [6; 9] и для импульсных систем [4], для систем с геометрическими ограничениями и билинейностью [16; 17; 20] и для комбинации импульсных систем с билинейностью [15].

В работе используются следующие обозначения: \mathbb{R}^n и $\mathbb{R}^{n \times m}$ — линейные пространства вещественных n -векторов и $n \times m$ -матриц соответственно; \top — знак транспонирования; $(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение для $x, y \in \mathbb{R}^n$; $\|x\|_2 = (x^\top x)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ — разные нормы вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$; $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ — единичный орт вдоль оси $0x_i$ (единица стоит на i -м месте); $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$; $A = \{a_i^j\} = \{a^j\}$ — матрица с элементами a_i^j и со столбцами a^j (верхним индексом нумеруются столбцы, нижним — компоненты векторов); 0 — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности; I — единичная матрица; $\text{Abs } A$ — матрица абсолютных величин элементов матрицы $A = \{a_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $\text{Abs } A = \{|a_i^j|\}$; $\text{diag } \pi$, $\text{diag } \{\pi_i\}$ — диагональная матрица с компонентами π_i вектора π на диагонали; $\det A$ — определитель матрицы A ; $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_i^j|$ — норма матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, индуцированная нормой $\|x\|_\infty$; $\text{co } \mathcal{Q}$ — выпуклая оболочка множества $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$; $\partial \mathcal{Q}$ — граница множества \mathcal{Q} ; $\rho(l|\mathcal{Q}) = \sup\{l^\top x | x \in \mathcal{Q}\}$ — опорная функция множества \mathcal{Q} . Кроме того, используем для краткости обозначения типа $k = 1, \dots, n$ вместо $k = 1, 2, \dots, n$.

1. Постановка задачи

Рассматривается многошаговая система

$$x[j] = A[j]x[j-1] + B[j]u[j] + v[j], \quad j = 1, \dots, N; \quad (1.1)$$

$$x[0] \in \mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^n; \quad \sum_{j=1}^N \|u[j]\|_\infty \leq \mu_0; \quad (1.2)$$

$$u[j] \in \mathcal{K}[j] \subseteq \mathbb{R}^{n_u}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.3)$$

Здесь $x[j] \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $v[j] \in \mathbb{R}^n$ — известные воздействия, $B[j] \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ ($n_u \leq n$). Начальное состояние $x[0]$ и входные воздействия $u[j] \in \mathbb{R}^{n_u}$ неизвестны, но стеснены ограничениями (1.2), (1.3), где \mathcal{X}_0 — заданное выпуклое компактное множество, $\mu_0 > 0$, $\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n_u} |u_i|$, $\mathcal{K}[j] \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$ — заданные выпуклые замкнутые конусы. Матрицы $A[j] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ точно не заданы, но удовлетворяют ограничениям интервального типа

$$A[j] \in \mathcal{A}[j] = \{A \mid \text{Abs}(A - \tilde{A}[j]) \leq \hat{A}[j]\}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.4)$$

Матричные и векторные неравенства, а также операция \max ниже понимаются покомпонентно.

Множеством достижимости (МД) $\mathcal{X}[k]$ системы (1.1)–(1.4) в момент $k \in \{1, \dots, N\}$ называем множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существуют $x[0]$, $u[\cdot]$ и $A[\cdot]$, удовлетворяющие (1.2)–(1.4) и порождающие решение $x[\cdot]$ системы (1.1) такое, что $x[k] = x$.

Полезно рассматривать также множества достижимости $\mathcal{Z}[k]$ системы (1.1), (1.3)–(1.7):

$$\mu[j] = \mu[j-1] - \|u[j]\|_\infty, \quad j = 1, \dots, N; \quad (1.5)$$

$$\mu[j] \geq 0, \quad j = 1, \dots, N; \quad (1.6)$$

$$z[0] = \{x[0], \mu[0]\} \in \mathcal{Z}_0 \quad (\mathcal{Z}_0 \subset \mathbb{R}^n \times [0, \mu_0]) \quad (1.7)$$

в “расширенном” пространстве точек $z = \{x, \mu\} = (x^\top, \mu)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$, где μ соответствует текущему резерву u и удовлетворяет фазовым ограничениям (1.6), которые накладываются вместо интегральных ограничений на u из (1.2).

Множеством достижимости $\mathcal{Z}[k] = \mathcal{Z}(k, 0, \mathcal{Z}_0)$ системы (1.1), (1.3)–(1.7) в момент $k \in \{1, \dots, N\}$ называем множество точек $z = \{x, \mu\} \in \mathbb{R}^{n+1}$, для каждой из которых существуют такие $z[0] = \{x[0], \mu[0]\}$, $u[\cdot]$ и $A[\cdot]$, удовлетворяющие (1.3), (1.4), (1.7), что порождаемое ими в силу (1.1), (1.5) решение $z[\cdot] = \{x[\cdot], \mu[\cdot]\}$ будет удовлетворять условиям $z[k] = z$ и (1.6).

Для выявления связи между МД $\mathcal{Z}[k]$ и МД $\mathcal{X}[k]$ далее обычно будем полагать, что

$$\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0] = \{z = \{x, \mu\} \mid x \in \mathcal{X}_0, \mu \in [0, \mu_0]\}. \quad (1.8)$$

Многочисленные функции $\mathcal{X}[k]$, $k = 1, \dots, N$, и $\mathcal{Z}[k]$, $k = 1, \dots, N$, известны как *трубки достижимости* $\mathcal{X}[\cdot]$ и $\mathcal{Z}[\cdot]$.

Напомним определения объектов, которые будем использовать ниже.

Параллелепипедом $\mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, \|\xi\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$; $P = \{p_j^i\} = \{p^i\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — неособая матрица ($\det P \neq 0$) со столбцами p^i единичной длины (условие нормировки $\|p^i\|_2 = 1$ может быть опущено с целью упрощения формул); $\pi \in \mathbb{R}^n$, $\pi \geq 0$. Можно сказать, что p — центр параллелепипеда, P — матрица ориентации, p^i — направления, π_i — величины его “полуосей”.

Параллелотопом $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$, а матрица $\bar{P} = \{\bar{p}^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $m \leq n$. Называем параллелотоп \mathcal{P} невырожденным, если $m = n$ и $\det \bar{P} \neq 0$.

Каждый параллелепипед $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ — это параллелотоп $\mathcal{P}[p, \bar{P}]$ с $\bar{P} = P \text{diag } \pi$; каждый невырожденный параллелотоп — это параллелепипед с $P = \bar{P}$, $\pi = e$.

Далее, как правило, считаем выполненным следующее предположение.

Предположение 1. *Множество \mathcal{X}_0 — это параллелепипед: $\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(p_0, P_0, \pi_0) = \mathcal{P}[p_0, \bar{P}_0] \subset \mathbb{R}^n$, а конусы $\mathcal{K}[j]$ таковы, что параллелепипедами являются множества*

$$\mathcal{R}[j] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C} \cap \mathcal{K}[j], \quad \mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e) \subset \mathbb{R}^{n_u}. \quad (1.9)$$

Здесь \mathcal{C} — единичный куб в \mathbb{R}^{n_u} с центром в нуле. При этом МД $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[k]$, вообще говоря, не являются параллелепипедами, а их точное построение оказывается непростой задачей.

Работа посвящена описанию МД $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[k]$ и нахождению двусторонних *полиэдральных* оценок $\mathcal{P}^\pm[k]$ и $\Pi^\pm[k]$ простой формы для $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[k]$ и, следуя подходу из [3; 7], описанию

целых семейств таких оценок. Введение данных семейств позволяет более точно оценить МД в виде пересечения нескольких внешних оценок и объединения нескольких внутренних.

Для оценивания $\mathcal{Z}[k]$ используем класс политопов $\Pi = \Pi(\{\mathcal{P}^b, 0\}, \{\mathcal{P}^t, \mu^t\}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ специального типа [13], которые называем Π -политопами и которые определяются своими “нижним” и “верхним” μ -сечениями \mathcal{P}^b и \mathcal{P}^t посредством операции выпуклой оболочки, где вышеупомянутые сечения — это либо параллелепипеды с одинаковыми матрицами ориентации, либо одинаковые параллелотопы (в последнем случае назовем такой Π -политоп Π -цилиндром):

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi(\{\mathcal{P}^b, 0\}, \{\mathcal{P}^t, \mu^t\}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{co}(\{\mathcal{P}^b, 0\} \cup \{\mathcal{P}^t, \mu^t\}), \quad \mu^t \geq 0, \\ \mathcal{P}^b &= \mathcal{P}(p^b, P^b, \pi^b), \quad \mathcal{P}^t = \mathcal{P}(p^t, P^t, \pi^t), \quad P^b = P^t = P \\ &\text{или} \quad \mathcal{P}^b = \mathcal{P}^t = \mathcal{P}[p^t, \bar{P}^t]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Оценки $\Pi^\pm[k]$ для $\mathcal{Z}[k]$ позволят найти оценки для $\mathcal{X}[k]$ в форме параллелотопов и параллелепипедов: $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k]$, $\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}[p^-[k], \bar{P}^-[k]]$, $\mathcal{P}^+[k] = \mathcal{P}(p^+[k], P^+[k], \pi^+[k])$.

Иногда будем считать выполненным следующее предположение.

Предположение 2. Все матрицы $\tilde{A}[j]$ из ограничения (1.4) — неособые, т. е. $\det \tilde{A}[j] \neq 0$, $j = 1, \dots, N$.

2. Точное описание множеств достижимости $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[K]$

Рассуждения, аналогичные [8, с.18–19], показывают, что МД $\mathcal{Z}[k]$ обладают *полугрупповым свойством*:

$$\mathcal{Z}(k, 0, \mathcal{Z}_0) = \mathcal{Z}(k, i, \mathcal{Z}(i, 0, \mathcal{Z}_0)), \quad \forall k, i: 0 \leq i \leq k \leq N, \quad (2.1)$$

где через $\mathcal{Z}(k, i, \mathcal{Z}_i)$ обозначено МД в момент $k \in \{i, \dots, N\}$ системы (1.1), (1.3)–(1.7), рассматриваемой при $j = i, \dots, N$ с начальными условиями $z[i] = \{x[i], \mu[i]\} \in \mathcal{Z}_i$.

Удобно искать МД $\mathcal{Z}[k]$ в виде объединения их μ -сечений $\mathcal{X}(\mu, k)$:

$$\mathcal{Z}[k] = \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t[k]} \{\mathcal{X}(\mu, k), \mu\}. \quad (2.2)$$

Свойство (2.1) позволяет получить рекуррентные соотношения для $\mathcal{Z}[k]$, по форме напоминающие соотношения [13, (2.4)] для МД линейных систем, но пригодные для систем с неопределенностями в матрицах (1.4). В этих соотношениях будут фигурировать ограниченные множества типа

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{X}(\mu), \mu\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \quad (2.3)$$

и следующие операции с множествами $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, представленными в виде (2.3):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \oplus v &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{X}(\mu) + v, \mu\}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n; \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{Z} &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{A} \circ \mathcal{X}(\mu), \mu\}; \\ \mathcal{Z} \uplus \mathcal{R} &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathcal{Z}} = \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t} \{\tilde{\mathcal{X}}(\mu), \mu\}, \quad \tilde{\mathcal{X}}(\mu) = \bigcup_{\mu \leq \zeta \leq \mu^t} (\mathcal{X}(\zeta) + (\zeta - \mu)\mathcal{R}), \quad \forall \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Эти операции определяются с помощью операций с множествами в \mathbb{R}^n : суммы Минковского $\mathcal{X}^1 + \mathcal{X}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid y = x^1 + x^2, x^k \in \mathcal{X}^k\}$, объединения множеств $\mathcal{X}^1 \cup \mathcal{X}^2$ и умножения множества \mathcal{X} на интервальную матрицу $\mathcal{A} = \{A \mid \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\} = \{A \mid \text{Abs}(A - \tilde{A}) \leq \hat{A}\}$, где $\tilde{A} = (\underline{A} + \bar{A})/2$, $\hat{A} = (\bar{A} - \underline{A})/2$: $\mathcal{A} \circ \mathcal{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Ax, A \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{X}\}$. Таким образом, первые две операции

в (2.4) действуют на каждое сечение независимо, а последняя комбинирует операции суммы Минковского и объединения по сечениям. Операции \oplus и \uplus были введены ранее в [13].

Будем говорить, что сечения множества $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ вида (2.2) не возрастают, если $\mathcal{X}(\mu^1) \supseteq \mathcal{X}(\mu^2)$ для любых μ^1, μ^2 , таких что $0 \leq \mu^1 \leq \mu^2 \leq \mu^t$.

Все операции из (2.4) обладают тем полезным свойством, что сохраняют невозрастание сечений — см. [13, лемма 2.1] и следующую лемму.

Лемма 1. Пусть множество \mathcal{Z} имеет вид $\mathcal{Z} = \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{X}(\mu), \mu\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ и его сечения не возрастают. Тогда сечения $\mathcal{A} \otimes \mathcal{Z}$ также не возрастают.

Доказательство очевидно: если $0 \leq \mu^1 \leq \mu^2 \leq \mu_0$, то по условию $\mathcal{X}(\mu^1) \supseteq \mathcal{X}(\mu^2)$, откуда $\mathcal{A} \circ \mathcal{X}(\mu^1) = \{Ax \mid A \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{X}(\mu^1)\} \supseteq \{Ax \mid A \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{X}(\mu^2)\} = \mathcal{A} \circ \mathcal{X}(\mu^2)$. \square

Теорема 1. Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (1.1), (1.3)–(1.7) с начальным множеством \mathcal{Z}_0 типа (2.3) с $\mu^t = \mu_0$, причем μ -сечения множества \mathcal{Z}_0 не возрастают. Тогда $\mathcal{Z}[k]$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\mathcal{Z}[k] = (\mathcal{A}[k] \otimes \mathcal{Z}[k-1] \oplus v[k]) \uplus B[k]\mathcal{R}[k], \quad k = 1, \dots, N; \quad \mathcal{Z}[0] = \mathcal{Z}_0, \quad (2.5)$$

и в (2.2) можно положить $\mu^t[k] = \mu_0$, $k = 1, \dots, N$. При выполнении условия (1.8) оказывается, что $\mathcal{X}[k] = \bigcup \{\mathcal{X}(\mu, k) \mid 0 \leq \mu \leq \mu_0\} = \mathcal{X}(0, k)$, $k = 1, \dots, N$, т. е. МД $\mathcal{X}[k]$ системы (1.1)–(1.4) совпадают с “нижними” сечениями множеств $\mathcal{Z}[k]$, соответствующими $\mu = 0$.

Доказательство. Сначала докажем индукцией по k , что МД $\mathcal{Z}[k]$ системы (1.1), (1.3)–(1.7) с начальным множеством \mathcal{Z}_0 типа (2.3) с $\mu^t = \mu_0$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{Z}[k] = (\mathcal{A}[k] \otimes \mathcal{Z}[k-1] \oplus v[k]) \uplus B[k](\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k]), \quad k = 1, \dots, N; \quad \mathcal{Z}[0] = \mathcal{Z}_0. \quad (2.6)$$

Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (1.1), (1.3)–(1.7), представленные в виде (2.2). Обозначим $\mathcal{Z}^*[k] = \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^*[k]} \{\mathcal{X}^*(\mu, k), \mu\} = (\mathcal{A}[k] \otimes \mathcal{Z}[k-1] \oplus v[k]) \uplus B[k](\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k])$, $\mu^*[k] = \mu_0$. Примем $\mathcal{Z}^*[0] = \mathcal{Z}[0] = \mathcal{Z}_0$. Предположим, что доказали $\mu^t[k-1] = \mu_0$ и $\mathcal{Z}^*[k-1] = \mathcal{Z}[k-1]$, и докажем такие же равенства для k , установив два противоположных включения.

Согласно определениям используемых операций и равенству $\mathcal{Z}^*[k-1] = \mathcal{Z}[k-1]$ сечение множества $\mathcal{Z}^*[k]$, соответствующее фиксированному μ , имеет вид

$$\mathcal{X}^*(\mu, k) = \bigcup_{\mu \leq \zeta \leq \mu^t[k-1](=\mu_0)} (\mathcal{A}[k] \circ \mathcal{X}(\zeta, k-1) + v[k] + (\zeta - \mu)B[k](\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k])). \quad (2.7)$$

Пусть $z = \{x, \mu\} \in \mathcal{Z}[k]$. Ввиду полугруппового свойства (2.1) при $i = k-1$ эта точка получена из некоторой точки $z[k-1] = \{x[k-1], \mu[k-1]\} \in \mathcal{Z}[k-1]$ в силу системы (1.1), (1.3)–(1.6), т. е. найдутся такие $A[k] \in \mathcal{A}[k]$ и $u[k] \in \mathcal{K}[k]$, что $x = A[k]x[k-1] + B[k]u[k] + v[k]$, $\mu = \mu[k-1] - \|u[k]\|_\infty$, и, значит, $-\mu + \mu[k-1] = \|u[k]\|_\infty \geq 0$. При этом $u[k]$ удовлетворяет $u[k] \in (\mu[k-1] - \mu)\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k] = (\mu[k-1] - \mu)(\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k])$, поскольку $\mathcal{K}[k]$ — конус. Итак, нашлись $A[k] \in \mathcal{A}[k]$ и $\zeta = \mu[k-1]$, где $\mu \leq \zeta = \mu[k-1] \leq \mu^t[k-1] = \mu_0$, так что, действительно, вышеупомянутую точку x можно представить в виде одной из точек множества $\mathcal{X}^*(\mu, k)$. Получили $\mathcal{Z}[k] \subseteq \mathcal{Z}^*[k]$.

Обратно, пусть $z = \{x, \mu\} \in \mathcal{Z}^*[k]$, т. е. в силу (2.7) найдутся $A[k] \in \mathcal{A}[k]$, $x[k-1] \in \mathcal{X}(\zeta, k-1)$ и $u^*[k]$, удовлетворяющее $u^*[k] \in (\zeta - \mu)\partial\mathcal{C}$ и $u^*[k] \in \mathcal{K}[k]$, такие что $x = A[k]x[k-1] + B[k]u^*[k] + v[k]$, $\mu \leq \zeta \leq \mu^t[k-1] = \mu_0$. Включение $u^*[k] \in (\zeta - \mu)\partial\mathcal{C}$ означает, что $\|u^*[k]\|_\infty = \zeta - \mu$, т. е. $\mu = \zeta - \|u^*[k]\|_\infty$. Таким образом, можем считать, что точку $z = \{x, \mu\} \in \mathcal{Z}^*[k]$ получили из точки $\{x[k-1], \mu[k-1]\} \in \mathcal{Z}[k-1]$ с $\mu[k-1] = \zeta \in [\mu, \mu^t[k-1]]$ с соблюдением всех условий (1.1), (1.3)–(1.6), т. е. $\mathcal{Z}^*[k] \subseteq \mathcal{Z}[k]$. Желаемое равенство $\mathcal{Z}[k] = \mathcal{Z}^*[k]$ доказано.

Из (2.6) и определения операций (2.4) следует, что все $\mu^t[k] = \mu^t[0] = \mu_0$.

Невозрастание сечений $\mathcal{Z}[k]$ выводим из свойств операций, участвующих в (2.6) (см. лемму 1 и [13, лемма 2.1]). Отсюда же, с учетом того что $\mathcal{K}[k]$ — конусы, ввиду [13, лемма 2.2] вытекает эквивалентность соотношений (2.5) и (2.6).

Осталось проверить утверждения про множества $\mathcal{X}[k]$.

Пусть $x \in \mathcal{X}[k]$. Тогда существуют $x[0]$, $A[\cdot]$ и $u[\cdot]$, удовлетворяющие (1.1)–(1.4) и порождающие траекторию $x[\cdot]$ с $x[k] = x$. Введем для нее соответствующую функцию $\mu[\cdot]$ по правилу (1.5) с $\mu[0] = \mu_0$. Тогда $\mu[k] = \mu_0 - \sum_{j=1}^k \|u[j]\|_\infty \geq 0$, где выполнение условий $\mu[j] \geq 0$, $j = 1, \dots, k$ (т.е. фазовых ограничений (1.6)) обеспечивается интегральным ограничением из (1.2). Получаем $\{x[k], \mu[k]\} \in \mathcal{Z}[k]$ и, ввиду представлений (2.2), $x[k] \in \mathcal{X}(\mu[k], k)$. Отсюда $x[k] \in \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu_0} \mathcal{X}(\mu, k) \subseteq \mathcal{X}(0, k)$ (последнее — с учетом невозрастания сечений $Z[k]$).

Пусть, наоборот, $x \in \mathcal{X}(\mu, k)$ при некотором $\mu \in [0, \mu_0]$. Значит, имеется траектория $\{x[\cdot], \mu[\cdot]\}$ системы (1.1), (1.3)–(1.7) такая, что $\mu = \mu[k]$, $x = x[k] \in \mathcal{X}(\mu[k], k)$, причем для соответствующего $u[\cdot]$ получаем в силу (1.5) и (1.6), что $\sum_{j=1}^k \|u[j]\|_\infty = \mu[0] - \mu[k] \leq \mu[0] \leq \mu_0$. Полагая $u[j] = 0$ для $j > k$, условие на $u[\cdot]$ из (1.2) можно считать выполненным. Согласно определению множества $Z[k]$ и начальному условию (1.8) имеем $x[0] \in \mathcal{X}_0$. Поскольку выполнены все условия (1.1)–(1.4), получаем $x = x[k] \in \mathcal{X}[k]$. Следовательно, доказали, что $\mathcal{X}(\mu, k) \subseteq \mathcal{X}[k]$, и, в связи с произвольностью $\mu \in [0, \mu_0]$, что $\mathcal{X}(0, k) \subseteq \mathcal{X}[k]$ и $\bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu_0} \mathcal{X}(\mu, k) \subseteq \mathcal{X}[k]$. \square

Заметим, что множества $\mathcal{Z}[k]$ и $\mathcal{X}[k]$ могут быть невыпуклы ввиду присутствия операций \otimes и \circ преобразования множеств с помощью интервальных матриц (см. [18]).

3. Элементарные оценки

При построении оценок $\Pi^\pm[k]$ для $\mathcal{Z}[k]$ и $\mathcal{P}^\pm[k]$ для $\mathcal{X}[k]$ мы используем свойства операций с множествами, упомянутых в разд. 2, и элементарные полиэдральные оценки для результатов таких операций. В [13; 18] указаны способы построения ряда элементарных оценок. Кратко напомним их.

Опорные функции параллелепипеда и параллелотопа вычисляются по следующим формулам: $\rho(l|\mathcal{P}(p, P, \pi)) = l^\top p + (\text{Abs}(l^\top P))\pi$, $\rho(l|\mathcal{P}[p, \bar{P}]) = l^\top p + (\text{Abs}(l^\top \bar{P}))e$.

В ряде случаев полезно использовать эквивалентное представление параллелепипеда $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$: $\mathcal{P} = \mathcal{P}(P, \gamma^{(-)}, \gamma^{(+)}) = \{x | \gamma^{(-)} \leq P^{-1}x \leq \gamma^{(+)}\}$, где $\gamma_i^{(\pm)} = \pm \rho(\pm(P^{-1})^\top e^i | \mathcal{P})$, $i = 1, \dots, n$, и имеются следующие связи между параметрами, определяющими параллелепипед: $\gamma^{(\pm)} = P^{-1}p \pm \pi$; $p = P(\gamma^{(-)} + \gamma^{(+)})/2$, $\pi = (\gamma^{(+)} - \gamma^{(-)})/2$.

Аффинное преобразование параллелотопа — это параллелотоп: $A\mathcal{P}[p, \bar{P}] + a = \mathcal{P}[Ap + a, A\bar{P}]$ для $A \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $p \in \mathbb{R}^r$, $\bar{P} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $a \in \mathbb{R}^n$; $A\mathcal{P}(p, P, \pi) = \mathcal{P}(Ap, AP, \pi)$, если $\det A \neq 0$.

Рассмотрим способы построения элементарных внешних оценок и начнем с оценок в \mathbb{R}^n .

Определяем \mathcal{P} как *внешнюю (внутреннюю) оценку* множества $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$, если $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ ($\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$). Оценку называют *тугой* (в направлении l) [3, с. 91], если $\rho(\pm l | \mathcal{P}) = \rho(\pm l | \mathcal{Q})$. Называем параллелепипед $\mathcal{P}(p^+, P^+, \pi^+)$ *внешней касающейся оценкой* для \mathcal{Q} и обозначаем ее как $\mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{Q})$, если она является тугой в направлении n следующих векторов (определяющих нормали к граням параллелепипеда): $l^i = (P^+)^{-1} e^i$, $i = 1, \dots, n$.

Касающаяся оценка $\mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{Q})$ для \mathcal{Q} с заданной матрицей ориентации P^+ строится на основе значений опорной функции для \mathcal{Q} : $\mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{+(-)}, \gamma^{+(+)})$, $\gamma_i^{+(\pm)} = \pm \rho(\pm(P^+)^{-1} e^i | \mathcal{Q})$. Матрицы P^+ выступают как параметр, определяющий семейство оценок.

Касающиеся оценки для суммы двух параллелепипедов находятся по явной формуле: $\mathbf{P}_{P^+}^+(\sum_{k=1}^2 \mathcal{P}(p^k, P^k, \pi^k)) = \mathcal{P}(\sum_{k=1}^2 p^k, P^+, \sum_{k=1}^2 (\text{Abs}((P^+)^{-1} P^k)) \pi^k)$, а для параллелотопов $\mathbf{P}_{P^+}^+(\sum_{k=1}^2 \mathcal{P}[p^k, \bar{P}^k]) = \mathcal{P}[\sum_{k=1}^2 p^k, P^+ \text{diag}(\sum_{k=1}^2 (\text{Abs}((P^+)^{-1} \bar{P}^k)) e)]$.

Оценки $\mathbf{P}_{P^+}^+(P^1 \cup P^2)$ для объединения параллелотопов $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}[p^k, \bar{P}^k]$ определяются формулой, вытекающей из соотношения $\rho(l | P^1 \cup P^2) = \max_{1 \leq k \leq 2} \rho(l | \mathcal{P}^k)$:

$$\mathbf{P}_{P^+}^+(P^1 \cup P^2) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{+(-)}, \gamma^{+(+)}) \text{, } \gamma^{+(\pm)} = \pm \max_{1 \leq k \leq 2} \{\pm(P^+)^{-1} p^k + (\text{Abs}((P^+)^{-1} \bar{P}^k)) e\}. \quad (3.1)$$

Для нахождения оценки $\mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{Q})$ для $\mathcal{Q} = \mathcal{A} \circ \mathcal{P}$, где \mathcal{A} — интервальная матрица, \mathcal{P} —

параллелепипед, применимо любое из двух следующих выражений для опорной функции [18]:

$$\rho(l|\mathcal{Q}) = \max_{x \in \mathbb{E}(\mathcal{P})} \{l^\top \tilde{A}x + (\text{Abs } l)^\top \hat{A}(\text{Abs } x)\}, \quad \rho(l|\mathcal{Q}) = \max_{A \in \mathbb{E}(\mathcal{A})} \{l^\top Ap + (\text{Abs } (l^\top AP))\pi\}, \quad (3.2)$$

где $\mathbb{E}(\mathcal{P})$ и $\mathbb{E}(\mathcal{A})$ обозначают множества всех вершин \mathcal{P} и \mathcal{A} , (т.е. множество точек $p + \sum_{i=1}^m p^i \pi_i \xi_i$ с $\xi_i \in \{-1, 1\}$ и множество матриц с элементами $a_i^j \in \{\underline{a}_i^j, \bar{a}_i^j\}$).

Перейдем к построению элементарных внешних оценок в \mathbb{R}^{n+1} в виде Π -политопов.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{Z} = \text{co}(\mathcal{Z}^b \cup \mathcal{Z}^t)$, где $\mathcal{Z}^b = \{\mathcal{X}^b, 0\}$, $\mathcal{Z}^t = \{\mathcal{X}^t, \mu^t\}$, а \mathcal{X}^b и \mathcal{X}^t выпуклы. Тогда $\mathcal{Z} = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha \mathcal{Z}^t + (1-\alpha) \mathcal{Z}^b) = \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{X}(\mu), \mu\}$, где $\mathcal{X}(\mu) = \alpha \mathcal{X}^t + (1-\alpha) \mathcal{X}^b$, $\alpha = \mu/\mu^t$.

Доказательство. Если $z \in \alpha \mathcal{Z}^t + (1-\alpha) \mathcal{Z}^b$ при $\alpha \in [0, 1]$, то, очевидно, $z \in \mathcal{Z}$. Пусть, наоборот, $z \in \mathcal{Z}$, т.е. $z = \sum_{i=1}^m \lambda_i z^i + \sum_{i=m+1}^l \lambda_i z^i$, где все $\lambda_i \geq 0$; $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$; $z^i \in \mathcal{Z}^t$, $i = 1, \dots, m$; $z^i \in \mathcal{Z}^b$, $i = m+1, \dots, l$. Положим $\alpha = \sum_{i=1}^m \lambda_i$. Если $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, то получим $z = \alpha z^t + (1-\alpha) z^b$, где $z^t = \sum_{i=1}^m \lambda_i z^i / (\sum_{i=1}^m \lambda_i) \in \mathcal{Z}^t$, $z^b = \sum_{i=m+1}^l \lambda_i z^i / (\sum_{i=m+1}^l \lambda_i) \in \mathcal{Z}^b$. Если $\alpha = 1$, то $\sum_{i=m+1}^l \lambda_i = 0$ и $z = \sum_{i=1}^m \lambda_i z^i \in \mathcal{Z}^t$, Аналогично $z \in \mathcal{Z}^b$ при $\alpha = 0$. \square

Из [13, следствие 3.1] вытекают следующие, более детальные, представления Π -политопа.

Следствие 1. Для Π -политопа (1.10) с параллелепипедозначными сечениями имеем

$$\begin{aligned} \Pi &= \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{P}(\mu), \mu\}, \quad \mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(p(\mu), P, \pi(\mu)) = \mathcal{P}(P, \gamma^{(-)}(\mu), \gamma^{(+)}(\mu)), \\ p(\mu) &= \alpha p^t + (1-\alpha) p^b, \pi(\mu) = \alpha \pi^t + (1-\alpha) \pi^b, \gamma^{(\pm)}(\mu) = \alpha \gamma^{(\pm)t} + (1-\alpha) \gamma^{(\pm)b}, \alpha = \mu/\mu^t; \\ \rho(l|\mathcal{P}(\mu)) &= \alpha \rho(l|\mathcal{P}^t) + (1-\alpha) \rho(l|\mathcal{P}^b), \alpha = \mu/\mu^t, \quad \forall l \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

где использованы обозначения для представлений $\mathcal{P}^i = \mathcal{P}(P, \gamma^{(-)i}, \gamma^{(+)i})$, $i = b, t$.

Для ограниченного множества $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^n$ вида (2.3) и фиксированной неособой матрицы $P^+ \in \mathbb{R}^{n \times n}$ можно построить Π -политоп Π^+ вида

$$\Pi^+ = \Pi_{P^+}^+(\mathcal{Z}) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi(\{\mathcal{P}^{+b}, 0\}, \{\mathcal{P}^{+t}, \mu^{+t}\}), \quad \mathcal{P}^{+b} = P_{P^+}^+(\mathcal{X}^b), \mathcal{P}^{+t} = P_{P^+}^+(\mathcal{X}^t), \mu^{+t} = \mu^t, \quad (3.3)$$

где $\mathcal{X}^i = \mathcal{X}(\mu^i)$, $i = b, t$, — соответствующие μ -сечения \mathcal{Z} , а $P_{P^+}^+(\mathcal{X}^i)$ — внешние касающиеся оценки для них. При этом Π^+ не обязательно оказывается внешней оценкой для \mathcal{Z} .

Называем Π -политоп *внешней касающейся оценкой для $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{n+1}$* , если $\mathcal{Z} \subseteq \Pi$ и все μ -сечения политопа Π являются касающимися оценками для μ -сечений множества \mathcal{Z} .

Лемма 3. Пусть $\mathcal{Z} = \text{co}(\mathcal{Z}^b \cup \mathcal{Z}^t)$ ограничено и выполнены условия леммы 2. Тогда Π -политоп вида (3.3) является внешней касающейся оценкой для \mathcal{Z} при любой матрице ориентации P^+ . При этом если $\mathcal{X}^b \supseteq \mathcal{X}^t$, то μ -сечения \mathcal{Z} и Π^+ не возрастают.

Доказательство. В силу леммы 2, свойств опорных функций и следствия 1 имеем для μ -сечений $\mathcal{X}(\mu)$ и $\mathcal{P}^+(\mu)$ множеств \mathcal{Z} и Π^+ для любого $l \in \mathbb{R}^n$: $\rho(l|\mathcal{X}(\mu)) = \alpha \rho(l|\mathcal{X}^t) + (1-\alpha) \rho(l|\mathcal{X}^b) \leq \alpha \rho(l|\mathcal{P}^{+t}) + (1-\alpha) \rho(l|\mathcal{P}^{+b}) = \rho(l|\mathcal{P}^+(\mu))$, т.е. $\mathcal{Z} \subseteq \Pi^+$. Обозначим значения опорной функции произвольного множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ на векторах $\pm(P^+)^{-1} e^i$ через $\rho_i^\pm(\mathcal{X})$. Тогда в силу того что \mathcal{P}^{+b} и \mathcal{P}^{+t} — касающиеся оценки для \mathcal{X}^b и \mathcal{X}^t , получаем $\rho_i^\pm(\mathcal{X}(\mu)) = \alpha \rho_i^\pm(\mathcal{X}^t) + (1-\alpha) \rho_i^\pm(\mathcal{X}^b) = \alpha \rho_i^\pm(\mathcal{P}^{+t}) + (1-\alpha) \rho_i^\pm(\mathcal{P}^{+b}) = \rho_i^\pm(\mathcal{P}^+(\mu))$, т.е. Π^+ — касающаяся оценка для \mathcal{Z} . Из вышеприведенных выражений видно, что $\rho(l|\mathcal{X}(\mu))$ и $\rho(l|\mathcal{P}^+(\mu))$ являются линейными функциями по μ (т.к. $\alpha = \mu/\mu^t$). При этом если $\mathcal{X}^b \supseteq \mathcal{X}^t$, то производная по μ неположительна: $\frac{d}{d\mu} \rho(l|\mathcal{X}(\mu)) = (1/\mu^t)(\rho(l|\mathcal{X}^t) - \rho(l|\mathcal{X}^b)) \leq 0$, т.е. функция не возрастает при любом l и выпуклые μ -сечения \mathcal{Z} не возрастают. Аналогичное заключение делаем относительно невозрастания сечений Π^+ , поскольку здесь все определяется только значениями $\rho_i^\pm(\mathcal{P}^+(\mu))$, $i = 1, \dots, n$, а $\frac{d}{d\mu} \rho_i^\pm(\mathcal{P}^+(\mu)) = (1/\mu^t)(\rho_i^\pm(\mathcal{X}^t) - \rho_i^\pm(\mathcal{X}^b)) \leq 0$. \square

Лемма 4. Пусть $\mathcal{Z} = \text{co}(\mathcal{Z}^b \cup \mathcal{Z}^t) = \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{X}(\mu), \mu\}$, где $\mathcal{Z}^b = \{\mathcal{X}^b, 0\}$, $\mathcal{Z}^t = \{\mathcal{X}^t, \mu^t\}$, множества \mathcal{X}^b и \mathcal{X}^t выпуклы, и пусть $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное выпуклое множество. Тогда множество $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} \uplus \mathcal{R}$ из (2.4), множество $\hat{\mathcal{Z}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t} \{\hat{\mathcal{X}}(\mu), \mu\}$, $\hat{\mathcal{X}}(\mu) = \text{co}(\mathcal{X}(\mu) \cup (\mathcal{X}^t + (\mu^t - \mu)\mathcal{R}))$ и множество $\check{\mathcal{Z}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{co}(\check{\mathcal{Z}}^b \cup \check{\mathcal{Z}}^t) = \text{co}(\{\text{co}(\mathcal{X}^b \cup (\mathcal{X}^t + \mu^t\mathcal{R})), 0\} \cup \{\mathcal{X}^t, \mu^t\})$ совпадают.

Доказательство. Проверим, что $\hat{\mathcal{Z}} \subseteq \tilde{\mathcal{Z}}$, $\check{\mathcal{Z}} \subseteq \tilde{\mathcal{Z}}$. Очевидно, $\mathcal{X}(\mu) \cup (\mathcal{X}^t + (\mu^t - \mu)\mathcal{R}) \subseteq \hat{\mathcal{X}}(\mu)$. Поскольку $\tilde{\mathcal{Z}}$ при наших предположениях выпукло (см. [13, лемма 2.3]), имеем $\hat{\mathcal{X}}(\mu) = \text{co}(\mathcal{X}(\mu) \cup (\mathcal{X}^t + (\mu^t - \mu)\mathcal{R})) \subseteq \text{co} \hat{\mathcal{X}}(\mu) = \hat{\mathcal{X}}(\mu)$, откуда $\hat{\mathcal{Z}} \subseteq \tilde{\mathcal{Z}}$. С учетом выпуклости $\check{\mathcal{Z}}$ и совпадения верхних и нижних μ -сечений $\tilde{\mathcal{Z}}$ и $\hat{\mathcal{Z}}$ получаем $\check{\mathcal{Z}} = \text{co} \check{\mathcal{Z}} \subseteq \text{co} \hat{\mathcal{Z}} \subseteq \text{co} \tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{\mathcal{Z}}$.

Проверим, что $\tilde{\mathcal{Z}} \subseteq \hat{\mathcal{Z}}$. Пусть $x \in \tilde{\mathcal{X}}(\mu)$, т.е. найдутся такие $\zeta \in [\mu, \mu^t]$, $x^0 \in \mathcal{X}(\zeta)$, $x^1 \in \mathcal{R}$, что $x = x^0 + (\zeta - \mu)x^1$. В силу леммы 2 найдутся $x^2 \in \mathcal{X}^t$ и $x^3 \in \mathcal{X}^b$ такие, что можем записать $x = (\zeta/\mu^t)x^2 + ((\mu^t - \zeta)/\mu^t)x^3 + (\zeta - \mu)x^1$. Обозначим $\alpha = (\zeta - \mu)/(\mu^t - \mu)$. Очевидно, $\alpha \in [0, 1]$. Элементарными выкладками проверяется, что можно представить x в виде $x = \tilde{x}$, где $\tilde{x} = (1 - \alpha)\tilde{x}^3 + \alpha\tilde{x}^2$, $\tilde{x}^3 = (\mu/\mu^t)x^2 + ((\mu^t - \mu)/\mu^t)x^3$, $\tilde{x}^2 = x^2 + (\mu^t - \mu)x^1$. Но, очевидно, $\tilde{x}^2 \in \mathcal{X}^t + (\mu^t - \mu)\mathcal{R}$, а $\tilde{x}^3 \in \mathcal{X}(\mu)$ в силу леммы 2. Поэтому $x \in \text{co}(\mathcal{X}(\mu) \cup (\mathcal{X}^t + (\mu^t - \mu)\mathcal{R})) = \hat{\mathcal{X}}(\mu)$.

Убедимся, что $\check{\mathcal{Z}} \subseteq \hat{\mathcal{Z}}$. Пусть $z = \{x, \mu\} \in \check{\mathcal{Z}}$, т.е. $\mu \in [0, \mu^t]$, а $x \in \check{\mathcal{X}}(\mu) = \hat{\mathcal{X}}(\mu)$ (использовали уже доказанное равенство $\tilde{\mathcal{Z}} = \hat{\mathcal{Z}}$). Значит, найдутся такие $x^\mu \in \mathcal{X}(\mu)$, $x^{1,t} \in \mathcal{X}^t$, $x^{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}$ и $\beta \in [0, 1]$, что $x = \beta x^\mu + (1 - \beta)(x^{1,t} + (\mu^t - \mu)x^{\mathcal{R}})$. В силу леммы 2 точка $z^\mu = \{x^\mu, \mu\}$ может быть представлена в таком виде, что $x^\mu = \alpha x^{2,t} + (1 - \alpha)x^{2,b}$, $\mu = \alpha\mu^t$, где $x^{2,t} \in \mathcal{X}^t$, $x^{2,b} \in \mathcal{X}^b$, $\alpha \in [0, 1]$. Тогда получается, что $x = \beta(\alpha x^{2,t} + (1 - \alpha)x^{2,b}) + (1 - \beta)(x^{1,t} + \mu^t(1 - \alpha)x^{\mathcal{R}}) = (1 - \beta)(1 - \alpha)(x^{1,t} + \mu^t x^{\mathcal{R}}) + \beta(1 - \alpha)x^{2,b} + \alpha(\beta x^{2,t} + (1 - \beta)x^{1,t})$ (добавили и вычли $(1 - \beta)\alpha x^{1,t}$ и перегруппировали члены). Вводя новые обозначения, имеем $x = (1 - \alpha)\check{x}^b + \alpha x^{3,t}$, где $\check{x}^b = \beta x^{2,b} + (1 - \beta)(x^{1,t} + \mu^t x^{\mathcal{R}}) \in \check{\mathcal{X}}^b = \text{co}(\mathcal{X}^b \cup (\mathcal{X}^t + \mu^t\mathcal{R}))$, $x^{3,t} = \beta x^{2,t} + (1 - \beta)x^{1,t} \in \mathcal{X}^t$. Учитывая, что $\alpha = \mu/\mu^t$, получаем $z = \{x, \mu\} \in \text{co}(\{\text{co}(\mathcal{X}^b \cup (\mathcal{X}^t + \mu^t\mathcal{R})), 0\} \cup \{\mathcal{X}^t, \mu^t\}) = \hat{\mathcal{Z}}$. \square

Утверждение 1. Пусть $\mathcal{Z} = \text{co}(\{\mathcal{X}^b, 0\} \cup \{\mathcal{X}^t, \mu^t\})$, $\mu^t \geq 0$, $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} \uplus \mathcal{R}$, и множества \mathcal{X}^b , \mathcal{X}^t , $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ ограничены и выпуклы. Тогда Π -политоп $\Pi^+ = \Pi_{P^+}^+(\tilde{\mathcal{Z}})$, построенный для $\tilde{\mathcal{Z}}$ по формулам (3.3), является внешней касающейся оценкой для $\mathcal{Z} \uplus \mathcal{R}$ при любой неособой матрице ориентации P^+ и имеем $\mathcal{P}^{+t} = \mathcal{P}_{P^+}^+(\mathcal{X}^t)$, $\mu^{+t} = \mu^t$, $\mathcal{P}^{+b} = \mathcal{P}_{P^+}^+(\mathcal{X}^b \cup (\mathcal{X}^t + \mu^t\mathcal{R}))$. Если вдобавок $\mathcal{X}^b \supseteq \mathcal{X}^t$ либо $0 \in \mathcal{R}$, то сечения множеств $\tilde{\mathcal{Z}}$ и $\Pi_{P^+}^+(\tilde{\mathcal{Z}})$ будут невозрастающими.

Доказательство. Доказанное в лемме 4 равенство $\tilde{\mathcal{Z}} = \hat{\mathcal{Z}}$ дает указанную выше формулу для \mathcal{P}^{+b} и с учетом леммы 3 обеспечивает, что Π^+ является внешней касающейся оценкой для $\tilde{\mathcal{Z}}$. Невозрастание сечений следует из второй части леммы 3 ввиду включений $\hat{\mathcal{X}}^t \subseteq \check{\mathcal{X}}^b$, вытекающих из наложенных условий, поскольку при $\mathcal{X}^b \supseteq \mathcal{X}^t$ имеем $\hat{\mathcal{X}}^t = \mathcal{X}^t \subseteq \mathcal{X}^b \subseteq \text{co}(\mathcal{X}^b \cup (\mathcal{X}^t + \mu^t\mathcal{R})) = \check{\mathcal{X}}^b$, а при $0 \in \mathcal{R}$, очевидно, $\hat{\mathcal{X}}^t = \mathcal{X}^t \subseteq \mathcal{X}^t + \mu^t\mathcal{R} \subseteq \check{\mathcal{X}}^b$. \square

Применяя следствие 1, формулы для опорной функции параллелепипеда и (3.1), получаем

Следствие 2. Пусть Π — это Π -политоп (1.10) с параллелепипедозначными сечениями, $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и $\mathcal{R} = \mathcal{P}(r, R, \rho)$ — параллелепипед в \mathbb{R}^m . Тогда внешней касающейся оценкой для $\Pi \uplus V\mathcal{R}$ с произвольной матрицей ориентации P^+ является политоп $\Pi^+ = \Pi_{P^+}^+(\Pi \uplus V\mathcal{R})$, построенный по правилу (3.3), причем его сечения определяются формулами

$$\mathcal{P}^+(\mu) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{+(-)}(\mu), \gamma^{+(+)}(\mu)), \quad 0 \leq \mu \leq \mu^t,$$

$$\gamma_i^{+(\pm)}(\mu) = \begin{cases} \alpha(Dp^t \pm C\pi^t)_i + (1 - \alpha)(Dp^b \pm C\pi^b)_i, & \text{если } (Dp^b \pm C\pi^b)_i \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} (Dp^t \pm C\pi^t + \mu^t h^{(\pm)})_i, \\ (Dp^t \pm C\pi^t)_i + (\mu^t - \mu)h_i^{(\pm)} & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\alpha = \mu/\mu^t$, $D = (P^+)^{-1}$, $C = \text{Abs}(DP)$, $h^{(\pm)} = d \pm f$, $d = DBr$, $f = \text{Abs}(DBR)\rho$.

З а м е ч а н и е 1. Формулы для внешней оценки $\Pi^+ = \Pi_{P^+}^+(\Pi \uplus V\mathcal{R})$ из следствия 2 вытекают также из [13, лемма 3.3]. Однако лемма 4 может быть полезна при построении не только полиэдральных оценок (как в утверждениях 1 и 4), но и других, например эллипсоидальных.

Утверждение 2. Пусть $\mathcal{Z} = \mathcal{A} \otimes \Pi$, где \mathcal{A} — интервальная матрица, Π — это Π -политоп (1.10) с параллелепипедозначными сечениями, и пусть P^+ — произвольная неособая матрица. Тогда внешняя для \mathcal{Z} оценка может быть найдена по правилу $\Pi^+ = \Pi_{P^+}^+(\mathcal{A} \otimes \Pi)$ из (3.3):

$$\begin{aligned} \Pi^+ &= \Pi_{P^+}^+(\mathcal{A} \otimes \Pi) = \Pi(\{\mathcal{P}^{+b}, 0\}, \{\mathcal{P}^{+t}, \mu^{+t}\}), \quad \mu^{+t} = \mu^t, \\ \mathcal{P}^{+i} &= \mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{A} \circ \mathcal{P}^i) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{+(-)i}, \gamma^{+(+)i}), \quad i = b, t, \end{aligned}$$

где векторы $\gamma^{+(\pm)i}$, $i = b, t$, находятся с использованием любой из следующих двух формул, которые следует понимать покомпонентно:

$$\begin{aligned} \gamma^{+(\pm)i} &= \pm \max_{x \in \mathbb{E}(\mathcal{P}^i)} \{\pm (P^+)^{-1} \tilde{A}x + (\text{Abs}(P^+)^{-1}) \hat{A}(\text{Abs } x)\}; \\ \gamma^{+(\pm)i} &= \pm \max_{A \in \mathbb{E}(\mathcal{A})} \{\pm (P^+)^{-1} A p^i + (\text{Abs}((P^+)^{-1} A P)) \pi^i\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если вдобавок $\mathcal{P}^b \supseteq \mathcal{P}^t$, то μ -сечения Π -политопа Π^+ будут невозрастающими.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы (3.4) вытекают из (3.2) при $l = \pm((P^+)^{-1})^\top e^i$.

Ввиду следствия 1 для проверки включения $\tilde{\mathcal{Z}} \subseteq \Pi^+$ достаточно установить, что при любом $\mu \in [0, \mu^t]$ имеем $\tilde{\mathcal{P}}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{A} \circ \mathcal{P}(\mu)) \subseteq \mathcal{P}^+(\mu)$ (т.к. $\mathcal{A} \circ \mathcal{P}(\mu) \subseteq \tilde{\mathcal{P}}(\mu)$) или, с учетом представлений $\tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \mathcal{P}(P^+, \tilde{\gamma}^{(-)}(\mu), \tilde{\gamma}^{(+)}(\mu))$, $\mathcal{P}^+(\mu) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{+(-)}(\mu), \gamma^{+(+)}(\mu))$, что $\tilde{\gamma}^{(+)}(\mu) \leq \gamma^{+(+)}(\mu)$ и $\tilde{\gamma}^{(-)}(\mu) \geq \gamma^{+(-)}(\mu)$ при любом $\mu \in [0, \mu^t]$. Убедимся в выполнении первого неравенства. Для вычисления $\tilde{\gamma}^{(\pm)}(\mu)$ и $\gamma^{+(\pm)}(\mu)$ будет удобно использовать вторую из формул (3.2). С учетом следствия 1 имеем $\tilde{\gamma}^{(\pm)}(\mu) = \pm \max_{A \in \mathbb{E}(\mathcal{A})} \{\pm (P^+)^{-1} A p(\mu) + (\text{Abs}((P^+)^{-1} A P)) \pi(\mu)\} = \pm \max_{A \in \mathbb{E}(\mathcal{A})} \{\pm (P^+)^{-1} A(\alpha p^t + (1-\alpha)p^b) + (\text{Abs}((P^+)^{-1} A P))(\alpha \pi^t + (1-\alpha)\pi^b)\}$, $\alpha = \mu/\mu^t$. Вводя обозначения $f^i(A) = (P^+)^{-1} A p^i + (\text{Abs}((P^+)^{-1} A P)) \pi^i$, $i = b, t$, и используя очевидные соотношения для функций типа $\max_{x \in \mathcal{X}} (f^1(x) + f^2(x)) \leq \max_{x \in \mathcal{X}} f^1(x) + \max_{x \in \mathcal{X}} f^2(x)$; $\max_{x \in \mathcal{X}} (\alpha f^1(x)) = \alpha \max_{x \in \mathcal{X}} f^1(x)$, $\forall \alpha \geq 0$, а также неравенства $0 \leq \alpha = \mu/\mu^t \leq 1$ при $\mu \in [0, \mu^t]$, получаем $\tilde{\gamma}^{(+)}(\mu) = \max_{A \in \mathbb{E}(\mathcal{A})} \{\alpha f^t(A) + (1-\alpha)f^b(A)\} \leq \alpha \max_{A \in \mathbb{E}(\mathcal{A})} f^t(A) + (1-\alpha) \max_{A \in \mathbb{E}(\mathcal{A})} f^b(A)$. Но в силу следствия 1 и второй из формул (3.4) правая часть последнего неравенства совпадает с $\gamma^{+(+)}(\mu)$. Неравенство $\tilde{\gamma}^{(+)}(\mu) \leq \gamma^{+(+)}(\mu)$ доказано. Второе неравенство $\tilde{\gamma}^{(-)}(\mu) \geq \gamma^{+(-)}(\mu)$ проверяется аналогично.

Невозрастание сечений Π^+ следует из второй части леммы 3 (в которой взято $\mathcal{Z} = \Pi^+$) ввиду включения $\mathcal{P}^{+b} \supseteq \mathcal{P}^{+t}$, вытекающего из леммы 1 и определения касающейся оценки. \square

З а м е ч а н и е 2. Как видно из доказательства утверждения 2, внешние оценки $\Pi_{P^+}^+(\mathcal{A} \otimes \Pi)$ не обязаны быть касающимися для $\mathcal{A} \otimes \Pi$ (в отличие от $\mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{A} \circ \mathcal{P})$ и $\Pi_{P^+}^+(\Pi \uplus \mathcal{R})$).

Рассмотрим способы построения внутренних оценок и опять начнем с оценок в \mathbb{R}^n .

Введем множество матриц $\mathcal{G}^{r \times n} = \{\Gamma = \{\gamma_\alpha^\beta\} \in \mathbb{R}^{r \times n} \mid \|\Gamma\| \leq 1\}$, где $\|\Gamma\| = \max_{1 \leq \alpha \leq r} \sum_{\beta=1}^n |\gamma_\alpha^\beta|$.

Пусть $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}[p^k, \bar{P}^k]$, $k = 1, 2$, $\bar{P}^1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{P}^2 \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Внутренние параллелотопозначные оценки для $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2$ могут быть найдены в виде $\mathbf{P}_{\Gamma^1, \Gamma^2}^-(\mathcal{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}[p^1 + p^2, \bar{P}^1 \Gamma^1 + \bar{P}^2 \Gamma^2]$, где Γ^1, Γ^2 — произвольные матрицы, удовлетворяющие условиям $\Gamma^1 \in \mathcal{G}^{n \times n}$, $\Gamma^2 \in \mathcal{G}^{r \times n}$ (см. лемму 3.1 в ссылке [14] из работы [13]).

Семейство внутренних для $\mathcal{Q} = \mathcal{A} \circ \mathcal{P}$ оценок, включающее введенные ранее в [18; 21], дает следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}]$, где $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и \mathcal{A} — интервальная матрица. Пусть Γ^1, Γ^2 — произвольные матрицы, удовлетворяющие $\Gamma^1, \Gamma^2 \in \mathcal{G}^{n \times n}$, $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ — произвольная перестановка чисел $\{1, \dots, n\}$, а параллелотоп \mathcal{P}^- определяется формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^- &= \mathbf{P}_{J, \Gamma^1, \Gamma^2}^-(\mathcal{A} \circ \mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}[\tilde{A}p, \tilde{A}\bar{P}\Gamma^1 + (\text{diag } \nu)\Gamma^2], \\ \nu_i &= \hat{a}_i^{j_i} \eta_{j_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \eta = \max\{0, \text{Abs } p - \text{Abs}(\bar{P}\Gamma^1) e\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда $\mathcal{P}^- \subseteq \mathcal{A} \circ \mathcal{P}$. Если $\det \tilde{A} \neq 0$, $\det \bar{P} \neq 0$, а Γ^1 и Γ^2 взяты в виде $\Gamma^1 = \Gamma$, $\Gamma^2 = (\text{diag } \beta) \tilde{A} \bar{P} \Gamma$, где $\beta_i = (e^i \text{Abs}(\tilde{A} \bar{P} \Gamma) e)^{-1}$, $i = 1, \dots, n$, а матрица $\Gamma \in \mathcal{G}^{n \times n}$ является неособой ($\det \Gamma \neq 0$), то \mathcal{P}^- оказывается невырожденным параллелепипедом, совпадающим с [18, (5)].

Доказательство проводится по схеме из [21, утверждение 1] и [18, теорема 1] с необходимыми модификациями. \square

Несложно привести пример того, что введение независимого параметра Γ^2 позволяет при некоторых предположениях построить невырожденный \mathcal{P}^- вида (3.5) при вырожденном \mathcal{P} .

Внутренние элементарные оценки для множеств в \mathbb{R}^{n+1} будем строить в виде Π -цилиндров.

Утверждение 4. Пусть $\Pi = \Pi(\{\mathcal{P}^b, 0\}, \{\mathcal{P}^t, \mu^t\})$ — это Π -цилиндр с одинаковыми параллелотопозначными сечениями $\mathcal{P}^b = \mathcal{P}^t = \mathcal{P}[p^t, \bar{P}^t]$, а $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}]$ — параллелотоп с $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, такой что $0 \in \mathcal{P}$. Тогда внутренней оценкой для $\Pi \uplus \mathcal{P}$ служит любой Π -цилиндр вида

$$\begin{aligned} \Pi^- &= \Pi_{h, \Gamma^1, \Gamma^2}^-(\Pi \uplus \mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi(\{\mathcal{P}^{-b}, 0\}, \{\mathcal{P}^{-t}, \mu^{-t}\}), \\ \mu^{-t} &= \mu^t - h, \quad \mathcal{P}^{-b} = \mathcal{P}^{-t} = \mathbf{P}_{\Gamma^1, \Gamma^2}^-(\mathcal{P}^t + h\mathcal{P}) = \mathcal{P}[p^t + hp, \bar{P}^t \Gamma^1 + h\bar{P} \Gamma^2], \end{aligned} \quad (3.6)$$

соответствующий допустимым значениям параметров $h \in [0, \mu^t]$, $\Gamma^1 \in \mathcal{G}^{n \times n}$ и $\Gamma^2 \in \mathcal{G}^{r \times n}$.

Доказательство. Применяя лемму 4 к Π -цилиндру $\Pi = \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{P}(\mu), \mu\}$ с $\mathcal{P}^b = \mathcal{P}^t$, получаем следующие равенства и включения для μ -сечений $\hat{\mathcal{X}}(\mu)$ множества $\Pi \uplus \mathcal{P} = \hat{\mathcal{Z}}$: $\hat{\mathcal{X}}(\mu) = \text{co}(\mathcal{P}(\mu) \cup (\mathcal{P}(\mu^t) + (\mu^t - \mu)\mathcal{P})) = \text{co}(\mathcal{P}^t \cup (\mathcal{P}^t + (\mu^t - \mu)\mathcal{P})) = \mathcal{P}^t + (\mu^t - \mu)\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}^t + h\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}[p^t + hp, \bar{P}^t \Gamma^1 + h\bar{P} \Gamma^2]$. Здесь были последовательно учтены условия $\mathcal{P}^b = \mathcal{P}^t$, $0 \in \mathcal{P}$, $\mu \leq \mu^t - h$ и использована указанная выше внутренняя оценка для $\mathcal{P}^t + h\mathcal{P}$. \square

Утверждение 5. Пусть $\Pi = \Pi(\{\mathcal{P}^b, 0\}, \{\mathcal{P}^t, \mu^t\})$ — это Π -цилиндр с $\mathcal{P}^b = \mathcal{P}^t$, а \mathcal{A} — интервальная матрица. Тогда внутренней оценкой для $\mathcal{A} \otimes \Pi$ служит любой Π -цилиндр

$$\Pi^- = \Pi_{J, \Gamma^1, \Gamma^2}^-(\mathcal{A} \otimes \Pi) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi(\{\mathcal{P}^{-b}, 0\}, \{\mathcal{P}^{-t}, \mu^{-t}\}), \quad \mu^{-t} = \mu^t, \quad \mathcal{P}^{-b} = \mathcal{P}^{-t} = \mathbf{P}_{J, \Gamma^1, \Gamma^2}^-(\mathcal{A} \circ \mathcal{P}^t), \quad (3.7)$$

где фигурирует внутренняя оценка для $\mathcal{A} \circ \mathcal{P}^t$ из утверждения 3, а J и $\Gamma^1, \Gamma^2 \in \mathcal{G}^{n \times n}$ — произвольные значения описанных там допустимых параметров.

Доказательство следует из утверждения 3 и равенства всех μ -сечений Π . \square

Замечание 3. Оценки (3.5) обладают тем свойством, что в случае $\mathcal{P} \ni 0$ получается $\nu = \eta = 0$, т.е. фактически не используется то, что матрица \mathcal{A} — интервальная. В таком случае может быть полезнее использовать так называемые простые оценки $\mathbf{P}_A^-(\mathcal{A} \circ \mathcal{P})$ из [18] вида $\mathbf{P}_A^-(\mathcal{A} \circ \mathcal{P}) = A\mathcal{P} = \mathcal{P}[Ap, A\bar{P}]$, где $A \in \mathcal{A}$, и вместо (3.7) строить внутренние оценки для $\mathcal{A} \otimes \Pi$ в виде Π -цилиндров вида

$$\Pi^- = \Pi_A^-(\mathcal{A} \otimes \Pi) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi(\{\mathcal{P}^{-b}, 0\}, \{\mathcal{P}^{-t}, \mu^{-t}\}), \quad \mu^{-t} = \mu^t, \quad \mathcal{P}^{-b} = \mathcal{P}^{-t} = \mathbf{P}_A^-(\mathcal{A} \circ \mathcal{P}^t) = \mathcal{P}[Ap^t, A\bar{P}^t], \quad (3.8)$$

где параметром служит $A \in \mathcal{A}$. Напомним, что максимальные по объему простые оценки $\mathbf{P}_A^-(\mathcal{A} \circ \mathcal{P})$ могут быть найдены среди оценок, соответствующих вершинам интервальной матрицы \mathcal{A} , а именно $\max_{A \in \mathcal{A}} \text{vol}(A\mathcal{P}) = \max_{A \in \mathbb{E}(\mathcal{A})} \text{vol}(A\mathcal{P}) = \max_{A \in \mathbb{E}(\mathcal{A})} |\det A| \cdot \text{vol } \mathcal{P}$ [18].

4. Полиэдральные оценки множеств достижимости $\mathcal{Z}[k]$ и $\mathcal{X}[k]$

Базируясь на введенных элементарных оценках, опишем способы построения полиэдральных оценок множеств достижимости. Начнем с внешних оценок, предложенных в [19].

Теорема 2. Пусть $\mathcal{Z}[k]$ – множества достижимости системы (1.1), (1.3)–(1.8) и выполнено предположение 1. Пусть Π -политопы $\Pi^+[k]$ находятся из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \Pi^{1+}[k] &= \Pi_{P^+[k]}^+(\mathcal{A}[k] \otimes \Pi^+[k-1]) \oplus v[k], \quad k = 1, \dots, N; \quad \Pi^+[0] = \mathcal{P}_0 \times [0, \mu_0]; \\ \Pi^+[k] &= \Pi_{P^+[k]}^+(\Pi^{1+}[k] \uplus B[k]\mathcal{R}[k]), \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.1)$$

которые конкретизируются с помощью формул из утверждения 2 и следствия 2. Тогда политопы $\Pi^+[k]$ являются внешними оценками для $\mathcal{Z}[k]$ ($\mathcal{Z}[k] \subseteq \Pi^+[k]$, $k = 1, \dots, N$) при любых неособых матрицах ориентации $P^+[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, N$. При этом сечения политопов $\Pi^+[k]$ и $\Pi^{1+}[k]$ не возрастают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость теоремы вытекает из теоремы 1, утверждений 1 и 2 и монотонности по включению задействованных операций с множествами. \square

Следствие 3. Пусть $\mathcal{X}[k]$ – множества достижимости системы (1.1)–(1.4) и выполнено предположение 1. Пусть параллелепипеды $\mathcal{P}^+[k]$ находятся из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{0+}[k] &= \mathbf{P}_{P^+[k]}^+(\mathcal{A}[k] \circ \mathcal{P}^{0+}[k-1]) + v[k], \quad k = 1, \dots, N; \quad \mathcal{P}^{0+}[0] = \mathcal{P}_0; \\ \mathcal{P}^+[k] &= \mathbf{P}_{P^+[k]}^+(\mathcal{A}[k] \circ \mathcal{P}^+[k-1] + v[k]) \cup (\mathcal{P}^{0+}[k] + \mu_0 B[k]\mathcal{R}[k]) \\ &= \mathbf{P}_{P^+[k]}^+(\mathbf{P}_{P^+[k]}^+(\mathcal{A}[k] \circ \mathcal{P}^+[k-1] + v[k]) \cup \mathbf{P}_{P^+[k]}^+(\mathcal{P}^{0+}[k] + \mu_0 B[k]\mathcal{R}[k])), \\ & \quad k = 1, \dots, N; \quad \mathcal{P}^+[0] = \mathcal{P}_0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Тогда они являются внешними оценками для $\mathcal{X}[k]$: $\mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k]$, $k = 1, \dots, N$, каковы бы ни были неособые матрицы ориентации $P^+[k]$, $k = 1, \dots, N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включения $\mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k]$ следуют из теорем 1 и 2, поскольку соотношения (4.2) фактически описывают динамику верхних и нижних сечений политопов из (4.1): $\mathcal{P}^{0+}[k] = \mathcal{P}^{+t}[k]$, $\mathcal{P}^+[k] = \mathcal{P}^{+b}[k]$. При этом второе равенство в выражении для $\mathcal{P}^+[k]$ в (4.2) вытекает из равенств типа $\mathbf{P}_{P^+}^+(\mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{X}^1) \cup \mathcal{X}^2) = \mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{X}^1 \cup \mathcal{X}^2)$, которые проверяются с помощью аппарата опорных функций. \square

З а м е ч а н и е 4. Соотношения (4.1) и (4.2) описывают параметризованные семейства полиэдральных трубок в \mathbb{R}^{n+1} и \mathbb{R}^n соответственно, где параметром служит последовательность матриц ориентации $P^+[\cdot]$. При выполнении предположения 2 матрицы $P^+[k]$ могут быть найдены по аналогии с [13] из соотношений $P^+[k] = \hat{A}[k]P^+[k-1]$, $k = 1, \dots, N$; $P^+[0] = P$, где P – произвольная неособая матрица; теперь она будет параметром семейства (более узкого). При этом в случае $\hat{A}[j] \equiv 0$ оценки из (4.1) совпадут с оценками из [13, теорема 4.2] и будут касающимися для МД $\mathcal{Z}[k]$, а параллелепипеды $\mathcal{P}^+[k]$ из (4.2) будут касающимися оценками для МД $\mathcal{X}[k]$. Выбор постоянных матриц ориентации $P^+[k] \equiv P$ может привести к гораздо более грубым оценкам ввиду известного в интервальном анализе “эффекта обертывания”.

Обратимся теперь к построению внутренних оценок.

Введем семейство трубок $\Pi^-[\cdot]$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} \Pi^{1-}[k] &= \Pi_{J[k], \Gamma^1[k], \Gamma^2[k]}^-(\mathcal{A}[k] \otimes \Pi^-[k-1]) \oplus v[k], \quad k = 1, \dots, N; \\ \Pi^-[k] &= \Pi_{h[k], \Gamma^3[k], \Gamma^4[k]}^-(\Pi^{1-}[k] \uplus B[k]\mathcal{R}[k]), \quad k = 1, \dots, N; \\ \Pi^-[0] &= \mathcal{P}_0 \times [0, \mu_0] = \Pi(\{\mathcal{P}_0, 0\}, \{\mathcal{P}_0, \mu_0\}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где параметры $J[\cdot], \Gamma^1[\cdot], \Gamma^2[\cdot], h[\cdot], \Gamma^3[\cdot], \Gamma^4[\cdot]$ отвечают условиям

$$h[j] \geq 0, \quad j=1, \dots, N, \quad \sum_{j=1}^N h[j] \leq \mu_0; \quad \Gamma^1[j], \Gamma^2[j], \Gamma^3[j] \in \mathcal{G}^{n \times n}, \quad \Gamma^4[j] \in \mathcal{G}^{n_u \times n}, \quad j=1, \dots, N, \quad (4.4)$$

$J[j]$ – произвольные перестановки чисел $\{1, \dots, n\}$; называем такие значения допустимыми.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — множества достижимости системы (1.1), (1.3)–(1.8) и выполнено предположение 1. Пусть Π -цилиндры $\Pi^-[k]$ находятся из соотношений (4.3), которые конкретизируются с помощью формул (3.7), (3.5), (3.6). Тогда $\Pi^-[k]$ являются внутренними оценками для $\mathcal{Z}[k]$ при произвольных допустимых значениях параметров $J[\cdot], \Gamma^1[\cdot], \Gamma^2[\cdot], h[\cdot], \Gamma^3[\cdot], \Gamma^4[\cdot]$: $\Pi^-[k] \subseteq \mathcal{Z}[k], k = 1, \dots, N$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 с опорой на утверждения 4 и 5. Выполнение требуемого в утверждении 4 условия $0 \in \mathcal{R}[k]$ следует из (1.9). Условия на $h[\cdot]$ из (4.4) обеспечивают ввиду (3.6), что $\mu^{-t}[k] \geq 0, k = 1, \dots, N$. \square

Следствие 4. Пусть $\mathcal{X}[k]$ — множества достижимости системы (1.1)–(1.4) и выполнено предположение 1. Пусть параллелотопы $\mathcal{P}^-[k]$ находятся из соотношений

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{0-}[k] &= \mathbf{P}_{J[k], \Gamma^1[k], \Gamma^2[k]}^-(\mathcal{A}[k] \circ \mathcal{P}^-[k-1]) + v[k], \quad k = 1, \dots, N; \\ \mathcal{P}^-[k] &= \mathbf{P}_{\Gamma^3[k], \Gamma^4[k]}^-(\mathcal{P}^{0-}[k] + h[k]B[k]\mathcal{R}[k]), \quad k = 1, \dots, N; \quad \mathcal{P}^-[0] = \mathcal{P}_0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

при таких же допустимых значениях параметров $J[\cdot], \Gamma^1[\cdot], \Gamma^2[\cdot], h[\cdot], \Gamma^3[\cdot], \Gamma^4[\cdot]$, как и в теореме 3. Тогда они являются внутренними оценками для $\mathcal{X}[k]$: $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{X}[k], k = 1, \dots, N$.

Доказательство. Включения $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{X}[k]$ вытекают из теорем 1 и 3, поскольку соотношения (4.5) фактически описывают динамику μ -сечений цилиндров из (4.3): $\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}^{-t}[k] = \mathcal{P}^{-b}[k]$ (а $\mathcal{P}^{0-}[k]$ совпадают с μ -сечениями цилиндров $\Pi^{1-}[k]$).

Можно дать и другое доказательство следствия 4. Действительно, несложно видеть, что если рассмотреть МД $\mathcal{X}[k; h[\cdot]]$ системы (1.1), (1.3), (1.4) с $x[0] \in \mathcal{X}_0$ и ограничениями на $u[\cdot]$ вида $u[j] \subseteq h[j]\mathcal{R}[j], j = 1, \dots, N$, то при условиях на $h[\cdot]$ из (4.4) будем иметь $\mathcal{X}[k; h[\cdot]] \subseteq \mathcal{X}[k], k = 1, \dots, N$. Поэтому далее достаточно использовать конструкции для построения внутренних оценок МД $\mathcal{X}[k; h[\cdot]]$ систем с геометрическими ограничениями и элементарные внутренние оценки в \mathbb{R}^n , описанные в разд. 3. \square

З а м е ч а н и е 5. Соотношения (4.3) и (4.5) описывают параметризованные семейства полиэдральных трубок в \mathbb{R}^{n+1} и \mathbb{R}^n соответственно, где параметрами служат функции $h[\cdot], J[\cdot], \Gamma^i[\cdot], i = 1, 2, 3, 4$. Если при каких-то $k \in \{1, \dots, N\}$ оказывается, что $\mathcal{P}^{-t}[k] \ni 0$, то ввиду замечания 3 может быть полезно при таких k вместо формул для $\Pi^{1-}[k]$ из (4.3) использовать формулы

$$\Pi^{1-}[k] = \mathbf{\Pi}_{A[k]}^-(\mathcal{A}[k] \otimes \Pi^-[k-1]) \oplus v[k]$$

типа (3.8) и, аналогично, вместо формул для $\mathcal{P}^{0-}[k]$ из (4.5) использовать формулы

$$\mathcal{P}^{0-}[k] = \mathbf{P}_{A[k]}^-(\mathcal{A}[k] \circ \mathcal{P}^-[k-1]) + v[k],$$

где матрицы $A[k] \in \mathcal{A}[k]$ играют роль параметра оценки.

Заключение

Исследована задача достижимости для многошаговых систем с исходно линейной структурой и неопределенностями в начальных условиях, матрицах и аддитивных воздействиях, причем последние стеснены интегральными ограничениями. Представлены соотношения, обеспечивающие точное описание множеств достижимости, и предложены способы построения параметризованных семейств внешних и внутренних полиэдральных оценок для них. При этом рассматриваются не только МД $\mathcal{X}[k]$ в исходном пространстве, но и МД $\mathcal{Z}[k]$ в “расширенном” пространстве, обладающие важным полугрупповым свойством. Для множеств $\mathcal{Z}[k]$ строятся внешние и внутренние оценки в виде политопов специального типа, которые называем Π -политопами и Π -цилиндрами. Определенные сечения таких оценок дают внешние параллелепипедозначные и внутренние параллелотопозначные оценки для $\mathcal{X}[k]$. Хотя такие оценки

могут оказаться несколько грубыми, их можно легко вычислить по явным формулам из систем рекуррентных соотношений, и они могут быть довольно информативными, в то время как точное построение МД достаточно затруднительно. Введение семейств оценок позволяет более точно оценить МД в виде пересечения нескольких внешних оценок и объединения нескольких внутренних. В [19] приведен пример построения внешних оценок для двумерной системы. Примеры численного построения описываемых в статье двусторонних оценок с использованием компьютерной графики для того случая и для систем большей размерности будут представлены в отдельной публикации. Отметим также, что ввиду полугруппового свойства предложенные оценки для $\mathcal{Z}[k]$ могут быть модифицированы с целью получения оценок для МД систем с фазовыми ограничениями и для информационных множеств [2; 3; 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. **Kurzanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. (Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85). doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
4. **Kurzanski A.B., Daryin A.N.** Dynamic programming for impulse feedback and fast controls: The linear systems case. London: Springer, 2020. 275p. (LNCIS, vol. 468.) doi: 10.1007/978-1-4471-7437-0.
5. **Лотов А.В.** Метод построения внешней полиэдральной оценки трубки траекторий нелинейной динамической системы // Докл. АН. 2017. Т. 472, №1. С. 18–22.
6. **Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N.** The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Differential Equations and Appl. 2007. Vol. 14, iss. 1–2. P. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6.
7. **Kurzanski A.B., Vályi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
8. **Черноушко Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
9. **Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф.** Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018. 193 с.
10. **Le V.T.H., Stoica C., Alamo T., Camacho E.F., Dumur D.** Zonotopes: From guaranteed state-estimation to control. Croydon: Wiley-ISTE, 2013. 150 p. doi: 10.1002/9781118761588.
11. **Sharma U., Thangavel S., Gottu Mukkula A.R., Paulen R.** Effective recursive parallelotopic bounding for robust output-feedback control // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 15. P. 1032–1037. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.09.058.
12. **Dreossi T., Dang T., Piazza C.** Reachability computation for polynomial dynamical systems // Formal Methods in System Design. 2017. Vol. 50, iss. 1. P. 1–38. doi: 10.1007/s10703-016-0266-3.
13. **Костоусова Е.К.** О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в “расширенном” пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, № 5. С. 54–72.
14. **Tang W., Wang Z., Shen Y.** Interval Estimation methods for discrete-time linear time-invariant systems // Systems & Control Letters. 2019. Vol. 123. P. 69–74. doi: 10.1016/j.sysconle.2018.11.001.
15. **Filippova T.F., Matviychuk O.G.** Estimates of reachable sets of control systems with bilinear-quadratic nonlinearities // Ural Math. J. 2015. Vol. 1, no. 1. P. 45–54. doi: 10.15826/umj.2015.1.004.
16. **Mazurenko S.S.** Partial differential equation for evolution of star-shaped reachability domains of differential inclusions // Set-Valued Var. Anal. 2016. Vol. 24, iss. 2. P. 333–354. doi: 10.1007/s11228-015-0345-4.
17. **Синяков В.В.** Метод вычисления внешних и внутренних аппроксимаций множеств достижимости билинейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 1101–1114.
18. **Костоусова Е.К.** О полиэдральных оценках множеств достижимости многошаговых систем с билинейной неопределенностью // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 49–60.
19. **Kostousova E.K.** State estimates of bilinear discrete-time systems with integral constraints through polyhedral techniques // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 245–250. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.389.

20. **Chernousko F.L., Rokityanskii D.Ya.** Ellipsoidal bounds on reachable sets of dynamical systems with matrices subjected to uncertain perturbations // *J. Optim. Theory Appl.* 2000. Vol. 104, iss. 1. P. 1–19. doi: 10.1023/A:1004687620019.
21. **Костоусова Е.К.** О полиэдральных оценках множеств достижимости дифференциальных систем с билинейной неопределенностью // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2012. Т. 18, № 4. С. 195–210.

Поступила 13.11.2019

После доработки 22.01.2020

Принята к публикации 27.01.2020

Костоусова Елена Кирилловна

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: kek@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
2. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
3. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation*. Ser. Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85, Basel: Birkhäuser, 2014, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
4. Kurzhanski A.B., Daryin A.N. *Dynamic programming for impulse feedback and fast controls: The linear systems case*. LNCIS, vol. 468, London: Springer, 2020, 275 p. doi: 10.1007/978-1-4471-7437-0.
5. Lotov A.V. Method for constructing an external polyhedral estimate of the trajectory tube for a nonlinear dynamic system. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 95, no. 1, pp. 95–98. doi: 10.1134/S1064562417010045.
6. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Differential Equations and Appl.*, 2007, vol. 14, no. 1–2, pp. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6.
7. Kurzhanski A.B., Vályi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Boston: Birkhäuser, 1997, 321 p. ISBN: 978-0-8176-3699-9.
8. Chernousko F.L. *State estimation for dynamic systems*. Boca Raton: CRC Press, 1994, 304 p. ISBN: 0-8493-4458-1. Original Russian text published in Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov*. Moscow: Nauka Publ., 1988, 319 p.
9. Ananyev B.I., Gusev M.I., Filippova T.F. *Upravlenie i otsenivanie sostoyanii dinamicheskikh sistem s neopredelennost'yu* [Control and estimation of states of dynamic systems with uncertainty]. Novosibirsk: Izdatelstvo SO RAN, 2018, 193 p. ISBN: 978-5-7692-1624-4.
10. Le V.T.H., Stoica C., Alamo T., Camacho E.F., Dumur D. *Zonotopes: From guaranteed state-estimation to control*. Croydon: Wiley-ISTE, 2013. 150 p. doi: 10.1002/9781118761588.
11. Sharma U., Thangavel S., Gottu Mukkula A.R., Paulen R. Effective recursive parallelotopic bounding for robust output-feedback control. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 15, pp. 1032–1037. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.09.058.
12. Dreossi T., Dang T., Piazza C. Reachability computation for polynomial dynamical systems. *Formal Methods in System Design*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 1–38. doi: 10.1007/s10703-016-0266-3.
13. Kostousova E.K. Outer polyhedral estimates of reachable sets in the “extended” phase space for linear discrete systems with integral bounds on controls. *Vychisl. Tekhnol.*, 2004, vol. 9, no. 5, pp. 54–72 (in Russian).
14. Tang W., Wang Z., Shen Y. Interval Estimation methods for discrete-time linear time-invariant systems. *Systems and Control Letters*, 2019, vol. 123, pp. 69–74. doi: 10.1016/j.sysconle.2018.11.001.
15. Filippova T.F., Matviychuk O.G. Estimates of reachable sets of control systems with bilinear-quadratic nonlinearities. *Ural Math. J.*, 2015, vol. 1, no. 1, pp. 45–54. doi: 10.15826/umj.2015.1.004.

16. Mazurenko S.S. Partial differential equation for evolution of star-shaped reachability domains of differential inclusions. *Set-Valued Var. Anal.*, 2016, vol. 24, no. 2, pp. 333–354.
doi: 10.1007/s11228-015-0345-4.
17. Sinyakov V.V. Method for computing exterior and interior approximations to the reachability sets of bilinear differential systems. *Differential Equations*. 2015, vol. 51, no. 8, pp. 1097–1111.
doi: 10.1134/S0012266115080145.
18. Kostousova E.K. On polyhedral estimates for reachable sets of discrete-time systems with bilinear uncertainty. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 9, pp. 1841–1851.
doi: 10.1134/S0005117911090062.
19. Kostousova E.K. State estimates of bilinear discrete-time systems with integral constraints through polyhedral techniques. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 245–250.
doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.389.
20. Chernousko F.L., Rokityanskii D.Ya. Ellipsoidal bounds on reachable sets of dynamical systems with matrices subjected to uncertain perturbations. *J. Optimiz. Theory Appl.*, 2000, vol. 104, no. 1, pp. 1–19.
doi: 10.1023/A:1004687620019.
21. Kostousova E.K. On polyhedral estimates for reachable sets of differential systems with bilinear uncertainty. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 195–210 (in Russian).

Received November 13, 2019

Revised January 22, 2020

Accepted January 27, 2020

Elena Kirillovna Kostousova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: kek@imm.uran.ru.

Cite this article as: E. K. Kostousova. On polyhedral estimation of reachable sets in the “extended” space for discrete-time systems with uncertain matrices and integral constraints, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 141–155.

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ВОЗМУЩЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В. И. Максимов

Рассматривается задача реконструкции неизвестного возмущения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая имеет две особенности. Во-первых, предполагается, что измеряются (с ошибкой) в дискретные, достаточно частые, моменты времени фазовые координаты заданной динамической системы. Во-вторых, относительно неизвестного возмущения, действующего на систему, известно лишь то, что оно является элементом пространства функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы, т. е. может быть неограниченным. Указанные предположения ведут к невозможности точного восстановления. Учитывая данную особенность, мы конструируем устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения рассматриваемой задачи, который основан на сочетании элементов теории некорректных задач с известным в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига.

Ключевые слова: линейные управляемые системы, динамическое восстановление.

V. I. Maksimov. On an algorithm for the reconstruction of a perturbation in a nonlinear system.

A problem of reconstruction of an unknown perturbation in a system of nonlinear ordinary differential equations is considered. The methods of solution of such problems are well known. In this paper we study a problem with two peculiarities. First, it is assumed that the phase coordinates of the dynamical system are measured (with error) at discrete sufficiently frequent times. Second, the only information known about the perturbation acting on the system is that its Euclidean norm is square integrable; i.e., the perturbation can be unbounded. Since the exact reconstruction is impossible under these assumptions, we design a solution algorithm that is stable under information noise and computation errors. The algorithm is based on the combination of elements of the theory of ill-posed problems with the extremal shift method known in the theory of positional differential games.

Keywords: linear control systems, dynamic reconstruction.

MSC: 49N45, 93B52

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-156-166

1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = f(t, x(t), y(t), u(t)), \quad t \in T = [0, \vartheta], \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0.$$

Здесь $0 < \vartheta < +\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^r$, $f(t, x, y, u) = f_1(t, x, y) + Bu$, f_1 — липшицева функция с константой Липшица L , u — возмущение, B — стационарная матрица соответствующей размерности, $x(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^n)$ — некоторая функция. Предполагается, что на систему (1.1) действует неизвестное возмущение $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ ($\tau_0 = 0, \tau_m = \vartheta, \tau_{i+1} = \tau_i + \delta$) измеряется фазовое состояние системы (1.1) $y(\tau_i) = y(\tau_i; y_0, x(\cdot), u(\cdot))$. Состояния $y(\tau_i), i \in [0 : m - 1]$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^N$ — удовлетворяют неравенствам

$$|y(\tau_i) - \xi_i^h|_N \leq h. \quad (1.2)$$

Предполагается, что функция $x(\cdot)$ известна неточно. Именно вместо функции $x(\cdot)$ известна функция $\phi^\nu(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^n)$ со свойством

$$|x(t) - \phi^\nu(t)|_n \leq \nu \quad \text{при п.в. } t \in T. \quad (1.3)$$

Здесь $h \in (0, 1)$ и $\nu = \nu(h)$ — уровни погрешности измерения, символ $|\cdot|_n$ означает евклидову норму в пространстве \mathbb{R}^n . Требуется указать алгоритм приближенного восстановления неизвестного возмущения по результатам неточных измерений $y(\tau_i)$. Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $y(\tau_i)$ в “реальном времени” формирует (по принципу обратной связи) некоторую функцию $u^h = u^h(\cdot)$, являющуюся приближением (в метрике пространства $L_2(T; \mathbb{R}^r)$) некоторого возмущения, порождающего решение $y(\cdot)$ уравнения (1.1).

Сформулированная выше задача является задачей динамического восстановления (реконструкции). Можно выделить два подхода к восстановлению недоступной напрямую наблюдению информации о системе. Один связан с теорией оценивания управляемых систем, нацеленной на синтез максимальной текущей информации о состояниях системы. Такая информация обычно представляется в виде так называемых информационных множеств, объединяющих все состояния системы, не противоречащие текущей истории наблюдений [1–3]. Другой подход был развит в исследованиях [4–11]. Он основан на комбинации методов теории позиционного управления [12] и некорректных задач [13; 14]. Если возмущение $u(\cdot)$ стеснено мгновенными ограничениями, обсуждаемая задача может быть решена на основе конструкций работ [5; 6].

В данной статье мы рассмотрим случай отсутствия мгновенных ограничений. Вследствие этого будем считать, что неизвестное возмущение может быть неограниченным, являясь функцией суммируемой с квадратом евклидовой нормы. Другие задачи динамического восстановления, методы решения которых основаны на соответствующих модификациях метода экстремального сдвига, обсуждались, например, в работах [7–11]. При этом в [7; 8] рассматривался случай измерения “всех” координат. Случаю измерения части фазовых координат посвящены работы [9] (линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений), [10] (система с последствием), [11] (система с распределенными параметрами). Следует отметить, что обсуждаемый в настоящей статье подход к решению задач реконструкции отличается от стандартных подходов, среди которых можно отметить, например, подходы основанные на стохастических методах [16; 17], методах параметризации [17], методах двухступенчатой оптимизации [19] и другие.

2. Метод решения задачи

Перейдем к описанию метода решения рассматриваемой задачи. Как было отмечено выше, метод основан на конструкциях теории управления с обратной связью. При этом задача динамической реконструкции заменяется задачей позиционного управления некоторой подходящим образом подобранной динамической системой.

Пусть для каждого $h \in (0, 1)$ фиксировано семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0, 1). \quad (2.1)$$

Введем вспомогательную систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{w}^h(t) = f_1(\tau_i, \phi^\nu(t), \xi_i^h) + Bu_i^h \quad \text{при п.в. } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in [0 : m_h - 1]) \quad (2.2)$$

с начальным состоянием $w^h(0) = \xi_0^h$. Закон $U(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^r$ формирования управления $u^h(\cdot)$ этой системой конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании ряда параметров кусочно-постоянная функция $u^h(\cdot)$ вида

$$u^h(t) = u_i^h = U(\xi_i^h, w^h(\tau_i)) \quad \text{при п.в. } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in [0 : m_h - 1]) \quad (2.3)$$

аппроксимирует неизвестный вход.

Следует отметить, что одно и то же решение системы (1.1) может вызываться не единственным возмущением. Пусть $\mathcal{U}(x(\cdot), y(\cdot))$ — множество всех возмущений из $L_2(T; \mathbb{R}^r)$, порождающих решение $y(\cdot)$ системы (1.1), т. е.

$$\mathcal{U}(x(\cdot), y(\cdot)) = \{\tilde{u}(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r) : \dot{y}(t) - f_1(t, x(t), y(t)) = B\tilde{u}(t) \text{ при п.в. } t \in T\}.$$

Символом $u_*(\cdot)$ обозначим минимальное по $L_2(T; \mathbb{R}^r)$ -норме возмущение из $\mathcal{U}(x(\cdot), y(\cdot))$, порождающее решение $y(\cdot)$ системы (1.1), т. е.

$$u_*(\cdot) = \arg \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(x(\cdot), y(\cdot))} |u(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)}.$$

Нетрудно видеть, что такое возмущение существует и единственно. Следуя принятому в теории некорректных задач подходу [13; 14] мы будем восстанавливать $u_*(\cdot)$.

3. Алгоритм решения

Укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи. Возьмем некоторое семейство Δ_h (2.1), а также функцию $\alpha(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величины $h \in (0, 1)$, $\nu = \nu(h)$, $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (2.1). Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i , вычисляется вектор u_i^h по формуле (2.3), в которой

$$U(\xi_i^h, w^h(\tau_i)) = U_\alpha(\xi_i^h, w^h(\tau_i)) = -\alpha^{-1} B'(w^h(\tau_i) - \xi_i^h). \quad (3.1)$$

Здесь штрих означает транспонирование. Затем на вход системы (2.2) подается управление $u^h(t)$ вида (2.3), (3.1). Под действием этого управления решение системы (2.2) переходит из состояния $w^h(\tau_i)$ в состояние $w^h(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ .

Оказывается, что при определенном согласовании величин h , $\delta(h)$, $\nu(h)$, $\alpha(h)$ функция $u^h(\cdot)$ является аппроксимацией $u(\cdot)$. Прежде чем перейти к доказательству этого факта, приведем две леммы, которые понадобятся в дальнейшем.

З а м е ч а н и е 1. Для случая, когда правая часть системы (1.1) не зависит от функции $x(\cdot)$, т. е. $f = f_1(t, y) + Bu$, в работе [7] указан алгоритм решения рассматриваемой задачи. При этом в качестве модели бралась система

$$\dot{w}^h(t) = f_1(\tau_i, \xi_i^h) + Bu_i^h + v_i^h, \quad t \in \delta_i,$$

в которой управления u_i^h и v_i^h вычислялись по формулам

$$u_i^h = \alpha(h)^{-1} B'(\xi_i^h - w^h(\tau_i)), \quad v_i^h = c\delta(h)\alpha^{-2}(h)(\xi_i^h - w^h(\tau_i)),$$

где c — некоторая положительная константа. Там же было показано, что при соответствующем согласовании параметров h , $\alpha(h)$ и $\delta(h)$ имеет место сходимость $u^h(\cdot)$ к $u_*(\cdot)$ в $L_2(T; \mathbb{R}^r)$. При доказательстве этой сходимости существенную роль играла функция $v^h(\cdot)$.

В настоящей работе, в отличие от [7], мы, во-первых, рассмотрим правую часть f , зависящую от некоторой функции $x(\cdot)$. Во-вторых, мы покажем, что в модели можно полагать $v^h(t) = 0$, $t \in T$.

Лемма 1 [6, с. 29]. Пусть $x_1(\cdot) \in L_\infty(T_*; \mathbb{R}^n)$, $y_1(\cdot) \in W(T_*; \mathbb{R}^n)$, $T_* = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\left| \int_a^t x_1(\tau) d\tau \right|_n \leq \varepsilon, \quad |y_1(t)|_n \leq K \quad \forall t \in T_*.$$

Тогда при всех $t \in T_*$ верно неравенство

$$\left| \int_a^t (x_1(\tau), y_1(\tau)) d\tau \right| \leq \varepsilon(K + \text{var}(T_*; y_1(\cdot))).$$

Здесь символ $\text{var}(T_*; y_1(\cdot))$ означает вариацию функции $y_1(\cdot)$ на отрезке T_* , символ (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве, символ $|\cdot|$ — модуль числа, а символ $W(T_*; \mathbb{R}^n)$ — множество функций $y(\cdot) : T_* \rightarrow \mathbb{R}^n$ с ограниченной вариацией.

Заметим, что встречающиеся в настоящей работе постоянные $C_j, k_j, k^{(j)}$ зависят от структуры системы (1.1) и не зависят от h, α, δ, ν .

Лемма 2. Пусть $\alpha(h) \rightarrow 0, \delta(h)\alpha^{-2}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда можно указать такое $h_1 \in (0, 1)$, что при всех $h \in (0, h_1), t \in T$ для некоторых положительных C_1 – C_3 справедливы неравенства

$$\varepsilon_*(t) \leq C_1 \rho_1(\alpha, \delta, h, \nu), \quad (3.2)$$

$$\int_0^{\vartheta} |u^h(\tau)|_r^2 d\tau \leq (1 + C_2 \alpha \delta^{-2}) \int_0^{\vartheta} |u(\tau)|_r^2 d\tau + C_3 \rho(\alpha, \delta, h, \nu) \alpha^{-1}, \quad (3.3)$$

где $\varepsilon_*(t) = 0.5|w^h(t) - y(t)|_N^2, \rho_1(\alpha, \delta, h, \nu) = \rho(\alpha, \delta, h, \nu) + \alpha + \delta + \delta^2 \nu^2, \rho(\alpha, \delta, h, \nu) = \alpha^2 \delta + h^2 \delta^{-1} + h + \alpha^2 \nu^2 \delta^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим изменение величины $\varepsilon_*(t)$ при $t \in T$. Для $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), i \in [0 : m - 1]$ имеем

$$\varepsilon_*(t) = 0.5 \left| w^h(\tau_i) - y(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t (f^i(\tau) + B^i(\tau)) d\tau \right|_N^2,$$

где $m = m_h, \tau_i = \tau_{h,i}$,

$$f^i(t) = f_1(\tau_i, \phi^\nu(t), \xi_i^h) - f_1(t, x(t), y(t)), \quad B^i(t) = B(u_i^h - u(t)) \quad \text{при п.в. } t \in \delta_i.$$

В таком случае при $t \in \delta_i$ справедливо равенство

$$\varepsilon_*(t) = \varepsilon_*(\tau_i) + \sum_{j=1}^5 \nu_i^{(j)}(t).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \nu_i^{(1)}(t) &= \left(w^h(\tau_i) - y(\tau_i), \int_{\tau_i}^t f^i(\tau) d\tau \right), \quad \nu_i^{(2)}(t) = 0.5 \left| \int_{\tau_i}^t f^i(\tau) d\tau \right|_N^2, \\ \nu_i^{(3)}(t) &= \left(w^h(\tau_i) - y(\tau_i), \int_{\tau_i}^t B^i(\tau) d\tau \right), \\ \nu_i^{(4)}(t) &= \left(\int_{\tau_i}^t f^i(\tau) d\tau, \int_{\tau_i}^t B^i(\tau) d\tau \right), \quad \nu_i^{(5)}(t) = 0.5 \left| \int_{\tau_i}^t B^i(\tau) d\tau \right|_N^2, \quad t \in \delta_i. \end{aligned}$$

Всюду в доказательстве этой леммы $\alpha = \alpha(h), \nu = \nu(h), \delta = \delta(h)$. Нетрудно видеть, что при всех i верны неравенства (см. (3.1))

$$|u_i^h|_r = \left| \frac{B'(\xi_i^h - w^h(\tau_i))}{\alpha} \right|_r \leq \frac{b_*}{\alpha} Q_i, \quad (3.4)$$

где $Q_i = h + (2\varepsilon_*(\tau_i))^{1/2}$, b_* — евклидова норма матрицы B . Заметим, что при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ верна оценка

$$|f^i(t)|_N \leq L(\delta + h + \nu + |y(t) - y(\tau_i)|_N) \leq LQ_t^{(i)}. \quad (3.5)$$

Здесь

$$Q_t^{(i)} = \delta + h + \nu + \int_{\tau_i}^t |\dot{y}(\tau)|_N d\tau.$$

В свою очередь из соотношения (3.5) следует неравенство

$$\nu_i^{(1)}(t) \leq L(2\varepsilon_*(\tau_i))^{1/2} \delta Q_t^{(i)} \leq \frac{\delta^2}{4\alpha^2} \varepsilon_*(\tau_i) + k_1 \alpha^2 (Q_t^{(i)})^2, \quad t \in \delta_i. \quad (3.6)$$

Обозначим $U_{ip}(t) = \int_{\tau_i}^t |u(\tau)|_r^p d\tau$, $p = 1, 2$. Имеем

$$\nu_i^{(2)}(t) \leq k_2 \delta^2 (Q_t^{(i)})^2, \quad t \in \delta_i. \quad (3.7)$$

Также верно неравенство (см. (3.4))

$$\left| \int_{\tau_i}^t B^i(\tau) d\tau \right|_N \leq b_*(U_{i1}(t) + \delta |u_i^h|_N) \leq b_*(b_* \delta \alpha^{-1} Q_i + U_{i1}(t)), \quad t \in \delta_i. \quad (3.8)$$

В силу (3.4) и (3.8) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \nu_i^{(3)}(t) &\leq \int_{\tau_i}^t (w^h(\tau_i) - \xi_i^h, B^i(\tau)) d\tau + hb_* \{b_* \delta \alpha^{-1} (h + (2\varepsilon_*(\tau_i))^{1/2}) + U_{i1}(t)\} \\ &\leq \int_{\tau_i}^t (w^h(\tau_i) - \xi_i^h, B^i(\tau)) d\tau + k_3 \left\{ \left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right) h^2 + hU_{i1}(t) \right\} + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} \varepsilon_*(\tau_i). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Нетрудно видеть, что при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \nu_i^{(4)}(t) &\leq k_4 \left\{ \frac{\delta^2}{\alpha} Q_t^{(i)} (h + \varepsilon_*^{1/2}(\tau_i)) + \delta Q_t^{(i)} U_{i1}(t) \right\} \\ &\leq \frac{\delta^2}{4\alpha^2} \varepsilon_*(\tau_i) + k_5 \left\{ \delta^2 (Q_t^{(i)})^2 + \frac{\delta^2}{\alpha^2} h^2 + \delta U_{i2}(t) \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\nu_i^{(5)}(t) \leq 0.5b_*^2 \left(U_{i1}(t) + \delta b_* \frac{Q_i}{\alpha} \right)^2 \leq 4b_*^4 \frac{\delta^2}{\alpha^2} \varepsilon_*(\tau_i) + k_6 \left\{ h^2 \frac{\delta^2}{\alpha^2} + \delta U_{i2}(t) \right\}. \quad (3.11)$$

Объединяя соотношения (3.6), (3.7), (3.9)–(3.11) и учитывая условие $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ получаем

$$\varepsilon_*(t) \leq \varepsilon_*(\tau_i) + \left(1 + 4b_*^4 \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \varepsilon_*(\tau_i) + k_7 \left\{ \delta U_{i2}(t) + (\alpha^2 + \delta^2) (Q_t^{(i)})^2 + h^2 + hU_{i1}(t) \right\}. \quad (3.12)$$

Далее, имеем

$$(\alpha^2 + \delta^2) \sum_{i=0}^{m-1} (Q_{\tau_{i+1}}^{(i)})^2 \leq k_8 \alpha^2 \sum_{i=0}^{m-1} (h^2 + \delta^2 + \nu^2 + \delta Q_{i, \tau_{i+1}}) \leq k_9 \{ \alpha^2 \delta + \alpha^2 (h^2 + \nu^2) \delta^{-1} \}. \quad (3.13)$$

Здесь $Q_{i,t} = \int_{\tau_i}^t |\dot{y}(\tau)|_N^2 d\tau$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Введем величину

$$\mu(t) = 2\varepsilon_*(t) + \alpha \int_0^t \{|u^h(\tau)|_r^2 - |u(\tau)|_r^2\} d\tau.$$

Воспользовавшись правилом определения управления $u^h(\cdot)$, из (3.12) получаем

$$\mu(t) \leq \mu(\tau_i) + 1 \left(1 + 4b_*^4 \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \varepsilon_*(\tau_i) + k_7 \left\{ \delta U_{i2}(t) + (\alpha^2 + \delta^2)(Q_t^{(i)})^2 + h^2 + hU_{i1}(t) \right\}. \quad (3.14)$$

Пусть

$$\gamma_*(t) = 2\varepsilon_*(t) + \alpha \int_0^t |u^h(\tau)|_r^2 d\tau.$$

Из (3.14), учитывая неравенство $(1 + \delta\alpha^{-1})\delta\alpha^{-1} \leq \text{const}$, выводим при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ оценку

$$\gamma_*(t) \leq \left(1 + 4b_*^4 \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \gamma_*(\tau_i) + (\alpha + k_{10}\delta)U_{i2}(t) + k_{11} \left\{ (\alpha^2 + \delta^2)(Q_t^{(i)})^2 + h^2 + hU_{i1}(t) \right\}. \quad (3.15)$$

В силу (3.13) из (3.15) стандартным образом (см., например, [12]) следует

$$\gamma_*(\tau_{i+1}) \leq [\gamma_*(0) + (\alpha + k_{10}\delta)U^{(i+1)} + k_{12}\rho] \exp \left\{ 4b_*^4 \frac{\delta}{\alpha^2} \tau_{i+1} \right\}, \quad i \in [0 : m-1].$$

Здесь $\rho = \rho(\alpha, \delta, h, \nu)$, $U^{(i+1)} = \int_0^{\tau_{i+1}} |u(\tau)|_r^2 d\tau$. Далее, из последнего неравенства, учитывая тот факт, что $\gamma_*(0) \leq h^2$ (см. (1.2) при $i = 0$), получаем

$$\gamma_*(\tau_i) \leq [(k_{13}\rho + (\alpha + k_{10}\delta)U^{(i)})] \exp \left\{ \frac{4b_*^4\delta}{\alpha^2} \tau_i \right\}. \quad (3.16)$$

В силу условия $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ найдется такое число $h^* \in (0, 1)$, что при всех $h \in (0, h^*)$ справедливо неравенство

$$\exp\{4b_*^4\delta\alpha^{-2}\} \leq 1 + k_{14}\delta\alpha^{-2}. \quad (3.17)$$

В таком случае, учитывая (3.17), из (3.16) выводим оценку, справедливую при всех $h \in (0, h^*)$, $i \in [0 : m]$

$$2\varepsilon_*(\tau_i) \leq \gamma_*(\tau_i) \leq k_{15}\rho + (\alpha + k_{10}\delta)(1 + k_{14}\delta\alpha^{-2})U^{(i)}. \quad (3.18)$$

В свою очередь, из (3.18) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_i} |u^h(\tau)|_r^2 d\tau &\leq (1 + k_{10}\delta\alpha^{-1})(1 + k_{14}\delta\alpha^{-2})U^{(i)} + k_{15}\rho\alpha^{-1} \\ &\leq \left(1 + k_{16}\frac{\delta}{\alpha^2}\right)U^{(i)} + k_{15}\rho\alpha^{-1}, \quad i \in [0 : m], \quad h \in (0, h^*). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Положив $i = m$, получим неравенство (3.3). Проверим неравенство (3.2). При $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ верна оценка

$$(2\varepsilon_*(t))^{1/2} \leq (2\varepsilon_*(\tau_i))^{1/2} + I_{t,i} + \left| \int_{\tau_i}^t B\{u_i^h - u(\tau)\} d\tau \right|_N, \quad (3.20)$$

где (см. (3.5))

$$I_{t,i} = \int_{\tau_i}^t |f_1(\tau, x(\tau), y(\tau)) - f_1(\tau_i, \phi^\nu(\tau), \xi_i^h)|_n d\tau \leq \delta L \left(h + \delta + \nu + \int_{\tau_i}^t |\dot{y}(\tau)|_N d\tau \right). \quad (3.21)$$

Поэтому из (3.20), воспользовавшись неравенством (3.21), а также неравенством

$$\max_{i \in [0:m-1]} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |Bu(t)|_N dt \leq k_{17} \delta^{1/2},$$

получаем $(2\varepsilon_*(t))^{1/2} \leq (2\varepsilon_*(\tau_i))^{1/2} + k_{18} \{\delta\nu + \delta|u_i^h|_r + \delta^{1/2}\}$. Таким образом,

$$2\varepsilon_*(t) \leq k_{19} \{\varepsilon_*(\tau_i) + \delta + \delta^2|u_i^h|_r^2 + \delta^2\nu^2\}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]. \quad (3.22)$$

Далее, в силу (3.4) имеем

$$\delta^2|u_i^h|_r^2 \leq 2b_*^2 \delta^2 \alpha^{-2} (h^2 + 2\varepsilon_*(\tau_i)) \leq k_{20} (h^2 + \varepsilon_*(\tau_i)). \quad (3.23)$$

Значит, ввиду (3.22), (3.23) при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ справедливо неравенство

$$2\varepsilon_*(t) \leq k_{21} \{\varepsilon_*(\tau_i) + \delta + \delta^2\nu^2\}.$$

Отсюда и из (3.18) получаем

$$2\varepsilon_*(t) \leq k_{22} \left(\rho + \delta + \delta^2\nu^2 + (\alpha + k_{10}\delta)(1 + k_{14}\delta\alpha^{-2}) \int_0^t |u(\tau)|_r^2 d\tau \right) \leq k_{23} \rho_1(\alpha, \delta, h, \nu), \quad t \in T.$$

Неравенство (3.2) следует из последнего неравенства. Лемма доказана.

С помощью леммы 2 стандартным образом (см., например, [6]) может быть доказана

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 2. Пусть также

$$\rho_1(\alpha(h), \delta(h), h, \nu(h)) \rightarrow 0, \quad \nu(h) \rightarrow 0,$$

$$\rho(\alpha(h), \delta(h), h, \nu(h)) \alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Тогда имеет место сходимость $u^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot)$ при $h \rightarrow 0$.

4. Оценка скорости сходимости алгоритма

При некоторых дополнительных условиях может быть выписана оценка скорости сходимости алгоритма.

Лемма 3. Пусть $u(\cdot)$ — функция ограниченной вариации, $N \geq r$, $\text{rank} B = r$. Пусть также выполнены условия леммы 2. Тогда можно указать константу $C_4 > 0$ такую, что при всех $h \in (0, h_1)$ верно неравенство

$$\int_0^{\vartheta} |u^h(\tau) - u(\tau)|_r^2 d\tau \leq C_4 \rho_0(\alpha, \delta, h, \nu) + C_3 \rho(\alpha, \delta, h, \nu) \alpha^{-1}.$$

где $\rho_0(\alpha, \delta, h, \nu) = \alpha^{1/2} + \delta^{1/2} + h\delta^{-1/2} + \alpha\nu\delta^{-1/4} + \nu\delta$, константа C_3 та же, что и в (3.3).

Доказательство. Учитывая липшицевость функции f_1 , а также лемму 2, заключаем, что для любых $t_1, t_2 \in T, t_1 < t_2$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} B(u^h(t) - u(t)) dt \right|_N &= \left| \int_{t_1}^{t_2} [\dot{w}^h(\tau) - \dot{y}(\tau) - f_1(\tau, \phi^\nu(\tau), \xi^h(\tau)) + f_1(\tau, x(\tau), y(\tau))] d\tau \right|_N \\ &\leq |\mu_h(t_2) - \mu_h(t_1)|_N + k^{(1)} \left(\int_{t_1}^{t_2} [|\xi^h(\tau) - y(\tau)|_N + |\phi^\nu(\tau) - x(\tau)|_n] d\tau + \delta \right) \\ &\leq |\mu_h(t_2) - \mu_h(t_1)|_N + k^{(2)} \int_{t_1}^{t_2} (|\mu_h(\tau)|_N + h + \delta + \nu) d\tau, \end{aligned}$$

где $\mu_h(t) = w^h(t) - y(t), \xi^h(\tau) = \xi_i^h$ при п.в. $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Кроме того, в силу леммы 3 (см., (3.2)) имеем $|\mu_h(t)|_N = (2\varepsilon_*(t))^{1/2} \leq C_1^{1/2} \rho_1^{1/2}(\alpha, \delta, h, \nu)$. Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} (u^h(t) - u(t)) dt \right|_r &\leq k^{(3)} \left| \int_{t_1}^{t_2} B(u^h(t) - u(t)) dt \right|_N \leq k^{(4)} \{ \rho_1^{1/2}(\alpha, \delta, h, \nu) + h + \delta + \nu \} \quad (4.1) \\ &\leq k^{(5)} \rho_0(\alpha, \delta, h, \nu). \end{aligned}$$

Снова воспользовавшись леммой 2 (см. (3.3)), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\vartheta |u^h(\tau) - u(\tau)|_r^2 d\tau &= \int_0^\vartheta |u^h(\tau)|_r^2 d\tau - 2 \int_0^\vartheta (u^h(\tau), u(\tau)) d\tau + \int_0^\vartheta |u(\tau)|_r^2 d\tau \\ &\leq (2 + C_2 \alpha \delta^{-2}) \int_0^\vartheta |u(\tau)|_r^2 d\tau - 2 \int_0^\vartheta (u^h(\tau), u(\tau)) d\tau + C_3 \rho(\alpha, \delta, h, \nu) \alpha^{-1} \\ &= 2 \int_0^\vartheta (u(\tau) - u^h(\tau), u(\tau)) d\tau + C_2 \alpha \delta^{-2} \int_0^\vartheta |u(\tau)|_r^2 d\tau + C_3 \rho(\alpha, \delta, h, \nu) \alpha^{-1}, \quad t \in T. \end{aligned}$$

В силу леммы 1, учитывая (4.1), имеем $\sup_{t \in T} \left| \int_0^t (u(\tau) - u^h(\tau), u(\tau)) d\tau \right| \leq k^{(6)} \rho_0(\alpha, \delta, h, \nu)$. Таким образом, при всех $h \in (0, h_1), t \in T$ верно неравенство

$$\int_0^\vartheta |u^h(\tau) - u(\tau)|_r^2 d\tau \leq 2k^{(6)} \rho_0(\alpha, \delta, h, \nu) + C_3 \rho(\alpha, \delta, h, \nu) \alpha^{-1}. \quad (4.2)$$

Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Нетрудно проверить, что справедлива следующая лемма.

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 2. Пусть также $\chi \in (0, 1/2)$. Если $\delta(h) = h, \alpha(h) = h^{1/2-\chi}(h)$, то можно указать такое число $h_2 \in (0, h_1)$, что при всех $h \in (0, h_2)$ для некоторых положительных $C_5 - C_7$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \rho(\alpha(h), \delta(h), h, \nu(h)) \alpha^{-1}(h) &\leq C_5 h^{1/2-\chi}, \\ \rho_1(\alpha(h), \delta(h), h, \nu(h)) &\leq C_6 h^{1/2-\chi}, \quad \rho_0(\alpha(h), \delta(h), h, \nu(h)) \leq C_7^{1/4-\chi/2}. \end{aligned}$$

В таком случае из лемм 2 и 4 вытекает

Следствие. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда существует $C_8 > 0$ такое, что имеет место неравенство

$$\int_0^{\vartheta} |u^h(t) - u(t)|_r^2 dt \leq C_8 h^{1/4 - \chi/2}.$$

5. Пример

Пусть в системе (1.1) $x(t) = \dot{z}(t)$. При этом функция $z(\cdot)$ неизвестна. Известны лишь ее свойства: $\dot{z}(0) = 0$, $\ddot{z}(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$. В моменты τ_i измеряются ее значения с ошибкой h , т. е. вычисляются векторы $\psi_i^h \in \mathbb{R}^n$ такие, что $|\psi_i^h - z(\tau_i)|_n \leq h$. Задача состоит в восстановлении возмущения $u(\cdot)$, порождающего решение $y(\cdot)$ системы (1.1) по измерениям $z(\tau_i)$ и $y(\tau_i)$.

Для решения задачи можно воспользоваться описанным выше алгоритмом, восстанавливая $u_*(\cdot)$ — минимальный в $L_2(T; \mathbb{R}^r)$ элемент множества

$$U(y(\cdot), z(\cdot)) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r) : \dot{y}(t) = f_1(t, y(t), \dot{z}(t)) + Bu(t) \text{ при п.в. } t \in T\}.$$

Вместе с функцией $\alpha = \alpha(h)$ фиксируем функцию $\alpha_1 = \alpha_1(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$. Наряду с моделью (2.2) введем еще одну вспомогательную систему следующего вида:

$$\dot{w}_1^h(t) = u_1^h(t), \quad t \in T.$$

Начальное состояние этой системы $w_1^h(0) = 0$. Управление $u_1^h(\cdot)$ будем вычислять по правилу

$$u_1^h(t) = u_i^h = -\frac{w_1^h(\tau_i) - \psi_i^h}{\alpha_1(h)}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Из результатов [15] (см. теорему 5) следует справедливость неравенства

$$\sup_{t \in T} |u_1^h(t) - \dot{z}(t)|_n \leq \nu(h), \quad (5.1)$$

где $\nu(h) = C_9\{\alpha_1(h) + (h + \delta(h))\alpha_1^{-1}(h)\}$. В таком случае можно считать ($\nu = \nu(h)$) $\phi^\nu(t) = u_1^h(t)$, $t \in T$. Тогда в силу теоремы 1, если выполнены следующие условия согласования параметров

$$\begin{aligned} \alpha(h) \rightarrow 0, \quad \alpha_1(h) \rightarrow 0, \quad h^2\delta^{-1}(h) \rightarrow 0, \quad \alpha^2(h)\alpha_1^2(h)\delta^{-1}(h) \rightarrow 0, \\ \alpha^2(h)(h^2 + \delta^2(h))\alpha_1^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

имеет место сходимость $u^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot)$ в $L_2(T; \mathbb{R}^r)$ при $h \rightarrow 0$. В свою очередь, соотношения (5.2) выполнены, например, если

$$\delta(h) = C_{10}h, \quad \alpha(h) = C_{11}h^\mu \quad (\mu = \text{const} \in (0, 1)), \quad \alpha_1(h) = C_{12}h^{1/4}.$$

При этом $\nu(h) \leq C_{13}h^{1/2}$, $\alpha^2(h)\nu^2(h)\delta(h) \leq C_{14}h^{2\mu}$. Заметим, что в данном примере величина $z(t)$ измеряется в дискретные моменты времени. Однако, роль $\phi^\nu(\cdot)$ играет функция $u_1^h(\cdot)$, которая по величинам ψ_i^h определяется для всех $t \in T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. Kurzhanski A., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1996. 284 p.

3. **Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф.** Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2018. 193 с.
4. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 29–161.
5. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
6. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем / УрО РАН. Екатеринбург, 2011. 291 с.
7. **Максимов В.И., Пандолфи Л.** О реконструкции неограниченных управлений в нелинейных динамических системах // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, № 4. С. 385–390.
8. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Об одном алгоритме динамического восстановления входного воздействия // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 1. С. 88–100.
9. **Maksimov V.I.** On dynamical reconstruction of an input in a linear system under measuring a part of coordinates // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2018. Vol. 26, no. 3. P. 395–410.
10. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Об одном алгоритме реконструкции траектории и управления в системе с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 109–122.
11. **Каппель Ф., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Динамическая реконструкция состояний и гарантирующее управление системой реакции-диффузии // Докл. АН. 2000. Т. 370, № 5. С. 599–601.
12. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
13. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978. 285 с.
14. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
15. **Максимов В.И.** О вычислении производной функции заданной неточно с помощью законов обратной связи // Тр. МИРАН. 2015. Т. 291. С. 231–243.
16. **Fang H., Shi Y., Yu J.** On stable simultaneous input and state estimation for discrete-time linear systems // Internat. J. Adaptiv. Contr. Signal Proc. 2011. Vol. 25, no. 8. P. 671–686.
17. **Keller J.Y., Chabir K., Sauter D.** Input reconstruction for networked control systems subject to deception attacks and data losses on control signals // Int. J. Syst. Sci. 2016. Vol. 47, no 4. P. 814–820.
18. **Keller J.Y., Sauter D.** Kalman filter for discrete-time stochastic linear systems subject to intermittent unknown inputs // IEEE Trans. Autom. Contr. 2013. Vol. 58, no. 7. P. 1882–1887.
19. **Chabir K., Sid M.A., and Sauter D.** Fault diagnosis in a networked control system under communication constraints: A quadrotor applications // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2014. Vol. 24, no. 4. P. 809–820.

Поступила 5.10.2019

После доработки 13.01.2020

Принята к публикации 20.01.2020

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
2. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Basel: Birkhäuser, 1997, 321 p. ISBN: 978-0-8176-3699-9.

3. Ananyev B.I., Gusev M.I., Filippova T.F. *Upravlenie i otsenivanie sostoyanii dinamicheskikh sistem s neopredelennost'yu* [Control and estimation of dynamical systems states with uncertainty]. Novosibirsk: Siberian Branch of RAS Publ., 2018, 193 p.
4. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. Some algorithms for the dynamic reconstruction of inputs. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 86–120. doi: 10.1134/S0081543811090082.
5. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions*. Basel: Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 2881249442.
6. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., and Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem* [Methods for dynamic reconstruction of inputs of control systems]. Ekaterinburg: Ural Branch of RAS Publ., 2011, 291 p.
7. Maksimov V.I., Pandolfi L. The reconstruction of unbounded controls in nonlinear dynamical systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 2001, vol. 65, no. 3, pp. 371–376.
8. Blizorukova M.S., Maksimov V.I. On an algorithm for dynamic reconstruction of the input. *Diff. Eq.*, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 88–100. doi: 10.1134/S0012266113010096.
9. Maksimov V.I. On dynamical reconstruction of an input in a linear system under measuring a part of coordinates. *J. Inverse and Ill-Posed Problems*, 2018, vol. 26, no. 3, pp. 395–410. doi: 10.1515/jiip-2017-0118.
10. Blizorukova M.S., Maksimov V.I. On a reconstruction algorithm for the trajectory and control in a delay system. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, vol. 280, no. 1, pp. 66–79. doi: 10.1134/S0081543813020065.
11. Kappel F., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. Dynamic reconstruction of states, and the guaranteeing control of a reaction-diffusion system. *Dokl. Math.*, 2000, vol. 61, no. 1, pp. 143–145.
12. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*. Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
13. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for Solutions of Ill-Posed Problems*. N Y: Wiley, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240. Original Russian text (2nd ed.) published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*. Moscow: Nauka Publ., 1978, 285 p.
14. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications*. Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002, 281 p. ISBN: 90-6764-367-X/hbk. Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya*. Moscow: Nauka Publ., 1978, 206 p.
15. Maksimov V.I. Calculation of the derivative of an inaccurately defined function by means of feedback laws. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 219–231. doi: 10.1134/S0081543815080179.
16. Fang H., Shi Y., Yu J. On stable simultaneous input and state estimation for discrete-time linear systems. *Internat. J. Adaptiv. Contr. Signal Proc.* 2011, vol. 25, no. 8, pp. 671–686.
17. Keller J.Y., Chabir K., Sauter D. Input reconstruction for networked control systems subject to deception attacks and data losses on control signals. *Int. J. Syst. Sci.*, 2016, vol. 47, no. 4, pp. 814–820.
18. Keller J.Y., Sauter D. Kalman filter for discrete-time stochastic linear systems subject to intermittent unknown inputs. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 2013, vol. 58, no. 7, pp. 1882–1887.
19. Chabir K., Sid M.A., and Sauter D. Fault diagnosis in a networked control system under communication constraints: A quadrotor applications. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2014, vol. 24, no. 4, pp. 809–820.

Received November 5, 2019

Revised January 13, 2020

Accepted January 20, 2020

Vyacheslav Ivanovich Maksimov Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru.

Cite this article as: V.I. Maksimov. On an algorithm for the reconstruction of a perturbation in a nonlinear system, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 156–166.

УДК 517.977

О МАКСИМАЛЬНОМ ГАРАНТИРОВАННОМ ВЫИГРЫШЕ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КОНФЛИКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОШАГОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ

М. С. Никольский

В статье рассматриваются многошаговые конфликтно управляемые процессы с двумя управляющими субъектами. Продолжительность процесса фиксирована и нет ограничения на правый конец дискретной траектории. Первый игрок стремится к максимизации терминального функционала, причем информация о будущем поведении второго игрока отсутствует. В статье изучается важное понятие максимального гарантированного выигрыша первого игрока с помощью идей беллмановского метода динамического программирования. В теореме 1 при широких предположениях относительно изучаемого конфликтно управляемого процесса с помощью метода динамического программирования получена формула для искомого максимального гарантированного выигрыша. В теореме 2 получены достаточные условия, обеспечивающие липшицевость соответствующих функций беллмановского типа. Для иллюстрации рассмотрено два примера.

Ключевые слова: многошаговые управляемые процессы, конфликт, динамическое программирование.

M. S. Nikol'skii. On the maximal guaranteed payoff in some problems of conflict control of multistep processes.

We consider multistep conflict-controlled processes with two controlling partners. The duration of the process is fixed, and there are no constraints on the right end of the discrete trajectory. The first player aims to maximize the terminal functional without information about the future behavior of the second player. We study the important notion of maximal guaranteed payoff of the first player using the ideas of Bellman's dynamic programming method. Based on this method, a formula for the maximal guaranteed payoff is derived in Theorem 1 under broad assumptions on the conflict-controlled process. In Theorem 2, we obtain sufficient conditions under which the corresponding functions of Bellman type are Lipschitz. Two examples are considered.

Keywords: discrete controlled processes, conflict, dynamical programming.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-167-172

Введение

Теория многошаговых управляемых процессов является важным разделом современной математической теории управления. Имеются определенные связи и аналоги этой теории с теорией оптимального управления непрерывными динамическими системами. Многошаговые управляемые процессы с успехом используются, например, при моделировании экономических процессов, развивающихся во времени, так как в экономике текущее время часто квантуется по периодам день, неделя и так далее. Помимо управляемых многошаговых процессов в теории управления интересным и актуальным объектом изучения являются конфликтно управляемые многошаговые процессы. Они оказываются полезными, в частности, при изучении управляемых многошаговых процессов при наличии разного рода возмущений, поведение которых не предсказуемо.

Отметим, что современная теория дифференциальных игр тесно связана с теорией конфликтно управляемых многошаговых процессов.

Многошаговые конфликтно управляемые процессы (см., например, [1–3]) представляют значительный интерес при моделировании конфликтных процессов, развивающихся во времени. При их изучении оказываются полезными общие концепции теории игр и теории многошаговых управляемых процессов. Следует также отметить глубокие связи между теорией

многошаговых конфликтно управляемых процессов и теорией дифференциальных игр (см., например, [1; 2; 4]).

В статье изучается важное понятие максимального гарантированного выигрыша с точки зрения первого игрока в играх двух лиц, описываемых конфликтно управляемым многошаговым процессом. В теореме 1 при широких предположениях с помощью метода динамического программирования, восходящего к работам Р. Беллмана, получена формула для искомого максимального гарантированного результата. В теореме 2 найдены конструктивные достаточные условия, при которых соответствующие функции беллмановского типа, участвующие в построении максимального гарантированного результата, удовлетворяют условию Липшица. Этот результат полезен при приближенных вычислениях искомого максимального гарантированного результата.

1. Условимся символом \mathbb{R}^k ($k \geq 1$) обозначать арифметическое евклидово пространство, элементами которого являются упорядоченные столбцы из k чисел, со стандартным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Для $y \in \mathbb{R}^k$ под символом $|y|$ будем понимать стандартную длину вектора y .

Далее рассматривается многошаговый конфликтно управляемый процесс (см., например, [1–3]) вида

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t, v_t), \quad (1)$$

где $t = 0, \dots, N-1$ ($N \geq 1$), $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in P \subset \mathbb{R}^p$, P — компакт в \mathbb{R}^p ; $v_t \in Q \subset \mathbb{R}^q$, Q — компакт в \mathbb{R}^q ; $f(x, u, v)$ — n -мерная векторная функция, определенная и непрерывная по совокупности переменных на $\mathbb{R}^n \times P \times Q$.

Для конфликтно управляемого процесса (1) фиксировано начальное условие

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Процесс движения вектора x_t (см. (1), (2)) рассматривается с точки зрения первого игрока, распоряжающегося выбором вектора $u \in P$, причем он стремится к максимизации терминального функционала $\varphi(x_N)$, где функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна на \mathbb{R}^n . Предполагается, что первый игрок знает функции $f(x, u, v)$, $\varphi(x)$ и в каждый момент $t = 0, \dots, N-1$ знает текущий фазовый вектор x_t . На основании доступной ему информации он старается выбрать функции $u_t(x) \in P$ ($t = 0, \dots, N-1$, $x \in \mathbb{R}^n$) так, чтобы обеспечить как можно большее значение критерия $\varphi(x_N)$. Предполагается далее, что второй игрок знает функцию $f(x, u, v)$ и в каждый момент $t = 0, \dots, N-1$ знает текущий фазовый вектор x_t . В качестве стратегий второго игрока выступают всевозможные функции $v_t(x) \in Q$ ($t = 0, \dots, N-1$, $x \in \mathbb{R}^n$). О целях второго игрока никаких специальных предположений не делается.

Отметим, что об аналитических свойствах функций $u_t(x)$, $v_t(x)$ по переменным (t, x) также никаких специальных предположений не делается.

Заметим, что для конфликтно управляемого процесса (1), (2) при произвольных допустимых стратегиях

$$U = \{u_0(x), \dots, u_{N-1}(x)\}, \quad V = \{v_0(x), \dots, v_{N-1}(x)\}$$

на выходе мы получаем однозначно определенный вектор $x_N(U, V)$ и, следовательно, значение функции выигрыша первого игрока $\varphi(x_N(U, V))$.

Качество (гарантированный выигрыш) произвольной допустимой стратегии U естественно оценить величиной

$$\alpha(U) = \inf_V \varphi(x_N(U, V)). \quad (3)$$

Здесь V — произвольная допустимая стратегия второго игрока. Предельные возможности первого игрока можно оценить величиной (максимальный гарантированный выигрыш)

$$\beta = \sup_U \alpha(U), \quad (4)$$

где U — произвольная допустимая стратегия первого игрока. Подчеркнем, что из непрерывности функции $f(x, u, v)$ на $\mathbb{R}^n \times P \times Q$ при любых парах стратегий (U, V) игроков получаем равномерную оценку

$$|x_N(U, V)| \leq c_1,$$

где c_1 — некоторая неотрицательная константа. Следовательно, в силу непрерывности $\varphi(x)$ на \mathbb{R}^n имеем равномерную оценку при любых допустимых стратегиях U, V вида

$$|\varphi(x_N(U, V))| \leq c_2,$$

где c_2 — некоторая неотрицательная константа. Из непрерывности $\varphi(x)$ и сказанного вытекает, что величины $\alpha(U)$, β (см. (3), (4)) являются конечными.

Проблема вычисления величины β представляет большой интерес для теории многошаговых конфликтно управляемых процессов. Этой проблеме посвящен п. 2.

2. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Пусть скалярная функция $g(x, u, v)$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n \times P \times Q$, где P — компакт из \mathbb{R}^p , Q — компакт из \mathbb{R}^q . Тогда функция

$$h(x, u) = \min_{v \in Q} g(x, u, v) \quad (5)$$

непрерывна на $\mathbb{R}^n \times P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1 при наложенных условиях следует из равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте. \square

Лемма 2. В условиях леммы 1 функция

$$k(x) = \max_{u \in P} h(x, u) \quad (6)$$

определена и непрерывна на \mathbb{R}^n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма 2 вытекает из леммы 1 и свойств рассматриваемых функций. \square

Для нахождения величины β , определенной формулой (4), рассмотрим последовательность скалярных функций беллмановского типа на \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} L_N(x) &= \varphi(x), \\ L_t(x) &= \max_{u \in P} \min_{v \in Q} (L_{t+1}(f(x, u, v))), \end{aligned} \quad (7)$$

где $t = N - 1, \dots, 0$. Отметим, что согласно леммам 1, 2 функции $L_{N-1}(x), \dots, L_0(x)$ при сделанных предположениях о $f(x, u, v)$, $\varphi(x)$ определены и непрерывны на всем \mathbb{R}^n .

Обозначим при $x \in \mathbb{R}^n$ через $\tilde{u}_t(x)$ ($t = 0, \dots, N - 1$) один из максимизаторов по $u \in P$ функции $\min_{v \in Q} (L_{t+1}(f(x, u, v)))$, а через $\tilde{v}_t(x)$ ($t = 0, \dots, N - 1$) — один из минимизаторов по $v \in Q$ функции $L_{t+1}(f(x, \tilde{u}_t(x), v))$. Наборы функций $\tilde{u}_t(x)$, $\tilde{v}_t(x)$, $t = 0, \dots, N - 1$, образуют стратегии \tilde{U} , \tilde{V} .

Теорема 1. Для конфликтно управляемого процесса (1), (2) имеют место следующие равенства

$$\beta = L_0(x_0), \quad \beta = \alpha(\tilde{U}),$$

где β , $L_0(x_0)$ и $\alpha(U)$ определены в (3), (4) и (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства равенства $\beta = L_0(x_0)$ можно использовать схему доказательства соответствующего утверждения в [3, с. 140–141]. При этом оказывается, что

$$\varphi(x_N(\tilde{U}, \tilde{V})) \geq L_0(x_0) \quad (8)$$

для любой допустимой стратегии V , причем

$$\varphi(x_N(\tilde{U}, \tilde{V})) = L_0(x_0) \quad (9)$$

и, далее,

$$\varphi(x_N(U, \hat{V}(U))) \leq L_0(x_0) \quad (10)$$

для любой допустимой стратегии U . Здесь стратегия

$$\hat{V}(U) = (\hat{v}_0(x), \dots, \hat{v}_{N-1}(x))$$

при $t = 0, \dots, N-1$ определяется как один из минимизаторов функции $L_{t+1}(f(x, u_t(x), v))$ по $v \in Q$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Из равенства $\beta = L_0(x_0)$ и соотношений (8)–(10) вытекает равенство $\beta = \alpha(\tilde{U})$. \square

3. Приведем два примера вычисления величины β .

П р и м е р 1. Пусть многошаговый конфликтно управляемый процесс (1) имеет вид

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Cv_t,$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in P \subset \mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$), $v_t \in Q \subset \mathbb{R}^q$ ($q \geq 1$), $t = 0, \dots, N-1$ ($N \geq 1$), причем P и Q — компакты, A, B, C — матрицы размерности $n \times n$, $n \times p$, $n \times q$ соответственно. Пусть функция $\varphi(x)$ имеет вид $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$, где $a \in \mathbb{R}^n$ — фиксированный вектор. Отметим, что для произвольных допустимых стратегий U, V справедлива формула

$$x_N(U, V) = A^N x_0 + A^{N-1}(Bu_0(x_0) + Cv_0(x_0)) + \dots \\ \dots + (Bu_{N-1}(x_{N-1}) + Cv_{N-1}(x_{N-1})), \quad (11)$$

которая доказывается по индукции. Несложные рассуждения позволяют последовательно вычислить функции $L_t(x)$, $t = N-1, \dots, 0$ вида (7), при $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$ и в результате (с учетом (11)) получаем

$$L_0(x) = \langle a, A^N x \rangle + (\max_{u \in P} \langle a, A^{N-1} Bu \rangle + \min_{v \in Q} \langle a, A^{N-1} Cv \rangle) + \dots \\ \dots + (\max_{u \in P} \langle a, Bu \rangle + \min_{v \in Q} \langle a, Cv \rangle),$$

т. е. $L_0(x) = \langle a, A^N x \rangle + \gamma$, где γ — некоторая эффективно вычисляемая константа.

П р и м е р 2. Пусть конфликтно управляемый процесс (1) имеет вид

$$x_{t+1} = u_t x_t + v_t,$$

где $x_t \in \mathbb{R}^1$, $u_t \in P = [-1, 1]$, $v_t \in Q = [-\mu, \mu]$ ($\mu > 0$), $N = 2$. Пусть функция $\varphi(x) = x$. В этом примере

$$L_2(x) = x, \quad L_1(x) = |x| - \mu, \\ L_0(x) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} (|ux + v| - \mu). \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что при $|x| \geq \mu$ $L_0(x) = |x| - 2\mu$, а при $|x| \leq \mu$ $L_0(x) = -\mu$.

4. В этом пункте мы кратко остановимся на проблеме вычисления функций $L_t(x)$, $t = N-1, \dots, 0$, при $N \geq 1$ (7). В п. 2 мы уже отмечали, что при сделанных ранее предположениях функции $L_N(x), L_{N-1}(x), \dots, L_0(x)$ определены и непрерывны на \mathbb{R}^n . Это обстоятельство открывает определенные возможности при приближенных вычислениях этих функций сеточным методом. Оказывается, что при некотором усилении требований на функции $\varphi(x)$, $f(x, u, v)$ можно гарантировать липшицевость функций $L_N(x), L_{N-1}(x), \dots, L_0(x)$ на \mathbb{R}^n (см. далее теорему 2). Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся дополнительные вспомогательные утверждения.

Лемма 3. Пусть скалярная функция $g(x, u, v)$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n \times P \times Q$, где P, Q — компакты из $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ соответственно. Пусть функция $g(x, u, v)$ липшицева по $x \in \mathbb{R}^n$ равномерно относительно $u \in P, v \in Q$, т. е. существует такая константа $l \geq 0$, что при произвольных $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ и произвольных $u \in P, v \in Q$ имеет место неравенство

$$|g(x', u, v) - g(x'', u, v)| \leq l|x' - x''|. \quad (13)$$

Тогда функция $h(x, u)$, определенная в (5), является непрерывной на $\mathbb{R}^n \times P$ и липшицевой по $x \in \mathbb{R}^n$ равномерно относительно $u \in P$ с константой l .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непрерывность функции $h(x, u)$ на $\mathbb{R}^n \times P$ была установлена в лемме 1. Пусть x', x'' — произвольные векторы из \mathbb{R}^n и u — произвольный вектор из P . Имеем

$$h(x', u) - h(x'', u) = g(x', u, v(x', u)) - g(x'', u, v(x'', u)), \quad (14)$$

где $v(x', u)$ — один из минимизаторов функции $g(x', u, v)$ по $v \in Q$ и $v(x'', u)$ — один из минимизаторов функции $g(x'', u, v)$ по $v \in Q$. Из (13), (14) вытекают неравенства

$$h(x', u) - h(x'', u) \leq g(x', u, v(x'', u)) - g(x'', u, v(x'', u)) \leq l|x' - x''|. \quad (15)$$

Аналогичным образом получаем оценку

$$h(x'', u) - h(x', u) \leq l|x' - x''|. \quad (16)$$

Из (15), (16) следует утверждение леммы 3 с липшицевой константой l . \square

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда функция $k(x)$, определенная в (6), удовлетворяет на \mathbb{R}^n условию Липшица с константой l .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непрерывность функции $k(x)$ на \mathbb{R}^n вытекает из леммы 1. Пусть x', x'' — произвольные векторы из \mathbb{R}^n . Имеем

$$k(x') - k(x'') = h(x', u(x')) - h(x'', u(x'')), \quad (17)$$

где $u(x')$ — один из максимизаторов функции $h(x', u)$ по $u \in P$, $u(x'')$ — один из максимизаторов функции $h(x'', u)$ по $u \in P$. Из (6), (17) следуют соотношения

$$k(x') - k(x'') \leq h(x', u(x')) - h(x'', u(x')) \leq l|x' - x''|. \quad (18)$$

Аналогично получаем соотношение

$$k(x'') - k(x') \leq l|x' - x''|. \quad (19)$$

Из (18), (19) вытекает искомая липшицевость $k(x)$ на \mathbb{R}^n с константой l . \square

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть скалярная функция $m(x)$ удовлетворяет условию Липшица на \mathbb{R}^n с константой $l_1 \geq 0$. Пусть векторная функция $f(x, u, v)$ из (1) непрерывна на $\mathbb{R}^n \times P \times Q$ и удовлетворяет условию Липшица по $x \in \mathbb{R}^n$ равномерно относительно пары (u, v) , где $u \in P, v \in Q$, с константой $l_2 \geq 0$. Тогда суперпозиция функций $m(f(x, u, v))$ непрерывна на $\mathbb{R}^n \times P \times Q$ и удовлетворяет условию Липшица по $x \in \mathbb{R}^n$ равномерно по (u, v) , где $u \in P, v \in Q$, с константой $l_1 l_2$.

Лемма 6. Пусть скалярная функция $m(x)$ и векторная функция $f(x, u, v)$ удовлетворяют условиям леммы 5. Тогда функция

$$p(x) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} m(f(x, u, v))$$

удовлетворяет на \mathbb{R}^n условию Липшица с константой $l_1 l_2$.

Доказательство леммы 6 при сделанных предположениях производится очевидным образом с помощью лемм 3–5. \square

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть скалярная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на \mathbb{R}^n условию Липшица, а векторная функция $f(x, u, v)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n \times P \times Q$ и удовлетворяет там условию Липшица по $x \in \mathbb{R}^n$ равномерно относительно пары (u, v) , где $u \in P$, $v \in Q$. Тогда функции $L_0(x), L_1(x), \dots, L_N(x)$ (см. (7)) удовлетворяют условию Липшица на \mathbb{R}^n .

Доказательство Используя формулы (7) и лемму 6, нетрудно обосновать липшицевость функции $L_{N-1}(x)$ на \mathbb{R}^n . При $N > 1$ липшицевость функций $L_{N-2}(x), \dots, L_0(x)$ на \mathbb{R}^n доказывается последовательно с помощью формул (7) и математической индукции. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Изд-во Высшая школа, 1998. 302 с.
2. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оценка рисков и многошаговые позиционные конфликты. М.: Юрайт, 2018. 304 с.
3. Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Динамические модели конфликтов. I. Язык моделирования // Автоматика и телемеханика. 2014. Вып. 11. С. 127–149.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

Поступила 4.11.2019

После доработки 5.02.2020

Принята к публикации 10.02.2020

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
г. Москва
e-mail: mni@mi-ras.ru

REFERENCES

1. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Semina E.A. *Teoriya igr* [Game theory]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1998, 302 p. ISBN: 5-06-001005-8.
2. Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E. *Otsenka riskov i mnogoshagovye pozitsionnye konflikty* [Estimations of risks and multistep position conflicts]. Moscow: Urait Publ., 2018, 304 p. ISBN: 978-5-534-08782-6.
3. Gorelov M.A., Kononenko A.F. Dynamical conflict models. I. Language of modeling. *Autom. Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 11, pp. 1996–2013. doi: 10.1134/S0005117914110083.
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igrы*. Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.

Received November 4, 2019

Revised February 5, 2020

Accepted February 10, 2020

Mikhail Sergeevich Nikolskii, Dr. Phys.-Math. Sci, Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Science, Moscow, 119991 Russia, e-mail: mni@mi-ras.ru.

Cite this article as: M. S. Nikolskii. On the maximal guaranteed payoff in some problems of conflict control of multistep processes, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 167–172.

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ВЫЖИВАЕМОСТИ В ЗАДАЧЕ ХИМИОТЕРАПИИ ЗЛОКАЧЕСТВЕННОЙ ОПУХОЛИ, РАСТУЩЕЙ ПО ЗАКОНУ ГОМПЕРЦА¹

Н. Г. Новоселова, Н. Н. Субботина

Рассматривается задача химиотерапии злокачественной опухоли, растущей по закону Гомперца. Математическая модель имеет вид системы, состоящей из двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуется задача оптимального управления (оптимальной терапии), целью которой является минимизация злокачественных клеток в организме в заданный финальный момент времени T . В работе аналитически построено множество выживаемости этой задачи, т.е. множество начальных состояний модели (объема опухоли и количества лекарства в организме), для которых оптимальное управление гарантирует динамику злокачественной опухоли вплоть до момента времени T в объеме, не превышающем предельный объем, совместимый с жизнью.

Ключевые слова: множество выживаемости, оптимальное управление, функция цены.

N. G. Novoselova, N. N. Subbotina. Construction of the viability set in a problem of chemotherapy of a malignant tumor growing according to the Gompertz law.

The problem of chemotherapy of a malignant tumor growing according to the Gompertz law is considered. The mathematical model is a system of two ordinary differential equations. We study a problem of optimal control (optimal therapy) aiming at the minimization of the malignant cells in the body at a given terminal time T . The viability set of this problem, i.e., the set of initial states of the model (the volume of the tumor and the amount of the drug in the body) for which an optimal control guarantees that the dynamics of the system up to the time T is compatible with life in terms of the volume of the tumor, is constructed analytically.

Keywords: viability set, optimal control, value function.

MSC: 49L25, 49K15, 65K05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-173-181

Введение

Теория оптимального управления имеет более чем полувековую историю (см. пионерские работы [1–3]) и обширнейшую библиографию. Исследования [4–6] законов оптимального управления, наблюдения, оценивания для управляемых систем в условиях неопределенности внесли существенный вклад в развитие этой теории.

Построение в пространстве фазовых состояний управляемой системы множества разрешимости задачи оптимального управления с заданным целевым множеством всегда было одним из приоритетных направлений развития теории оптимального управления и дифференциальных игр (см., например, работы [7–10] и библиографию к ним). Для управляемых систем с нелинейной динамикой построение множества разрешимости задачи оптимального управления удается осуществить, как правило, лишь численно. В данной работе демонстрируется пример аналитического построения множества разрешимости задачи оптимального управления для управляемых систем с нелинейной динамикой. Таких нетривиальных примеров известно мало. Однако аналитика очень полезна, поскольку дает возможность наглядно объяснить ключевые элементы конструкции решения задач оптимального управления. Кроме того, множество разрешимости в задаче химиотерапии, рассматриваемой далее, удовлетворяет фазовым ограничениям, описывающим предельный объем злокачественной опухоли, совместимый с жизнью.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00362).

В данной работе исследуется модель химиотерапии злокачественной опухоли для случая, когда опухоль растет по закону Гомперца [11; 12]. Модель представлена в виде системы из двух нелинейных обыкновенных уравнений. Предполагается, что функция терапии, описывающая воздействие лекарства на клетки опухоли, имеет два максимума, в отличие от случая, рассматриваемого в работе [11], когда немонотонная функция терапии имеет один максимум. Целью терапии является минимизация клеток опухоли в фиксированный конечный момент времени.

В работе [12] для данной модели химиотерапии были построены оптимальная позиционная стратегия химиотерапии и функция цены. Полученные конструкции функции цены и оптимального управления опираются на результаты работ [13; 14].

Целью данной работы является построение множества выживаемости задачи химиотерапии для модели злокачественной опухоли, растущей по закону Гомперца. Множество выживаемости в рассматриваемой задаче химиотерапии — это множество начальных состояний модели (начального объема опухоли и количества лекарства в организме), для которых оптимальное управление гарантирует динамику злокачественной опухоли вплоть до конечного момента времени T в объеме, не превышающем предельный объем, совместимый с жизнью.

1. Общий вид математической модели

Обозначим:

m — число злокачественных клеток;

h — количество химиотерапевтического средства, способного убивать клетки опухоли;

$f(h)$ — функция терапии, описывающая воздействие лекарства на клетки опухоли;

$u(t)$ — количество химиотерапевтического средства, вводимого в опухоль в единицу времени (управление).

Процесс взаимодействия клеток опухоли и химиотерапевтического средства описывается следующей известной моделью [11; 12], где время изменяется в пределах $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = g(m) - \gamma m f(h), & m(t_0) = m_0, \quad \gamma - \text{const} > 0, \\ \frac{dh}{dt} = -\alpha h + u(t), & h(t_0) = h_0, \quad \alpha - \text{const} > 0; \end{cases} \quad (1.1)$$

здесь $g(m) = rm - \theta m \cdot \ln(m)$ — закон Гомперца; $r, \theta - \text{const} > 0$.

Рассмотрим в качестве допустимых управлений измеримые функции $u(\cdot): [t_0, T] \mapsto [0, Q]$, где Q — максимальное количество химиотерапевтического средства, вводимого в опухоль в единицу времени.

Нетрудно увидеть, что при сделанных предположениях решения системы (1.1) продолжимы до момента времени T .

Предполагается, что количество химиотерапевтического средства, вводимого в опухоль в единицу времени, ограничено:

$$0 \leq u(t) \leq Q.$$

Также принимаются следующие ограничения:

$$0 \leq t_0 \leq t \leq T, \quad 0 < m_0 < M, \quad 0 \leq h_0 \leq L,$$

где M — максимальное количество злокачественных клеток в организме, совместимое с жизнью; L — максимальное допустимое количество химиотерапевтического средства в организме.

2. Функция терапии

Рассмотрим немонотонную, непрерывно дифференцируемую, положительную функцию терапии $f(h)$, такую что ее производная $f'(h) = df(h)/dh$ имеет три различных действительных корня: $0 < \hat{h}_1 < \hat{h}_2 < \hat{h}_3 \leq L$, $f'(\hat{h}_i) = 0$.

Предполагаем, что функция терапии $f(h)$ обладает следующими свойствами:

- A1. Если $h < \hat{h}_1$, то $f'(h) > 0$, и если $h > \hat{h}_3$, то $f'(h) < 0$.
- A2. $0 < \alpha \hat{h}_i < Q$, $i = 1, 2, 3$.
- A3. $f(\hat{h}_1) = f(\hat{h}_3)$.

Пусть в рассматриваемой задаче выполняются условия A1–A3. Далее будем исследовать ситуацию, когда

$$\{f'(h) < 0, h \in (\hat{h}_1, \hat{h}_2)\} \cup \{f'(h) > 0, h \in (\hat{h}_2, \hat{h}_3)\}. \quad (2.1)$$

Из условия (2.1) и A1 следует, что корни \hat{h}_1 и \hat{h}_3 — точки максимума, а корень \hat{h}_2 — точка минимума для функции терапии $f(h)$.

Обоснованием исследования немонотонной функции терапии такого вида служит возможность успешного лечения с помощью двух модификаций-поколений однотипного лекарства.

3. Постановка задачи об оптимальной терапии

Задача оптимального управления состоит в построении допустимого управления, минимизирующего терминальную функцию платы в конечный момент времени T :

$$\sigma(m(T)) = m^2(T; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)) \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \quad (3.1)$$

где $m(t) = m(t; t_0, m_0, h_0, u(\cdot))$; $t \in [t_0, T]$ — решение системы (1.1) с начальными условиями (t_0, m_0, h_0) , выработанное под воздействием допустимого управления $u(t)$.

Система (1.1) интегрируется аналитически, поэтому решение $m(t)$ имеет следующий вид:

$$m(t) = m_0^e^{-\theta(t-t_0)} \exp\left(\frac{r}{\theta}(1 - e^{-\theta(t-t_0)})\right) \exp\left(-\gamma \int_{t_0}^t e^{-\theta(t-\tau)} f(h(\tau)) d\tau\right), \quad (3.2)$$

где $h(t) = h(t; t_0, h_0, u(\cdot))$ — решение второго уравнения системы (1.1).

4. Функция цены Val и оптимальный синтез

Введем функцию цены [13; 14] в рассматриваемой задаче (1.1), (3.1), которая каждому начальному состоянию системы $(t_0, h_0, m_0) \in [0, T] \times [0, L] \times [0, M]$ ставит в соответствие оптимальный результат $Val(t_0, h_0, m_0)$ согласно (3.1). Имеем

$$Val(t_0, h_0, m_0) = m_0^2 e^{-\theta(T-t_0)} \exp\left(2\frac{r}{\theta}(1 - e^{-\theta(T-t_0)})\right) \exp(-2\gamma V(t_0, h_0)), \quad (4.1)$$

где $V(t_0, h_0)$ — оптимальный результат в следующей редуцированной задаче оптимального управления:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\alpha h + u(t), \quad h(t_0) = h_0, \\ J_{t_0, h_0}(u(\cdot)) &= \int_{t_0}^T e^{-\theta(T-\tau)} f(h(t; t_0, h_0, u(\cdot))) dt \rightarrow \sup_{u(\cdot)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$(t_0, h_0) \mapsto V(t_0, h_0) = \sup_{u(\cdot)} J_{t_0, h_0}(u(\cdot)).$$

Функция цены $V(t, h)$ конструируется с помощью склеивания нескольких функций φ_i [12]:

$$V(t, h) = \begin{cases} \varphi_1, & (t, h) \in G_1, \\ \varphi_2, & (t, h) \in G_2, \\ \varphi_3, & (t, h) \in \Pi_1, \\ \varphi_4, & (t, h) \in \Pi_2, \\ \varphi_5, & (t, h) \in \Pi_3, \\ \varphi_6, & (t, h) \in \Pi_4, \end{cases}$$

где

$$G_1 = \{(t, h) : t \in [0, T], h = \hat{h}_1\}; \quad G_2 = \{(t, h) : t \in [0, T], h = \hat{h}_3\};$$

$$\Pi_1 = [0, T] \times [0, \hat{h}_1]; \quad \Pi_2 = [0, T] \times (\hat{h}_3, L];$$

$$\Pi_3 = [0, T] \times (\hat{h}_1, x(t)]; \quad \Pi_4 = [0, T] \times (x(t), \hat{h}_3).$$

Здесь график функции $x(t)$ — это линия $\Gamma = \{(t, x(t)) : t \in [0, T], x(T) = \hat{h}_2\}$, образованная точками, в которых $\varphi_5(t, x(t)) = \varphi_6(t, x(t))$.

Функции φ_i , $i = \overline{1, 6}$, строятся с помощью метода характеристик Коши [13; 14] для вспомогательных линейных уравнений Гамильтона — Якоби с краевыми условиями специального вида.

В работе [12] было доказано, что оптимальный синтез в задаче (1.1), (3.1) имеет вид

$$u^0(t, h) = \begin{cases} \alpha \hat{h}_1, & (t, h) \in G_1, \\ \alpha \hat{h}_3, & (t, h) \in G_2, \\ Q, & (t, h) \in \Pi_1, \\ 0, & (t, h) \in \Pi_2, \\ 0, & (t, h) \in \Pi_3, \\ Q, & (t, h) \in \Pi_4 \setminus \Gamma. \end{cases}$$

5. Множество разрешимости

Рассмотрим следующее множество W в задаче (1.1), (3.1):

$$W = \{(t_0, h_0, m_0) \in [0, T] \times [0, L] \times [0, M] : Val(t_0, h_0, m_0) \in [0, M^2]\}. \quad (5.1)$$

Это множество состоит из таких точек (t_0, h_0, m_0) , что, стартуя из них при $t = t_0$ под действием оптимального процесса лечения $u^0(t)$, получаем для оптимальных траекторий $m^0(t) = m(t; t_0, h_0, m_0, u^0(\cdot))$ справедливость следующего утверждения:

$$\sigma(m^0(T)) \leq M^2,$$

где M — критический уровень, т. е. предельное количество злокачественных клеток в организме, совместимое с жизнью.

Для определения значения критического уровня M найдем точки равновесия первого уравнения системы (1.1) при максимальном воздействии лекарства. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dm}{dt} = rm - \theta m \cdot \ln(m) - \gamma m F; \quad (5.2)$$

здесь $F = f(\hat{h}_1) = f(\hat{h}_3) = \max_{h \in [0, L]} f(h)$.

Найдем корни правой части уравнения (5.2). Исключая тривиальный нулевой корень, который создает ситуацию неустойчивого равновесия, получим следующую точку устойчивого равновесия:

$$\tilde{m} = e^{\frac{r-\gamma F}{\theta}}; \quad (5.3)$$

полагаем для данной модели $M = \tilde{m}$ (5.3).

Для построения множества W исследуем точки из разных областей. Рассмотрим сначала точки

$$(t_0, m_0, \hat{h}_1) \in [0, T] \times [0, M] \times [0, L],$$

тогда получим

$$\forall m_0 \in [0, M], t_0 \in [0, T] \quad (t_0, m_0, \hat{h}_1) \in W, \text{ так как } m^0(t; t_0, M, \hat{h}_1) \equiv M \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Если $h_0 = h^* < \hat{h}_1$, $(t_0, h_0) \in \Pi_1$ или $h_0 = h^* > \hat{h}_1$, $(t_0, h_0) \in \Pi_3$, то

$$(t_0, m_0, h^*) \in W \Leftrightarrow \exists t_1 \in (t_0, T]: h^0(t_1; t_0, h^*) = \hat{h}_1 \text{ и } m^0(t_1; t_0, m_0, h^*) \leq M;$$

иначе $m^0(T; t_0, m_0, h^*) \leq M$, где при $h_0 = h^* < \hat{h}_1$

$$m(t) = m_0 e^{-\theta(t-t_0)} \exp\left(\frac{r}{\theta}(1 - e^{-\theta(t-t_0)})\right) \exp\left(-\gamma \int_{t_0}^t e^{-\theta(t-\tau)} f\left(\left(\hat{h}_1 - \frac{Q}{\alpha}\right)e^{\alpha(t-\tau)} + \frac{Q}{\alpha}\right) d\tau\right),$$

а при $h_0 = h^* > \hat{h}_1$

$$m(t) = m_0 e^{-\theta(t-t_0)} \exp\left(\frac{r}{\theta}(1 - e^{-\theta(t-t_0)})\right) \exp\left(-\gamma \int_{t_0}^t e^{-\theta(t-\tau)} f(\hat{h}_1 e^{\alpha(t-\tau)}) d\tau\right).$$

Аналогичным образом рассмотрим точки $(t_0, m_0, \hat{h}_3) \in [0, T] \times [0, M] \times [0, L]$, тогда имеем

$$\forall m_0 \in [0, M], t_0 \in [0, T] \quad (t_0, m_0, \hat{h}_3) \in W, \text{ так как } m^0(t; t_0, M, \hat{h}_3) \equiv M \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Если $h_0 = h^* > \hat{h}_3$, $(t_0, h_0) \in \Pi_2$ или $h_0 = h^* < \hat{h}_3$, $(t_0, h_0) \in \Pi_4$, то

$$(t_0, m_0, h^*) \in W \Leftrightarrow \exists t_2 : h^0(t_2; t_0, h^*) = \hat{h}_3 \text{ и } m^0(t_2; t_0, m_0, h^*) \leq M;$$

иначе $m^0(T; t_0, m_0, h^*) \leq M$, где при $h_0 = h^* < \hat{h}_3$

$$m(t) = m_0 e^{-\theta(t-t_0)} \exp\left(\frac{r}{\theta}(1 - e^{-\theta(t-t_0)})\right) \exp\left(-\gamma \int_{t_0}^t e^{-\theta(t-\tau)} f\left(\left(\hat{h}_3 - \frac{Q}{\alpha}\right)e^{\alpha(t-\tau)} + \frac{Q}{\alpha}\right) d\tau\right),$$

а при $h_0 = h^* > \hat{h}_3$

$$m(t) = m_0 e^{-\theta(t-t_0)} \exp\left(\frac{r}{\theta}(1 - e^{-\theta(t-t_0)})\right) \exp\left(-\gamma \int_{t_0}^t e^{-\theta(t-\tau)} f(\hat{h}_3 e^{\alpha(t-\tau)}) d\tau\right).$$

Таким образом, мы построили множество разрешимости W в задаче (1.1), (3.1), где целевым множеством является множество $\{t = T\} \times [0, L] \times [0, M]$.

Покажем, что построенное множество W является максимальным множеством выживаемости для задачи (1.1), (3.1) и справедлива следующая теорема.

Теорема. *Выполняются следующие утверждения.*

1. Для любых точек $(t_0, h_0, m_0) \in W$ справедливо неравенство $m_0 \leq M$.
2. Множество W вида (5.1) является слабо инвариантным относительно дифференциального включения $\dot{w} \in Y(w)$, где

$$w = (t, h, m) \mapsto Y(w) = (1, g(m) - \gamma m f(h), -\alpha h + [0, Q])^\top. \quad (5.4)$$

3. Для любой точки $w = (t_0, h_0, m_0) \notin W$ и для любой измеримой функции $u(\cdot) : [t_0, T] \mapsto [0, Q]$ существует такой момент времени $t_* \in (t_0, T)$, что выполняется неравенство

$$m(t_*; t_0, h_0, m_0, u(\cdot)) > M.$$

Доказательство. 1. Возьмем точку $(t_0, h_0, m_0) \in W$ и, считая, что $m^0(T) = m^0(T; t_0, h_0, m_0, u^0(\cdot)) \leq M$, выразим m_0 из формулы (3.2):

$$\begin{aligned} m^0(T) &= m_0 e^{-\theta(T-t_0)} \exp\left(\frac{r}{\theta}(1 - e^{-\theta(T-t_0)})\right) \exp(-\gamma V(t_0, h_0)) \\ \implies \ln m^0(T) &= e^{-\theta(T-t_0)} \ln m_0 + \frac{r}{\theta}(1 - e^{-\theta(T-t_0)}) - \gamma V(t_0, h_0) \\ \implies \ln m_0 &\leq e^{\theta(T-t_0)} \left[\ln M - \frac{r}{\theta}(1 - e^{-\theta(T-t_0)}) + \gamma V(t_0, h_0) \right]. \end{aligned}$$

Согласно (5.3) и определению оптимального результата $V(t_0, h_0)$ в редуцированной задаче (4.2) имеем

$$M = e^{\frac{r-\gamma F}{\theta}}, \quad V(t_0, h_0) \leq V(t_0, \hat{h}_1 = \hat{h}_3), \quad V(t_0, \hat{h}_1 = \hat{h}_3) = \frac{F}{\theta}(1 - e^{-\theta(T-t_0)}).$$

Тогда, подставляя эти оценки в предыдущее неравенство, выводим

$$\ln m_0 \leq e^{\theta(T-t_0)} \left[\gamma \left(\frac{F}{\theta}(1 - e^{-\theta(T-t_0)}) - \frac{F}{\theta} \right) + \frac{r}{\theta} e^{-\theta(T-t_0)} \right].$$

Добавим и вычтем в правой части неравенства $\frac{r}{\theta}$ и занесем слагаемое с отрицательным знаком под квадратную скобку, тогда после всех сокращений получаем

$$\begin{aligned} \ln m_0 &\leq e^{\theta(T-t_0)} \left[-\gamma \left(\frac{F}{\theta} e^{-\theta(T-t_0)} \right) \right] + \frac{r}{\theta} \\ \implies \ln m_0 &\leq \frac{r - \gamma F}{\theta} \\ \implies m_0 &\leq e^{\frac{r - \gamma F}{\theta}} = M. \end{aligned}$$

В итоге, мы получили, что для любых точек $(t_0, h_0, m_0) \in W$ справедливо, что $m_0 \leq M$.

2. Из построения множества разрешимости W следует, что все траектории $m^0(t; t_0, h_0, m_0, u^0(\cdot))$, которые стартуют из внутренних точек (t_0, h_0, m_0) множества W , остаются внутри этого множества при всех $t \in [t_0, T]$.

Действительно, если такая траектория пришла в точку (t_*, h_*, m_*) , лежащую на границе множества W , то в силу принципа оптимальности справедливо равенство

$$m^0(T; t_0, h_0, m_0, u^0(\cdot)) = m^0(T; t, h^0(t), m^0(t), u^0(\cdot))$$

для всех $t \in [t_0, T]$, в частности для $t = t_*$, $h^0(t_*) = h_*$, $m^0(t_*) = m_*$. Следовательно,

$$Val(t_*, h_*, m_*) = Val(t, h^0(t), m^0(t)) \leq M^2$$

для всех $t \in [t_*, T]$, т.е. множество W является слабо инвариантным относительно включения (5.4).

Применяя рассуждения и оценки, аналогичные приведенным при доказательстве п. 1 данной теоремы, получим, что

$$m^0(t) \leq e^{\frac{r-\gamma F}{\theta}} = M.$$

3. Возьмем точку $(\bar{t}, \bar{h}, \bar{m}) \notin W$, тогда в соответствии с формулой (4.1) значение функции цены $Val(\bar{t}, \bar{h}, \bar{m})$ при оптимальном управлении $u^0(t)$ будет больше, чем M^2 , т.е.

$$m^0(T; \bar{t}, \bar{h}, \bar{m}, u^0(\cdot)) > M.$$

В этом случае в силу непрерывности траектории $m^0(\cdot; \bar{t}, \bar{h}, \bar{m}, u^0(\cdot))$ существует такой момент времени $t_* \in [\bar{t}, T]$, что

$$m^0(t_*; \bar{t}, \bar{h}, \bar{m}, u^0(\cdot)) > M.$$

Для любой точки $(t_0, h_0, m_0) \notin W$ и для любой измеримой функции $u(\cdot) : [t_0, T] \mapsto [0, Q]$ согласно определению оптимального результата $Val(t_0, h_0, m_0)$ справедливо

$$\sigma(m(T; t_0, h_0, m_0, u(\cdot))) > Val(t_0, h_0, m_0) > M^2.$$

Аналогично предыдущему пункту из непрерывности траектории $m(\cdot; t_0, h_0, m_0, u(\cdot))$ получаем, что

$$m(t_*; t_0, h_0, m_0, u(\cdot)) > M \text{ при } t_* < T.$$

То есть количество злокачественных клеток превышает уровень, совместимый с жизнью, в момент t_* , наступающий раньше заданного конечного момента времени T .

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bellman R.** Dynamic programming. Princeton: Princeton University Press, 1957. 340 p.
2. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М: Наука, 1961. 392 с.
3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М: Наука, 1968. 476 с.
4. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 489 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
7. **Никольский М.С.** Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116, вып. 1. С. 136–144.
8. **Куржанский А.Б., Мельников Н.Б.** О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона — Якоби // Мат. сб. 2000. Т. 191, вып. 6. С. 69–100.
9. **Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Липин А.Е.** Об одном дополнении к определению стабильного моста и аппроксимирующей системы множеств в дифференциальных играх // Тр. МИАН. 2019. Т. 304. С. 285–297.
10. **Patsko V., Kumkov S., Turova V.** Pursuit-evasion games // Handbook of Dynamic Game Theory / eds. T. Basar, G. Zaccour. Cham: Springer, 2018. P. 1–87. doi: 10.1007/978-3-319-27335-8_30-2.
11. **Братусь А.С., Чумерина Е.С.** Синтез оптимального управления в задаче выбора лекарственного воздействия на растущую опухоль // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, вып. 6. С. 946–966.
12. **Subbotina N.N., Novoselova N.G.** The value function in a problem of chemotherapy of a malignant tumor growing according to the Gompertz law // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 855–860.
13. **Субботина Н. Н., Колпакова Е. А., Токманцев Т. Б., Шагалова Л. Г.** Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.

14. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.

Поступила 15.10.2019

После доработки 17.01.2020

Принята к публикации 20.01.2020

Новоселова Наталья Геннадьевна
младший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
аспирант

Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург

e-mail: n.g.novoselova@gmail.com

Субботина Нина Николаевна

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор

Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург

e-mail: subb@uran.ru

REFERENCES

1. Bellman R. *Dynamic Programming*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1957, 340 p. ISBN: 069107951X.
2. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. N Y; London: Interscience Publishers John Wiley & Sons, 1962, 360 p. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*. Moscow: Nauka Publ., 1961, 392 p.
3. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p.
4. Isaacs R. *Differential games*. N Y: John Wiley and Sons, 1965, 384 p. ISBN: 0471428604. Translated to Russian under the title *Differentsial'nye igry*. Moscow: Mir Publ., 1967, 479 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*. Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
6. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
7. Nikol'skii M.S. On the alternating integral of Pontryagin. *Math. USSR-Sb.*, 1983, vol. 44, no. 1, pp. 125–132. doi: 10.1070/SM1983v044n01ABEH000956.
8. Kurzhanskii A.B., Melnikov N.B. On the problem of control synthesis: the Pontryagin alternating integral and the Hamilton–Jacobi equation. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 6, pp. 849–881. doi: 10.1070/sm2000v191n06ABEH000484.
9. Ushakov V.N., Ukhobotov V.I., Lipin A.E. An Addition to the Definition of a Stable Bridge and an Approximating System of Sets in Differential Games. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, vol. 304, pp. 268–280. doi: 10.1134/S0081543819010206.
10. Patsko V., Kumkov S., Turova V. Pursuit-evasion games. In: Basar T., Zaccour G. (eds), *Handbook of Dynamic Game Theory*, Cham: Springer, 2018, pp. 1–87. doi: 10.1007/978-3-319-27335-8_30-2.
11. Bratus' A.S., Chumerina E.S. Optimal control synthesis in therapy of solid tumor growth. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 6, pp. 892–911. doi: 10.1134/S096554250806002X.
12. Subbotina N.N., Novoselova N.G. The value function in a problem of chemotherapy of a malignant tumor growing according to the Gompertz law. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 855–860. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.438.

13. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniya Gamil'tona — Yakobi — Bellmana* [The method of characteristics for Hamilton — Jacobi — Bellman equations]. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2013, 244 p.
14. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective*. Basel: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1. Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka: Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*. Moscow; Izhevsk: Inst. Komp'yuter. Issled. Publ., 2003, 336 p.

Received October 15, 2019

Revised January 17, 2020

Accepted January 20, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00362).

Natal'ja Gennad'evna Novoselova, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: n.g.novoselova@gmail.com .

Nina Nikolaevna Subbotina, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: subb@uran.ru .

Cite this article as: N. G. Novoselova, N. N. Subbotina. Construction of the viability set in a problem of chemotherapy of a malignant tumor growing according to the Gompertz law, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 173–181 .

УДК 517.977

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ
ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА****В. С. Пацко, А. А. Федотов**

Рассматривается трехмерное множество достижимости “в момент” для управляемого объекта “машина Дубинса” (другое название – unicycle). Изучается случай, когда повороты возможны в обе стороны. Для такого случая в предыдущих статьях авторов на основе принципа максимума Понтрягина выделены шесть типов кусочно-постоянных программных управлений, которыми можно ограничиться при изучении границы множества достижимости $G(t_f)$ в заданный момент времени t_f . Такие управления были использованы для численного построения множества достижимости и его визуализации. Однако аналитического описания границы множества $G(t_f)$ не было получено. Данная работа посвящена выводу формул для двумерных сечений множества $G(t_f)$ по угловой координате, которые, вообще говоря, не являются выпуклыми. Проанализирована структура указанных сечений. При записи динамики в нормированных координатах аналитическое описание получено в предположении $t_f \leq 2\pi$. Для этого случая сформулирована теорема о необходимых и достаточных условиях перевода движения на границу множества $G(t_f)$. Случай $t_f > 2\pi$ пока не охвачен аналитическим описанием из-за усложнения структуры сечений, в частности за счет потери односвязности множества $G(t_f)$ для некоторых значений t_f .

Ключевые слова: машина Дубинса, двусторонние повороты, трехмерное множество достижимости, принцип максимума Понтрягина, экстремальные кусочно-постоянные управления, сечения множества достижимости по угловой координате, аналитическое описание сечений.

V. S. Patsko, A. A. Fedotov. Analytic description of a reachable set for the Dubins car.

A three-dimensional reachable set at an instant is considered for the controlled object “Dubins car” (also known as unicycle). We study the case when turns to both sides are possible. For this case, the authors earlier specified, based on the Pontryagin maximum principle, six types of piecewise constant open-loop controls; one can restrict oneself to these controls when studying the boundary of the reachable set $G(t_f)$ at a given time t_f . These controls were used for the numerical construction of the reachable set and for its visualization. However, no analytic description of the boundary of the set $G(t_f)$ was obtained. In the present paper, we derive formulas for the generally nonconvex two-dimensional sections of the set $G(t_f)$ with respect to the angular coordinate. The structure of the sections is analyzed. For the dynamics in the normalized coordinates, an analytic description is obtained under the assumption that $t_f \leq 2\pi$. For this case, a theorem is formulated on necessary and sufficient conditions for transferring a motion to the boundary of $G(t_f)$. The case $t_f > 2\pi$ is not covered by the analytic description because of the more complex structure of the sections, in particular, due to the loss of connectivity of $G(t_f)$ for some values of t_f .

Keywords: Dubins car, two-sided turns, three-dimensional reachable set, Pontryagin maximum principle, extremal piecewise constant control, sections of the reachable set along the angle coordinate, analytic description of the sections.

MSC: 93C15, 93B03, 49J15

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-182-197

Введение

Математическая “машина Дубинса” — это модель управляемого движения, в которой две фазовые переменные x, y являются координатами точечного геометрического положения на плоскости, третья переменная φ есть угол, составляемый вектором скорости с положительным направлением оси x . Величина линейной скорости считается постоянной и равной 1. Скалярное управление имеет смысл угловой скорости поворота и стеснено ограничением $u \in [u_1, u_2]$. Величина $1/|u|$ представляет собой мгновенный радиус поворота. Данная модель, ее часто называют также “unicycle”, широко используется при рассмотрении движений самолета в горизонтальной плоскости и при упрощенном описании движения наземных управляемых колесных “тележек” (см., например, [1]).

При исследовании различных задач управления, связанных с машиной Дубинса, полезным является эффективное описание границы трехмерных множеств достижимости “в момент” и “к моменту”. Множество достижимости в момент t_f (к моменту t_f) есть совокупность всех фазовых состояний, в каждое из которых можно перевести систему при помощи некоторого допустимого программного управления точно в момент t_f (соответственно, в некоторый момент из промежутка $[t_0, t_f]$).

Статья посвящена аналитическому описанию множества достижимости $G(t_f)$ в момент t_f в предположении

$$-1 \leq u_1 < 0 < u_2 = 1, \quad t_f \leq 2\pi. \quad (0.1)$$

Соотношения $u_2 = 1, u_1 \geq -1$ не являются существенными: геометрические переменные и время всегда можно пронормировать так, чтобы величина линейной скорости была равна 1 и выполнялись либо условия $u_2 = 1, u_1 \geq -1$, либо условия $u_1 = -1, u_2 \leq 1$. В статье выбран первый вариант. Неравенства $u_1 < 0 < u_2$ означают, что управляемый объект может поворачивать в обе стороны. В случае $u_1 = -1, u_2 = 1$ есть симметрия “правого” и “левого” поворотов. Если $-1 < u_1 < 0 < u_2 = 1$, то поворот возможен в обе стороны, но симметрия нарушена. Ограничение $t_f \leq 2\pi$ связано с тем, что при $t_f > 2\pi$ описание множества достижимости существенно усложняется. В частности, существует промежуток времени, на котором оно не является односвязным [2]. Поэтому случай $t_f > 2\pi$ (в предположении $u_2 = 1$) целесообразно исследовать отдельно.

Аналитическое описание множества достижимости $G(t_f)$ при $t_f \leq 2\pi$ дается в виде формул для кривых, образующих границу его двумерных (вообще говоря, невыпуклых) сечений по угловой координате φ . Их вид зависит от момента t_f и значения φ .

В случае одностороннего поворота, когда $u_1 = 0$ и $u_2 = 1$, или строго одностороннего поворота, когда $0 < u_1 < u_2 = 1$, аналитическое описание φ -сечений получено в статьях авторов “Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота” (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 143–155) и “Структура множества достижимости для машины Дубинса со строго односторонним поворотом” (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 171–187). При исследовании этих случаев есть свои сложности, но φ -сечения являются выпуклыми.

Представленные в данной статье результаты базируются на утверждениях из статей [2; 3], в которых на основе принципа максимума Понтрягина [4; 5] доказаны утверждения о шести типах кусочно-постоянного программного управления, вполне достаточных для изучения границы множества $G(t_f)$ в случае $-1 \leq u_1 < 0 < u_2 = 1$. Следует отметить, что выделенные типы совпадают с вариантами, полученными Л. Дубинсом в работе [6] для задачи, которая при формулировке в терминах математической теории управления эквивалентна задаче быстрогодействия при заданных трехмерных начальном и конечном состояниях.

Статья организована следующим образом.

В разд. 1 дается постановка задачи и приводятся сведения из работ [2; 3], используемые при дальнейшем изложении.

В разд. 2 анализируются некоторые экстремальные движения, которые приходят в момент t_f на заданное φ -сечение при $\varphi > 0$; выводятся формулы параметрического представления соответствующих кривых в φ -сечении.

В разд. 3 показывается, что граница φ -сечения составляется именно из таких кривых.

В разд. 4 уже без подробных выкладок описывается отличие границы φ -сечений при $\varphi < 0$ в сравнении со случаем $\varphi > 0$.

Короткий разд. 5 посвящен φ -сечению при $\varphi = 0$.

В конце статьи сформулирована теорема о необходимых и достаточных условиях перевода движения на границу множества достижимости $G(t_f)$ при $t_f \leq 2\pi$.

1. Постановка задачи. Типы экстремальных движений

Рассмотрим управляемую систему размерности 3 по фазовой переменной:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u, \\ u &\in [u_1, u_2], \quad -1 \leq u_1 < 0 < u_2 = 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения на плоскости, u — скалярное управление. Ограничение u_1 на управление u является параметром задачи. Ограничение u_2 считаем зафиксированным и равным 1. Но, чтобы избежать путаницы в понимании формул, будем наряду с u_1 писать и u_2 . Условимся для определенности, что положительное (отрицательное) значение угла φ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки (по часовой стрелке). В качестве начального состояния в момент $t_0 = 0$ принимаем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\varphi(0) = 0$. Величину угла φ в момент t подсчитываем в виде интеграла

$$\int_0^t u(\tau) d\tau$$

от реализовавшегося на промежутке $[0, t]$ программного управления. В качестве допустимых программных управлений принимаем измеримые функции времени, удовлетворяющие ограничению на управление u .

Множество достижимости $G(t_f)$ определим как совокупность всех фазовых состояний системы (1.1), которые можно получить в момент t_f при переборе всех допустимых измеримых программных управлений на промежутке $[0, t_f]$.

Выбор измеримых управлений в качестве допустимых обусловлен желанием применить теорему о замкнутости множества достижимости $G(t_f)$ в рамках постановки задачи. Выписывая далее принцип максимума Понтрягина (ПМП) для программных управлений, ведущих на границу множества достижимости, устанавливаем, что в любую точку на его границе ведет некоторое *кусочно-постоянное* управление. Соответствующие выкладки приведены в [2; 3].

Более того, в [2; 3] доказаны утверждения, из которых следует, что при оговоренных ограничениях на u в любую точку на границе множества $G(t_f)$ можно попасть при помощи управления, принимающего значения в трехэлементном множестве $\{u_1, 0, u_2\}$ и имеющего не более двух моментов переключения. Были выделены шесть типов управлений, которыми можно ограничиться при исследовании границы. В случае $t_f \leq 2\pi$ ими исчерпываются управления, ведущие на границу.

Перечислим эти шесть типов. Управление типа $U1$ принимает значение $u = u_2$ на некотором первом интервале $[0, t_1]$ времени, значение $u = 0$ на некотором втором интервале $[t_1, t_2]$ и значение $u = u_2$ на третьем промежутке $[t_2, t_f]$. Если один или два из указанных промежутков отсутствуют, то полученное управление также относим к типу $U1$.

Типы $U2$ – $U6$ определяются аналогично. Опишем их более кратко, указывая лишь значения управления на каждом из трех промежутков:

$$U2 : u_1, 0, u_2; \quad U3 : u_2, 0, u_1; \quad U4 : u_1, 0, u_1; \quad U5 : u_2, u_1, u_2; \quad U6 : u_1, u_2, u_1.$$

Для управлений $U5$ и $U6$ в [2; 3] сформулировано дополнительное требование: диапазон изменения угла φ на среднем участке не должен быть меньше суммы диапазонов изменения угла φ на первом и третьем участках:

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \geq |\varphi(t_1) - \varphi(t_0) + \varphi(t_f) - \varphi(t_2)|. \quad (1.2)$$

В (1.2) учтено, что на первом и третьем участках знаки управлений как в $U5$, так и в $U6$ совпадают. В симметричном случае, когда $u_1 = -1$ и $u_2 = 1$, неравенство (1.2) эквивалентно неравенству

$$t_2 - t_1 \geq (t_1 - t_0) + (t_f - t_2).$$

В работах [2; 3] показано, что при нарушении неравенства (1.2) программное управление типа $U5$ или $U6$ ведет в точку, лежащую строго внутри множества достижимости $G(t_f)$.

Поскольку управления $U1$ – $U6$ удовлетворяют ПМП, мы называем их и соответствующие движения экстремальными. Для управлений $U5$ и $U6$ будем предполагать выполненным неравенство (1.2).

Символом $G_\varphi(t_f)$ обозначим φ -сечение множества $G(t_f)$:

$$G_\varphi(t_f) = \{(x, y) : (x, y, \varphi) \in G(t_f)\}.$$

Цель работы — получить аналитическое описание φ -сечений.

Совокупность возможных значений φ системы (1.1) в момент t_f определяется ограничением $[u_1, u_2]$ на управление u и представляет собой отрезок $[t_f \cdot u_1, t_f \cdot u_2]$. Для крайних значений φ имеем одноточечные φ -сечения, которые реализуются на управлениях $u(t) \equiv u_1$ и $u(t) \equiv u_2 = 1$.

В дальнейшем считаем, что $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f \cdot u_2)$. Движения, приходящие на границу такого φ -сечения, удовлетворяют ПМП и должны иметь не менее одного переключения. Используем это для классификации управлений и соответствующих точек на границе φ -сечения.

В следующих разделах будут последовательно рассмотрены три варианта значений φ :

$$1) 0 < \varphi < t_f \cdot u_2, \quad 2) t_f \cdot u_1 < \varphi < 0, \quad 3) \varphi = 0.$$

Подробное аналитическое описание множеств $G(t_f)$ будет представлено лишь для первого случая. Второй и третий случаи разбираются аналогично. Для них приводятся только окончательные формулы.

2. Экстремальные движения в случае $0 < \varphi < t_f \cdot u_2$

Для построения границы множества достижимости используем управления $U1$ – $U6$. Управления типа $U4$ не могут участвовать в построении границы φ -сечений в случае $\varphi > 0$, поскольку при действии таких управлений получаем $\varphi(t_f) \leq 0$. Отсечем также вариант с управлениями типа $U5$, поскольку при условии $\varphi(t_f) > 0$ они ведут строго внутрь множества достижимости из-за нарушения неравенства (1.2).

Таким образом, при описании границы φ -сечений в разбираемом случае ограничимся четырьмя типами управлений $U1, U2, U3, U6$.

Считаем заданным момент $t_f > 0$. Зафиксируем некоторое значение φ между 0 и $t_f \cdot u_2$. Пусть t_1, t_2 — моменты окончания первого и второго участков управления (моменты переключения). Имеем

$$0 < \varphi < t_f \cdot u_2 = \text{const}, \quad 0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_f = \text{const} \leq 2\pi. \quad (2.1)$$

Введем укороченные обозначения $\varphi_1 = \varphi(t_1)$, $\varphi_2 = \varphi(t_2)$.

Выпишем значения величин φ_1, φ_2 для рассматриваемых четырех типов управлений. Получаем:

$$\begin{aligned} U1: & \quad \varphi_1 = t_1 \cdot u_2, \quad \varphi_2 = \varphi_1; \\ U2: & \quad \varphi_1 = t_1 \cdot u_1, \quad \varphi_2 = \varphi_1; \\ U3: & \quad \varphi_1 = t_1 \cdot u_2, \quad \varphi_2 = \varphi_1; \\ U6: & \quad \varphi_1 = t_1 \cdot u_1, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + (t_2 - t_1) \cdot u_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее для каждого из указанных четырех типов выведем аналитические соотношения, определяющие фазовые состояния $(x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^T$ системы (1.1) в момент t_f . Обозначим их через $(x_{U_i}, y_{U_i}, \varphi_{U_i})^T$, $i = 1, 2, 3, 6$.

2.1. Движения в силу управлений U_1

Рассматриваем последовательность управлений $u_2, 0, u_2$. Имеем

$$\varphi_{U_1} = (t_1 + t_f - t_2) u_2. \quad (2.3)$$

Интегрируем первые два уравнения системы (1.1) на промежутке $[0, t_f]$. Получаем выражение для координат геометрического положения в момент t_f :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{U_1} \\ y_{U_1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_1} - \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_{U_1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_1} \\ 1 - \cos \varphi_{U_1} \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Положим $\varphi_{U_1} = \varphi$ и выразим разность $t_2 - t_1$ из (2.3):

$$t_2 - t_1 = t_f - \frac{\varphi}{u_2} = \text{const}. \quad (2.5)$$

Из (2.1), (2.5) находим диапазон возможных значений t_1 . Треугольник на рис. 1, выделенный точечной заливкой, соответствует соотношениям (2.1), а прямая $t_1 = t_2 - \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2}\right)$ — условию (2.5). Видно, что допустимые значения t_1 изменяются от 0 до $\frac{\varphi}{u_2}$.

Семейство точек (2.4) рассматриваем как однопараметрическую кривую на плоскости x, y с параметром $s_1 = \varphi_1 = t_1 \cdot u_2$:

$$\begin{pmatrix} x_{U_1}(s_1) \\ y_{U_1}(s_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2}\right) \begin{pmatrix} \cos s_1 \\ \sin s_1 \end{pmatrix}, \quad s_1 \in [s_1^b, s_1^e] = [0, \varphi]. \quad (2.6)$$

Кривая (2.6) представляет собой дугу окружности радиуса $t_f - \frac{\varphi}{u_2}$ с центром в точке

$$\frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

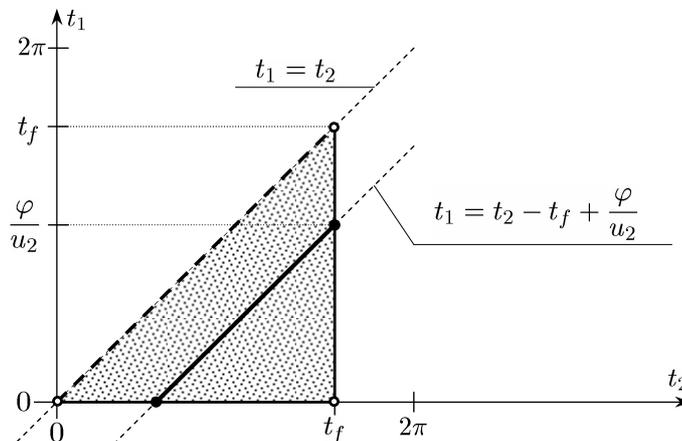


Рис. 1. Пояснение к определению диапазона значений t_1 для управлений U_1

2.2. Движения в силу управлений U_2

По аналогии с управлениями типа U_1 интегрируем систему (1.1) для последовательности управлений $u_1, 0, u_2$. Соотношения, описывающие фазовое состояние в момент t_f , имеют вид

$$\varphi_{U_2} = t_1 \cdot u_1 + (t_f - t_2)u_2, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{U_2} \\ y_{U_2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_2} - \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_{U_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_2} \\ 1 - \cos \varphi_{U_2} \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Положим $\varphi_{U_2} = \varphi$. Выразим t_2 из (2.7):

$$t_2 = t_f - \frac{\varphi - t_1 \cdot u_1}{u_2}. \quad (2.9)$$

Возможные значения t_1 и t_2 , удовлетворяющие соотношениям (2.1) и (2.7), показаны на рис. 2 в виде зачерненного треугольника. Пересечение прямой (2.9) с данным треугольником позволяет найти диапазон изменения t_1 при помощи неравенств

$$0 \leq t_1 \leq \frac{t_f \cdot u_2 - \varphi}{u_2 - u_1}.$$

Таким образом, семейство точек (2.8) представляет собой однопараметрическую кривую на плоскости x, y , которую с использованием (2.8) и (2.9) можно записать, взяв в качестве параметра величину $s_2 = \varphi_1 = t_1 \cdot u_1$:

$$\begin{pmatrix} x_{U_2}(s_2) \\ y_{U_2}(s_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos s_2 \\ \sin s_2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \sin s_2 \\ 1 - \cos s_2 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$s_2 \in [s_2^b, s_2^e] = \left[\frac{u_1(t_f \cdot u_2 - \varphi)}{u_2 - u_1}, 0 \right].$$

Отметим, что кривая (2.8) уже не является дугой окружности.

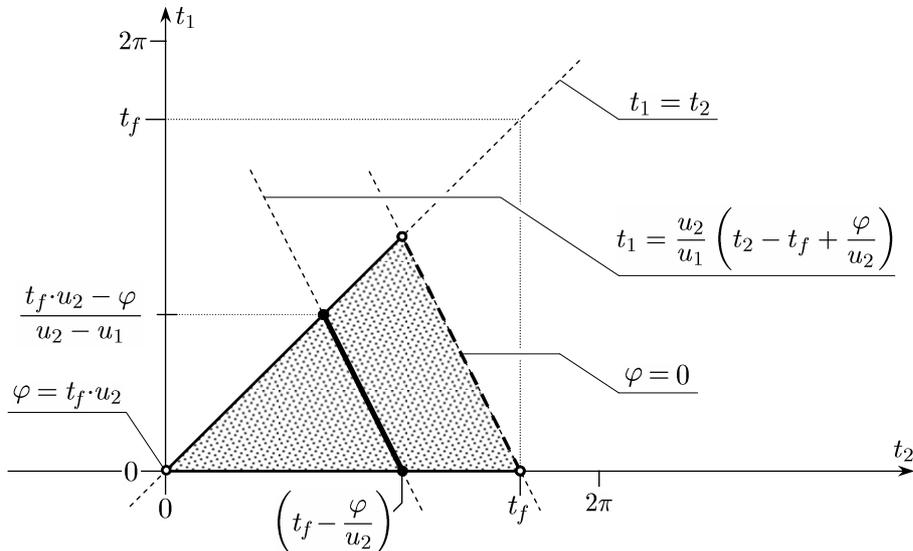


Рис. 2. Определение диапазона значений t_1 для управлений U_2

2.3. Движения в силу управлений U_3

Рассмотрим последовательность управлений $u_2, 0, u_1$ на промежутке $[0, t_f]$. Фазовое состояние системы (1.1) в момент t_f записывается как

$$\varphi_{U_3} = t_1 \cdot u_2 + (t_f - t_2)u_1, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{U_3} \\ y_{U_3} \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_3} - \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_{U_3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_3} \\ 1 - \cos \varphi_{U_3} \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Положим $\varphi_{U_3} = \varphi$ и выразим t_2 из (2.11):

$$t_2 = t_f - \frac{\varphi - t_1 \cdot u_2}{u_1}. \quad (2.13)$$

Возможные значения t_1 и t_2 , удовлетворяющие соотношениям (2.1) и (2.11), показаны на рис. 3 в виде зачерненного треугольника. Пересечение прямой (2.13) с данным треугольником дает неравенства

$$\frac{\varphi}{u_2} \leq t_1 \leq \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{u_2 - u_1}.$$

Исходя из (2.8), (2.9), запишем семейство точек (2.12) в виде однопараметрической кривой на плоскости x, y по параметру $s_3 = \varphi_1 = t_1 \cdot u_2$:

$$\begin{pmatrix} x_{U_3}(s_3) \\ y_{U_3}(s_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \left(t_f - \frac{\varphi - s_3}{u_1} - \frac{s_3}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos s_3 \\ \sin s_3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \sin s_3 \\ 1 - \cos s_3 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$s_3 \in [s_3^b, s_3^e] = \left[\varphi, \frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{u_2 - u_1} \right].$$

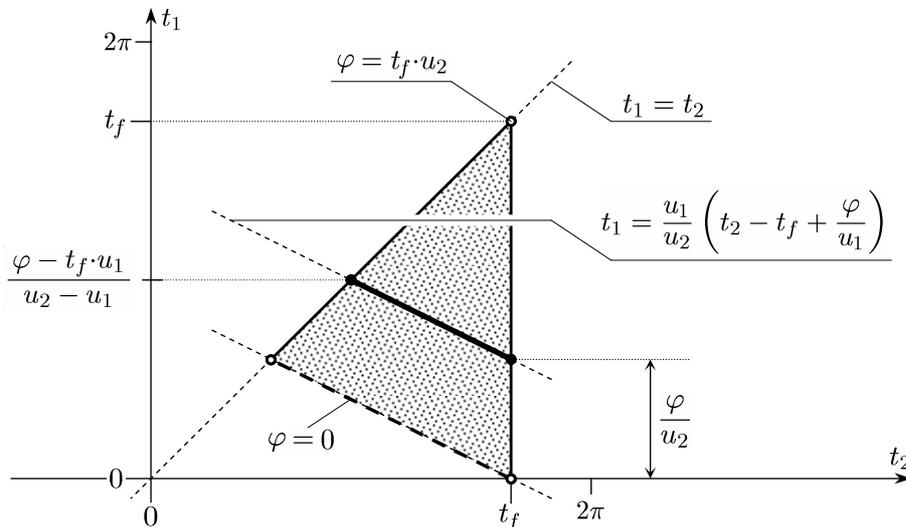


Рис. 3. Определение диапазона значений t_1 для управлений U_3

2.4. Движения в силу управлений U_6

Интегрируем систему (1.1) для последовательности управлений u_1, u_2, u_1 на промежутке $[0, t_f]$:

$$\varphi_{U_6} = t_1 \cdot u_1 + (t_2 - t_1) u_2 + (t_f - t_2) u_1, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{U_6} \\ y_{U_6} \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_6} - \sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 - \cos \varphi_{U_6} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_6} \\ 1 - \cos \varphi_{U_6} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 - \sin (\varphi_1 + (t_2 - t_1) u_2) \\ \cos (\varphi_1 + (t_2 - t_1) u_2) - \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_{U_6} \\ 1 - \cos \varphi_{U_6} \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{(t_2 - t_1) u_2}{2} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\varphi_1 + \frac{(t_2 - t_1) u_2}{2} \right) \\ \sin \left(\varphi_1 + \frac{(t_2 - t_1) u_2}{2} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Положим $\varphi_{U_6} = \varphi > 0$ и выразим разность $t_2 - t_1$ из (2.15):

$$t_2 - t_1 = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{u_2 - u_1} = \text{const}. \quad (2.17)$$

Возможные значения t_1 и t_2 показаны на рис. 4 в виде пересечения зачерненного треугольника, соответствующего неравенствам (2.1), с прямой (2.17). Получаемый диапазон значений t_1 записывается при помощи неравенств

$$0 \leq t_1 \leq \frac{t_f \cdot u_2 - \varphi}{u_2 - u_1}.$$

Семейство точек (2.16) будем рассматривать как однопараметрическую кривую на плоскости x, y по параметру $s_6 = -\varphi_1 = -t_1 \cdot u_1$:

$$\begin{pmatrix} x_{U_6}(s_6) \\ y_{U_6}(s_6) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} - s_6 \right) \\ \sin \left(\frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} - s_6 \right) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$s_6 \in [s_6^b, s_6^e] = \left[0, \frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_1)}{u_2 - u_1} \right].$$

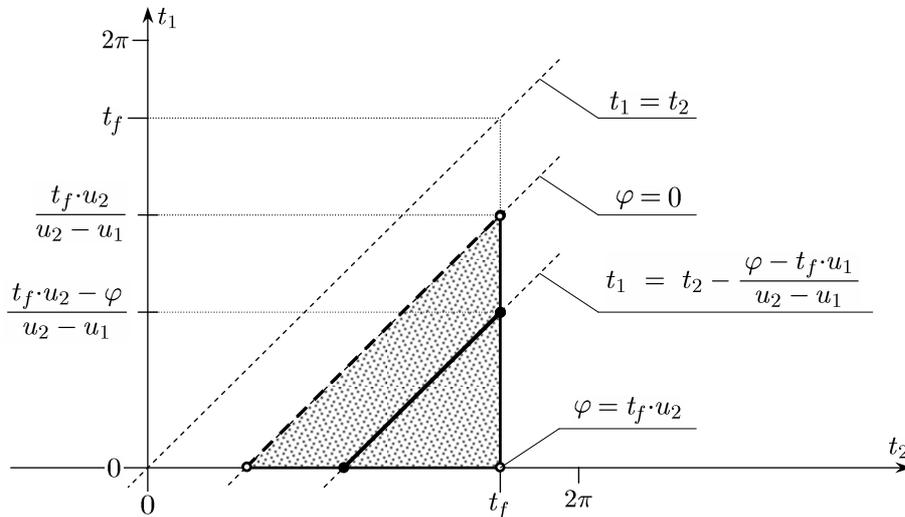


Рис. 4. Определение диапазона значений t_1 для управлений U_6

Полученная кривая $(x_{U_6}(s_6), y_{U_6}(s_6))^T$ представляет собой дугу окружности радиуса

$$2 \sin \left(\frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right)$$

с центром в точке $\frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}$. Поскольку $u_2 = 1$, $u_1 \in [-1, 0)$ и $t_f \leq 2\pi$, то угловой развор дуги не превышает π .

3. Описание границы φ -сечений в случае $0 < \varphi < t_f \cdot u_2$

3.1. Вспомогательная система координат XOY

Для зафиксированных значений t_f и φ введем вспомогательную систему координат XOY (см. рис. 5). Начало отсчета XOY поместим в точку $O = \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}$, являющуюся центром окружности, часть которой образует дугу (2.6). Ось X проведем так, чтобы она делила дугу (2.6) пополам. Для этого ось X повернем относительно оси x на угол $\varphi/2$ против часовой стрелки. Ось Y развернем на 90° против часовой стрелки относительно оси X . Пересчет из исходной системы координат xoy в новую систему координат XOY осуществляется по формуле

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & \sin(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \right). \quad (3.1)$$

Видим, что начало координат исходной системы переходит в точку на оси X новой системы с отрицательной координатой по этой оси. Таким образом, ось X проходит через начало отсчета исходной системы координат, как показано на рис. 5.

Далее дуги (2.6), (2.10), (2.14), (2.18), образованные в силу управлений U_1, U_2, U_3, U_6 , будем рассматривать в системе координат XOY и обозначим их, соответственно, через **A1**, **A2**, **A3**, **A6**. Используя (3.1), запишем параметрическое представление указанных дуг в системе координат XOY :

$$\mathbf{A1}(s_1) = \begin{pmatrix} X_{U_1}(s_1) \\ Y_{U_1}(s_1) \end{pmatrix} = \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(s_1 - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(s_1 - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{A2}(s_2) = \left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{s_2}{2} \right) \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

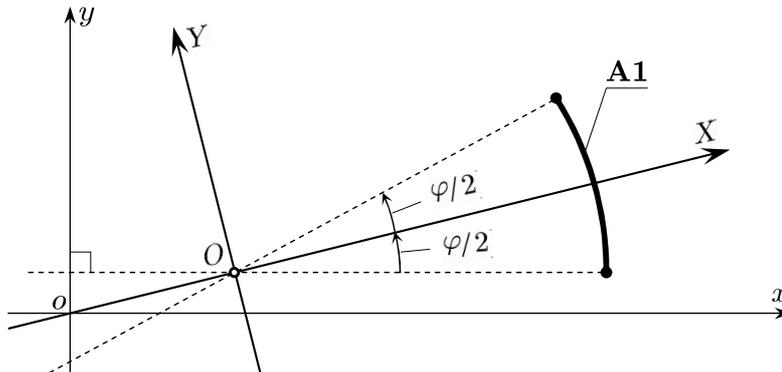


Рис. 5. Вспомогательная система координат XOY

$$\mathbf{A3}(s_3) = \left(t_f - \frac{\varphi - s_3}{u_1} - \frac{s_3}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(s_3 - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(s_3 - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{s_3}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s_3}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{s_3}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A6}(s_6) = 2 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \left(\sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) - \sin \left(\frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_2 - u_1)} - s_6 \right) \\ \sin \left(\frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_2 - u_1)} - s_6 \right) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Каждая из четырех дуг **A1**, **A2**, **A3**, **A6** задается посредством соответствующих параметров $s_1 \in [s_1^b, s_1^e]$, $s_2 \in [s_2^b, s_2^e]$, $s_3 \in [s_3^b, s_3^e]$, $s_6 \in [s_6^b, s_6^e]$.

3.2. Замкнутая кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$

Границу φ -сечения множества достижимости $G(t_f)$ обозначим через $\partial G_\varphi(t_f)$.

Пусть $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ — объединение дуг **A1**, **A2**, **A3**, **A6**. Формально имеем $\partial G_\varphi(t_f) \subset \mathbf{A}_\varphi(t_f)$. Наша цель — установить, что $\partial G_\varphi(t_f) = \mathbf{A}_\varphi(t_f)$ при условии $t_f \leq 2\pi$.

Совокупность $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ рассмотрим в последовательности **A1**, **A3**, **A6**, **A2**. Данные дуги попарно состыкованы в крайних точках. Это следует из формул (3.2)–(3.5) при подстановке в них крайних значений диапазонов параметров s_1 , s_3 , s_6 , s_2 , указанных в разд. 2. А именно при помощи тригонометрических преобразований проверяем соотношения

$$\mathbf{A1}(s_1^e) = \mathbf{A3}(s_3^b), \quad \mathbf{A3}(s_3^e) = \mathbf{A6}(s_6^b), \quad \mathbf{A6}(s_6^e) = \mathbf{A2}(s_2^b), \quad \mathbf{A2}(s_2^e) = \mathbf{A1}(s_1^b). \quad (3.6)$$

В целом получаем, что кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ является замкнутой кусочно-гладкой кривой на плоскости X, Y . При этом количество изломов не превышает четырех (по числу точек стыковки дуг). Далее установим ряд свойств данной кривой, из которых следует отсутствие самопересечений. Последнее и будет означать совпадение кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ с границей φ -сечения.

3.3. Свойства дуг **A1**, **A6**

Кривые **A1** и **A6** представляют собой дуги окружностей, которые в системе координат XOY описываются формулами (3.2), (3.5).

Дуга **A1** симметрична относительно оси X по построению. Для дуги **A6** рассмотрим крайние точки. Нетрудно заметить, что выполнены соотношения $X_{\mathbf{A6}}(s_6^b) = X_{\mathbf{A6}}(s_6^e)$ и $Y_{\mathbf{A6}}(s_6^b) = -Y_{\mathbf{A6}}(s_6^e)$. Центр образующей дугу **A6** окружности находится на оси X . Расстояние дуги не превышает π , как было отмечено в подразд. 2.4. Следовательно, дуга **A6** также симметрична относительно оси X .

Обозначим $R_{\mathbf{A1}}(s_1) = \sqrt{(X_{\mathbf{A1}}(s_1))^2 + (Y_{\mathbf{A1}}(s_1))^2}$, $R_{\mathbf{A6}}(s_6) = \sqrt{(X_{\mathbf{A6}}(s_6))^2 + (Y_{\mathbf{A6}}(s_6))^2}$. Установим, что дуги **A1** и **A6** не имеют общих точек. Дуга **A1** является частью окружности радиуса $R_{\mathbf{A1}}(s_1) = \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2} \right) = \text{const}$. Оценим $R_{\mathbf{A6}}(s_6)$. Для этого потребуются неравенства

$$0 < \frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_2 - u_1)} = \left(1 - \frac{u_2}{(u_2 - u_1)} \right) \left(\frac{t_f \cdot u_2 - \varphi}{2} \right) < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{2(u_2 - u_1)} < \pi. \quad (3.7)$$

Их справедливость следует из предположений (0.1) и (2.1).

Обозначим $\theta = \frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{(u_2 - u_1)}$. Имеем $\theta + \varphi = \frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{(u_2 - u_1)}$. Это позволяет записать условия (3.7) более компактно:

$$0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \frac{\theta + \varphi}{2} < \pi. \quad (3.8)$$

Повторно применяя соотношения $0 < \varphi < t_f \cdot u_2 = \text{const} \leq 2\pi$, записанные в (2.1), получаем неравенства

$$0 < \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad 0 < \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad 0 < \sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right). \quad (3.9)$$

Используя (3.5), имеем

$$R_{\mathbf{A6}}(s_6) = 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2} - s_6\right) + \sin^2\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)}.$$

Учитывая диапазон $0 \leq s_6 \leq \theta$ изменения параметра s_6 и первое неравенство в (3.8), получаем

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} - s_6 \leq \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\cos\left(\frac{\theta}{2} - s_6\right) \geq \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Далее с использованием соотношений (3.9) приходим к оценке сверху для $R_{\mathbf{A6}}(s_6)$, не зависящей от значений параметра s_6 :

$$R_{\mathbf{A6}}(s_6) \leq 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)}.$$

Раскрывая $\sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)$, после тригонометрических преобразований получим

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{A6}}(s_6) &\leq 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу (3.8). С учетом ограничений (0.1) имеем

$$2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_2 - u_1)} = t_f - \frac{\varphi}{u_2} = R_{\mathbf{A1}}(s_1).$$

Таким образом, $R_{\mathbf{A6}}(s_6) < R_{\mathbf{A1}}(s_1)$ при любых допустимых значениях параметров s_6 и s_1 . Стало быть, у дуг **A1** и **A6** нет общих точек.

3.4. Свойства дуг **A2**, **A3**

С учетом обозначений подразд. 3.3 диапазоны изменения параметров s_2 и s_3 для дуг **A2**, **A3** могут быть записаны в виде

$$s_2 \in [-\theta, 0], \quad s_3 \in [\varphi, \varphi + \theta]. \quad (3.10)$$

Введем взаимно-однозначное соответствие между точками дуг **A2** и **A3**, полагая $s_3(s_2) = \varphi - s_2$. Покажем, что точки **A2**(s_2) и **A3**($s_3(s_2)$) взаимно симметричны относительно оси X . Действительно, подставляя в (3.4) указанную связь между s_3 и s_2 , после сравнения с (3.3) получаем $X_{\mathbf{A2}}(s_2) = X_{\mathbf{A3}}(s_3(s_2))$, $Y_{\mathbf{A2}}(s_2) = -Y_{\mathbf{A3}}(s_3(s_2))$.

Таким образом, установлено свойство взаимной симметрии дуг **A2** и **A3** относительно оси X . Отсюда согласно свойствам кривых **A1**, **A6** следует общее свойство симметрии всей кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ относительно этой оси.

Рассмотрим характер изменения величины $R_{\mathbf{A2}}(s_2) = \sqrt{(X_{\mathbf{A2}}(s_2))^2 + (Y_{\mathbf{A2}}(s_2))^2}$ вдоль дуги $\mathbf{A2}$. Используя (3.3) и определение величины θ , найдем производную по s_2 от $(R_{\mathbf{A2}}(s_2))^2$:

$$\begin{aligned} \left((R_{\mathbf{A2}}(s_2))^2 \right)'_{s_2} &= \left(\left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right)^2 (1 - \cos s_2) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \sin s_2 \right)'_{s_2} \\ &= 2 \left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) (1 - \cos s_2) = 2 \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2} \right) \left(1 + \frac{s_2}{\theta} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) (1 - \cos s_2). \end{aligned}$$

Параметр s_2 в соответствии с (3.10) изменяется в диапазоне $[-\theta, 0]$. Для всех значений $s_2 \in (-\theta, 0)$ в силу (2.1) и (3.8) справедливо неравенство

$$\left((R_{\mathbf{A2}}(s_2))^2 \right)'_{s_2} > 0.$$

Данное неравенство обуславливает монотонность $R_{\mathbf{A2}}(s_2)$ вдоль всей дуги $\mathbf{A2}$. Отсюда можно сделать следующие выводы: дуга $\mathbf{A2}$ является гладкой и не имеет самопересечений; в соответствии с (3.6) дуга $\mathbf{A2}$ пересекает дуги $\mathbf{A1}$, $\mathbf{A6}$ только в крайних точках при крайних значениях s_2 .

Дуга $\mathbf{A3}$ обладает такими же свойствами в силу симметрии.

С учетом взаимной симметрии дуг $\mathbf{A2}$ и $\mathbf{A3}$ относительно оси X отсутствие пересечения дуг $\mathbf{A2}$ и $\mathbf{A3}$ эквивалентно постоянству знака координаты Y на одной из них. Покажем, что $Y_{\mathbf{A2}}(s_2) < 0$ для дуги $\mathbf{A2}$. Воспользуемся (3.3):

$$Y_{\mathbf{A2}}(s_2) = \left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) + 2 \sin \left(\frac{s_2}{2} \right) \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \sin \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3.11)$$

Выведем вспомогательное неравенство

$$-\pi < s_2 - \frac{\varphi}{2} < 0. \quad (3.12)$$

Справедливость правой части неравенства следует из (0.1), (2.1) и (3.10). Для доказательства левого неравенства возьмем минимальное допустимое значение $s_2 = -\theta$. Имеем

$$\begin{aligned} \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) &\geq \left(-\theta - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{u_1(t_f u_2 - \varphi)}{u_2 - u_1} - \frac{\varphi}{2} = t_f \left(\frac{u_1 u_2}{u_2 - u_1} \right) - \varphi \left(\frac{u_2 + u_1}{2(u_2 - u_1)} \right) \\ &> 2\pi \left(\frac{u_1 u_2}{u_2 - u_1} - \frac{u_2 + u_1}{2(u_2 - u_1)} \right) = 2\pi \left(\frac{2u_1 u_2 - u_2 - u_1}{2(u_2 - u_1)} \right) = -\pi. \end{aligned}$$

Второе неравенство выполнено в силу (0.1) и (2.1). В последнем равенстве учтено, что $u_2 = 1$. Таким образом, $\sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) < 0$ и справедлива следующая оценка для первого слагаемого в (3.11):

$$\left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) = \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2} \right) \left(1 + \frac{s_2}{\theta} \right) \sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) < 0.$$

Из (3.12) согласно (3.10) выводим, что $-\pi < \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) < 0$. Поэтому $\sin \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) < 0$. Используя (3.8) и (3.10), имеем $\sin \left(\frac{s_2}{2} \right) < 0$. Исходя из соотношения $\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) < 0$ получаем оценку второго слагаемого в (3.11):

$$2 \sin \left(\frac{s_2}{2} \right) \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \sin \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) < 0.$$

Таким образом, установлено, что $Y_{\mathbf{A2}}(s_2) < 0$. В силу симметрии $Y_{\mathbf{A3}}(s_3) > 0$. Стало быть, дуги $\mathbf{A2}$ и $\mathbf{A3}$ не пересекаются между собой.

3.5. Совпадение кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ с границей φ -сечения множества $G(t_f)$

В подразд. 3.3 было установлено, что дуги окружностей **A1** и **A6** не пересекаются друг с другом. В подразд. 3.4 показано, что дуги **A2** и **A3** симметричны друг другу относительно оси X , не имеют самопересечений и не пересекаются между собой. Каждая из них пересекается с дугами **A1** и **A6** только в крайних точках. Поэтому кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ не имеет самопересечений. Более того, кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ в целом симметрична относительно оси X . В исходных координатах это означает симметрию относительно прямой

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)y = 0. \tag{3.13}$$

Вычислим производные $(\mathbf{A1}(s_1))'_{s_1}$, $(\mathbf{A2}(s_2))'_{s_2}$ в смежной для дуг **A1**, **A2** точке $\mathbf{A1}(s_1^b) = \mathbf{A2}(s_2^e)$. Поскольку $s_2^e = s_1^b = 0$, получаем

$$(\mathbf{A1}(s_1^b + 0))'_{s_1} = \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2}\right) \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} = (\mathbf{A2}(s_2^e - 0))'_{s_2}.$$

Совпадение касательных векторов означает гладкость стыковки дуг **A1** и **A2**. С учетом симметрии кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ имеем также гладкость стыковки дуг **A1** и **A3**.

Таким образом, описаны геометрические свойства кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$. На рис. 6 показаны примеры кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Граница множества $G_\varphi(t_f)$ совпадает с кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$.*

Доказательство. По построению все точки φ -сечения $G_\varphi(t_f)$, получаемые в силу управлений, удовлетворяющих ПМП и условию (1.2), образуют кривую $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$. Учитывая, что точки границы $G(t_f)$ также удовлетворяют ПМП и условию (1.2), имеем $\partial G_\varphi(t_f) \subset \mathbf{A}_\varphi(t_f)$. Кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ не имеет самопересечений и является замкнутой.

По теореме Жордана кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ делит плоскость на две связные части. Одна из них ограничена кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ (пусть это будет множество C), вторая является неограниченной (пусть это будет множество D). Предположим, что на кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ есть точка, которая лежит во внутренней замкнутого и ограниченного множества $G_\varphi(t_f)$. Рассмотрим в $G_\varphi(t_f)$ точку, наиболее удаленную от множества C . Эта точка принадлежит D и одновременно принадлежит $\partial G_\varphi(t_f)$, что невозможно.

Стало быть, $\partial G_\varphi(t_f) = \mathbf{A}_\varphi(t_f)$. □

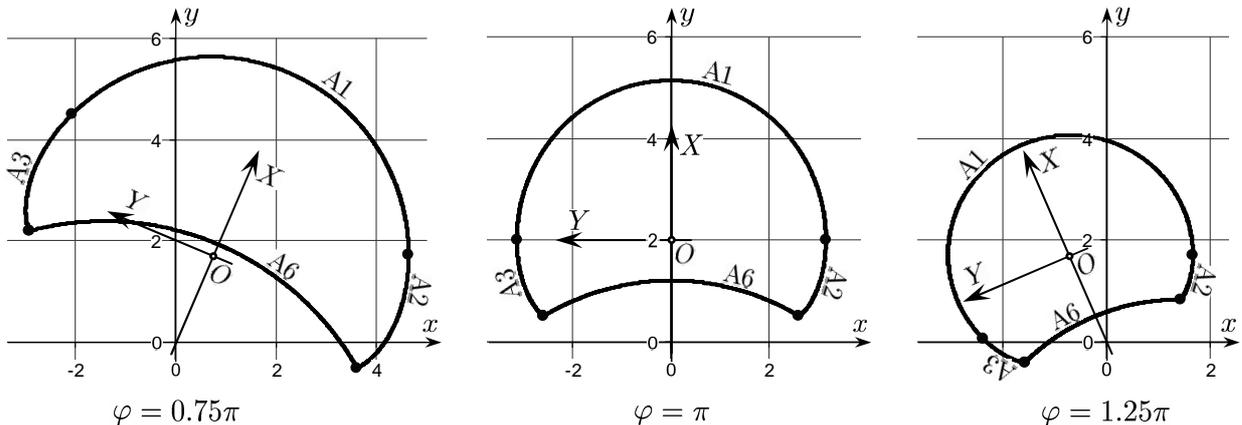


Рис. 6. Расчетные образцы трех φ -сечений множества достижимости для $u_1 = -0.5$, $u_2 = 1$, $t_f = 2\pi$

4. Экстремальные движения и описание φ -сечений при $t_f \cdot u_1 < \varphi < 0$

Описание границы φ -сечений при $t_f \cdot u_1 < \varphi < 0$ аналогично случаю, когда $0 < \varphi < t_f \cdot u_2$. Рассматриваем управления $U1$ – $U6$. Управления типа $U1$ не могут участвовать в построении границы φ -сечения в связи с тем, что при действии таких управлений получаем $\varphi(t_f) \geq 0$. Отсечем также вариант с управлениями типа $U6$, поскольку такие управления при $\varphi(t_f) < 0$ ведут строго внутрь множества достижимости, ибо нарушается неравенство (1.2).

Таким образом, при описании границы φ -сечений в исследуемом случае ограничимся четырьмя типами управлений: $U2$, $U3$, $U4$, $U5$.

Задаем момент $t_f > 0$. Фиксируем некоторое значение φ из интервала $(t_f \cdot u_1, 0)$. Указанные управления порождают однопараметрические семейства решений по аналогии с разд. 2. Получаемые кривые (дуги) на плоскости x, y обозначим как $A2(s_2)$, $A3(s_3)$, $A4(s_4)$, $A5(s_5)$.

Формулы интегрирования для управлений типа $U2$ и $U3$ остаются прежними и определяются соотношениями (2.10) и (2.14). Диапазоны изменения параметров s_2 и s_3 просчитываются заново для условия $\varphi < 0$ и принимают вид

$$s_2 \in \left[\frac{u_1(t_f \cdot u_2 - \varphi)}{u_2 - u_1}, \varphi \right], \quad s_3 \in \left[0, \frac{u_2(\varphi - t_f \cdot u_1)}{u_2 - u_1} \right]. \quad (4.1)$$

Для управлений типа $U4$ и $U5$ формулы интегрирования в координатах x, y и соответствующие диапазоны допустимых значений параметров s_4 и s_5 записываются в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{U4}(s_4) \\ y_{U4}(s_4) \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \left(t_f - \frac{\varphi}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos s_4 \\ \sin s_4 \end{pmatrix}, \quad s_4 \in [\varphi, 0], \\ \begin{pmatrix} x_{U5}(s_5) \\ y_{U5}(s_5) \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_1 - u_2)} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \\ \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_1 - u_2)} - s_5 \right) \\ \sin \left(\frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{2(u_1 - u_2)} - s_5 \right) \end{pmatrix}, \\ s_5 &\in \left[\frac{u_2(t_f \cdot u_1 - \varphi)}{u_2 - u_1}, 0 \right]. \end{aligned}$$

Кривые $A4$, $A5$ являются дугами окружностей. Их центры лежат на прямой, проходящей через начало координат вдоль вектора $(\cos(\varphi/2), \sin(\varphi/2))^T$. Объединение дуг $A2$, $A3$, $A4$, $A5$, как и в разд. 3, обозначим через $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$. Дуги, образующие кривую $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$, циклически соединены в следующей последовательности: $A4$, $A3$, $A5$, $A2$. А именно $A4(s_4^e) = A3(s_3^b)$, $A3(s_3^e) = A5(s_5^b)$, $A5(s_5^e) = A2(s_2^b)$, $A2(s_2^e) = A4(s_4^b)$.

Замкнутая кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ является кусочно-гладкой, не имеет самопересечений и симметрична относительно прямой (3.13). Справедливо утверждение, аналогичное теореме 1, т. е. $\partial G_\varphi(t_f) = \mathbf{A}_\varphi(t_f)$.

5. Случай φ -сечений при $\varphi = 0$

Данный случай является смежным для случаев, разобранных в разд. 3 и 4. Среди кусочно-постоянных управлений типа $U1$, $U4$ только управление $u(t) \equiv 0$ приводит в φ -сечение множества $G(t_f)$ при $\varphi = 0$. Но такое постоянное управление охватывается типами $U2$ и $U3$. Поэтому при описании границы достаточно использовать следующие четыре типа управлений: $U2$, $U3$, $U5$, $U6$.

Формулы интегрирования для управлений $U2$ и $U3$ определяются соотношениями (2.10) и (2.14). Диапазоны изменения параметров s_2 и s_3 принимают вид

$$s_2 \in \left[\frac{u_1 \cdot t_f \cdot u_2}{u_2 - u_1}, 0 \right], \quad s_3 \in \left[0, \frac{-u_2 \cdot t_f \cdot u_1}{u_2 - u_1} \right]$$

и могут быть получены как из соотношений (2.10), (2.14) при $\varphi \rightarrow +0$, так и из соотношений (4.1) при $\varphi \rightarrow -0$.

Дуги A_5 и A_6 , соответствующие при $\varphi = 0$ управлениям U_5 и U_6 , совпадают. Для формирования кривой $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ возьмем, например, дугу A_6 . Определим замкнутую кривую $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ как совокупность трех дуг с обходом в последовательности A_2, A_3, A_6 . Данная кривая представляет собой границу φ -сечения множества $G(t_f)$ при $\varphi = 0$, является кусочно-гладкой, не имеет самопересечений и симметрична относительно оси x . Доказательство указанных свойств аналогично изложенному в разд. 3.

6. Необходимые и достаточные условия перевода на границу

Главная цель данной работы — аналитическое описание φ -сечений множества достижимости $G(t_f)$ в случае $t_f \leq 2\pi$. При этом существенным образом использованы кусочно-постоянные управления из совокупности U_1 – U_6 с дополнительным условием (1.2) для управлений U_5, U_6 . Установлено, что если среди таких управлений есть управления, которые при заданном φ ведут движения в соответствующее φ -сечение, то они порождают в этом φ -сечении замкнутую кривую, совпадающую с границей сечения. То есть они ведут на границу множества достижимости. В доказательстве этого факта предположение $t_f \leq 2\pi$ является существенным. В то же время в работах [2; 3] доказано, что при любом t_f в любую точку на границе множества достижимости ведет кусочно-постоянное управление, принадлежащее совокупности U_1 – U_6 с дополнительным условием (1.2). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $t_f \leq 2\pi$. Для того чтобы кусочно-постоянное управление вело на границу множества достижимости $G(t_f)$ необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало совокупности управлений U_1 – U_6 с дополнительным условием (1.2).

Заключение

В рамках управляемой модели “машина Дубинса” рассмотрен случай, когда движение происходит на плоскости и поворот возможен в обе стороны, хотя наименьшие радиусы поворота могут быть различными. Получено аналитическое описание границы сечений по угловой координате φ трехмерного множества достижимости $G(t_f)$ в момент $t_f \leq 2\pi$. Для двух крайних (минимального и максимального) значений φ соответствующее сечение является точкой. Для других φ граница φ -сечения представляет собой замкнутую кусочно-гладкую кривую $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ без самопересечений (что означает односвязность самого φ -сечения). При $\varphi \neq 0$ кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ состоит из четырех дуг, три из которых имеют гладкое сопряжение. При $\varphi = 0$ кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ составляется из трех дуг, две из них имеют гладкое сопряжение. Кривая $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ симметрична относительно прямой (3.13).

Для случая $t_f > 2\pi$ описание φ -сечений существенно усложняется и пока не получено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Laumond J.-P. (ed.)** Robot motion planning and control. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 354 p. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 229). doi: 10.1007/BFb0036069.
2. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
3. **Симоненко А.С., Федотов А.А.** Множество достижимости для автомобиля Дубинса при несимметричном ограничении на управление [e-resource] // CEUR-WS: Proc. of 48th Internat. Youth School-Conf. Yekaterinburg, 2017. Modern Problems in Mathematics and its Applications, vol. 1894. P. 79–87. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt6.pdf>.
4. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

5. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
6. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // *American J. Math.* 1957. Vol. 79, no. 3. P. 497–516. doi: 10.2307/2372560.

Поступила 14.01.2020

После доработки 22.01.2020

Принята к публикации 27.01.2020

Пацко Валерий Семенович

канд. физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: patsko@imm.uran.ru

Федотов Андрей Анатольевич

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: andreyfedotov@mail.ru

REFERENCES

1. Laumond J.-P. (ed.) *Robot motion planning and control*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 229, 354 p. doi: 10.1007/BFb0036069.
2. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Computer and Systems Sciences Internat.*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
3. Simonenko A.S., Fedotov A.A. Reachable set for the Dubins car under asymmetric constraint on control. *CEUR-WS, Proc. of 48th Internat. Youth School-Conf.*, Yekaterinburg, 2017, Modern Problems in Mathematics and its Applications; vol. 1894, pp. 79–87 (in Russian). Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt6.pdf>.
4. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. N Y; London: Interscience Publishers John Wiley & Sons, 1962, 360 p. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*. Moscow: Nauka Publ., 1969, 384 p.
5. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. N Y; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635.
6. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American J. Math.*, 1957, vol. 79, no. 3, pp. 497–516. doi: 10.2307/2372560.

Received January 14, 2020

Revised January 22, 2020

Accepted January 27, 2020

Valerii Semenovich Patsko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: patsko@imm.uran.ru.

Andrei Anatol'evich Fedotov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: andreyfedotov@mail.ru.

Cite this article as: V. S. Patsko, A. A. Fedotov. Analytic description of a reachable set for the Dubins car, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 182–197.

УДК 519.8

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**Г. А. Тимофеева**

Традиционный подход к решению задач оптимизации со случайными параметрами состоит в нахождении детерминированного решения, удовлетворяющего тому или иному критерию: оптимизации среднего ожидаемого значения целевой функции, оптимизации вероятности достижения определенного уровня или оптимизации квантили. В данной обзорной работе рассматривается решение задачи стохастической оптимизации в форме случайного вектора (или случайного множества). Это относительно новый класс задач, который называют вероятностными задачами оптимизации. Отмечается, что применение вероятностных решений в задачах со случайными параметрами обосновано в тех случаях, когда лиц, принимающих решения, много. В числе прочих задачи вероятностной оптимизации возникают при анализе многокритериальных задач; в этом случае весовые коэффициенты важности критериев рассматриваются как случайный вектор. В статье представлены важные примеры экономико-математических моделей — задач оптимизации с большим числом принимающих решение лиц: задача об оптимальном выборе на основе функции предпочтения потребителей; задача о выборе маршрута на основе оптимизации обобщенной стоимости поездки; задача о портфеле ценных бумаг с учетом распределения склонности инвесторов к риску. Приведены математические формулировки этих задач в форме задач вероятностной оптимизации. Изучаются некоторые свойства построенных моделей, в том числе анализируется математическое ожидание вероятностного решения задачи оптимизации.

Ключевые слова: вероятностная оптимизация, стохастическая оптимизация, вероятностное решение, многокритериальная оптимизация, линейная свертка критериев, выбор потребителя, функция предпочтения, выбор маршрута, задача о портфеле ценных бумаг.

G. A. Timofeeva. Probabilistic solutions of conditional optimization problems.

Optimization problems with random parameters are studied. The traditional approach to their solution consists in finding a deterministic solution satisfying a certain criterion: optimization of the expected value of the objective function, optimization of the probability of attaining a certain level, or optimization of the quantile. In this review paper, we consider a solution of a stochastic optimization problem in the form of a random vector (or a random set). This is a relatively new class of problems, which is called “probabilistic optimization problems.” It is noted that the application of probabilistic solutions in problems with random parameters is justified in the cases of multiple decision makers. Probabilistic optimization problems arise, for example, in the analysis of multicriteria problems; in this case, the weight coefficients of the importance of criteria are regarded as a random vector. We consider important examples of economic–mathematical models, which are optimization problems with a large number of decision makers: the problem of optimal choice based on the consumer’s preference function, the route selection problem based on the optimization of the generalized cost of the trip, and the securities portfolio problem with a distribution of the investors’ risk tolerance. Mathematical statements of these problems are given in the form of problems of probabilistic optimization. Some properties of the constructed models are studied; in particular, the expected value of the probabilistic solution of an optimization problem is analyzed.

Keywords: probabilistic optimization, stochastic optimization, probabilistic solution, multicriteria optimization, linear convolution of criteria, consumer choice, preference function, route selection, securities portfolio problem.

MSC: 90C15, 90C29, 91B70, 91B16

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-198-211

Введение

Исследованию задач стохастической оптимизации посвящено значительное число работ; в настоящее время это сформировавшаяся область математики [1]. Под задачей стохастической оптимизации понимается задача оптимизации, целевая функция или ограничения в которой зависят от случайных параметров. Традиционно под решением задачи оптимизации понимается детерминированное решение, удовлетворяющее тем или иным вероятностным критериям,

таким как оптимизирующее среднее значение, вероятность достижения определенного уровня целевой функции и оптимизирующее квантиль целевой функции. Однако в ряде прикладных задач (в том числе экономических) имеет смысл обратиться к вероятностному решению задачи оптимизации со случайными параметрами. Термин “вероятностное решение” используется в работах О.А. Поповой [2;3], в которых сформулирована постановка задачи вероятностной оптимизации и рассмотрен вопрос о нахождении плотности распределения вероятностного решения для простейшей задачи. К решению вспомогательных задач вероятностной оптимизации (random optimization) прибегают при моделировании сложных систем методом Монте-Карло [4] или при рандомизации неопределенности [5;6] и, как правило, эти задачи не исследуют отдельно.

Предлагаемая модель — вероятностное решение задачи оптимизации со случайными параметрами — имеет широкое применение в условиях, когда оптимальный вариант выбирается многократно, многими агентами и относительно независимо. Ярким примером такой задачи является задача рационального выбора при заданном распределении доходов потребителей.

Среди задач со случайным параметром отметим класс моделей, которые возникают при изучении задач оптимизации с несколькими критериями. Многокритериальные задачи оптимизации исследуются в различных постановках: это задачи дискретного выбора из множества альтернатив [7], задачи выбора оптимального решения в \mathbb{R}^n , многокритериальные задачи с неопределенностью [8], задачи выбора оптимального (в смысле нескольких критериев) управления динамической системой [9]. К числу важных приемов решения задачи с несколькими критериями относятся использование линейной свертки критериев и переход к параметрической задаче оптимизации с одним критерием [7;8]. Значимость критериев является субъективным векторным параметром; он зависит от лица, принимающего решение (ЛПР). В случае, когда лиц, принимающих решение, много, этот вектор может рассматриваться как случайный, а задача выбора оптимального решения — как задача вероятностной оптимизации с целевой функцией, зависящей от случайного вектора.

Вероятностный подход к моделированию предпочтений пассажиров был предложен в статье [10] для описания предпочтений пассажиров при выборе типа транспорта и прогнозирования изменения пассажиропотоков при введении нового маршрута. Предлагается распространить вероятностный подход на широкий круг многокритериальных задач, в которых выбор решения производится многими ЛПР. Рассмотрена модель выбора портфеля ценных бумаг со случайной склонностью инвестора к риску. В последнем случае критериями выступают средняя доходность и риск (среднее квадратичное отклонение) доходности портфеля.

В статье приведен обзор основных критериев выбора детерминированных решений в задачах стохастической оптимизации, обоснована актуальность исследования вероятностных решений задач оптимизации со случайными параметрами, показано, что такие решения имеют широкое применение при анализе различных экономических моделей, в том числе модели рационального выбора, модели предпочтений пассажиров, модели портфеля ценных бумаг. Исследованы некоторые свойства вероятностных решений для соответствующих задач стохастической оптимизации.

1. Постановки задач стохастической оптимизации

Под задачей стохастической оптимизации обычно понимаются задачи оптимизации, в которых целевая функция и(ли) ограничения зависят от случайных параметров. Хотя в к этому типу задач относятся также многошаговые стохастические задачи выбора решений, задачи дискретного выбора и оптимизации на марковских цепях и некоторые другие (см. обзор [11]), в данной статье мы ограничимся анализом одношаговой задачи оптимизации в конечномерном пространстве при наличии ограничений. Будем рассматривать два основных типа задач стохастической оптимизации:

- 1) с целевой функцией, зависящей от случайного параметра;

2) с ограничениями, зависящими от случайного параметра.

Некоторые авторы изучают также задачи, содержащие случайные параметры и в целевой функции, и в ограничениях, но в большинстве работ многие прикладные задачи относятся к задачам стохастической оптимизации первого либо второго типов.

Задача первого типа имеет вид

$$\begin{cases} f(x, \xi) \rightarrow \min, \\ x \in X. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь и далее $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ — случайный вектор со значениями в B , $f(x, b)$ — непрерывная функция $X \times B \mapsto \mathbb{R}^1$, $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, $B \subset \mathbb{R}^m$ — замкнутое связное множество.

Задача второго типа записывается в форме

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min, \\ g_j(x, \xi_j) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ x \in X. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь $f(x)$, $g_1(x, b)$, \dots , $g_m(x, b)$ — непрерывные функции.

С математической точки зрения постановки задач (1.1) и (1.2) не являются корректными, пока не указано, в каком смысле понимается их решение. Изучение задач стохастической оптимизации начиналось с анализа задач типа (1.1), где в качестве критерия выбирается математическое ожидание целевой функции:

$$\begin{cases} Ef(x, \xi) \rightarrow \min, \\ x \in X. \end{cases} \quad (1.3)$$

Полученная задача является классической задачей оптимизации в конечномерном пространстве. Ее исследование облегчает тот факт, что взятие математического ожидания сохраняет свойство выпуклости по x целевой функции и при непрерывном распределении случайного вектора, $F(x) = Ef(x, \xi)$ является более гладкой функцией, чем исходная [12].

С учетом того что функцию $F(x)$, как правило, не удастся записать аналитически, для численного решения задачи (1.3) были разработаны алгоритмы стохастического программирования, такие как метод стохастического градиента, метод случайного поиска, метод квазиградиента для условной оптимизации и др., в которых используются значения лишь функции $f(x, \xi)$ или ее градиента. Первоначально метод стохастического градиента предложен в работе [13]; исследование сходимости и развитие численных методов стохастического программирования активно проводились в 1960-80-х гг. (см. [12; 14] и др.) и продолжают до настоящего времени [15; 16].

Начиная с 1990-х гг. акцент в исследовании задач стохастической оптимизации смещается в сторону использования вероятностного и квантильного критериев выбора решения. В случае линейной целевой функции задача оптимизации квантили связана с двухкритериальной задачей оптимизации, т. е. максимизацией математического ожидания и минимизацией дисперсии. Такой подход широко применяется при исследовании задачи о портфеле ценных бумаг [17; 18]. Однако оказалось, что задачи оптимизации вероятностного и квантильного критериев имеют специальные свойства и требуют отдельного глубокого теоретического исследования.

Сформулируем задачу выбора оптимального решения по вероятностному критерию в задаче стохастической оптимизации (1.1). Зафиксируем некоторый уровень значений целевой функции d и будем максимизировать вероятность непревышения этого уровня:

$$\begin{cases} \mathcal{P}\{f(x, \xi) \leq d\} \rightarrow \max, \\ x \in X. \end{cases} \quad (1.4)$$

Обозначим ее решение через \hat{X}_d , а максимальное значение функции вероятности через $\hat{p}(d)$.

При использовании квантильного критерия фиксируют уровень вероятности β (обычно близкий к единице, например 0.95) и максимизируют квантиль целевой функции этого уровня $q_\beta(x)$:

$$\begin{cases} q_\beta(x) \rightarrow \min, \\ q_\beta(x) = \{\min q : \mathcal{P}\{f(x, \xi) \leq q\} \geq \beta\}, \\ x \in X. \end{cases} \quad (1.5)$$

Решение задачи (1.5) обозначим через \tilde{X}_β , а оптимальное значение целевой функции через $\tilde{q}(\beta)$.

Так как выбор желаемого уровня d для значений целевой функции в задаче (1.4) и уровня вероятности β в задаче квантильной оптимизации (1.5) зависит от исследователя, то эти задачи можно рассматривать как задачи с параметрами. Изучалась взаимосвязь оптимальных решений и оптимальных значений целевых функций $\hat{p}(d)$ и $\tilde{q}(\beta)$ в задачах (1.4) и (1.5), получены условия, при выполнении которых эти функции непрерывны и взаимно обратны, проанализированы свойства функций вероятности и квантили и методы их аппроксимации [19].

Исследование задач стохастической оптимизации второго типа развивалось параллельно, обзор основных результатов этого направления приведен в [20]. Наиболее распространенный способ решения задачи стохастической оптимизации второго типа — это переход к задаче с вероятностными ограничениями:

$$\begin{cases} \min f(x), \\ \mathcal{P}\{g_j(x, \xi) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}\} \geq \beta. \end{cases} \quad (1.6)$$

Доказано следующее утверждение [1]: если функции $g_j(x, b)$ вогнутые по x, b , а функция распределения вектора ξ квазивыпукла, то функция вероятности $P(x) = \mathcal{P}\{g_j(x, \xi) \leq 0, j = \overline{1, m}\}$ квазивогнута.

Из квазивогнутости функции $P(x)$ вытекает, что ограничение в задаче (1.6) задает выпуклое множество.

Среди задач с вероятностными ограничениями наиболее исследованными являются задачи стохастического линейного программирования:

$$\begin{cases} \min c^T x, \\ \mathcal{P}\{Ax \leq \xi\} \geq \beta. \end{cases} \quad (1.7)$$

В работах [21–23] и других изучались вопросы вычисления и аппроксимации функции $F(x) = \mathcal{P}\{Ax \leq \xi\}$ в случае непрерывного, в том числе нормального, распределения случайных возмущений ξ , применения численных методов и имитационного моделирования для решения задачи (1.7).

2. Вероятностные решения в задачах стохастической оптимизации

Перейдем к анализу вероятностных решений задач стохастической оптимизации. Введем базовые определения. Рассмотрим вспомогательную задачу оптимизации в \mathbb{R}^n , в которой целевая функция зависит от параметра $b \in \mathbb{R}^m$:

$$\min_{x \in X} f(x, b). \quad (2.1)$$

Будем предполагать, что X — компактное множество, $X \subset \mathbb{R}^n$, а функция $f(x, b)$ определена и непрерывна на $X \times \mathbb{R}^m$. Множество решений для фиксированного $b \in \mathbb{R}^m$ обозначим через

$$X(b) = \text{Arg} \min_{x \in X} f(x, b).$$

В данных условиях минимум в задаче (2.1) достигается, множество $X(b)$ является не пустым компактом для всех b , в частности оно может состоять из одной точки.

Далее считаем, что параметр b носит случайный характер, т. е. $b = \xi$, где ξ — случайный вектор. Получим задачу *вероятностной оптимизации*

$$\min_{x \in X} f(x, \xi),$$

ее решение определим как $X(\xi)$, где

$$X(\xi) = \text{Arg} \min_{x \in X} f(x, \xi).$$

В рассматриваемых условиях вероятностное решение $X(\xi)$ является случайным компактным множеством в смысле [24]. Во многих прикладных задачах решение задачи оптимизации при допустимых значениях параметра определяется однозначно, в этом случае можно исследовать распределение случайного вектора $X(\xi)$.

Вторым типом задач вероятностной оптимизации являются задачи с вероятностными ограничениями, например задачи со случайными параметрами в правых частях ограничений типа неравенство (или равенство):

$$\begin{cases} \min_{x \in X} f(x), \\ g_j(x) \leq b_j, \quad j = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (2.2)$$

где правые части ограничений $b = \{b_1, \dots, b_m\} = \xi$ являются случайным вектором.

Предполагаем, что $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ — непрерывные функции, $X \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество. Решение $X(b)$ задачи (2.2) существует, вообще говоря, не при всех $b \in \mathbb{R}^m$, так как множество допустимых значений может быть пустым при некоторых значениях параметра. Обозначим через $B \subset \mathbb{R}^m$ множество значений параметра b , для которых решение задачи (2.2) не пусто. Если случайный вектор ξ принимает значения из B , то получаем задачу вероятностной оптимизации, множество решений которой $X(\xi)$ — случайное множество.

Как уже упоминалось, рассматривать вероятностное решение задачи оптимизации имеет смысл, когда решение принимается независимо значительным числом лиц. Приведем пример такой задачи. Сформулируем известную задачу рационального выбора [25] как задачу вероятностной оптимизации со случайным ограничением.

Пусть $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto (0; +\infty)$ — функция полезности благ, $p = \{p_1, \dots, p_n\}$ — вектор цен, $p \in K^+$,

$$K^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, \quad i = \overline{1, n}\},$$

параметр b — доход потребителя (ЛПР). Задача об оптимальном выборе при бюджетном ограничении имеет вид

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \max_x, \\ p^T x \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Неравенство $x \geq 0$ здесь и далее означает, что все координаты вектора x неотрицательны.

Предположение 1. Будем считать, что функция полезности $f(x)$ удовлетворяет стандартным предположениям:

- 1) функция $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема на множестве K^+ ;
- 2) все частные производные первого порядка $f'_{x_i}(x)$ положительны внутри K^+ ;
- 3) матрица Гессе (вторых производных) является отрицательно определенной внутри K^+ .

Эти условия обеспечивают монотонное возрастание функции полезности по каждой из переменных и вогнутость функции внутри K^+ [25].

При выполнении условий предположения 1 решение задачи (2.3) $X(b)$ существует и единственно, $X(b) \in K^+$ для любых положительных $b \in (0, +\infty)$. Решением задачи (2.3) при фиксированных ценах p будет распределение потребления благ потребителя с доходом b .

Обозначим через X^* объединение всех возможных решений при различных значениях параметра:

$$X^* = \bigcup_{b>0} X(b).$$

Отметим, что $X(b)$ непрерывно зависит от параметра b . В прикладных макроэкономических исследованиях часто используются функции полезности, обладающие свойством α -однородности:

$$f(kx) = k^\alpha f(x) \quad \text{для всех } k > 0. \quad (2.4)$$

В теории рационального потребления решение $x^* \triangleq X(1)$ задачи при $b = 1$ называется репрезентативным потребителем, решение задачи при произвольном $b > 0$ имеет вид [26] $X(b) = bx^*$.

В этом случае объединение множества решений X^* представляет луч

$$X^* = \{kX(1), \quad k > 0\}.$$

Если функция полезности не однородна, то множество решений представляет кривую, расположенную в K^+ .

Рассмотрим теперь модель, в которой доход (случайно выбранного) потребителя описывается случайной величиной $b = \xi$, распределение ξ можно оценить на основании статистических данных.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть для функции $f(x)$ выполняются условия предположения 1, а ξ — случайная величина, принимающая значение из интервала $(0; +\infty)$, тогда отображение $X = X(\xi)$, где $X(b)$ — решение задачи оптимизации (2.3) при $\xi = b$, является случайным вектором, принимающим значения из множества X^* .

Утверждение следует из существования и единственности решения задачи (2.3) при выполнении условий предположения 1, а также из непрерывной зависимости решения задачи оптимизации от параметра b .

Утверждение 1. Пусть выполняются следующие условия:

1) ξ — случайная величина, принимающая лишь положительные значения, и ее математическое ожидание и дисперсия существуют и равны соответственно

$$E(\xi) = \bar{b}, \quad \sigma^2(\xi) = s^2;$$

2) функция $f(x)$ — положительно однородная функция с коэффициентом $\alpha > 0$, т.е. выполняется условие (2.4).

Тогда моменты распределения вероятностного решения задачи (2.3) определяются как

$$E(X(\xi)) = X(E(\xi)) = \bar{b}x^*, \quad Cov(X(\xi)) = s^2x^*(x^*)^T.$$

Утверждение следует из равенства $X(\xi) = \xi x^*$ в случае α -однородной функции полезности $f(x)$.

Как известно [25; 27], реально функция полезности преимущественно неоднородна. При неоднородной функции полезности множество X^* невыпукло, операция усреднения выводит точку за границы этого множества и $E(X(\xi)) \neq X(E(\xi))$. В этом случае усредненные данные о расходах на те или иные группы товаров не дают оснований для прогноза расходов, единый “репрезентативный потребитель” не существует. В макроэкономике такую ситуацию моделируют с использованием нескольких репрезентативных потребителей. Другим подходом является использование предлагаемой модели, основанной на вероятностном решении задачи рационального потребления.

С прикладной точки зрения важен вопрос о том, как изменится распределение потребления при изменении распределения доходов, т. е. при изменении функции распределения случайной величины ξ . При более детальном анализе рынка можно учесть тот факт, что цены на большинство ресурсов не фиксированы, более корректно их считать также случайными величинами, имеющими некоторый разброс вокруг средних значений. Анализ распределения оптимальных решений задачи рационального потребления со случайными ценами выходит за рамки данного исследования.

3. Вероятностные решения задач многокритериальной оптимизации

Вероятностные решения естественно возникают в задачах с несколькими критериями. Если лиц, принимающих решение, много, то выбор отдельного лица можно считать зависящим от случайного вектора θ , описывающего индивидуальные предпочтения ЛПР. Приведем общую постановку задачи.

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации — задачу оптимального выбора x из множества альтернатив X , максимизирующего m критериев:

$$\begin{cases} f_1(x) \rightarrow \max_{x \in X}, \\ \dots \\ f_m(x) \rightarrow \max_{x \in X}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь $X \subset \mathbb{R}^n$, функции $f_j(x) : X \mapsto \mathbb{R}^1$. Через X^* будем обозначать множество Парето-оптимальных решений задачи (3.1).

Обратимся к задаче вероятностной оптимизации, связанной с многокритериальной задачей. Пусть $\theta = \theta(\omega) = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ — вектор случайных параметров, принимающих неотрицательные значения и отражающих важность критериев для случайно выбранного ЛПР. Введем целевую функцию для случайного ЛПР как

$$F(x, \theta) = \theta_1 f_1(x) + \dots + \theta_m f_m(x).$$

Получим задачу вероятностной оптимизации со случайным критерием:

$$F(x, \theta) \rightarrow \max_{x \in X}. \quad (3.2)$$

Обозначим ее решение через $X(\theta)$. Как известно [8], для любого $b \in \mathbb{R}_+^m = \{b \in \mathbb{R}^m : b_j > 0, j = \overline{1, m}\}$ решение $X(b)$ задачи (3.2) при $\theta = b$ принадлежит множеству Парето-оптимальных решений, т. е. $X(b) \subset X^*$.

З а м е ч а н и е. Если критериальные функции $f_j(x)$ нормированы, т. е. принимают значения из интервала $[0; 1]$, то θ_i являются весовыми коэффициентами и вектор случайных параметров θ принимает значения из симплекса

$$B = \{b \in \mathbb{R}^m : b_1 + \dots + b_m = 1, b_j \geq 0, j = \overline{1, m}\}.$$

Приведем пример задачи дискретной вероятностной оптимизации, в которой множество возможных решений X состоит из набора альтернатив.

3.1. Выбор маршрута пассажиром

Пусть у потребителя (пассажира) есть выбор между n возможными альтернативами (маршрутами). Определим множество альтернатив как $A_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$, где e_i — базисные векторы в \mathbb{R}^n . Обозначим через c_i стоимости проезда i -м маршрутом, t_i — время проезда. Предполагается, что совпадающих значений параметров нет, т. е. точки $\{c_i, t_i\}, i = \overline{1, n}$, на плоскости критериев различны.

Задача о выборе маршрута рассматривается как задача минимизации двух критериев: времени перевозки $T(x)$ и ее стоимости $C(x)$. Под вектором $x \in A_0$ будем понимать индикатор выбора маршрута (элемента множества альтернатив), т. е. $x = e_i$ при выборе i -го маршрута, $T(x) = t_1x_1 + \dots + t_nx_n$, $C(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$.

Для математического описания вероятностного характера предпочтений пассажиров исследуем следующую модель. В качестве критерия будем использовать “обобщенную цену перевозки”, которая представляет сумму двух критериев:

$$f(x; \theta) = C(x) + \theta T(x),$$

где $\theta \geq 0$ — индивидуальная “ценность” единицы затраченного времени. Этот параметр считается зависящим от “случайно выбранного” пассажира, т. е. случайным. Получаем следующую задачу вероятностной оптимизации, зависящую от случайного параметра $\theta \in [0, \infty)$:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 1, & x_i \in \{0; 1\} \\ f(x; \theta) = C(x) + \theta T(x) \rightarrow \min_x. \end{cases} \quad (3.3)$$

Вероятностное решение этой задачи обозначим через $X_0(\theta)$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2 [28]. *Если случайная величина θ имеет непрерывное распределение на интервале $[t_1, t_2] \subseteq [0, +\infty)$, то решение задачи (3.3) $X_0(\theta)$ состоит из единственной точки с вероятностью 1.*

В статье [10] были получены соотношения для вероятностей альтернатив

$$q_i^{(j)} = Pr\{X_0(\theta) = e_i\}.$$

Рассмотрим важный вопрос: как изменится распределение решения задачи оптимизации, т. е. вероятности выбора того или иного решения, если множество альтернатив расширится? Пусть $A_1 = A_0 \cup e_{n+1}$, где e_{n+1} — новый маршрут (альтернатива), а распределение случайного параметра θ не изменилось. Обозначим решение задачи оптимизации для нового множества альтернатив через $X_1(\theta)$. Предпочтения случайно выбранного пассажира до и после введения нового маршрута описываются случайным вектором $\{X_0(\theta), X_1(\theta)\}$, где X_i — зависимые между собой дискретные случайные величины, принимающие значения $X_i \in A_i$, $i = 0, 1$.

Получена следующая теорема о свойствах решений задачи вероятностной оптимизации.

Теорема 2 [28, теорема 1]. *Переходные вероятности*

$$p_{ik} = Pr\{X_1(\theta) = e_i | X_0(\theta) = e_j\} = 0 \quad \text{для всех } i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n}, \quad k \neq i.$$

По заданному распределению θ можно рассчитать переходные вероятности $p_{i, n+1}$. Существенный интерес имеет вопрос о восстановлении распределения θ по заданным вероятностям альтернатив $q_i^{(j)}$, $j = 0, 1$, исследование которого начато в [28].

3.2. Портфель ценных бумаг

Задача о выборе портфеля ценных бумаг (ПЦБ) является классическим примером задачи стохастической оптимизации, т. е. задачи о выборе детерминированного решения в задаче оптимизации со случайными параметрами [18].

Пусть имеется n активов, доходность которых в фиксированный период описывается как случайный вектор ξ , $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ — вложения в n рискованных активов, r — безрисковая

процентная ставка, x_0 — доля вложений в безрисковый актив, W — капитал, который инвестируется. Задача о ПЦБ может рассматриваться в следующих постановках, связанных друг с другом [5; 17; 18; 29]:

- бикритериальная задача максимизации ожидаемой доходности и минимизации риска, описываемого средним квадратичным отклонением;
- задача минимизации риска при фиксированном уровне доходности;
- задача максимизации квантили, т.е. дохода, гарантированного с заданной вероятностью.

Обозначим через $m = \{m_1, \dots, m_n\} = E(\xi) \in \mathbb{R}^n$ вектор математических ожиданий вектора случайных доходностей активов, а через $V = cov(\xi)$ ковариационную матрицу. Здесь и далее предполагать, что матрица V невырождена.

Ожидаемая доходность портфеля описывается функцией

$$f_1(x) = E(x^T \xi + r x_0) = r + (m - rl)^T x,$$

где $l = \{1, \dots, 1\}^T \in \mathbb{R}^n$, вложение в безрисковый актив составляет $x_0 = 1 - l^T x$.

Риск инвестиций описывается средним квадратичным отклонением доходности портфеля или задача минимизации риска сводится к задаче минимума дисперсии доходности портфеля

$$f_2(x) = \sigma^2(x^T \xi) = x^T V x.$$

Так как решение задачи о выборе ПЦБ пропорционально объему вкладываемого капитала, то далее без ограничения общности будем полагать $W = 1$.

Запишем задачу выбора портфеля с заданным уровнем доходности d , $d \geq r$:

$$\begin{cases} x^T V x \rightarrow \min, \\ r + (m - rl)^T x \geq d, \\ l^T x \leq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Утверждение 3 [18]. *В случае невырожденной матрицы ковариации V оптимальные решения задачи (3.4) пропорциональны эффективному рыночному портфелю x^* и для любого $d \geq r$ имеют вид*

$$X(d) = \frac{d - r}{f_2(x^*)} x^*, \quad x^* = V^{-1}(m - rl). \quad (3.5)$$

Рассмотрим задачу вероятностной оптимизации, связанную с исходной постановкой. Уровень желаемой доходности d отражает склонность инвестора к риску (чем он выше, тем больше риск) и зависит от конкретного (случайно выбранного) инвестора. Таким образом, планируемая доходность инвестиционного портфеля может рассматриваться как случайная величина $d = \mu$, где μ — случайная величина, распределенная на $[r, +\infty)$. Отметим, что случайными являются и склонность к риску μ , и объем вкладываемого капитала W , причем эти величины статистически взаимосвязаны. В данной статье эта взаимосвязь не исследуется.

Будем рассматривать распределение параметра μ на некотором интервале

$$[m_1, m_2] \subset [r; +\infty).$$

Получим задачу оптимизации квадратичного критерия со случайным линейным ограничением (3.4).

Для каждого значения d случайной величины μ решение задачи $X(d)$ определяется однозначно соотношениями (3.5), поэтому $X(\mu)$ есть случайный вектор.

Утверждение 4. *Пусть μ — случайная величина, принимающая значения из $[r, +\infty)$, ее математическое ожидание $E(\mu) = \bar{\mu}$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(\mu)$ существуют, тогда вероятностное решение задачи (3.4) $X(\mu)$ удовлетворяет условиям*

$$E(X(\mu)) = X(\bar{\mu}), \quad (3.6)$$

$$cov(X(\mu)) = \frac{\sigma^2(\mu)}{f_2^2(x^*)} x^* (x^*)^T.$$

Утверждение 4 непосредственно следует из формулы (3.5), которая отражает линейную зависимость решения задачи условной оптимизации от параметра. Отметим, что (3.6) — это формулировка известного свойства рыночных портфелей [18] в терминах свойств вероятностных решений задачи стохастической оптимизации.

Рассмотрим ту же задачу со случайным параметром при наличии естественных ограничений неотрицательности, которым, как правило, должны удовлетворять инвестиции. При фиксированном значении параметра $\mu = d$ задача имеет вид

$$\begin{cases} f_2(x) = x^T V x \rightarrow \min_x, \\ f_1(x) = r + (m - rl)^T x \geq d, \\ x \geq 0, \\ l^T x \leq 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Обозначим через $X_1(d)$ решение задачи (3.7) при заданном $d \geq r$.

Из определения недоминируемого решения следует, что любое оптимальное по Парето решение x^* в задаче с двумя критериями

$$\begin{cases} f_2(x) = x^T V x \rightarrow \min_x, \\ f_1(x) = r + (m - rl)^T x \rightarrow \max_x, \\ x \geq 0, \\ l^T x \leq 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

является решением задачи параметрической задачи оптимизации (3.7) при некотором d , причем на этом решении параметрическое ограничение является активным (подробное обоснование приведено в [30], теорема 1), т. е. выполняется равенство

$$r + (m - rl)^T x^* = d.$$

Утверждение 5. Множество X_1^* оптимальных по Парето решений в задаче с двумя критериями (3.8) совпадает с объединением

$$X_1^* = \bigcup_{d \in [r; m_+]} X_1(d),$$

где $m_+ = \max\{m_1, \dots, m_n\}$ и представляет из себя ломаную, состоящую из конечного числа отрезков.

Отметим, что m_+ является максимальным значением параметрического ограничения (целевой функции $f_1(x)$) на множестве допустимых значений

$$\begin{cases} m_+ = \max_x f_1(x), \\ l^T x \leq 1, \quad x \geq 0, \end{cases}$$

а $r = f_1(x_-)$, где $x_- = \{0, 0, 0\}$ — решение задачи минимизации выпуклой квадратичной функции

$$\begin{cases} \min_x f_2(x), \\ l^T x \leq 1, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Запишем стандартные необходимые условия оптимальности в задаче выпуклого программирования (3.7) (см. например, [12]). Учитываем, что ограничение $r + (m - rl)^T x = d$ является активным (выполняется как равенство на множестве недоминируемых решений):

$$\begin{cases} 2Vx - z_1(m - rl) + z_0 l - \sum_{j \in J} y_j e_j = 0, \\ (m - rl)^T x = d, \quad z_1 \geq 0, \\ l^T x - 1 = 0, \quad z_0 \geq 0 \text{ или } l^T x \leq 1, \quad z_0 = 0, \\ x_j \geq 0, \quad y_j = 0, \quad j \notin J, \\ x_j = 0, \quad y_j \geq 0, \quad j \in J. \end{cases} \quad (3.9)$$

Система (3.9) содержит $2n + 2$ линейных уравнения, из которых можно найти векторы $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z = \{z_0, z_1\}$. Пусть для некоторого набора активных индексов J и значения параметра $d = d_1$ существует решение системы уравнений и неравенств (3.9). Правые части уравнений зависят от параметра d линейно, следовательно, для этого набора активных индексов решение задачи параметрической оптимизации $x^*(d), y^*(d), z^*(d)$ в окрестности точки d_1 зависит от параметра линейно и составляет отрезок (возможно, вырожденный в точку). Так как возможных наборов активных индексов конечное число, то множество эффективных состоит из конечного числа отрезков и, возможно, отдельных точек.

В работе [30] (следствие 1 и свойство 2) для случая линейных ограничений общего вида и квадратичной целевой функции доказано, что множество эффективных решений представляет непрерывную ломаную, состоящую из конечного числа отрезков.

Рассмотрим распределение оптимальных портфелей $X_1(\mu)$ предполагая, что параметр задан как $d = \mu$ и является случайной величиной. Свойство сохранения среднего значения для задачи (3.7) со случайным параметром не выполняется в отличие от задачи без условий неотрицательности:

$$E(X_1(\mu)) \neq X_1(\bar{\mu}), \quad \bar{\mu} = E(\mu).$$

Более того, в этом случае среднее значение оптимальных портфелей (“рыночный портфель”) не принадлежит множеству эффективных решений: $E(X_1(\mu)) \notin X_1^*$.

В качестве примера исследуем задачу вероятностной оптимизации (3.7) для трех активов и равномерного распределения параметра $d = \mu$ на интервале $[r; m_+]$. Пусть

$$r = 1, \quad m = \{1.5, 2, 2.2\}, \quad V = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

С помощью алгоритма построения множества Парето-оптимальных решений в линейно-квадратичной задаче, предложенного в [30], получено следующее решение задачи. Множество X_1^* представляет собой ломаную, соединяющую точки $\{X^{(m)}, m = 0, \dots, 3\}$; каждая точка является решением задачи параметрической оптимизации (3.7) при соответствующем значении d . Ниже приведены значения параметра и координаты и значение критериальной функции для каждой вершины:

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, & X^{(0)} &= \{0, 0, 0\}, \\ d_1 &= 1.853, & X^{(1)} &= \{0.385, 0.385, 0.230\}, \\ d_2 &= 2.083, & X^{(2)} &= \{0, 0.585, 0.415\}, \\ d_3 &= 2.2, & X^{(3)} &= \{0, 0, 1\}. \end{aligned}$$

Решение $X^{(0)}$ соответствует вложению всего капитала в безрисковый актив, ребро $X^{(0)}X^{(1)}$ состоит из портфелей, которые пропорциональны эффективному рыночному портфелю x^* и вычисляются по формуле (3.5), $X^{(3)}$ — наиболее рисковое вложение (с учетом ограничений неотрицательности); весь капитал вкладывается в 3-й актив, который характеризуется максимальной ожидаемой доходностью и максимальным риском.

Случайный вектор $X_1(\mu)$ распределен непрерывно на ломаной $X_1^* = [X^{(0)}X^{(1)}X^{(2)}X^{(3)}]$. Расчеты показывают, что $E(X_1(\mu)) = \{0.173, 0.257, 0.214\} = \bar{X}$, для точки \bar{X} не выполняются условия Парето-оптимальности, и, следовательно, $E(X_1(\mu)) \notin X_1^*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Prekopa A.** Stochastic programming. Dordrecht: Springer, 1995. 600 p. (Mathematics and Its Applications; vol. 324.) doi: 10.1007/978-94-017-3087-7.
2. **Попова О.А.** Задача линейного программирования со случайными входными данными // Вестн. СГУТУ. 2013. Т. 41, № 2. С. 19–23.

3. **Ропова О.А.** Optimization problems with random data // Журн. Сиб. федерал. ун-та. Сер.: Математика и физика. 2013. Т. 6. № 4. С. 506–515.
4. **Calafiore G., Campi M.C.** Uncertain convex programs: randomized solutions and confidence levels // Math. Program. Ser. A. 2005. Vol. 102. P. 25–46. doi:10.1007/s10107-003-0499-y.
5. **Bonami P., Lejeune M.A.** An exact solution approach for portfolio optimization problems under stochastic and integer constraints // Stochastic Programming E-print Series (SPEPS). 2007. Iss. 1. No. 2936317-2. doi: 10.18452/8373.
6. **Kuo-Chen Hung, Shu-Cheng Lin, Chun-Hsiao Chu** Note on solving probabilistic programming problems involving multi-choice parameters // J. Interdisciplinary Math. 2015. Vol. 18, no. 5. P. 617–627. doi: 10.1080/09720502.2015.1047606.
7. **Поудиновский В.В.** Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 3. С. 415–424. doi: 10.7868/S004446691403017X.
8. **Жуковский В.И., Молостров В.С.** Многокритериальная оптимизация систем в условиях неполной информации. М.: МНИИПУ, 1990. 112 с.
9. **Куржанский А.Б., Комаров Ю.А.** Гамильтонов формализм для задачи управления движением с векторным критерием // Докл. АН. 2018. Т. 480, № 4. С. 408–412. doi: 10.7868/S0869565218160053.
10. **Timofeeva G., Martynenko A., Zavalishchin D.** Probabilistic modeling of passengers and carriers preferences via bicriterial approach // 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018): IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 496–498. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.469.
11. **Powell W.B.** A unified framework for stochastic optimization // European J. Oper. Research. 2019. Vol. 275, no. 3. P. 795–821. doi: 10.1016/j.ejor.2018.07.014.
12. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 383 с.
13. **Robbins H., Monro S.** A stochastic approximation method // The Annals Math. Stat. 1951. Vol. 22, no. 3. P. 400–407. doi: 10.1214/aoms/1177729586.
14. **Ermoliev Y.** Stochastic quasigradient methods and their application to system optimization // Stochastics. Ser. B. 1983. Vol. 9, no. 1–2. P. 1–36. doi: 10.1080/17442508308833246.
15. **Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N.** Gradient convergence in gradient methods with errors // SIAM J. Optim.. 2000. Vol. 10, no 3. P. 627–642. doi: 10.1137/S1052623497331063.
16. **Rosasco L., Villa S., Vũ B.C.** Convergence of stochastic proximal gradient algorithm // Appl. Math. Optim. 2019. Vol. 18. P. 1–27. doi: 10.1007/s00245-019-09617-7.
17. **Lai T.L., Xing H., Chen Z.** Mean-variance portfolio optimization when means and covariances are unknown // Annals Appl. Stat. 2011. Vol. 5, no. 2 A. P. 798–823. doi: 10.1214/10-AOAS422.
18. **Markowitz H.M.** Portfolio selection: efficient diversification of investments. 2nd ed. Cambridge, Mass.: B. Blackwell, 1991. 384 p.
19. **Кан Ю.С., Кибзун А.И.** Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. Москва: Физматлит, 2009. 372 с.
20. **Lejeune M.A., Prekopa A.** Relaxations for probabilistically constrained stochastic programming problems: review and extensions // Annals Oper. Research. 2018. doi: 10.1007/s10479-018-2934-8.
21. **Dentcheva D., Martinez G.** Regularization methods for optimization problems with probabilistic constraints // Math. Programming, 2013. Vol. 138, no. 1, P. 223–251.
22. **Genz A.** Numerical computation of multivariate normal probabilities // J. Comput. Graphical Stat. 1992. No. 1. P. 141–149.
23. **Henrion R., Möller A.** A gradient formula for linear chance constraints under Gaussian distribution // Math. Oper. Research, 2012. Vol. 37. P. 475–488.
24. **Матерон Ж.** Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978. 318 p.
25. **Varian H.R.** Intermediate. Microeconomics. A Modern approach. 8th ed. N Y: University of California at Berkeley, 2009. 739 p.
26. **Dixit A.K., Stiglitz J.E.** Monopolistic competition and optimum product diversity // The American Economic Review. 1977. Vol. 67, no. 3. P. 297–308.
27. **Anderson S.P., De Palma A., Thisse J.-F.** Demand for differentiated products, discrete choice models, and the characteristics approach // Review of Economic Studies. 1989. Vol. 56, no. 1, pp. 21–35. doi: 10.2307/2297747.
28. **Timofeeva G.** Investigation of mathematical model of passenger preferences // AIP Conf. Proc. 2019. Vol. 2172. Art. no. 080001. doi: 10.1063/1.5133559.
29. **Кан Ю.С., Тузов Н.В.** Минимизация квантили нормального распределения билинейной функции потерь // Автоматика и телемеханика. 1998. № 11. С. 82–92.

30. Кац И.Я., Тимофеева Г.А. Бикритериальная задача стохастической оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3. С. 116–123.

Поступила 2.12.2019

После доработки 10.02.2020

Принята к публикации 17.02.2020

Тимофеева Галина Адольфовна
 д-р физ.-мат. наук, профессор
 зав. кафедрой
 Уральский государственный университет путей сообщения;
 профессор
 Уральский федеральный университет
 г. Екатеринбург
 e-mail: Gtimofeeva@usurt.ru

REFERENCES

1. Prekopa A. *Stochastic programming*. Ser. Mathematics and Its Applications, vol. 324, Dordrecht: Springer, 1995, 600 p. doi: 10.1007/978-94-017-3087-7.
2. Popova O.A. Linear programming problem with random input data. *Vestn. VSGUTU*, 2013, vol. 41, no. 2, pp. 19–23 (in Russian).
3. Popova O.A. Optimization problems with random data. *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 506–515.
4. Calafiore G., Campi M.C. Uncertain convex programs: randomized solutions and confidence levels. *Math. Program., Ser. A*, 2005, vol. 102, pp. 25–46. doi: 10.1007/s10107-003-0499-y.
5. Bonami P., Lejeune M.A. An exact solution approach for portfolio optimization problems under stochastic and integer constraints. *Stochastic Programming E-print Series (SPEPS)*, 2007, iss. 1, no. 2936317-2. doi: 10.18452/8373.
6. Kuo-Chen Hung, Shu-Cheng Lin, Chun-Hsiao Chu Note on solving probabilistic programming problems involving multi-choice parameters. *J. Interdisciplinary Math.*, 2015, vol. 18, no. 5, pp. 617–627. doi: 10.1080/09720502.2015.1047606.
7. Podinovski V.V. Potential optimality in multicriterial optimization. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 3, pp. 429–438. doi: 10.1134/S0965542514030154.
8. Zhukovskii V.I., Molostvov V.S. *Mnogokriterial'naya optimizatsiya sistem v usloviyakh nepolnoi informatsii* [Multicriterion optimization of systems in conditions of incomplete information]. Moscow: MNIIPU Publ., 1990, 112 p.
9. Komarov Yu.A., Kurzanski A.B. Hamiltonian formalism for the problem of optimal motion control under multiple criteria. *Dokl. Math.*, 2018, vol. 97, no. 3, pp. 291–294. doi: 10.1134/S1064562418030134.
10. Timofeeva G., Martynenko A., Zavalishchin D. Probabilistic modeling of passengers and carriers preferences via bicriterial approach. In: *17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018)*, IFAC-PapersOnLine, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 496–498. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.469.
11. Powell W.B. A unified framework for stochastic optimization. *European J. Operational Research*, 2019, vol. 275, no. 3, pp. 795–821. doi: 10.1016/j.ejor.2018.07.014.
12. Polyak B. *Introduction to optimization*. New York: Optimization Software, 1987. ISBN: 9780911575149. Original Russian text published in Polyak B.T. *Vvedenie v optimizatsiyu*. Moscow: Nauka Publ., 1983, 383 p.
13. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method. *The Annals Math. Stat.*, 1951, vol. 22, no. 3, pp. 400–407. doi: 10.1214/aoms/1177729586.
14. Ermoliev Y. Stochastic quasigradient methods and their application to system optimization. *Stochastics Ser. B*, 1983, vol. 9, no. 1–2, pp. 1–36. doi: 10.1080/17442508308833246.
15. Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N. Gradient convergence in gradient methods with errors. *SIAM J. Optim.*, 2000, vol. 10, no. 3, pp. 627–642. doi: 10.1137/S1052623497331063.
16. Rosasco L., Villa S., Vũ B.C. Convergence of stochastic proximal gradient algorithm. *Appl. Math. Optim.*, 2019, vol. 18, pp. 1–27. doi: 10.1007/s00245-019-09617-7.
17. Lai T.L., Xing H., Chen Z. Mean-variance portfolio optimization when means and covariances are unknown. *Annals Appl. Stat.*, 2011, vol. 5, no. 2A, pp. 798–823. doi: 10.1214/10-AOAS422.

18. Markowitz H.M. *Portfolio selection: efficient diversification of investments* (2nd ed.) Cambridge, Mass.: B. Blackwell, 1991, 384 p. ISBN: 9781557861085.
19. Kibzun A.I., Kan Yu.S. Stochastic programming problems with probability and quantile functions. N Y: Wiley, 1996, 316 p. ISBN: 9780471958154. Original Russian text published in Kan Yu.S., Kibzun A.I. *Zadachi stokhasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami*. Moscow: Fizmatlit Publ., 2009, 372 p. ISBN: 978-5-9221-1148-5/hbk.
20. Lejeune M.A., Prekopa A. Relaxations for probabilistically constrained stochastic programming problems: review and extensions. *Annals Oper. Research*, 2018. doi: 10.1007/s10479-018-2934-8.
21. Dentcheva D., Martinez G. Regularization methods for optimization problems with probabilistic constraints. *Math. Program.*, 2013, vol. 138, no. 1, pp. 223–251. doi: 10.1007/s10107-012-0539-6.
22. Genz A. Numerical computation of multivariate normal probabilities. *J. Comput. Graphical Stat.*, 1992, vol. 1, no. 2, pp. 141–149. doi: 10.2307/1390838.
23. Henrion R., Möller A. A gradient formula for linear chance constraints under Gaussian distribution. *Mathematics of Operations Research*, 2012, vol. 37, no. 3, pp. 475–488. doi: 10.1287/moor.1120.0544.
24. Matheron G. *Random sets and integral geometry*. N Y: Wiley, 1975, 261 p. ISBN: 978-0-471-57621-1. Translated to Russian under the title *Sluchainye mnozhestva i integral'naya geometriya*. Moscow: Mir Publ., 1978, 318 p.
25. Varian H.R. *Intermediate. Microeconomics. A modern approach*. (8th edn.) N Y: University of California at Berkeley, 2009. 739 p. ISBN: 978-0393934243.
26. Dixit A.K., Stiglitz J.E. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. *The American Economic Review*, 1977, vol. 67, no. 3, pp. 297–308. doi: 10.7916/D8S75S91.
27. Anderson S.P., De Palma A., Thisse J.-F. Demand for differentiated products, discrete choice models, and the characteristics approach. *Review of Economic Studies*, 1989, vol. 56, no. 1, pp. 21–35. doi: 10.2307/2297747.
28. Timofeeva G. Investigation of mathematical model of passenger preferences. *AIP Conf. Proc.*, 2019, vol. 2172, art. no. 080001. doi: 10.1063/1.5133559.
29. Kan Yu.S., Tuzov N.V. Quantile minimization of the normal distribution of a bilinear loss function. *Autom. Remote Control*, 1998, vol. 59, no. 11, pp. 1568–1576.
30. Kats I.Ya., Timofeeva G.A. Bicriteria problem of stochastic optimization. *Autom. Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 3, pp. 422–428.

Received December 2, 2019

Revised February 10, 2020

Accepted February 17, 2020

Galina Adol'fovna Timofeeva, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, 620034 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: Gtimofeeva@usurt.ru.

Cite this article as: G. A. Timofeeva. Probabilistic solutions of conditional optimization problems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 198–211.

УДК 517.977

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С СОСТАВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

А. А. Толстоногов

В сепарабельном банаховом пространстве рассматривается дифференциальное включение, правая часть которого является суммой двух многозначных отображений. Первое отображение имеет своими значениями замкнутые, ограниченные, не обязательно выпуклые множества. Оно измеримо по временной переменной, является липшицевым по фазовой переменной и удовлетворяет традиционному условию роста. Второе многозначное отображение в качестве своих значений имеет замкнутые, выпуклые, не обязательно ограниченные множества. Предполагается, что это отображение имеет по фазовой переменной замкнутый график. Остальные предположения относятся к пересечению второго отображения и многозначного отображения, определенного условиями роста. Считается, что пересечение многозначных отображений имеет измеримый селектор и обладает определенными свойствами компактности. Доказана теорема существования решений таких включений. Доказательство базируется на принадлежащей автору теореме о непрерывных селекторах, проходящих через неподвижные точки многозначных отображений, зависящих от параметра, с замкнутыми, невыпуклыми, разложимыми значениями и классической теореме Ки Фана о неподвижной точке. Полученные результаты являются новыми.

Ключевые слова: разложимое множество, неподвижная точка, непрерывный селектор, слабая норма, интеграл Аумана.

A. A. Tolstonogov. Differential inclusions in a Banach space with composite right-hand side.

A differential inclusion whose right-hand side is the sum of two multivalued mappings is considered in a separable Banach space. The values of one mapping are closed, bounded, not necessarily convex sets. This mapping is measurable in the time variable, is Lipschitz in the state variable, and satisfies the traditional growth condition. The values of the second mapping are closed, convex, not necessarily bounded sets. This mapping is assumed to have a closed graph in the state variable. The remaining assumptions concern the intersection of the second mapping and the multivalued mapping defined by the growth conditions. We suppose that the intersection of the multivalued mappings has a measurable selection and possesses certain compactness properties. An existence theorem is proved for solutions of such inclusions. The proof is based on a theorem proved by the author on continuous selections passing through fixed points of multivalued mappings depending on a parameter with closed, nonconvex, decomposable values and on Ky Fan's famous fixed-point theorem. The obtained results are new.

Keywords: decomposable space, fixed point, continuous selection, weak norm, Aumann integral.

MSC: 58C06

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-212-222

1. Введение

Пусть $T = [0, a]$, $a > 0$, — отрезок числовой полупрямой $R^+ = [0, +\infty)$ с мерой Лебега и с σ -алгеброй Σ измеримых по Лебегу множеств из T , X — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и с нулевым элементом Θ , B — открытый единичный шар с центром в Θ , \bar{B} — его замыкание. Через $d(x, D)$ мы обозначаем расстояние от точки x до множества $D \subset X$ и

$$\|D\| = \sup\{\|x\|; x \in D\}.$$

Обозначим через $L^1(T, X)$ пространство интегрируемых по Бохнеру функций из T в X , а через $A^{1,1}(T, X)$ — пространство всех абсолютно непрерывных функций $x : T \rightarrow X$, которые имеют производные $\dot{x}(\cdot) \in L^1(T, X)$ [1].

Метрику Хаусдорфа на пространстве всех непустых, замкнутых, ограниченных множеств из X мы обозначаем как $\text{haus}(\cdot, \cdot)$.

Целью работы является доказательство существования решения дифференциального включения

$$\dot{x} \in U(t, x) + V(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

где $U, V : T \times X \rightarrow X$ — многозначные отображения.

Под решением включения (1.1) понимается тройка $(x(u, v)(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$,

$$x(u, v)(\cdot) \in A^{1,1}(T, X), \quad x(u, v)(0) = x_0, \quad u(\cdot) \in L^1(T, X), \quad v(\cdot) \in L^1(T, X),$$

удовлетворяющая почти всюду

$$\dot{x}(u, v)(t) = u(t) + v(t), \quad (1.2)$$

$$u(t) \in U(t, x(u, v)(t)), \quad (1.3)$$

$$v(t) \in V(t, x(u, v)(t)). \quad (1.4)$$

Сделаем следующие предположения.

Гипотезы $H(U)$. Многозначное отображение $U : T \times X \rightarrow X$ с непустыми, замкнутыми, не обязательно выпуклыми, значениями обладает следующими свойствами:

- 1) при всех $x \in X$ отображение $t \rightarrow U(t, x)$ измеримо;
- 2) имеют место неравенства

$$\text{haus}(U(t, x), U(t, y)) \leq k(t)\|x - y\| \text{ п.в.}, \quad (1.5)$$

$$x, y \in X, \quad k(\cdot) \in L^1(T, R^+),$$

$$\|U(t, x)\| = \sup\{\|u\|; u \in U(t, x)\} \leq m_1(t) + n_1(t)\|x\| \text{ п.в.}, \quad x \in X, \quad (1.6)$$

$$m_1(\cdot), n_1(\cdot) \in L^1(T, R^+).$$

Гипотезы $H(V)$. Многозначное отображение $V : T \times X \rightarrow X$ с непустыми, выпуклыми, замкнутыми значениями обладает следующими свойствами:

- 1) выполняется неравенство

$$d(\Theta, V(t, x)) < m_2(t) + n_2(t)\|x\| \text{ п.в.}, \quad (1.7)$$

$$m_2(\cdot), n_2(\cdot) \in L^1(T, R^+);$$

- 2) при каждом $x \in X$ отображение

$$t \rightarrow V(t, x) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\bar{B}$$

имеет измеримый селектор, а отображение $x \rightarrow V(t, x)$ имеет замкнутый график для почти каждого $t \in T$;

- 3) для каждого ограниченного множества $D \subset X$ множество

$$V(t, D) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|D\|)\bar{B}$$

относительно компактно при почти всех $t \in T$, где $V(t, D) = \{\cup V(t, x); x \in D\}$.

Так как в (1.7) неравенство строгое, то для почти каждого t множество

$$V(t, x) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\bar{B}, \quad x \in X,$$

не пусто. Поэтому гипотеза $H(V)$ 2) носит содержательный характер.

Основной результат работы составляет теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$ и $H(V)$. Тогда дифференциальное включение (1.1) имеет решение.

Отметим, что дифференциальное включение (1.1) с правой частью составного типа изучается впервые.

Если $V(t, x) \equiv \Theta$, $t \in T$, $x \in X$, то как следствие мы получаем теорему существования решения дифференциального включения с невыпуклозначной липшицевой правой частью. Наиболее общие из известных результатов в этом направлении получены в работе [2].

Если $U(t, x) \equiv \Theta$, $t \in T$, $x \in X$, то мы получаем теорему существования решения дифференциального включения, значениями правой части которого являются замкнутые, выпуклые множества.

Как следует из неравенства (1.7), значениями отображения $V(t, x)$ могут быть неограниченные множества.

Во всех известных результатах (см. [3] и др.), относящихся к такому включению, наряду с другими предположениями считается, что значениями отображения $V(t, x)$ являются выпуклые компактные множества, а отображение $x \rightarrow V(t, x)$ полунепрерывно сверху. Поскольку в конечномерном пространстве из неравенства (1.7) гипотеза $H(V)$ 3) следует автоматически, то даже в этом случае при $U(t, x) \equiv \Theta$, $t \in T$, $x \in X$ теорему 1 можно считать новой.

2. Основные обозначения, определения и вспомогательные результаты

Пусть Y — метрическое пространство, cY — семейство всех непустых замкнутых множеств из Y , cbY — семейство всех ограниченных множеств из cY с метрикой Хаусдорфа $\text{haus}_Y(\cdot, \cdot)$. Для топологического векторного пространства Z через ω - Z мы будем обозначать пространство Z , наделенное слабой топологией. Если $D \subset Z$, то ω - D означает, что D наделено топологией, индуцированной топологией пространства ω - Z . Под $\overline{\omega}D$ мы понимаем замкнутую выпуклую оболочку множества $D \subset Z$.

Пусть W — топологическое пространство. Многозначное отображение $F : W \rightarrow Y$ называется полунепрерывным снизу, если для любого открытого множества $E \subset Y$ множество $F^{-1}(E) = \{w \in W; F(w) \cap E \neq \emptyset\}$ открыто.

Многозначное отображение $F : W \rightarrow Y$ называется полунепрерывным сверху, если для любого открытого множества $E \subset Y$ множество $F^+(E) = \{w \in W; F(w) \subset E\}$ открыто.

Отметим, что если W — метрическое пространство, то определение полунепрерывности снизу эквивалентно следующему: для любых $w \in W$, $y \in F(w)$ и любой последовательности $w_n \in W$, $n \geq 1$, $w_n \rightarrow w$ существует последовательность $y_n \in F(w_n)$, $n \geq 1$, сходящаяся к y .

Если Y — компактное метрическое пространство, W — метрическое пространство и $F : W \rightarrow Y$ — многозначное отображение с замкнутыми значениями, то полунепрерывность сверху эквивалентна замкнутости графика отображения F .

Многозначное отображение $F : T \rightarrow cX$ называется измеримым [4], если множество $F^{-1}(E) = \{t \in T; F(t) \cap E \neq \emptyset\}$ является измеримым для любого замкнутого множества $E \subset X$.

Множество \mathcal{K} измеримых отображений из T в X называется разложимым, если для любых $u, v \in \mathcal{K}$, $E \in \Sigma$ элемент $\chi(E)u + \chi(T \setminus E)v$ принадлежит множеству \mathcal{K} , где $\chi(E)$ — характеристическая функция множества E .

На пространстве $L^1(T, X)$, наряду со слабой топологией, рассмотрим топологию, порожденную так называемой “слабой” нормой [5]:

$$\|f\|_{L^1} = \max_{t \in T} \left\| \int_0^t f(s) ds \right\|, \quad f(\cdot) \in L^1(T, X). \quad (2.1)$$

Пространство $L^1(T, X)$ с нормой (2.1) обозначается через $|\omega$ - $L^1(T, X)$.

Как обычно, $C(T, X)$ — это пространство всех непрерывных отображений из T в X с топологией равномерной сходимости на T .

Измеримое многозначное отображение $\Gamma : T \rightarrow cbX$ назовем интегрально ограниченным, если существует функция $m(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ такая, что

$$\|\Gamma(t)\| = \sup\{\|u\|; u \in \Gamma(t)\} \leq m(t) \text{ п.в.}$$

Пространство всех измеримых, интегрально ограниченных отображений $\Gamma : T \rightarrow cbX$ будем обозначать через $L^1(T, cbX)$, а под $dcbL^1(T, X)$ мы понимаем совокупность всех замкнутых, ограниченных, разложимых множеств из $L^1(T, X)$.

Если $\Gamma(\cdot) \in L^1(T, cbX)$, то S_Γ — совокупность всех интегрируемых селекторов отображения $t \rightarrow \Gamma(t)$, которое, как хорошо известно, является элементом пространства $dcbL^1(T, X)$.

Теорема 2. Пусть множество $\mathcal{K} \subset L^1(T, X)$ обладает следующими свойствами:

- 1) для почти каждого $t \in T$ множество $\{f(t); f(\cdot) \in \mathcal{K}\} \subset X$ относительно компактно;
- 2) существует функция $m(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ такая, что $\|f(t)\| \leq m(t)$ п.в. для любого $f(\cdot) \in \mathcal{K}$.

Тогда на множестве \mathcal{K} топологии пространств ω - $L^1(T, X)$ и $|\omega|$ - $L^1(T, X)$ совпадают.

Доказательство. Пусть $S \subset \mathcal{K}$ — счетное плотное подмножество и $\Gamma : T \rightarrow X$ — многозначное отображение, определенное по правилу

$$\Gamma(t) = \overline{\{\cup f(t); f(\cdot) \in S\}}, \quad t \in T,$$

где черта сверху означает замыкание в X . Тогда $\Gamma(\cdot) \in L^1(T, cbX)$ и для любого $f(\cdot) \in \mathcal{K}$ справедливо включение $f(t) \in \Gamma(t)$ п.в.

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{L} : L^1(T, X) \rightarrow C(T, X)$

$$\mathcal{L}(f)(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad t \in T,$$

который является непрерывным из ω - $L^1(T, X)$ в ω - $C(T, X)$.

Пусть $S_{\overline{co}\Gamma}$ — множество интегрируемых селекторов многозначного отображения $t \rightarrow \overline{co}\Gamma(t)$, которое является измеримым, интегрально ограниченным с выпуклыми компактными значениями. Поэтому множество $S_{\overline{co}\Gamma}$ есть выпуклое компактное подмножество пространства ω - $L^1(T, X)$, а множество $\mathcal{L}(S_{\overline{co}\Gamma})$ — выпуклое компактное подмножество пространства ω - $C(T, X)$. Пусть $(\mathcal{A}) \int_0^t \overline{co}\Gamma(s) ds, t \in T$, — интеграл Аумана от многозначного отображения $\overline{co}\Gamma(t)$, который существует, и его значениями являются выпуклые компактные множества в пространстве X [3]. Из определения интеграла Аумана следует, что

$$\mathcal{L}(f)(t) \in (\mathcal{A}) \int_0^t \overline{co}\Gamma(s) ds, \quad t \in T, \quad f(\cdot) \in S_{\overline{co}\Gamma}. \tag{2.2}$$

Из включения (2.2), компактности множеств $(\mathcal{A}) \int_0^t \overline{co}\Gamma(s) ds, t \in T$, интегральной ограниченности отображения $t \rightarrow \overline{co}\Gamma(t)$, замкнутости множества $\mathcal{L}(S_{\overline{co}\Gamma})$ в пространстве $C(T, X)$ и теоремы Арцела — Асколи вытекает, что множество $\mathcal{L}(\overline{co}S_{\overline{co}\Gamma})$ есть выпуклый компакт в пространстве $C(T, X)$. Тогда сужение отображения \mathcal{L} на множество $S_{\overline{co}\Gamma}$ является непрерывной биекцией компакта ω - $S_{\overline{co}\Gamma}$ на компакт $\mathcal{L}(\omega$ - $S_{\overline{co}\Gamma})$ в пространстве $C(T, X)$, т.е. гомеоморфизмом. Воспользовавшись (2.1) и определением нормы на пространстве $C(T, X)$, мы получим, что на множестве $S_{\overline{co}\Gamma}$ топологии пространств ω - $L^1(T, X)$ и $|\omega|$ - $L^1(T, X)$ совпадают. Так как $\mathcal{K} \subset S_{\overline{co}\Gamma}$, то теорема доказана. \square

Функцию $x : T \rightarrow X$ назовем кусочно-постоянной и непрерывной справа, если существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = a$ отрезка T такое, что на каждом из полуинтервалов $[t_{i-1}, t_i), 1 \leq i \leq n$, функция $x(t)$ постоянна.

Теорема 3. Для любой непрерывной функции $x : T \rightarrow X$ многозначные отображения

$$\begin{aligned} t &\rightarrow U(t, x(t)), \\ t &\rightarrow V(t, x(t)) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|x(t)\|)\overline{B} \end{aligned} \quad (2.3)$$

имеют интегрируемые селекторы.

Доказательство. Из гипотез $H(U) 1), 2)$ следует, что многозначное отображение $t \rightarrow U(t, x(t))$ является измеримым с замкнутыми значениями. Поэтому существует измеримый селектор [4] этого отображения, который согласно гипотезе $H(U) 3)$ является элементом пространства $L^1(T, X)$.

Докажем существование интегрируемого селектора у отображения (2.3). Пусть

$$F(t, x) = V(t, x) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|x(t)\|)\overline{B}. \quad (2.4)$$

Из гипотез $H(V)$ следует, что значениями отображения $F(t, x)$ являются выпуклые компактные множества и отображение $t \rightarrow F(t, x)$ имеет измеримый селектор.

Пусть $x(\cdot) \in C(T, X)$. Воспользовавшись теоремой 1.5 и следствием 1.2 работы [6], мы получаем, что существует последовательность $x_n(\cdot), n \geq 1$, кусочно постоянных, непрерывных справа функций, сходящаяся равномерно к $x(\cdot)$, и множество $\cup_{n=1}^{\infty} \{x_n(t); t \in T\}$ относительно компактно в X .

Тогда для каждой функции $x_n(\cdot), n \geq 1$, существует измеримая функция $f_n : T \rightarrow X$ такая, что

$$f_n(t) \in F(t, x_n(t)) \text{ п.в.} \quad (2.5)$$

Поскольку множество $\cup_{n=1}^{\infty} \{x_n(t); t \in T\} \subset X$ относительно компактно, то существует компактное множество $C \subset X$ такое, что

$$x(t) \cup \{\cup x_n(t); n \geq 1\} \subset C, \quad t \in T.$$

Из гипотезы $H(V) 3)$ вытекает, что значениями многозначного отображения $t \rightarrow \overline{co}V(t, C)$ при почти каждом $t \in T$ являются выпуклые компактные множества и

$$F(t, x) \subset \overline{co}V(t, C), \text{ п.в., } x \in C, \quad (2.6)$$

$$f_n(t) \in \overline{co}F(t, C) \subset (m_2(t) + n_2(t)\|C\|)\overline{B} \text{ п.в.} \quad (2.7)$$

Из (2.6) и гипотезы $H(V) 2)$ выводим, что сужение отображения $x \rightarrow F(t, x), t \in T$, на множество C полунепрерывно сверху при почти каждом $t \in T$. Согласно (2.7) последовательность $f_n(\cdot), n \geq 1$, является относительно компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}L^1(T, X)$. Так как пространство $L^1(T, X)$ сепарабельно, то любой компакт в пространстве $\omega\text{-}L^1(T, X)$ метризуем. Поэтому из последовательности $f_n(\cdot), n \geq 1$, можно выбрать подпоследовательность $f_{n_k}(\cdot), k \geq 1$, сходящуюся в пространстве $\omega\text{-}L^1(T, X)$ к некоторой функции $f(\cdot) \in L^1(T, X)$.

Чтобы избежать новых обозначений, не нарушая общности, будем считать, что последовательность $f_n(\cdot), n \geq 1$, сама сходится в пространстве $\omega\text{-}L^1(T, X)$ к $f(\cdot)$. Тогда из (2.5), полунепрерывности сверху на C отображения $x \rightarrow F(t, x)$ и леммы Мазура о слабо сходящихся последовательностях мы получим

$$f(t) \in \cap_{n \geq 1} \overline{co}\{\cup_{k \geq n} F(t, x_k(t))\} \subset F(t, x(t)) \text{ п.в.} \quad (2.8)$$

Следовательно, $f(t)$ — интегрируемый селектор отображения (2.4). Теорема доказана. \square

Лемма 1. Пусть $\Gamma_i(\cdot) \in L^1(T, cbX), i = 1, 2$. Тогда

$$\text{haus}_{L^1}(S_{\Gamma_1}, S_{\Gamma_2}) \leq \int_T \text{haus}(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)) dt. \quad (2.9)$$

Доказательство. Лемма 1 вытекает из утверждения 4.2 в [7]. \square

Пусть $r(t), t \in T$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{r}(t) = m(t) + n(t)r(t), \quad r(0) = r_0, \quad m(\cdot), n(\cdot) \in L^1(T, R^+). \quad (2.10)$$

Лемма 2. Если функция $x(\cdot) \in C(T, X)$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leq r_0 + \int_0^t (m(\tau) + n(\tau)\|x(\tau)\|)d\tau, \quad t \in T,$$

то

$$\|x(t)\| \leq r(t), \quad t \in T.$$

Доказательство. Лемма непосредственно вытекает из свойств дифференциальных неравенств (см., например, теорему I.1.7 в [3]). \square

3. Многозначный оператор Немыцкого

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

$$u(\cdot), v(\cdot) \in L^1(T, X).$$

Обозначим через $x(u; v)$ решение уравнения (3.1), которое имеет вид

$$x(u; v)(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds + \int_0^t v(s)ds. \quad (3.2)$$

Обозначим через $\mathcal{T}(u; v)$ оператор, который любым $u(\cdot), v(\cdot) \in L^1(T, X)$ ставит в соответствие единственное решение $x(u; v)$ уравнения (3.1), т. е.

$$x(u; v)(t) = \mathcal{T}(u; v)(t). \quad (3.3)$$

Лемма 3. Оператор $\mathcal{T}(u; v)$ является непрерывным отображением

$$\text{из } L^1(T, X) \times |\omega|L^1(T, X) \text{ в } C(T, X).$$

Доказательство. Лемма с очевидностью вытекает из (3.2), (2.1) и определения нормы в пространстве $L^1(T, X)$. \square

Пусть $u(\cdot), v(\cdot) \in L^1(T, X)$. Рассмотрим многозначное отображение $t \rightarrow U(t, \mathcal{T}(u; v)(t))$. Из гипотез $H(U)$ следует, что отображение $t \rightarrow U(t, \mathcal{T}(u; v)(t))$ есть элемент пространства $L^1(T, cbX)$.

Поэтому множество

$$\Phi(u; v) = \{f(\cdot) \in L^1(T, X); f(t) \in U(t, \mathcal{T}(u; v)(t)) \text{ п.в.}\} \quad (3.4)$$

является элементом пространства $dcbL^1(T, X)$. Тем самым будет определено многозначное отображение $\Phi : L^1(T, X) \times L^1(T, X) \rightarrow dcbL^1(T, X)$, которое называется многозначным оператором Немыцкого.

На пространстве $L^1(T, X)$ рассмотрим числовую функцию

$$P(x) = \int_T \rho(t, x(t))dt, \quad (3.5)$$

где

$$\rho(t, x(t)) = \left(\exp \left(-2 \int_0^t k(\tau) d\tau \right) \right) \|x(t)\|, \quad t \in T. \quad (3.6)$$

Здесь функция $k(\cdot)$ взята из неравенства (1.5).

Очевидно, что функция $P(x)$ определяет норму, эквивалентную норме $\|x\|_{L^1}$ пространства $L^1(T, X)$.

Расстояние по Хаусдорфу между множествами из пространства $cbL^1(T, X)$, наделенного нормой $P(x)$, будем обозначать через $\text{haus}_P(\cdot, \cdot)$.

Теорема 4. *Оператор Немыцкого $\Phi : L^1(T, X) \times L^1(T, X) \rightarrow cbL^1(T, X)$ обладает следующими свойствами:*

$$\text{haus}_{L^1}(\Phi(u_1; v_1), \Phi(u_2; v_2)) \leq L \left(\|u_1 - u_2\|_{L^1} + \|v_1 - v_2\|_{L^1} \right), \quad (3.7)$$

где

$$L = \int_T k(t) dt; \quad (3.8)$$

$$\text{haus}_P(\Phi(u_1; v), \Phi(u_2; v)) \leq \frac{1}{2} P(u_1 - u_2), \quad (3.9)$$

$v \in L^1(T, X), u_i \in L^1(T, X), i = 1, 2$.

Доказательство. Из (1.5), (2.9), (3.2), (3.3) мы получаем

$$\begin{aligned} \text{haus}_{L^1}(\Phi(u_1; v_1), \Phi(u_2; v_2)) &\leq \int_T k(\tau) \|\mathcal{T}(u_1; v_1) - \mathcal{T}(u_2; v_2)(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_T k(\tau) \left(\|u_1 - u_2\|_{L^1} + \|v_1 - v_2\|_{L^1} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Теперь неравенство (3.7) вытекает из (3.10), (3.8) и (2.1).

Докажем неравенство (3.9). Из (1.5), (3.1), (3.3) выводим

$$\text{haus}(U(t, \mathcal{T}(u_1; v)(t)), U(t, \mathcal{T}(u_2; v)(t))) \leq k(t) \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds, \quad t \in T. \quad (3.11)$$

Воспользовавшись неравенством (3.11) и (3.4)–(3.6), имеем

$$\text{haus}_P(\Phi(u_1; v), \Phi(u_2; v)) \leq \int_T \left(\exp \left(-2 \int_0^t k(\tau) d\tau \right) \right) k(t) \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds \right) dt. \quad (3.12)$$

Проинтегрировав правую часть (3.12) по частям, мы приходим к неравенству

$$\text{haus}_P(\Phi(u_1; v), \Phi(u_2; v)) \leq \frac{1}{2} \left(\int_T \left(\exp \left(-2 \int_0^t k(\tau) d\tau \right) \right) \|u_1(t) - u_2(t)\| dt \right). \quad (3.13)$$

Теперь неравенство (3.9) вытекает из (3.13), (3.5), (3.6). Теорема доказана. \square

Для фиксированного $v(\cdot) \in L^1(T, X)$ обозначим через $(\text{Fix } \Phi)(v)$ множество неподвижных точек оператора $\Phi(u; v)$.

Теорема 5. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$. Тогда:

- а) для любого $v \in L^1(T, X)$ множество $(\text{Fix } \Phi)(v)$ не пусто;
- б) существует непрерывная функция $u : |\omega|L^1(T, X) \rightarrow L^1(T, X)$ такая, что

$$u(v) \in (\text{Fix } \phi)(v), \quad v \in L^1(T, X),$$

т. е.

$$u(v) \in \Phi(u(v); v), \quad v \in L^1(T, X). \tag{3.14}$$

Доказательство. Из неравенства (3.7) вытекает, что при фиксированном $u \in L^1(T, X)$ отображение $v \rightarrow \Phi(u; v)$ является полунепрерывным снизу из $|\omega|L^1(T, X)$ в $L^1(T, X)$ с замкнутыми, ограниченными, разложимыми значениями. Так как пространство $|\omega|L^1(T, X)$ есть сепарабельное метрическое пространство, то теорема 5 следует из теоремы 3.1 [8] и неравенства (3.9), если v рассматривать как параметр. \square

4. Априорные оценки

Пусть

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t), \quad n(t) = n_1(t) + n_2(t), \tag{4.1}$$

где $m_i(\cdot), n_i(\cdot), i = 1, 2$, — функции из неравенств (1.6), (1.7) и $r(t), r(0) = \|x_0\|$ — решение уравнения (2.10).

Обозначим

$$S_U = \{u \in L^1(T, X); \|u(t)\| \leq m_1(t) + n_1(t)r(t) \text{ п.в.}\}, \tag{4.2}$$

$$S_V = \{v \in L^1(T, X); \|v(t)\| \leq m_2(t) + n_2(t)r(t) \text{ п.в.}\}. \tag{4.3}$$

Пусть $x(u; v)(t), x(u; v)(0) = x_0$ — решение уравнения (3.1) и

$$\mathcal{T}(S_U, S_V)(t) = \{x(u; v)(t); u \in S_U, v \in S_V\}, \quad t \in T. \tag{4.4}$$

Воспользовавшись (4.1)–(4.4), (3.2), мы получим

$$\|\mathcal{T}(S_U, S_V)(t)\| \leq r(t), \quad t \in T. \tag{4.5}$$

Согласно гипотезе $H(V)$ 3) множество $V(t, r(a)\overline{B}) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|r(a)\|\overline{B}), t \in T$, относительно компактно при почти каждом $t \in T$. Так как решение $r(t), r(0) = \|x_0\|$ уравнения (2.10) является неубывающей функцией, то в соответствии с (4.5) имеем $\mathcal{T}(S_U, S_V)(t) \subset r(a)\overline{B}, t \in T$.

Поэтому множество $V(t, \mathcal{T}(S_U, S_V)(t)) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|\mathcal{T}(S_U, S_V)(t)\|\overline{B})$ будет относительно компактным при почти всех $t \in T$.

Положим

$$W(t) = V(t, \mathcal{T}(S_U, S_V)(t)) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|\mathcal{T}(S_U, S_V)(t)\|\overline{B}), \quad t \in T. \tag{4.6}$$

Тогда многозначное отображение $t \rightarrow \overline{\text{co}}W(t)$ при почти каждом $t \in T$ имеет своими значениями выпуклые компактные множества. С учетом (4.5), (4.6)

$$\|\overline{\text{co}}W(t)\| \leq m_2(t) + n_2(t)r(t). \tag{4.7}$$

Пусть

$$S_{\overline{\text{co}}W} = \{v \in L^1(T, X); v(t) \in \overline{\text{co}}W(t) \text{ п.в.}\}. \tag{4.8}$$

Из леммы 2 вытекает, что многозначное отображение

$$t \rightarrow V(t, \mathcal{T}(S_U, S_V)(t)) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|\mathcal{T}(S_U, S_V)(t)\|\overline{B}), \quad u \in S_U, \quad v \in S_V$$

имеет интегрируемые селекторы.

Тогда множество $S_{\overline{\text{co}}W(t)}$ обладает следующими свойствами:

- а) $S_{\overline{\text{co}}W}$ есть непустое выпуклое компактное подмножеством пространства $\omega\text{-}L^1(T, X)$;
- б) для любого $v \in S_{\overline{\text{co}}W}$ имеет место неравенство $\|v(t)\| \leq m_2(t) + n_2(t)r(t)$ п.в.;
- в) множество $S_{\overline{\text{co}}W}(t) = \{v(t); v \in S_{\overline{\text{co}}W}\} \subset X$ при почти всех $t \in T$ — компакт.

Свойства множества $S_{\overline{\text{co}}W}$ вытекают из (4.6), (4.7) и компактности значений отображения $t \rightarrow \overline{\text{co}}W(t)$.

Согласно теореме 5 и (3.14) существует непрерывная функция $u : |\omega|\text{-}L^1(T, X) \rightarrow L^1(T, X)$ такая, что $u(v) \in \Phi(u(v); v)$, $v \in L^1(T, X)$. Воспользовавшись (3.4), мы получим, что

$$u(v)(t) \in U(t, \mathcal{T}(u(v); v)(t)) \text{ п.в., } v \in L^1(T, X). \quad (4.9)$$

Лемма 4. *Имеют место включения*

$$S_{\overline{\text{co}}W} \subset S_V, u(S_{\overline{\text{co}}W}) \subset S_U. \quad (4.10)$$

Доказательство. Первое включение вытекает из (4.7), (4.3). Пусть $\hat{v} \in S_{\overline{\text{co}}W}$. Тогда из (1.6), (3.2), (4.8), (4.9) имеем

$$\begin{aligned} \|x(u(\hat{v}); \hat{v})(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_0^t (m_1(\tau) + n_1(\tau) \|x(u(\hat{v}); \hat{v})(\tau)\|) d\tau \\ &+ \int_0^t (m_2(\tau) + n_2(\tau)r(\tau)) d\tau, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{r}_1(t) = (m_1(t) + m_2(t) + n_2(t)r(t)) + n_1(t)r_1(t), \quad r(0) = r_0. \quad (4.12)$$

Из леммы 2 и (4.11), (4.12) вытекает, что

$$\|x(u(\hat{v}); \hat{v})(t)\| \leq r_1(t), \quad \hat{v} \in S_{\overline{\text{co}}W}.$$

Воспользовавшись (4.1), мы получаем, что решение уравнения (4.12) совпадает с решением $r(t)$ уравнения (2.10). Поэтому,

$$\|x(u(\hat{v}), \hat{v})(t)\| \leq r(t), \quad \hat{v} \in S_{\overline{\text{co}}W}. \quad (4.13)$$

Тогда из (4.9), (4.13) и (1.6) следует

$$\|u(\hat{v})(t)\| \leq m_1(t) + n_1(t)r(t), \quad \hat{v} \in S_{\overline{\text{co}}W}.$$

Таким образом, согласно (4.2) имеет место второе включение в (4.10). Лемма доказана. \square

5. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим оператор $\mathcal{T}(u(v); v)$ из $S_{\overline{\text{co}}W}$ в $C(T, X)$. Из свойств а)–в) множества $S_{\overline{\text{co}}W}$, указанных в предыдущем разделе, и теоремы 2 вытекает, что на множестве $S_{\overline{\text{co}}W}$ топологии пространств $|\omega|\text{-}L^1(T, X)$ и $\omega\text{-}L^1(T, X)$ совпадают. Поэтому отображение $u(v)$ будет непрерывным из $\omega\text{-}S_{\overline{\text{co}}W}$ в $L^1(T, X)$. Воспользовавшись леммой 3, мы получим, что оператор $\mathcal{T}(u(v); v)$ является непрерывным отображением из $\omega\text{-}S_{\overline{\text{co}}W}$ в $C(T, X)$.

Пусть

$$F(t, x) = V(t, x) \cap (m_2(t) + n_2(t)\|x\|)\overline{B} \quad (5.1)$$

и

$$S_F(\mathcal{T}(u(v); v)) = \{f \in L^1(T, X); f(t) \in F(t, \mathcal{T}(u(v); v)(t)) \text{ п.в.}\}, \quad v \in S_{\overline{\text{co}}W}. \quad (5.2)$$

Из теоремы 3 и гипотез $H(V)$ следует, что $S_F(\mathcal{T}(u(v); v))$ является непустым, выпуклым, компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}L^1(T, X)$. Согласно (4.10), (4.6), (5.1) и (5.2) имеет место включение

$$S_F(\mathcal{T}(u(v); v)) \subset S_{\overline{\text{co}}W}, \quad v \in S_{\overline{\text{co}}W}. \quad (5.3)$$

Тем самым будет определено многозначное отображение $v \rightarrow S_F(\mathcal{T}(u(v); v))$ с непустыми, выпуклыми, слабо компактными значениями из выпуклого, компактного, метризуемого множества $\omega\text{-}S_{\overline{\text{co}}W}$ в $\omega\text{-}S_{\overline{\text{co}}W}$.

Для удобства обозначим

$$S_F(v) = S_F(\mathcal{T}(u(v); v)). \quad (5.4)$$

Пусть последовательность $v_n \in \omega\text{-}S_{\overline{\text{co}}W}$, $n \geq 1$, слабо сходится к $v \in \omega\text{-}S_{\overline{\text{co}}W}$. Тогда последовательность $\mathcal{T}(u(v_n); v_n)$, $n \geq 1$, сходится к $\mathcal{T}(u(v); v)$ в пространстве $C(T, X)$. Воспользовавшись включением (5.3), по аналогии с доказательством теоремы 3 (см. (2.8)) мы получим

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}\{\bigcup_{k \geq n} F(t, \mathcal{T}(u(v_k); v_k)(t))\} \subset F(t, \mathcal{T}(u(v); v)(t)) \text{ п.в.} \quad (5.5)$$

Если последовательность $f_n \in S_F(v_n)$, $n \geq 1$, слабо сходится к f , то согласно (5.5) $f \in S_F(v)$. Следовательно, отображение $v \rightarrow S_F(v)$, $v \in \omega\text{-}S_{\overline{\text{co}}W}$ имеет слабо замкнутый график. Из компактности, метризуемости множества $\omega\text{-}S_{\overline{\text{co}}W}$ и включения (5.3) вытекает, что отображение $v \rightarrow S_F(v)$, $v \in \omega\text{-}S_{\overline{\text{co}}W}$ является полунепрерывным сверху из $\omega\text{-}S_{\overline{\text{co}}W}$ в $\omega\text{-}S_{\overline{\text{co}}W}$ с выпуклыми компактными значениями. Согласно теореме 1 Ки Фана [9] существует неподвижная точка v_* отображения $v \rightarrow S_F(v)$, т. е.

$$v_* \in S_F(v_*). \quad (5.6)$$

Положим $u_* = u(v_*)$, $x(u_*; v_*) = \mathcal{T}(u(v_*); v_*)$. Тогда из (5.6), (5.4), (5.2), (5.1), (4.9), (3.1) мы получим

$$\dot{x}(u_*; v_*)(t) = u_*(t) + v_*(t),$$

$$u_*(t) \in U(t, x(u_*; v_*)(t)) \text{ п.в.},$$

$$v_*(t) \in V(t, x(u_*; v_*)(t)) \text{ п.в.}$$

Таким образом, в соответствии с (1.2), (1.3), (1.4) тройка $(x(u_*, v_*)(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ является решением включения (1.1). Теорема доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Barbu V.** Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Netherlands: Springer, 1976. 352 p. ISBN 978-90-286-0205-2.
2. **Толстоногов А.А.** Существование и релаксация решений дифференциальных включений с неограниченной правой частью в банаховом пространстве // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4(344). С. 937–953. doi: 10.17377/smzh.2017.58.419.
3. **Tolstonogov A.** Differential inclusions in Banach space. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2000. 302 p. ISBN 978-94-015-9490-5.
4. **Himmelberg C.J.** Measurable relations // Fund. Math. 1975. Vol. 87, no. 1. P. 53–72. doi: 10.4064/fm-87-1-53-72.
5. **Alexiewicz A.** Linear functionals on Denjoy-integrable functions // Colloquium Math. 1948. Vol. 1, no. 4. P. 289–293. doi: 10.4064/cm-1-4-289-293.
6. **Толстоногов А.А.** О некоторых свойствах пространства правильных функций // Мат. заметки. Т. 35, № 6. 1984. С. 803–812.
7. **Tolstonogov A.A., Tolstonogov D.A.** L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values. Existence theorems // Set-valued Anal. 1996. Vol. 4, no. 2. P. 173–203. doi: 10.1007/BF00425964.

8. Толстоногов А.А. L_p -непрерывные селекторы неподвижных точек многозначных отображений с разложимыми значениями. I. Теоремы существования // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 695–709.
9. Fan Ky. Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1952. Vol. 38, no. 3. P. 121–126. doi: 10.1073/pnas.38.2.121.

Поступила 11.11.2019

После доработки 29.01.2020

Принята к публикации 3.02.2020

Толстоногов Александр Александрович
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН),
г. Иркутск
e-mail: aatol@icc.ru

REFERENCES

1. Barbu V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Netherlands: Springer, 1976, 352 p. ISBN: 978-90-286-0205-2.
2. Tolstonogov A.A. Existence and relaxation of solutions to differential inclusions with unbounded right-hand side in a Banach space. *Siberian Math. J.*, 2017, vol. 58, no. 4, pp. 727–742. doi: 10.1134/S003744661704019X.
3. Tolstonogov A. Differential inclusions in Banach space. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2000, 302 p. ISBN: 978-94-015-9490-5.
4. Himmelberg C.J. Measurable relations. *Fund. Math.*, 1975, vol. 87, no. 1, pp. 53–72. doi: 10.4064/fm-87-1-53-72.
5. Alexiewicz A. Linear functionals on Denjoy-integrable functions. *Colloquium Math.*, 1948, vol. 1, no. 4, pp. 289–293. doi: 10.4064/cm-1-4-289-293.
6. Tolstonogov A.A. Properties of the space of proper functions. *Math. Notes*, 1984, vol. 35, no. 6, pp. 422–427. doi: 10.1007/BF01139944.
7. Tolstonogov A.A., Tolstonogov D.A. L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values. Existence theorems. *Set-valued Anal.*, 1996, vol. 4, no. 2, pp. 173–203. doi: 10.1007/BF00425964.
8. Tolstonogov A.A. L_p -continuous selections of fixed points of multifunctions with decomposable values. I: Existence theorems. *Sib. Math. J.*, 1999, vol. 40, no. 3, pp. 595–607. doi: 10.1007/BF02679768.
9. Fan Ky. Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1952, vol. 38, no. 2, pp. 121–126. doi: 10.1073/pnas.38.2.121.

Received November 11, 2019

Revised January 29, 2020

Accepted February 3, 2020

Aleksandr Aleksandrovich Tolstonogov, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: aatol@icc.ru.

Cite this article as: A. A. Tolstonogov. Differential inclusions in a Banach space with composite right-hand side, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 212–222.

УДК 517.977

О ПОСТРОЕНИИ КУСОЧНО-АФФИННОЙ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВРЕМЕНИ¹

П. А. Точилин

Работа посвящена приближенному решению задачи оптимального управления нелинейной системой дифференциальных уравнений на бесконечном отрезке времени с интегральным функционалом качества. Для этого использована техника кусочной линеаризации (“гибридизации”) исходной нелинейной системы, с последующим анализом получившейся системы с переключениями. Далее применен аппарат кусочно-аффинных функций цены и управления в совокупности с методом динамического программирования и принципом сравнения. В работе последовательно рассмотрены два случая: с непрерывными кусочно-аффинными функциями цены и управления, а также с функциями, допускающими разрывы первого рода. В последнем варианте за счет допущения разрывов удается повысить эффективность предложенного подхода. Сформулированы и доказаны теоремы о достаточных условиях разрешимости поставленной задачи, дающие также верхние оценки минимизируемого функционала. Удалось получить простые с точки зрения вычислений алгоритмы построения оценок функции цены для указанной задачи, а также соответствующего управления в форме обратной связи. Действие разработанного алгоритма продемонстрировано на примере задачи управления колесным роботом на плоскости.

Ключевые слова: нелинейная динамика, линеаризация, система с переключениями, оптимальное управление, динамическое программирование, кусочно-аффинная функция цены.

P. A. Tochilin. On the construction of a piecewise affine value function in an infinite-horizon optimal control problem.

The paper is devoted to the approximate solution of an infinite-horizon optimal control problem for a nonlinear system of differential equations with an integral cost functional. We use the technique of piecewise linearization (“hybridization”) of the original nonlinear system followed by the analysis of the resulting switched system. Then the methods of piecewise affine value and control functions, the method of dynamic programming, and the comparison principle are applied. Two cases are considered sequentially: with continuous piecewise affine value and control functions and with functions admitting discontinuities. In the latter case, it is possible to increase the effectiveness of the proposed approach by allowing gaps. Theorems on sufficient conditions for the solvability of the control problem are formulated and proved. The theorems also provide upper estimates of the minimized functional. Computationally simple algorithms are derived for the construction of estimates of the value function for this problem and of the corresponding feedback control. The operation of the proposed algorithm is demonstrated for a problem of control of a wheeled robot on the plane.

Keywords: nonlinear dynamics, linearization, switched system, optimal control, dynamic programming, piecewise affine value function.

MSC: 93D15, 93D30, 34H15, 49L20

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-223-238

Введение

Данная статья посвящена разработке методов приближенного построения управления в форме обратной связи в задаче управления системой дифференциальных уравнений, нелинейных по фазовым переменным, на бесконечном отрезке времени. Необходимо перевести траекторию системы за конечное (заранее неизвестное) время в целевое множество так, чтобы при этом минимизировать заданный интегральный функционал за счет выбора управлений в форме обратной связи с известными жесткими, поточечными ограничениями. Основная идея

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-01-00613а, 16-29-04191офи_м).

состоит в сочетании методов теории динамического программирования (и в частности, *принципа сравнения*, [1;2]) с аппаратом кусочно-аффинных функций цены и управления, заданных на совокупностях симплексов в фазовом пространстве [3; 4].

Задача синтеза управлений может быть решена за счет использования *уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана* (ГЯБ) [2; 5] для вспомогательной функции цены с заданными краевыми условиями (в точках целевого множества). В общем случае такую функцию необходимо искать в классе обобщенных решений указанного уравнения [6; 7]. При этом все точки, в которых указанная функция принимает конечные значения, формируют *множество разрешимости* [8], содержащее все стартовые позиции, из которых гарантированно можно решить задачу синтеза управлений для достижения целевого множества за конечное, заранее неизвестное время. В данной работе функцию цены предлагается оценивать сверху при помощи кусочно-аффинных функций специального вида. Это позволяет получить внутренние оценки искомого множества разрешимости, верхние оценки минимального значения интегрального функционала в различных позициях, а также соответствующий кусочно-аффинный синтез управлений.

Ранее в работе [4] была предпринята попытка использования кусочно-аффинных функций управления для решения задачи о переводе автономной системы из заданного начального множества в целевое на бесконечном интервале времени. Однако предложенный алгоритм не позволял проводить оптимизацию вдоль траекторий системы. В данной статье предлагается альтернативный подход, ориентированный именно на решение задачи оптимального управления.

Предложенный в данной работе метод предполагает построение кусочно-аффинной аппроксимации исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений на заданном разбиении области фазового пространства на симплексы. Такой подход иногда называют “гибридизацией” [9]. Далее на основе принципа сравнения для уравнения ГЯБ построена кусочно-аффинная функция цены для полученной системы с переключениями [10;11]. Основной сложностью здесь является выбор адекватной схемы пересчета значений функции цены в вершинах симплексов одновременно с построением соответствующего управления в форме обратной связи, которое должно быть допустимым, т.е. порождающим траектории исходной системы продолжаемые на некотором отрезке времени (по крайней мере до момента достижения траекторией целевого множества). Указанные проблемы в работе решены двумя разными методами. Сначала приведено описание алгоритма построения непрерывной кусочно-аффинной функции цены и соответствующего ей непрерывного кусочно-аффинного управления. Далее полученные результаты обобщены на случай, когда функции цены и управления могут иметь конечные разрывы на границах соседних симплексов.

Работа алгоритмов, основанных на предложенных схемах приближенного построения функции цены и синтеза управлений, продемонстрирована на примере задачи управления колесным роботом на плоскости.

1. Постановка задачи

1.1. Математическая модель

В пространстве \mathbb{R}^{n_x} , $n_x \in \mathbb{N}$, рассмотрим некоторое компактное множество Ω , а также совокупность систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u, \quad x = x(t) \in \Omega, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^{n_x}$ является дважды непрерывно дифференцируемой по переменной $x \in \Omega$, $\mathbf{g}(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ — непрерывно дифференцируема по $x \in \Omega$, $u = u(x) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — позиционное управление, на возможные значения которого наложены “жесткие” поточечные ограничения: $u(x) \in \mathcal{P}$. Множество $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ является выпуклым компактом.

Обозначим через \mathcal{U}_f класс допустимых позиционных управлений [2], содержащий многозначные отображения $u = u(x) \subseteq \mathcal{P}$, при подстановке любого из которых в уравнения (1.1) должно быть получено дифференциальное включение, имеющее решения при любом начальном векторе фазовых переменных $x_0 \in \Omega$. Решение $x(t)$ может быть определено и за пределами множества Ω , но далее будем рассматривать только такие траектории, для которых $x(t) \in \Omega \forall t \geq t_0$.

Под решением системы (1.1), замкнутой управлением в форме обратной связи $u(x) \in \mathcal{U}_f$, понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая заданному начальному условию $x(t_0) = x_0$ и для почти всех $t \in (t_0, +\infty)$ — соответствующему дифференциальному включению, полученному из (1.1). Например, указанное условие будет выполнено, если потребовать [12], чтобы многозначные отображения $u(x)$ принимали выпуклые, компактные значения и были полунепрерывны сверху по $x \in \Omega$.

1.2. Задача оптимального управления на бесконечном отрезке времени

Зафиксируем некоторое компактное множество $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$, содержащее целевые состояния системы. Также рассмотрим функционал

$$J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{\tau^*} \left(\tilde{\mathbf{f}}(x(\tau, t_0, x_0)|_u) + (\tilde{\mathbf{g}}(x(\tau, t_0, x_0)|_u))^T u(x(\tau, t_0, x_0)|_u) \right) d\tau + \varphi(x(\tau^*, t_0, x_0)|_u), \quad (1.2)$$

определенный на некоторой траектории $x(t, t_0, x_0)|_u$ при некотором однозначном допустимом позиционном управлении $u(\cdot)$. Здесь $\tau^* \geq t_0$ — момент первого попадания траектории системы в целевое множество \mathcal{X}_1 , функция $\tilde{\mathbf{f}}(x) \in \mathbb{R}$ является дважды, а функция $\tilde{\mathbf{g}}(x) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — единожды непрерывно дифференцируемой по $x \in \Omega$. Кроме того, будем далее считать выполненным следующее

Предположение 1. Функции $\tilde{\mathbf{f}}(x)$, $\tilde{\mathbf{g}}(x)$, $\varphi(x)$ таковы, что

$$\tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u > 0 \quad \forall x \in \Omega, \forall u \in \mathcal{P}; \quad \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}_1.$$

З а д а ч а. Построить закон управления $u^* = u^*(\cdot) \in \mathcal{U}_f$, а также множество $\mathcal{X}_0 \subset \Omega$ такое, что при любых $x_0 \in \mathcal{X}_0$ у системы (1.1) существует траектория $x(t, t_0, x_0)|_{u^*}$, для которой

$$x(\tau, t_0, x_0)|_{u^*} \in \Omega \quad \forall \tau \geq t_0, \quad (1.3)$$

$$x(\tau^*, t_0, x_0)|_{u^*} \in \mathcal{X}_1 \quad \text{при некотором } \tau^* \geq t_0. \quad (1.4)$$

Кроме того, управление u^* должно минимизировать функционал (1.2) на множестве всех $u \in \mathcal{U}_f$, удовлетворяющих (1.3), (1.4).

Заметим, что искомое множество \mathcal{X}_0 должно содержать в качестве подмножества \mathcal{X}_1 , причем имеет смысл рассматривать максимальные по включению множества \mathcal{X}_0 , удовлетворяющие указанным выше требованиям.

Поставленная задача может быть решена методом динамического программирования. Для этого рассмотрим функцию цены

$$V(x) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_f} \max_{x(\cdot)} \left\{ \int_{t_0}^{\tau^*} \left(\tilde{\mathbf{f}}(x(\tau)) + (\tilde{\mathbf{g}}(x(\tau)))^T u(x(\tau)) \right) d\tau + \varphi(x(\tau^*)) : x(t_0) = x \right\},$$

где $x(\cdot)$ — всевозможные траектории, выпущенные из начальной позиции $\{t_0, x\}$ при фиксированном управлении $u(\cdot)$. В точках дифференцируемости функция $V(x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби — Беллмана (ГЯБ) [5]

$$\min_{u \in \mathcal{P}} \left\{ V'(x; \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u) + \tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u \right\} = 0 \quad (1.5)$$

с краевым условием

$$V(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}_1.$$

Здесь $V'(x; l)$ — производная функции $V(x)$ в точке x по направлению $l \in \mathbb{R}^{n_x}$.

В общем случае функция $V(x)$ может не быть дифференцируемой, а решение уравнения (1.5) следует понимать в обобщенном смысле [5–7].

В данной работе уравнение (1.5) не предполагается решать точно. Вместо этого основная цель — поиск приближенного его решения на основе принципа сравнения и за счет использования специального класса кусочно-аффинных функций цены. Для искомой оценки функции цены будем далее применять обозначение $W(x)$.

2. Линеаризация систем дифференциальных уравнений на симплексах

Построим некоторое разбиение области Ω на симплексы [13] $\Omega^{(i)}$, $i = 1, \dots, M$, пересекающиеся друг с другом только по граничным точкам. Пусть, кроме того, $\Omega \supseteq \cup_{i=1}^M \Omega^{(i)}$. Каждая грань симплекса $\Omega^{(i)}$, являющаяся выпуклой оболочкой n_x его вершин, есть либо часть границы самого множества Ω , либо грань соседнего симплекса $\Omega^{(j)}$, $j \neq i$. Занумеруем все вершины симплексов g_1, \dots, g_S , где S — количество уникальных вершин. Здесь и далее верхний индекс (i) обозначает соответствие рассматриваемого понятия (множество, функция, вектор, матрица) области $\Omega^{(i)}$.

Зафиксируем некоторый симплекс $\Omega^{(i)}$, и пусть $g_1^{(i)}, \dots, g_{n_x+1}^{(i)}$ — его вершины (наличие верхнего индекса (i) говорит о том, что для вершин используется локальная нумерация нижними индексами, а не глобальная (от 1 до S), по вершинам всех симплексов). Составим из векторов-столбцов $g_1^{(i)}, \dots, g_{n_x+1}^{(i)}$ матрицу $G^{(i)}$. Для каждой точки $x \in \Omega^{(i)}$ найдется единственный вектор $\alpha^{(i)}(x) = (\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{n_x+1}^{(i)})^T$ барицентрических координат такой, что

$$\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)} = 1, \quad \alpha_k^{(i)} \geq 0 \quad \forall k, \quad G^{(i)} \alpha^{(i)}(x) = x.$$

Дополним вектор x до $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, и пусть $\tilde{G}^{(i)} = \begin{pmatrix} g_1^{(i)} & \cdots & g_{n_x+1}^{(i)} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$.

Тогда указанные выше соотношения можно переписать в краткой форме: $\tilde{G}^{(i)} \alpha^{(i)}(x) = \tilde{x}$. Из определения симплекса следует, что $\det(\tilde{G}^{(i)}) \neq 0$ и $\alpha^{(i)}(x) = (\tilde{G}^{(i)})^{-1} \tilde{x}$ имеет все неотрицательные компоненты тогда и только тогда, когда $x \in \Omega^{(i)}$. Пусть $(\tilde{G}^{(i)})^{-1} = \begin{pmatrix} H^{(i)} & h^{(i)} \end{pmatrix}$. В этом случае $\alpha^{(i)}(x) = H^{(i)}x + h^{(i)}$.

В дальнейшем для переходов между глобальной нумерацией вершин симплексов и локальной (в рамках определенного симплекса) будем использовать следующее обозначение: пусть $\sigma(i, k)$ — это такой номер от 1 до $n_x + 1$, что $g_{\sigma(i, k)}^{(i)} = g_k$, $i = 1, \dots, M$, $k = 1, \dots, S$.

При $x \in \Omega^{(i)}$ для функции $\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u$ из (1.1) справедливо следующее представление:

$$\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u = F^{(i)} \alpha^{(i)}(x) + B^{(i)}u + R^{(i)}(x) = A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + R^{(i)}(x),$$

где

$$F^{(i)} = (\mathbf{f}(g_1^{(i)}), \dots, \mathbf{f}(g_{n_x+1}^{(i)})) \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)}, \quad A^{(i)} = F^{(i)} H^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x},$$

$$B^{(i)} = \frac{1}{n_x + 1} \sum_{k=1}^{n_x+1} \mathbf{g}(g_k^{(i)}), \quad f^{(i)} = F^{(i)} h^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x},$$

$R^{(i)}(x)$ — погрешность локальной линеаризации.

Разложим функцию $\mathbf{f}_s(x)$, $s = 1, \dots, n_x$ (т. е. s -ю компоненту вектор-функции) по формуле Тейлора до членов 2-го порядка включительно с центром в точке $x \in \Omega^{(i)}$, взяв итоговое значение в вершине $g_k^{(i)}$ указанного симплекса

$$\mathbf{f}_s(g_k^{(i)}) = \mathbf{f}_s(x) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial x}(x) \right)^T (g_k^{(i)} - x) + (g_k^{(i)} - x)^T \frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi_k)(g_k^{(i)} - x), \quad \xi_k = \xi_k(s, x, g_k^{(i)}) \in \Omega^{(i)}.$$

Сложим полученные соотношения при различных $k = 1, \dots, n_x + 1$, домножив их на соответствующие величины $\alpha_k(x)$ ²:

$$(F^{(i)} \alpha^{(i)}(x))_s = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) \mathbf{f}_s(g_k^{(i)}) = \mathbf{f}_s(x) + \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) (g_k^{(i)} - x)^T \frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi_k)(g_k^{(i)} - x).$$

Легко видеть, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) (g_k^{(i)} - x)^T \frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi_k)(g_k^{(i)} - x) \right| \leq M_s^{(i)} = \max_{\xi \in \Omega^{(i)}} \rho_{\max} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi) \right) \cdot d^{(i)} \quad \forall x \in \Omega^{(i)},$$

где $\rho_{\max}(R)$ — максимальное значение абсолютной величины собственного значения симметричной матрицы R ,

$$d^{(i)} = \max \left\{ \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k \left\| \sum_{r=1}^{n_x+1} \alpha_r (g_r^{(i)} - g_k^{(i)}) \right\|^2 : \alpha_k \in [0, 1] \quad \forall k, \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k = 1 \right\}.$$

Разложим теперь функцию $\mathbf{g}_{sp}(x)$ (элемент матрицы $\mathbf{g}(x)$, стоящий в s -й строке и p -м столбце) по формуле Тейлора до членов 1-го порядка включительно

$$\mathbf{g}_{sp}(g_k^{(i)}) = \mathbf{g}_{sp}(x) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(\zeta_k) \right)^T (g_k^{(i)} - x), \quad \zeta_k = \zeta_k(s, p, x, g_k^{(i)}) \in \Omega^{(i)}.$$

Тогда

$$B_{sp}^{(i)} = \mathbf{g}_{sp}(x) + \frac{1}{n_x + 1} \sum_{k=1}^{n_x+1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(\zeta_k) \right)^T (g_k^{(i)} - x),$$

$$\left| \frac{1}{n_x + 1} \sum_{k=1}^{n_x+1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(\zeta_k) \right)^T (g_k^{(i)} - x) \right| \leq N_{sp}^{(i)} = \max_{x \in \Omega^{(i)}} \left\| \frac{\partial \mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(x) \right\| r^{(i)},$$

$$r^{(i)} = \frac{1}{n_x + 1} \max \left\{ \sum_{k=1}^{n_x+1} \|g_k^{(i)} - g_j^{(i)}\| : j = 1, \dots, n_x + 1 \right\}.$$

Пусть, кроме того,

$$N_s^{(i)} = \max \left\{ \sum_{p=1}^{n_u} |u_p| N_{sp}^{(i)} : u \in \mathcal{P} \right\}.$$

Таким образом, получена оценка для s -й компоненты погрешности линеаризации

$$|R_s^{(i)}(x)| \leq \mathbf{R}_s^{(i)} = M_s^{(i)} + N_s^{(i)} \quad \text{при } x \in \Omega^{(i)},$$

$$R^{(i)}(x) \in \mathcal{Q}^{(i)} = [-\mathbf{R}_1^{(i)}, \mathbf{R}_1^{(i)}] \times \dots \times [-\mathbf{R}_{n_x}^{(i)}, \mathbf{R}_{n_x}^{(i)}]. \quad (2.1)$$

²Здесь использовано соотношение $\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) \left(\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial x}(x) \right)^T (g_k^{(i)} - x) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial x}(x) \right)^T \left(\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) g_k^{(i)} - x \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial x}(x) \right)^T (x - x) = 0$.

Теперь положим

$$R^{(i)} = \left(\sum_{s=1}^{n_x} (\mathbf{R}_s^{(i)})^2 \right)^{1/2} \geq \|R^{(i)}(x)\|, \quad R^{(i),*} = \max_{s=1, \dots, n_x} |\mathbf{R}_s^{(i)}|.$$

Аналогично линеаризуем функцию, стоящую под интегралом в (1.2):

$$\tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u = \tilde{A}^{(i)} x + \tilde{B}^{(i)} u + \tilde{f}^{(i)} + \tilde{R}^{(i)}(x).$$

Здесь

$$\tilde{A}^{(i)} = (\tilde{\mathbf{f}}(g_1^{(i)}), \dots, \tilde{\mathbf{f}}(g_{n_x+1}^{(i)})) H^{(i)} \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}, \quad \tilde{B}^{(i)} = \frac{1}{n_x + 1} \sum_{k=1}^{n_x+1} (\tilde{\mathbf{g}}(g_k^{(i)}))^T \in \mathbb{R}^{1 \times n_u},$$

$$\tilde{f}^{(i)} = (\tilde{\mathbf{f}}(g_1^{(i)}), \dots, \tilde{\mathbf{f}}(g_{n_x+1}^{(i)})) h^{(i)} \in \mathbb{R}, \quad |\tilde{R}^{(i)}(x)| \leq \tilde{\mathbf{R}}^{(i)} = \tilde{M}^{(i)} + \tilde{N}^{(i)} \quad \text{при } x \in \Omega^{(i)},$$

$$\tilde{M}^{(i)} = \max_{\xi \in \Omega^{(i)}} \rho_{\max} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{f}}}{\partial x^2}(\xi) \right) d^{(i)}, \quad \tilde{N}_p^{(i)} = \max_{x \in \Omega^{(i)}} \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_p(x)}{\partial x} \right\| r^{(i)}, \quad \tilde{N}^{(i)} = \max_{u \in \mathcal{P}} \left\{ \sum_{p=1}^{n_u} |u_p| \tilde{N}_p^{(i)} \right\}.$$

В дальнейшем также будет использовано линейное приближение функции $\varphi(x)$, $x \in \mathcal{X}_1$. Пусть $\mathcal{X}_1 \supseteq \Omega^{(j_1)} \cup \dots \cup \Omega^{(j_m)}$ для некоторых $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, M\}$, $\mathcal{I}_1 = \{j_1, \dots, j_m\}$. Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) \varphi(g_k^{(i)}) - \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) (g_k^{(i)} - x)^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\eta_k) (g_k^{(i)} - x) \quad \forall x \in \Omega^{(i)}, \quad i \in \mathcal{I}_1, \quad (2.2)$$

где $\forall x \in \Omega^{(i)}$

$$\left| (g_k^{(i)} - x)^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\eta_k) (g_k^{(i)} - x) \right| \leq K_k^{(i)} = \max_{\xi \in \Omega^{(i)}} \rho_{\max} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\eta) \right) \cdot \max_{j=1, \dots, n_x+1} \|g_k^{(i)} - g_j^{(i)}\|^2. \quad (2.3)$$

3. Непрерывная кусочно-аффинная функция цены

На множестве симплексов $\Omega^{(i)}$, $i = 1, \dots, M$, рассмотрим кусочно-аффинную функцию цены следующего вида:

$$W(x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) w_k^{(i)}, \quad \text{если } x \in \Omega^{(i)}. \quad (3.1)$$

Здесь $w_k^{(i)} = W(g_k^{(i)})$ — значение функции в соответствующей вершине $g_k^{(i)}$ рассматриваемого симплекса. Предположим, что для нескольких разных симплексов $\Omega^{(i_1)}, \dots, \Omega^{(i_r)}$, имеющих общую вершину g_k , соответствующие значения функции $W(x)$ в этой вершине $w_{\sigma^{(i_1, k)}}^{(i_1)}, \dots, w_{\sigma^{(i_r, k)}}^{(i_r)}$ совпадают между собой; обозначим их через w_k . При таком условии функция $W(x)$ непрерывна. Она однозначно задается совокупностью величин w_1, \dots, w_S . Пусть

$$w^{(i)} = (w_1^{(i)}, \dots, w_{n_x+1}^{(i)})^T \in \mathbb{R}^{n_x+1}.$$

Тогда выражение (3.1) можно переписать таким образом:

$$W(x) = (w^{(i)})^T (H^{(i)} x + h^{(i)}), \quad \text{если } x \in \Omega^{(i)}. \quad (3.2)$$

Функция $W(x)$ дифференцируема по любому направлению. Однако производные по направлениям могут иметь разрывы при переходе точки x через границы соседних симплексов.

Зафиксируем некоторый симплекс $\Omega^{(i)}$. Рассмотрим выражение в фигурных скобках в (1.5) при условии, что $x \in \text{int } \Omega^{(i)}$ и вместо функции цены $V(x)$ использована ее оценка $W(x)$, заданная согласно (3.1), (3.2):

$$\begin{aligned} & W'(x; \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u) + \tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u \\ &= (w^{(i)})^T H^{(i)} (A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + R^{(i)}(x)) + \tilde{A}^{(i)}x + \tilde{B}^{(i)}u + \tilde{f}^{(i)} + \tilde{R}^{(i)}(x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рассмотрим многозначное кусочно-аффинное управление следующего вида:

$$\mathcal{U}(x) = \{Y^{(i)}(H^{(i)}x + h^{(i)}): y_k^{(i)} \in \mathcal{Y}_k^{(i)}, k = 1, \dots, n_x + 1\} \text{ при } x \in \Omega^{(i)}, \quad (3.4)$$

где $Y^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x + 1)}$ — матрица, составленная из столбцов $y_1^{(i)}, \dots, y_{n_x + 1}^{(i)}$ — значений управления в вершинах симплекса $\Omega^{(i)}$, множества $\mathcal{Y}_k^{(i)} \subseteq \mathcal{P}$ являются выпуклыми компактами. В силу выпуклости множества \mathcal{P} справедливо включение $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P} \quad \forall x \in \Omega$. Предположим, что для любых симплексов $\Omega^{(i_1)}, \dots, \Omega^{(i_r)}$, имеющих общую вершину g_k , $\mathcal{Y}_{\sigma(i_1, k)}^{(i_1)} = \dots = \mathcal{Y}_{\sigma(i_r, k)}^{(i_r)}$. Тогда непрерывное по x управление $\mathcal{U}(x)$ однозначно определяется совокупностью множеств $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_S$, сопоставленных вершинам симплексов.

Рассмотрим некоторые свойства функции цены вида (3.1) для системы, замкнутой управлением вида (3.4). В дальнейшем через $\rho(l|\mathcal{X})$ будем обозначать величину опорной функции ко множеству \mathcal{X} в направлении, задаваемом вектором l .

Лемма. Пусть множества $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_S \in \mathcal{P}$ и значения непрерывной кусочно-аффинной функции цены w_1, \dots, w_S в вершинах симплексов заданы таким образом, что для некоторого $i \in \{1, \dots, M\}$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \max_{k=1, \dots, n_x + 1} \left\{ (w^{(i)})^T H^{(i)} \mathbf{f}(g_k^{(i)}) + \rho((H^{(i)}B^{(i)})^T w^{(i)} + (\tilde{B}^{(i)})^T | \mathcal{Y}_k^{(i)}) + \tilde{\mathbf{f}}(g_k^{(i)}) : g_k^{(i)} \text{ — вершина } \Omega^{(i)} \right\} \\ & + n_x \|H^{(i)}\|_{\infty} R^{(i),*} \sum_{k=1}^{n_x + 1} w_k^{(i)} + \tilde{\mathbf{R}}^{(i)} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

и $w_k^{(i)} \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, n_x + 1$. Тогда для управления $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x)$ вида (3.4) справедливо неравенство

$$\max_{u \in \mathcal{U}(x)} \{W'(x; \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u) + \tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u\} \leq 0. \quad (3.6)$$

Более того, функция $W(x)$ строго убывает вдоль соответствующей траектории системы (1.1) — по меньшей мере пока $x(t) \in \Omega^{(i)}$.

Доказательство. Заметим, что³

$$\begin{aligned} |(w^{(i)})^T H^{(i)} R^{(i)}(x)| &\leq \|w^{(i)}\|_1 \cdot \|H^{(i)} R^{(i)}(x)\|_{\infty} \leq \|w^{(i)}\|_1 \cdot n_x \|H^{(i)}\|_{\infty} R^{(i),*} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n_x + 1} w_k^{(i)} \right) n_x \|H^{(i)}\|_{\infty} R^{(i),*}, \end{aligned}$$

где $w_k^{(i)}$ — неотрицательные компоненты вектора $w^{(i)}$, $\|H^{(i)}\|_{\infty} = \max_{s_1, s_2} |H_{s_1 s_2}^{(i)}|$. Следовательно, согласно (3.3) для (3.6) достаточно выполнения условия

$$\begin{aligned} & (w^{(i)})^T H^{(i)} (A^{(i)}x + B^{(i)}Y^{(i)}(H^{(i)}x + h^{(i)}) + f^{(i)}) + \tilde{A}^{(i)}x + \tilde{B}^{(i)}Y^{(i)}(H^{(i)}x + h^{(i)}) \\ & + \tilde{f}^{(i)} + n_x \|H^{(i)}\|_{\infty} R^{(i),*} \sum_{k=1}^{n_x + 1} w_k^{(i)} + \tilde{\mathbf{R}}^{(i)} \leq 0 \quad \forall x \in \Omega^{(i)}, \quad \forall Y^{(i)}: y^{(i)} \in \mathcal{Y}^{(i)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

³Здесь $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$.

В (3.7) функция в левой части аффинная по x , а потому при фиксированном $Y^{(i)}$ (3.7) эквивалентно

$$\max_{k=1, \dots, n_x+1} \left\{ (w^{(i)})^T H^{(i)} \mathbf{f}(g_k^{(i)}) + \langle (H^{(i)} B^{(i)})^T w^{(i)}, y_k^{(i)} \rangle + \tilde{\mathbf{f}}(g_k^{(i)}) + \langle (\tilde{B}^{(i)})^T, y_k^{(i)} \rangle : \right. \\ \left. g_k^{(i)} - \text{вершина } \Omega^{(i)} \right\} + n_x \|H^{(i)}\|_\infty R^{(i),*} \sum_{k=1}^{n_x+1} w_k^{(i)} + \tilde{\mathbf{R}}^{(i)} \leq 0 \quad \forall y_k^{(i)} \in \mathcal{Y}_k^{(i)}. \quad (3.8)$$

Взяв максимум выражения из левой части (3.8) по $y_k^{(i)}$, получим (3.5). Отсюда (3.6) является следствием (3.5).

Убывание (в строгом смысле) функции цены вдоль траектории системы теперь вытекает из предположения 1: $\forall u \in \mathcal{U}(x)$

$$W'(x; \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u) \leq -(\tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u) \leq \max \{ -(\tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u) : x \in \Omega^{(i)}, u \in \mathcal{P} \} < 0. \quad (3.9)$$

4. Достаточные условия решения задачи управления

Теорема 1. Пусть $\mathcal{I}_0 \subseteq \{1, \dots, M\}$, причем $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_0$. Зафиксируем выпуклые компактные множества $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_S \subseteq \mathcal{P}$ и неотрицательные величины $w_1, \dots, w_S \in \mathbb{R}$ такие, что:

- 1) для каждого $i \in \mathcal{I}_0 \setminus \mathcal{I}_1$ выполняется неравенство (3.5);
- 2) $w_k \geq \varphi(g_k) + K_k^{(i)} > 0 \quad \forall k, \quad \forall i \in \mathcal{I}_1: g_k - \text{вершина } \Omega^{(i)}$.

Пусть

$$W_{\max} = \min \left\{ w_k : g_k - \text{вершина } \Omega^{(i)} \text{ при некотором } i \in \mathcal{I}_0; \right. \\ \left. \text{либо } \exists i^* \notin \mathcal{I}_0 : g_k - \text{вершина } \Omega^{(i^*)}, \text{ либо } g_k \in \partial \Omega \right\}, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{X}_0 = \bigcup \{ \Omega^{(i)} \mid i \in \mathcal{I}_0; w_k \leq W_{\max} \quad \forall k : g_k - \text{вершина } \Omega^{(i)} \} \neq \emptyset. \quad (4.2)$$

Тогда для любого $x_0 \in \mathcal{X}_0$ задача перевода траектории $x(t, t_0, x_0)$ в целевое множество \mathcal{X}_1 за конечное время является разрешимой, причем соответствующее позиционное управление может быть найдено в виде (3.4). Более того, $W(x_0) - \text{верхняя оценка функции цены } V(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную начальную позицию $x(t_0) = x_0 \in \mathcal{X}_0$. Управление (3.4) является непрерывным по x многозначным отображением с выпуклыми, компактными значениями, а потому оно допустимо. У замкнутой им системы (1.1) существует траектория $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, $t \geq t_0$, продолжаемая по крайней до момента выхода из множества \mathcal{X}_0 . Пусть $u(x(t)) - \text{соответствующая однозначная ветвь многозначного отображения } \mathcal{U}(x(t)) : u(x(t)) = Y^{(i)}(H^{(i)}x(t) + h^{(i)})$.

Из условия 1) теоремы 1 и леммы следует, что вдоль построенной траектории системы непрерывная кусочно-аффинная функция $W(x)$, определенная формулой (3.1), убывает по крайней мере пока $x(t) \in \Omega^{(i(t))}$ для некоторых $i(t) \in \mathcal{I}_0 \setminus \mathcal{I}_1$. Но согласно (4.1), (4.2) справедливо $W(x(t)) \leq W_{\max}$, а значит $x(t) \in \mathcal{X}_0 \quad \forall t \geq t_0$.

Поскольку $W(x_0) \geq 0$, а в каждом из симплексов $\Omega^{(i)}, i \in \mathcal{I}_0 \setminus \mathcal{I}_1$, полная производная функции $W(x)$ строго отделена от нуля некоторой константой (см. (3.9)), то за конечное время значение $W(x(t))$ должно достигнуть нулевого значения. То есть найдется такое $t^* \geq t_0$, что $x(t^*) \in \Omega^{(i^*)} \subseteq \mathcal{X}_1$ для некоторого $i^* \in \mathcal{I}_1$.

Отрезок $[t_0, t^*]$ можно представить в виде $[t_0 = \tau_1, \tau_2] \cup [\tau_2, \tau_3] \cup \dots \cup [\tau_{k-1}, \tau_k = t^*]$, где на каждом из отрезков $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ траектория $x(t)$ находится в одном (для данного отрезка) симплексе $\Omega^{(i_1)}$ либо движется по общей границе фиксированной совокупности соседних симплексов $\Omega^{(i_1)} \cap \dots \cap \Omega^{(i_m)}$ (здесь i_1, \dots, i_m зависят от j). На каждом из интервалов (τ_j, τ_{j+1})

производная непрерывной функции $W(x)$ вдоль построенной траектории системы является непрерывной функцией. Проинтегрировав ее, получим неравенство

$$W(x(\tau_{j+1})) - W(x(\tau_j)) \leq - \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\tilde{\mathbf{f}}(x(\tau)) + (\tilde{\mathbf{g}}(x(\tau)))^T u(x(\tau))) d\tau, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Из условия 2) теоремы, а также из (2.2), (2.3) следует, что $W(x(t^*)) \geq \varphi(x(t^*))$. Объединяя полученные неравенства, получим

$$\varphi(x(t^*)) \leq W(t^*) \leq W(x_0) - \int_{t_0}^{t^*} (\tilde{\mathbf{f}}(x(\tau)) + (\tilde{\mathbf{g}}(x(\tau)))^T u(x(\tau))) d\tau,$$

откуда имеем, что $W(x_0) \geq J(u(\cdot)) \geq V(x_0)$. □

5. Алгоритм построения кусочно-аффинной функции цены

Целью описываемого в данном разделе алгоритма является определение значений величин $w_1, \dots, w_S \in \mathbb{R}$, множеств $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_S \subseteq \mathcal{P}$, а также множества индексов \mathcal{I}_0 , для которых выполнялась бы теорема 1. При этом достаточно определить w_k, \mathcal{Y}_k только для тех индексов $k = 1, \dots, S$, каждому из которых соответствует g_k — вершина хотя бы одного из симплексов $\Omega^{(j)}$, $j \in \mathcal{I}_0$.

Ниже на каждой итерации работы основного алгоритма будет использовано некоторое (произвольное) правило выбора индекса k^* из заданного конечного набора $\{k_1, \dots, k_r\}$, $r \geq 1$. Каждый конкретный алгоритм такого выбора (будем обозначать его через $k^* = \mathcal{F}(\{k_1, \dots, k_r\})$) позволит в качестве результата получить, вообще говоря, свою функцию цены $W(x)$. В данной работе не будем конкретизировать такого рода алгоритм, предполагая, что он задан и фиксирован (например, используется случайный выбор с одинаковыми вероятностями элементарных исходов).

Каждой вершине g_k сопоставим вспомогательную величину $\sigma_k \in \{-1, 0, 1\}$. Здесь $\sigma_k = 0$ соответствует тому факту, что вершина g_k еще не была обработана алгоритмом, а $\sigma_k = 1$ — тому факту, что g_k была обработана, причем для нее уже определены значения функции цены w_k и множества управляющих параметров \mathcal{Y}_k с необходимыми свойствами; $\sigma_k = -1$ соответствует обработанной вершине, для которой подходящие w_k, \mathcal{Y}_k построить не удалось.

А л г о р и т м 1: Построение непрерывных функций цены и управления.

1) Для каждой вершины g_k , $k = 1, \dots, S$, являющейся вершиной $\Omega^{(j)}$, $j \in \mathcal{I}_1$, положим $w_k = \varphi(g_k) + \max\{K_{\sigma(i,k)}^{(i)} : i \in \mathcal{I}_1, g_k \in \Omega^{(i)}\}$, $\mathcal{Y}_k = \mathcal{P}$, $\sigma_k = 1$. Для всех остальных вершин g_k пусть $\sigma_k = 0$.

2) Определим величину W_{\max} :

$$W_{\max} = \min \left\{ w_s : \sigma_s = 1; \text{ либо } \exists i^* : g_s \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)} \text{ и } \exists s^* : \right. \\ \left. g_{s^*} \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)}, \sigma_{s^*} \neq 1, \text{ либо } g_s \in \partial\Omega \right\}.$$

3) Определим множество индексов

$$\mathcal{K} = \left\{ k^* \in \{1, \dots, S\} : \sigma_{k^*} = 0, \exists j = 1, \dots, M : g_{k^*} \text{ — вершина } \Omega^{(j)}, \right. \\ \left. \text{причем } \forall k \neq k^* : g_k \text{ — вершина } \Omega^{(j)} \Rightarrow \sigma_k = 1 \right\}.$$

4) Если $\mathcal{K} = \emptyset$, то переходим к п. 11).

5) Если $\mathcal{K} \neq \emptyset$, то пусть $k^* = \mathcal{F}(\mathcal{K})$. Вершине g_{k^*} соответствуют некоторые содержащие ее симплексы $\Omega^{(i_1)}, \dots, \Omega^{(i_m)}$, $m \geq 1$, все остальные вершины $g_k \neq g_{k^*}$ которых уже были ранее обработаны (т. е. для каждой из них $\sigma_k = 1$).

6) Определим величину функции цены w_{k^*} . Для каждого симплекса $\Omega^{(i_s)}$, $s = 1, \dots, m$, рассмотрим неравенство (3.5) при $i = i_s$ относительно неизвестных w_{k^*} и $y_{k^*} \in \mathcal{Y}_{k^*} \subseteq \mathcal{P}$. У вектора $w^{(i_s)}$ известны все компоненты, кроме w_{k^*} . Неравенство (3.5) может быть переписано в виде эквивалентной системы неравенств следующего вида:

$$\begin{cases} w_{k^*}(a_s^T y_{k^*} + b_{\sigma(i_s, k^*), s}) < c_s^T y_{k^*} + d_{\sigma(i_s, k^*), s}, \\ w_{k^*}(a_s^T y_k^{(i_s)} + b_{k, s}) < c_s^T y_k^{(i_s)} + d_{k, s}, \quad k = 1, \dots, n_x + 1, \quad k \neq \sigma(i_s, k^*) \quad \forall y_k^{(i_s)} \in \mathcal{Y}_k^{(i_s)}, \end{cases}$$

где коэффициенты $a_s \in \mathbb{R}^{n_u}$, $b_{k, s} \in \mathbb{R}$, $c_s \in \mathbb{R}^{n_u}$, $d_{k, s} \in \mathbb{R}$ могут быть найдены из (3.5):

$$a_s — \text{столбец матрицы } (H^{(i_s)} B^{(i_s)})^T \text{ с номером } \sigma(i_s, k^*), \quad (5.3)$$

$$b_{k, s} = (H^{(i_s)} f(g_k^{(i_s)}))_{\sigma(i_s, k^*)} + n_x \|H^{(i_s)}\|_{\infty} R^{(i_s), *}, \quad (5.4)$$

$$c_s = - \left(\sum_{p \neq \sigma(i_s, k^*)} w_p^{(i_s)} \cdot \{ \text{столбец } (H^{(i_s)} B^{(i_s)})^T \text{ с номером } p \} + (\tilde{B}^{(i)})^T \right), \quad (5.5)$$

$$d_{k, s} = - \left(\sum_{p \neq \sigma(i_s, k^*)} w_p^{(i_s)} ((H^{(i_s)} f(g_k^{(i_s)}))_p + n_x \|H^{(i_s)}\|_{\infty} R^{(i_s), *}) + \tilde{f}(g_k^{(i_s)}) + \tilde{\mathbf{R}}^{(i_s)} \right). \quad (5.6)$$

Пусть⁴

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{u \in \mathcal{P} : a_s^T u + b_{\sigma(i_s, k^*), s} \leq -\varepsilon \quad \forall s = 1, \dots, m\}.$$

Кроме того, для каждого $r = 1, \dots, S$, для которого g_r — вершина хотя бы одного из симплексов $\Omega^{(i_1)}, \dots, \Omega^{(i_m)}$ и $r \neq k^*$, пусть

$$\tilde{\mathcal{Y}}_r = \{u \in \mathcal{Y}_r : a_s^T u + b_{\sigma(i_s, r), s} \leq -\varepsilon \quad \forall s = 1, \dots, m : g_r \in \Omega^{(i_s)}\}.$$

7) Если для хотя бы одного r $\tilde{\mathcal{Y}}_r = \emptyset$ либо $\tilde{\mathcal{P}} = \emptyset$, то положим $\sigma_{k^*} = -1$. Алгоритм переходит к п. 3).

8) Если условия предыдущего пункта не выполнены, то положим $\sigma_{k^*} = 1$,

$$w_{k^*} = \min_{u \in \tilde{\mathcal{P}}} \min_{y_r \in \tilde{\mathcal{Y}}_r} \max_{s=1, \dots, m} \max \left\{ \frac{c_s^T u + d_{\sigma(i_s, k^*), s}}{a_s^T u + b_{\sigma(i_s, k^*), s}}, \max \left\{ \frac{c_s^T y_k^{(i_s)} + d_{k, s}}{a_s^T y_k^{(i_s)} + b_{k, s}} : k = 1, \dots, n_x + 1, k \neq \sigma(i_s, k^*) \right\} \right\}. \quad (5.7)$$

Пусть также \mathcal{P}^* , \mathcal{Y}_r^* — множества минимизаторов в (5.7). Положим $\mathcal{Y}_{k^*} = \mathcal{P}^*$, а также скорректируем управление в ранее обработанных вершинах: $\mathcal{Y}_r = \mathcal{Y}_r^*$, $\forall r = 1, \dots, S$, где g_r — вершина хотя бы одного из симплексов $\Omega^{(i_1)}, \dots, \Omega^{(i_m)}$, $r \neq k^*$.

9) Подсчитаем вспомогательную величину

$$W_{\max}^+ = \min \left\{ w_s : \sigma_s = 1; \text{ либо } \exists i^* : g_s — \text{вершина } \Omega^{(i^*)} \text{ и } \exists s^* : g_{s^*} — \text{вершина } \Omega^{(i^*)}, \sigma_{s^*} \neq 1, \text{ либо } g_s \in \partial \Omega \right\}.$$

Если $W_{\max}^+ < W_{\max}$, то дополнительно положим $w_{k^*} = W_{\max}$. В противном случае величина w_{k^*} не изменяется, но положим $W_{\max} = W_{\max}^+$.

⁴Здесь $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное малое число.

10) Алгоритм переходит к п. 3) (обработке следующей вершины).

11) Алгоритм завершает работу. Итогом является набор величин w_k , множеств \mathcal{Y}_k для тех вершин, для которых $\sigma_k = 1$, а также величина W_{\max} , соответствующая (4.1). Множество \mathcal{X}_0 теперь определим согласно (4.2), учитывая только те симплексы $\Omega^{(i)}$, для которых каждой вершине g_k сопоставлена величина $\sigma_k = 1$.

Заметим, что для построенных \mathcal{X}_0 , $W(x)$, \mathcal{Y}_k выполняются все условия теоремы 1. \square

Приведенный выше метод пересчета величин W_{\max} и w_k в п. 9) необходим для того, чтобы у полученной кусочно-аффинной функции цены не появлялись локальные минимумы, отличные от точек множества \mathcal{X}_1 , которые будут затем отброшены при использовании конструкций из (4.1), (4.2). Таким образом, удастся увеличить множество \mathcal{X}_0 и избавиться от заведомо лишних расчетов.

6. Разрывная кусочно-аффинная функция цены

Результаты предыдущих разделов можно обобщить на случай функций цены и управлений, которые могут иметь разрывы на границах симплексов $\Omega^{(i)}$. Это позволит получить более гибкий механизм построения функций цены и управления, а также расширить область разрешимости задачи \mathcal{X}_0 с использованием таких функций.

Предположим, что в каждом симплексе $\Omega^{(i)}$ величины $w_{\sigma(i,k)}^{(i)}$ и множества $\mathcal{Y}_{\sigma(i,k)}^{(i)}$, соответствующие фиксированной вершине g_k , могут различаться при разных i . Пусть i_1, \dots, i_m — номера всех симплексов, содержащих вершину g_k . Разрывная кусочно-аффинная функция цены по-прежнему может быть определена из (3.1).

Для двух соседних симплексов $\Omega^{(i^*)}$ и $\Omega^{(i^{**})}$, имеющих общую грань $\mathcal{H}_{i^*,i^{**}}$, которая является $(n_x - 1)$ -мерным симплексом, будем говорить, что $\Omega^{(i^*)}$ недостижим из $\Omega^{(i^{**})}$, если выполняется условие⁵

$$\min_s \left\{ (n_{i^*,i^{**}})^T (A^{(i^{**})} g_s + f^{(i^{**})}) - \rho(-(B^{(i^{**})})^T n_{i^*,i^{**}} | \mathcal{P}) - \rho(-n_{i^*,i^{**}} | \mathcal{Q}^{(i^{**})}) : \right. \\ \left. g_s - \text{вершина } \mathcal{H}_{i^*,i^{**}} \right\} > 0, \quad (6.1)$$

где $n_{i^*,i^{**}}$ — единичная нормаль к $\mathcal{H}_{i^*,i^{**}}$, указывающая в сторону $\Omega^{(i^{**})}$. Если условие (6.1) не выполняется, то будем считать, что $\Omega^{(i^*)}$ достижим из $\Omega^{(i^{**})}$.

Для каждой вершины g_k , для каждой пары симплексов $\Omega^{(i^*)}$ и $\Omega^{(i^{**})}$, содержащих эту вершину, $i_1 \leq i^* < i^{**} \leq i_m$, будем говорить, что симплекс $\Omega^{(i^*)}$ достижим из $\Omega^{(i^{**})}$, если найдутся такие различные значения i_{j_1}, \dots, i_{j_s} , $2 \leq s \leq m$, что $i_{j_1} = i^*$, $i_{j_s} = i^{**}$, $\Omega^{(i_{j_l})}$ достижим из $\Omega^{(i_{j_{l+1}})}$ для любого $l = 1, \dots, s - 1$. В противном случае будем считать, что $\Omega^{(i^*)}$ недостижим из $\Omega^{(i^{**})}$. Для любого $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$ пусть

$$\mathcal{I}(i, k) = \left\{ j \in \{i_1, \dots, i_m\} : j \neq i, g_k \in \Omega^{(i_1)} \cap \dots \cap \Omega^{(i_m)}, \Omega^{(j)} \text{ достижим из } \Omega^{(i)} \right\} \cup \{i\}.$$

Приведенное выше определение недостижимости является достаточным, но не необходимым условием того, что траектория не может попасть из одного симплекса в другой, соседний. Заметим, что введенное свойство достижимости одного симплекса из другого при фиксированном номере вершины k обладает свойствами транзитивности и рефлексивности.

Используя введенные обозначения, теперь можно обобщить результат теоремы 1 на случай разрывных функций цены и управлений:

Теорема 2. Пусть $\mathcal{I}_0 \subseteq \{1, \dots, M\}$, $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_0$. Рассмотрим совокупность компактных множеств $\mathcal{Y}_{\sigma(i,k)}^{(i)} \subseteq \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ и неотрицательных величин $w_{\sigma(i,k)}^{(i)}$, $k = 1, \dots, S$, $i = 1, \dots, M$. Пусть выполнены следующие условия:

⁵Множества $\mathcal{Q}^{(i)}$, $i = 1, \dots, M$, определены в (2.1).

- 1) для каждого $i \in \mathcal{I}_0 \setminus \mathcal{I}_1$ выполняется неравенство (3.5);
 - 2) $w_{\sigma(i,k)}^{(i)} \geq \varphi(g_k) + K_{\sigma(i,k)}^{(i)} > 0 \quad \forall k, \quad \forall i \in \mathcal{I}_1: g_k - \text{вершина } \Omega^{(i)}$;
 - 3) для любого k , любых i^*, i^{**} таких, что $g_k \in \Omega^{(i^*)} \cap \Omega^{(i^{**})}$, $i^* \in \mathcal{I}(i^{**}, k)$, $i^{**} \in \mathcal{I}(i^*, k)$,
 $\mathcal{Y}_{\sigma(i^*,k)}^{(i^*)} = \mathcal{Y}_{\sigma(i^{**},k)}^{(i^{**})}$;
 - 4) для любых $i^*, i^{**} \in \{1, \dots, M\}$, $g_k \in \Omega^{(i^*)} \cap \Omega^{(i^{**})}$ если $i^{**} \in \mathcal{I}(i^*, k)$, то $w_{\sigma(i^*,k)}^{(i^*)} \geq w_{\sigma(i^{**},k)}^{(i^{**})}$.
- Пусть

$$W_{\max} = \min_{i,k} \left\{ w_{\sigma(i,k)}^{(i)} : g_k - \text{вершина } \Omega^{(i)} \text{ при некотором } i \in \mathcal{I}_0; \right. \\ \left. \text{либо } \exists i^* \notin \mathcal{I}_0: g_k - \text{вершина } \Omega^{(i^*)}, \text{ либо } g_k \in \partial\Omega \right\}, \quad (6.2)$$

$$\mathcal{X}_0 = \bigcup \left\{ \Omega^{(i)} \mid i \in \mathcal{I}_0; w_{\sigma(i,k)}^{(i)} \leq W_{\max} \quad \forall k: g_k - \text{вершина } \Omega^{(i)} \right\} \neq \emptyset. \quad (6.3)$$

Тогда $\forall x_0 \in \mathcal{X}_0$ задача перевода траектории $x(t, t_0, x_0)$ в целевое множество \mathcal{X}_1 за конечное время разрешима, причем соответствующее позиционное разрывное кусочно-аффинное управление может быть найдено в виде (3.4). $W(x_0)$ — верхняя оценка функции цены $V(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схема доказательства аналогична случаю с непрерывной функцией цены. Обозначим лишь существенные отличия, в которых проявляются возможные разрывы функции цены и управления на границах соседних симплексов. А именно условие 3) теоремы гарантирует, что построенное кусочно-аффинное управление не будет иметь разрывы на $(n_x - 1)$ -мерных гранях соседних симплексов в том случае, если траектории системы могут пересекать эту грань в обоих направлениях либо двигаться вдоль нее. Это позволяет избежать проблем с продолжаемостью траекторий замкнутой системы и гарантирует допустимость построенного управления. На любой траектории на конечном отрезке времени происходит лишь конечное число разрывов функций цены и управления.

Условие 4) гарантирует невозрастание функции цены при прохождении траектории через границу соседних симплексов. Это в совокупности с рассуждениями из доказательства теоремы 1 гарантирует невозрастание $W(x)$ вдоль любой рассматриваемой траектории вплоть до попадания ее в \mathcal{X}_1 . \square

Рассмотрим теперь алгоритм построения функций цены и управления, являющийся обобщением приведенного выше алгоритма для случая непрерывной функции цены. В данном случае будут использованы аналогичные вспомогательные величины σ_k , $k = 1, \dots, S$, а также отображение \mathcal{F} для выбора очередной обрабатываемой вершины на каждом текущем шаге.

А л г о р и т м 2: Построение разрывных функций цены и управления.

- 1) Для любых g_k , $k = 1, \dots, S$, $i \in \mathcal{I}_1$ таких, что $g_k \in \Omega^{(i)}$, положим

$$w_{\sigma(i,k)}^{(i)} = \varphi(g_k) + \max_{j,s} \left\{ K_s^{(j)} : j \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}(i, k), 1 \leq s \leq n_x + 1, g_s^{(j)} = g_k \right\},$$

$\mathcal{Y}_{\sigma(i,k)}^{(i)} = \mathcal{P}$, $\sigma_k = 1$. Для всех остальных вершин g_k пусть $\sigma_k = 0$.

- 2) Определим величину W_{\max} :

$$W_{\max} = \min_{k,i} \left\{ w_{\sigma(i,k)}^{(i)} : g_k \in \Omega^{(i)}, \sigma_s = 1 \quad \forall s: g_s \in \Omega^{(i)}; \text{либо } \exists i^*: g_k - \text{вершина } \Omega^{(i^*)} \text{ и } \exists k^* : \right. \\ \left. g_{k^*} - \text{вершина } \Omega^{(i^*)}, \sigma_{k^*} \neq 1, \text{ либо } g_k \in \partial\Omega \right\}.$$

- 3) Определим множество индексов

$$\mathcal{K} = \left\{ k \in \{1, \dots, S\} : \sigma_k = 0, \exists j = 1, \dots, M: g_k - \text{вершина } \Omega^{(j)}, \right. \\ \left. \text{причем } \forall k^* \neq k: g_{k^*} - \text{вершина } \Omega^{(j)} \Rightarrow \sigma_{k^*} = 1 \right\}.$$

4) Если $\mathcal{K} = \emptyset$, то переходим к п. 12).

5) Если $\mathcal{K} \neq \emptyset$, то пусть $k^* = \mathcal{F}(\mathcal{K})$. Вершине g_{k^*} соответствуют некоторые содержащие ее симплексы $\Omega^{(i_1)}, \dots, \Omega^{(i_m)}$, $m \geq 1$, для которых все остальные вершины $g_k \neq g_{k^*}$, уже были ранее обработаны (т. е. для каждой из них $\sigma_k = 1$).

6) Для каждого $i = i_1, \dots, i_m$, для каждого $k \in \{1, \dots, S\}$: $g_k \in \Omega^{(i)}$, $\sigma_k = 1$ (т. е. для каждой ранее обработанной вершины симплекса с единственной необработанной вершиной) определим:

6а) величину $w_{\sigma(i,k)}^{(i)}$, используя условия на возможные разрывы функции цены на границах симплексов (см. условие 4) в теореме 2):

$$w_{\sigma(i,k)}^{(i)} = \max \left\{ W_{\max}, \max_j \left\{ w_{\sigma(j,k)}^{(j)} : j \in \mathcal{I}(i,k), \sigma_s = 1 \quad \forall s = 1, \dots, S : g_s \in \Omega^{(j)} \right\} \right\};$$

6б) ограничения на управления $\mathcal{Y}_{\sigma(i,k)}^{(i)}$, удовлетворяющие условию 3) из теоремы 2:

$$\mathcal{Y}_{\sigma(i,k)}^{(i)} = \begin{cases} \mathcal{Y}_{\sigma(j,k)}^{(j)}, & \text{если } \exists j \in \mathcal{I}(i,k) : i \in \mathcal{I}(j,k), \sigma_s = 1 \quad \forall s = 1, \dots, S : g_s \in \Omega^{(j)}, \\ \mathcal{P}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

7) Определим величины $w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)}$, $i = i_1, \dots, i_m$. Для каждого симплекса $\Omega^{(i_s)}$, $s = 1, \dots, m$, рассмотрим неравенство (3.5) при $i = i_s$ относительно неизвестных

$$w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)} \quad \text{и} \quad y_{\sigma(i,k^*)}^{(i)} \in \mathcal{Y}_{\sigma(i,k^*)}^{(i)} \subseteq \mathcal{P} :$$

$$\begin{cases} w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)} (a_s^T y_{\sigma(i,k^*)}^{(i)} + b_{\sigma(i_s,k^*),s}) < c_s^T y_{\sigma(i,k^*)}^{(i)} + d_{\sigma(i_s,k^*),s}, \\ w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)} (a_s^T y_r^{(i_s)} + b_{r,s}) < c_s^T y_r^{(i_s)} + d_{r,s}, \quad 1 \leq r \leq n_x + 1, r \neq \sigma(i_s, k^*) \quad \forall y_r^{(i_s)} \in \mathcal{Y}_r^{(i_s)}. \end{cases}$$

где коэффициенты $a_s \in \mathbb{R}^{n_u}$, $b_{r,s} \in \mathbb{R}$, $c_s \in \mathbb{R}^{n_u}$, $d_{r,s} \in \mathbb{R}$ могут быть найдены из (5.3)–(5.6).

Пусть $\forall i = i_1, \dots, i_m$

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} = \left\{ u \in \mathcal{P} : a_s^T u + b_{\sigma(i_s,k^*),s} \leq -\varepsilon \quad \forall s = 1, \dots, m : i \in \mathcal{I}(i_s, k^*), i_s \in \mathcal{I}(i, k^*) \right\},$$

и для каждого $r = 1, \dots, S$, для которого g_r — вершина хотя бы одного из симплексов $\Omega^{(i_1)}, \dots, \Omega^{(i_m)}$, $r \neq k^*$, пусть

$$\tilde{\mathcal{Y}}_r^{(i)} = \left\{ u \in \mathcal{Y}_r^{(i_s)} : a_s^T u + b_{\sigma(i_s,r),s} \leq -\varepsilon \quad \forall s = 1, \dots, m : i \in \mathcal{I}(i_s, k^*), i_s \in \mathcal{I}(i, k^*) \right\}.$$

8) Если существует $i = i_1, \dots, i_m$ такое, что хотя бы для одного r $\tilde{\mathcal{Y}}_r^{(i)} = \emptyset$ либо $\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} = \emptyset$, то положим $\sigma_{k^*} = -1$. Алгоритм переходит к п. 3).

9) Если условия предыдущего пункта не выполнены, то положим $\sigma_{k^*} = 1$, и $\forall i = i_1, \dots, i_m$

$$w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)} = \min_{u \in \tilde{\mathcal{P}}^{(i)}} \min_{y_r \in \tilde{\mathcal{Y}}_r^{(i)} \quad s=1, \dots, m} \max \left\{ \max \left\{ \frac{c_s^T u + d_{\sigma(i_s,k^*),s}}{a_s^T u + b_{\sigma(i_s,k^*),s}}, \right. \right. \\ \left. \left. \max \left\{ \frac{c_s^T y_k^{(i_s)} + d_{k,s}}{a_s^T y_k^{(i_s)} + b_{k,s}} : k = 1, \dots, n_x + 1, k \neq \sigma(i_s, k^*) \right\} : i_s \in \mathcal{I}(i, k^*) \right\} \right\}. \quad (6.4)$$

Пусть также $\mathcal{P}^{(i),*}$, $\mathcal{Y}_r^{(i),*}$ — множества минимизаторов в (6.4). Заметим, что $\forall i, j \in \{i_1, \dots, i_m\}$, для которых $i \in \mathcal{I}(j, k^*)$, $j \in \mathcal{I}(i, k^*)$, справедливы равенства: $w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)} = w_{\sigma(j,k^*)}^{(j)}$, $\mathcal{P}^{(i),*} = \mathcal{P}^{(j),*}$, $\mathcal{Y}_r^{(i),*} = \mathcal{Y}_r^{(j),*} \quad \forall r : g_r \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$.

Положим $\mathcal{Y}_{k^*}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i),*}$, $\forall i = i_1, \dots, i_m$. Также скорректируем управление в ранее обработанных вершинах: $\forall r = 1, \dots, S$, где g_r — вершина хотя бы одного из симплексов $\Omega^{(i_1)}, \dots, \Omega^{(i_m)}$, $r \neq k^*$,

$$\mathcal{Y}_r^{(i)} = \mathcal{Y}_r^{(i),*} \quad \forall i = i_1, \dots, i_m: g_r \in \Omega^{(i)};$$

$$\mathcal{Y}_r^{(i)} = \mathcal{Y}_r^{(j)} \quad \forall i, j: g_r \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}, \quad i \in \mathcal{I}(j, r), \quad j \in \mathcal{I}(i, r), \quad j \in \{i_1, \dots, i_m\}, \quad i \notin \{i_1, \dots, i_m\}.$$

10) Подсчитаем вспомогательную величину

$$W_{\max}^+ = \min_{k,i} \left\{ w_{\sigma(i,k)}^{(i)} : g_k \in \Omega^{(i)}, \sigma_s = 1 \quad \forall s: g_s \in \Omega^{(i)}; \text{ либо } \exists i^*: g_k \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)} \text{ и } \exists k^* : \right. \\ \left. g_{k^*} \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)}, \sigma_{k^*} \neq 1, \text{ либо } g_k \in \partial\Omega \right\}.$$

Если $W_{\max}^+ < W_{\max}$, то дополнительно положим $w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)} = \max\{w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)}, W_{\max}\}$, $\forall i = i_1, \dots, i_m$.

В противном случае величины $w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)}$ не изменяются, $W_{\max} = W_{\max}^+$.

11) Алгоритм переходит к п. 3) (обработке следующей вершины).

12) Алгоритм завершает работу. Итогом является набор величин $w_{\sigma(i,k)}^{(i)}$, множеств $\mathcal{Y}_{\sigma(i,k)}^{(i)}$ для тех вершин, для которых $\sigma_k = 1$, а также величина W_{\max} , соответствующая (6.2). Множество \mathcal{X}_0 теперь определим согласно (6.3).

Для построенных множеств \mathcal{X}_0 и $\mathcal{Y}_{\sigma(i,k)}^{(i)}$, а также функции $W(x)$ выполняются все условия теоремы 2. \square

7. Пример

В качестве иллюстрации описанных в предыдущих разделах методов рассмотрим задачу управления для математической модели движения колесного робота на плоскости, содержащей следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \cos(x_3), \\ \dot{x}_2 = u_1 \sin(x_3), \\ \dot{x}_3 = u_2. \end{cases}$$

Здесь (x_1, x_2) — положение объекта на плоскости, x_3 — угол его ориентации. На управляющие параметры наложены следующие ограничения: $|u_1| \leq u_{1,\max}$, $u_2 \in [0, u_{2,\max}]$. Рассмотрим

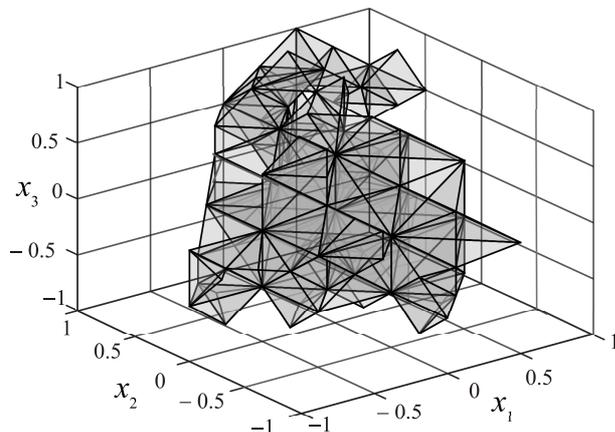


Рис. 1. Множество разрешимости в случае непрерывной функции цены

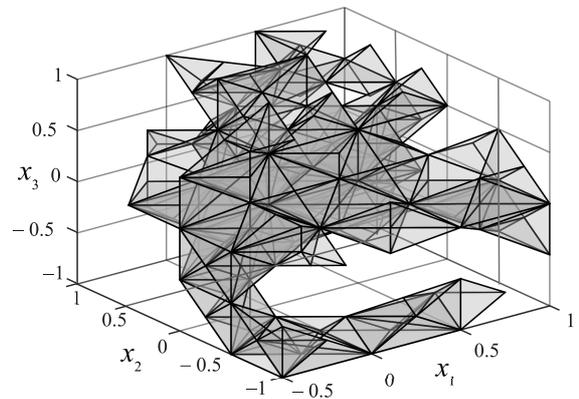


Рис. 2. Множество разрешимости в случае разрывной функции цены

задачу перевода объекта в целевое множество $\mathcal{X}_1 = \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq \delta\}$, $\delta > 0$, за наименьшее время. То есть $\mathbf{f}(x) = 0$, $\tilde{\mathbf{f}}(x) = 1$, $\tilde{\mathbf{g}}(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$,

$$\mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_3) & 0 \\ \sin(x_3) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 и 2 представлены оценки множеств разрешимости \mathcal{X}_0 для задачи управления, построенные соответственно при помощи непрерывных и разрывных кусочно-аффинных функций цены. При этом $\delta = 0.1$, $u_{1,\max} = 1$, $u_{2,\max} = 2$ и была использована сетка из $M = 2004$ симплексов с $S = 508$ вершинами.

Заключение

Рассмотренные в предыдущих разделах достаточные условия разрешимости задачи управления на бесконечном временном горизонте с интегральным функционалом, а также соответствующие им алгоритмы позволяют получать приближенные решения в достаточно простой с точки зрения вычислений форме. Однако остается еще нерешенным вопрос о том, как именно следует определить правило выбора \mathcal{F} , от которого зависят конкретная аппроксимация множества разрешимости и соответствующее управление. Кроме того, на данный момент остается открытым вопрос о том, можно ли за счет объединения предложенных здесь оценок для разных правил \mathcal{F} получать сколь угодно точные аппроксимации множества разрешимости и оценки минимума интегрального функционала. Решению этих проблем будут посвящены дальнейшие исследования автора по теме данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнения типа Гамильтона — Якоби в теории управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183.
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p.
3. Habets L.C.G.J.M., Collins P.J., van Schuppen J.H. Reachability and control synthesis for piecewise-affine hybrid systems on simplices // IEEE Trans Automatic Control. 2006. Vol. 51, no. 6. P. 938–948. doi: 10.1109/TAC.2006.876952.
4. Girard A., Martin S. Synthesis of constrained nonlinear systems using hybridization and robust controllers on simplices // IEEE Trans Automatic Control. 2012. Vol. 57, no. 4. P. 1046–1051. doi: 10.1109/TAC.2011.2168874.
5. Bardì M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 2008. 570 p.
6. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
7. Fleming W.H., Soner H.M. Controlled Markov processes and viscosity solutions. N Y: Springer, 2006. 429 p.
8. Куржанский А.Б., Точилин П.А. Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1523–1533.
9. Asarin E., Dang T., Girard A. Hybridization methods for the analysis of nonlinear systems // Acta Informatica. 2007. Vol. 43, iss. 7. P. 451–476. doi: 10.1007/s00236-006-0035-7.
10. Точилин П.А. О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейной системы // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 11. С. 1503–1515.
11. Mayantsev K.S., Tochilin P.A. The feedback control problem for switched system with uncertainties // IFAC Proceedings Volumes. 2017. Vol. 50, iss. 1. P. 2187–2192. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.279.
12. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
13. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.

Поступила 20.10.2019
 После доработки 22.01.2020
 Принята к публикации 27.01.2020

Точилин Павел Александрович
 канд. физ.-мат. наук
 доцент факультета вычислительной математики и кибернетики
 МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва
 e-mail: tochilin@cs.msu.ru

REFERENCES

1. Kurzhanski A.B. Comparison principle for equations of the Hamilton–Jacobi type in control theory. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2006, vol. 253, no. 1, pp. S185–S195. doi: 10.1134/S0081543806050130.
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes*. Basel: Birkhäuser, 2014, 445 p. ISBN: 978-3-319-10277-1.
3. Habets L.C.G.J.M., Collins P.J., van Schuppen J.H. Reachability and control synthesis for piecewise-affine hybrid systems on simplices. *IEEE Trans Automatic Control*, 2006, vol. 51, no. 6, pp. 938–948. doi: 10.1109/TAC.2006.876952.
4. Girard A., Martin S. Synthesis of constrained nonlinear systems using hybridization and robust controllers on simplices. *IEEE Trans Automatic Control*, 2012, vol. 57, no. 4, pp. 1046–1051. doi: 10.1109/TAC.2011.2168874.
5. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations*. Boston: Birkhäuser, 2008, 570 p. ISBN: 0817647546.
6. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective*. Basel: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1. Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka: Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*. Izhevsk: Inst. Komp’yuter. Issled. Publ., 2003, 336 p.
7. Fleming W.H., Soner H.M. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. N Y: Springer, 2006. 429 p. ISBN: 978-0-387-31071-8.
8. Kurzhanski A.B., Tochilin P.A. Weakly invariant sets of hybrid systems. *Diff. Eq.*, 2008, vol. 44, no. 11, pp. 1585–1594. doi: 10.1134/S0012266108110104.
9. Asarin E., Dang T., Girard A. Hybridization methods for the analysis of nonlinear systems. *Acta Informatica*, 2007, vol. 43, no. 7, pp. 451–476. doi: 10.1007/s00236-006-0035-7.
10. Tochilin P.A. On the construction of nonconvex approximations to reach sets of piecewise linear systems. *Diff. Eq.*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1503–1515. doi: 10.1134/S0012266115110117.
11. Mayantsev K.S., Tochilin P.A. The feedback control problem for switched system with uncertainties. *IFAC Proceedings Volumes*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 2187–2192. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.279.
12. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Dordrecht: Springer, 1988, 304 p. doi: 10.1007/978-94-015-7793-9. Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial’nye uravneniya s razryvnoi pravoii chast’yu*. Moscow: Nauka Publ., 1985, 225 c.
13. Pshenichnyi B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal’nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 319 p.

Received October 20, 2019

Revised January 22, 2020

Accepted January 27, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19–01–00613a and no. 16–29–04191ofi_m).

Pavel Aleksandrovich Tochilin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, 119991 Russia,
 e-mail: tochilin@cs.msu.ru.

Cite this article as: P. A. Tochilin. On the construction of a piecewise affine value function in an infinite-horizon optimal control problem, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 223–238.

УДК 517.955.8

О ДВУСТОРОННИХ АППРОКСИМАЦИЯХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ¹

В. Н. Ушаков, М. В. Першаков

Рассматривается нелинейная управляемая система в евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени, управления которой стеснены геометрическими ограничениями. Изучается вопрос о конструировании нижних и верхних (по включению) аппроксимаций множеств достижимости управляемой системы. При определенных условиях на систему получены оценки рассогласования (в хаусдорфовой метрике) между нижними и верхними аппроксимациями множеств достижимости.

Ключевые слова: управляемая система, управление, дифференциальное включение, геометрические ограничения, множество достижимости, аппроксимация.

V. N. Ushakov, M. V. Pershakov. On two-sided approximations of reachable sets of control systems with geometric constraints on the controls.

We consider a nonlinear control system in Euclidean space on a finite time interval with controls subject to geometric constraints. The question of constructing lower and upper (by inclusion) approximations of reachable sets of this system is studied. Under certain conditions, estimates are obtained for the discrepancy (in the Hausdorff metric) between the lower and upper approximations of the reachable sets.

Keywords: control system, control, differential inclusion, geometric constraints, reachable set, approximation.

MSC: 37C50, 37J25, 41A29

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-239-255

Введение

В работе рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве, управления которой стеснены геометрическими ограничениями. На систему наложены достаточно общие условия. Одна из наиболее актуальных тем в теории управления динамическими системами посвящена изучению их множеств достижимости, а также вопросам и задачам, относящимся к конструированию и оценкам этих множеств [1–3]. С этой тематикой сопряжена тематика разнообразных задач о наведении динамических систем на целевые множества и игровых задачах управления [4; 5].

В работе изучается вопрос о конструировании и оценках множеств достижимости и трубок траекторий управляемых систем. История этого вопроса насчитывает не одно десятилетие. При этом параллельно развивались как теория, описывающая эволюцию множеств достижимости, так и методы конструирования и оценки этих множеств. Для некоторых достаточно представительных классов систем с различными типами ограничений на управления предложены эффективные методы и алгоритмы конструирования множеств достижимости и трубок траекторий управляемых систем. Параллельно развивалась теория и предлагались схемы для приближенного вычисления множеств достижимости дифференциальных включений (см., например, [6]). К наиболее продвинутым в упомянутых направлениях методам относятся методы, базирующиеся на эллипсоидальном оценивании [7; 8]. Отметим, в частности, относящуюся

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №18-01-00264 и 18-01-00221.

непосредственно к тематике настоящей работы статью [9], в которой были изучены дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию эллипсоидов, аппроксимирующих снаружи и изнутри множества достижимости управляемых систем, линейных по фазовой переменной. Изучение множеств достижимости управляемых систем и дифференциальных включений не ограничивается, однако, лишь вопросами, связанными с конструированием и оценкой этих множеств. Очень важным для построения оптимальных управлений в задачах оптимального управления является изучение структуры этих множеств и их границы, а также изучение свойств их граничных точек. Так, экстремальные свойства граничных точек множеств достижимости нелинейных систем с интегральными ограничениями на управления и алгоритмы построения этих множеств, использующие принцип максимума Понтрягина, изучались в [10].

Еще одна весомая группа методов основана на дискретизации времени (см., например, [11]) и использовании полиэдральных представлений [12] и, в том числе, пиксельных представлений аппроксимирующих множеств [13;14]. К работам, упомянутым в последней группе, близка работа [15], в которой получена внешняя оценка множества достижимости нелинейной многошаговой динамической системы, и работа [16], посвященная решению задачи о сближении нелинейных управляемых систем с целевым компактным множеством в фазовом пространстве.

В настоящей статье для нелинейной управляемой системы достаточно общего вида в конечномерном евклидовом пространстве и с геометрическими ограничениями на управления изучаются вопросы, относящиеся к конструированию нижних и верхних (по включению) аппроксимаций множеств достижимости управляемой системы. При получении оценок рассогласования нижних аппроксимаций и (идеального) множества достижимости применена важная оценка Л. С. Понтрягина геометрической разности выпуклого полноразмерного компакта в \mathbb{R}^m и замкнутого шара достаточно малого радиуса, полученная им в [5] при изучении линейных дифференциальных игр.

1. Управляемая система на конечном промежутке времени

На промежутке времени $[t_0, \theta]$, $t_0 < \theta < \infty$, задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad (1.1)$$

$$u = u(t) \in P;$$

здесь t — время, x — фазовый вектор системы из \mathbb{R}^m , u — вектор управляющих воздействий, $P \in \text{comp}(\mathbb{R}^r)$ — метрическое пространство в евклидовом пространстве \mathbb{R}^r с хаусдорфовой метрикой.

Выполнены следующие условия на систему (1.1).

А. Вектор-функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна на $[t_0, \theta] \times \mathbb{R}^m \times P$, и для любого компакта $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^m$ найдется такая постоянная $L = L_D \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)\| \leq L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (t, x^{(i)}) \in D, \quad i = 1, 2, \quad u \in P;$$

здесь $\|f\|$ — норма вектора f в пространстве \mathbb{R}^m .

В. Существует такая постоянная $\varkappa \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leq \varkappa(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^m \times P.$$

С. Для любой точки $(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^m$ справедливо $\dim F(t, x) = m$; здесь $F(t, x) = \text{co } \mathcal{F}(t, x)$, $\mathcal{F}(t, x) = \{f(t, x, u) : u \in P\}$, $\dim F$ — топологическая размерность множества F , $\text{co } F$ — выпуклая оболочка множества F в \mathbb{R}^m .

Управляемой системе (1.1) поставим в соответствие дифференциальное включение (д.в.) на $[t_0, \theta]$

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x). \tag{1.2}$$

Из условия **A** следует, что для любого компакта $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^m$ справедливо

$$K = K_D = \max \{ \|f(t, x, u)\| : (t, x, u) \in D \times P \} < \infty$$

и функция

$$\omega_D^*(\rho) = \max_{\substack{(t_*, x_*) \in D, \\ (t^*, x^*) \in D}} \{ \|f(t_*, x_*, u) - f(t^*, x^*, u)\| : |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leq \rho, u \in P \}, \quad \rho \in (0, \infty),$$

удовлетворяет соотношению $\omega_D^*(\rho) \downarrow 0$ при $\rho \downarrow 0$.

Введем обозначения для различных множеств достижимости (м.д.) системы (1.1) и д.в. (1.2) (пусть $t_0 \leq t_* < t^* \leq \theta$, $x_* \in \mathbb{R}^m$, $X_* \subset \mathbb{R}^m$):

$X(t^*, t_*, x_*)$ — м.д. системы (1.1) в момент t^* , где $x(t_*) = x_*$ — начальная точка;

$X(t^*, t_*, X_*)$ — м.д. системы (1.1) в момент t^* , где X_* — начальное множество;

$Y(t^*, t_*, x_*)$ — м.д. д.в. (1.2) в момент t^* , где $x(t_*) = x_*$ — начальная точка;

$Y(t^*, t_*, X_*)$ — м.д. д.в. (1.2) в момент t^* , где X_* — начальное множество.

В случае $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ справедливо $Y(t^*, t_*, X_*) = \text{cl } X(t^*, t_*, X_*)$; здесь $\text{cl } X$ — замыкание множества X в \mathbb{R}^m .

Полагаем, что наряду с системой (1.1) задано стартовое множество $X_0 \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ для системы (1.1) (для д.в. (1.2)), соответствующее моменту t_0 .

Из условий **A**, **B** вытекает, что существует такой достаточно большой шар $\Omega = B(0; R^0)$, $R^0 \in (0, \infty)$, где цилиндрическая область $\mathcal{D} = [t_0, \theta] \times \Omega$ удовлетворяет соотношению

$$Y(t, t_0, X_0)_{\varepsilon^*} \subset \mathcal{D}, \quad t \in [t_0, \theta];$$

здесь $B(z; r) = \{b \in \mathbb{R}^m : \|b - z\| \leq r\}$ ($z \in \mathbb{R}^m : r \in (0, \infty)$), $\varepsilon^* \in (0, \infty)$, Y_ε — замкнутая ε -окрестность множества Y в \mathbb{R}^m .

Именно эта область \mathcal{D} используется далее в наших рассуждениях; с ней мы связываем постоянные $L = L_{\mathcal{D}}$, $K = K_{\mathcal{D}}$ и функцию $\omega^*(\rho) = \omega_{\mathcal{D}}^*(\rho)$, $\rho \in (0, \infty)$.

В настоящей работе рассмотрим вопросы, относящиеся к конструированию нижних и верхних (по включению) аппроксимаций м.д. $Y(t, t_0, X_0)$, $t \in [t_0, \theta]$ д.в. (1.2), поскольку их точное вычисление, как правило, не представляется возможным. Также обсудим вопросы, относящиеся к получению оценки хаусдорфова рассогласования (расстояния) между нижними и верхними аппроксимациями множеств $Y(t, t_0, X_0)$, $t \in [t_0, \theta]$, $X_0 \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Предварительно сформулируем утверждение, которым воспользуемся при оценке рассогласования между нижними и верхними аппроксимациями множеств $Y(t, t_0, X_0)$, $t \in [t_0, \theta]$.

Для этого введем вспомогательные понятия.

Пусть $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ — выпуклое множество с $\dim F = m$ и $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Под вписанным в компакт F замкнутым шаром в \mathbb{R}^m понимаем шар максимального радиуса, содержащийся в F .

Радиус r_F вписанного в F шара определяется равенством $r_F = \max_{\substack{w \in F, \\ r > 0}} \{r : B(w; r) \subset F\}$.

Коэффициентом вытянутости множества F назовем число $\gamma_F = \frac{d_F}{r_F}$, где d_F — диаметр множества F , r_F — радиус замкнутого шара в \mathbb{R}^m , вписанного в F .

Полагая $\varepsilon \in (0, r_F)$, введем множества

$$F_\varepsilon = F + B(0; \varepsilon) = \{f \in \mathbb{R}^m : \rho(f; F) \leq \varepsilon\},$$

$$F_{-\varepsilon} = F \dot{-} B(0; \varepsilon) = \{f \in F : B(f; \varepsilon) \subset F\};$$

здесь $F + B(0; \varepsilon)$ — сумма Минковского множеств F и $B(0; \varepsilon)$, $F \dot{-} B(0; \varepsilon)$ — разность Минковского (геометрическая разность) множеств F и $B(0; \varepsilon)$ (см. [5, с. 314]).

Заметим, что F_ε и $F_{-\varepsilon}$ — выпуклые компакты в \mathbb{R}^m .

Вопрос о хаусдорфовом отклонении выпуклого компакта в \mathbb{R}^m от геометрической разности этого компакта и шара в \mathbb{R}^m рассматривался ранее Л. С. Понтрягиным в статье [5, с. 314] при изучении линейных дифференциальных игр. В ней Л. С. Понтрягин получил оценку сверху упомянутой геометрической разности. В данной работе мы применим эту оценку при изучении нелинейной управляемой системы на конечном промежутке времени. Она влечет утверждение, которым воспользуемся в последующем при выводе оценок сверху хаусдорфова рассогласования между нижними и верхними аппроксимациями множеств достижимости $Y(t, t_0, X_0)$, $t \in [t_0, \theta]$, $X_0 \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Утверждение. Пусть выпуклые компакты F и Φ в \mathbb{R}^m и число ε таковы, что $\varepsilon \in (0, \infty)$, $\dim F = m$ и $d(F, \Phi) \leq \varepsilon$. Тогда

$$h(F, F_{-\varepsilon}) \leq \gamma_F \varepsilon, \quad F_{-\varepsilon} \subset \Phi \subset F_\varepsilon;$$

здесь $h(F_*, F^*) = \max_{f_* \in F_*} \min_{f^* \in F^*} \|f_* - f^*\|$, $d(F_*, F^*) = \max(h(F_*, F^*), h(F^*, F_*))$ — хаусдорфово расстояние между компактными F_* и F^* в \mathbb{R}^m .

Обратимся теперь к многозначному отображению $(t, x) \mapsto F(t, x)$, $(t, x) \in \mathcal{D}$.

В силу условия **A** это отображение непрерывно (в метрике Хаусдорфа) на компакте \mathcal{D} и, кроме того, согласно условию **C**, выполняется $r_{F(t, x)} > 0$, $(t, x) \in \mathcal{D}$. Отсюда вытекает, что скалярное отображение $(t, x) \mapsto r_{F(t, x)} > 0$ непрерывно (в метрике Хаусдорфа) на \mathcal{D} и, следовательно,

$$\min_{(t, x) \in \mathcal{D}} r_{F(t, x)} = r_* > 0.$$

Это означает, что для любой точки $(t, x) \in \mathcal{D}$ найдется шар $B(z(t, x); r_*)$ в \mathbb{R}^m такой, что

$$B(z(t, x); r_*) \subset F(t, x).$$

Учитывая также непрерывность (в метрике Хаусдорфа) скалярного отображения $(t, x) \mapsto d_{F(t, x)}$ на \mathcal{D} , получаем

$$\max_{(t, x) \in \mathcal{D}} d_{F(t, x)} = d_* < \infty.$$

В результате выводим, что функция $(t, x) \mapsto \gamma_{F(t, x)}$ ограничена сверху на \mathcal{D} , а именно

$$\max_{(t, x) \in \mathcal{D}} \gamma_{F(t, x)} \leq \gamma_* = \frac{d_*}{r_*} < \infty.$$

Пусть $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}$, $t_0 \leq t_* < t^* \leq \theta$, $\delta = t^* - t_* > 0$ и $x(t)$, $x(t_*) = x_*$, — решение д.в. (1.2) на промежутке $[t_*, t^*]$.

Для решения $x(t)$ при $t \in [t_*, t^*]$ справедливо неравенство

$$\omega^*(|t - t_*| + \|x(t) - x_*\|) \leq \omega^* \left(|t - t_*| + \left\| \int_{t_*}^t f(\tau) d\tau \right\| \right) \leq \omega^*((1 + K)\delta) = \varphi(\delta); \quad (1.3)$$

здесь $\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t))$ п.в. на $[t_*, t^*]$.

Из (1.3) с учетом условия **A** получаем для решения $x(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, д.в. (1.2)

$$d(F(t, x(t)), F(t_*, x_*)) \leq \varphi(\delta), \quad t \in [t_*, t^*]. \quad (1.4)$$

В дополнение к условию $\delta = t^* - t_* > 0$ полагаем $\delta > 0$ настолько малым, что $\varphi(\delta) < r_*$.

Полагаем при $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}$, $(t_*, X_*) \subset \mathcal{D}$ и указанном $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} F(t_*, x_*)_{-\varphi(\delta)} &= F(t_*, x_*) \div B(0; \varphi(\delta)); \\ F(t_*, x_*)_{\varphi(\delta)} &= F(t_*, x_*) + B(0; \varphi(\delta)); \\ \tilde{Y}(t^*, t_*, x_*) &= x_* + \delta F(t_*, x_*); \\ \tilde{Y}(t^*, t_*, X_*) &= \bigcup_{x_* \in X_*} \tilde{Y}(t^*, t_*, x_*); \\ \tilde{Y}^-(t^*, t_*, x_*) &= \tilde{Y}(t^*, t_*, x_*) \div B(0; \omega(\delta)) = x_* + \delta F(t_*, x_*)_{-\varphi(\delta)}; \\ \tilde{Y}^-(t^*, t_*, X_*) &= \bigcup_{x_* \in X_*} \tilde{Y}^-(t^*, t_*, x_*); \\ \tilde{Y}^+(t^*, t_*, x_*) &= \tilde{Y}(t^*, t_*, x_*) + B(0; \omega(\delta)) = x_* + \delta F(t_*, x_*)_{\varphi(\delta)}; \\ \tilde{Y}^+(t^*, t_*, X_*) &= \bigcup_{x_* \in X_*} \tilde{Y}^+(t^*, t_*, x_*); \text{ здесь } \omega(\delta) = \delta \cdot \varphi(\delta), \delta \in (0, \infty). \end{aligned}$$

При условиях, наложенных на $\delta > 0$, множества $\tilde{Y}^-(t^*, t_*, x_*)$, $\tilde{Y}^-(t^*, t_*, X_*)$ непусты и тем более непусты множества $\tilde{Y}(t^*, t_*, x_*)$, $\tilde{Y}(t^*, t_*, X_*)$, $\tilde{Y}^+(t^*, t_*, x_*)$, $\tilde{Y}^+(t^*, t_*, X_*)$.

Принимая во внимание (1.4) и утверждение, сформулированное выше, и считая, что в этой лемме $F = F(t_*, x_*)$, $\Phi = F(t, x(t))$, $\varepsilon = \varphi(\delta)$, имеем

$$F(t_*, x_*)_{-\varphi(\delta)} \subset F(t, x(t)) \subset F(t_*, x_*)_{\varphi(\delta)}. \quad (1.5)$$

Из (1.5) следуют включения

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^-(t^*, t_*, x_*) &\subset Y(t^*, t_*, x_*) \subset \tilde{Y}^+(t^*, t_*, x_*), \\ \tilde{Y}^-(t^*, t_*, X_*) &\subset \tilde{Y}(t^*, t_*, X_*) \subset \tilde{Y}^+(t^*, t_*, X_*). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из включений (1.6) следуют включения

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^-(t^*, t_*, X_*) &\subset Y(t^*, t_*, X_*) \subset \tilde{Y}^+(t^*, t_*, X_*), \\ \tilde{Y}^-(t^*, t_*, X_*) &\subset \tilde{Y}(t^*, t_*, X_*) \subset \tilde{Y}^+(t^*, t_*, X_*). \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Нижние и верхние аппроксимации множеств достижимости

$Y(t_i, t_0, X_0)$, $t_i \in \Gamma$ д.в. (1.2) и оценка их рассогласования

В этом разделе введем нижние и верхние аппроксимации множества достижимости д.в. (1.2), отвечающие моментам конечного разбиения Γ промежутка $[t_0, \theta]$ и получим оценку сверху рассогласования (в хаусдорфовой метрике) между этими аппроксимациями.

Итак, введем разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_N = \theta\}$ промежутка $[t_0, \theta]$ и множества в \mathbb{R}^m , определяемое следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^-(t_0) &= \tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}^+(t_0) = Y(t_0) = X_0; \\ Y(t_i) &= Y(t_i, t_{i-1}, Y(t_{i-1})); \\ \tilde{Y}^-(t_i) &= \tilde{Y}^-(t_i, t_{i-1}, \tilde{Y}^-(t_{i-1})); \\ \tilde{Y}^+(t_i) &= \tilde{Y}^+(t_i, t_{i-1}, \tilde{Y}^+(t_{i-1})); \\ \tilde{Y}(t_i) &= \tilde{Y}(t_i, t_{i-1}, \tilde{Y}(t_{i-1})); \quad i = \overline{1, N-1}. \end{aligned}$$

Предполагаем, что диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma) = \Delta_i = t_{i-1} - t_i$, $i = \overline{1, N-1}$ разбиения Γ удовлетворяет неравенству $\varphi(\Delta) < r_*$.

При этом предположении будет выполнено условие $\tilde{Y}^-(t_i) \neq \emptyset$, $i = \overline{1, N-1}$. Тем более будут непусты множества $Y(t_i)$, $\tilde{Y}(t_i)$, $\tilde{Y}^+(t_i)$, $i = \overline{1, N-1}$.

Справедлива следующая теорема относительно оценки величины $d(\tilde{Y}^-(t_i), \tilde{Y}^+(t_i))$ рассогласования между нижними и верхними аппроксимациями $\tilde{Y}^-(t_i)$, $\tilde{Y}^+(t_i)$, $t_i \in \Gamma$ множеств достижимости $Y(t_i)$.

Теорема. Пусть $X_0 \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ — стартовое множество для системы (1.1), отвечающее моменту t_0 , $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_N = \vartheta\}$ — разбиение промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \max_{i=0, N-1} (t_{i+1} - t_i)$.

Тогда нижние и верхние аппроксимации $\tilde{Y}^-(t_i), \tilde{Y}^+(t_i)$ множеств достижимости $Y(t_i)$, $t_i \in \Gamma$, удовлетворяют соотношению

$$d(\tilde{Y}^-(t_i), \tilde{Y}^+(t_i)) \leq e^{L(t_i - t_0)} (\vartheta - t_0) (\gamma_* + 1) \varphi(\Delta);$$

здесь числа L, γ_* и функция $\varphi(\delta), \delta > 0$, определены в разд. 1.

Доказательство. Рассмотрим начальный промежуток $[t_0, t_1]$ разбиения Γ и отвечающие его конечному моменту t_1 множества $Y(t_1), \tilde{Y}^-(t_1), \tilde{Y}^+(t_1)$. Принимая во внимание (1.7), получаем $\tilde{Y}^-(t_1) \subset Y(t_1) \subset \tilde{Y}^+(t_1)$.

Оценим сверху расстояние $d(Y^-(t_1), Y^+(t_1))$ между нижней и верхней аппроксимациями множества $Y(t_1)$.

Для этого сначала оценим сверху величину $d(\tilde{Y}^-(t_1, t_0, x^{(0)}), \tilde{Y}^+(t_1, t_0, x^{(0)}))$ для каждой точки $x^{(0)} \in X_0$. Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & d(\tilde{Y}^-(t_1, t_0, x^{(0)}), \tilde{Y}^+(t_1, t_0, x^{(0)})) \\ & \leq d(\tilde{Y}^-(t_1, t_0, x^{(0)}), \tilde{Y}(t_1, t_0, x^{(0)})) + d(\tilde{Y}(t_1, t_0, x^{(0)}), \tilde{Y}^+(t_1, t_0, x^{(0)})). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства представимо в виде

$$\begin{aligned} d(\tilde{Y}^-(t_1, t_0, x^{(0)}), \tilde{Y}(t_1, t_0, x^{(0)})) &= d(x^{(0)} + \Delta F(t_0, x^{(0)})_{-\varphi(\Delta)}, x^{(0)} \\ &+ \Delta F(t_0, x^{(0)})) = \Delta d(F(t_0, x^{(0)})_{-\varphi(\Delta)}, F(t_0, x^{(0)})). \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие **C** и утверждение, сформулированное выше, получаем

$$\Delta d(F(t_0, x^{(0)})_{-\varphi(\Delta)}, F(t_0, x^{(0)})) \leq \gamma_* \varphi(\Delta).$$

Следовательно, справедлива оценка

$$d(\tilde{Y}^-(t_1, t_0, x^{(0)}), \tilde{Y}(t_1, t_0, x^{(0)})) \leq \gamma_* \omega(\Delta). \quad (2.1)$$

Также справедлива оценка

$$d(\tilde{Y}(t_1, t_0, x^{(0)}), \tilde{Y}^+(t_1, t_0, x^{(0)})) \leq \omega(\Delta). \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) имеем

$$d(\tilde{Y}^-(t_1, t_0, x^{(0)}), \tilde{Y}^+(t_1, t_0, x^{(0)})) \leq (\gamma_* + 1) \omega(\Delta), \quad (t_0, x^{(0)}) \in \mathcal{D}, \quad x^{(0)} \in X_0. \quad (2.3)$$

Из (2.3) получаем

$$d(\tilde{Y}^-(t_1), \tilde{Y}^+(t_1)) \leq (\gamma_* + 1) \omega(\Delta_0). \quad (2.4)$$

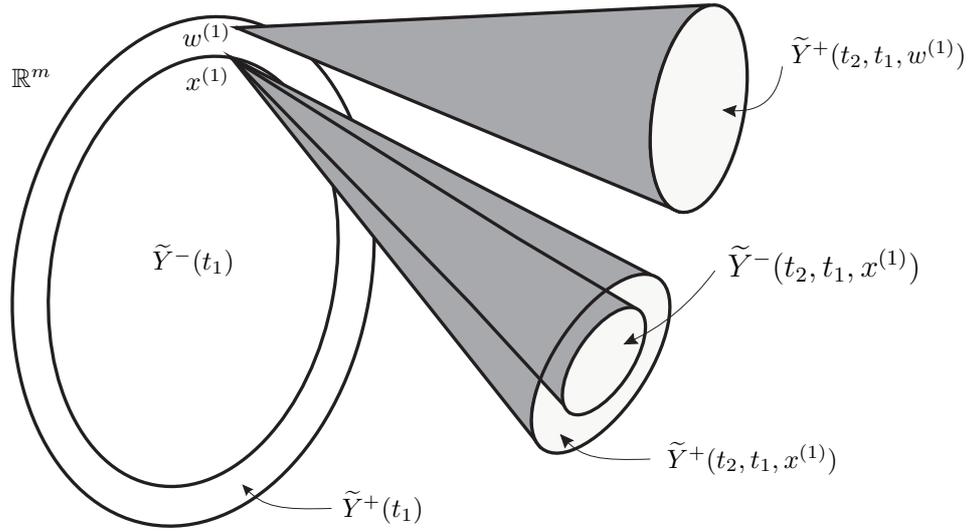
Рассмотрим следующий промежуток $[t_1, t_2]$ разбиения Γ . Справедливы включения

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^-(t_2) &= \tilde{Y}^-(t_2, t_1, \tilde{Y}^-(t_1)) \subset \tilde{Y}^-(t_2, t_1, Y(t_1)) \subset Y(t_2, t_1, Y(t_1)) \\ &\subset Y(t_2, t_1, \tilde{Y}^+(t_1)) \subset \tilde{Y}^+(t_2, t_1, \tilde{Y}^+(t_1)) = \tilde{Y}^+(t_2). \end{aligned}$$

В итоге имеем включение $\tilde{Y}^-(t_2) \subset Y(t_2) \subset \tilde{Y}^+(t_2)$.

Оценим сверху рассогласование $d(\tilde{Y}^-(t_2), \tilde{Y}^+(t_2)) = h(\tilde{Y}^+(t_2), \tilde{Y}^-(t_2))$ между нижней и верхней аппроксимациями множества $Y(t_2)$. Для этого выберем произвольную точку $x^{(1)} \in \tilde{Y}^-(t_1)$ и оценим сверху величину

$$d(\tilde{Y}^-(t_2, t_1, x^{(1)}), \tilde{Y}^+(t_2, t_1, x^{(1)})) = h(\tilde{Y}^+(t_2, t_1, x^{(1)}), \tilde{Y}^-(t_2, t_1, x^{(1)})).$$



Нижняя и верхняя аппроксимации множества достижимости $\tilde{Y}(t_2, t_1, x^{(1)})$.

Для $x^{(1)}$ справедлива оценка, аналогичная (2.3): $d(\tilde{Y}^-(t_2, t_1, x^{(1)}), \tilde{Y}^+(t_2, t_1, x^{(1)})) \leq (\gamma_* + 1)\omega(\Delta)$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} d(\tilde{Y}^-(t_2, t_1, \tilde{Y}^-(t_1)), \tilde{Y}^+(t_2, t_1, \tilde{Y}^-(t_1))) &= \sup_{x^{(1)} \in \tilde{Y}^-(t_1)} \inf_{w^{(1)} \in \tilde{Y}^-(t_1)} h(\tilde{Y}^+(t_2, t_1, x^{(1)}), \tilde{Y}^-(t_2, t_1, w^{(1)})) \\ &\leq \sup_{x^{(1)} \in \tilde{Y}^-(t_1)} h(\tilde{Y}^+(t_2, t_1, x^{(1)}), \tilde{Y}^-(t_2, t_1, x^{(1)})) \leq (\gamma_* + 1)\omega(\Delta). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь произвольную точку $w^{(1)} \in \tilde{Y}^+(t_1)$ и ближайшую в $\tilde{Y}^-(t_1)$ к ней точку $x^{(1)}$ (см. рисунок). Для этих точек справедливо

$$\begin{aligned} d(\tilde{Y}^+(t_2, t_1, w^{(1)}), \tilde{Y}^+(t_2, t_1, x^{(1)})) &\leq e^{L\Delta_1} \|w^{(1)} - x^{(1)}\| = e^{L\Delta_1} \rho(w^{(1)}, \tilde{Y}^-(t_1)) \\ &\leq e^{L\Delta_1} h(\tilde{Y}^+(t_1), \tilde{Y}^-(t_1)) = e^{L\Delta_1} d(\tilde{Y}^-(t_1), \tilde{Y}^+(t_1)). \end{aligned}$$

Имеет место оценка

$$\begin{aligned} &d(\tilde{Y}^+(t_2, t_1, w^{(1)}), \tilde{Y}^+(t_2, t_1, \tilde{Y}^-(t_1))) \\ &\leq d(\tilde{Y}^+(t_2, t_1, w^{(1)}), \tilde{Y}^+(t_2, t_1, x^{(1)})) \leq e^{L\Delta_1} d(\tilde{Y}^-(t_1), \tilde{Y}^+(t_1)), \end{aligned}$$

из которой следует

$$\begin{aligned} d(\tilde{Y}^+(t_2), \tilde{Y}^+(t_2, t_1, \tilde{Y}^-(t_1))) &= \sup_{w^{(1)} \in \tilde{Y}^+(t_1)} d(\tilde{Y}^+(t_2, t_1, w^{(1)}), \tilde{Y}^+(t_2, t_1, \tilde{Y}^-(t_1))) \\ &\leq e^{L\Delta_1} d(\tilde{Y}^-(t_1), \tilde{Y}^+(t_1)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отметим, что неравенство (2.5) может быть записано в виде

$$d(\tilde{Y}^+(t_2, t_1, \tilde{Y}^-(t_1)), \tilde{Y}^-(t_2)) \leq (\gamma_* + 1)\omega(\Delta). \quad (2.7)$$

Учитывая (2.6) и (2.7), получаем

$$d(\tilde{Y}^-(t_2), \tilde{Y}^+(t_2)) \leq e^{L\Delta_1} d(\tilde{Y}^-(t_1), \tilde{Y}^+(t_1)) + (\gamma_* + 1)\omega(\Delta_1). \quad (2.8)$$

Продолжая последовательно перебирать промежутки $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 2, \dots, N - 1$, и оценивать хаусдорфовы расстояния $d(\tilde{Y}^-(t_i), \tilde{Y}^+(t_i))$ через предыдущие расстояния $d(\tilde{Y}^-(t_{i-1}), \tilde{Y}^+(t_{i-1}))$, получаем оценки, аналогичные (2.8):

$$d(\tilde{Y}^-(t_i), \tilde{Y}^+(t_i)) \leq e^{L\Delta_{i-1}} d(\tilde{Y}^-(t_{i-1}), \tilde{Y}^+(t_{i-1})) + (\gamma_* + 1)\omega(\Delta_{i-1}), \quad i = \overline{2, N-1}. \quad (2.9)$$

Из оценок (2.4) и (2.9) выводим оценку

$$\begin{aligned} d(\tilde{Y}^-(t_i), \tilde{Y}^+(t_i)) &\leq e^{L(t_i-t_0)} \sum_{k=\overline{1, i-1}} (\gamma_* + 1) \omega(\Delta_k) \\ &= e^{L(t_i-t_0)} (t_i - t_0) (\gamma_* + 1) \varphi(\Delta), \quad i = \overline{2, N-1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Огрубляя оценки (2.10), получаем

$$d(\tilde{Y}^-(t_i), \tilde{Y}^+(t_i)) \leq e^{L(t_i-t_0)} (\theta - t_0) (\gamma_* + 1) \varphi(\Delta). \quad (2.11)$$

Из (2.11) вытекает предельное соотношение

$$\lim_{\Delta=\Delta(\Gamma)\downarrow 0} \max_{i=\overline{0, N}} d(\tilde{Y}^-(t_i), \tilde{Y}^+(t_i)) = 0.$$

Теорема доказана.

3. К вычислению характеристик, участвующих в оценке множеств достижимости некоторых управляемых систем

В этом разделе рассматриваются конкретные нелинейные по (t, x) и линейные по u управляемые системы в пространстве \mathbb{R}^2 и показывается, как для этих систем можно вычислить некоторые характеристические элементы (числовые величины и функции), присутствующие в нижних и верхних оценках множеств достижимости этих систем.

На промежутке времени $[t_0, \theta]$, $t_0 < \theta < \infty$, рассмотрим управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = s(t, x) + B(t, x)u, \quad (3.1)$$

$$u = u(t) \in P, \quad (3.2)$$

$$(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^2;$$

здесь t — время, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — фазовый вектор системы из \mathbb{R}^2 , u — вектор управления, P — выпуклый компакт в \mathbb{R}^2 .

Предполагаем, что система (3.1) удовлетворяет следующим условиям.

A. Вектор-функция $s(t, x)$ ограничена и непрерывно-дифференцируема на $[t_0, \theta] \times \mathbb{R}^2$.

B. Матрица-функция $B(t, x) = (b_{ij}(t, x)) (i, j = \overline{1, 2})$ с нормой

$$\|B(t, x)\| = \left(\sum_{i,j=\overline{1,2}} b_{ij}^2(t, x) \right)^{1/2}$$

обладает непрерывно-дифференцируемыми коэффициентами $b_{ij}(t, x)$ на $[t_0, \theta] \times \mathbb{R}^2$, и при этом имеет место $\min_{(t,x) \in D} |\det(B(t, x))| > 0$ на любом компакте D из $[t_0, \theta] \times \mathbb{R}^2$.

Из **A**, **B** следует, что правая часть системы (3.1) — вектор-функция $f(t, x, u) = s(t, x) + B(t, x)u$ — удовлетворяет условиям

а)

$$\begin{aligned} K &= K_D = \max\{\|f(t, x, u)\| : (t, x, u) \in D \times P\} \\ &\leq \max\{\|s(t, x)\| + \|B(t, x)\| h_P : (t, x) \in D\} \leq K_D^s + K_D^B h_P, \end{aligned}$$

где

$$K_D^s = \max\{\|s(t, x)\| : (t, x) \in D\} \in (0, \infty),$$

$$K_D^B = \max\{\|B(t, x)\|: (t, x) \in D\} \in (0, \infty), \quad h_P = \max_{u \in P} \|u\|;$$

b)

$$\|f(t, x^{(1)}) - f(t, x^{(2)})\| \leq L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (t, x^{(1)}), (t, x^{(2)}) \in D, \quad u \in P.$$

Здесь постоянная $L \in (0, \infty)$ определена равенством $L = L^s + L^B h_P$, L^s и L^B — постоянные Липшица по переменной x на компакте D соответственно вектор-функции $s(t, x)$ и матрицы-функции $B(t, x)$, причем $L^B = \left(\sum_{i,j=1,2} k_{ij}^2 \right)^{1/2}$ числа $k_{ij} \in (0, \infty)$ — постоянные Липшица по x скалярных функций $b_{ij}(t, x)$ на D .

Еще один важный характеристический элемент в наших оценках множеств достижимости — модуль непрерывности по (t, x) правой части $f(t, x, u)$ системы (3.1) — вычисляется по формуле

$$\omega_D^*(\delta) = \max\{\|f(t_*, x_*, u) - f(t^*, x^*, u)\|: |t' - t''| + \|x_* - x^*\| \leq \delta, (t_*, x_*), (t^*, x^*) \in D, u \in P\}.$$

Рассмотрим также выпуклые компакты

$$F(t, x) = \{f(t, x, u): u \in P\} = \{s(t, x) + B(t, x)u: u \in P\}$$

в пространстве \mathbb{R}^2 , удовлетворяющие следующему условию.

С. Множества $F(t, x)$, $(t, x) \in D$, обладают свойствами

a*) множества $F(t, x)$, $(t, x) \in D$, равноограничены снизу в том смысле, что

$$\exists \rho \in (0, \infty): \forall (t, x) \in D \exists B(z(t, x); \rho) \subset F(t, x);$$

b*) коэффициенты вытянутости $\gamma_{F(t,x)}$, $(t, x) \in D$ равноограничены сверху в том смысле, что

$$\exists \gamma \in (0, \infty): \sup_{(t,x) \in D} \gamma_{F(t,x)} \leq \gamma.$$

Здесь $\gamma_{F(t,x)} = \frac{d_{F(t,x)}}{r_{F(t,x)}}$, $d_{F(t,x)}$ и $r_{F(t,x)}$ соответственно диаметр множества $F(t, x)$ и радиус вписанного шара в $F(t, x)$.

Приступим теперь к вычислению характеристических элементов правой части управляемой системы (3.1) в зависимости от вида компакта P из (3.2). Рассмотрим два варианта ограничений на P .

Вариант 1. Пусть $u = u(t) \in P = \{(u_1, u_2): |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}$ — единичный квадрат в плоскости \mathbb{R}^2 с центром в точке $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим вершины квадрата P через $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. При любом фиксированном $(t^*, x^*) \in D$ отображение $u \mapsto B(t^*, x^*)u$ линейно по u , откуда следует, что множество $G_{(t^*, x^*)} = \{B(t^*, x^*)u: u \in P\}$ — параллелограмм в \mathbb{R}^2 . Справедливы равенства $B(t^*, x^*) \cdot 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $B(t^*, x^*) \cdot (-u) = -B(t^*, x^*)u$.

Пусть точки A^*, B^*, C^*, D^* определяются соотношениями

$$A^* = B(t^*, x^*)A = \begin{pmatrix} b_{11}(t^*, x^*) + b_{12}(t^*, x^*) \\ b_{21}(t^*, x^*) + b_{22}(t^*, x^*) \end{pmatrix};$$

$$B^* = B(t^*, x^*)B = \begin{pmatrix} -b_{11}(t^*, x^*) + b_{12}(t^*, x^*) \\ -b_{21}(t^*, x^*) + b_{22}(t^*, x^*) \end{pmatrix};$$

$$C^* = -A^* = \begin{pmatrix} -b_{11}(t^*, x^*) - b_{12}(t^*, x^*) \\ -b_{21}(t^*, x^*) - b_{22}(t^*, x^*) \end{pmatrix}; \quad D^* = -B^* = \begin{pmatrix} b_{11}(t^*, x^*) - b_{12}(t^*, x^*) \\ b_{21}(t^*, x^*) - b_{22}(t^*, x^*) \end{pmatrix}.$$

Диаметр множества $F(t^*, x^*)$ равен диаметру множества $G(t^*, x^*)$, при этом диаметр параллелограмма $G(t^*, x^*)$ равен длине максимальной из его диагоналей, т. е.

$$d_{G(t^*, x^*)} = 2 \max \left\{ \left\| \begin{pmatrix} b_{11}(t^*, x^*) + b_{12}(t^*, x^*) \\ b_{21}(t^*, x^*) + b_{22}(t^*, x^*) \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} b_{11}(t^*, x^*) - b_{12}(t^*, x^*) \\ b_{21}(t^*, x^*) - b_{22}(t^*, x^*) \end{pmatrix} \right\| \right\}. \quad (3.3)$$

Уравнения прямых Π_{A^*, B^*} и Π_{A^*, D^*} в плоскости \mathbb{R}^2 , проходящих соответственно через пары точек A^*, B^* и A^*, D^* , имеют вид

$$\Pi_{A^*, B^*}: b_{21}(t^*, x^*)u_1 - b_{11}(t^*, x^*)u_2 + |\det(B(t^*, x^*))| = 0; \quad (3.4)$$

$$\Pi_{A^*, D^*}: b_{22}(t^*, x^*)u_1 - b_{12}(t^*, x^*)u_2 - |\det(B(t^*, x^*))| = 0. \quad (3.5)$$

Из равенств (3.4), (3.5) определяем расстояния от точки O до прямых Π_{A^*, B^*} и Π_{A^*, D^*} :

$$\rho(O; \Pi_{A^*, B^*}) = \frac{|\det(B(t^*, x^*))|}{\sqrt{b_{11}^2(t^*, x^*) + b_{21}^2(t^*, x^*)}}; \quad \rho(O; \Pi_{A^*, D^*}) = \frac{|\det(B(t^*, x^*))|}{\sqrt{b_{12}^2(t^*, x^*) + b_{22}^2(t^*, x^*)}}.$$

Справедливо равенство для радиусов кругов, вписанных в множества $F(t^*, x^*)$ и $G(t^*, x^*)$:

$$r_{F(t^*, x^*)} = r_{G(t^*, x^*)} = \min \{ \rho(O; \Pi_{A^*, B^*}), \rho(O; \Pi_{A^*, D^*}) \}. \quad (3.6)$$

Тогда коэффициент вытянутости $\gamma_{F(t^*, x^*)}$ множества $F(t^*, x^*)$ удовлетворяет соотношениям

$$\gamma_{F(t^*, x^*)} = \gamma_{G(t^*, x^*)},$$

$$\gamma_{F(t^*, x^*)} \leq d_{G(t^*, x^*)} \frac{\left(\sum_{i,j=1,2} b_{ij}^2(t, x) \right)^{1/2}}{|\det(B(t^*, x^*))|} = d_{G(t^*, x^*)} \frac{\|B(t^*, x^*)\|}{|\det(B(t^*, x^*))|} \leq \frac{2\sqrt{2}\|B(t^*, x^*)\|^2}{|\det(B(t^*, x^*))|}.$$

Тем самым задача о вычислении константы, ограничивающей сверху коэффициенты вытянутости множеств $F(t, x)$ на компакте $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^2$, свелась к задаче о вычислении максимума функции $\frac{\|B(t, x)\|^2}{|\det(B(t, x))|}$ на компакте $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^2$. \square

Вариант 2. Пусть $P = \{u = (u_1, u_2): u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$ — замкнутый круг в \mathbb{R}^2 с центром в точке $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При любой фиксированной точке $(t^*, x^*) \in D$ отображение $u \mapsto B(t^*, x^*)u$ линейно по u , откуда следует, что множество $G_{(t^*, x^*)} = \{B(t^*, x^*)u: u \in P\}$ — эллипс в \mathbb{R}^2 . Как и в предыдущем примере, $B(t^*, x^*)(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $B(t^*, x^*)(-u) = -B(t^*, x^*)u$.

Радиус вписанного в $G_{(t^*, x^*)}$ шара и диаметр эллипса $G_{(t^*, x^*)}$ соответственно равны длине малой полуоси и большой оси эллипса. Иными словами, для их вычисления требуется найти

$$\min_{u \in P} \|B(t^*, x^*)u\| \quad \text{и} \quad \max_{u \in P} \|B(t^*, x^*)u\|.$$

Очевидно, что указанные выше экстремумы функции $H(u) = \|B(t^*, x^*)u\|$ достигаются на границе шара P , т. е. на сфере $S = \{u = (u_1, u_2): u_1^2 + u_2^2 = 1\}$. Также в тех же точках на сфере S достигаются экстремумы функции $H^2(u)$ на P . В силу осесимметричности эллипса достаточно искать экстремумы функции $H(u)$ при $u_1 \geq 0$.

Введем функцию Лагранжа $L(u_1, u_2, \lambda) = H^2(u_1, u_2) + \lambda(u_1^2 + u_2^2 - 1)$. Необходимые условия для нахождения точек экстремума в нашей задаче выглядят так:

$$\begin{cases} 2b_{11}(b_{11}u_1 + b_{12}u_2) + 2b_{21}(b_{21}u_1 + b_{22}u_2) + 2\lambda u_1 = 0; \\ 2b_{12}(b_{11}u_1 + b_{12}u_2) + 2b_{22}(b_{21}u_1 + b_{22}u_2) + 2\lambda u_2 = 0; \\ \lambda(u_1^2 + u_2^2 - 1) = 0; \\ \lambda \neq 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Перепишем систему (3.7) в виде

$$\begin{cases} b_{11}(b_{11}u_1 + b_{12}u_2) + b_{21}(b_{21}u_1 + b_{22}u_2) = -\lambda u_1; \\ b_{12}(b_{11}u_1 + b_{12}u_2) + b_{22}(b_{21}u_1 + b_{22}u_2) = -\lambda u_2; \\ u_1^2 + u_2^2 = 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что любая точка упомянутого экстремума $u = (u_1, u_2)$ отлична от $(0, 0)$. Перемножив первые два уравнения системы (3.8), получим равенство

$$-\lambda u_2(b_{11}(b_{11}u_1 + b_{12}u_2) + b_{21}(b_{21}u_1 + b_{22}u_2)) = -\lambda u_1(b_{12}(b_{11}u_1 + b_{12}u_2) + b_{22}(b_{21}u_1 + b_{22}u_2)). \quad (3.9)$$

Поделив обе части уравнения (3.9) на λ и приведя подобные, получим

$$(b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22})u_1^2 + (b_{11}^2 + b_{21}^2 - b_{12}^2 - b_{22}^2)u_1u_2 - (b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22})u_2^2 = 0. \quad (3.10)$$

Введем для упрощения обозначения $a_1 = b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22}$, $a_2 = b_{11}^2 + b_{21}^2 - b_{12}^2 - b_{22}^2$, в которых уравнение (3.10) запишется в виде

$$a_1(u_1^2 - u_2^2) + a_2u_1u_2 = 0. \quad (3.11)$$

Сначала рассмотрим случай $a_1 \neq 0$. Тогда из (3.11) следует, что $u_2 \neq 0$. Поделив обе части равенства (3.11) на u_2^2 и введя замену $v = u_1/u_2$, имеем

$$a_1v^2 + a_2v - 1 - a_1 = 0,$$

откуда

$$v_1 = \frac{-a_2 + \sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}{2a_1}, \quad v_2 = \frac{-a_2 - \sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}{2a_1}.$$

Из обратной замены и условия $u_1^2 + u_2^2 = 1$ определяем точки экстремума

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + 1}} \\ \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + 1}} \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + 1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{v_2^2 + 1}} \end{pmatrix}.$$

Непосредственной подстановкой получаем

$$H^2(U_1) = \frac{1}{2}\|B\|^2 + \frac{\sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}{2}, \quad H^2(U_2) = \frac{1}{2}\|B\|^2 - \frac{\sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}{2},$$

из чего следует, что

$$r_{G(t^*, x^*)} = \min_{u \in P} H(u) = \sqrt{\frac{1}{2}\|B\|^2 - \frac{\sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}{2}}; \quad (3.12)$$

$$d_{G(t^*, x^*)} = 2 \max_{u \in P} H(u) = 2\sqrt{\frac{1}{2}\|B\|^2 + \frac{\sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}{2}}; \quad (3.13)$$

$$\gamma_{G(t^*, x^*)} = \frac{d_{G(t^*, x^*)}}{r_{G(t^*, x^*)}} = 2\sqrt{\frac{\|B\|^2 + \sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}{\|B\|^2 - \sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}} \quad (3.14)$$

в случае $a_1 \neq 0$.

Теперь рассмотрим случай $a_1 = 0$. Тогда система (3.8) запишется в виде

$$\begin{cases} (b_{11}^2 + b_{21}^2)u_1 = -\lambda u_1; \\ (b_{12}^2 + b_{22}^2)u_2 = -\lambda u_2; \\ u_1^2 + u_2^2 = 1. \end{cases}$$

Если $a_2 \neq 0$, то $b_{11}^2 + b_{21}^2 \neq b_{12}^2 + b_{22}^2$. Поскольку хотя бы одно из выражений $b_{11}^2 + b_{21}^2$, $b_{12}^2 + b_{22}^2$ не равно λ , то либо $u_1 = 0$, либо $u_2 = 0$.

Точками экстремума в этом случае будут

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$H^2(U_1) = b_{11}^2 + b_{21}^2, \quad H^2(U_2) = b_{12}^2 + b_{22}^2.$$

Отметим, что здесь формулы для вычисления величин $r_{G(t^*, x^*)}$, $d_{G(t^*, x^*)}$, $\gamma_{G(t^*, x^*)}$ будут такими же, как и при $a_1 \neq 0$.

В случае $a_1 = a_2 = 0$ множество $G(t^*, x^*)$ превратится в круг, и формулы (3.12)–(3.14) останутся верными, причем в этом случае $\gamma_{G(t^*, x^*)} = 2$.

Остается упомянуть, что аналогично предыдущему примеру $r_{F(t^*, x^*)} = r_{G(t^*, x^*)}$, $d_{F(t^*, x^*)} = d_{G(t^*, x^*)}$, $\gamma_{F(t^*, x^*)} = \gamma_{G(t^*, x^*)}$, а исходная задача свелась к нахождению максимума функции $\gamma_{F(t, x)}$ на компакте D , явно выраженной через переменные t, x . \square

Теперь перейдем к рассмотрению управляемых систем с конкретной матрицей $B(t, x)$.

П р и м е р. Пусть на множестве $D = [3; 4] \times \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]^2$ определена управляемая система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x) + B(t, x)u; \\ u &= u(t) \in P; \\ (t, x) &\in D \subset \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

в которой $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — фазовый вектор системы, $B(t, x) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin(t + x_1) & \sin t \\ \sqrt{2} \cos(t + x_1) & \cos t \end{pmatrix}$, $f(t, x) = 0$.

Очевидно, что функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию **A**.

Вычислим определитель матрицы $B = B(t, x)$.

$$\det(B) = \sqrt{2} \sin(t + x_1) \cos t - \sqrt{2} \cos(t + x_1) \sin t = \sqrt{2} \sin x_1.$$

При $x_1 \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ величина $\sin x_1$ принимает значения из отрезка $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, поэтому $\det(B) > 0$, из чего следует выполнение условия **B**.

Рассмотрим случай, когда $u = u(t) \in P = \{(u_1, u_2): |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}$ — единичный квадрат с центром в точке $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Проверим выполнение условия **C**. Из формулы (3.6) следует

$$\begin{aligned} r_{F(t, x)} &= \min \left\{ \frac{|\det(B(t, x))|}{\sqrt{b_{11}^2(t, x) + b_{21}^2(t, x)}}, \frac{|\det(B(t, x))|}{\sqrt{b_{12}^2(t, x) + b_{22}^2(t, x)}} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 \sin^2(t + x_1) + 2 \cos^2(t + x_1)}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} \right\} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В результате видно, что коэффициент вытянутости $\gamma_{F(t,x)}$ зависит лишь от диаметра $d_{F(t,x)}$; в силу формулы (3.3) имеем

$$\begin{aligned}\gamma_{F(t,x)} &= 2d_{F(t,x)} = 4 \max \left\{ \left\| \begin{pmatrix} b_{11}(t,x) + b_{12}(t,x) \\ b_{21}(t,x) + b_{22}(t,x) \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} b_{11}(t,x) - b_{12}(t,x) \\ b_{21}(t,x) - b_{22}(t,x) \end{pmatrix} \right\| \right\} \\ &= 4 \max \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin(t+x_1) + \sin(t) \\ \sqrt{2} \cos(t+x_1) + \cos(t) \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin(t+x_1) - \sin(t) \\ \sqrt{2} \cos(t+x_1) - \cos(t) \end{pmatrix} \right\| \right\} \\ &= 4 \max \left\{ \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos x_1}, \sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cos x_1} \right\}.\end{aligned}$$

При $x_1 \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ величина $\cos x_1$ принимает значения из отрезка $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Исходя из этого, выводим

$$\begin{aligned}\max \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos x_1} &= \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3 + \sqrt{6}}, \\ \max \sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cos x_1} &= \sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.\end{aligned}$$

В итоге $\gamma_{F(t,x)} = 4\sqrt{3 + \sqrt{6}}$.

Теперь рассмотрим случай $u = u(t) \in P = \{(u_1, u_2)u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$ — замкнутый шар с центром в точке $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Проверим выполнение условия **С**. Для этого вычислим норму матрицы B .

$$\|B\| = \sqrt{2 \sin^2(t+x_1) + 2 \cos^2(t+x_1) + \sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{3}.$$

Используя обозначения из варианта 2, получаем

$$\begin{aligned}a_1 &= \sqrt{2} \sin(t+x_1) \sin t + \sqrt{2} \cos(t+x_1) \cos t = \sqrt{2} \cos x_1, \\ a_2 &= 2 \sin^2(t+x_1) + 2 \cos^2(t+x_1) - \sin^2 t - \cos^2 t = 1.\end{aligned}$$

Из рассмотрения этого же примера известно, что

$$r_{F(t,x)} = \sqrt{\frac{1}{2}\|B\|^2 - \frac{\sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{8 \cos^2 x_1 + 1}}{2}}. \quad (3.15)$$

Равенство (3.15) обращается в ноль только в случае $\cos^2 x_1 = 1$. Как было показано ранее, при $x_1 \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ такого быть не может.

Следовательно, $r_{F(t,x)} \neq 0$ на компакте D . Однако, на этом же компакте функция $r_{F(t,x)}$ достигает своего минимального значения $\rho > 0$, а значит выполняется условие **С.a***.

Условие **С.b*** выполнено в силу ограниченности множества D .

Теперь вычислим коэффициент вытянутости $\gamma_{F(t,x)}$. Из варианта 2 имеем

$$\gamma_{F(t,x)} = 2 \sqrt{\frac{\|B\|^2 + \sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}{\|B\|^2 - \sqrt{4a_1^2 + a_2^2}}} = 2 \sqrt{\frac{3 + \sqrt{4a_1^2 + 1}}{3 - \sqrt{4a_1^2 + 1}}} = 2 \sqrt{\frac{6}{3 - \sqrt{4a_1^2 + 1}}} - 1, \quad (3.16)$$

из чего следует, что максимум $\gamma_{F(t,x)}$ достигается при максимуме a_1^2 .

Максимальное значение $a_1^2(t,x) = 2 \cos^2 x_1$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ достигается при $x_1 = \frac{\pi}{4}$, откуда $\max_{(t,x) \in D} a_1^2(t,x) = 1$.

Подставляя максимальное значение a_1^2 в равенство (3.16), получаем

$$\gamma_{F(t,x)} = 2\sqrt{\frac{6}{3-\sqrt{5}} - 1} = 3 + \sqrt{5}.$$

Приступим к вычислению константы Липшица правой части системы (3.1). Для нашего примера условие липшицевости будет выглядеть следующим образом:

$$\|B(t, x^{(1)})u - B(t, x^{(2)})u\| \leq K\|u\| \cdot \|x^{(1)} - x^{(2)}\| = Kd_P\|x^{(1)} - x^{(2)}\|,$$

где d_P — диаметр множества P .

Найдем константы Липшица коэффициентов матрицы B . Функции $\sin t, \cos t$ не зависят от x , поэтому их константы липшицевости равны нулю.

Функций $\sqrt{2}\sin(t+x_1), \sqrt{2}\cos(t+x_1)$ дифференцируемы по x_1 , значит их константы Липшица вычисляются как супремум модуля их производной по x_1 на множестве D .

При $(t, x_1) \in [3; 4] \times \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ аргумент $t+x_1$ принимает значения из отрезка $\left[3 + \frac{\pi}{6}; 4 + \frac{\pi}{4}\right]$, причем $3 + \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2} < 4 + \frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$\sup_{(t,x) \in D} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{2} \cos(t+x_1) \right) \right| = \sup_{(t,x) \in D} \left| \sqrt{2} \sin(t+x_1) \right| = \left| \sqrt{2} \sin(t+x_1) \right| \Big|_{\substack{t=4, \\ x_1=\frac{3\pi}{2}-4}} = \sqrt{2}.$$

На отрезке $\left[3 + \frac{\pi}{6}; 4 + \frac{\pi}{4}\right]$ функция $\cos(t+x_1)$ монотонно возрастает. Поэтому максимум модуля этой функции достигается в одном из концов отрезка. Из того, что $4 + \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4} < 3 + \frac{\pi}{6}$, имеем

$$\left| \cos\left(4 + \frac{\pi}{4}\right) \right| < \left| \cos\frac{7\pi}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \left| \cos\frac{5\pi}{4} \right| < \left| \cos\left(3 + \frac{\pi}{6}\right) \right|.$$

В результате

$$\begin{aligned} \sup_{(t,x) \in D} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{2} \sin(t+x_1) \right) \right| &= \sup_{(t,x) \in D} \left| \sqrt{2} \cos(t+x_1) \right| = \left| \sqrt{2} \cos(t+x_1) \right| \Big|_{\substack{t=3, \\ x_1=\frac{\pi}{6}}} \\ &= \sqrt{2} \left| \cos\left(3 + \frac{\pi}{6}\right) \right| = \sqrt{2} \cos\left(3 - \frac{5\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|B(t, x^{(1)})u - B(t, x^{(2)})u\| \leq K \cdot d_P \|x^{(1)} - x^{(2)}\| = \sqrt{2 + 2 \cos^2\left(3 - \frac{5\pi}{6}\right)} \cdot d_P \|x^{(1)} - x^{(2)}\|.$$

В случае, когда $P = \{(u_1, u_2) : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}$, $d_P = 2\sqrt{2}$ и константа Липшица равна $\sqrt{16 + 16 \cos^2\left(3 - \frac{5\pi}{6}\right)}$; а в случае, когда $P = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$, $d_P = 2$ и константа Липшица равна $\sqrt{8 + 8 \cos^2\left(3 - \frac{5\pi}{6}\right)}$.

И наконец, вычислим модуль непрерывности $\omega_D^*(\delta)$.

Зафиксируем некоторое $\delta \geq 0$. Пусть точки $(t', x'), (t'', x'')$ таковы, что $|t' - t''| + \|x' - x''\| \leq \delta$. Пусть также $\|x' - x''\| = m\delta$ при некотором $0 \leq m \leq 1$.

$$\|B(t', x') - B(t'', x'')\|^2 = 2(\sin(t' + x'_1) - \sin(t'' + x''_1))^2 + 2(\cos(t' + x'_1) - \cos(t'' + x''_1))^2$$

$$+ (\sin x'_1 - \sin x''_1)^2 + (\cos x'_1 - \cos x''_1)^2 = 6 - 4 \cos (t' - t'' + x'_1 - x''_1) - 2 \cos (x'_1 - x''_1). \quad (3.17)$$

Заметим, что $\max_{\substack{(t',x') \in D, \\ (t'',x'') \in D}} \{|t' - t'' + x'_1 - x''_1|\} = 1 + \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$. Из этого следует, что значения

косинусов в формуле (3.17) положительны, и поэтому

$$\|B(t', x') - B(t'', x'')\|^2 \leq 6 - 4 \cos \delta - 2 \cos (m\delta).$$

Пусть $\delta \geq 1 + \frac{\pi}{12}$, тогда

$$\|B(t', x') - B(t'', x'')\|^2 \leq 6 - 4 \cos \left(1 + \frac{\pi}{12}\right) - 2 \cos \frac{\pi}{12}.$$

Пусть $0 \leq \delta < 1 + \frac{\pi}{12}$. Найдем значение m , при котором величина $6 - 4 \cos \delta - 2 \cos (m\delta)$ — максимальна. При указанном выборе параметра δ значение $\cos (m\delta)$ монотонно убывает с ростом m . Таким образом,

$$\|B(t', x') - B(t'', x'')\|^2 \leq 6 - 4 \cos \delta - 2 \cos \delta = 6 - 6 \cos \delta.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \omega_D^*(\delta) &= \max_{\substack{(t',x') \in D, \\ (t'',x'') \in D}} \{\|F(t', x') - F(t'', x'')\| : |t' - t''| + \|x' - x''\| \leq \delta\} \\ &= \max_{\substack{(t',x') \in D, \\ (t'',x'') \in D}} \{\|B(t', x')u - B(t'', x'')u\| : |t' - t''| + \|x' - x''\| \leq \delta\} \\ &= \max_{\substack{(t',x') \in D, \\ (t'',x'') \in D}} \{\|B(t', x') - B(t'', x'')\| : |t' - t''| + \|x' - x''\| \leq \delta\} \cdot d_P \\ &= \begin{cases} \sqrt{6 - 4 \cos \left(1 + \frac{\pi}{12}\right) - 2 \cos \frac{\pi}{12}} \cdot d_P, & \delta \geq 1 + \frac{\pi}{12} \\ \sqrt{6 - 6 \cos \delta} \cdot d_P, & 0 \leq \delta < 1 + \frac{\pi}{12}, \end{cases} \end{aligned}$$

где d_P — диаметр множества P .

Заключение

В работе изучена задача о приближенном конструировании множеств достижимости нелинейных управляемых систем в конечномерных евклидовых пространствах. При не слишком ограничительных условиях на управляемую систему введены и рассмотрены нижние и верхние (по включению) аппроксимации множеств достижимости управляемой системы. Основу конструирования этих аппроксимаций составляет идеология ломаных Эйлера. С применением оценки Л. С. Понтрягина хаусдорфова отклонения выпуклого компакта в \mathbb{R}^m от геометрической разности этого компакта и шара достаточно малого радиуса получены оценки отклонения нижних и верхних аппроксимаций множеств достижимости от (идеальных) множеств достижимости управляемой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. Куржанский А.Б. Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009. 756 с.
3. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the theory of trajectory tubes: a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in Nonlinear Dynamics and Control / ed. A.B. Kurzhanski. Ser. PSCT 17. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 122–188.

4. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры преследования // *Мат. сб.* 1980. Т. 112 (154), № 3 (7). С. 307–330. doi: 10.1070/SM1981v040n03ABEH001815.
6. **Никольский М.С.** Об аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // *Вест. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика.* 1987. №4. С. 31–34.
7. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
8. **Kurzhanski A.B., Vályi I.** Ellipsoidal techniques for dynamic systems: Control synthesis for uncertain systems // *Dynamics and Control.* 1992. Vol. 2, № 2. P. 87–111. doi: 10.1007/BF02169492.
9. **Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л.** Двусторонние оценки областей достижимости управляемых систем // *Прикл. математика и механика.* 1982. Т. 46, вып. 5. С. 737–744. doi: 10.1016/0021-8928(82)90005-3.
10. **Gusev M.I., Zykov I.V.** On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control // *IFAC-PapersOnLine.* 2017. Vol. 50, no. 1. P. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792.
11. **Veliov V.** On the time-discretization of control systems // *SIAM J. Control Optim.* Vol. 35, no. 5. P. 1470–1486. doi: 10.1137/S0363012995288987.
12. **Костоусова Е.К.** Об ограниченности внешних полиэдральных оценок множеств достижимости линейных систем // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2008. Т. 48, №6. С. 974–989. doi: 10.1134/S0965542508060043.
13. **Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.** Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // *Прикл. математика и механика.* 1998. Т. 62, № 2. С. 179–187. doi: 10.1016/S0021-8928(98)00022-7.
14. **Горнов А.Ю.** Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2000. 297 с.
15. **Лотов А.В.** Новая внешняя оценка множества достижимости нелинейной многошаговой динамической системы // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2018. Т. 58, №2. С. 209–219. doi: 10.7868/S0044466918020060
16. **Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Паршиков Г.В.** К решению задач о сближении управляемых систем // *Тр. МИАН.* 2015. Т. 291. С. 276–291. doi: 10.1134/S0371968515040214

Поступила 14.01.2020

После доработки 6.02.2020

Принята к публикации 10.02.2020

Ушаков Владимир Николаевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: ushak@imm.uran.ru

Першаков Максим Вадимович

математик

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: Mper192@yandex.ru

REFERENCES

1. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977. 392 p.
2. Kurzhanski A.B. *Izbrannye trudy* (Selected works). Moscow: Moscow State University Publ., 2009, 756 p. (in Russian)

3. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the theory of trajectory tubes: a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control. In: A.B. Kurzhanski (eds), *Advances in Nonlinear Dynamics and Control*. Ser. PSCT, vol. 17. Boston: Birkhäuser, 1993, pp. 122–188. doi: 10.1007/978-1-4612-0349-0_4.
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. N Y: Springer, 1987, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
5. Pontryagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. doi: 10.1070/SM1981v040n03ABEH001815.
6. Nikol'skii M.S. Approximation of the feasibility set for a differential inclusion. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. XV Vychisl. Mat. Kibernet.*, 1987, no. 4, pp. 31–34 (in Russian).
7. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fasovogo sostoianiia dinamicheskikh sistem* [Estimation of the phase state of dynamical systems]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 319 p. ISBN: 5-02-013899-1.
8. Kurzhanski A.B., Vályi I. Ellipsoidal techniques for dynamic systems: Control synthesis for uncertain systems. *Dynamics and Control*, 1992, vol. 2, no. 2, pp. 87–111. doi: 10.1007/BF02169492.
9. Ovseevich A.I., Chernous'ko F.L. Two-sided estimates on the attainability domains of controlled systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1982, vol. 46, no. 5, pp. 590–595. doi: 10.1016/0021-8928(82)90005-3.
10. Gusev M.I., Zykov I.V. On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792.
11. Veliov V. On the time-discretization of control systems. *SIAM J. Control Optim.*, 1997, vol. 35, no. 5, pp. 1470–1486. doi: 10.1137/S0363012995288987.
12. Kostousova E.K. On the boundedness of outer polyhedral estimates for reachable sets of linear systems. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 6, pp. 918–932. doi: 10.1134/S0965542508060043.
13. Guseinov K.G., Moiseyev A.A., Ushakov V.N. The approximation of reachable domains of control systems *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 169–175. doi: 10.1016/S0021-8928(98)00022-7.
14. Gornov A.Yu. *Vychislitel'nye tekhnologii resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* [The Computational Technologies for Solving Optimal Control Problems]. Novosibirsk: Nauka Publ., 2009, 278 p. ISBN: 978-5-02-023284-6.
15. Lotov A.V. New external estimate for the reachable set of a nonlinear multistep dynamic system. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 2, pp. 196–206. doi: 10.7868/S0044466918020060.
16. Ushakov V.N., Ukhobotov V.I., Ushakov A.V., Parshikov G.V. On solving approach problems for control systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 263–278. doi: 10.1134/S0371968515040214.

Received January 14, 2020

Revised February 6, 2020

Accepted February 10, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18-01-00264 and no. 18-01-00221).

Vladimir Nikolaevich Ushakov, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ushak@imm.uran.ru.

Maksim Vadimovich Pershakov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: Mper192@yandex.ru.

Cite this article as: V.N.Ushakov, M.V.Pershakov. On two-sided approximations of reachable sets of control systems with geometric constraints on the controls, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 239–255.

УДК 517.911.5

**ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ¹****А. В. Фоминых, В. В. Карелин, Л. Н. Полякова**

В статье рассматриваются некоторые классы задач с дифференциальными включениями, для которых разработан эффективный алгоритм их решения, базирующийся на градиентном методе. В первой части статьи описывается алгоритм решения дифференциальных включений со свободным или с закрепленным правым концом и с выпуклым непрерывным многозначным отображением, допускающим опорную функцию с непрерывной производной по фазовым координатам. Данный алгоритм состоит в сведении рассматриваемой задачи к задаче минимизации некоторого функционала в функциональном пространстве. Для этого функционала получен градиент Гато, найдены необходимые, а в некоторых случаях и достаточные условия минимума. Далее к этому функционалу применяется метод градиентного спуска. Во второй части статьи разработанный подход демонстрируется на решении трех основных классов дифференциальных включений, в частности 1) дифференциального включения, получающегося из управляемой системы с переменной областью управления, зависящей от фазовых координат, 2) дифференциального включения, содержащего в правой части прямую сумму, объединение или пересечение выпуклых множеств, 3) линейной интервальной системы ОДУ, рассматриваемой как дифференциальное включение.

Ключевые слова: дифференциальное включение, градиент Гато, опорная функция, метод градиентного спуска, линейные интервальные системы, переменная область управления.

A. V. Fominyh, V. V. Karelin, L. N. Polyakova. Gradient method for solving some types of differential inclusions.

We discuss some classes of problems with differential inclusions, for which an efficient algorithm based on the gradient method is developed. The first part of the paper describes an algorithm for solving differential inclusions with a free or a fixed right end and a convex continuous multivalued mapping that admits a support function with a continuous derivative with respect to the phase coordinates. This algorithm reduces the problem under consideration to the problem of minimizing a certain functional in a function space. For this functional, the Gâteaux gradient is obtained and necessary and, in some cases, sufficient minimum conditions are found. Further, the gradient descent method is applied to the functional. In the second part of the paper, the developed approach is illustrated by solving three main classes of differential inclusions: (1) a differential inclusion obtained from a control system with a variable control domain depending on the phase coordinates, (2) a differential inclusion containing the direct sum, union, or intersection of convex sets in the right-hand side, (3) a linear interval system of ODEs considered as a differential inclusion.

Keywords: differential inclusion, Gâteaux gradient, support function, gradient descent method, linear interval system, variable control domain.

MSC: 34A60, 49J52, 49J53

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-256-273

Введение

В управляемых системах дифференциальные включения возникают естественным образом, если систему ОДУ $\dot{x}(t) = f(x, u, t)$, $u \in U$ (с заданными краевыми условиями или без них), переписать в виде включения $\dot{x} \in F(x, t)$ (с теми же краевыми условиями), где $F(x, t) = \{f(x, u, t) \mid u \in U\}$, U — некоторое множество управлений. В дальнейшем условия на правые части системы и структура множества управлений будут уточнены. Задачи с исходной системой и полученным включением оказываются эквивалентными при естественных предположениях [1]. Однако дифференциальное включение является значительно более общим объектом, нежели объект, возникающий из указанных систем управления. В виде дифференциальных включений могут быть записаны дифференциальные неравенства, управляемые

¹Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 18-71-00006).

системы с фазовыми ограничениями, интервальные системы дифференциальных уравнений и др. Прикладная полезность таких объектов не вызывает сомнений [2–4], поэтому представляет интерес разработка эффективных методов исследования моделей, описываемых дифференциальными включениями. Особенно полезным такой подход оказывается при описании систем с неполной информацией, систем с разрывными правыми частями, а также интервальных динамических систем.

Данная статья является продолжением исследований [5; 6], в которых на основе градиентного метода в функциональном пространстве разрабатывался алгоритм решения дифференциальных включений со свободным или с закрепленным правым концом и с выпуклым непрерывным многозначным отображением, допускающим опорную функцию с непрерывной производной по фазовым координатам. Несмотря на то что такие включения являются лишь частным случаем намного более общего класса дифференциальных включений с менее ограничительными требованиями на правую часть, рассматриваемая проблема весьма широка и позволяет исследовать достаточно богатый и разнообразный набор классов задач. Так, например, случай переменной (имеется в виду переменная как по времени, так и по фазовым координатам) области управления $U(x, t)$ в приведенной выше управляемой системе приводит к такой же по форме задаче с дифференциальными включениями (в предположении сохранения указанных ограничений на опорную функцию множества, стоящего в правой части включения). Уже это замечание показывает, что постановка задачи об отыскании решений дифференциального включения существенно обобщает постановку задачи об отыскании оптимальных процессов в управляемых объектах с постоянной или переменной лишь по времени областью управления. Интересно также качественно выделить и другие классы задач, не являющиеся классическими с позиции теории управления, но описываемые на языке дифференциальных включений и достаточно эффективно решаемые с помощью разрабатываемого подхода. Это дифференциальные включения, содержащие в правой части прямую сумму, объединение или пересечение выпуклых множеств, а также линейные интервальные системы ОДУ.

В статьях [7–14] (и в литературе, указанной в их ссылках) для численного решения дифференциальных включений применяются аналоги известных методов решения ОДУ, такие как схемы Эйлера и Рунге — Кутты, методы конечных разностей и т. п. Все из перечисленных работ, кроме последней, исследуют лишь задачу со свободным правым концом (задачу Коши для включений). Заметим, что в отличие от подавляющего большинства методов оптимального управления и решения дифференциальных включений, которые являются дискретными, разрабатываемый алгоритм непрерывен. Этот подход может быть в каких-то случаях менее эффективным с вычислительной точки зрения, чем его дискретные аналоги, но теоретически интересен и оригинален тем, что не основан на какой бы то ни было дискретизации исходной задачи.

В первой части статьи для общей постановки кратко описывается алгоритм, построенный в работах [5; 6]. Во второй части его работа демонстрируется на трех качественно различных классах задач с дифференциальными включениями.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t) \tag{1.1}$$

с начальной точкой

$$x(0) = x_0 \tag{1.2}$$

и конечным условием

$$x(T) = x_T. \tag{1.3}$$

В формуле (1.1) $F(x, t)$ — заданное непрерывное многозначное отображение при $t \in [0, T]$, $x(t)$ — n -мерная непрерывная вектор-функция фазовых координат с кусочно-непрерывной и ограниченной на $[0, T]$ производной, $T > 0$ — заданный конечный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t \in [0, T]$ и каждой фазовой точке $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(x, t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из \mathbb{R}^n . Предположим также, что опорная функция множества $F(x, t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна по совокупности переменных (x, ψ, t) на множестве $\mathbb{R}^n \times S \times [0, T]$, где S — единичная сфера в \mathbb{R}^n с центром в начале координат. В формулах (1.2), (1.3) $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ — заданные векторы.

Требуется найти вектор-функцию $x^* \in C_n[0, T]$, которая удовлетворяет дифференциальному включению (1.1) и переводит объект из заданного начального состояния (1.2) в заданное конечное положение (1.3). Предполагаем, что такое решение существует.

Здесь $C_n[0, T]$ — пространство n -мерных непрерывных на $[0, T]$ вектор-функций с производной из пространства $P_n[0, T]$; $P_n[0, T]$ — пространство кусочно-непрерывных и ограниченных на $[0, T]$ n -мерных вектор-функций. Далее в статье также потребуется пространство $L_n^2[0, T]$ суммируемых на $[0, T]$ с квадратом n -мерных вектор-функций.

Если $t_0 \in [0, T)$ — точка разрыва вектор-функции \dot{x} , то для определенности полагаем, что $\dot{x}(t_0)$ — правосторонняя производная вектор-функции \dot{x} в точке t_0 ; $\dot{x}(T)$ — левосторонняя производная вектор-функции \dot{x} в точке T .

Для произвольного множества $F \subset \mathbb{R}^n$ опишем опорную функцию вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$ соотношением $c(F, \psi) = \sup_{f \in F} \langle f, \psi \rangle$, где $\langle a, b \rangle$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$.

З а м е ч а н и е 1. Вместо траекторий из пространства $C_n[0, T]$ можно рассматривать абсолютно непрерывные на отрезке $[0, T]$ траектории с измеримыми и почти всюду ограниченными на $[0, T]$ производными (которые должны удовлетворять дифференциальному включению почти везде на $[0, T]$). Выбор пространства решений в статье объясняется возможностью их практического построения.

З а м е ч а н и е 2. Из дальнейшего будет видно, что разрабатываемый алгоритм позволяет решать как поставленную задачу (1.1)–(1.3), так и более простую задачу Коши (1.1), (1.2) (если отсутствует условие на правом конце). Поэтому заметим, что при сделанных предположениях существует [1] даже непрерывно дифференцируемое (классическое) решение задачи Коши (1.1), (1.2). Кроме того, как правило, задача (1.1), (1.2) имеет бесконечное число решений. Как было только что отмечено, этот набор решений содержит непрерывно дифференцируемое решение. Однако применяемый в статье метод не гарантирует, что будет получено непрерывно дифференцируемое решение. Возможно, будет получено лишь кусочно-дифференцируемое решение (из пространства $P_n[0, T]$) (см. пример 2 в разд. 6).

2. Сведение к вариационной задаче

Далее для краткости будем иногда писать F вместо $F(x, t)$. Поскольку $\forall t \in [0, T]$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $F(x, t)$ представляет собой выпуклый компакт в \mathbb{R}^n , то включение (1.1) можно переписать иначе [15]:

$$\langle \dot{x}(t), \psi \rangle \leq c(F(x(t), t), \psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0, T].$$

Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0, T]$, тогда с учетом (1.2) будет

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau.$$

Положим

$$\begin{aligned} \ell(\psi, z, t) &= \langle z(t), \psi \rangle - c(F(x(t), t), \psi), \\ h(z, t) &= \max_{\psi \in S} \max\{0, \ell(\psi, z, t)\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

и составим функционал

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h^2(z, t) dt. \quad (2.5)$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{z \in P_n[0, T] \mid \varphi(z) = 0\}.$$

Нетрудно убедиться, что для функционала (2.5) справедливы соотношения

$$\begin{cases} \varphi(z) = 0 \ (z \in \Omega), & \text{если } \langle \dot{x}(t), \psi \rangle \leq c(F(x(t), t), \psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0, T], \\ \varphi(z) > 0 \ (z \notin \Omega) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

т. е. включение (1.1) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(z) = 0$.

Введем функционал

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T \right)^2. \quad (2.6)$$

Видно, что условие на левом конце (1.2) выполнено автоматически в силу определения функции $z(t)$, а условие на правом конце (1.3) выполнено тогда и только тогда, когда $\chi(z) = 0$.

Построим функционал

$$I(z) = \varphi(z) + \chi(z). \quad (2.7)$$

Обозначим через z^* точку глобального минимума функционала (2.7). Видно, что нахождение решения исходной задачи

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$$

свелось к минимизации функционала (2.7) на пространстве $P_n[0, T]$.

Структура функционала $I(z)$ естественна, поскольку число $h(z, t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ есть евклидово расстояние от точки $z(t)$ до множества $F(x(t), t)$, функционал (2.5) — это половина квадрата отклонения в $L_n^2[0, T]$ -норме траектории $z(t)$ от множества $F(x, t)$, а функционал (2.6) — половина квадрата евклидова расстояния точки $x(T)$ от заданной точки x_T . Таким образом, целью является минимизация суммы этих расстояний.

3. Необходимые условия минимума

В работе [6] доказывается дифференцируемость по Гато функционала $I(z)$. Доказательство проводится с помощью выписывания классических вариаций функционалов $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ и опирается на теорему Лебега о мажорируемой сходимости, а также на такие известные факты, как аддитивность опорной функции по первому аргументу и теорема Лагранжа о среднем значении. Приведем соответствующую теорему.

Теорема 1 [6, теорема 1]. *Если опорная функция $c(F, \psi)$ множества $F(x, t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна, то функционал $I(z)$ дифференцируем по Гато и его градиент в точке z находится по формуле*

$$\nabla I(z) = h(z, t) \psi^*(z, t) - \int_t^T h(z, \tau) \frac{\partial c(F(x(\tau), \tau), \psi^*(z, \tau))}{\partial x} d\tau + x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T. \quad (3.1)$$

Заметим, что для дифференцируемости по Гато существенным фактором является непрерывность производной опорной функции множества из правой части дифференциального включения по фазовым переменным. Для дифференцируемости по Гато также существенна единственность вектора $\psi^*(z, t)$, а именно: в силу структуры функционала (2.4) легко заметить, что в случае $\ell(\psi, z, t) > 0$ максимум выражения $\max\{0, \ell(\psi, z, t)\} = \ell(\psi, z, t)$ достигается на единственном элементе $\psi^*(z, t) \in S$. Подробное, хотя и несложное, обоснование этого факта также см. в [6].

Очевидно, что необходимым и достаточным условием минимума функционала $I(z)$ является равенство $I(z^*) = 0$. Однако для построения численных методов требуется более конструктивное условие минимума: необходимо (см. [16]), чтобы градиент Гато обращался в ноль на решении z^* исходной задачи:

Теорема 2. Пусть опорная функция $c(F, \psi)$ множества $F(x, t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна. Для того чтобы точка z^* доставляла минимум функционалу $I(z)$ необходимо выполнение следующего условия:

$$0_n = h(z^*, t)\psi^*(z^*, t) - \int_t^T h(z^*, \tau) \frac{\partial c(F(x^*(\tau), \tau), \psi^*(z^*, \tau))}{\partial x} d\tau + x_0 + \int_0^T z^*(t) dt - x_T, \quad (3.2)$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0, T]$.

З а м е ч а н и е 3. Если рассматривается только задача Коши (1.1), (1.2), то функционал $\chi(z)$ для учета условия на правом конце отсутствует. Тогда в формулах (3.1) и (3.2) пропадают вторые строчки, соответствующие градиенту Гато функционала $\chi(z)$. Кроме того, из единственности нулевого решения однородного интегрального уравнения Вольтерры второго рода заключаем, что условие (3.2) (в котором отсутствует вторая строчка) является в данном случае не только необходимым, но и достаточным условием (глобального) минимума.

4. Метод наискорейшего спуска

Опишем метод наискорейшего спуска [17] для поиска стационарных точек функционала $I(z)$. Фиксируем произвольную точку $z_1 \in P_n[0, T]$. Пусть уже построена точка $z_k \in P_n[0, T]$. Если выполнено условие минимума (3.2), то точка z_k является стационарной точкой функционала $I(z)$ и процесс прекращается. В противном случае положим $z_{k+1} = z_k - \gamma_k \nabla I(z_k)$, где вектор-функция $x_k(t) = x_0 + \int_0^t z_k(\tau) d\tau$, а величина γ_k есть решение следующей задачи одномерной минимизации:

$$\min_{\gamma > 0} I(z_k - \gamma \nabla I(z_k)) = I(z_k - \gamma_k \nabla I(z_k)). \quad (4.1)$$

В силу (4.1) $I(z_{k+1}) \leq I(z_k)$. Если последовательность $\{z_k\}$ конечна, то последняя ее точка является стационарной точкой функционала $I(z)$ по построению.

Предположим, что функционал $\nabla I(z)$ равномерно непрерывен и ограничен в шаре пространства $L_n^2[0, T]$ с центром в начале координат и радиуса $r' > \sup_{z \in Z_1} \|z\|_{L_n^2[0, T]}$ (множество Лебега $Z_1 = \{z \in P_n[0, T] \mid I(z) \leq I(z_1)\}$ считаем ограниченным по норме $L_n^2[0, T]$). Если последовательность $\{z_k\}$ бесконечна, то метод сходится [18] в следующем смысле:

$$\|\nabla I(z_k)\|_{L_n^2[0, T]} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 4. Заметим, что задача (1.1)–(1.3) является в общем случае некорректно поставленной, поскольку, как уже отмечалось, в ней, как правило, будет бесчисленное множество решений. Известно, что некорректно поставленные оптимизационные задачи могут

приводить к некоторым проблемам сходимости численных методов. Однако в данной статье исследование сходимости метода ограничивается лишь приведением условий, при которых имеет место “слабая сходимость” (в смысле стремления к нулю нормы градиента Гао минимизируемого функционала). Вопросы сходимости, конечно, требуют дополнительного более подробного изучения, однако с практической точки зрения в данном случае имеется удобный критерий проверки решения: на решении построенный функционал должен обращаться в ноль. Если в найденной в ходе работы метода стационарной точке z' имеем $I(z') \neq 0$, то естественной для подобных оптимизационных методов рекомендацией является запуск алгоритма из другой начальной точки.

5. Примеры решения некоторых типов дифференциальных включений

5.1. Линейные интервальные системы ОДУ

Рассмотрим линейную нестационарную интервальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + g(t), \quad t \in [0, T], \quad (5.1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} [\underline{a}_{11} \ \bar{a}_{11}], [\underline{a}_{12} \ \bar{a}_{12}], \dots, [\underline{a}_{1n} \ \bar{a}_{1n}], \\ [\underline{a}_{21} \ \bar{a}_{21}], [\underline{a}_{22} \ \bar{a}_{22}], \dots, [\underline{a}_{2n} \ \bar{a}_{2n}], \\ \dots \\ [\underline{a}_{n1} \ \bar{a}_{n1}], [\underline{a}_{n2} \ \bar{a}_{n2}], \dots, [\underline{a}_{nn} \ \bar{a}_{nn}] \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} [\underline{g}_1(t) \ \bar{g}_1(t)], \\ [\underline{g}_2(t) \ \bar{g}_2(t)], \\ \dots \\ [\underline{g}_n(t) \ \bar{g}_n(t)] \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \quad (5.3)$$

В формуле (5.1) T — заданный конечный момент времени, $x \in C_n[0, T]$, $\dot{x} = z \in P_n[0, T]$. В формуле (5.2) $\underline{a}_{ij}(t)$ и $\bar{a}_{ij}(t)$, $\underline{a}_{ij}(t) \leq \bar{a}_{ij}(t) \ \forall t \in [0, T]$, $i, j = \overline{1, n}$, — заданные непрерывные функции, $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$, $\underline{g}_i(t) \leq \bar{g}_i(t) \ \forall t \in [0, T]$, $i = \overline{1, n}$, — также заданные непрерывные функции. В дальнейшем для краткости будем писать $\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}, \underline{g}_i, \bar{g}_i$ вместо $\underline{a}_{ij}(t), \bar{a}_{ij}(t), \underline{g}_i(t), \bar{g}_i(t)$ соответственно, $i, j = \overline{1, n}$, $t \in [0, T]$. В формуле (5.3) $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ — заданные векторы. Под решением задачи (5.1), (5.3) здесь будем понимать такую вектор-функцию $x^* \in C_n[0, T]$, которая удовлетворяет системе (5.1) и краевым условиям (5.3). Это определение согласуется с определением, данным выше для общей задачи (1.1)–(1.3). Предполагаем, что такое решение существует.

Перепишем систему (5.1) в форме дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = A(t)x + g(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5.4)$$

Очевидно, $F(x, t)$ является выпуклым компактным множеством из \mathbb{R}^n для каждого момента времени $t \in [0, T]$ и для каждой фазовой точки $x \in \mathbb{R}^n$. Нетрудно также видеть, что отображение $F(x, t)$ непрерывно. Таким образом, пришли к рассматриваемой в статье постановке задачи.

В данном случае можно в общем виде выписать опорную функцию множества (5.4) и ее производную по фазовым координатам, которые требуются в формуле (3.1). Обозначим

$$c_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\underline{a}_{ij} + \bar{a}_{ij}}{2} x_j + \frac{\underline{g}_i + \bar{g}_i}{2}, \quad i = \overline{1, n},$$

и

$$r_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}}{2} |x_j| + \frac{\bar{g}_i - \underline{g}_i}{2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда опорная функция имеет вид

$$c(F(x, t), \psi) = \sum_{i=1}^n c_i(x) \psi_i + \sum_{i=1}^n r_i(x) |\psi_i| \quad \forall \psi \in S.$$

Получаем для каждого $\psi \in S$ (если $x_i(t) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$)

$$\frac{\partial c(F(x, t), \psi)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{a_{ji} + \bar{a}_{ji}}{2} \psi_j + \text{sign } x_i \sum_{j=1}^n \frac{\bar{a}_{ji} - a_{ji}}{2} |\psi_j|.$$

Видно, что производная по фазовым координатам x опорной функции множества (5.4) непрерывна при $x \neq \mathbf{0}$.

Предположим, что координата $x^i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in [0, T]$, обращается в ноль только не более чем в счетное число моментов времени $t_{ij} \in [0, T]$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим такое множество траекторий как $X[0, T]$. Поскольку опорная функция множества $F(x, t)$ в данном классе дифференциальных включений будет обладать непрерывной производной по фазовым координатам лишь при $x \neq \mathbf{0}$, то теоремы 1, 2 остаются верными только в точках $x \in X[0, T]$ и $x^* \in X[0, T]$ соответственно. Итак, предположим, что решение x^* принадлежит множеству $X[0, T]$. Однако заметим, что сделанное предположение, по-видимому, не является обременительным, поскольку его нарушение означает, что существует такая “координата” $x^{\bar{i}}$, $\bar{i} \in \{1, \dots, n\}$, которая остается в нулевом положении (и имеет нулевую “скорость”) на некотором подмножестве интервала $[0, T]$ ненулевой меры. Такая ситуация не выглядит естественной для управляемых систем на конечном интервале $[0, T]$. Как было только что отмечено, чтобы применить метод наискорейшего спуска корректно, нужно считать, что на каждой итерации $x_k \in X[0, T]$, $k = 1, 2, \dots$. Приведем пример реализации алгоритма.

Пример 1. Рассмотрим интервальную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + [t, 2t]x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + [-t^2, 0], \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $t \in [0, 1]$. Заданы краевые условия

$$x(0) = (2, 3)', \quad x(1) = (1.5, 1)'. \quad (5.6)$$

В этом примере

$$c(F, \psi) = (-x_1 + 1.5tx_2)\psi_1 + (x_1 - 2x_2 - 0.5t^2)\psi_2 + 0.5t|x_2||\psi_1| + 0.5t^2|\psi_2|.$$

За начальное приближение была выбрана точка $z_1 = (1, 1)'$, а тогда $x_1 = (2 + t, 3 + t)'$. Было проделано 7 итераций в соответствии с предложенным алгоритмом. В результате на интервале $[0, 1]$ была получена точка

$$x^*(t) := x_7(t) = \begin{pmatrix} 2 - 1.0002t^3 + 2.4732t^2 - 1.9937t - 0.0253t^4 + 0.0425t^5 + 0.0014t^6 + 0.0022t^7 \\ 3 - 1.1473t^3 + 3.003t^2 - 4.0125t + 0.2522t^4 - 0.1034t^5 + 0.0125t^6 - 0.0044t^7 \end{pmatrix}$$

(она выписана с точностью вплоть до 4-го знака после запятой), и имеем

$$\|\nabla I(z^*)\|_{L_n^2[0,1]} \leq 10^{-5}, \quad I(z^*) \leq 2 \times 10^{-5}.$$

Можно проверить, что на 7-й итерации функция $z_1^*(t) + x_1^*(t)$ лежит “практически” “между” функциями $tx_2^*(t)$ и $2tx_2^*(t)$, а функция $z_2^*(t) - x_1^*(t) + 2x_2^*(t)$ находится “практически” “между” функциями $-t^2$ и 0 в каждый момент времени $t \in [0, 1]$; мы видим, что получено приближенное решение интервальной системы (5.5) (слова “практически” означают здесь что полученное значение функционала $I(z^*)$ отличается от требуемого нулевого значения не более, чем на величину порядка 2×10^{-5}). Легко убедиться (вычислив $x_7(0)$ и $x_7(1)$), что краевые условия (5.6) для траектории $x^*(t)$ также удовлетворены.

5.2. Управляемые системы

Вернемся к управляемым системам, переписывание которых на языке дифференциальных включений и послужило, по существу, поводом к возникновению изначально интереса к этому математическому объекту. Заметим, что если рассмотреть управляемые системы на конечном промежутке времени $[0, T]$ (с заданным начальным условием и свободным или закрепленным правым концом), описываемые системой ОДУ $\dot{x} = f(x, u, t)$, где в правой части стоит непрерывно дифференцируемая функция $f(x, u, t)$ (по переменной t достаточно предположить лишь кусочную непрерывность и ограниченность), а управление принадлежит некоторому выпуклому компакт $U(t)$ при каждом t , то соответствующие задачи управления можно решать предложенным методом как дифференциальное включение с многозначным отображением $F(x, t) = \{f(x, u, t) \mid u \in U(t)\}$, $t \in [0, T]$, лишь бы его опорная функция удовлетворяла требованиям, наложенным на нее в постановке задачи. (При этом считаем, что фазовые траектории, их производные и управления принадлежат тем же классам функций, что и в постановке задачи с дифференциальными включениями, то есть классам $C_n[0, T]$, $P_n[0, T]$ и $P_m[0, T]$ соответственно.)

Рассмотрим ту же ситуацию, что и в предыдущем абзаце, но считаем теперь, что область управления зависит не только от времени, но и от фазовых координат; тогда имеем многозначное отображение $F(x, t) = \{f(x, u, t) \mid u \in U(x, t)\}$, $t \in [0, T]$. Несмотря на то что с позиции теории управления переменная (по фазовым переменным) область управления $U(x, t)$ существенно усложнит задачу, с точки зрения дифференциальных включений получаем такую же по форме постановку задачи, что и в случае не зависящей от x области управления. Конечно, чтобы применить предложенный в данной статье алгоритм для решения полученной задачи, нужно предположить, что наложенные в постановке задачи условия на опорную функцию множества, стоящего в правой части дифференциального включения, остаются в такой ситуации выполненными. Приведем соответствующий пример.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = [0.5x^2t, 1.5x^2t], \quad t \in [0, 1], \tag{5.7}$$

и краевые условия

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 1.5. \tag{5.8}$$

В этом примере $c(F, \psi) = x^2t(\psi + 0.5|\psi|)$, $\frac{\partial c}{\partial x} = 2xt(\psi + 0.5|\psi|)$. За начальное приближение была взята точка $z_1 = 1$, а тогда $x_1 = 1 + t$. Применяя алгоритм статьи, на 3-й итерации

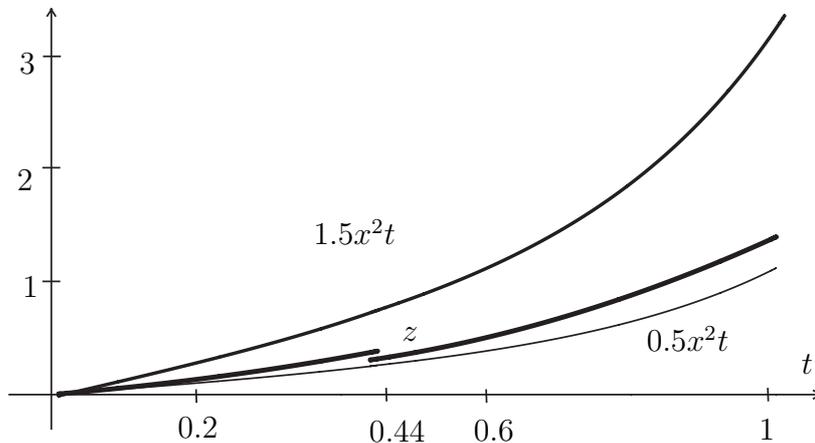


Рис. 1. Решение примера 2

получаем точку (она выписана с точностью вплоть до 4-го знака после запятой), которая является решением данного примера:

$$x^*(t) := x_3(t) = \begin{cases} 1 + 0.0554t^4 + 0.2001t^3 + 0.2793t^2, & t \in [0, 0.44], \\ 0.5918t^3 - 0.30123t^2 + 0.2289t + 0.9809, & t \in [0.44, 1], \end{cases}$$

На рис. 1 изображена функция $z(t)$ (на 3-й итерации). Поскольку функция $z(t)$ лежит “между” функциями $0.5x^2(t)t$ и $1.5x^2(t)t$ в каждый момент $t \in [0, 1]$, видно, что включение (5.7) удовлетворено. Краевые условия (5.8) также имеют место, в чем легко убедиться, вычислив $x_3(0)$ и $x_3(1)$. Итак, в примере ограничения удовлетворены точно, поэтому $I(z^*) = 0$. \square

Как уже было отмечено, дифференциальные включения часто оказываются полезными при описании разрывных систем. В связи с этим откажемся теперь от предположения непрерывной дифференцируемости и даже просто непрерывности правой части $f(x, u, t)$ по фазовым переменным x . Несмотря на то что функция $f(x, u, t)$ теперь не является непрерывной по x , оказывается, что для многозначного отображения $F(x, t) = \{f(x, u, t) \mid u \in U(x, t)\}$ опорная функция $c(F(x, t), \psi)$ может обладать непрерывной производной по фазовым координатам, как это и предполагается в постановке задачи. Представляется, что в общем случае разрывные системы устроены достаточно сложно, чтобы заранее можно было сказать о структуре исходной разрывной системы ОДУ, для которой указаный только что случай имел место. Этот вопрос еще требует тщательного исследования и представляется перспективным с точки зрения исследования некоторых классов задач с разрывными системами. Однако нетрудно привести пример, когда это действительно так, и тогда предлагаемый в статье подход позволяет строить конкретные решения подобных задач.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = \omega(x_2)u_1,$$

$$\dot{x}_2 = \omega(x_2)u_2$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

При этом $t \in [0, T]$, $u \in B$ (единичный шар в \mathbb{R}^n с центром в начале координат, в данном примере $n = 2$), а функция $\omega(x_2)$ устроена следующим образом:

$$\begin{cases} \omega(x_2) = -1, & \text{если } x_2 < 0, \\ \omega(x_2) = 1, & \text{если } x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, правая часть системы оказывается разрывной по фазовым переменным.

Несмотря на это, получающееся при переписывании данной системы дифференциальное включение оказывается очень простым:

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = B, \quad t \in [0, T], \quad (5.9)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \quad (5.10)$$

Опорная функция $c(F, \psi) = \|\psi\| = 1$, и $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$, поэтому при решении задачи (5.9), (5.10) с использованием алгоритма статьи получаемые формулы будут иметь очень простой вид. \square

Как известно [19], при адекватном описании процессов, задаваемых системами с разрывными правыми частями, возникает необходимость обобщения принятого в классической теории ОДУ определения решения. Приведем один из классических вариантов такого определения [19], а также пример, который укладывается в постановку задачи данной статьи. На конечном интервале $t \in [0, T]$ рассмотрим систему $\dot{x} = f(x, u_1(x, t), \dots, u_r(x, t), t)$, в которой

вектор-функция $f(x, u_1, \dots, u_r, t)$ непрерывна по совокупности аргументов, а вектор-функции $u_i(x, t)$, $i = \overline{1, r}$, разрывны соответственно на множествах M_i , $i = \overline{1, r}$. В каждой точке (x, t) разрыва вектор-функции $u_i(x, t)$, $i = \overline{1, r}$, должно быть задано замкнутое множество $U_i(x, t)$, $i = \overline{1, r}$, — множество возможных значений аргумента u_i , $i = \overline{1, r}$, функции $f(x, u_1, \dots, u_r, t)$. В физических системах множества $U_i(x, t)$, $i = \overline{1, r}$ обычно отвечают за различные блоки. Обозначим $F(x, t) = f(x, u_1, \dots, u_r, t)$ — множество значений функции $f(x, u_1, \dots, u_r, t)$ при фиксированных $x, t \in [0, T]$, а u_1, \dots, u_r пробегает соответственно множества $U_1(x, t), \dots, U_r(x, t)$. Решениями исходного дифференциального уравнения с разрывной правой частью называются решения этого дифференциального включения. Заявленный пример имеет следующий вид.

Пример 4. На заданном конечном промежутке $[0, T]$ система описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_1 = x_1 + \text{sign } x_1,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + \text{sign } x_1$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

При этом считается, что в реальной физической системе функция $u_1(x, t) := \text{sign } x_1$ реализуется при помощи реле и при $x_1 = 0$ (то есть при $x \in M_1$) может принимать любое значение из множества $U_1(x, t) := [-1, 1]$. Предположим, что начальная точка x_0 не находится на поверхности разрыва M_1 . Вне множества M_1 правая часть исходной системы есть однозначная функция, поэтому решение может быть найдено стандартными методами ОДУ. Пусть в некоторый момент времени $t_1 \in (0, 1)$ решение этой системы попадает на поверхность разрыва M_1 . В реально реализуемых физических системах естественна ситуация, когда решение, попав на поверхность разрыва в некоторый момент времени, будет оставаться на ней до конца всего рассматриваемого промежутка [19]. Поэтому, если имеется условие на конечное положение объекта, то его в такой ситуации естественно считать принадлежащим поверхности разрыва: $x_T = (0, x_{2T})$, где значение x_{2T} задано. На множестве M_1 решение исходной системы по только что введенному определению есть решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = (0, x_2 + [-1, 1])', \quad t \in [t_1, 1] \tag{5.11}$$

с краевыми условиями

$$x(t_1) = (0, x_{2t_1}), \quad x(T) = (0, x_{2T}), \tag{5.12}$$

где значение x_{2t_1} однозначно определяется из решения исходной системы до попадания на поверхность разрыва. Заметим, что решение этого включения автоматически удовлетворяет условию $x_1 = 0$. Таким образом, получили задачу (5.11), (5.12), которая укладывается в постановку задачи данной статьи.

5.3. Дифференциальные включения, содержащие в правой части сумму, пересечение или объединение выпуклых множеств

Рассмотрим случай, когда правая часть дифференциального включения представляет собой сумму нескольких выпуклых множеств. Для простоты изложения опишем случай только с двумя множествами. Исследуем систему $\dot{x} \in F(x, t) = F_1(x, t) + F_2(x, t)$, где многозначные отображения $F_1(x, t), F_2(x, t)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и многозначное отображение $F(x, t)$ в постановке задачи статьи. Как обычно, считаем, что заданы начальное условие и, возможно, условие на правом конце. Пользуясь простой формулой для опорной функции суммы двух выпуклых компактов, имеем $c(F(x, t), \psi) = c(F_1(x, t), \psi) + c(F_2(x, t), \psi)$. Приведем пример решения такой системы.

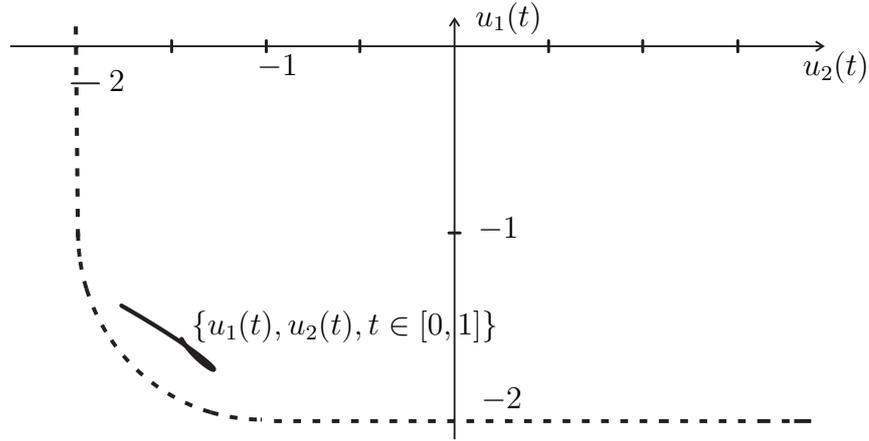


Рис. 2. Решение примера 5

Пример 5. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + B + Q, \quad t \in [0, 1], \tag{5.13}$$

где Q — единичный квадрат в \mathbb{R}^n с центром в начале координат

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 1 \ \forall i = \overline{1, n}\},$$

в данном примере $n = 2$. Заданы краевые условия

$$x(0) = (0, 1)', \quad (-1.25, -1.5)'. \tag{5.14}$$

В этом случае

$$c(F, \psi) = -x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} + |\psi_1| + |\psi_2|, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, -\psi_1)'.$$

Возьмем начальную точку $z_1 = (0, -2)'$, а тогда $x_1 = (0, 1 - 2t)'$. Применение метода, предложенного в статье, привело к следующему решению:

$$x^*(t) := x_5(t) = \begin{pmatrix} 0.1965t^4 - 0.6125t^3 + 1.9355t^2 - 2.7695t \\ -0.1979t^4 + 1.1887t^3 - 2.1015t^2 - 1.3893t + 1 \end{pmatrix}$$

(решение выписано с точностью вплоть до 4-го знака после запятой). Видно, что краевые условия (5.14) удовлетворены (при $t = 0$ очевидно получаем заданную начальную точку, легко также убедиться, что $x_5(1) = (-1.25, -1.5)'$). На рис. 2 сплошная линия есть параметрическая кривая $\{u_1(t) = z_1^*(t) + x_2^*(t), u_2(t) = z_2^*(t) - x_1^*(t), t \in [0, 1]\}$. Пунктирная линия ограничивает допустимую область $B + Q$ расположения этой кривой, отсюда видно, что дифференциальное включение (5.13) выполняется. Таким образом, здесь решение удовлетворяет ограничениям точно, поэтому $I(z^*) = 0$. □

Пусть теперь вместо суммы имеем пересечение нескольких выпуклых множеств. Для простоты изложения опишем случай только с двумя множествами. Исследуемая система имеет тогда вид $\dot{x} \in F(x, t) = F_1(x, t) \cap F_2(x, t)$, где опять многозначные отображения $F_1(x, t), F_2(x, t)$ удовлетворяют заданным требованиям. Здесь также можно искать опорную функцию этого множества по известным формулам, однако вместо ее нахождения поступим несколько иначе, а именно рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \chi(z),$$

где $\chi(z)$ — функционал (2.6), а функционалы $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ строятся аналогично функционалу $\varphi(z)$ в постановке задачи. Имеем при $i = \overline{1, 2}$

$$\ell_i(\psi, z, t) = \langle z(t), \psi \rangle - c(F_i(x, t), \psi),$$

$$h_i(z, t) = \max_{\psi \in S} \max\{0, \ell_i(\psi, z, t)\},$$

$$\varphi_i(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h_i^2(z, t) dt.$$

Очевидно, что x^* — решение изучаемого в данном случае дифференциального включения тогда и только тогда, когда $I(z^*) = 0$. Приведем пример решения подобной задачи.

Пример 6. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = B \cap E(x), \quad t \in [0, 1], \tag{5.15}$$

где $E(x)$ — эллипс, который зависит от фазовой координаты x_1 :

$$E(x) = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(\bar{x} - 2)^2}{x_1^2 + 3} + \bar{y}^2 \leq 1 \right\}.$$

Заданы краевые условия

$$x(0) = (0, 0)', \quad (0.75, 0.5)'. \tag{5.16}$$

В данном случае

$$c(F_1, \psi) = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 1, \quad c(F_2, \psi) = \sqrt{(x_1^2 + 3)\psi_1^2 + \psi_2^2} + 2\psi_1,$$

$$\frac{\partial c(F_1, \psi)}{\partial x} = (0, 0)', \quad \frac{\partial c(F_2, \psi)}{\partial x} = \left(\frac{x_1 \psi_1^2}{\sqrt{(x_1^2 + 3)\psi_1^2 + \psi_2^2}}, 0 \right)'.$$

За начальное приближение взята точка $z_1 = (1, 1)'$, а тогда $x_1 = (t, t)'$. Метод статьи позволяет прийти к следующему решению:

$$x^*(t) := x_3(t) = \begin{pmatrix} 0.7553t + 0.0002t^5 + 0.0013t^4 - 0.0078t^3 + 0.0009t^2 \\ 0.5043t + 0.00006t^5 + 0.00006t^4 + 0.0048t^3 - 0.0092t^2 \end{pmatrix}$$

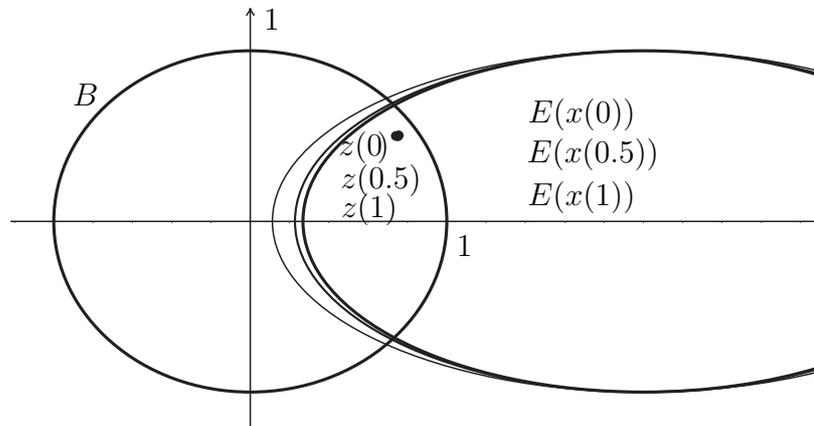


Рис. 3. Решение примера 6

(решение выписано с точностью вплоть до 4-го знака после запятой). Видно, что краевые условия (5.16) удовлетворены (при $t = 0$ очевидно имеем заданную начальную точку, легко также убедиться, что $x_3(1) = (0.75, 0.5)'$). На рис. 3 изображены точки $z(t)$ и допустимая область $B \cap E(x(t))$ расположения этих точек при некоторых значениях $t \in [0, 1]$, отсюда видно, что дифференциальное включение (5.15) выполняется для этих значений $t \in [0, 1]$ (нетрудно проверить, что это верно и для всех остальных значений $t \in [0, 1]$). В данном примере решение удовлетворяет ограничениям точно, поэтому имеем $I(z^*) = 0$. \square

Наконец, обратимся к случаю, когда в правой части дифференциального включения имеется объединение нескольких выпуклых множеств. Наметим путь решения такой задачи. Для простоты изложения опишем случай только с двумя множествами. Рассматриваемая система имеет вид $\dot{x} \in F(x, t) = F_1(x, t) \cup F_2(x, t)$, где опять многозначные отображения $F_1(x, t), F_2(x, t)$ удовлетворяют заданным требованиям. Несмотря на то что каждое из этих множеств предполагается выпуклым, понятно, что их объединение уже не будет выпуклым в общем случае. Поэтому необходимо видоизменить конструкцию функционала $I(z)$, если по-прежнему требуется, чтобы $I(z^*)$ достигал (глобального) минимума в точке z^* тогда и только тогда, когда x^* — решение рассматриваемой в этом случае задачи. Построим соответствующие функции следующим образом при $i = \overline{1, 2}$:

$$\ell_i(\psi, z, t) = \langle z(t), \psi \rangle - c(F_i(x, t), \psi),$$

$$h_i(z, t) = \max_{\psi \in S} \ell_i(\psi, z, t),$$

$$h(z, t) = \max\{0, \min\{h_1(z, t), h_2(z, t)\}\},$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h^2(z, t) dt,$$

$$I(z) = \varphi(z) + \chi(z).$$

Понятно, что при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ точка z принадлежит хотя бы одному из множеств $F_1(x, t), F_2(x, t)$ тогда и только тогда, когда $\min\{h_1(z, t), h_2(z, t)\} \leq 0$, поэтому требуемая эквивалентность исходной задачи и минимизации функционала $I(z)$ достигнута. Однако построенный функционал $I(z)$ уже не будет дифференцируемым по Гато (хотя он является дифференцируемым по Гато в точке (глобального) минимума и градиент Гато равен в ней нулю).

Проведем стандартную дискретизацию функционала $I(z)$ с заменой производной $z(t)$ в каждой точке на конечные разности и докажем, что при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ полученная функция (конечно-разностный аналог функционала $I(z)$) будет квазидифференцируемой [20], что позволит применить для ее минимизации известные алгоритмы недифференцируемой оптимизации, например метод квазидифференциального спуска.

Напомним определение квазидифференциала в конечномерном случае. Пусть имеется некоторое непустое множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$. Функция $\xi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ называется квазидифференцируемой на множестве Σ , если для каждого $\varsigma \in \Sigma$ существуют такие выпуклые компактные множества, субдифференциал $\underline{\partial}\xi(\varsigma) \subset \mathbb{R}^n$ и супердифференциал $\overline{\partial}\xi(\varsigma) \subset \mathbb{R}^n$, что для каждого допустимого приращения $\Delta\varsigma \in \mathbb{R}^n$ (т. е. $\text{co}\{\varsigma, \varsigma + \Delta\varsigma\} \in \Sigma$) соответствующее приращение функции ξ представимо по формуле

$$\xi(\varsigma + \Delta\varsigma) = \xi(\varsigma) + \max_{\sigma_1 \in \underline{\partial}\xi(\varsigma)} \langle \sigma_1, \Delta\varsigma \rangle + \min_{\sigma_2 \in \overline{\partial}\xi(\varsigma)} \langle \sigma_2, \Delta\varsigma \rangle + o(\Delta\varsigma, \varsigma),$$

где $o(\alpha\Delta\varsigma, \varsigma)/\alpha \rightarrow 0$, если $\alpha \rightarrow 0$.

Пара $D\xi(\varsigma) = [\underline{\partial}\xi(\varsigma), \overline{\partial}\xi(\varsigma)]$ называется квазидифференциалом функции ξ в точке ς . Известно [21], что необходимым условием минимума в точке ς^* квазидифференцируемой на \mathbb{R}^n функции является включение $-\overline{\partial}\xi(\varsigma^*) \subset \underline{\partial}\xi(\varsigma^*)$. Это условие конструктивно и используется при построении различных численных методов [20].

Для упрощения выкладок рассмотрим случай $n = 1$. Пусть отрезок $[0, T]$ разбит на N равных частей Δt точками $t_i, i = \overline{0, N}, t_0 = 0, \dots, t_N = T$. Положим $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_N)$. Возьмем на каждом отрезке значение подынтегральной функции, равным ее значению на правом конце этого отрезка.

Вместо соотношений (1.1)–(1.3) имеем конечно-разностный аналог

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \in F_1(x_i, t_i) \cup F_2(x_i, t_i), \quad x_0 = x(0), \quad x_N = x_T, \quad i = \overline{1, N}. \quad (5.17)$$

Вместо функционала $\varphi(z)$ — функцию

$$\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \Delta t \sum_{i=1}^N \overline{\varphi}(x_i, x_{i-1}), \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(x_i, x_{i-1}) := \max \left\{ 0, \min \left\{ \max_{\psi \in S} \left(\left\langle \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, \psi \right\rangle - c(F_1(x_i, t_i), \psi) \right) \right\}, \right. \\ \left. \max_{\psi \in S} \left(\left\langle \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, \psi \right\rangle - c(F_2(x_i, t_i), \psi) \right) \right\}^2, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Вместо функционала $\chi(z)$ — следующую функцию:

$$\overline{\chi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) - x_T \right)^2. \quad (5.20)$$

Составим

$$\overline{I}(\mathbf{x}) = \overline{\varphi}(\mathbf{x}) + \overline{\chi}(\mathbf{x}). \quad (5.21)$$

В формулах (5.17), (5.18), (5.20) $i = \overline{0, N}$, а значение производной $z_i := z(t_i)$ заменено конечной разностью $\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, i = \overline{1, N}$. Итак, конечно-разностный аналог исходной задачи в случае $n = 1$ имеет вид минимизировать функцию (5.21) в пространстве \mathbb{R}^N .

Зафиксируем точку $(x_i, x_{i-1}), i = \overline{1, N}$, и исследуем два случая.

Очевидно, что если

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \in F_1(x_i, t_i) \cup F_2(x_i, t_i),$$

то функция $\overline{\varphi}(x_i, x_{i-1})$ дифференцируема в точке (x_i, x_{i-1}) и ее градиент в этой точке равен нулю.

Рассмотрим случай $\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \notin F_1(x_i, t_i) \cup F_2(x_i, t_i)$. Примем

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}) &:= \left\langle \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, \psi_1^*(x_i, x_{i-1}, t_i) \right\rangle - c(F_1(x_i, t_i), \psi_1^*(x_i, x_{i-1}, t_i)), \\ \overline{\varphi}_2(x_i, x_{i-1}) &:= \left\langle \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, \psi_2^*(x_i, x_{i-1}, t_i) \right\rangle - c(F_2(x_i, t_i), \psi_2^*(x_i, x_{i-1}, t_i)). \end{aligned}$$

Напомним, что числа $\psi_1^*(x_i, x_{i-1}, t_i)$ и $\psi_2^*(x_i, x_{i-1}, t_i)$ (точки максимума соответствующих “внутренних функций” выражения (5.19)), которые обозначим для краткости через $\psi_1^*(t_i)$ и $\psi_2^*(t_i)$ соответственно, определены в рассматриваемом случае однозначно. Найдем квазидифференциал функции $\overline{\varphi}(x_i, x_{i-1})$ в точке (x_i, x_{i-1}) , пользуясь правилами квазидифференциального исчисления и формулой для производной функции максимума по направлениям [20]. Сформулируем полученный результат в виде следующего утверждения, состоящего из трех частей.

Утверждение. 1. Пусть в точке (x_i, x_{i-1}) выполняется равенство

$$\bar{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}) = \bar{\varphi}_2(x_i, x_{i-1}).$$

Тогда

$$D\bar{\varphi}(x_i, x_{i-1}) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K \text{ со } \left\{ \left(\frac{\psi_1^*(t_i)}{\Delta t} - \frac{\partial c(F_1(x_i, t_i), \psi_1^*(t_i))}{\partial x_i} \right), \left(\frac{\psi_2^*(t_i)}{\Delta t} - \frac{\partial c(F_2(x_i, t_i), \psi_2^*(t_i))}{\partial x_i} \right) \right\} \right],$$

$$K = 2 \min\{\bar{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}), \bar{\varphi}_2(x_i, x_{i-1})\}.$$

2. Пусть в точке (x_i, x_{i-1}) выполняется неравенство

$$\bar{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}) < \bar{\varphi}_2(x_i, x_{i-1}).$$

Тогда

$$D\bar{\varphi}(x_i, x_{i-1}) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K_1 \left(\frac{\psi_1^*(t_i)}{\Delta t} - \frac{\partial c(F_1(x_i, t_i), \psi_1^*(t_i))}{\partial x_i} \right) \right],$$

$$K_1 = 2\bar{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}).$$

3. Пусть в точке (x_i, x_{i-1}) выполняется неравенство

$$\bar{\varphi}_2(x_i, x_{i-1}) < \bar{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}).$$

Тогда

$$D\bar{\varphi}(x_i, x_{i-1}) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K_2 \left(\frac{\psi_2^*(t_i)}{\Delta t} - \frac{\partial c(F_2(x_i, t_i), \psi_2^*(t_i))}{\partial x_i} \right) \right], \quad K_2 = 2\bar{\varphi}_2(x_i, x_{i-1}).$$

Вычисляя градиент функции (5.20) и пользуясь формулой (5.18), теперь уже нетрудно выписать квазидифференциал функции $I(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} . При $n > 1$ вычисления проводятся аналогично.

З а м е ч а н и е 5. В задаче Коши функция (5.20) отсутствует, поэтому имеем задачу минимизации функции (5.18) специального вида. Такие функции часто называют аддитивными, и для них разработаны эффективные алгоритмы нахождения глобального минимума, например алгоритм “киевский веник” [22] или метод локальных вариаций [23], которые не накладывают на функцию требования дифференцируемости.

З а м е ч а н и е 6. Приведенные рассуждения, конечно, не претендуют еще на алгоритм решения задачи в рассматриваемом случае. Требуются обоснование проведенной дискретизации, применение к построенной конечномерной задаче методов негладкой оптимизации, оценка их эффективности и т. п. Однако эти исследования не являются целью настоящей статьи. Описан лишь общий подход к решению задачи в случае, когда правая часть дифференциального включения есть объединение выпуклых множеств.

Заключение

В данной статье описан метод решения дифференциальных включений (со свободным или закрепленным правым концом) с выпуклым непрерывным многозначным отображением, допускающим непрерывную производную опорной функции по фазовым координатам. Этот метод базируется на сведении исходной задачи к минимизации некоторого функционала в пространстве кусочно-непрерывных функций с дальнейшим применением к нему градиентного метода. Рассмотрены некоторые классы задач, которые не являются классическими с точки зрения теории управления (интервальные системы, системы с переменной по фазовым координатам областью управления, системы с суммой, пересечением или объединением выпуклых множеств в правой части), однако сводимые к дифференциальным включениям, удовлетворяющим названным требованиям и, следовательно, допускающим их исследование с помощью разрабатываемого в статье метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
2. **Watbled F.** On singular perturbations for differential inclusions on the infinite interval // J. Math. Anal. Appl. 2005. Vol. 310, no. 2. P. 362–378. doi: 10.1016/j.jmaa.2005.01.067.
3. **Gama R., Smirnov G.** Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method // Set-Valued and Variational Analysis. 2014. Vol. 22, no. 2. P. 349–374. doi: 10.1007/s11228-013-0261.
4. **Cheng Y.** Existence of solutions for a class of nonlinear evolution inclusions with nonlocal conditions // J. Optim. Theory Appl. 2014. Vol. 162, no. 1. P. 13–33. doi:10.1007/s10957-013-0446-x.
5. **Fominyh A.V.** A method for solving differential inclusions with fixed right end // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14, № 4. С. 302–315. doi: 10.21638/11702/spbu10.2018.403.
6. **Fominyh A.V.** A numerical method for finding the optimal solution of a differential inclusion // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2018. Vol. 51, no. 4. P. 397–406. doi: 10.3103/S1063454118040076.
7. **Sandberg M.** Convergence of the forward Euler method for nonconvex differential inclusions // SIAM J. Numer. Anal. 2008. Vol. 47, no. 1. P. 308–320. doi: 10.1137/070686093.
8. **Bastien J.** Convergence order of implicit Euler numerical scheme for maximal monotone differential inclusions // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2013. Vol. 64. P. 955–966. doi: 10.1007/s00033-012-0276-y.
9. **Bejn W-J., Rieger J.** The implicit Euler scheme for one-sided Lipschitz differential inclusions // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 2010. Vol. 14, no. 2. P. 409–428. doi: 10.3934/dcdsb.2010.14.409.
10. **Lempio F.** Modified Euler methods for differential inclusions // Set-Valued Analysis and Differential Inclusions / eds A.B. Kurzhanski, M. Veliov. (A Collection of Papers Resulting from A Workshop Held in Pamporovo, Bulgaria, September 17–21, 1990). Boston, Basel, Berlin, Birkhauser Verlag Publ., 1993. P. 131–148. (Progr. Systems Control Theory).
11. **Taubert K.** Dierenzenverfahren fiir Schwingungen mit trockener und zdher Reibung und fiir Regelungssysteme // Numerische Mathematik. 1976. No. 26. P. 379–395. doi: 10.1007/BF01409960.
12. **Veliov V.** Second order discrete approximations to strongly convex differential inclusions // Systems and Control Letters. 1989. Vol 13, no. 3. P. 263–269. doi: 10.1016/0167-6911(89)90073-X.
13. **Dontchev A., Lempio F.** Difference methods for differential inclusions: A surve // SIAM Review. 1992. Vol. 34, no. 2. P. 263–294. doi: 10.1137/1034050.
14. **Schilling K.** An algorithm to solve boundary value problems for differential inclusions and applications in optimal control // Numer. Funct. Anal. Optim. 1989. Vol. 10, no. 7. P. 733–764. doi: 10.1080/01630568908816328.
15. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 200. 239 с.
16. **Демьянов В.Ф.** Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
17. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
18. **Penot J.P.** On the convergence of descent algorithms // Comput. Optim. Appl. 2002. Vol. 23, no. 3. P. 279–284.
19. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 226 с.
20. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
21. **Полякова Л.Н.** Необходимые условия экстремума квазидифференцируемых функций // Вестн. Ленингр. ун-та. 1980. № 13. С. 57–62.
22. **Михалевич В.С.** Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение // Кибернетика. 1965. Т. 1, № 1. С. 44–55.
23. **Крылов И.А., Черноусько Ф.Л.** Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966 Т. 6, №1. С. 203–217.

Принята к публикации 3.02.2020

Фоминых Александр Владимирович,
канд. физ.-мат. наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург
e-mail: alexfomster@mail.ru

Карелин Владимир Витальевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург
e-mail: vlkarelin@mail.ru

Полякова Людмила Николаевна,
д-р физ.-мат. наук, профессор,
Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург
e-mail: lnpol07@mail.ru

REFERENCES

1. Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. Differential inclusions and optimal control. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1986, vol. 169, pp. 199–259.
2. Watbled F. On singular perturbations for differential inclusions on the infinite interval. *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, vol. 310, no. 2, pp. 362–378. doi: 10.1016/j.jmaa.2005.01.067.
3. Gama R., Smirnov G. Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2014, vol. 22, no. 2, pp. 349–374. doi: 10.1007/s11228-013-0261.
4. Cheng Y. Existence of solutions for a class of nonlinear evolution inclusions with nonlocal conditions. *J. Optim. Theory Appl.*, 2014, vol. 162, no. 1, pp. 13–33. doi: 10.1007/s10957-013-0446-x.
5. Fominyh A.V. A method for solving differential inclusions with fixed right end. *Vestn. St. Petersburg. Univ. Appl. Math. Comp. Sci. Contr. Proc.*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 302–315. doi: 10.21638/11702/spbu10.2018.403.
6. Fominyh A.V. A numerical method for finding the optimal solution of a differential inclusion. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2018, vol. 51, no. 4, pp. 397–406. doi: 10.3103/S1063454118040076.
7. Sandberg M. Convergence of the forward Euler method for nonconvex differential inclusions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2008, vol. 47, no. 1, pp. 308–320. doi: 10.1137/070686093.
8. Bastien J. Convergence order of implicit Euler numerical scheme for maximal monotone differential inclusions. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2013, vol. 64, no. 4, pp. 955–966. doi: 10.1007/s00033-012-0276-y.
9. Beyn W.-J., Rieger J. The implicit Euler scheme for one-sided Lipschitz differential inclusions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, 2010, vol. 14, no. 2, pp. 409–428. doi: 10.3934/dcdsb.2010.14.409.
10. Lempio F. Modified Euler methods for differential inclusions. “*Set-Valued Analysis and Differential Inclusions*”. A Collection of Papers Resulting from A Workshop Held in Pamporovo, Bulgaria, September 17–21, eds. by A. B. Kurzhanski, M. Veliov, 1990, pp. 131–148. Ser. Progr. Systems Control Theory. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser Verlag Publ., 1993.
11. Taubert K. Dierenzenverfahren fiir Schwingungen mit trockener und zdher Reibung und fiir Regelungssysteme. *Numerische Mathematik*, 1976, no. 26, pp. 379–395. doi: 10.1007/BF01409960.
12. Veliov V. Second order discrete approximations to strongly convex differential inclusions. *Systems and Control Letters*, 1989, vol 13, no. 3, pp. 263–269. doi: 10.1016/0167-6911(89)90073-X.
13. Dontchev A., Lempio F. Difference methods for differential inclusions: A Survey. *SIAM Review*, 1992, vol. 34, no 2, pp. 263–294. doi: 10.1137/1034050.
14. Schilling K. An algorithm to solve boundary value problems for differential inclusions and applications in optimal control. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 1989, vol. 10, no. 7, pp. 733–764. doi: 10.1080/01630568908816328.

15. Blagodatskih V.I. *Vvedenie v optimalnoe upravleniye* [Introduction to optimal control]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 2001, 239 p.
16. Demyanov V.F. *Usloviya ehkstremita i variatsionnoe ischislenie* [Extremum conditions and variation calculus]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 2005, 335 p.
17. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional analysis*. Oxford: Pergamon Press, 1982, 604 p. ISBN: 9781483138251. Original Russian text published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz*. Moscow: Nauka Publ., 1977, 741 p.
18. Penot J.P. On the convergence of descent algorithms. *Comput. Optim. Appl.*, 2002, vol. 23, no. 3, pp. 279–284. doi: 10.1023/A:1020570126636.
19. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoii chast'yu* [Differential equations with discontinuous right-hand side]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 226 p.
20. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. *Foundations of Nonsmooth Analysis and Quasi-Differential Calculus* [Osnovy nekladkogo analiza i kvazidifferentsial'noe ischislenie]. Moscow: Nauka Publ., 1990, 432 p. ISBN: 5-02-014241-7.
21. Polyakova L.N. Necessary conditions for an extremum of quasi-differentiable functions. *Vestnik Leningrad Univer. Math.*, 1981, no. 13, pp. 241–247.
22. Mikhalevich V.C. Consecutive optimization algorithms and their application. I. *Kibernetika*, 1965, vol. 1, no. 1, pp. 44–55 (in Russian).
23. Krylov I.A., Chernous'ko F.L. Solution of the problems of optimal control by the method of local variations. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1966, vol. 6, no. 2, pp. 12–31. doi: 10.1016/0041-5553(66)90055-3.

Received Dezember 23, 2019

Revised January 31, 2020

Accepted February 3, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Found (project no. 18-71-00006).

Alexander Vladimirovich Fominyh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: alexfomster@mail.ru.

Vladimir Vital'evich Karelin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: vlkarelin@mail.ru.

Lyudmila Nickolaevna Polyakova, Dr. Phys.-Math. Sci., St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russia, e-mail: lnpol07@mail.ru.

Cite this article as: A. V. Fominyh, V. V. Karelin, L. N. Polyakova. Gradient method for solving some types of differential inclusions, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 256–273.

УДК 519.6

УЛЬТРАФИЛЬТРЫ И МАКСИМАЛЬНЫЕ СЦЕПЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ¹**А. Г. Ченцов**

Исследуется структура ультрафильтров ($у/ф$) широко понимаемого измеримого пространства (ИП), а также максимальных сцепленных систем (МСС), определяемых на данном ИП. Рассматриваются битопологические пространства (БТП) $у/ф$ и МСС, получаемые в обоих случаях посредством оснащения топологиями волмэнновского и стоуновского типов; БТП $у/ф$ может рассматриваться как подпространство БТП, точками которого являются МСС. Для абстрактной задачи о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ) $у/ф$ могут использоваться в качестве обобщенных элементов в конструкциях расширений; для последних указана новая реализация, касающаяся применения при построении ОАХ сцепленных семейств подмножеств пространства обычных решений. Анализируется естественное обобщение обычной “сцепленности”, когда постулируется непустота пересечения множеств подсемейств исходного семейства, определяющего ИП, с мощностью, не превышающей заданное натуральное число. Для этого случая устанавливаются соотношения, связывающие $у/ф$ и МСС, понимаемые в упомянутом обобщенном смысле.

Ключевые слова: битопологическое пространство, максимальная сцепленная система, топология, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. Ultrafilters and maximal linked systems.

The structure of ultrafilters of a broadly understood measurable space and of maximal linked systems defined on this space is studied. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked spaces obtained in both cases by equipping the space with topologies of Wallman and Stone types are considered; the bitopological space of ultrafilters can be considered as a subspace of the bitopological space whose points are maximal linked systems. For an abstract attainability problem with constraints of asymptotic nature, ultrafilters can be used as generalized elements in extension constructions; for the latter case, we present a new implementation that involves the application of linked families of subsets of the set of ordinary solutions in the construction of constraints of asymptotic nature. A natural generalization of the usual “linkedness” is considered, when it is postulated that the intersection of sets of subfamilies of the original family defining the measurable space of cardinality not exceeding a given positive integer is nonempty. For this case, we establish relations connecting ultrafilters and maximal linked systems considered in the specified generalized sense.

Keywords: bitopological space, maximal linked system, topology, ultrafilter.

Настоящий выпуск посвящен Александру Борисовичу Куржанскому, исследования которого в области теории управления получили широкое признание и оказали глубокое влияние на развитие упомянутой теории и ее приложений. Александр Борисович многое сделал для развития Института, которым руководил продолжительное время, и Университета, для становления математической науки и образования на Урале.

MSC: 54A09, 54A10, 54B05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-274-292

Введение

Рассматриваются элементы конструкций расширений абстрактных задач о достижимости, реализуемые в классе ультрафильтров ($у/ф$) широко понимаемых измеримых пространств (ИП), а также свойства, связывающие $у/ф$ и максимальные сцепленные системы (МСС). Сами ИП определяются как непустые множества с оснащением в виде π -систем [1, с. 14] их подмножеств ($\pi/м$) с “нулем” и “единицей”. Для каждой такой π -системы определяется пара сравнимых топологий (на множестве $у/ф$), связываемых на идейном уровне со схемами

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00410).

Волмэна и Стоуна (каждая из упомянутых схем реализовывалась, конечно, ранее в специальных случаях π -систем упомянутого типа; будем для краткости именовать эти топологии далее волмэновской и стоуновской). Реализуется битопологическое пространство (БТП), точками которого являются u/ϕ (в связи с теорией и применениями БТП см. монографию [2]). При одном естественном условии отделимости π -системы точки исходного ИП порождают так называемые тривиальные u/ϕ ; тем самым осуществляется погружение исходного множества в БТП u/ϕ . При этом слабейшая из топологий данного БТП — топология волмэновского типа — превращает множество u/ϕ в компактное T_1 -пространство (по поводу T_1 - и T_2 -отделимости см. [3, разд. 1.3]). Важно отметить, что (при вышеупомянутом условии отделимости π -системы) погружение исходного множества реализует π/μ множества всех u/ϕ данной π -системы, всюду плотное в смысле обеих топологий, участвующих в построении данного БТП (см. [4]). Это свойство позволяет рассматривать u/ϕ отделимой π -системы как обобщенные элементы (ОЭ) по отношению к точкам исходного множества. Данная возможность оказалась полезной в абстрактных задачах о достижимости в топологических пространствах (ТП) при ограничениях асимптотического характера (ОАХ) (см. [5–7] и др.). Существенно и то обстоятельство, что, в отличие от u/ϕ семейства всех π/μ (бесконечного) множества, широко используемых в общей топологии (см. [8]), u/ϕ так определяемых (широко понимаемых) ИП в целом ряде практически интересных случаев допускают исчерпывающее описание (см. [9; 10]). Это обстоятельство позволяет применять u/ϕ в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости с ОАХ и, в ряде случаев (см. [11; 12]) получать ощутимое продвижение в их исследовании (заметим, что в [11; 12] роль u/ϕ оказалась весьма существенной в вопросах, связанных с описанием специального класса конечно-аддитивных мер, используемых (в [11; 12]) в качестве ОЭ).

Упомянутые обстоятельства мотивируют специальное исследование самих u/ϕ (см. в этой связи [13; 14] и др.). В частности, определенный интерес представляет “внешнее” описание БТП с точками в виде u/ϕ , а точнее, рассмотрение данного БТП как своеобразного подпространства некоторого объемлющего БТП. Такое объемлющее БТП было указано в [15; 16]. Его точками являются максимальные сцепленные системы (МСС) исходной π -системы (точнее, максимальные сцепленные подсемейства данной π -системы), а топологии (на множестве МСС) соответствуют идейно схемам Волмэна и Стоуна. Подход [15; 16] является (по сути) обобщением конструкции суперрасширения [17, гл. VII, §4] и связан с реализацией важного свойства суперкомпактности (см. [18–20] и др.; систематическое изложение см. в [17, гл. VII, §4]). При построении суперрасширения исходного ТП использовалась (см. [17–20]) топология волмэновского типа. В [21] было реализовано представление суперрасширения в виде БТП, а построения [15; 16] можно рассматривать как естественное развитие конструкций [21]. Так или иначе посредством этих построений реализуется “внешнее” описание БТП с точками в виде u/ϕ .

Свойство суперкомпактности, которым обладает пространство МСС с волмэновской топологией, не является (см. [22, разд. 5.11]) наследственным, а потому его распространение на пространство u/ϕ (каждый u/ϕ является МСС) вызывает определенные затруднения. Тем не менее для некоторых типов π -систем это оказывается (см. [4]) возможным (заметим, что всякое суперкомпактное ТП компактно). Дальнейшее развитие конструкций [4] дано в [23], где указаны классы широко понимаемых ИП, для которых пространство u/ϕ образует суперкомпакт, т. е. суперкомпактное T_2 -пространство. В этих случаях мы получаем новое топологическое свойство пространства u/ϕ .

В настоящем исследовании мы обращаемся к подходу, предусматривающему применение u/ϕ в качестве ОЭ, т. е. к построению расширений в классе u/ϕ .

1. Определения и обозначения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); \emptyset — пустое множество, $\overset{\Delta}{=} — равенство по определению. Семейством называем всякое множе-$

ство, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Для любых двух объектов x и y через $\{x; y\}$ обозначаем (единственное) множество, содержащее в качестве своих элементов x , y и не содержащее никаких других элементов. Если z — произвольный объект, то $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ есть синглетон, содержащий z , т. е. $z \in \{z\}$. Если же u и v — объекты, то (см. [24, с. 67]) $(u, v) \triangleq \{\{u\}; \{u; v\}\}$ есть упорядоченная пара (УП) с первым элементом u и вторым элементом v . Для любой УП h через $pr_1(h)$ и $pr_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h , однозначно определяемые условием $h = (pr_1(h), pr_2(h))$. Для любых трех объектов u , v и w полагаем, что $\{u; v; w\} \triangleq \{u; v\} \cup \{w\}$. Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}'(X)$ обозначаем соответственно семейства всех и всех непустых подмножеств (п/м) X , $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$; под $\text{Fin}(X)$ понимаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м X .

Если A и B — множества, то через B^A обозначаем (см. [24, гл. II, §6]) множество всех отображений из A в B ; выражения $f \in B^A$ и $f: A \rightarrow B$ тождественны (как обычно, при $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем значение f в точке a). Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x): x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии f ; прообразы п/м B далее обозначаются традиционно.

Если \mathbb{M} — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то $\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M: M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ есть семейство, двойственное к \mathcal{M} . Кроме того, каждому непустому семейству \mathcal{A} и множеству B сопоставляется след $\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B: A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$ семейства \mathcal{A} на B . Для произвольного непустого семейства \mathfrak{X} используем семейства $\{\cup\}(\mathfrak{X})$, $\{\cap\}(\mathfrak{X})$, $\{\cup\}_{\#}(\mathfrak{X})$ и $\{\cap\}_{\#}(\mathfrak{X})$, определяемые в [16, разд. 2] (семейства всех объединений подсемейств \mathfrak{X} , всех пересечений непустых подсемейств \mathfrak{X} , конечных объединений и конечных пересечений множеств из \mathfrak{X}).

Как обычно, \mathbb{R} — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$; $\overline{1, n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ при $n \in \mathbb{N}$. Полагаем, что натуральные числа — элементы \mathbb{N} — не являются множествами, и для всяких множества H и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1, n}}$ используем более традиционное H^n (что, с учетом вышеупомянутой оговорки в отношении \mathbb{N} , не приводит к двусмысленности), получая множество всех кортежей $(h_i)_{i \in \overline{1, n}}$, $h_j \in H \ \forall j \in \overline{1, n}$.

Специальные семейства; π -системы и их частные случаи. До конца настоящего раздела фиксируем непустое множество \mathbf{I} и полагаем, что

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\emptyset \in \mathcal{I}) \& (\mathbf{I} \in \mathcal{I}) \& (A \cap B \in \mathcal{I} \ \forall A \in \mathcal{I} \ \forall B \in \mathcal{I})\}; \quad (1.1)$$

(1.1) есть семейство всех π -систем п/м \mathbf{I} с “нулем” и “единицей”. Отметим некоторые подсемейства (1.1):

$$\begin{aligned} \pi_{*}^{\#}[\mathbf{I}] &\triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L_1 \in \mathcal{L} \ \forall L_2 \in \mathcal{L} \ \forall L_3 \in \mathcal{L} \ ((L_1 \cap L_2 \neq \emptyset) \& (L_2 \cap L_3 \neq \emptyset) \& (L_1 \cap L_3 \neq \emptyset)) \\ &\implies (L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset)\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\pi^0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{L} \ \forall x \in \mathbf{I} \setminus L \ \exists \in \mathcal{L}: (x \in \) \& (\cap L = \emptyset)\} \quad (1.3)$$

(в (1.3) определено семейство всех отделимых π -систем; π -системы из семейства (1.2) играют (см. [23]) важную роль в вопросах, связанных с суперкомпактностью пространств u/ϕ). При $\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}]$, $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$n(A, \mathcal{L}) \triangleq \left\{ (L_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathcal{L}^n \mid \left(A = \bigcup_{i=1}^n L_i \right) \& (L_p \cap L_q = \emptyset \ \forall p \in \overline{1, n} \ \forall q \in \overline{1, n} \setminus \{p\}) \right\} \quad (1.4)$$

(элементы (1.4) — упорядоченные конечные разбиения A множествами из \mathcal{L}). В виде

$$[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{L} \ \exists n \in \mathbb{N}: \ n_n(\mathbf{I} \setminus L, \mathcal{L}) \neq \emptyset\} \in \mathcal{P}'(\pi[\mathbf{I}]) \quad (1.5)$$

имеем семейство всех полуалгебр (см. [25, гл. I]) п/м \mathbf{I} . Полагаем также $\#[\mathbf{I}] \triangleq [\mathbf{I}] \cap \pi_*[\mathbf{I}]$. В виде

$$(\text{LAT})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid A \cup B \in \mathcal{I} \ \forall A \in \mathcal{I} \ \forall B \in \mathcal{I}\} \quad (1.6)$$

имеем семейство всех решеток п/м \mathbf{I} с “нулем” и “единицей” (сами же π -системы являются в силу (1.1) полурешетками п/м \mathbf{I}). Ясно, что

$$(\text{alg})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A} \ \forall A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'((\text{LAT})_0[\mathbf{I}]), \quad (1.7)$$

$$(\text{top})[\mathbf{I}] \triangleq \left\{ \tau \in \pi[\mathbf{I}] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau) \right\} \in \mathcal{P}'((\text{LAT})_0[\mathbf{I}]), \quad (1.8)$$

$$(\text{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathbf{C}_I[\tau] : \tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]\} \in \mathcal{P}'((\text{LAT})_0[\mathbf{I}]). \quad (1.9)$$

Итак, введены соответственно семейства, элементами которых являются алгебры п/м \mathbf{I} , топологии на \mathbf{I} и семейства замкнутых множеств, отвечающих топологиям на \mathbf{I} . Заметим, что (1.2), (1.3), (1.5)–(1.9) определяют подсемейства (1.1). Таким образом, π -системы определяют очень общий класс семейств п/м \mathbf{I} , объединяющий многие конкретные и широко используемые варианты подсемейств $\mathcal{P}(\mathbf{I})$. При этом полуалгебры п/м \mathbf{I} не являются, вообще говоря, решетками п/м \mathbf{I} , но являются (см. (1.5)) π -системами.

Базы и предбазы топологий. Если $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то в виде

$$(\text{COV})[\mathbf{I} \mid \mathcal{J}] \triangleq \left\{ \mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}) \mid \mathbf{I} = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I \right\}$$

имеем семейство всех покрытий \mathbf{I} множествами из \mathcal{J} .

Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]$ и $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$, то через $\text{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание множества A в ТП (\mathbf{I}, τ) . В дальнейшем $(\text{BAS})[\mathbf{I}]$, $(\text{cl} - \text{BAS})[\mathbf{I}]$, $(\text{p} - \text{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\text{p} - \text{BAS})_{\text{cl}}[\mathbf{I}]$ понимаются в смысле [23, разд. 2] (семейства открытых и замкнутых баз и предбаз; имеются в виду базы и предбазы, порождающие каждая некоторую открытую или замкнутую (см. [26, с. 98]) топологию на \mathbf{I}). При этом, конечно, $(\{\cup\}(\mathcal{B}) \in (\text{top})[\mathbf{I}] \ \forall \mathcal{B} \in (\text{BAS})[\mathbf{I}]) \& (\{\cap\}(\mathcal{B}) \in (\text{clos})[\mathbf{I}] \ \forall \mathcal{B} \in (\text{cl} - \text{BAS})[\mathbf{I}])$. Если $\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]$, то $(\tau - \text{BAS})_0[\mathbf{I}]$, $(\text{cl} - \text{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$, $(\text{p} - \text{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$ и $(\text{p} - \text{BAS})_{\text{cl}}^0[\mathbf{I}; \tau]$ также понимаются далее в смысле [23, разд. 2] (семейства открытых и замкнутых баз и предбаз конкретного ТП (\mathbf{I}, τ)). Следуя [23, (2.15)], введем семейство $((\text{SC}) - \text{p} - \text{BAS})[\mathbf{I}]$ всех суперкомпактных открытых предбаз топологий на \mathbf{I} . Если же $\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]$, то $((\text{SC}) - \text{p} - \text{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$ понимается в смысле [23, (2.16)]: $((\text{SC}) - \text{p} - \text{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] = ((\text{SC}) - \text{p} - \text{BAS})[\mathbf{I}] \cap (\text{p} - \text{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$. Тогда (см. [23, (2.14), (2.17)]) в виде

$$((\text{SC}) - \text{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}] \mid ((\text{SC}) - \text{p} - \text{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \neq \emptyset\}$$

получаем семейство всех топологий на \mathbf{I} , превращающих \mathbf{I} в суперкомпактное ТП (см. [17, гл. VII, §4; 18]). Суперкомпактные T_2 -пространства именуются суперкомпактами (см. [22, с. 64]). Если $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то

$$(\text{Cen})[\mathcal{J}] \triangleq \left\{ \mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}) \mid \bigcap_{C \in \mathcal{K}} C \neq \emptyset \ \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{C}) \right\}. \quad (1.10)$$

Центрированные семейства, базы фильтров. В настоящем пункте фиксируем $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$, имея в виде $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$ широко понимаемое ИП. Полагаем далее, что

$$\beta^0[\mathcal{I}] \triangleq \left\{ \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid (\emptyset \notin \mathcal{J}) \& (\forall J_1 \in \mathcal{J} \ \forall J_2 \in \mathcal{J} \ \exists J_3 \in \mathcal{J} : J_3 \subset J_1 \cap J_2) \right\}, \quad (1.11)$$

получая семейство всех баз фильтров (БФ) ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$. Кроме того, согласно (1.10)

$$(\text{Cen})[\mathcal{I}] = \left\{ \mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \emptyset \ \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{Z}) \right\}; \quad (1.12)$$

в (1.12) имеем семейство всех центрированных подсемейств π -системы \mathcal{I} . Из (1.11) и (1.12) легко следует, что

$$\beta^0[\mathcal{I}] \subset (\text{Cen})[\mathcal{I}]. \quad (1.13)$$

В свою очередь (1.13) дополняется очевидным свойством

$$\{\cap\}_\#(\mathcal{Z}) \in \beta^0[\mathcal{I}] \quad \forall \mathcal{Z} \in (\text{Cen})[\mathcal{I}]. \quad (1.14)$$

Свойства (1.11)–(1.14) будут дополнены положениями, касающимися сцепленности.

2. Сцепленные семейства

Фиксируем в дальнейшем непустое множество E , обозначая через $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ семейство всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(E)$. Фиксируем до конца настоящего раздела $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, получая непустое семейство п/м E . В качестве

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \triangleq \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{E}_1 \in \mathcal{E} \quad \forall \mathcal{E}_2 \in \mathcal{E}\} \quad (2.1)$$

имеем семейство всех сцепленных подсемейств \mathcal{L} . Известное (см. [17–20; 22]) свойство сцепленности отражено в (2.1). Тогда

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \mid \forall S \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \quad (\mathcal{E} \subset S) \Rightarrow (\mathcal{E} = S)\} \quad (2.2)$$

есть семейство всех максимальных сцепленных подсемейств \mathcal{L} или всех максимальных сцепленных систем (МСС) в \mathcal{L} . Из (2.1), (2.2) легко следует, что

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \mid \forall L \in \mathcal{L} \quad (L \cap \mathcal{E} \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{E}) \Rightarrow (L \in \mathcal{E})\}. \quad (2.3)$$

Предложение 2.1. *Каждое сцепленное подсемейство \mathcal{L} мажорируется некоторой МСС в \mathcal{L} , т. е. $\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \quad \exists S \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] : \mathcal{E} \subset S$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$ и

$$\mathcal{E} \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{E}\}. \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что $\mathcal{E} \neq \emptyset$, так как $\mathcal{E} \in \mathcal{E}$. Под $\sqsubseteq \triangleq \{z \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid pr_1(z) \subset pr_2(z)\}$ понимаем обычную упорядоченность по включению: $(\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}) \iff (\mathcal{A} \subset \mathcal{B})$ при $\mathcal{A} \in \mathcal{X}$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{Y}$.

В виде $(\sqsubseteq - \text{MAX})[\] \triangleq \{\mathcal{X} \in \mathcal{X} \mid \forall \mathcal{Y} \in \mathcal{Y} \quad (\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}) \Rightarrow (\mathcal{X} = \mathcal{Y})\}$ имеем множество всех \sqsubseteq -максимальных элементов \mathcal{X} . Пусть \mathfrak{L} — непустое линейно упорядоченное (в смысле $(\ , \sqsubseteq)$) подсемейство \mathcal{X} , а \mathfrak{Y} есть объединение всех семейств из \mathfrak{L} ; ясно, что $\mathfrak{Y} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. С учетом линейной упорядоченности \mathfrak{L} и (2.4) устанавливается сцепленность \mathfrak{Y} , а точнее, свойство $\mathfrak{Y} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$. Как следствие $\mathfrak{Y} \in \mathcal{E}$; более того, \mathfrak{Y} есть мажоранта \mathfrak{L} в смысле $(\ , \sqsubseteq)$. Поскольку \mathfrak{L} выбиралось произвольно, установлено, что каждое линейно упорядоченное подсемейство обладает мажорантой и по лемме Цорна $(\sqsubseteq - \text{MAX})[\] \neq \emptyset$. Пусть $\mathcal{W} \in (\sqsubseteq - \text{MAX})[\]$. В частности, $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$ (см. (2.4)). Пусть $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$ таково, что $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{E} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{M}$, то $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$ (см. (2.4)) и, как следствие максимальнойности \mathcal{W} , имеем равенство $\mathcal{W} = \mathcal{M}$. Поскольку выбор \mathcal{M} был произвольным, $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] : \mathcal{E} \subset \mathcal{W}$. \square

Заметим, что $\{L\} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \quad \forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$. Тогда из предложения 2.1 следует, что $(\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \neq \emptyset) \implies (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \neq \emptyset)$. Отметим, что в качестве \mathcal{L} может использоваться π -система п/м E . Данный случай представляется наиболее интересным, и мы его рассмотрим специально в связи с фильтрами и у/ф.

3. Фильтры и ультрафильтры π -систем

В пределах настоящего раздела фиксируем π -систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$, где $E \neq \emptyset$. Отметим одно очевидное свойство, привлекая определения двух предыдущих разделов. Итак, $\beta^0[\mathcal{L}] \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$; следовательно, БФ сцеплены. Данное свойство дополняет (1.14). В виде

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq & \{ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\emptyset \notin \mathcal{F}) \& (A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F}) \\ & \& (\forall F \in \mathcal{F} \ \forall L \in \mathcal{L} \ (F \subset L) \implies (L \in \mathcal{F})) \} \end{aligned} \quad (3.1)$$

имеем семейство всех фильтров (широко понимаемого) ИП (E, \mathcal{L}) . Ясно, что $\{L \in \mathcal{L} \mid \exists B \in \mathcal{B}: B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ при $\mathcal{B} \in \beta^0[\mathcal{L}]$ (стандартная операция с применением БФ). Далее,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \triangleq & \{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \implies (\mathcal{U} = \mathcal{F}) \} \\ = & \{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \ (L \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \ \forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}) \implies (L \in \mathcal{U}) \} \\ = & \{ \mathcal{U} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \mathcal{U} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}] \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{U}) \implies (\mathcal{U} = \mathcal{U}) \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

есть семейство всех у/ф ИП (E, \mathcal{L}) . Из (3.2) видно, что данные у/ф суть максимальные центрированные подсемейства \mathcal{L} — и только они. Подобно предложению 2.1 проверяется, что

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \quad \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}): \mathcal{F} \subset \mathcal{U}. \quad (3.3)$$

Вместе с тем $(\mathcal{L} - \text{triv})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \forall x \in E$. В этом случае (см. (3.3)) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ и

$$((\mathcal{L} - \text{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall x \in E) \iff (\mathcal{L} \in \pi^0[E]) \quad (3.4)$$

(см. [27, (5.9)]). В (3.4) указаны необходимые и достаточные условия максимальности тривиальных фильтров. Напомним, что (см. [16, разд. 3]) $\mathcal{L}(L) \triangleq \{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U} \}$ при $L \in \mathcal{L}$. Тогда

$$(\text{UF})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{ \mathcal{L}(L): L \in \mathcal{L} \} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$$

и, в частности, $(\text{UF})[E; \mathcal{L}] \in (\text{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. Топология (стоуновского типа)

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \triangleq \{ \cup \} ((\text{UF})[E; \mathcal{L}]) \in (\text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \quad (3.5)$$

превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в нульмерное (см. [3, разд. 6.2]) T_2 -пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \quad (3.6)$$

(если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то (3.6) — нульмерный компакт, т. е. нульмерное компактное T_2 -пространство), в котором все множества из $(\text{UF})[E; \mathcal{L}]$ открыто-замкнуты (см. [16, (3.3)]). Другая схема оснащения $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ связана с множествами

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H] \triangleq \{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists U \in \mathcal{U}: U \subset H \} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E).$$

При этом, как легко видеть (см. [16, (3.3)]),

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \triangleq \{ \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \]: \ \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}] \} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\text{UF})[E; \mathcal{L}]] \in (\text{cl} - \text{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]].$$

С другой стороны, $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \in (\text{p} - \text{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ (см. [23, (3.9)]) определяет следующую топологию волмэновского типа:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E] \triangleq \{ \cup \} (\{ \cap \}_{\#}(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L}])) \in (\text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \quad (3.7)$$

Топология (3.7) превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в компактное T_1 -пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle). \quad (3.8)$$

Топологии (3.5) и (3.7) сравнимы (см. [16, разд. 7]): $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*\langle E \rangle$. В виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*\langle E \rangle) \quad (3.9)$$

имеем БТП (в связи с исследованием БТП отметим монографию [2]). В [4; 15; 16] указаны конкретные условия на \mathcal{L} , при которых БТП (3.9) является вырожденным (когда топологии (3.5), (3.7) совпадают) и, напротив, невырожденным. Однако и в весьма общем случае $\mathcal{L} \in \pi^0[E]$ оказывается (см. [4, предложение 7.1]), что ТП (3.6) и (3.8) в определенном смысле “близки”. Данная “близость” касается вопросов, связанных с погружением E в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Обратимся к упомянутым положениям работы [4], полагая до конца настоящего раздела, что $\mathcal{L} \in \pi^0[\mathcal{L}]$, и учитывая (3.4): в нашем случае $(\mathcal{L} - \text{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \quad \forall x \in E$. Тогда согласно [4, предложение 7.1]

$$\begin{aligned} & \text{cl}(\{(\mathcal{L} - \text{triv})[x] : x \in L\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle) \\ &= \text{cl}(\{(\mathcal{L} - \text{triv})[x] : x \in L\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*\langle E \rangle) = \quad \mathcal{L}(L) \quad \forall L \in \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.10) вытекает тот факт, что E погружается в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в виде множества, всюду плотного как в ТП (3.6), так и в смысле ТП (3.8). Грубо говоря, имеем “плотное погружение” в смысле БТП (3.9). Заметим, что в [4, теорема 7.1] указано применение (3.10) для построения ОЭ, допустимых в смысле соблюдения ОАХ в абстрактной задаче о достижимости. При $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathcal{L}(\Sigma). \quad (3.11)$$

Множество (3.11) используется ниже при построении расширений в классе у/ф; последние играют роль ОЭ в абстрактной задаче о достижимости.

4. Сцепленность и свойство суперкомпактности

В отношении E и \mathcal{L} сохраняем предположения разд. 3 ($E \neq \emptyset$ и $\mathcal{L} \in \pi[E]$). При этих условиях используем (2.1)–(2.3), учитывая свойство [23, (4.2)]:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \mid A \cap B \in \mathcal{U} \quad \forall A \in \mathcal{U} \quad \forall B \in \mathcal{U}\}. \quad (4.1)$$

Заметим, что (см. (3.3), (3.4), (4.1)) $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \neq \emptyset$. Следуя [23, (4.3)], полагаем, что

$$\begin{aligned} & (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0^0[E|L] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \mid L \in \mathcal{E}\} \quad \forall L \in \mathcal{L}) \\ & \& (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_{\text{op}}^0[E|H] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \mid \exists \mathcal{H} \in \mathcal{P}(E) : \mathcal{E} \subset \mathcal{H}\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

С использованием множеств (4.2) конструируются (см. [16, (4.9)]) непустые семейства $\mathfrak{C}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}]$ и $\mathfrak{C}_0^*[E; \mathcal{L}]$ п/м $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$; данные семейства находятся в двойственности (см. [16, (4.10)]). При этом (см. [16, разд. 4]) $\mathfrak{C}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}] \in (\text{p} - \text{BAS})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]]$ порождает суперкомпактную (см. [23, (4.6)]) топологию

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\#}(\mathfrak{C}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}])) \in ((\text{SC}) - \text{top})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]] \quad (4.3)$$

волмэнковского типа, причем (см. [23, (4.7)])

$$\mathfrak{C}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}] \in ((\text{SC}) - \text{p} - \text{BAS})_0[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]; \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle] \quad (4.4)$$

(в связи с (4.3), (4.4) см. разд. 1). Относительно $\mathfrak{C}_0^*[E; \mathcal{L}]$ напомним [16, предложение 5.1]. В виде

$$\langle \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]; \mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle \rangle \quad (4.5)$$

имеем (см. [23, разд. 4]) суперкомпактное T_1 -пространство, для которого (3.8) является подпространством, так как (см. (4.3), (4.5), [23, (4.10)])

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0 \langle E \rangle = \mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle |_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \quad (4.6)$$

Кроме того (см. [16, разд. 6]), $\mathfrak{C}_0^*[E; \mathcal{L}] \in (\text{p-BAS})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]]$, а топология

$$\mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\#}(\mathfrak{C}_0^*[E; \mathcal{L}])) \in \text{top}[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]]$$

превращает (см. [16, предложения 6.4]) $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$ в нульмерное T_2 -пространство

$$\langle \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle \rangle; \quad (4.7)$$

ТП (3.6) является подпространством (4.7), поскольку (см. [23, (4.12)])

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle |_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \quad (4.8)$$

Наконец (см. [16, предложения 7.1]) имеем $\mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle \subset \mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle$, а тогда триплет

$$\langle \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle, \mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle \rangle \quad (4.9)$$

есть БТП. В силу (4.6), (4.8) БТП (3.9) можно рассматривать как подпространство (4.9).

До конца настоящего раздела полагаем, если не оговорено противное, что $\mathcal{L} \in \pi_{*}^{\#}[E]$. Тогда согласно [23, (5.3)]

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]. \quad (4.10)$$

В этом случае (см. (4.6), (4.8), (4.10)) имеем совпадение БТП (3.9) и (4.9), так как

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0 \langle E \rangle = \mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle) \& (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle). \quad (4.11)$$

З а м е ч а н и е. В [23] указаны содержательные примеры реализации свойства $\mathcal{L} \in \pi_{*}^{\#}[E]$. В частности, при их построении могут использоваться конструкции на основе декартовых произведений. Характерные случаи реализации (4.10), (4.11) касаются при этом ситуации, когда \mathcal{L} есть полуалгебра множеств.

Предложение 4.1. *Справедливо равенство $(\text{Cen})[\mathcal{L}] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$. Тогда в силу предложения 2.1 имеем для некоторой МСС $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$ свойство $\mathcal{M} \subset \mathcal{U}$. С учетом (4.10) можно утверждать, что $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, в том числе, $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Согласно (3.1) получаем рассуждением по индукции, что

$$\bigcap_{k=1}^m U_k \in \mathcal{U} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall (U_k)_{k \in \overline{1, m}} \in \mathcal{U}^m.$$

В частности, при $n \in \mathbb{N}$ и $(M_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathcal{M}^n$ пересечение всех множеств M_i , $i \in \overline{1, n}$, содержится в \mathcal{U} , а потому (см. (3.1)) непусто. Поскольку $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ в силу (2.1), имеем, что $\mathcal{M} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}]$ (см. (2.13)). Итак, $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \subset (\text{Cen})[\mathcal{L}]$. Противоположное вложение очевидно (см. (1.12), (2.1)). \square

Предложение 4.2. *Если $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$, то $\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathcal{L}(\Sigma) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle [E]$, получая вследствие предложения 4.1 свойство $\mathcal{E} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}]$. Рассмотрим семейство $\mathfrak{N} \triangleq \{ \mathcal{L}(\cdot) : \cdot \in \mathcal{E} \} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})))$. Легко видеть, что $\mathfrak{N} \in \langle (\text{UF})[E; \mathcal{L}] - \text{link} \rangle [\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. Учтем (4.10), (4.11). При этом (см. [16, (6.6)]) в нашем случае $(\text{UF})[E; \mathcal{L}] = \mathfrak{C}_0^*[E; \mathcal{L}]$. Теперь используем [16, предложение 5.1]: исходя из сцепленности \mathfrak{N} и [16, (5.1)] получаем, что пересечение всех множеств из \mathfrak{N} непусто, откуда и вытекает требуемое утверждение. \square

Предложение 4.3. Вернемся к общему случаю $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Эквивалентны следующие условия: 1) $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$; 2) $(\text{Cen})[\mathcal{L}] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle [E]$.

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2) следует из предложения 4.1. Пусть истинно 2), т.е. $(\text{Cen})[\mathcal{L}]$ и $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle [E]$ совпадают. Выберем произвольно $L_1 \in \mathcal{L}$, $L_2 \in \mathcal{L}$ и $L_3 \in \mathcal{L}$ со свойствами $(L_1 \cap L_2 \neq \emptyset) \& (L_2 \cap L_3 \neq \emptyset) \& (L_1 \cap L_3 \neq \emptyset)$. Тогда $\mathfrak{L} \triangleq \{L_1; L_2; L_3\} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle [E]$, а потому $\mathfrak{L} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}]$ и, следовательно $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$. Получили свойство истинности требуемой импликации

$$((L_1 \cap L_2 \neq \emptyset) \& (L_2 \cap L_3 \neq \emptyset) \& (L_1 \cap L_3 \neq \emptyset)) \Rightarrow (L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset).$$

Поскольку выбор L_1, L_2, L_3 был произвольным, имеем в силу (1.2) свойство $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$. Итак, 2) \Rightarrow 1). \square

5. Связь с конструкциями расширений

В настоящем разделе рассмотрим некоторые применения (3.10), фиксируя $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Итак, пусть (E, \mathcal{L}) есть ИП с полуалгеброй множеств. Тогда (см. [28, разд. 4]) ТП (3.6) — это непустой нульмерный компакт со свойством (3.10).

Пусть (\mathbf{H}, τ) , $\mathbf{H} \neq \emptyset$, является T_2 -пространством (фиксированным в настоящем разделе) и $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^E$. Рассматриваем \mathbf{f} как своеобразное целевое отображение. Обратимся к вопросам, связанным с представлением множеств $\text{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau)$, где $L \in \mathcal{L}$. Условимся о следующем общем соглашении: если X и Y — непустые множества, $\tau_1 \in (\text{top})[X]$ и $\tau_2 \in (\text{top})[Y]$, то

$$C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{g \in Y^X \mid g^{-1}(G) \in \tau_1 \ \forall G \in \tau_2\}$$

(множество всех отображений из X в Y , непрерывных в смысле топологий τ_1 и τ_2). Отметим, что (см. (1.5), (3.4)) определен оператор

$$\zeta \triangleq ((\mathcal{L} - \text{triv})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E.$$

При этом $\zeta^1(A) = \{(\mathcal{L} - \text{triv})[x] : x \in A\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

Предложение 5.1. Пусть $g \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tau)$ и при этом $\mathbf{f} = g \circ \zeta$, тогда

$$g^1(\mathcal{L}(L)) = \text{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau) \quad \forall L \in \mathcal{L}.$$

Доказательство. Поскольку ТП (3.6) компактно, а (\mathbf{H}, τ) есть T_2 -пространство, то (см. [3, 3.1.12]) отображение g замкнуто, а потому (см. [29, (2.8.4)])

$$g^1(\text{cl}(M, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])) = \text{cl}(g^1(M), \tau) \quad \forall M \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \quad (5.1)$$

Пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{L}$. Тогда по выбору g имеем равенство $\mathbf{f}^1(\mathbb{L}) = g^1(\zeta^1(\mathbb{L}))$. С учетом (5.1) получаем цепочку равенств $g^1(\text{cl}(\zeta^1(\mathbb{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])) = \text{cl}(g^1(\zeta^1(\mathbb{L})), \tau) = \text{cl}(\mathbf{f}^1(\mathbb{L}), \tau)$. В силу (3.10) $\text{cl}(\zeta^1(\mathbb{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \mathcal{L}(\mathbb{L})$, а потому $g^1(\mathcal{L}(\mathbb{L})) = \text{cl}(\mathbf{f}^1(\mathbb{L}), \tau)$. Так как выбор \mathbb{L} был произвольным, требуемое свойство установлено. \square

Заметим, что предложение 5.1 допускает естественное обобщение, использующее [30, предложение 1], а именно: при $g \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tau)$ истинна импликация

$$(\mathbf{f} = g \circ \zeta) \implies (g^1(\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid A \cap B \neq \emptyset \ \forall B \in \mathcal{U}\}) = \text{cl}(\mathbf{f}^1(A), \tau) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)). \quad (5.2)$$

В связи с (5.2) и предложением 5.1 отметим некоторые положения [5], связанные с расширением задачи о достижимости с ОАХ. Используя [5, определение 5.1], применим $(\mathbf{as})[E; Y; \tau; f; \mathcal{E}]$ работы [5] при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и следующих вариантах (Y, τ, f) : 1) $(Y, \tau) = (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ и $f = \zeta$; 2) $(Y, \tau) = (\mathbf{H}, \tau)$ и $f = \mathbf{f}$. В связи с вариантом 1) отметим, что у/ф ИП (E, \mathcal{L}) играют роль ОЭ, а у/ф, являющиеся точками $(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \zeta; \mathcal{E}]$, суть допустимые (в смысле ОАХ \mathcal{E}) ОЭ. В случае 2) имеем множество притяжения (МП), “заменяющее” обычное множество достижимости (случай, когда \mathcal{E} — синглетон).

Напомним о компактности ТП (3.8). По аналогии с предложением 5.1 получаем при $g \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle, \mathbf{H}, \tau)$, что

$$(\mathbf{f} = g \circ \zeta) \implies (g^1(\ \mathcal{L}(L)) = \text{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau) \ \forall L \in \mathcal{L}); \quad (5.3)$$

разумеется, мы учитываем (3.10) (полезно отметить, что (5.3) имеет место и в более общем случае $\mathcal{L} \in \pi^0[E]$ по свойствам ТП (3.8)).

Напомним также, что набор (K, \mathbf{t}, p, q) , где (K, \mathbf{t}) — компактное ТП, $p \in K^E$, $q \in C(K, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau)$ и $\mathbf{f} = q \circ p$, в [7] был назван *компактификатором*. Используя компактификатор (K, \mathbf{t}, p, q) , можно представить $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}]$, где $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, в виде

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] = q^1((\mathbf{as})[E; K; \mathbf{t}; p; \mathcal{E}]). \quad (5.4)$$

При условиях на отображение g , сформулированных в предложении 5.1, мы в виде $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \zeta, g)$ имеем компактификатор, а потому реализуется соответствующий вариант (5.4), обеспечивающий представление основного МП в T_2 -пространстве (\mathbf{H}, τ) как непрерывный образ вспомогательного МП; последнее есть множество всех допустимых ОЭ. Рассмотрим один вариант компактификатора, имея целью конкретизацию представлений на основе (5.2) и предложения 5.1. В этой связи обратимся сначала к множеству $\mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$, определяемому в [30, (5.1)] в терминах сходимости образов у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Если

$$\mathbf{f} \in \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau], \quad (5.5)$$

то получено отображение $\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ (см. [30, §5]), реализующее при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в виде $\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}](\mathcal{U})$ обобщенный предел БФ $\mathbf{f}^1[\mathcal{U}] \in \beta^0[\mathcal{P}(\mathbf{H})]$ в ТП (\mathbf{H}, τ) ; предел БФ устанавливается при этом в соответствии с известной схемой [8, гл. I]. Заметим, что (см. [30, (5.6)]) $\mathbf{f} = \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}] \circ \zeta$ (учитываем, что $[E] \subset \pi^0[E]$ в силу (1.5)). Полагаем до конца настоящего раздела, что (\mathbf{H}, τ) — это регулярное ТП, т. е. T_1 - и T_3 -пространство одновременно. Тогда (см. [30, (5.5)])

$$\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tau); \quad (5.6)$$

$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \zeta, \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}])$ есть компактификатор. Из (5.6) и предложения 5.1 вытекает, что

$$\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}]^1(\ \mathcal{L}(L)) = \text{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau) \quad \forall L \in \mathcal{L}. \quad (5.7)$$

В свою очередь из (5.2) и (5.6) выводим более общее свойство:

$$\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}]^1(\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid A \cap B \neq \emptyset \ \forall B \in \mathcal{U}\}) = \text{cl}(\mathbf{f}^1(A), \tau) \quad \forall A \in \mathcal{P}(E). \quad (5.8)$$

Здесь напомним с учетом (5.5) и компактности ТП (3.6), что согласно [30, предложение 7] при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] = \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})), \quad (5.9)$$

где (см. [30, §2]) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\}$ (напомним также [30, теорема 1] в связи с представлением МП для случая, когда \mathcal{E} является произвольным непустым направленным семейством п/м E). Наряду с МП, реализуемым в (5.9), представляет интерес пересечение всех множеств $\text{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau)$, $L \in \mathcal{E}$. В случае, когда $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ — направленное семейство (имеется в виду свойство $\forall \alpha_1 \in \mathcal{E} \forall \alpha_2 \in \mathcal{E} \exists \alpha_3 \in \mathcal{E}: \alpha_3 \subset \alpha_1 \cap \alpha_2$), упомянутое пересечение совпадает с МП (5.9) (см. [27, (3.7)]). Отметим относительно представления упомянутого множества-пересечения в общем случае, что согласно (5.7)

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \text{cl}(\mathbf{f}^1(\Sigma), \tau) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}]^1(\mathcal{L}(\Sigma)) \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{5.10}$$

В свою очередь из (5.8) выводим обобщение (5.10):

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \text{cl}(\mathbf{f}^1(\Sigma), \tau) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}]^1(\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap B \neq \emptyset \forall B \in \mathcal{U}\}) \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \tag{5.11}$$

(в связи с (5.11) полезно напомнить построения [27, разд. 7] и [30, предложение 3]). Заметим, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ элементы пересечения всех множеств $\text{cl}(\mathbf{f}^1(\Sigma), \tau)$, $\Sigma \in \mathcal{E}$, имеют следующий смысл: они универсально реализуемы (в пределе) при стандартных ограничениях в виде каждого множества из \mathcal{E} . А именно каждый такой универсально реализуемый элемент \mathbf{H} допускает сколь угодно точное (в смысле топологии τ) приближение элементами $f(x)$, $x \in \Sigma$, при любом выборе $\Sigma \in \mathcal{E}$. В частности, такие элементы могут представлять интерес в условиях неопределенности относительно конкретной реализации Σ . В этом плане представляется полезным изучение условий существования универсально реализуемых элементов \mathbf{H} . Мы ограничимся рассмотрением этих условий для случая $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$.

Напомним, что согласно предложению 4.1

$$(\mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{E}]) \implies ((\text{Cen})[\mathcal{L}] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]). \tag{5.12}$$

С учетом (5.12) полагаем до конца настоящего раздела, что

$$\mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{E}]. \tag{5.13}$$

Тогда получаем из (5.12), (5.13) равенство $(\text{Cen})[\mathcal{L}] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$, а потому в соответствии с (1.14)

$$\{\cap\}_{\#}(\mathcal{E}) \in \beta^0[\mathcal{L}] \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]. \tag{5.14}$$

Как следствие имеем из [27, (3.7)] равенство

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\#}(\mathcal{E})} \text{cl}(\mathbf{f}^1(\Sigma), \tau) \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]. \tag{5.15}$$

Из (5.10) и (5.15) вытекает с очевидностью, что

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}]^1(\mathcal{L}(\Sigma)) \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]. \tag{5.16}$$

Предложение 5.2. Если $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$, то $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] \neq \emptyset$.

Доказательство. Имеем свойство $\mathcal{E} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}]$, а тогда исходя из (5.14) $\{\cap\}_{\#}(\mathcal{E}) \in \beta^0[\mathcal{L}]$ (свойство БФ: см. (1.11)). Имеем равенство (5.15). Воспользуемся (5.7), учитывая очевидное в силу (3.1), (3.2) равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \{\cap\}_{\#}(\mathcal{E}))$. По основному свойству БФ полагаем теперь, что (см. [30, (2.7)]) $\mathcal{F} \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists \Sigma \in \{\cap\}_{\#}(\mathcal{E}): \Sigma \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, причем $\mathcal{E} \subset \{\cap\}_{\#}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$. Согласно (3.3) получаем для некоторого у/ф $\mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ вложение $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$. Поэтому $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$ и, следовательно, $\mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$. Но тогда (см. (5.9)) $\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}](\mathcal{L}) \in (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}]$. Требуемое свойство $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] \neq \emptyset$ установлено. \square

Из (5.16) и предложения 5.2 вытекает, что (при условии (5.13))

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f}]^1(\mathcal{L}(\Sigma)) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \text{cl}(\mathbf{f}^1(\Sigma), \tau) \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]. \quad (5.17)$$

Заметим, что с точки зрения (5.17) и предложения 5.2 наиболее существенными среди условий представляются (5.5) и (5.13). В связи с (5.5) отметим построения [27, разд. 8], связанные с ярусными отображениями, ограничиваясь сейчас для простоты частным случаем ярусных вещественнозначных функций.

Итак, пусть до конца настоящего раздела $\mathbf{H} = \mathbb{R}^\Gamma$, где Γ — непустое множество. Через $\tau_{\mathbb{R}}$ обозначаем обычную $|\cdot|$ -топологию \mathbb{R} , получая, в частности, регулярное ТП $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. Тогда топология $\otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}})$ тихоновской степени $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ (при использовании Γ в качестве индексного множества) превращает \mathbf{H} в регулярное ТП (см. [3, 2.3.11]) $(\mathbb{R}^\Gamma, \otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}})) = (\mathbf{H}, \otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}}))$. Если $f \in \mathbf{H}^E$ и $\gamma \in \Gamma$, то (см. [27, разд. 8]) $f(\cdot)(\gamma) \triangleq (f(x)(\gamma))_{x \in E} \in \mathbb{R}^E$ (γ -компонента f).

Введем в рассмотрение множество $B(E, \mathcal{L}) \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^E)$, определяемое в [29, (4.3.11)]. Элементы $B(E, \mathcal{L})$ — равномерные пределы ступенчатых в смысле ИП (E, \mathcal{L}) вещественнозначных функций на E и только они. Функции из $B(E, \mathcal{L})$ именуем *ярусными*. Тогда $B_\otimes(E, \mathcal{L} | \Gamma) \triangleq \{f \in \mathbf{H}^E \mid f(\cdot)(\gamma) \in B(E, \mathcal{L}) \ \forall \gamma \in \Gamma\}$ есть множество всех отображений из \mathbf{H}^E с ярусными компонентами. До конца раздела полагаем, что $\tau = \otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}})$. В этом случае (см. [27, разд. 8])

$$B_\otimes(E, \mathcal{L} | \Gamma) \subset \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]. \quad (5.18)$$

Поэтому при $\mathbf{f} \in B_\otimes(E, \mathcal{L} | \Gamma)$ имеем (см. (5.15), (5.18)) свойство (5.17) (в связи с (5.13) отметим, что в [23] приведены содержательные примеры реализации данного свойства). Укажем естественный вариант такого отображения \mathbf{f} , фиксируя оператор

$$\gamma \mapsto \mathbf{f}_\gamma: \Gamma \rightarrow B(E, \mathcal{L}). \quad (5.19)$$

Тогда полагаем, что \mathbf{f} определяется в виде следующего отображения:

$$x \mapsto (\mathbf{f}_\gamma(x))_{\gamma \in \Gamma}: E \rightarrow \mathbf{H}. \quad (5.20)$$

Ясно, что в нашем случае $\mathbf{f}(\cdot)(\gamma) = \mathbf{f}_\gamma \ \forall \gamma \in \Gamma$. Поэтому (см. (5.19)) реализуется требуемое свойство $\mathbf{f} \in B_\otimes(E, \mathcal{L} | \Gamma)$, обеспечивающее в силу (5.18) справедливость (5.17). Представление (5.19), (5.20) естественно для конструкций конечно-аддитивной теории меры, которые находят (см. [11; 12]) применение при построении расширений задач о достижимости с ограничениями импульсного характера.

6. Некоторые обобщения: n -сцепленность ($n \in \mathbb{N}$)

Рассмотрим далее естественное развитие конструкций разд. 2. Имеется в виду кратная сцепленность семейств п/м E . Фиксируем в настоящем разделе семейство $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и полагаем, что при $m \in \mathbb{N}$

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m] \triangleq \left\{ \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \bigcap_{i=1}^m \mathcal{E}_i \neq \emptyset \ \forall (\mathcal{E}_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathcal{E}^m \right\}. \quad (6.1)$$

Свойство, используемое в (6.1), именуем *m -сцепленностью* соответствующего подсемейства \mathcal{L} . Ясно, что $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | 1] = \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \neq \emptyset \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{E}\}$ и

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | 2] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \quad (6.2)$$

(см. (2.1), (6.1)). Итак, в (6.1) мы имеем (см. (6.2)) обобщение “обычной” сцепленности. Из (6.1) легко следует, что

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m + 1] \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m] \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (6.3)$$

Кроме того, как легко видеть (см. (1.10), (6.1)),

$$(\text{Cen})[\mathcal{L}] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | n]. \quad (6.4)$$

Из (6.3) и (6.4) следует факт монотонной сходимости последовательности семейств $(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | k])_{k \in \mathbb{N}}$ к $(\text{Cen})[\mathcal{L}]$. Введем в рассмотрение максимальные кратные сцепленные подсемейства \mathcal{L} : при $m \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m] \\ & \triangleq \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m] \mid \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m] (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \implies (\mathcal{E} = \mathcal{S}) \}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Подобно (2.3) непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m + 1] = \left\{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m + 1] \mid \forall L \in \mathcal{L} \right. \\ & \left. \left(L \cap \left(\bigcap_{i=1}^m i \right) \neq \emptyset \ \forall (i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathcal{E}^m \right) \implies (L \in \mathcal{E}) \right\} \quad \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (6.6)$$

(в (6.6) используем “сдвиг” кратности на единицу, что будет удобно в свете последующих построений). По аналогии с предложением 2.1 устанавливается, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m] \quad \exists \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m]: \mathcal{E} \subset \mathcal{S}. \quad (6.7)$$

Ясно также, что при $L \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $m \in \mathbb{N}$ непременно $\{L\} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m]$. С учетом (6.7) получаем, что при $\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \neq \emptyset$ имеет место свойство $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m] \neq \emptyset \ \forall m \in \mathbb{N}$. Отметим простое следствие, касающееся покрытий: если $\mathcal{L} \in (\text{COV})[E | \mathcal{H}]$, где $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m] \neq \emptyset \ \forall m \in \mathbb{N}$. Из (6.1) непосредственно устанавливаем, что

$$(E \in \mathcal{L}) \implies (\mathcal{E} \cup \{E\} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m] \ \forall m \in \mathbb{N} \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m]).$$

Как следствие получаем очевидное свойство:

$$(E \in \mathcal{L}) \implies (E \in \mathcal{E} \ \forall m \in \mathbb{N} \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m]). \quad (6.8)$$

Из (6.8) выводим полезное добавление к построениям разд. 2: если $E \in \mathcal{L}$, то $E \in \mathcal{E} \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$. В этой связи напомним очевидное следствие свойства (6.2):

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | 2] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]. \quad (6.9)$$

Далее, из (6.3), (6.5) и (6.7) вытекает, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m + 1] \quad \exists \mathcal{E}' \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m]: \mathcal{E} \subset \mathcal{E}'. \quad (6.10)$$

Из (6.10) получаем естественное свойство вписанности (напомним, что для всякого множества T и семейств $\mathcal{T}_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(T))$, $\mathcal{T}_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(T))$)

$$(\mathcal{T}_1 \preceq \mathcal{T}_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall T_2 \in \mathcal{T}_2 \ \exists T_1 \in \mathcal{T}_1: T_2 \subset T_1);$$

символ \preceq означает вписанность \mathcal{T}_2 в \mathcal{T}_1 : при $m \in \mathbb{N}$ семейство $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m + 1]$ вписано в $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m]$: $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m] \preceq \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m + 1]$.

7. Свойство n -сцепленности подсемейств π -системы ($n \in \mathbb{N}$)

В настоящем разделе очень общие конструкции на основе (6.1), (6.5) рассматриваются в случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ с целью последующего исследования свойств u/ϕ π -системы \mathcal{L} . Напомним в этой связи о возможном применении u/ϕ в качестве ОЭ при решении абстрактных задач о достижимости в условиях ОАХ. Итак, фиксируем $\mathcal{L} \in \pi[E]$, получая свойство $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | n] \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$. Из определений следует, что (см. (3.1), (6.1))

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m] \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (7.1)$$

Предложение 7.1. *Если $m \in \mathbb{N}$, то $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m + 1]$.*

Доказательство. Вводим $m \in \mathbb{N}$. Тогда имеем (6.6). Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. В силу (3.1), (3.2) семейство \mathcal{V} замкнуто относительно конечных пересечений. Из (7.1) получаем, что $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E | m + 1]$. Пусть $\cap_{i=1}^m V_i \in \mathcal{L}$ таково, что

$$\cap_{i=1}^m V_i \neq \emptyset \quad \forall (V_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathcal{V}^m. \quad (7.2)$$

Фиксируем $V \in \mathcal{V}$ и полагаем, что $V_j \triangleq V \quad \forall j \in \overline{1, m}$. Тогда из (7.2) следует, что $\cap V \neq \emptyset$. Поскольку выбор V был произвольным, доказано, что $\cap V \neq \emptyset \forall V \in \mathcal{V}$. С учетом (3.2) получаем, что $\cap V \in \mathcal{V}$. Установлена импликация

$$\left(\cap_{i=1}^m V_i \neq \emptyset \quad \forall (V_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathcal{V}^m \right) \implies \left(\cap V \in \mathcal{V} \right). \quad (7.3)$$

Поскольку выбор $\cap V$ был произвольным, из (6.6) и (7.3) вытекает, что $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m + 1]$. Требуемое свойство доказано. \square

В связи с предложением 7.1 отметим, что $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | 1] = \{\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}\}$ (тем самым поясняется роль “сдвига” на единицу в формулировке последнего утверждения). Напомним свойство вписанности (6.10), а также то, что $E \in \mathcal{E} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m]$. Кроме того, из определений легко следует (см. (6.1), (6.5)), что $\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m] \quad \forall L \in \mathcal{E} \quad \forall L \in \mathcal{L}$

$$\left(\cap V \subset L \right) \implies \left(L \in \mathcal{E} \right). \quad (7.4)$$

Теорема 7.1. *Если $m \in \mathbb{N}$, то*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m + 1] \mid \cap V \cap \mathcal{E} \neq \emptyset \quad \forall \cap V \in \mathcal{E} \}. \quad (7.5)$$

Доказательство. Обозначим через \mathcal{V} семейство в правой части (7.5). Тогда из (3.1), (3.2) и предложения 7.1 вытекает, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathcal{V}$. Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тогда семейство $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m + 1]$ замкнуто относительно конечных пересечений. С учетом $(m + 1)$ -сцепленности \mathcal{V} можно утверждать, что $\emptyset \notin \mathcal{V}$. В соответствии с (7.4) имеем, кроме того, свойство $\forall V \in \mathcal{V} \quad \forall L \in \mathcal{L}$

$$\left(V \subset L \right) \implies \left(L \in \mathcal{V} \right).$$

Таким образом, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ (см. (3.1)). Максимальность \mathcal{V} легко следует из (6.5) и (7.1). Итак, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, чем и завершается проверка вложения $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathcal{V}$. Теорема доказана. \square

Итак, мы получили естественное обобщение (4.1).

Отметим, что согласно (6.1) и (6.5) определено пересечение всех семейств $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m + 1]$, $m \in \mathbb{N}$; при этом получается подсемейство $\mathcal{P}'(\mathcal{L})$.

Теорема 7.2. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E | m + 1]. \quad (7.6)$$

Доказательство. С учетом (6.3) и (6.5) проверяется очевидное равенство

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle [E \mid m] = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle [E \mid m + 1],$$

а отсюда (см. (6.4), (6.5)) имеет место вложение

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0 [E \mid m + 1] \subset (\text{Cen})[\mathcal{L}]. \quad (7.7)$$

Пусть \mathcal{V} — элемент семейства в правой части (7.6). В этом случае (см. (7.7)) $\mathcal{V} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}]$ и, как следствие, в силу (1.11) $\{\cap\}_\#(\mathcal{V}) \in \beta^0[\mathcal{L}]$. Тогда (см. (3.2), (3.3)) для некоторого \mathcal{W}/Φ $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$

$$\mathcal{V} \subset \{\cap\}_\#(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W} \quad (7.8)$$

(используем построения [5, §5]). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Согласно предложению 7.1 $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0 [E \mid n + 1]$ и, в частности, $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle [E \mid n + 1]$. Поскольку $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0 [E \mid n + 1]$, то (см. (6.5), (7.8)) $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, а потому $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Итак,

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0 [E \mid m + 1] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Противоположное вложение извлекается из предложения 7.1, чем и завершается проверка (7.6). \square

Итак, последовательность $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0 [E \mid m + 1]$, $m \in \mathbb{N}$, всегда реализует $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ “в пределе” (см. (7.6)). Представляют интерес случаи, когда $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0 [E \mid m + 1]$, где $m \in \mathbb{N}$. Этот вопрос рассматривается в следующем разделе.

8. Условия n -сцепленной реализации ультрафильтров

В настоящем разделе мы сравниваем множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0 [E \mid m + 1]$ при $m \in \mathbb{N}$. Речь пойдет о положениях, подобных (4.10) и предложению 4.1. Напомним, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$.

Предложение 8.1. Если $m \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0 [E \mid m + 1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то

$$\exists (i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2}: \bigcap_{i=1}^{m+2} i = \emptyset.$$

Доказательство. Фиксируем m и \mathcal{E} в соответствии с условиями. В силу теоремы 7.1 имеем для некоторых $M_1 \in \mathcal{E}$ и $M_2 \in \mathcal{E}$ свойство

$$M_1 \cap M_2 \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{E}. \quad (8.1)$$

Тогда согласно (6.6) и (8.1) выводим для некоторого картжа $(i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathcal{E}^m$ свойство

$$(M_1 \cap M_2) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m i \right) = \emptyset. \quad (8.2)$$

Полагаем теперь, что $(i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2}$ определяется условиями

$$(j \triangleq j \ \forall j \in \overline{1, m}) \& (m+1 \triangleq M_1) \& (m+2 \triangleq M_2).$$

В силу (8.2) пересечение всех множеств i , $i \in \overline{1, m+2}$, пусто. \square

Получаем в качестве очевидного следствия (см. также (3.1), (3.2)), что при $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \\ &= \left\{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1] \mid \exists (i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2}: \bigcap_{i=1}^{m+2} i = \emptyset \right\}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Из (8.3), в свою очередь, вытекает следующее представление: если $m \in \mathbb{N}$, то

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \left\{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1] \mid \bigcap_{i=1}^{m+2} i \neq \emptyset \quad \forall (i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2} \right\}. \quad (8.4)$$

Совсем кратко отметим ряд простых следствий (8.4). Так, при $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) &= \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1] \cap \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E \mid m+2] \\ &= \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1] \cap \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+2] \end{aligned} \quad (8.5)$$

((8.5) согласуется с теоремой 7.2 и, по сути, уточняет эту теорему). Из (8.5) вытекает, что при $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & (\mathcal{E} \notin \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E \mid m+2] \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \\ & \& (\mathcal{E} \notin \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1] \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+2] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \end{aligned}$$

Последнее свойство означает, в частности, что максимальные $(m+1)$ -сцепленные системы, не являющиеся у/ф, (в отличие от последних) являются “короткоживущими” (утрачивают кратную сцепленность при увеличении параметра сцепленности на единицу).

Предложение 8.2. *Если $m \in \mathbb{N}$, то*

$$\begin{aligned} & \left(\exists (i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \mathcal{L}^{m+2}: (\{i: i \in \overline{1, m+2}\} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E \mid m+1]) \& \left(\bigcap_{i=1}^{m+2} i = \emptyset \right) \right) \\ & \iff (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Доказательство. Пусть истинно свойство в левой части (8.6). С учетом этого выберем $(D_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \mathcal{L}^{m+2}$ так, что

$$(\mathcal{D} \triangleq \{D_i: i \in \overline{1, m+2}\} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E \mid m+1]) \& \left(\bigcap_{i=1}^{m+2} D_i = \emptyset \right). \quad (8.7)$$

Тогда (см. (6.7), (8.7)) для некоторого $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1]$ имеем $\mathcal{D} \subset \mathcal{W}$. При этом $(D_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \mathcal{W}^{m+2}$. Поэтому согласно (8.3) и (8.7) $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тем самым установлена импликация

$$\begin{aligned} & \left(\exists (i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \mathcal{L}^{m+2}: (\{i: i \in \overline{1, m+2}\} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E \mid m+1]) \& \left(\bigcap_{i=1}^{m+2} i = \emptyset \right) \right) \\ & \implies (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset). \end{aligned}$$

Противоположная импликация легко следует из предложения 8.1 с учетом (6.1), (6.5). \square

В свою очередь из предложения 8.2 вытекает, что $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid m+1] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \\ & \iff \left(\forall (L_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \mathcal{L}^{m+2} \quad (\{L_i: i \in \overline{1, m+2}\} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E \mid m+1]) \right. \\ & \quad \left. \implies \left(\bigcap_{i=1}^{m+2} L_i \neq \emptyset \right) \right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

В связи с (8.8) напомним (4.10). Точнее, согласно [23, (5.3)]

$$(\mathcal{L} \in \pi_*^{\sharp}[E]) \iff (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \quad (8.9)$$

С учетом (1.2) и (6.9) получаем в виде (8.8) нужное обобщение свойства (8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
2. Dvalishvili B. P. Bitopological spaces: Theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. Nort-Holland. Mathematics studies, 2005. 422 p.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
4. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2018. Т. 52. С. 86–102.
5. Ченцов А. Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 113–142. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
6. Chentsov A. G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problem // J. Math. Sci. 2006. Vol. 133, no. 2. P. 1045–1206. doi: 10.1007/s10958-006-0030-0.
7. Ченцов А. Г. Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 294–309.
8. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
9. Ченцов А. Г. Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 225–239.
10. Ченцов А. Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.
11. Ченцов А. Г., Бакланов А. П. Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости // Тр. МИРАН. 2015. Т. 291. С. 292–311.
12. Ченцов А. Г., Бакланов А. П., Савенков И. И. Задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2016. Вып. 1(47). С. 54–118.
13. Ченцов А. Г. Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 268–293.
14. Ченцов А. Г., Пыткеев Е. Г. Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 312–329.
15. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы // Вестн. Удмурт. ун-та. 2017. Вып. 3. С. 122–141. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
16. Ченцов А. Г. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 257–272.
17. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006. 336 с.
18. de Groot J. Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
19. Mill J. van. Supercompactness and Wallman spaces // Amsterdam. Math. Center Tract. 1977. 85. 238 p.
20. Strok M., Szymanski A. Compact metric spaces have binary subbases // Fund. Math. 1975. Vol. 89, № 1. P. 81–91. doi: 10.4064/fm-89-1-81-91.
21. Ченцов А. Г. Суперрасширение как битопологическое пространство // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2017. Т. 49. С. 55–79.
22. Архангельский А. В. Компактность // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1989. Т. 50. С. 7–128.
23. Ченцов А. Г. Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 240–257.
24. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
25. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
26. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
27. Ченцов А. Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.

28. **Ченцов А. Г.** Преобразования ультрафильтров и их применение в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2012. Вып. 3. С. 85–102. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
29. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
30. **Ченцов А. Г.** Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. 2014. Вып. 1. С. 87–101. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)

Поступила 15.11.2019

После доработки 25.12.2019

Принята к публикации 14.01.2020

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН

главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

г. Екатеринбург

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [Theory of Stochastic Processes]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 402 p. ISBN: 5-9221-0335-0.
2. Dvalishvili B.P. *Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications*. Ser. Nort-Holland Mathematics Studies, vol. 199, Amsterdam; Boston; Heidelberg; London; N Y: Elsevier, 2005, 422 p. ISBN: 9780444517937.
3. Engelking R. *General topology*. Ser. Sigma series in pure mathematics, vol. 6. Berlin: Heldermann Verlag, 1989, 535 p. ISBN: 3885380064. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya*. Moscow: Mir Publ., 1986, 752 p.
4. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions. *Izv. IMI UdGU*, 2018, vol. 52, pp. 86–102 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2018-52-07.
5. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 113–142 (in Russian).
6. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 133, no. 2, pp. 1045–1206. doi: 10.1007/s10958-006-0030-0.
7. Chentsov A.G. Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 296, suppl. 1, pp. 102–118. doi: 10.1134/S0081543817020109.
8. Bourbaki N. *General topology. Chapters 1–4*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1995, 437 p. ISBN: 978-3-642-61701-0. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury*. Moscow: Nauka Publ., 1968, 272 p.
9. Chentsov A.G. One representation of the results of action of approximate solutions in a problem with constraints of asymptotic nature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 276, suppl. 1, pp. S48–S62. doi: 10.1134/S0081543812020046.
10. Chentsov A.G. On one example of representing the ultrafilter space for an algebra of sets. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 293–311 (in Russian).
11. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 279–298. doi: 10.1134/S0081543815080222.
12. Chentsov A.G., Baklanov A.P., Savenkov I.I. A problem of attainability with constraints of asymptotic nature. *Izv. IMI UdGU*, 2016, no. 1(47), pp. 54–118 (in Russian).
13. Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in abstract attainability problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. S12–S39. doi: 10.1134/S0081543811090021.

14. Chentsov A.G., Pytkeev E.G. Some topological structures of extensions of abstract reachability problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 36–54. doi: 10.1134/S0081543816020048.
15. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 365–388 (in Russian). doi: 10.20537/vm170307.
16. Chentsov A.G. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 257–272 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272.
17. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruksii* [General topology: Basic constructions]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2006, 336 p. ISBN: 5-9221-0618-X
18. de Groot J. Superextensions and supercompactness. *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications*. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89–90.
19. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces*. Ser. Math. Center Tracts, no. 85. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977, 238 p. ISBN: 90-6196-151-3.
20. Strok M, Szymanski A. Compact metric spaces have binary subbases. *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. doi: 10.4064/fm-89-1-81-91.
21. Chentsov A.G. Superextension as bitopological space. *Izv. IMI UdGU*, 2017, vol. 49, pp. 55–79 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-03.
22. Arkhangel'skii A.V. Compactness. *General topology II. Encycl. Math. Sci.*, 1996, vol. 50, pp. 1–117.
23. Chentsov A.G. Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 240–257 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-240-257.
24. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*. ISBN: 9780444534170. Warszawa: PWN - Polish Scientific Publishers, 1968, 417 p. Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv*. Moscow: Mir Publ., 1970, 416 p.
25. Neveu J. *Mathematical foundations of the calculus of probability*. San Francisco: Holden-Day, 1965, 223 p. Translated to Russian under the title *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei*. Moscow: Mir Publ., 1969, 309 p.
26. Alexandroff P.S. *Einführung in die Mengenlehre und in die allgemeine Topologie* [Introduction to set theory and to general topology]. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1984, 336 p. Original Russian text published in Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu*. Moscow: Editorial URSS, 2004, 368 p.
27. Chentsov A.G. Attraction sets in abstract attainability problems: equivalent representations and basic properties. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 28–44. doi: 10.3103/S1066369X13110030.
28. Chentsov A.G. The transformation of ultrafilters and their application in constructions of attraction sets. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 85–102. (in Russian)
29. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publ., 2002, 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0.
30. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 87–101 (in Russian).

Received November 15, 2019

Revised December 25, 2019

Accepted January 14, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00410).

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: chentsov@imm.uran.ru.

Cite this article as: A. G. Chentsov. Ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 274–292.

УДК 519.863

**АНАЛИЗ ФИНАНСОВОГО СОСТОЯНИЯ ИНВЕСТОРА
НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ КАНТОРА — ЛИПМАНА¹****А. А. Шананин**

Проблема восстановления экономического роста и выхода из режима стагнации российской экономики связана с преодолением институциональных ловушек. Одной из таких ловушек является большая разница между процентными ставками по кредитам и депозитам, которая является выражением несовершенства рынка капитала и препятствует объективной оценке инвестиционных проектов. В этих условиях оценка инвестиционного проекта оказывается зависящей от предпринимательской среды, в которой реализуется проект. В работе предлагается для описания предпринимательской (инвестиционной) среды воспользоваться моделью Кантора — Липмана инвестиций на несовершенном рынке капитала. В модели Кантора — Липмана инвестиционная среда описывается пулом стационарных, тиражируемых инвестиционных проектов. Построены дефляторы, с помощью которых оцениваются новые инвестиционные проекты и финансовое состояние инвестора. Обсуждаются асимптотические свойства дефляторов и с их помощью — проблемы экономического роста в России.

Ключевые слова: инвестиции, модель Кантора — Липмана, математическое моделирование экономики, NPV, IRR, двойственная задача, инвестиционный полином, задача линейного программирования.

A. A. Shaninin. Analysis of the financial state of an investor based on the Cantor–Lippman model.

The problem of restoring the economic growth and overcoming the stagnation of the Russian economy is associated with escaping the institutional traps. One of these traps is the big difference between interest rates on loans and deposits, which expresses the imperfection of the capital market and prevents an objective assessment of investment projects. In these conditions, the assessment of an investment project becomes dependent on the business environment in which the project is implemented. We propose to use the Cantor–Lippman model of investment at an imperfect capital market to describe the entrepreneurial (investment) environment. In the Cantor–Lippman model, the investment environment is described by a pool of stationary, replicable investment projects. Deflators are built and used to evaluate new investment projects and the financial state of the investor. The asymptotic properties of the deflators and, with their help, the problems of economic growth in Russia are discussed.

Keywords: investments, Cantor–Lippman model, mathematical modeling of economics, NPV, IRR, dual problem, investment polynomial, linear programming.

MSC: 91B64, 90C90

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-293-306

Введение. Проблема восстановления роста экономики России

Процесс эволюции российской экономики за прошедшие три десятилетия можно разделить на три основных этапа: трансформационный спад (1990–1998 гг.), восстановительный рост (1998–2008 гг.), период стагнации (с 2008 по настоящее время). Первый этап (трансформационный спад) сопровождался либерализацией цен и утратой контроля государства над внешней торговлей. Одновременно происходило повышение эффективности экономики за счет вытеснения из технологических цепочек неэффективных производств и замещения соответствующих производственных факторов импортными аналогами, что упростило в целом структуру производства и привело к снижению мультипликатора в производстве с 2 до 1.3. В результате сформировались четыре комплекса отраслей, различающихся степенью участия в экспортно-импортных отношениях. Эти комплексы характеризуют структуру российской экономики и в

¹Работа выполнена при поддержке РФФ (проект 16-11-10246).

настоящее время. Первый комплекс — экспортно-ориентированные отрасли (нефтегазовая промышленность, металлургия, нефтехимия и т. п.). Вследствие конкурентоспособности производимой продукции данный комплекс успешно встроился в мировые экономические отношения, является донором российского бюджета и обеспечивает значительную часть валютных поступлений в страну. Второй комплекс — отрасли, продукция которых конкурирует на внутреннем рынке с импортными аналогами (обрабатывающая промышленность, машиностроение, легкая промышленность). Второй комплекс сформировался в советский период в условиях закрытой экономики и до сих пор для него характерен технологически отсталый уровень по сравнению с зарубежными конкурентами. В третий и четвертый комплексы входят инфраструктурные отрасли, предоставляющие в основном услуги. Эти комплексы не имеют экспортного потенциала и не конкурируют с импортом. Третий комплекс составляют естественные монополии — электроэнергетика, транспорт, связь. Четвертый комплекс — децентрализованные отрасли сферы услуг, для которых актуальна проблема теневых отношений (услуги ЖКХ, торговля и т. п.). Успешное развитие первого комплекса, который является капиталоемким, но не трудоемким, на фоне неэффективности и вытеснения импортом продукции второго сектора привело к расслоению населения по уровню доходов, снижению совокупного потребительского спроса и деградации человеческого капитала. На этапе восстановительного роста усилилась роль государственного управления через налоги и субсидии, но неоднородность экономики сохранилась. Взаимодействие секторов на макроуровне происходит через государственный бюджет, где первый сектор является донором и формирует доходную часть бюджета страны, а функционирование остальных поддерживается за счет госзаказов, финансируемых из бюджета. В восстановительный период начался процесс импортовытеснения и мультипликатор вырос до 1.8. Экономический подъем обеспечивался бюджетным финансированием перспективных направлений, имеющих высокую доходность. При этом на фоне роста капиталоемких производств сохранились технологическая многоукладность и стагнация трудоемких производств, что привело к дальнейшей деградации человеческого капитала, снижению стимулов к его развитию и дальнейшему расслоению общества по доходам и имуществу. На третьем этапе эволюции российской экономики, который начался в 2008 г. и продолжается по настоящее время, произошло замедление темпа роста экономики. По данным Всемирного Банка, экономика России за период 2008–2016 гг. выросла на 3.6%, в то время как мировая экономика — на 20.3%. Такое состояние стагнации связано со снижением эффективности государственных инвестиций из-за высоких транзакционных издержек, вызванных неразвитостью инфраструктуры и недостаточным для восстановления роста объемом рыночных инвестиций. Причиной отсутствия рыночных инвестиций является институциональная ловушка, в которой оказалась отечественная экономика. Эта ловушка связана с несовершенством рынка капитала, которое выражается в значительной разнице процентных ставок по депозитам и кредитам. Монопольное положение системы российских коммерческих банков приводит к тому, что, имея значительные объемы свободных ликвидных средств, банки не вкладывают их в инвестиционные проекты в реальном секторе экономики. Необходимость выхода из режима стагнации побуждает государственные органы применять кейнсианские схемы восстановления роста и реализовывать крупные национальные проекты по реформированию российской экономики. Однако реализация таких проектов сопряжена с существенными рисками. Увеличение государственных расходов может привести к росту инфляции и неэффективности кейнсианских стимулов роста.

Например, схожий этап стагнации наблюдался в советской экономике периода “застоя”, который также требовал принятия новых управленческих решений для повышения эффективности производства. Экономическими последствиями не до конца просчитанной политики “ускорения” и перестройки второй половины 80-х годов, которая была направлена на повышение эффективности отечественной экономики, явились финансовая разбалансированность экономики и гиперинфляция. Поэтому одобрение вариантов программ экономического развития должно проходить на основе подробного анализа с учетом возможных косвенных последствий их реализации. В настоящее время существует методология такого анализа. С ее помощью

анализировался опыт эволюции отечественной экономики в 1980–90-е гг. [1; 2]. Для использования этой методологии необходимо перевести на язык математических моделей ключевые проблемы современного этапа эволюции российской экономики. Настоящая работа является продолжением работы [3]. В ней на основе модели Кантора — Липмана построены дефляторы, с помощью которых оцениваются новые инвестиционные проекты и финансовое состояние инвестора, обсуждаются асимптотические свойства дефляторов и проблемы экономического роста в России.

1. Модель Кантора — Липмана инвестиций на несовершенном рынке капитала

Инвестиции в реальном секторе экономики являются ограниченно ликвидными, т. е. инвестиционный проект должен быть доведен до конца, в противном случае он неликвиден. При этом инвестиционная схема такого проекта (порядок получения и соотношение необходимых вложений и получаемых выплат) фиксирована. Эти ограничения на проекты необходимо учитывать при описании инвестиционной деятельности. Инвестиционный проект в реальном секторе экономики характеризуется распределенными по времени денежными потоками $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, где a_i — величина денежного потока в i -й период времени от начала реализации проекта, $i = 1, \dots, n$. Положительные значения a_i соответствуют доходам от реализации проекта, полученным в i -й период времени, а отрицательные значения — вложениям в инвестиционный проект. Для сравнения инвестиционных проектов нужно сопоставлять распределенные по времени денежные потоки. В теории корпоративных финансов в этих целях используется показатель приведенной чистой прибыли NPV (net present value). Если платежи (и любая другая финансовая деятельность) осуществляются через некоторые равные промежутки времени, то NPV проекта с вектором потоков платежей \vec{a} вычисляется по формуле

$$NPV(\vec{a}, r) = a_0 + a_1 e^{-r} + \dots + a_k e^{-rk}.$$

Здесь r — показатель доходности общедоступного для инвестора альтернативного способа вложения денег, который используется в расчете в качестве дефлятора, приводящего распределенные по времени денежные потоки к периоду начала инвестиционного проекта. Оценивая инвестиционный проект, коммерческие структуры руководствуются следующим принципом. Положительность показателя NPV означает, что проект следует поддержать, отрицательность — что проект нерентабелен с коммерческой точки зрения. Если компоненты у векторов потоков платежей \vec{a} имеют разные знаки, то сравнение соответствующих им инвестиционных потоков по критерию NPV зависит от дефлятора r . Из этого естественным образом вытекает вопрос: какую величину нужно взять в качестве доходности альтернативного источника вложений? Очевидно, что величина дефлятора должна быть заключена между процентными ставками по депозитам и кредитам. Если разница между этими процентными ставками незначительна, то выбор дефлятора из этого интервала не влияет на принятие решения о поддержке основной массы инвестиционных проектов. Однако если эта разница значительна, как в современной российской экономике, то инвестиционный процесс происходит в условиях несовершенного рынка капитала. Наблюдающееся в экономиках догоняющего типа значительное превышение процентных ставок по кредитам над процентными ставками по депозитам приводит к тому, что рентабельность проекта оказывается критически зависящей от дефляторов денежных потоков. Эти дефляторы, с одной стороны, отражают экономическую инфраструктуру, а с другой — индивидуализированы и зависят от предпринимательских качеств инвестора.

В работе рассматривается вопрос о переводе проблемы оценки рентабельности инвестиционного проекта в условиях несовершенного рынка капитала на язык математических моделей. Для изучения экономической среды, в которой реализуется инвестиционный проект, предложено использовать модель Кантора — Липмана. Она позволяет оценить доходность пула доступ-

ных инвестору тиражируемых инвестиционных проектов, моделирующих экономическую среду, в которой будет реализовываться анализируемый инвестиционный проект (см. подробнее [4–11]). Предположим, что для инвестора в любой период времени в любом объеме доступны M типов инвестиционных проектов. Проект m -го типа задается вектором финансовых потоков $\vec{a}^m = (a_0^m, a_1^m, \dots, a_n^m)$. Здесь $n + 1$ — наибольшая продолжительность среди всех проектов², а $m = 1, \dots, M$. Для того чтобы эти проекты можно было считать общедоступным альтернативным источником вложений, они должны быть стационарными (доступными в неизменном виде в любой момент времени) и тиражируемыми. Проект называется тиражируемым, если он может быть начат в любой период времени с произвольной интенсивностью $u \geq 0$ (вектор финансовых потоков такого проекта будет выглядеть как $u\vec{a} = (ua_0, ua_1, \dots, ua_k)$). Если проект начат с интенсивностью $u = 0$, то вектор его финансовых потоков нулевой, т. е. на деле проект не используется. Будем предполагать, что среди них имеется проект сохранения денег, который задается вектором $(-1, 1, 0, \dots, 0)$. Проект депонирования денег на один период времени под процентную ставку r_d описывается вектором финансовых потоков $(-1, 1 + r_d, 0, \dots, 0)$, а проект заимствования денег на один период времени под процентную ставку r_k — вектором $(1, -1 - r_k, 0, \dots, 0)$.

Целью инвестора в модели Кантора — Липмана предполагается максимизация дохода к периоду времени T , в который вся инвестиционная деятельность должна быть завершена. Возможности инвестора в период времени t характеризуются остатком его расчетного счета $s_0(t)$, который изменяется в процессе реализации инвестиционной стратегии

$$\{u_m(t) \mid m = 1, \dots, M; t = 0, \dots, T - n\}.$$

Здесь $u_m(t)$ — интенсивность проекта m -го типа, начатого в период времени t . Динамика остатков расчетного счета описывается уравнением

$$s_0(t + 1) = s_0(t) + \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^n a_k^m u_m(t - k).$$

Возможности инвестора входят в доступный ему пул проектов; иными словами, должно выполняться условие самофинансирования:

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^M a_0^m u_m(t) \geq 0, t = 1, \dots, T.$$

Обозначим через $s_k(t)$ финансовое состояние инвестора в период $t + k$ при условии, что начиная с периода t используется только проект сохранения денег. Тогда вектор

$$\vec{S}(t) = (s_0(t), \dots, s_{n-1}(t))$$

описывает результат финансовой стратегии инвестора. Обозначим через $u_m(t)$ интенсивность проектов m -го типа, начатых в период времени t . Тогда $\vec{S}(t + 1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t)$. Здесь $\vec{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_M(t))$ — вектор интенсивностей инвестиционных проектов, начатых в период времени t , $D = (d_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$ — матрица $n \times n$ такая, что

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i + 1, i = 0, \dots, n - 2; \\ 1, & \text{если } i = j = n - 1; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$B = (b_{im})_{i=1,\dots,n}^{m=1,\dots,M}$ — матрица $n \times M$ такая, что $b_{im} = \sum_{j=0}^i a_j^m$.

²Если какой-то проект длится меньше, чем n периодов времени, то дополним соответствующий вектор нулями.

Целью инвестиционной стратегии является максимизация дохода в период времени не позднее T , т. е. оптимальная стратегия инвестиций определяется из решения задачи:

$$e^{-r\tau} h(\vec{S}(\tau - n + 1)) \rightarrow \max_{0 \leq \tau \leq T} \quad (1)$$

$$\vec{S}(t + 1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t), \quad t = 0, \dots, \tau - n; \quad (2)$$

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^M a_0^m u_m(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, \tau - n; \quad (3)$$

$$\vec{u}(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, \tau - n; \quad (4)$$

$$\vec{S}(0) = \vec{\xi}, \quad (5)$$

где $h(\vec{S}) = \begin{cases} s_{n-1}, & \text{если } \vec{S} = (s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^n; \\ -\infty & \text{иначе.} \end{cases}$

Обозначим через $W_T(\vec{\xi}, r)$ оптимальное значение функционала в задаче оптимизации (1)–(5). Функция $W_T(\vec{\xi}, r)$ оценивает начальное финансовое состояние инвестора при дефляторе r . Отметим, что построить функцию $W_T(\vec{\xi}, r)$ можно, итерируя оператор Беллмана:

$$W_{T+1}(\vec{\xi}, r) = \max \left\{ W_T(\vec{\xi}, r), e^{-r} \sup \left\{ W_T(D\vec{\xi} + B\vec{u}) \mid \vec{u} \geq 0, \xi_0 + \sum_{m=1}^M a_0^m u_m \geq 0 \right\} \right\},$$

$$W_0(\vec{\xi}, r) = h(\vec{\xi}).$$

Множество $L_T = \{\vec{\xi} \mid W_T(\vec{\xi}, r) > 0\}$ не зависит от значения дефлятора $r > 0$ и является выпуклым конусом. Заметим, что $L_T \subseteq L_{T+1}$ при $T = 0, 1, \dots$. Выпуклый конус $L_\infty = \bigcup_{T=0}^{+\infty} L_T$ будем называть конусом ликвидных состояний.

Инвестиционная функция пула проектов определяется на промежутке $[0, +\infty)$ по формуле

$$F(r) = \max_{1 \leq m \leq M} \sum_{j=0}^n a_j^m e^{-rj}.$$

Будем предполагать, что выполнены условия прибыльности пула инвестиционных проектов и отсутствия арбитража. То есть что $F(0) > 0$ и существует $\tilde{r} > 0$ такое, что $F(\tilde{r}) < 0$ (см. подробнее [5; 6]). Тогда инвестиционная функция $F(r)$ имеет положительные корни.

Теорема 1 (см. [3, теорема 2]). Пусть ρ – наименьший корень инвестиционной функции $F(r)$. Тогда при любых значениях $\vec{\xi} \in \mathbb{R}_+^n$, $r > 0$ существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} W_T(\vec{\xi}, r) = W_\infty(\vec{\xi}, r)$$

и выполнены следующие предположения:

1. Если $r < \rho$, то $W_\infty(\vec{\xi}, r) = +\infty$ при $\vec{\xi} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$;
2. Если $r > \rho$, то $W_\infty(\vec{\xi}, r) = 0$ при $\vec{\xi} \in \mathbb{R}_+^n$;
3. Если $0 < W_\infty(\vec{\xi}, r) < +\infty$ при $\vec{\xi} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$, то $r = \rho$.

2. Оценка новых инвестиционных проектов

Рассмотрим уникальный пакет проектов, который может начаться в период времени τ , где $0 \leq \tau \leq T - n$. Пусть пакет состоит из K инвестиционных проектов, которые описываются вектором финансовых потоков $\vec{\alpha}^k = (\alpha_0^k, \dots, \alpha_n^k)$, где $k = 1, \dots, K$, и могут осуществляться с интенсивностью v_k , где $0 \leq v_k \leq 1$, $k = 1, \dots, K$. Будем считать, что целью инвестора

является максимизация дохода от инвестиций к периоду времени T . Будем описывать предпринимательскую среду с помощью задачи оптимизации (1)–(5). Предположим, что в период времени τ возможности инвестора расширяются. Опишем расширение возможностей с помощью следующей задачи оптимизации:

$$e^{-\rho T} h(\vec{S}(T - n + 1)) \rightarrow \max; \quad (6)$$

$$\vec{S}(t + 1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t), t \in \{0, \dots, \tau - 1, \tau + 1, \dots, T - n\}; \quad (7)$$

$$\vec{S}(\tau + 1) = D\vec{S}(\tau) + B\vec{u}(\tau) + \sum_{k=1}^K v_k(\tau) \vec{\beta}^k; \quad (8)$$

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^M a_0^m u_m(t) \geq 0, t \in \{0, \dots, \tau - 1, \tau + 1, \dots, T - n\}; \quad (9)$$

$$s_0(\tau) + \sum_{m=1}^M a_0^m u_m(\tau) + \sum_{k=1}^K \alpha_0^k v_k(\tau) \geq 0; \quad (10)$$

$$\vec{u}(t) \geq 0, t = 0, \dots, T - n; \quad (11)$$

$$0 \leq v_k(\tau) \leq 1, k = 1, \dots, K; \quad (12)$$

$$\vec{S}(0) = \vec{\xi}. \quad (13)$$

Здесь $\vec{\beta}^k = (\beta_1^k, \dots, \beta_n^k)$, где $\beta_j^k = \sum_{i=0}^j \alpha_i^k$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, K$. Оптимальное значение функционала в задаче (6)–(13) не меньше, чем в задаче (1)–(5). Если оптимальное значение функционала в задаче (6)–(13) равно оптимальному значению функционала в задаче (1)–(5), то будем называть пакет новых инвестиционных проектов неэффективным.

Предложение 1. *Предположим, что начальное финансовое состояние инвестора ликвидно к периоду времени T , т.е. $\vec{\xi} \in L_t$. Тогда следующая двойственная задача к задаче (1)–(5):*

$$\sum_{j=0}^{n-2} (p(j) - p(j+1)) \xi_j + p(n-1) \xi_{n-1} \rightarrow \min; \quad (14)$$

$$\sum_{j=0}^n a_j^m p(t+j) \leq 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad t = 0, \dots, T - n; \quad (15)$$

$$p(t+1) \leq p(t), \quad t = 0, \dots, T - 1; \quad (16)$$

$$p(T) \geq e^{-\rho T} \quad (17)$$

— имеет решение, и оптимальные значения функционалов в задачах (1)–(5) и (14)–(17) равны.

Доказательство. Обозначим $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. С помощью теоремы Фенхеля (см. [12, с. 46]) построим двойственную задачу к задаче выпуклого программирования (1)–(5). Для этого представим задачу (1)–(5) в эквивалентном виде:

$$\inf_{\vec{s}} (f(\vec{s}) + \delta_A(\vec{s})),$$

где $f(\vec{s}) = -e^{-\rho T} h(\vec{s})$, а $\delta_A(\vec{s})$ — индикаторная функция множества

$$A = \left\{ \vec{S}(T - n + 1) \mid \exists (\vec{S}(1), \dots, \vec{S}(T - n + 1)), (\vec{u}(0), \dots, \vec{u}(T - n)), \right. \\ \left. \text{удовлетворяющие (2)–(5), где } \tau = T \right\}.$$

Вычисляя сопряженную к $f(\vec{s})$ функцию, получаем, что

$$f^*(-\vec{\lambda}) = \lim_{\vec{s} \geq 0} \left(e^{-\rho T} s_{n-1} - (\vec{\lambda} \vec{s}) \right) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n, \quad \lambda_{n-1} \geq e^{-\rho T}; \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $\vec{s} = (s_0, \dots, s_{n-1})$, $\vec{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$, $(\vec{\lambda} \vec{s})$ — скалярное произведение векторов $\vec{\lambda}$ и \vec{s} . Сопряженная функция к функции $\delta_A(\vec{s})$ является опорной функцией множества A , и ее значения совпадают со значениями функционала в задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} & (\vec{\lambda}, \vec{S}(T-n+1)) \rightarrow \max; \\ & \vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t), \quad t = 0, \dots, T-n; \\ & s_0(t) + \sum_{m=1}^M a_0^m u_m(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-n; \\ & \vec{u}(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-n; \\ & \vec{S}(0) = \vec{\xi}. \end{aligned}$$

Обозначим $\vec{\gamma} = (a_0^1, \dots, a_0^M)$. Составим функцию Лагранжа для этой задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} & L(\vec{S}(1), \dots, \vec{S}(T-n+1), \vec{u}(0), \dots, \vec{u}(T-n), \vec{q}(0), \dots, \vec{q}(T-n), r(0), \dots, r(T-n)) \\ & = \vec{\lambda} \vec{S}(T-n+1) + \vec{q}(0)(D\vec{\xi} + B\vec{u}(0) - \vec{S}(1)) + \sum_{t=1}^{T-n} \vec{q}(t)(D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t) - \vec{S}(t+1)) \\ & + r(0)\left(\xi_0 + \sum_{m=1}^M u_m(0)a_0^m\right) + \sum_{t=1}^{T-n} r(t)\left(s_0(t) + \sum_{m=1}^M u_m(t)a_0^m\right) = (D^*\vec{q}(0), \vec{\xi}) + r(0)\xi_0 \\ & + \sum_{t=1}^{T-n} \vec{S}(t)(D^*\vec{q}(t) - \vec{q}(t-1) + r(t)\vec{e}_0) + \vec{S}(T-n+1)(\vec{\lambda} - \vec{q}(T-n)) + \sum_{t=0}^{T-n} \vec{u}(t)(B^*\vec{q}(t) + r(t)\vec{\gamma}). \end{aligned}$$

Выразим опорную функцию множества A с помощью двойственной задачи:

$$(D^*\vec{q}(0), \vec{\xi}) + r(0)\xi_0 \rightarrow \min; \quad (19)$$

$$\vec{q}(t-1) = D^*\vec{q}(t) + r(t)\vec{e}_0, \quad t = 1, \dots, T-n; \quad (20)$$

$$B^*\vec{q}(t) + r(t)\vec{\gamma} \leq 0, \quad t = 0, \dots, T-n; \quad (21)$$

$$\vec{q}(T-n) = \vec{\lambda}; \quad (22)$$

$$r(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-n. \quad (23)$$

Из уравнения (20) следует, что

$$q_0(t-1) = r(t), q_1(t-1) = q_0(t), \dots, q_{n-2}(t-1) = q_{n-3}(t), q_{n-1}(t-1) = q_{n-2}(t) + q_{n-1}(t). \quad (24)$$

Из (24) имеем, что $r(t) = (\vec{q}(t-1), \vec{e}_0)$. Двойственной к задаче (1)–(5) является задача $\inf(f^*(-\vec{\lambda}) + \delta_A^*(\vec{\lambda}))$. Подставляя в нее выражение (18) для сопряженной функции $f^*(-\vec{\lambda})$ и представление (19)–(23) опорной функции множества A , получаем задачу линейного программирования:

$$(D^*\vec{q}(0), \vec{\xi}) + r(0)\xi_0 \rightarrow \min;$$

$$\vec{q}(t-1) = D^*\vec{q}(t) + r(t)\vec{e}_0, \quad t = 1, \dots, T-n;$$

$$B^*\vec{q}(t) + r(t)\vec{\gamma} \leq 0, \quad t = 0, \dots, T-n;$$

$$\vec{q}(T-n) \geq 0; \quad (\vec{q}(T-n), \vec{e}_n) \geq e^{-\rho T};$$

$$r(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-n.$$

Введем новые переменные:

$$p(T - n + i + 1) = \sum_{j=i}^{n-1} q_j(T - n), i = 0, \dots, n - 1;$$

$$p(t + 1) = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t), t = 0, \dots, T - n - 1;$$

$$p(0) = r(0) + p(1).$$

Из (20) следует, что

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t - 1) = r(t) + \sum_{j=1}^{n-2} q_j(t - 1) + q_{n-1}(t) + q_{n-2}(t) = r(t) + \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t) = r(t) + p(t + 1),$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n b_j^m q_{j-1}(t) + r(t) a_0^m \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^j a_i^m q_{j-1}(t) + r(t) a_0^m = a_0^m \left(r(t) + \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t) \right) + \sum_{i=1}^n \left(a_i^m \sum_{j=1-1}^{n-1} q_j(t) \right) \\ &= a_0^m (r(t) + p(t + 1)) + \sum_{i=1}^n a_i^m \left(q_{n-2}(t + 1) + q_{n-1}(t + 1) + \sum_{j=0}^{n-i-1} q_j(t + i - 1) \right) \\ &= a_0^m p(t) + \sum_{i=1}^n a_i^m \left(q_{n-i}(t + i - 1) + \sum_{j=1}^{i-1} q_{n-2}(t + 1 + j) + q_{n-1}(t + i) + \sum_{j=0}^{n-i-1} q_j(t + i - 1) \right) \\ &= a_0^m p(t) + \sum_{i=1}^n a_i^m \left(q_{n-1}(t + i) + q_{n-2}(t + i) + \left(\sum_{j=1}^{i-2} q_{n-i+j}(t + i - 1) \right) + \sum_{j=0}^{n-i} q_j(t + i - 1) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i^m p(t + i), \quad t = 0, \dots, T - n. \end{aligned}$$

Поскольку

$$q_{n-1}(0) = p(1) - \sum_{j=0}^{n-2} q_j(0) = p(1) - \sum_{j=0}^{n-2} q_0(j) = p(1) - \sum_{j=1}^{n-1} r(j) = p(1) - \sum_{j=1}^{n-1} (p(j) - p(j + 1)) = p(n),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} (D^* \vec{q}(0), \vec{\xi}) + r(0) \xi_0 &= r(0) \xi_0 + \sum_{j=0}^{n-2} q_j(0) \xi_{j+1} + q_{n-1}(0) \xi_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} r(i) \xi_i + q_{n-1}(0) \xi_{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (p(i) - p(i - 1)) \xi_i + p(n) \xi_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2} (p(i) - p(i - 1)) \xi_i + p(n - 1) \xi_{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, для ликвидных к периоду времени T финансовых состояний инвестора $\vec{\xi}$ задача линейного программирования (14)–(17) является двойственной к задаче (1)–(5). Утверждение предложения 1 следует из теоремы двойственности Фенхеля (см. [12, с. 46]).

Теорема 2. *Предположим, что начальное финансовое состояние инвестора ликвидное к периоду времени T , т. е. $\vec{\xi} \in L_t$. Для того чтобы пакет новых инвестиционных проектов $\{\bar{\alpha}^k \mid k = 1, \dots, K\}$ был неэффективен в период времени τ , необходимо и достаточно, чтобы существовало решение задачи линейного программирования (14)–(17) такое, что выполняются неравенства*

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j^k p(\tau + j) \leq 0, \quad k = 1, \dots, K. \quad (25)$$

Доказательство. Двойственная задача к задаче оптимизации (6)–(13) имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n-2} (p(j) - p(j+1))\xi_j + p(n-1)\xi_{n-1} + \sum_{k=1}^K \theta_k \rightarrow \min; \quad (26)$$

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j^m p(t+j) \leq 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad t = 0, \dots, T-n; \quad (27)$$

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j^k p(\tau+j) - \theta_k \leq 0, \quad \theta_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K; \quad (28)$$

$$p(t+1) \leq p(t), \quad t = 0, \dots, T-1; \quad (29)$$

$$p(T) \geq e^{-\rho T}. \quad (30)$$

По теореме двойственности оптимальные значения функционалов в задаче (6)–(13) и задаче (26)–(30) равны. Поэтому оптимальное значение функционала в задаче (26)–(30) не меньше, чем оптимальное значение функционала в задаче (14)–(17). Подчеркнем также, что ограничения (15)–(17) совпадают с ограничениями (27), (29), (30).

Если решение задачи (14)–(17) удовлетворяет неравенствам (25), то, доопределяя $\theta_k = 0$, $k = 1, \dots, K$, получаем решение задачи (26)–(30). При этом оптимальное значение функционала в задаче (26)–(30) равно оптимальному значению функционала в задаче (14)–(17). Следовательно, по теореме двойственности равны оптимальные значения функционалов в задаче (1)–(5) и задаче (6)–(13), т. е. пакет новых инвестиционных проектов неэффективен.

Если пакет новых инвестиционных проектов неэффективен, оптимальные значения функционалов в задаче (1)–(5) и задаче (6)–(13) равны. Тогда по теореме двойственности оптимальное значение функционала в задаче (26)–(30) равно оптимальному значению функционала в задаче (14)–(17). Если при этом на решении задачи (26)–(30) $\sum_{k=1}^K \theta_k > 0$, то на этом решении

$$\sum_{j=0}^{n-2} (p(j) - p(j+1))\xi_j + p(n-1)\xi_{n-1}$$

меньше оптимального значения функционала в задаче (14)–(17), что противоречит оптимальности решения задачи (14)–(17). Значит, $\sum_{k=1}^K \theta_k = 0$, откуда следует, что $\theta_k = 0$, $k = 1, \dots, K$, а переменные $\{p(t) \mid t = 0, \dots, T\}$ из решения задачи (26)–(30) образуют решение задачи (14)–(17) и удовлетворяют неравенствам (25).

Теорема 2 доказана.

Предложение 1 и теорема 2 утверждают, что при оценке финансового состояния инвестора и оценке эффективности новых проектов в качестве дефляторов финансовых потоков следует использовать соответствующие компоненты решения $\{p(t) \mid t = 0, \dots, T\}$ задачи линейного программирования (14)–(17). Подчеркнем, что в задаче (14)–(17) не используется какая-либо информация о новых инвестиционных проектах. Таким образом, дефляторы определяются независимо от информации о пуле новых инвестиционных проектов. Из теоремы 2 следует, что если задача линейного программирования (14)–(17) имеет неединственное решение, то неэффективные по отдельности инвестиционные проекты могут образовывать эффективный

пул. Это наблюдение позволяет выразить на языке математических моделей содержание предпринимательской деятельности.

Обозначим через $V_T(\vec{\xi})$ функцию Беллмана для задачи (1)–(5). Функция $V_T(\vec{\xi})$ является вогнутой, положительно однородной функцией, принимающей положительные значения внутри конуса L_T , и удовлетворяет уравнению Беллмана

$$V_{T+1}(\vec{\xi}) = e^{-\rho} \sup \left\{ V_T(D\vec{\xi} + B\vec{u}) \mid \vec{u} \geq 0, \xi_0 + \sum_{m=1}^M a_0^m u_m \geq 0 \right\}, \quad V_0(\vec{\xi}) = h(\vec{\xi}). \quad (31)$$

Решая на каждом шаге экстремальную задачу (31), можно построить синтез оптимального управления $\vec{u}_T(\vec{\xi})$ и вычислить функцию Беллмана на следующем шаге:

$$V_{T+1}(\vec{\xi}) = e^{-\rho} V_T(D\vec{\xi} + B\vec{u}_T(\vec{\xi})).$$

Синтез оптимального управления позволяет построить динамическую траекторию финансовых состояний $\vec{S}_{t+1} = D\vec{S}_t + B\vec{u}_{T-t}(\vec{S}_t)$, $\vec{S}_0 = \vec{\xi}$, $t = 0, \dots, T-1$.

Из (14)–(17) следует, что дефляторы $(p(0) - p(1), \dots, p(n-2) - p(n-1), p(n-1)) \in \partial V_t(\vec{\xi})$.

Предложение 2. Пусть $\{\hat{S}(t) \mid t = 0, \dots, T-n+1\}$, $\{\hat{u}(t) \mid t = 0, \dots, T-n\}$ – решение задачи (1)–(5), а $\{\hat{p}(t) \mid t = 0, \dots, T\}$ – решение задачи (14)–(17). Тогда

$$(\hat{p}(t) - p(t+1), \dots, \hat{p}(t+n-2) - \hat{p}(t+n-1), \hat{p}(t+n-1)) \in e^{-\rho t} \partial V_{T-t}(\hat{S}(t)), \quad t = 0, \dots, T-n+1. \quad (32)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $0 \leq \tau \leq T-n$. Пусть $\hat{S}(\tau) = (\hat{s}_0(\tau), \dots, \hat{s}_{n-1}(\tau))$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$e^{-\rho T} h(\vec{S}(T-n+1)) \rightarrow \max; \quad (1')$$

$$\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t), \quad t = \tau, \dots, T-n; \quad (2')$$

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^M a_0^m u_m(t) \geq 0, \quad t = \tau, \dots, T-n; \quad (3')$$

$$\vec{u}(t) \geq 0, \quad t = \tau, \dots, T-n; \quad (4')$$

$$\vec{S}(\tau) = \hat{S}(\tau). \quad (5')$$

Учитывая специфику функционала (1'), задачу (1')–(5') можно преобразовать в задачу линейного программирования, двойственная задача к которой имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n-2} (p(\tau+j) - p(\tau+j+1)) \hat{s}_j(\tau) + p(\tau+n-1) \hat{s}_{n-1} \rightarrow \min \quad (14')$$

$$\sum_{j=0}^n a_j^m p(\tau+j) \leq 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad t = \tau, \dots, T-n; \quad (15')$$

$$p(t+1) \leq p(t), \quad t = \tau, \dots, T-1; \quad (16')$$

$$p(T) \geq e^{-\rho T}. \quad (17')$$

Решения $\{\hat{S}(t) \mid t = 0, \dots, T-n+1\}$, $\{\hat{u}(t) \mid t = 0, \dots, T-n\}$, $\{\hat{p}(t) \mid t = 0, \dots, T\}$ удовлетворяют ограничениям (1)–(5), (14)–(17) и соответствующим условиям дополняющей нежесткости. Ограничения (2')–(5'), (15')–(17') и соответствующие им условия дополняющей нежесткости содержатся среди ограничений (2)–(5), (15)–(17) и соответствующих им условий дополняющей нежесткости. Поэтому набор $\{\hat{S}(t) \mid t = 0, \dots, T-n+1\}$, $\{\hat{u}(t) \mid t = 0, \dots, T-n\}$ является решением задачи (1')–(5'), а набор $\{\hat{p}(t) \mid t = 0, \dots, T\}$ – решением задачи (14')–(17'). В силу принципа Беллмана $V_t(\vec{\xi}) = e^{-\rho t} V_{T-t}(\hat{S}(\tau))$, откуда следует (32).

Предложение 2 доказано.

Заключение

Отметим, что магистральные свойства оптимальных решений задач (1)–(5) и (14)–(17) (см. подробнее [3]) оправдывают использование в качестве дефлятора при оценке финансового состояния и вычислении NPV новых инвестиционных проектов $e^{-\rho}$, где ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r) = \max_{1 \leq m \leq M} \sum_{j=0}^n a_j^m e^{-rj}$ пула тиражируемых инвестиционных проектов $\vec{a}^m = (a_0^m, a_1^m, \dots, a_n^m)$, $m = 1, \dots, M$, описывающих предпринимательскую среду.

Воспользуемся описанием предпринимательской среды с помощью модели Кантора — Липмана для анализа проблем модернизации российской экономики и восстановления экономического роста. В модернизации нуждаются, прежде всего, трудоемкие отрасли отечественной экономики. В период 1999–2007 гг. восстановление экономического роста в этом комплексе отраслей позволило повысить их способность конкурировать с импортом, стимулировало развитие человеческого капитала и увеличило потребительский спрос. Проиллюстрируем изменения экономических условий, которые привели к стагнации, с помощью рисунков. В верхней части рис. 1 сплошной линией изображена инвестиционная функция $F(r)$ комплекса трудоемких отраслей. Эта функция имеет три корня: $r_1 < r_2 < r_3$. В период восстановительного роста за счет поддержки государственного бюджета реализовывались высокодоходные инфраструктурные проекты. Инвестиционная функция этих проектов, изображенная в нижней части рис. 1, имеет корень r_0 , который превышает r_3 . Условием поддержки проекта за счет государственного бюджета являлось привлечение софинансирования. Софинансирование предоставлялось коммерческими структурами в форме кредитов под процент r_k . Чтобы заемщик кредита расплатился с долгами по кредиту, доходность проекта r_0 должна превышать процент по кредитам r_k . Источником денежных средств у коммерческих структур являлось аккумулирование сбережений населения и свободных денежных средств в трудоемком комплексе отраслей под процент r_d . Чтобы коммерческие структуры имели прибыль, процент по депозитам r_d должен быть меньше процента по кредитам r_k . Таким образом, в пул доступных инвесторам в трудоемком комплексе отраслей добавился депозитный проект. Если $r_d > r_2$, то депозитный проект позволяет инвесторам размещать свободные денежные средства под процент r_d . В верхней части рис. 1 изображена пунктиром инвестиционная функция депозитного проекта в случае, когда $r_d > r_2$.

Именно этот случай реализовался на этапе восстановительного роста 1999–2007 гг. Отметим, что поточечный максимум двух инвестиционных функций имеет минимальный положительный корень r_3 . Высокие темпы роста, соответствующие доходности r_3 , вызвали увеличение

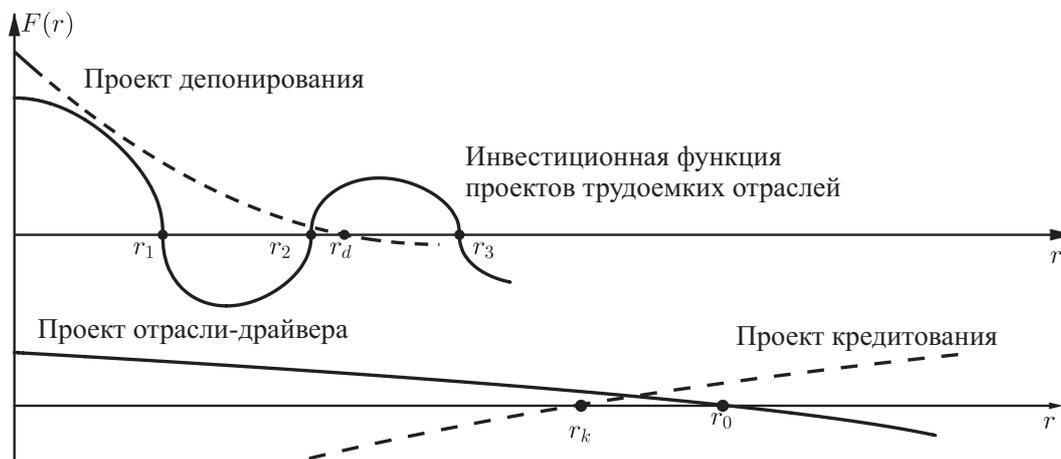


Рис. 1. Режим экономического роста

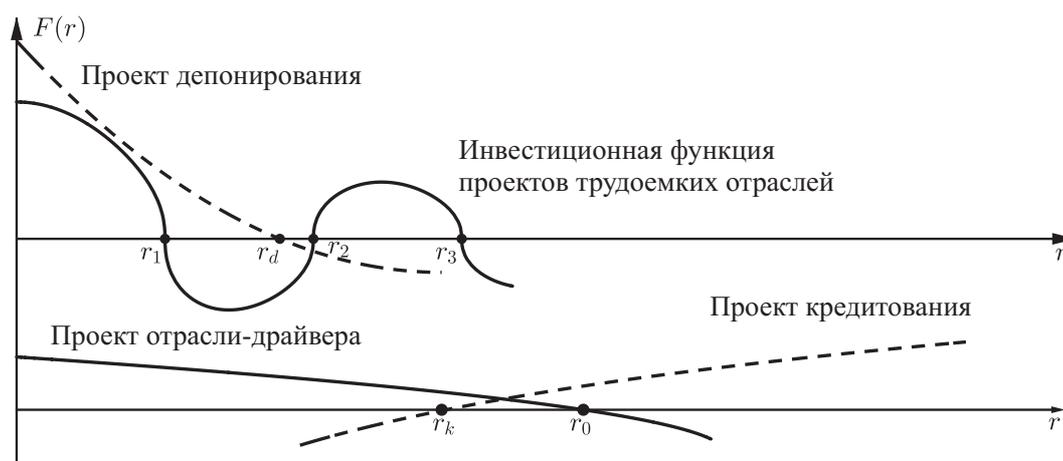


Рис. 2. Режим стагнации

спроса на услуги инфраструктурных отраслей, которое привело к увеличению транзакционных издержек и снижению доходности проектов с поддержкой государственного бюджета r_0 . Уменьшение r_0 индуцирует снижение процентных ставок r_k и r_d , поскольку между ними должно выполняться соотношение $r_0 > r_k > r_d$. Когда процент по депозитам r_d стал меньше, чем r_2 , экономические условия у инвесторов в трудоемком комплексе отраслей изменились. Эти изменения отражены на рис. 2. Доходность их инвестиций снизилась до значения r_1 . Депозитный проект под процент r_d стал для них конкурировать с инвестициями в трудоемком комплексе отраслей. В результате экономика оказалась в режиме стагнации, в котором коммерческие банки имеют значительные ликвидные средства. Лишь незначительная часть этих средств инвестируется в реальный сектор экономики. Кейнсианская стратегия восстановления экономического роста рекомендует в этой ситуации направить средства государственного бюджета на повышение доходности r_0 проектов с государственной поддержкой в расчете, что вслед за этим увеличатся процентные ставки r_k и r_d , а режим стагнации, проиллюстрированный на рис. 2, сменится восстановлением экономического роста на рис. 1. По-видимому, такая стратегия выбрана российским руководством, выделяющим значительные средства на реализацию национальных проектов. Этот сценарий восстановления экономического роста предполагает детальный анализ на языке математических моделей, позволяющий учесть влияние монопольного положения коммерческих банков, которых устраивает их сложившееся комфортное положение в условиях большой разницы между процентными ставками по кредитам и депозитам и у которых имеются значительные свободные ликвидные средства, чтобы не увеличивать процентную ставку r_d .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996. 544 с.
2. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. От госплана к неэффективному рынку: математический анализ эволюции российских экономических структур. UK: The Edwin Mellen Press, 1999. 392 с.
3. Шананин А.А. Математическое моделирование инвестиций на несовершенном рынке капитала. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 265–274. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-265-274.
4. Cantor D.G., Lipman S.A. Investment selection with imperfect capital markets // *Econometrica*. 1983. Vol. 51, no. 4. P. 1121–1144. doi: 10.2307/1912055.
5. Cantor D.G., Lipman S.A. Optimal Investment Selection with a Multitude of Projects // *Econometrica*. 1995. Vol. 63, no. 5. P. 1231–1240. doi: 10.2307/2171729.

6. Adler L., Gale D. Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy // *Mathematical Finance*. 1997. Vol. 7, no. 1. P. 73–81. doi: 10.1111/1467-9965.00023.
7. Sonin I.M. Growth rate, internal rates of return and turnpikes in investment model // *Econ. Theory*. 1995. Vol. 5, no. 3. P. 383–400. doi: 10.1007/BF01212325.
8. Presman E.L., Sonin I.M. Growth rate, internal rates of return and financial bubbles. М.: ЦЭМИ РАН, 2000. 33 p.
9. Бельский В.З. Экономическая динамика: анализ инвестиционных проектов в рамках линейной модели Неймана-Гейла. М.: ЦЭМИ РАН, 2002. 78 с.
10. Ващенко М.П., Шананин А.А. Оценка доходности пула инвестиционных проектов в модели оптимального инвестирования в непрерывном времени // *Мат. моделирование*. 2012. Т. 24, № 3. С. 70–86.
11. Shanani A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh. Financial bubbles existence in the Cantor-Lippman model for continuous time // *Lobachevskii J. Math.* 2018. Vol. 39, № 7. P. 929–935. doi: 10.1134/S1995080218070181.
12. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. 264 с.

Поступила 16.10.2019

После доработки 20.01.2020

Принята к публикации 27.01.2020

Шананин Александр Алексеевич
чл.-корр. РАН, профессор, д-р физ.-мат. наук,
зав. кафедрой анализа систем и решений
Московский физико-технический институт (научно-исследовательский университет);
главный науч. сотрудник ФИЦ ИУ РАН;
профессор МГУ им. Ломоносова;
профессор РУДН
г. Москва
e-mail: alexshan@yandex.ru

REFERENCES

1. Petrov A.A., Pospelov I.G., Shanani A.A. *Opyt matematicheskogo modelirovaniya ekonomiki* [An attempt at the mathematical modeling of an economy]. Moscow: Energoatomizdat Publ., 1996, 544 p. ISBN: 5-283-03169-1.
2. Petrov A.A., Pospelov I.G., Shanani A.A. *Ot gosplana k neeffektivnomu rynku: matematicheskii analiz evolyutsii rossiiskikh ekonomicheskikh struktur* [From Gosplan to Ineffective Market: Mathematical Analysis of Evolution of Russian Economic Structures]. UK: The Edwin Mellen Press, 1999, 392 p. ISBN: 0773432647.
3. Shanani A.A. Mathematical modeling of investments at an imperfect capital market. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 265–274 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-265-274.
4. Cantor D.G., Lipman S.A. Investment selection with imperfect capital markets. *Econometrica*, 1983, vol. 51, no. 4, pp. 1121–1144. doi: 10.2307/1912055.
5. Cantor D.G., Lipman S.A. Optimal investment selection with a multitude of projects. *Econometrica*, 1995, vol. 63, no. 5, pp. 1231–1240. doi: 10.2307/2171729.
6. Adler L., Gale D. Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy. *Mathematical Finance*, 1997, vol. 7, no. 1, pp. 73–81. doi: 10.1111/1467-9965.00023.
7. Sonin I.M. Growth rate, internal rates of return and turnpikes in an investment model. *Econ. Theory*, 1995, vol. 5, no. 3, pp. 383–400. doi: 10.1007/BF01212325.
8. Presman E.L., Sonin I.M. *Growth rate, internal rates of return and financial bubbles*. Moscow: TsEMI RAN Publ., 2000, 33 p. ISBN: 5-8211-0122-0.
9. Belen'skii V.Z. *Ekonomicheskaya dinamika: analiz investitsionnykh projektov v ramkakh lineinoi modeli Neimana-Geila* [Economic Dynamics: Analysis of Investment Projects in the Frames of Neumann-Gale Linear Model]. Moscow: TsEMI RAN, 2002, 78 p. ISBN: 5-8211-0212-X.

10. Vashchenko M.P., Shanenin A.A. The estimation of the yield of the pool of investment projects in the optimal investing problem for continuous time. *Math. Models Comput. Simul.*, 2012, vol. 4, no. 5, pp. 497–508. doi: 10.1134/S2070048212050092.
11. Shanenin A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh. Financial bubbles existence in the Cantor–Lippman model for continuous time. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 7, pp. 929–935. doi: 10.1134/S1995080218070181.
12. Aubin J.P. *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques*. Paris: Masson, 1984, 214 p. Translated to Russian under the title *Nelineinyi analiz i ego ekonomicheskie prilozheniya*. Moscow: Mir Publ., 1988, 264 p.

Received October 16, 2019

Revised January 20, 2020

Accepted January 27, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10246).

Aleksandr Alekseevich Shanenin, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Moscow, 141701 Russia; Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Science, Moscow, 119333 Russia; Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia; Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, 117198 Russia, e-mail: alexshan@yandex.ru.

Cite this article as: A.A.Shanenin. Analysis of the financial state of an investor based on the Cantor–Lippman model, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 293–306.

СОДЕРЖАНИЕ

АЛЕКСАНДР БОРИСОВИЧ КУРЖАНСКИЙ (<i>К 80-летию юбилею</i>)	7
Б. И. Ананьев. Оценивание состояний стохастических многошаговых включений	12
В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов. Траектория, минимизирующая облучение движущегося объекта.....	27
М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов. Построение решений задач управления линейными системами дробного порядка на основе аппроксимационных моделей	39
В. В. Гороховик. Ступенчато-аффинные функции, полупространства и отделимость выпуклых множеств с приложениями к выпуклым задачам оптимизации	51
Н. Л. Григоренко, Е. Н. Хайлов, Э. В. Григорьева, А. Д. Клименкова. Оптимальные стратегии лечения раковых заболеваний в математической модели конкуренции Лотки — Вольтерры	71
М. И. Гусев. Асимптотическое поведение множеств достижимости нелинейных систем с изопериметрическими ограничениями на малых временных промежутках.....	89
А. Р. Данилин. Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления с двумя малыми соподчиненными параметрами.....	102
Д. Д. Емельянов, Е. Я. Рубинович. Траекторное управление наблюдениями в 3D с борта БПЛА по угломерной информации	112
А. Ф. Клейменов. Принятие решений в одной гибридной задаче динамического управления с тремя участниками.....	131
Е. К. Костоусова. О полиэдральном оценивании множеств достижимости в “расширенном” пространстве для многошаговых систем с неопределенными матрицами и интегральными ограничениями.....	141
В. И. Максимов. Об одном алгоритме реконструкции возмущения нелинейной системы	156
М. С. Никольский. О максимальном гарантированном выигрыше в некоторых задачах конфликтного управления многошаговыми процессами.....	167
Н. Г. Новоселова, Н. Н. Субботина. Построение множества выживаемости в задаче химиотерапии злокачественной опухоли, растущей по закону Гомперца	173
В. С. Пацко, А. А. Федотов. Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса	182
Г. А. Тимофеева. Вероятностные решения задач условной оптимизации.....	198
А. А. Толстоногов. Дифференциальные включения в банаховом пространстве с составной правой частью.....	212

П. А. Точилин. О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени.....	223
В. Н. Ушаков, М. В. Першаков. О двусторонних аппроксимациях множеств достижимости управляемых систем с геометрическими ограничениями на управления .	239
А. В. Фоминых, В. В. Карелин, Л. Н. Полякова. Градиентный метод решения некоторых типов дифференциальных включений.....	256
А. Г. Ченцов. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы.....	274
А. А. Шананин. Анализ финансового состояния инвестора на основе модели Кантора — Липмана.....	293

CONTENTS

ALEXANDER BORISOVICH KURZHANSKI (On the Occasion of His 80th Birthday)	7
B. I. Ananyev. Estimation of states of multistage stochastic inclusions	12
V. I. Berdyshev, V. B. Kostousov. A trajectory minimizing the exposure of a moving object	27
M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov. Construction of solutions to control problems for fractional-order linear systems based on approximation models	39
V. V. Gorokhovich. Step-affine functions, half-spaces, and separation of convex sets with applications to convex optimization problems	51
N. L. Grigorenko, E. N. Khailov, E. V. Grigorieva, A. D. Klimenkova. Optimal strategies in the treatment of cancers in the Lotka–Volterra mathematical model of competition	71
M. I. Gusev. Asymptotic behavior of small-time reachable sets of nonlinear systems with isoperimetric constraints	89
A. R. Danilin. Asymptotics of a solution to a problem of optimal boundary control with two small cosubordinate parameters	102
D. D. Emeliyanov, E. Ya. Rubinovich. Trajectory control of 3D observations from an UAV by angular measurements	112
A. F. Kleimenov. Decision making in a hybrid two-step problem of dynamic control with three participants	131
E. K. Kostousova. On polyhedral estimation of reachable sets in the “extended” space for discrete-time systems with uncertain matrices and integral constraints	141
V. I. Maksimov. On an algorithm for the reconstruction of a perturbation in a nonlinear system	156
M. S. Nikol’skii. On the maximal guaranteed payoff in some problems of conflict control of multistep processes	167
N. G. Novoselova, N. N. Subbotina. Construction of the viability set in a problem of chemotherapy of a malignant tumor growing according to the Gompertz law	173
V. S. Patsko, A. A. Fedotov. Analytic description of a reachable set for the Dubins car .	182
G. A. Timofeeva. Probabilistic solutions of conditional optimization problems	198
A. A. Tolstonogov. Differential inclusions in a Banach space with composite right-hand side	212

P. A. Tochilin. On the construction of a piecewise affine value function in an infinite-horizon optimal control problem.....	223
V. N. Ushakov, M. V. Pershakov. On two-sided approximations of reachable sets of control systems with geometric constraints on the controls.....	239
A. V. Fominyh, V. V. Karelin, L. N. Polyakova. Gradient method for solving some types of differential inclusions.....	256
A. G. Chentsov. Ultrafilters and maximal linked systems.....	274
A. A. Shaninin. Analysis of the financial state of an investor based on the Cantor–Lippman model.....	293

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

В журнале “Труды Института математики и механики УрО РАН” публикуются оригинальные работы теоретического характера по современным разделам математики и механики.

“Труды Института математики и механики УрО РАН” являются изданием широкого профиля, поэтому редколлегия рекомендует авторам в начале статьи изложить постановку задачи и дать определения основных понятий, используемых в работе. Новые результаты должны быть ясно сформулированы в виде математических утверждений и доказаны (нетривиальность и новизна). В доказательствах нельзя использовать результаты из неопубликованных или принятых в печать статей. В “Труды Института математики и механики” не принимаются методические статьи. По заказу редакции могут публиковаться статьи обзорного характера. Объем статьи, как правило, не должен превышать 16 страниц (в формате стилевого файла “Труды Института математики и механики”).

Для решения вопроса о целесообразности публикации в “Трудах Института математики и механики” редакционная коллегия организует рецензирование представленных статей.

Журнал индексируется в *российских базах*: РИНЦ, MathNet;
 в *зарубежных базах*: MathSciNet (2013),
 Emerging Sources Citation Index Web of Science (май 2018).
 Scopus (октябрь 2019).

Автор представляет в редакцию электронный вариант статьи (tex-формат и pdf-формат).

К статье должны быть приложены:

- Сопроводительное письмо в отсканированном виде от имени организации следующего содержания: Организация не возражает против опубликования статьи в открытой печати автора (ФИО, должность, звание). На письме должна стоять печать организации.
- Информация со сведениями об авторе (на русском и английском языке) — ФИО, место работы, почтовый адрес, а также e-mail и телефон.

Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

Авторы заключают с Учреждением Российской академии наук Институт математики и механики Уральского отделения РАН авторский договор, текст которого размещен на сайте журнала <http://journal.imm.uran.ru>.

Правила оформления рукописей:

- В статье должны быть сформулированы и доказаны **НОВЫЕ** результаты в виде теорем, утверждений, предложений.
- Текст статьи должен быть набран в LATEX2 ϵ в соответствии со стилевым файлом и рекомендациями журнала, размещенными на веб-сайте ИММ УрО РАН.
- Представляемая в “Труды Института математики и механики УрО РАН” статья должна начинаться с индекса УДК, названия работы, фамилий и инициалов авторов, аннотации, ключевых слов на русском и английском языках. Аннотация (не менее 10-15 предложений) должна быть информативной (не содержать общих слов), оригинальной (отражать основное содержание статьи и результаты исследований), структурированной. В аннотации не допускаются ссылки на список цитированной литературы и нумерация формул. После аннотации должен быть указан код MSC от 1 до 5 значений (Mathematics Subject Classification-2020).
- Список цитированной литературы оформляется по ГОСТу 7.05-2008, очередность названий — по алфавиту либо в соответствии с порядком ссылок в тексте работы (предпочтительней).
- Включение рисунков в статью теоретического характера носит исключительный характер и должно быть обосновано. Статьи, содержащие рисунки, принимаются к публикации только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.
- Файлы со статьями — tex-источник и pdf-вариант статьи — высылаются на адрес e-mail: trudy@imm.uran.ru.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26

№ 1

2020

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN (print) 0134-4889

ISSN (online) 2658-4786

Редакторы Н. Н. Моргунова, Н. М. Юркова
TeX-редактор Г. Ф. Корнилова

Английский редактор Е. В. Васильева

Отв. за выпуск А. Е. Эльберт

Поддержка электронных версий журнала
С. Е. Желтышева, Н. Н. Моргунова

Выпускающие редакции Л. К. Бабинцева, Р. Х. Комарова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 2.03.20. Формат 60 × 84¹/₈. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 33. Уч.-изд. л. 32,0 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
<http://journal.imm.uran.ru>

ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226