РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 25, № 4 2019

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 25 № 4 2019

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 25, № 4.
Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. 292 с.

ISSN (print) 0134–4889
ISSN (online) 2658–4786
DOI журнала: 10.21538/0134-4889

Журнал индексируется *в российских базах*: РИНЦ, MathNet;
в зарубежных базах: MathSciNet,
Emerging Sources Citation Index Web of Science

TRUDY
INSTITUTA
MATEMATIKI I MEKHANIKI
URO RAN

Vol. 25 No. 4 2019

YEKATERINBURG

Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. Vol. 25, no. 4. Yekaterinburg: IMM UrO RAN, 2019. 292 p.

ISSN (print) 0134–4889
ISSN (online) 2658–4786

DOI: 10.21538/0134-4889

Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN is abstracted and/or indexed in Elibrary, MathNet, Mathematical Reviews, Emerging Sources Citation Index WoS

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.518+517.982

О СОПРЯЖЕННОСТИ ПРОСТРАНСТВА МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ[1]

В. В. Арестов

А. Фига-Таламанка доказал (1965), что пространство $M_r = M_r(G)$ линейных ограниченных операторов в пространстве L_r, $1 \le r \le \infty$, на локально компактной группе G, инвариантных относительно сдвига (точнее, операции группы), является сопряженным пространством для конструктивно описанного им пространства $A_r = A_r(G)$. В данной статье для пространства мультипликаторов $M_r = M_r(\mathbb{R}^m)$ лебегова пространства $L_r(\mathbb{R}^m)$, $1 \le r < \infty$, предъявлено банахово функциональное пространство $F_r = F_r(\mathbb{R}^m)$ с двумя свойствами. Пространство M_r является для F_r сопряженным: $F_r^* = M_r$; доказано, что на самом деле F_r совпадает с $A_r = A_r(\mathbb{R}^m)$. Пространство F_r описано в других терминах в сравнении с A_r. Пространство F_r возникло и используется автором начиная с 1980 года в исследованиях задачи Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования линейными ограниченными операторами в пространствах $L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $1 \le \gamma \le \infty$.

Ключевые слова: преддуальное пространство для пространства мультипликаторов.

V. V. Arestov. On the conjugacy of the space of multipliers.

A. Figà Talamanca proved (1965) that the space $M_r = M_r(G)$ of bounded linear operators in the space L_r, $1 \le r \le \infty$, on a locally compact group G that are translation invariant (more exactly, invariant under the group operation) is the conjugate space for a space $A_r = A_r(G)$, which he described constructively. In the present paper, for the space $M_r = M_r(\mathbb{R}^m)$ of multipliers of the Lebesgue space $L_r(\mathbb{R}^m)$, $1 \le r < \infty$, we present a Banach function space $F_r = F_r(\mathbb{R}^m)$ with two properties. The space M_r is conjugate to F_r: $F_r^* = M_r$; actually, it is proved that F_r coincides with $A_r = A_r(\mathbb{R}^m)$. The space F_r is described in different terms as compared to A_r. This space appeared and has been used by the author since 1975 in the studies of Stechkin's problem on the best approximation of differentiation operators by bounded linear operators in the spaces $L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $1 \le \gamma \le \infty$.

Keywords: predual space for the space of multipliers.

MSC: 47B38, 54C35

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-5-14

1. Основные обозначения

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, есть m-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $t\eta = \sum_{j=1}^m t_j\eta_j$ точек $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$ и нормой $|t| = \sqrt{tt}$. В данной статье используются стандартные обозначения классических функциональных комплексных пространств Лебега на пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$. При $1 \le \gamma < \infty$ через $L_\gamma = L_\gamma(\mathbb{R}^m)$ обозначается пространство измеримых на $\mathbb{R}^m$ функций f, у которых функция $|f|^\gamma$ суммируема на $\mathbb{R}^m$; это пространство наделено нормой

$$\|f\|_\gamma = \|f\|_{L_\gamma} = \left(\int |f(t)|^\gamma dt\right)^{1/\gamma};$$

здесь и ниже в интегралах по $\mathbb{R}^m$ множество интегрирования не указано. Пространство L_1 часто обозначается через L. Символами $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^m)$ обозначается пространство измеримых существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$; оно наделено нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty} = \text{ess sup}\{|f(t)| \colon t \in \mathbb{R}^m\}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Это пространство содержит пространство $C = C(\mathbb{R}^m)$ непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$, наделенное равномерной нормой $\|f\|_C = \sup\{|f(t)|\colon t \in \mathbb{R}^m\}$. В свою очередь $C = C(\mathbb{R}^m)$ содержит подпространство $C_0 = C_0(\mathbb{R}^m)$ функций, имеющих нулевой предел на бесконечности. Далее в большинстве ситуаций под L_∞ будет пониматься пространство C_0; эти ситуации будут оговариваться особо.

Обозначим через $V = V(\mathbb{R}^m)$ пространство (комплексных) ограниченных борелевских мер на $\mathbb{R}^m$. Норма в пространстве V есть полная вариация $\bigvee \mu = \bigvee_{\mathbb{R}^m} \mu$ меры $\mu \in V$. Будучи наделенным этой нормой, пространство V является банаховым.

Перечисленные пространства функций и их нормы инвариантны относительно группы сдвигов $\tau = \{\tau_h,\ h \in \mathbb{R}^m\}$, определенных формулой $(\tau_h f)(t) = f(t-h)$, $t \in \mathbb{R}^m$, и родственного семейства операторов $\sigma = \{\sigma_h,\ h \in \mathbb{R}^m\}$, заданных формулой $(\sigma_h f)(t) = f(h-t)$, $t \in \mathbb{R}^m$. Операторы этих двух семейств связаны соотношением $\sigma_h = \tau_h \sigma_0$, где σ_0 — оператор смены знака аргумента функции: $(\sigma_0 f)(t) = f(-t)$, $t \in \mathbb{R}^m$.

Прямое и обратное преобразования Фурье функций, по крайней мере, из пространства L, определим соответственно формулами

$$\widehat{f}\,(t) = \int e^{-2\pi t\eta i} f(\eta)\, d\eta, \quad \widecheck{f}\,(t) = \int e^{2\pi t\eta i} f(\eta)\, d\eta = (\sigma_0 \widehat{f}\,)(t).$$

Свойства преобразования Фурье можно найти, к примеру, в [12, гл. I, §§ 1, 2].

Пусть $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ есть (топологическое векторное) пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^m$. Точнее, $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ есть пространство бесконечно дифференцируемых функций f таких, что для любых мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ ограничена величина

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup\{|x^\alpha (D^\beta f)(x)| : \ x \in \mathbb{R}^m\}; \tag{1.1}$$

здесь $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$D^\beta f = \frac{\partial f^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_m^{\beta_m}}, \quad |\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m.$$

Структура топологического векторного пространства на $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ определяется системой функционалов (норм) (1.1). Пусть $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ — соответствующее двойственное пространство непрерывных функционалов на $\mathscr{S}$, называемых обобщенными функциями или распределениями (см., например, [12, гл. I, § 3; 10, гл. 6]). Значение функционала $\theta \in \mathscr{S}'$ на функции $\phi \in \mathscr{S}$ будем обозначать через $\langle \theta, \phi \rangle$.

Пространство $\mathscr{S}'$ содержит множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ функций f, измеримых, локально суммируемых на $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющих условию

$$\int (1 + |t|)^d |f(t)| dt < \infty$$

с некоторым $d = d(f) \in \mathbb{R}$; функции $f \in \mathscr{L}$ называют медленно растущими (классическими) функциями. Функции $f \in \mathscr{L}$ сопоставляется функционал $f \in \mathscr{S}'$ по формуле

$$\langle f, \phi \rangle = \int f(t) \phi(t) dt, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

Пространство $\mathscr{S}'$ замкнуто относительно важных классических операций. Для функционала $\theta \in \mathscr{S}'$ производной D^β, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, называют функционал $D^\beta \theta \in \mathscr{S}'$, определенный соотношением

$$\langle D^\beta \theta, \phi \rangle = (-1)^{|\beta|} \langle \theta, D^\beta \phi \rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

Преобразование Фурье функционала $\theta \in \mathscr{S}'$ есть функционал $\widehat{\theta} \in \mathscr{S}'$, действующий по формуле

$$\langle \widehat{\theta}\,, \phi \rangle = \langle \theta, \widehat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

В пространстве $\mathscr{S}'$ определяется оператор сдвига по следующему правилу: для $\theta \in \mathscr{S}'$ и $h \in \mathbb{R}^m$ элемент $\tau_h\theta$ есть функционал, который действует по формуле

$$\langle \tau_h\theta,\, \phi \rangle = \langle \theta,\, \tau_{-h}\phi \rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

Сверткой $\theta * \phi$ элемента $\theta \in \mathscr{S}'$ и функции $\phi \in \mathscr{S}$ называют функцию $(\theta * \phi)(x) = \langle \theta, \sigma_x\phi \rangle$; если θ есть классическая функция из множества $\mathscr{L}$, то имеем

$$(\theta * \phi)(x) = \int \theta(\eta)\phi(x - \eta)d\eta.$$

Свертка $\theta * \phi$ элементов $\theta \in \mathscr{S}'$ и $\phi \in \mathscr{S}$ есть бесконечно дифференцируемая функция; она сама и любая ее производная $D^\beta(\theta * \phi)$ принадлежат пространству $\mathscr{L}$. Для свертки имеет место равенство [12, гл. I, § 3, (3.12) и теорема 3.13]

$$\langle \theta * \phi,\, \psi \rangle = \langle \theta,\, (\sigma_0\phi) * \psi \rangle, \quad \theta \in \mathscr{S}', \quad \phi,\ \psi \in \mathscr{S}. \tag{1.2}$$

2. Пространство мультипликаторов

Пусть $\mathcal{B}(L_r)$ есть множество всех линейных ограниченных операторов в пространстве L_r; при $r = \infty$ под $\mathcal{B}(L_\infty)$ здесь понимается пространство линейных ограниченных операторов из $C_0 = C_0(\mathbb{R}^m)$ в $C = C(\mathbb{R}^m)$. Обозначим через $\mathcal{T}(L_r)$ множество операторов $T \in \mathcal{B}(L_r)$, инвариантных относительно группы сдвигов на L_r.

Оператор $T \in \mathcal{T}(L_r)$, по крайней мере, на множестве $\mathscr{S}$, имеет вид свертки $Tf = \theta * f$ с некоторым элементом $\theta = \theta(T) \in \mathscr{S}'$ (см., например, [12, гл. I, теорема 3.16; 8, теорема 1.2]). Такие обобщенные функции θ называют *мультипликаторами пространства* L_r. Множество мультипликаторов M_r, наделенное нормой $\|\theta(T)\|_{M_r} = \|T\|_{L_r \to L_r}$, является банаховым пространством. Свойствам мультипликаторов посвящена обширная литература (см., в частности, монографии [8; 9; 12]).

Отметим некоторые известные факты относительно пространств мультипликаторов M_r при $1 \le r \le \infty$ (см., например, [12, гл. 1, § 3; 8, гл. I; 9, гл. 4]). Для пары сопряженных показателей $r,\ r'$ пространства мультипликаторов совпадают вместе с равенством норм элементов:

$$M_{r'} = M_r \quad \text{и} \quad \|\theta\|_{M_{r'}} = \|\theta\|_{M_r}, \quad \theta \in M_r.$$

Отсюда и из интерполяционной теоремы Рисса о выпуклости (см., например, [6, гл. VI, § 10, теорема 11] или [12, гл. V, § 1, теорема 1.16]) следует, что если параметр ρ заключен между r и r', то имеет место вложение

$$M_r \subset M_\rho, \quad \text{причем} \quad \|\theta\|_{M_\rho} \le \|\theta\|_{M_r}, \quad \theta \in M_r. \tag{2.1}$$

Как следствие при всех $r,\ 1 \le r \le \infty$,

$$M_\infty \subset M_r \subset M_2$$

с соответствующими неравенствами для норм мультипликаторов.

Точное описание пространства M_r известно только при $r = 2$ и $r = \infty$ $(r = 1)$ (см., например, [12, гл. 1, § 3; 8, гл. I; 9, гл. 4]). А именно,

$$M_2 = \widetilde{L_\infty} = \{\theta \in \mathscr{S}' \colon \widehat{\theta} \in L_\infty\}, \quad \text{причем} \quad \|\theta\|_{M_2} = \|\check{\theta}\|_{L_\infty}, \quad \theta \in M_2. \tag{2.2}$$

$$M_\infty = M_1 = V, \quad \text{причем} \quad \|\theta\|_{M_\infty} = \bigvee \theta, \quad \theta \in V. \tag{2.3}$$

А. Фига-Таламанка [7] доказал (1965), что пространство $\mathcal{T}(L_r(G))$ линейных ограниченных операторов в пространстве L_r, $1 \le r \le \infty$, на локально компактной группе G, инвариантных относительно сдвига (точнее, операции группы), является сопряженным пространством для конструктивно описанного им пространства $A_r = A_r(G)$. Точнее, в [7] доказано, что пространство $\mathcal{T}(L_r(G))$ изометрически изоморфно двойственному пространству для пространства A_r функций на G, являющихся суммами функциональных рядов

$$h = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu * g_\nu \colon f_\nu \in L_r, \quad g_\nu \in L_{r'}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\|_{L_r} \|g_\nu\|_{L_{r'}} < \infty. \tag{2.4}$$

Норма элемента (функции) $h \in A_r$ определяется формулой

$$\|h\|_{A_r} = \inf\Big\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\|_{L_r} \|g_\nu\|_{L_{r'}},\ h = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu * g_\nu \Big\}. \tag{2.5}$$

Элементу $T \in \mathcal{T}(L_r(G))$ сопоставляется на A_r функционал $\varphi_T(h) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (Tf_\nu * g_\nu)(0)$.

Относительно пары банаховых пространств X, Y со свойством, в соответствии с которым Y является сопряженным для X, т. е. $X^* = Y$, говорят, что пространство X является преддуальным для пространства Y. В этой терминологии результат работы [7] означает, что пространство A_r является преддуальным для постранства $\mathcal{T}(L_r(G))$.

Приведенный результат работы [7] справедлив, в частности, для пространства $\mathcal{T}(L_r(\mathbb{R}^m))$ линейных ограниченных операторов в пространстве $L_r(\mathbb{R}^m)$, инвариантных относительно группы сдвигов τ или, что эквивалентно, для пространства мультипликаторов $M_r = M_r(\mathbb{R}^m)$.

В статье автора [1] при исследовании задачи Стечкина [11] о наилучшем приближении в пространствах Лебега $L_\gamma(\mathbb{R}^m)$ операторов дифференцирования и, в более общем случае, неограниченных операторов, инвариантных относительно сдвига, линейными ограниченными операторами, было построено и применено функциональное пространство, которое в данной работе ниже обозначено через F_r; эта тема была развита в [2] и более полно изложена в [3, § 6]. В перечисленных работах использовалось вложение $M_r \subset F_r^*$. Конструкции пространств F_r и $A_r = A_r(\mathbb{R}^m)$ различные. Однако, как оказалось, эти два пространства совпадают. Цель данной статьи как раз и состоит в доказательстве этого утверждения.

Ниже в теореме 1 будет доказано, что F_r является преддуальным пространством для M_r, т. е. $M_r = F_r^*$. Затем в теореме 2 уже с использованием этого факта будет доказано, что на самом деле пространства F_r и $A_r(\mathbb{R}^m)$ совпадают.

3. Преддуальное пространство для пространства мультипликаторов M_r

При $1 \le r \le \infty$ определим на множестве $\mathscr{S}$ функционал

$$\|\phi\|_{(r)} = \sup\{|\langle \theta, \phi \rangle| \colon \theta \in M_r,\ \|\theta\|_{M_r} \le 1\}, \quad \phi \in \mathscr{S}, \tag{3.1}$$

который, как нетрудно понять, является на $\mathscr{S}$ нормой; пространство $\mathscr{S}$ с этой нормой обозначим через $\mathscr{S}_{(r)}$. Из (2.2), (2.3) и (2.1) следует, что

$$\|\phi\|_{(2)} = \|\,\widehat{\phi}\,\|_L \ge \|\phi\|_{(r)} \ge \|\phi\|_{(\infty)} = \|\phi\|_{C_0}, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{3.2}$$

Убедимся, что при всех $1 \le r \le \infty$ для нормы (3.1) свертки выполняется неравенство

$$\|\phi * \psi\|_{(r)} \le \|\phi\|_{L_r} \|\psi\|_{L_{r'}}, \quad \phi, \psi \in \mathscr{S}. \tag{3.3}$$

Свертка $\phi * \psi$ функций ϕ и ψ из $\mathscr{S}$ принадлежит $\mathscr{S}$, поэтому левая часть (3.3) определена корректно. Для функционала $\theta \in M_r$ и функций $\phi, \psi \in \mathscr{S}$ согласно (1.2) имеем $\langle \theta * \phi, \psi \rangle =$

$\langle\theta, \sigma_0\phi * \psi\rangle$, а следовательно, $|\langle\theta, \phi * \psi\rangle| = |\langle\theta * \sigma_0\phi, \psi\rangle \le \|\theta * \sigma_0\phi\|_r\, \|\psi\|_{r'} \le \|\theta\|_{M_r}\|\phi\|_r\, \|\psi\|_{r'}$. Отсюда и из определения (3.1) следует свойство (3.3).

Обозначим через $F_r = F_r(\mathbb{R}^m)$ пополнение $\mathscr{S}$ относительно нормы (3.1). В процитированных выше работах [1;2] возникло несколько экстремальных задач в пространствах F_r. Ряд этих задач был изучен автором в работах [1; 2; 4; 5] и в недавней статье (В. В. Арестов. Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L_2 операторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. Р. 34–56.)

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *При $1 \le r \le \infty$ пространства F_r обладают следующими свойствами.*

1. *Пространство F_r вложено в пространство C_0:*

$$F_r \subset C_0 \quad \text{и} \quad \|f\|_{C_0} \le \|f\|_{F_r}, \quad f \in F_r. \tag{3.4}$$

2. *Для сопряженных показателей r и r' пространства совпадают: $F_r = F_{r'}$.*

3. *Для конкретных значений параметра $r = 2$ и $r = \infty$ $(r = 1)$ пространства F_r имеют следующую структуру:*

$$F_2 = \check{L} = \{f \in C_0 \colon \widehat{f} \in L\}, \quad \|f\|_{F_2} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_2. \tag{3.5}$$

$$F_\infty = C_0, \quad \|f\|_{F_\infty} = \|f\|_{C_0}, \quad f \in F_\infty. \tag{3.6}$$

4. *При $2 \le r \le \infty$ пространство F_r по r не убывает, а точнее, если $2 \le r_1 \le r_2 \le \infty$, то*

$$F_{r_1} \subset F_{r_2} \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{r_2}} \le \|f\|_{F_{r_1}}, \quad f \in F_{r_1},$$

в частности, при $1 \le r \le \infty$

$$F_2 \subset F_r \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_r} \le \|f\|_{F_2} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_2.$$

Доказательство. Будем исходить из конструкции пополнения F_r пространства $\mathscr{S}_{(r)}$ по Кантору (см. например, [6, гл. II, § 5]). А именно, пусть $\mathfrak{F}_r$ есть линейное пространство фундаментальных последовательностей функций из $\mathscr{S}_{(r)}$ с почленными операциями. Две последовательности из $\mathfrak{F}_r$ считаются эквивалентными, если их (почленная) разность сходится к нулю. Пространство F_r есть фактор-пространство пространства $\mathfrak{F}_r$ по этому отношению эквивалентности. Таким образом, элементами f пространства F_r являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей $\{\phi_n\} \subset \mathscr{S}_{(r)}$. Для фундаментальной последовательности $\{\phi_n\} \subset \mathscr{S}_{(r)}$ последовательность норм $\{\|\phi_n\|_{\mathscr{S}_{(r)}}\}$ сходится, и для эквивалентных последовательностей, составляющих f, этот предел один и тот же; полагают $\|f\|_{F_r} = \lim_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{(r)}$.

В силу (3.2) последовательность $\{\phi_n\} \subset \mathscr{S}_{(r)}$, фундаментальная в $\mathscr{S}_{(r)}$, будет фундаментальной и в C_0. В силу полноты C_0 эта последовательность сходится в C_0 к некоторой функции $f \in C_0$. При этом эквивалентные последовательности из $\mathscr{S}_{(r)}$ имеют в C_0 один и тот же предел. Следовательно, пространство F_r можно отождествить с подмножеством пространства C_0 таких пределов. В этом смысле $F_r \subset C_0$. Далее, для норм членов фундаментальной последовательности $\{\phi_n\} \subset \mathscr{S}_{(r)}$ выполняются неравенства $\|\phi_n\|_{C_0} \le \|\phi_n\|_{\mathscr{S}_{(r)}}$. Поэтому такое же неравенство будет выполняться и для пределов норм. Тем самым доказано свойство (3.4).

Все оставшиеся утверждения леммы нетрудно получить из соответствующих перечисленных выше свойств пространств M_r. Лемму 1 можно считать доказанной. □

В дальнейшем будет использоваться ядро Гаусса

$$G_\alpha(t) = e^{-\pi\alpha^2|t|^2} \tag{3.7}$$

с параметром $\alpha > 0$; эта функция принадлежит $\mathscr{S}$. Для преобразования Фурье ядра Гаусса справедлива формула (см., например, [12, гл. I, § 1, теорема 1.13])

$$\widehat{G_\alpha}(t) = \alpha^{-m/2} e^{-\pi|t|^2/\alpha^2}; \tag{3.8}$$

эту формулу можно переписать в виде $\widehat{G_\alpha} = \alpha^{-m/2} G_{\alpha^{-1}}$. Для функции (3.8) справедливо равенство

$$\int \widehat{G_\alpha}(t)dt = G_\alpha(0) = 1.$$

Имеем $\|G_\alpha\|_{(\infty)} = \|G_\alpha\|_{C_0} = 1$, $\|G_\alpha\|_{(2)} = \|\widehat{G_\alpha}\|_L = 1$, а потому $\|G_\alpha\|_{(r)} = 1,\ 1 \le r \le \infty$.

Следующая техническая лемма будет использоваться несколько раз в дальнейшем.

Лемма 2. *При всех $1 \le r \le \infty$ свертка $\phi * g_\alpha$ функции $\phi \in \mathscr{S}$ и преобразования Фурье $g_\alpha = \widehat{G_\alpha}$ ядра Гаусса при $\alpha \to +0$ сходится в $\mathscr{S}_{(r)}$ к функции ϕ:*

$$\|\phi * g_\alpha - \phi\|_{(r)} \to 0, \quad \alpha \to +0. \tag{3.9}$$

Доказательство. В силу свойства (3.2) утверждение (3.9) достаточно проверить при $r = 2$. Имеем

$$\|\phi * g_\alpha - \phi\|_{(2)} = \int |\widehat{\phi}(t)|(1 - G_\alpha(t))dt. \tag{3.10}$$

Из определения (3.7) ядра Гаусса видно, что $0 < G_\alpha(t) \le 1$, $t \in \mathbb{R}^m$, и $G_\alpha(t) \to 1$ при $\alpha \to +0$ поточечно на $\mathbb{R}^m$. Применяя теорему Лебега о мажорантной сходимости [6, гл. III, § 6, следствие 16], заключаем, что величина (3.10) сходится к нулю при $\alpha \to +0$; как следствие, имеет место (3.9). Лемма 2 доказана. □

Отметим, что в доказательствах двух приведенных ниже теорем используются соображения работы [7].

Теорема 1. *При всех $1 \le r \le \infty$ пространство M_r является сопряженным для пространства F_r.*

Доказательство. Известно, что $L^* = L_\infty$ и $C_0^* = V$ (см., например, [6, гл. IV]). Отсюда и из соотношений (2.2), (3.5), (2.3) и (3.6) заключаем, что утверждение теоремы 1 справедливо при $r = \infty$ ($r = 1$) и $r = 2$. Из дальнейших рассуждений исключим лишь значения $r = 1$ и $r = \infty$; итак, будем предполагать, что $1 < r < \infty$. Пространство $\mathscr{S}_{(r)}$ плотно в пространстве F_r, и следовательно, $F_r^* = \mathscr{S}_{(r)}^*$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\mathscr{S}_{(r)}^* = M_r. \tag{3.11}$$

Точнее, нужно доказать равенство множеств и равенство норм элементов в этих множествах.

Определение (3.1) влечет, что для любого $\theta \in M_r$ справедливо неравенство

$$|\langle\theta, \phi\rangle| \le \|\theta\|_{M_r} \|\phi\|_{(r)}, \quad \phi \in M_r. \tag{3.12}$$

Следовательно, имеют место вложение $M_r \subset \mathscr{S}_{(r)}^*$ и неравенство $\|\theta\|_{\mathscr{S}_{(r)}^*} \le \|\theta\|_{M_r}$ для норм элементов $\theta \in M_r$.

Докажем обратное вложение $\mathscr{S}_{(r)}^* \subset M_r$. Для упрощения рассуждений воспользуемся обозначением S_ρ, $1 \le \rho < \infty$, для пространства $\mathscr{S}$ с нормой пространства L_ρ; важно, что S_ρ плотно в L_ρ.

Пусть ϑ есть линейный ограниченный функционал на $\mathscr{S}_{(r)}$, т. е. $\vartheta \in \mathscr{S}_{(r)}^* (= F_r^*)$. Значение функционала ϑ на функции $\phi \in \mathscr{S}$ будем записывать в виде $\vartheta[\phi]$. Для значения $\vartheta[(\sigma_0\phi) * \psi]$ функционала ϑ на свертке $(\sigma_0\phi) * \psi$ для функций $\phi, \psi \in \mathscr{S}$, применяя неравенство (3.3), получаем

$$|\vartheta[(\sigma_0\phi) * \psi]| \le \|\vartheta\|_{F_r^*} \|(\sigma_0\phi) * \psi\|_{(r)} \le \|\vartheta\|_{F_r^*} \|\phi\|_{L_r} \|\psi\|_{L_{r'}}. \tag{3.13}$$

Зафиксируем функцию ϕ. Тогда $\vartheta[(\sigma_0\phi) * \psi]$ есть линейный функционал по $\psi \in \mathscr{S}$. Более того, из (3.13) следует, что этот функционал является линейным ограниченным на $S_{r'}$ и норма этого функционала не превосходит величины $\|\vartheta\|_{F_r^*}\|\phi\|_{L_r}$. Поскольку пространство $S_{r'}$ плотно в пространстве $L_{r'}$, то существует, причем единственная, функция $u \in L_r$ с нормой $\|u\|_{L_r} \le \|\vartheta\|_{F_r^*}\|\phi\|_{L_r}$такая, что

$$\vartheta[(\sigma_0\phi) * \psi] = \int u(x)\psi(x)dx, \quad \psi \in \mathscr{S}. \tag{3.14}$$

Функция u однозначно определяется функцией ϕ; рассмотрим оператор $T\colon \phi \to u = T\phi$. Справедлива оценка $\|T\phi\|_r \le \|\vartheta\|_{F_r^*}\|\phi\|_{L_r}$, $\phi \in \mathscr{S}$. Для любых функций $\phi_1, \phi_2, \psi \in \mathscr{S}$ и любых констант c_1, c_2 имеем

$$\int (T(c_1\phi_1 + c_2\phi_2)(x) - c_1T(\phi_1)(x) - c_2T(\phi_2)(x))\,\psi(x)dx$$

$$= \vartheta[(c_1\sigma_0\phi_1 + c_2\sigma_0\phi_2) * \psi] - c_1\vartheta[\sigma_0\phi_1 * \psi] - c_2\vartheta[\sigma_0\phi_2 * \psi] = 0.$$

В силу произвольности функции ψ заключаем, что $T(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = c_1T\phi_1 + c_2T\phi_2$. Таким образом, T — линейный ограниченный оператор из S_r в L_r и, более того, $\|T\|_{S_r \to L_r} \le \|\vartheta\|_{F_r^*}$.

Наконец, убедимся, что оператор T инвариантен относительно сдвига на $\mathscr{S}$, т. е. для любой функции $\phi \in \mathscr{S}$ и для любого $h \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство

$$T\tau_h\phi = \tau_hT\phi. \tag{3.15}$$

В самом деле, для $\phi, \psi \in \mathscr{S}$ и $h \in \mathbb{R}^m$ имеем $(\sigma_0\tau_h)\phi = (\tau_{-h}\sigma_0)\phi$. С помощью этого равенства получаем $(\sigma_0\tau_h\phi) * \psi = ((\tau_{-h}\sigma_0)\phi) * \psi = (\sigma_0\phi) * (\tau_{-h}\psi)$. Поэтому

$$\int (T\tau_h\phi)(x)\psi(x)dx = \vartheta[(\sigma_0(\tau_h\phi)) * \psi] = \vartheta[(\sigma_0\phi) * (\tau_{-h}\psi] = \int (T\phi)(x)\psi(x+h)dx$$

$$= \int (T\phi)(x-h)\psi(x)dx = \int (\tau_h(T\phi))(x)\psi(x)dx$$

и окончательно

$$\int (T\tau_h\phi)(x)\psi(x)dx = \int (\tau_hT\phi)(x)\psi(x)dx.$$

Последнее равенство как раз и влечет свойство (3.15).

Оператор T продолжается по непрерывности до оператора в пространстве L_r; обозначим продолжение тем же символом T. Оператор T в L_r линейный, ограниченный с $\|T\| \le \|\vartheta\|_{F_r^*}$ и инвариантный относительно сдвига. Следовательно, на $\mathscr{S}$ он является сверткой $T\phi = \theta * \phi$, $\phi \in \mathscr{S}$, с некоторым элементом $\theta \in M_r$.

Наконец, проверим, что

$$\vartheta[\phi] = \langle\theta, \phi\rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{3.16}$$

В терминах элемента θ формула (3.14) имеет вид

$$\vartheta[(\sigma_0\phi) * \psi] = \langle\theta * \phi, \psi\rangle, \quad \phi,\, \psi \in \mathscr{S}.$$

Согласно этой формуле для функции $\phi \in \mathscr{S}$ и преобразования Фурье $g_\alpha(t) = \widehat{G_\alpha}(t) = \alpha^{-m/2}e^{-\pi t^2/\alpha^2}$ ядра Гаусса (3.7) имеем

$$\vartheta[\phi * g_\alpha] = \langle\theta * \sigma_0\phi, g_\alpha\rangle. \tag{3.17}$$

Перейдем в соотношении (3.17) к пределу при $\alpha \to +0$. Свойство (3.9) леммы 2 влечет, что $\lim_{\alpha\to+0}\vartheta[\phi * g_\alpha] = \vartheta[\phi]$. Функция $\theta * \sigma_0\phi$ непрерывная медленно растущая, т. е. принадлежит множеству $\mathscr{L}$. Семейство функций $g_\alpha = \widehat{G_\alpha}$ при $\alpha \to +0$ является δ-образным, и, как следствие,

$$\lim_{\alpha\to+0}\langle\theta * \sigma_0\phi, g_\alpha\rangle = (\theta * \sigma_0\phi)(0) = \langle\theta, \sigma_0\sigma_0\phi\rangle = \langle\theta, \phi\rangle.$$

Таким образом, соотношение (3.17) в пределе при $\alpha \to 0$ превращается в (3.16).

Наряду с равенством функционалов (3.16) имеет место и равенство норм

$$\|\vartheta\|_{F_r^*} = \|\theta\|_{M_r}. \tag{3.18}$$

Действительно, полученное ранее неравенство $\|T\| \le \|\vartheta\|_{F_r^*}$ в данной ситуации означает, что $\|\theta\|_{M_r} \le \|\vartheta\|_{F_r^*}$. С другой стороны, из (3.16) и (3.12) следует неравенство

$$|\vartheta[\phi]| = |\langle \theta, \phi \rangle| \le \|\theta\|_{M_r} \, \|\phi\|_{(r)}, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

А это влечет $\|\vartheta\|_{F_r^*} \le \|\theta\|_{M_r}$. Следовательно, действительно имеет место (3.18).

Представление (3.16) функционалов $\vartheta \in \mathscr{S}_{(r)}^*$ означает, что имеет место вложение $\mathscr{S}_{(r)}^* \subset M_r$, а значит, и равенство множеств (3.11). При этом имеет место и равенство норм элементов множеств в (3.11). Теорема 1 доказана полностью. □

Теорема 2. *При всех* $1 \le r \le \infty$ *пространства* $F_r(\mathbb{R}^m)$ *и* $A_r(\mathbb{R}^m)$ *совпадают*:

$$F_r(\mathbb{R}^m) = A_r(\mathbb{R}^m). \tag{3.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим сразу, что поскольку оба пространства в (3.19) имеют одно и то же сопряженное, то нормы общих элементов этих пространств совпадают.

Убедимся вначале, что имеет место вложение

$$F_r \subset A_r. \tag{3.20}$$

Свертка $\phi * \psi$ функций $\phi, \psi \in \mathscr{S}$ принадлежит как $\mathscr{S}$, так и A_r. Как следствие леммы 2 множество $\mathscr{S} * \mathscr{S}$ плотно в пространстве $\mathscr{S}_{(r)}$. Следовательно, $\mathscr{S}_{(r)} \subset A_r$. Поскольку $\mathscr{S}_{(r)}$ плотно в F_r, то имеет место и вложение (3.20).

Проверим теперь обратное вложение

$$A_r \subset F_r. \tag{3.21}$$

Линейная оболочка множества $\mathscr{S} * \mathscr{S}$ плотна в A_r. В самом деле, пусть $h \in A_r$ и (2.4) — одно из представлений функции h. С помощью двух конечных множеств функций $\{\phi\}_{\nu=1}^N$ и $\{\psi\}_{\nu=1}^N$ из $\mathscr{S}$ образуем функцию

$$w = \sum_{\nu=1}^{N} \phi_\nu * \psi_\nu.$$

Рассмотрим разность

$$h - w = S_N + R_N, \quad S_N = \sum_{\nu=1}^{N} (f_\nu * g_\nu - \phi_\nu * \psi_\nu), \quad R_N = \sum_{\nu=N+1}^{\infty} f_\nu * g_\nu.$$

Функцию S_N запишем в виде

$$S_N = \sum_{\nu=1}^{N} \left((f_\nu - \phi_\nu) * g_\nu + \phi_\nu * (g_\nu - \psi_\nu) \right).$$

Согласно определению (2.5) нормы в A_r имеем

$$\|h - w\|_{A_r} \le s_N + r_N,$$

$$s_N = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\|f_\nu - \phi_\nu\|_{L_r} \|g_\nu\|_{L_{r'}} + \|\phi_\nu\|_{L_r} \|g_\nu - \psi_\nu\|_{L_{r'}} \right), \quad r_N = \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \|f_\nu\|_{L_r} \|g_\nu\|_{L_{r'}}.$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Выберем вначале N столь большим, чтобы $r_N < \varepsilon/2$. Множество $\mathscr{S}$ плотно в пространствах L_r и $L_{r'}$. Поэтому функции $\{\phi\}_{\nu=1}^N$ и $\{\psi\}_{\nu=1}^N$ можно выбрать так, чтобы $s_N < \varepsilon/2$. В этом случае будем иметь $\|h - w\|_{A_r} < \varepsilon$. Таким образом, линейная оболочка $\mathfrak{S}$ множества $\mathscr{S} * \mathscr{S}$ действительно плотна в A_r.

Поскольку $\mathfrak{S} \subset \mathscr{S}$, то имеет место вложение (3.21). Вложения (3.20) и (3.21) влекут равенство (3.19). Теорема 2 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В.В.** Приближение операторов типа свертки линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 3–19.
2. **Арестов В.В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов, инвариантных относительно сдвига, линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 3–20.
3. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124. doi: 10.4213/rm1019 .
4. **Arestov V.V.** On the best approximation of the differentiation operator // Ural Math. J. 2015. Vol. 1, no. 1. P. 20–29. doi: 10.15826/umj.2015.1.002 .
5. **Arestov V.V.** Best approximation of a differentiation operator on the set of smooth functions with exactly or approximately given Fourier transform // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019) / eds. M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos. Cham: Springer, 2019. P. 434-448. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11548). doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_30 .
6. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004. 896 с.
7. **Figà-Talamanca A.** Translation invariant operators in L^p // Duke. Math. J. 1965. Vol. 32. P. 495–502.
8. **Хермандер Л.** Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 71 с.
9. **Larsen R.** An introduction to the theory of multipliers. Berlin etc.: Springer, 1971. 282 p.
10. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 443 с.
11. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.
12. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.

Поступила 15.09.2019
После доработки 14.10.2019
Принята к публикации 18.10.2019

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет;
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru

REFERENCES

1. Arestov V.V. Approximation of operators of convolution type by linear bounded operators. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1981, vol. 145, pp. 1–18.
2. Arestov V.V. Best approximation of unbounded shift-invariant operators by linear bounded operators. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1994, vol. 198, pp. 1–16.
3. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russ. Math. Surv.*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001 .
4. Arestov V.V. On the best approximation of the differentiation operator. *Ural Math. J.*, 2015, vol. 1, no. 1, pp. 20–29. doi: 10.15826/umj.2015.1.002 .
5. Arestov V.V. Best Approximation of a Differentiation Operator on the Set of Smooth Functions with Exactly or Approximately Given Fourier Transform. In: Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds), *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, 2019, Lecture Notes in Computer Science, vol. 11548, Springer, Cham, pp. 434–448. doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_30 .
6. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear Operators. Part* 1: *General Theory.* N Y: Interscience, 1988. 872 p. ISBN: 978-0-471-60848-6 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.* Moscow: Editorial URSS, 2004, 896 p.

7. Figà-Talamanca A. Translation invariant operators in L^p. *Duke Math. J.*, 1965, vol. 32, no. 3, pp. 495–502. doi: 10.1215/S0012-7094-65-03250-3 .
8. Hörmander L. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. *Acta Mathematica*, 1960, vol. 104, no. 1-2, pp. 93–140. doi: 10.1007/BF02547187 . Translated to Russian under the title *Otsenki dlya operatorov, invariantnykh otnositel'no sdviga*. Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962, 71 p.
9. Larsen R. *An introduction to the theory of multipliers*. Berlin etc.: Springer, 1971, 282 p. doi: 10.1007/978-3-642-65030-7 .
10. Rudin W. *Functional analysis*. N Y: McGraw-Hill, 1973, 397 p. ISBN: 0070542252 . Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz*. Moscow: Mir Publ., 1975, 443 p.
11. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*. 1967, vol. 1, iss. 2, pp. 91–99. doi: https://doi.org/10.1007/BF01268056 .
12. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9781400883899 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*. Moscow: Mir Publ., 1974, 333 p.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Received September 15, 2019
Revised October 14, 2019
Accepted October 18, 2019

Vitalii Vladimirovich Arestov, Dr. Phys.-Math. Sci., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru .

Cite this article as: V. V. Arestov. On the conjugacy of the space of multipliers, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 5–14 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.95

ЛИНЕЙНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КЛАССАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА m-МЕРНОМ ТОРЕ. II[1]

Д. Б. Базарханов

В предлагаемой работе формулируется и обсуждается задача оптимального восстановления значений псевдодифференциальных операторов T_a на m-мерном торе $\mathbb{T}^m$ с символами a из классов $\widetilde{\Psi}^{\tau \mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$, на распределениях f из классов $\mathrm{B}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ типа Никольского — Бесова и $\mathrm{L}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ типа Лизоркина — Трибеля по конечной спектральной информации о символе оператора и о распределении (конечные наборы коэффициентов Фурье символа оператора и распределения). Доказывается, что оптимальным (или, по крайней мере, линейным оптимальным) по порядку методом восстановления в этой задаче для ряда соотношений между параметрами класса символов, класса распределений и объемлющего пространства является метод $\Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}$, построенный и изученный в части I данной работы автора (2018); при этом величина (линейного) оптимального восстановления имеет точный порядок соответствующего поперечника Фурье классов $\mathrm{B}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ и $\mathrm{L}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ соответственно (теорема 1). Попутно утверждение теоремы 1 части I доказывается при "естественных" условиях на дифференциальные параметры τ классов символов $\widetilde{\Psi}^{\tau \mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$ и s пространств $B^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ типа Никольского — Бесова и $L^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ типа Лизоркина — Трибеля; кроме того, устанавливается, что оценки сверху из теоремы 1 на самом деле являются точными в смысле порядка (см. теорему 3).

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор на m-мерном торе, класс символов (типа произведения), пространство распределений типа Никольского — Бесова / Лизоркина — Трибеля, оптимальное восстановление класса операторов, оценки погрешности оптимального восстановления, поперечник Фурье.

D. B. Bazarkhanov. Linear recovery of pseudodifferential operators on classes of smooth functions on an m-dimensional torus. II.

We formulate and discuss a problem of optimal recovery of values $T_a f$ of pseudodifferential operators T_a on an m-dimensional torus $\mathbb{T}^m$ with symbols a from the classes $\widetilde{\Psi}^{\tau \mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$ on distributions f from the classes $\mathrm{B}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ of Nikol'skii–Besov type and $\mathrm{L}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ of Lizorkin–Triebel type from finite spectral information about the symbol of the operator and the distribution (finite sets of Fourier coefficients of the symbol and the distribution). We show that the recovery method $\Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}$ constructed and studied in 2018 in the first part of this research is order-optimal (or at least linear order-optimal) in this problem for a number of relations between the parameters of the symbol class, the class of distributions, and the ambient space. Furthermore, the (linear) optimal recovery error has exact order of the corresponding Fourier widths of the classes $\mathrm{B}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ and $\mathrm{L}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$, respectively (Theorem 1). Simultaneously, the claim of Theorem 1 from part I of this research is proved under "natural" conditions on the differential parameters τ of the symbol classes $\widetilde{\Psi}^{\tau \mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$ and s of the spaces $B^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ of Nikol'skii–Besov type and $L^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ of Lizorkin–Triebel type. It is also established that the upper estimates in Theorem 1 are order-exact (see Theorem 3).

Keywords: pseudodifferential operator on an m-dimensional torus, class of symbols (of product type), Nikol'skii–Besov / Lizorkin–Triebel space of distributions, optimal recovery of an operator class, error bounds of optimal recovery, Fourier width.

MSC: 41A45, 42B05, 35S05, 58J40

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-15-30

Посвящается Виталию Ивановичу Бердышеву
в связи с его восьмидесятилетием

1. Задача оптимального восстановления класса операторов

Теория оптимального восстановления изучает методы приближенного восстановления (значений) различных операторов (на классах элементов), построенные на основе некоторой (вообще говоря, неполной) информации о самих операторах и/или об элементах, на которые они

[1]Работа выполнена при поддержке гранта AP05133257 МОН РК.

действуют, оптимальные в том или ином смысле. Различным конкретным задачам, конкретным методам восстановления, общим вопросам оптимального восстановления посвящено много работ (см., например, работы [1–6] и библиографию в них).

Здесь мы обсудим известную задачу оптимального восстановления (индивидуального) оператора по семейству операторов информации об элементах, на которые он действует, и сформулируем вариант задачи оптимального восстановления класса операторов по двум семействам операторов информации (одно — об операторах, значения которых предполагается восстанавливать, другое — об элементах), который будет исследован здесь для класса псевдодифференциальных операторов, рассмотренного в части I (Базарханов Д. Б. Линейное восстановление псевдодифференциальных операторов на классах гладких функций на m-мерном торе. I // Тр. Ин–та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, №4. С. 57–79) данной работы. Кроме того, разберем элементарный пример задачи первого типа, который демонстрирует, что и в этом случае было бы вполне естественно рассматривать/привлечь операторы (неполной) информации об операторе, который требуется восстановить.

Предположим, что заданы множество F, линейное нормированное пространство Y с нормой $\| \cdot \,|Y\,\|$ и оператор T, отображающий F в Y. Пусть еще имеется оператор информации $\mathcal{I}$, действующий из F в линейное пространство $Z_{\mathcal{I}}$ $(\mathcal{I} : \mathrm{F} \to Z_{\mathcal{I}} : f \mapsto \mathcal{I}(f))$.

Задачу оптимального восстановления оператора T на множестве F по информации $\mathcal{I}$ об элементах f из F сформулируем в следующем (достаточном для наших целей) виде (подробнее см., например, [1–4; 6].

Будем считать, что информация неполна, т. е. что оператор $\mathcal{I}$ не является инъективным отображением. Произвольное отображение $\Upsilon : \mathcal{I}(\mathrm{F}) \to Y$ называется методом восстановления, а величина

$$\mathfrak{R}(T, \mathrm{F}; \mathcal{I}, \Upsilon; Y) := \sup\{\, \| Tf - \Upsilon(\mathcal{I}(f)) \,|\, Y \,\| \mid f \in \mathrm{F}\,\}$$

— погрешностью метода Υ *на множестве* F. Требуется вычислить (или, по крайней мере, оценить) погрешность

$$\mathfrak{S}(T, \mathrm{F}; \mathcal{I}; Y) := \inf\{\, \mathfrak{R}(T, \mathrm{F}; \mathcal{I}, \Upsilon; Y) \mid \Upsilon\,\} \tag{1.1}$$

оптимального восстановления (значений) оператора T (в пространстве Y) на множестве F по информации $\mathcal{I}$, а также построить метод восстановления Υ^o, называемый оптимальным (если таковой существует), на котором достигается нижняя грань в (1.1), или, по крайней мере, метод Υ^a, погрешность которого "близка" к (1.1) в том или ином смысле.

Хорошо известно, что погрешность (1.1) оптимального восстановления выражается в терминах чебышевских радиусов множеств $T(\mathcal{I}^{-1}(z))$, где $\mathcal{I}^{-1}(z) = \{f \in \mathrm{F} : \mathcal{I}(f) = z\}$ — прообразы элементов $z \in \mathcal{I}(\mathrm{F})$.

Напомним, что *чебышевским радиусом* множества $G \subset Y$ называется число

$$r(G) = \inf\{\sup\{\|w - y\,|\,Y\| \mid y \in G\} \mid w \in Y\},$$

при этом элемент $c(G) \in Y$, для которого $\sup\{\|c(G) - y\,|\,Y\| \mid y \in G\} = r(G)$ (если таковой существует), называется *чебышевским центром* множества G.

Имеет место равенство (см., например, [4, теорема 1.1] или [6, следствие 1, с. 23])

$$\mathfrak{S}(T, \mathrm{F}; \mathcal{I}; Y) = \sup\{\, r(T(\mathcal{I}^{-1}(z))) \mid z \in \mathcal{I}(\mathrm{F})\,\}.$$

Кроме того, если для каждого $z \in \mathcal{I}(\mathrm{F})$ множество $T(\mathcal{I}^{-1}(z))$ имеет чебышевский центр, то отображение

$$\Upsilon^o : \mathcal{I}(\mathrm{F}) \to Y : z \mapsto c(T(\mathcal{I}^{-1}(z)))$$

— оптимальный (вообще говоря, нелинейный) метод восстановления оператора T на множестве F по информации $\mathcal{I}$ (метод восстановления Υ^o еще называют центральным алгоритмом, см., например, [3, гл. 1]).

Множество $G \subset Y$ называется *центрально-симметричным*, если найдется такая точка $y_0 \in Y$, называемая *центром симметрии* ($\Rightarrow G$ — y_0-симметрично), что $\forall y \in G$ имеем $2y_0 - y \in G$.

Теперь дополнительно предположим, что T — линейный оператор, действующий из линейного пространства X, объемлющего множество F, в Y и для любого $z \in \mathcal{I}(\mathrm{F})$ множество $\mathcal{I}^{-1}(z)$ центрально-симметрично (с центром симметрии $x(z) \in X$). Тогда, очевидно, множество $T(\mathcal{I}^{-1}(z))$ будет $T(x(z))$-симметричным в Y. Поскольку центр симметрии центрально-симметричного множества в линейном нормированном пространстве является чебышевским центром этого множества (см., например, [6, лемма 3, с. 19]), то отсюда вытекает, что оптимальный метод восстановления оператора T существует и является центральным алгоритмом,

$$\Upsilon^o \,:\, \mathcal{I}(\mathrm{F}) \to Y \,:\, z \mapsto T(x(z)). \tag{1.2}$$

В случае, когда вместо одного задано целое семейство операторов информации $\mathfrak{I} = \{\mathcal{I}\}$, естественно рассмотреть следующую задачу оптимального восстановления: найти (или оценить) величину

$$\mathfrak{S}(T, \mathrm{F}; \mathfrak{I}; Y) := \inf\{\, \mathfrak{S}(T, \mathrm{F}; \mathcal{I}; Y) \mid \mathcal{I} \in \mathfrak{I}\,\}, \tag{1.3}$$

а также оператор информации $\mathcal{I}^o \in \mathfrak{I}$ и метод восстановления $\Upsilon^o \,:\, \mathcal{I}^o(\mathrm{F}) \to Y$ (если таковые существуют), для которых $\mathfrak{R}(T, \mathrm{F}; \mathcal{I}^o, \Upsilon^o; Y) = \mathfrak{S}(T, \mathrm{F}; \mathfrak{I}; Y)$, или хотя бы оператор информации $\mathcal{I}^a \in \mathfrak{I}$ и метод восстановления $\Upsilon^a \,:\, \mathcal{I}^a(\mathrm{F}) \to Y$, для которых величина $\mathfrak{R}(T, \mathrm{F}; \mathcal{I}^a, \Upsilon^a; Y)$ близка к $\mathfrak{S}(T, \mathrm{F}; \mathfrak{I}; Y)$ в том или ином смысле. Подробнее об этих и других задачах оптимального восстановления см., например, [1; 2; 3, гл.1; 6, гл.1].

Переходим к постановке задачи восстановления "класса" операторов на некотором множестве по семействам операторов информации как об операторах, так и об элементах, на которые они действуют.

Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая совокупность (класс) операторов T, действующих из множества F в пространство Y, и, как и выше, $\mathfrak{I} = \{\mathcal{I}\}$ — семейство операторов информации об элементах из F, а $\mathfrak{J} = \{\mathcal{J}\}$ — семейство операторов информации об операторах из $\mathfrak{H}$, т. е. операторов $\mathcal{J}$, действующих из $\mathfrak{H}$ в линейные пространства $Z_{\mathcal{J}}$ $(\mathcal{J} : \mathfrak{H} \to Z_{\mathcal{J}} : T \mapsto \mathcal{J}(T))$.

Произвольное отображение $\Upsilon : \mathcal{I}(\mathrm{F}) \times \mathcal{J}(\mathfrak{H}) \to Y$ называется методом восстановления, а величина

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathcal{I}, \mathcal{J}, \Upsilon; Y) := \sup\{\, \| Tf - \Upsilon(\mathcal{I}(f), \mathcal{J}(T)) \,|\, Y \,\| \mid f \in \mathrm{F},\, T \in \mathfrak{H}\,\} \tag{1.4}$$

— погрешностью метода Υ восстановления класса $\mathfrak{H}$ на множестве F.

Задача оптимального восстановления (значений) операторов T из класса $\mathfrak{H}$ на (элементах f из F) по семействам (неполной) информации $\mathfrak{I}$ об f и $\mathfrak{J}$ о T состоит в следующем: найти (или оценить) величину

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathfrak{I}, \mathfrak{J}; Y) := \inf\{\, \mathfrak{R}(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathcal{I}, \mathcal{J}, \Upsilon; Y) \mid \Upsilon, \mathcal{I} \in \mathfrak{I}, \mathcal{J} \in \mathfrak{J}\,\}, \tag{1.5}$$

а также операторы информации $\mathcal{I}^o \in \mathfrak{I}$, $\mathcal{J}^o \in \mathfrak{J}$ и метод восстановления $\Upsilon^o \,:\, \mathcal{I}^o(\mathrm{F}) \times \mathcal{J}^o(\mathfrak{H}) \to Y$ (если таковые существуют), для которых $\mathfrak{R}(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathcal{I}^o, \mathcal{J}^o, \Upsilon^o; Y) = \mathfrak{S}(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathfrak{I}, \mathfrak{J}; Y)$, или хотя бы операторы информации $\mathcal{I}^a \in \mathfrak{I}$, $\mathcal{J}^a \in \mathfrak{J}$ и метод восстановления $\Upsilon^a \,:\, \mathcal{I}^a(\mathrm{F}) \times \mathcal{J}^a(\mathfrak{H}) \to Y$, для которых величина $\mathfrak{R}(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathcal{I}^a, \mathcal{J}^a, \Upsilon^a; Y)$ близка к $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathfrak{I}, \mathfrak{J}; Y)$ в том или ином смысле.

Метод восстановления $\Upsilon' : \mathcal{I}(\mathrm{F}) \times \mathcal{J}(\mathfrak{H}) \to Y$ будем называть *линейным*, если отображение $\Upsilon'(\mathcal{I}(f), \mathcal{J}(T))$ линейно по $\mathcal{I}(f)$ при фиксированном $\mathcal{J}(T)$.

Задача линейного оптимального восстановления класса операторов $\mathfrak{H}$ на множестве F по семействам информации $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{J}$ формулируется аналогично: найти (или оценить) величину

$$\mathfrak{S}'(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathfrak{I}, \mathfrak{J}; Y) := \inf\{\, \mathfrak{R}(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathcal{I}, \mathcal{J}, \Upsilon'; Y) \mid \Upsilon', \mathcal{I} \in \mathfrak{I}, \mathcal{J} \in \mathfrak{J}\,\}, \tag{1.6}$$

а также операторы информации $\mathcal{I}^o \in \mathfrak{I}$, $\mathcal{J}^o \in \mathfrak{J}$ и линейный метод восстановления $\Upsilon'^o \,:\, \mathcal{I}^o(\mathrm{F}) \times \mathcal{J}^o(\mathfrak{H}) \to Y$ (если таковые существуют), для которых $\mathfrak{R}(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathcal{I}^o, \mathcal{J}^o, \Upsilon'^o; Y) = \mathfrak{S}'(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathfrak{I}, \mathfrak{J}; Y)$, или хотя бы операторы информации $\mathcal{I}^a \in \mathfrak{I}$, $\mathcal{J}^a \in \mathfrak{J}$ и линейный метод восстановления Υ'^a : $\mathcal{I}^a(\mathrm{F}) \times \mathcal{J}^a(\mathfrak{H}) \to Y$, для которых величина $\mathfrak{R}(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathcal{I}^a, \mathcal{J}^a, \Upsilon'^a; Y)$ близка к $\mathfrak{S}'(\mathfrak{H}, \mathrm{F}; \mathfrak{I}, \mathfrak{J}; Y)$ в том или ином смысле.

Рассмотрим следующий простой

Пример. Пусть $\mathrm{F} = W_2^s(\mathbb{T})$ $(s \in \mathbb{N})$ — класс Соболева функций $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, имеющих абсолютно непрерывную $(s-1)$-производную и таких, что $\|f \,|\, W_2^s(\mathbb{T})\|^2 := |\widehat{f}(0)|^2 + \|f^{(s)} \,|\, L_2(\mathbb{T})\|^2 \le 1$; $Y = L_r(\mathbb{T}) : (1 \le r \le \infty)$; оператор информации $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\Xi\, W_2^s(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}^{\#\Xi} : f \mapsto (\widehat{f}(\xi) : \xi \in \Xi)$, где $\widehat{f}(\xi)$ — тригонометрические коэффициенты Фурье функции f и $\varnothing \ne \Xi \subset \mathbb{Z}$ конечно. Тогда легко проверить, что для любого вектора $a_\Xi = (a_\xi : \xi \in \Xi) \in \mathcal{I}(W_2^s(\mathbb{T}))$ тригонометрический полином $t(x) = \sum_{\xi\in\Xi} a_\xi e^{2\pi i\xi x}$ принадлежит $W_2^s(\mathbb{T})$ и является центром симметрии множества $\mathcal{I}^{-1}(a_\Xi)$. Поэтому и в силу (1.2) для любого линейного (необязательно ограниченного) оператора $T : L_p(\mathbb{T}) \to L_r(\mathbb{T})$ $(1 \le p \le \infty)$ (линейный) центральный алгоритм

$$\Upsilon^o : W_2^s(\mathbb{T}) \to L_r(\mathbb{T})\colon f \mapsto \sum_{\xi\in\Xi} \widehat{f}(\xi) T(e^{2\pi i\xi x})$$

является оптимальным методом восстановления оператора T в задаче (1.1).

Если T — оператор T^g свертки с “хорошим” распределением $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{T})$, то оптимальным методом является

$$\Upsilon^o(\mathcal{I}(f), x) = \sum_{\xi\in\Xi} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) e^{2\pi i\xi x},$$

и он “использует” столько же информации $\mathcal{J}(T) = (\widehat{g}(\xi)\colon \xi \in \Xi)$ об операторе T, сколько и о функции f.

Если же T — дифференциальный оператор $T_h = h(x)\dfrac{d^k}{dx^k}$ с достаточно гладким коэффициентом $h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, который не является тригонометрическим полиномом (т. е. множество $\mathbb{Z}(h) := \{\xi \in \mathbb{Z} \mid \widehat{h}(\xi) \ne 0\}$ счетно), то оптимальный метод принимает вид

$$\Upsilon^o(\mathcal{I}(f), x) = \sum_{\xi\in\Xi}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi)\widehat{h}(\zeta) e^{2\pi i(\xi+\zeta)x}$$

и “использует” уже бесконечную “информацию” об операторе T (именно, весь бесконечный набор $(\widehat{h}(\xi) : \xi \in \mathbb{Z}(h))$ коэффициентов Фурье функции h).

Так как операторы являются объектами заведомо не менее “сложными”, чем элементы (функции), на которые они действуют, а потому и информация о них в задачах, интересных для приложений, не обязана быть полной (во всяком случае, “намного более полной”, чем информация о функциях), то ввиду примера оператора T_h представляется вполне разумным рассматривать и исследовать постановки задач оптимального восстановления (классов) операторов, в которых информация об операторах также является неполной.

В следующих разделах изучается задача (1.5) для одного класса тороидальных псевдодифференциальных операторов и классов распределений типа Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля и семейств операторов спектральной информации о символах ПДО и о распределениях. При этом используются обозначения, введенные в части I данной работы, в частности, $\mathbb{N}_0^n$, z_n, $|\mathtt{m}|$ — ℓ_1-норма вектора $\mathtt{m}$ и др.

2. Оптимальное восстановление классов ПДО

Пусть заданы числа $m, n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, и вектор $\mathtt{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ с $|\mathtt{m}| = m$. Далее, пусть $1 \le p,\ q \le \infty$, $1 < r < \infty$, $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим в качестве Y пространство $L_r = L_r(\mathbb{T}^m)$, в качестве F — классы распределений $\mathrm{B}^{s\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ типа Никольского—Бесова и $\mathrm{L}^{s\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ типа Лизоркина—Трибеля ($p < \infty$) (см. определение 2 из части I)[2].

Основной объект исследования здесь (как и в первой части работы) — псевдодифференциальные операторы на m-мерном торе ((тороидальные) ПДО) вида

$$T_a : f \mapsto T_a f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi x} \tag{2.1}$$

с символами $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ из классов $\widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}] \equiv \Psi^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}](\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$. Здесь $1 \le \theta \le \infty$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\mathtt{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathtt{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $\upsilon = (\upsilon_1, \dots, \upsilon_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in [0,1]^n$, $\mathrm{K} = (\mathrm{K}_1, \dots, \mathrm{K}_n)$, $\mathrm{L} = (\mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n) \in \mathbb{N}^n_0$.

Более точно, мы рассматриваем задачу (1.5) для класса операторов

$$\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}] = \{T_a \mid a \in \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}] \colon \|a \,|\, \widetilde{S}^{\tau\mathtt{m}}_{1,0}[\mathrm{K}, \mathrm{L}]\| + \|a \,|\, \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]\| \le 1\}$$

(определения пространств тороидальных символов $\widetilde{S}^{\tau\mathtt{m}}_{1,0}[\mathrm{K}, \mathrm{L}]$ и $\widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$ и их норм даны в определениях 1 и 3 части I).

Через $\mathfrak{D}$ обозначим набор функционалов $\{\mathfrak{d}_\xi \mid \xi \in \mathbb{Z}^m\}$, где $\mathfrak{d}_\xi(f) = \widehat{f}(\xi)$ — коэффициенты Фурье распределения $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, через $\mathfrak{G}$ — набор функционалов $\{\mathfrak{g}_{\xi,\zeta} \mid (\xi,\zeta) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m\}$, где $\mathfrak{g}_{\xi,\zeta}(a) = \widehat{a}(\zeta,\xi)$ — коэффициенты Фурье символа $a(\,\cdot\,,\xi)$.

Тогда для фиксированного $N \in \mathbb{N}$ через $\mathfrak{I}_N$ обозначим семейство операторов информации $\{\mathcal{I}_\Lambda \mid \Lambda \subset \mathbb{Z}^m : \#\Lambda = N\}$, где $\mathcal{I}_\Lambda = (\mathfrak{d}_\xi : \xi \in \Lambda)$, а через $\mathfrak{J}$ — семейство операторов информации $\{\mathcal{J}_\mathrm{M} \mid \mathrm{M} \subset \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m : \#\mathrm{M} < \infty\}$, где $\mathcal{J}_\mathrm{M} = (\mathfrak{g}_{\xi,\zeta} : (\xi,\zeta) \in \mathrm{M})$.

Наконец, по параметрам p, r и векторам s, τ определим числа

$$\sigma_\nu = \frac{s_\nu - \tau_\nu}{m_\nu}, \quad \nu \in \mathrm{z}_n, \quad \sigma := \min\{\sigma_\nu \colon \nu \in \mathrm{z}_n\}, \quad \omega = \#\{\nu \in \mathrm{z}_n \colon \sigma_\nu = \sigma\},$$

$\varsigma = \sigma - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)_+$. Здесь $u_+ = \max\{u, 0\}$ для $u \in \mathbb{R}$.

Будем использовать знаки $\ll$ и $\asymp$ порядкового неравенства и равенства: для функций $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ пишем $F(u) \ll H(u)$ при $u \to \infty$, если найдется такая константа $C = C(F,H) > 0$, что верно неравенство $F(u) \le CH(u)$ для $u \ge u_0 > 0$; $F(u) \asymp H(u)$, если одновременно $F(u) \ll H(u)$ и $H(u) \ll F(u)$. Часто вместо слов “порядковое равенство” будем говорить “порядковая оценка”, подразумевая порядковую двустороннюю оценку.

Следующая теорема — главный результат работы (наряду с теоремой 3, см. разд. 4 ниже), в ней при естественных соотношениях между параметрами задачи дается точный порядок (по N) величины (1.5) в нашей задаче оптимального восстанвления класса ПДО $\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$ по семействам операторов информации $\mathfrak{I}_N$ и $\mathfrak{J}$ на классах типа Никольского—Бесова и Лизоркина— Трибеля в пространстве L_r.

Теорема 1. *Предположим, что* $1 \le p\,, q\,, \theta \le \infty$, $1 < r < \infty$, $s, \tau \in \mathbb{R}^n$, $\upsilon \in \mathbb{R}^n_+$, $\epsilon \in [0,1]^n$ *такие, что* $\varsigma > 0$, *и для любого* $\nu \in \mathrm{z}_n$ *выполнено одно из следующих трех условий*:

(i) $s_\nu - \tau_\nu < \upsilon_\nu$;

(ii) $s_\nu - \tau_\nu = \upsilon_\nu$, $\epsilon_\nu < 1$ *и* $\theta \le q$;

(iii) $s_\nu - \tau_\nu = \upsilon_\nu$, $\epsilon_\nu = \theta = q = 1$.

Положим

$$\mathrm{K}_{\mathsf{f}} = \left(\mathsf{f}\left\lfloor \frac{m_1}{2} \right\rfloor + \mathsf{f} + 4, \dots, \mathsf{f}\left\lfloor \frac{m_n}{2} \right\rfloor + \mathsf{f} + 4\right), \quad \mathsf{f} \in \{\mathsf{b} = 3, \mathsf{l} = 5\}, \quad \mathrm{L} = \left(\left\lfloor \frac{m_1}{r} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{m_n}{r} \right\rfloor\right).$$

[2]Всюду ниже при рассмотрении классов типа Лизоркина—Трибеля будем считать, не оговаривая этого специально, что $p < \infty$.

Тогда для $(\mathrm{F}, f) \in \{(\mathrm{B}, b),\ (\mathrm{L}, l)\}$ *верна следующая оценка сверху*:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_f, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \ll \varphi_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r), \quad N \to \infty. \tag{2.2}$$

Далее,

a) *если, кроме того,* $2 \le p,\ q \le \infty,\ r \le p$, *то верна соответствующая оценка снизу*

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_f, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \gg \varphi_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r), \quad N \to \infty; \tag{2.3}$$

b) *если, кроме того,* $1 \le q < 2 \le p \le \infty,\ r \le p$, *то верна следующая оценка снизу*:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_f, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \gg \varphi_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r)(\log^{\omega-1} N)^{(1/2-1/q)}, \quad N \to \infty, \tag{2.4}$$

а также точная порядковая оценка для линейного оптимального восстановления

$$\mathfrak{S}'(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_f, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \asymp \varphi_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r), \quad N \to \infty; \tag{2.5}$$

c) *если, кроме того,* $1 < p < r \le 2,\ 1 \le q \le \infty$, *то верна следующая оценка снизу*:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_f, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \gg \varphi_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r)(\log^{\omega-1} N)^{(1/2-1/q)}, \quad N \to \infty, \tag{2.6}$$

а также точная порядковая оценка для линейного оптимального восстановления

$$\mathfrak{S}'(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_f, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \asymp \varphi_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r), \quad N \to \infty; \tag{2.7}$$

d) *если, кроме того,* $2 \le p < r < \infty,\ 1 \le q \le \infty$, *то верна следующая оценка снизу*:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_f, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \gg \varphi_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r)(\log^{\omega-1} N)^{(1/2-1/q)}, \quad N \to \infty, \tag{2.8}$$

а также точная порядковая оценка для линейного оптимального восстановления

$$\mathfrak{S}'(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_f, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \asymp \varphi_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r), \quad N \to \infty; \tag{2.9}$$

e) *если, кроме того,* $1 \le r \le p < 2,\ 1 \le q \le \infty$, *то верна следующая оценка снизу*:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_f, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \gg \Big(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\Big)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(1/2-1/q)}, \quad N \to \infty\,. \tag{2.10}$$

Здесь $\varphi_N(\mathrm{F}, L_r)$ — N*-й поперечник Фурье множества* F *в пространстве* L_r.

З а м е ч а н и е 1. Напомним, что N-й поперечник Фурье множества $\mathrm{F}(\subset L_r)$ в пространстве L_r определяется по формуле

$$\varphi_N(\mathrm{F}, L_r) = \inf\ \Big\{ \sup\ \Big\{ \Big\| f - \sum_{k=1}^{N} \langle f, g_k\rangle g_k \,\big|\, L_r \Big\| \ \big|\ f \in \mathrm{F} \Big\} \ \big|\ (g_k\,)_{k=1}^N \Big\},$$

где нижняя грань берется по всевозможным ортонормированным системам из N функций $(g_k\,)_{k=1}^N \subset L_\infty$, $\langle f, h\rangle = \int_{\mathbb{T}^m} f(x)\bar{h}(x)dx$.

Поперечники Фурье были введены В. Н. Темляковым в 1982 г. Весьма обстоятельный обзор результатов по поперечникам Фурье различных функциональных классов можно найти в недавней монографии [7, Ch. 4]. Точные по порядку оценки поперечников Фурье функциональных классов типа Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля, рассматриваемых здесь, во всей их полноте были установлены автором в 2010 г. (см. [8], где доказаны оценки сверху, и работу [9], где получены соответствующие оценки снизу); в [9] также имеются достаточно подробная история вопроса и библиография. В частности, в условиях теоремы 1 справедливы оценки (с $(\mathrm{F}, \mathtt{f}(p,q,r)) \in \{(\mathrm{B}, \mathtt{b}(p,q,r)),\ (\mathrm{L}, \mathtt{l}(p,q,r))\}$)

$$\varphi_N\big(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r\big) \asymp \Big(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\Big)^{\varsigma} (\log^{\omega-1} N)^{\mathtt{f}(p,q,r)},$$

где

$$\mathtt{b}(p,q,r) = \Big(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{q}\Big)_+, \quad \mathtt{l}(p,q,r) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big)_+$$

при $r \le p$ и

$$\mathtt{b}(p,q,r) = \Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\Big)_+, \quad \mathtt{l}(p,q,r) = 0$$

при $p < r$; здесь $p_* = \min\{p, 2\}$.

3. Тригонометрические полиномы. Оператор лифтинга

Пусть Λ — произвольное конечное множество из $\mathbb{Z}^m$ и

$$\mathrm{T}(\Lambda) = \Big\{\, t(x) = \sum_{\xi\in\Lambda} \widehat{t}\,(\xi) e^{2\pi i\,\xi x} \;\Big|\; \widehat{t}\,(\xi) \in \mathbb{C},\, \xi \in \Lambda \Big\}$$

— пространство тригонометрических полиномов со спектром Λ.

Для распределения $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ пусть, как и раньше,

$$f(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\xi x}, \quad S_\Lambda(f,x) = \sum_{\xi\in\Lambda} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\xi x} \quad (\in \mathrm{T}(\Lambda)) \tag{3.1}$$

— ее ряд Фурье и сумма Фурье, соответствующая спектру Λ.

Положим

$$\rho_+(\mathtt{m},\kappa) = \big\{\xi \in \mathbb{N}^m \colon 2^{\kappa_\nu - 1} \le \xi_k \le 2^{\kappa_\nu},\ k = k_{\nu-1}+1, \dots, k_\nu,\ \nu \in \mathrm{z}_n\big\}$$

(напомним, что здесь $k_0 = 0, k_\nu = m_1 + \dots + m_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$) и для четного $u \in \mathbb{N}$

$$\vartheta[u] \equiv \vartheta[u;a] \equiv \{\kappa \in \mathbb{N}^n \,|\, u \le \kappa\mathtt{m} \le u + 2a,\ \kappa_\nu - \text{четные},\ \nu \in \mathrm{z}_n\}, \quad \Lambda_+(u) \equiv \cup_{\kappa\in\vartheta[u]} \rho_+(\mathtt{m},\kappa).$$

В [9] получены оценки

$$\#\vartheta[u] \asymp u^{n-1}, \quad \#\Lambda_+(u) \asymp 2^u u^{n-1}. \tag{3.2}$$

Следующая теорема, которую мы применим при получении оценок снизу в теореме 1, является частным случаем теоремы T1, доказанной в [9] и обобщающей известный результат В. Н. Темлякова [10].

Теорема 2. *Для любого множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^m$ такого, что $\#\Lambda \le \frac{1}{2}\#\Lambda_+(u)$, существует полином $t_{\Lambda,u} \in \mathrm{T}(\Lambda_+(u) \setminus \Lambda)$ такой, что для всех $\kappa \in \vartheta[u]$*

$$\Big\|\sum_{\xi\in\rho_+(\mathtt{m},\kappa)} \widehat{t}_{\Lambda,u}\,(\xi)\, e^{2\pi i\xi x} \,\big|\, L_\infty\Big\| \le (\#\vartheta[u])^{-1/2} \quad u \quad \|\, t_{\Lambda,u} \,|\, L_2 \,\| \ge c(\mathtt{m}) > 0.$$

В дальнейшем нам также понадобятся оценки нормы полинома из теоремы 2 в пространствах типа Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля :

$$\|\, t_{\Lambda,u} \,|\, F^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q} \,\| \ll 2^{\sigma u} u^{(\omega-1)(1/q-1/2)}. \tag{3.3}$$

Оценка (3.3) для пространств типа Никольского — Бесова (случай $F = B$) получена в [9]; для пространств типа Лизоркина — Трибеля (случай $F = L$) оценка устанавливается аналогично.

Теперь рассмотрим символ (не зависящий от пространственной переменной x)

$$a^{(\tau)}(\xi) := \prod_{\nu\in \mathrm{z}_n} \langle \xi^\nu \rangle^{\tau_\nu} \qquad (\xi \in \mathbb{Z}^m),$$

который принадлежит классу $\Psi^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\vartheta}[\upsilon;\mathrm{K}_{\mathsf{f}},\mathrm{L}]$: во-первых, $a^{(\tau)}(\xi) \in \widetilde{S}^{\tau\mathtt{m}}_{1,0}[\mathrm{K},\mathrm{L}]$ (см., например, [11, Remark 2.1.4, p. 261]); во-вторых, нетрудно показать, что любой символ $b(\xi) \in \widetilde{S}^{\tau\mathtt{m}}_{1,0}[\mathrm{K},\mathrm{L}]$, который не зависит от x, принадлежит классу $\Psi^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\vartheta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}]$. Поэтому оператор $T_{a^{(\tau)}}$ принадлежит классу $\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon;\mathrm{K}_{\mathsf{f}},\mathrm{L}]$.

С другой стороны, хорошо известно, что оператор $I^{(\tau)}(\equiv T_{a^{(\tau)}})$ (называемый оператором лифтинга) играет важную роль в теории функциональных пространств, в частности, осуществляет изоморфизм между пространствами $F^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}$ and $F^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}$, другими словами, отображение

$$I^{(\tau)} : F^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q} \to F^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q} : f \mapsto g := I^{(\tau)}(f)$$

биективно и, кроме того, $\|f \,|\, F^{s\mathtt{m}}_{pq}\| \asymp \|g \,|\, F^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}\|$ (см., например, [12, гл. 8, п. 8.8; 13, гл. 2, п. 2.3.8; 14, Ch.2, Sect.2.2.6]).

Ясно, что

$$\widehat{g}(\xi) = \prod \langle \xi^\nu \rangle^{\tau_\nu} \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}^m,$$

и поэтому $\widehat{g}(\xi) = 0 \Leftrightarrow \widehat{f}(\xi) = 0$. Следовательно,

$$\sup\,\{\|I^{(\tau)}f \,|\, L_r\| \mid f \in \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q} : \widehat{f}(\xi) = 0,\, \xi \in \Xi\,\} \asymp \sup\,\{\|g \,|\, L_r\| \mid g \in \mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q} : \widehat{g}(\xi) = 0,\, \xi \in \Xi\,\}.$$

4. Доказательство теоремы 1: оценки сверху

Напомним конструкцию линейного метода восстановления $\Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}$ из части I.

Прежде всего определим вектор $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Не ограничивая общности, считаем, что $\varsigma = \varsigma_1 = \ldots = \varsigma_\omega < \varsigma_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}_\omega$. Выберем числа ς'_ν, $\nu \in \mathrm{z}_n$, из условий $\varsigma = \varsigma'_1 = \ldots = \varsigma'_\omega$, $\varsigma < \varsigma'_\nu < \varsigma_\nu$ при $\nu \in \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}_\omega$. Наконец, положим $\gamma_\nu = \varsigma'_\nu m_\nu/\varsigma$, $\nu \in \mathrm{z}_n$.

По γ и $u \in \mathbb{R}_+$ определим спектры $\Lambda^\gamma_u \subset \mathbb{Z}^m$, $\Lambda^{\gamma,\eta}_u \subset \mathbb{Z}^m$, полагая

$$\Lambda^\gamma_u := \cup_{\kappa\in\mathbb{N}^n_0 :\, \gamma\kappa\le u}\rho(\mathtt{m},\kappa), \quad \Lambda^{\gamma,\eta}_u := \cup_{\kappa\in\mathbb{N}^n_0 :\, \gamma\kappa\le u}\rho(\mathtt{m},\eta,\kappa),$$

где

$$\rho(\mathtt{m},\kappa) := \bigl\{\xi \in \mathbb{Z}^m \mid \lfloor 2^{\kappa_\nu-1}\rfloor \le |\xi^\nu|_\infty < 2^{\kappa_\nu},\, \nu \in \mathrm{z}_n\bigr\},$$
$$\rho(\mathtt{m},\eta,\kappa) := \bigl\{\xi \in \mathbb{Z}^m \mid \lfloor 2^{\kappa_\nu-1}\rfloor \le |\xi^\nu|_\infty < 3\cdot 2^{\kappa_\nu-1},\, \nu \in \mathrm{z}_n\bigr\} \quad (\kappa \in \mathbb{N}^n_0)$$

($\lfloor u\rfloor$ — целая часть числа $u \in \mathbb{R}$). В части I установлены включения ($u(\gamma) := \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$)

$$\Lambda^\gamma_u \subset \Lambda^{\gamma,\eta}_u \subset \Lambda^\gamma_{u+u(\gamma)} \tag{4.1}$$

и оценка $\#\Lambda^\gamma_u \asymp 2^u u^{\omega-1}$. Для любого $N \in \mathbb{N}$ существует единственное $u_N \in \mathbb{R}_+$ такое, что $N = 2^{u_N} u_N^{\omega-1}$. Обозначим $\Lambda(\gamma,N) := \Lambda^\gamma_{u_N}$, т.е. $\#\Lambda(\gamma,N) \asymp N$.

Тогда метод $\Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}$ восстановления ПДО T_a, использующий операторы информации $\mathcal{I}_{\Lambda(\gamma,N)}$ и $\mathcal{J}_{\mathrm{M}(\gamma,N)}$, $\mathrm{M}(\gamma,N) = \{(\xi,\zeta) \,|\, \xi \in \Lambda(\gamma,N), \zeta \in \Lambda(\gamma,N) - \xi\}$ (в обозначениях части I $\mathfrak{D}_{\Lambda(\gamma,N)}$ и $\mathfrak{G}_{\Lambda(\gamma,N)}$ соответственно), определяется по формуле

$$\Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}(\mathcal{I}_{\Lambda(\gamma,N)}(f), \mathcal{J}_{\mathrm{M}(\gamma,N)}(T_a))(x) := S_{\Lambda(\gamma,N)}(T_a S_{\Lambda(\gamma,N)}(f), x). \tag{4.2}$$

Метод восстановления $\Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}$ использует $M := \#\Lambda(\gamma,N) + (\#\Lambda(\gamma,N))^2 \asymp N^2$ “единиц информации”: $(\#\Lambda(\gamma,N))^2$ — об операторе, $\#\Lambda(\gamma,N)$ — о функции.

Оценка сверху (2.2), а также оценки сверху в соотношениях (2.5), (2.7), (2.9) в теореме 1 будут следовать из следующей теоремы, в которой устанавливается точный порядок (по N) величины погрешности (1.4) (линейного) метода $\Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}$ восстановления ПДО T_a вида (2.1) по оператору $\mathcal{I}_{\Lambda(\gamma,N)}$ информации об $f \in \mathrm{F}^{s\mathtt{m}}_{pq}$ ($\mathrm{F} \in \{\mathrm{B},\mathrm{L}\}$) и оператору $\mathcal{J}_{\mathrm{M}(\gamma,N)}$ информации о символах $a \in \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}]$ в пространстве L_r.

Теорема 3. *Предположим, что* $1 \le p\,, q\,, \theta \le \infty$, $1 < r < \infty$, $s, \tau \in \mathbb{R}^n$, $\upsilon \in \mathbb{R}^n_+$, $\epsilon \in [0,1]^n$ *такие, что* $\varsigma > 0$ *и для любого* $\nu \in \mathrm{z}_n$ *выполнено одно из следующих трех условий*:
(i) $s_\nu - \tau_\nu < \upsilon_\nu$;
(ii) $s_\nu - \tau_\nu = \upsilon_\nu$, $\epsilon_\nu < 1$ *и* $\theta \le q$;
(iii) $s_\nu - \tau_\nu = \upsilon_\nu$, $\epsilon_\nu = \theta = q = 1$.
Далее, пусть

$$\mathrm{K}_f = \Big(f\Big\lfloor\frac{m_1}{2}\Big\rfloor + f + 4, \ldots, f\Big\lfloor\frac{m_n}{2}\Big\rfloor + f + 4\Big), \ f \in \{b = 3, l = 5\}, \quad \mathrm{L} = \Big(\Big\lfloor\frac{m_1}{r}\Big\rfloor, \ldots, \Big\lfloor\frac{m_n}{r}\Big\rfloor\Big).$$

Тогда для $(\mathrm{F}, f) \in \{(\mathrm{B}, b\,),\ (\mathrm{L}, l\,)\}$ *верна оценка*

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_f, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathcal{I}_{\Lambda(\gamma,N)}, \mathcal{J}_{\mathrm{M}(\gamma,N)}, \Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}; L_r) \asymp \varphi_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r), \quad N \to \infty. \tag{4.3}$$

З а м е ч а н и е 2. Теорема 3 усиливает результат теоремы 1 из части I: во-первых, по сравнению с теоремой 1 в теореме 3 оценка сверху доказывается при “естественных”, условиях на “дифференциальные”, параметры s и τ, а именно, для $s, \tau \in \mathbb{R}^n$ таких, что $s > \tau$; во-вторых, в теореме 3 устанавливается соответствующая оценка снизу.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Сначала докажем оценку сверху в (4.3). Для любого символа $a \in \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$ определим символ b равенством

$$b(x,\xi) = a(x,\xi)a^{(-\tau)}(\xi) = a(x,\xi)\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}\langle\xi^\nu\rangle^{-\tau_\nu},$$

тогда нетрудно видеть, что $b \in \widetilde{\Psi}^{0\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$. Для распределения $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, как и выше, положим $g = I^{(\tau)}f$. Тогда, очевидно, имеем $T_a f = T_b g$ и, следовательно, $T_a S_{\Lambda(\gamma,N)}(f) = T_b S_{\Lambda(\gamma,N)}(g)$. Поэтому

$$S_{\Lambda(\gamma,N)}(T_a S_{\Lambda(\gamma,N)}(f)) = S_{\Lambda(\gamma,N)}(T_b S_{\Lambda(\gamma,N)}(g)).$$

Отсюда находим

$$\|T_a f - S_{\Lambda(\gamma,N)}(T_a S_{\Lambda(\gamma,N)}(f)) \,|\, L_r\| = \|T_b g - S_{\Lambda(\gamma,N)}(T_b S_{\Lambda(\gamma,N)}(g)) \,|\, L_r\|$$
$$\le \|T_b g - S_{\Lambda(\gamma,N)}(T_b g) \,|\, L_r\| + \|S_{\Lambda(\gamma,N)}(T_b(g - S_{\Lambda(\gamma,N)}(g))) \,|\, L_r\| =: \Im_1 + \Im_2.$$

Сперва оценим $\Im_1$. Так как по теореме 2 из части I оператор $T_b : F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}$ ограничен, то с учетом свойств оператора лифтинга из разд. 3 получим

$$\|T_b g \,|\, F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\| \le \|T_b \,|\, F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\|\|g \,|\, F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\|$$
$$\asymp \|T_b \,|\, F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\|\|f \,|\, F^{s\mathtt{m}}_{p\,q}\| \le \|T_b \,|\, F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\|,$$

поэтому $h := T_b g$ принадлежит $\|T_b \,|\, F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\|\mathrm{F}^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}$ — шару пространства $F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}$ радиуса $\|T_b \,|\, F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\|$. Следовательно, используя (5.2) из части I, применяя теорему 4.1 (см. еще замечание 4.1) работы [8] и учитывая определение u_N, имеем (следует еще принять во внимание (4.1))

$$\Im_1 \ll \|T_b \,|\, F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\| \sup\{\|h - S_{\Lambda(\gamma,N)}(h) \,|\, L_r\| \,|\, h \in \mathrm{F}^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\}$$
$$\le (1 + C_{r,\mathtt{m}}/c_{r,\mathtt{m}})\|T_b \,|\, F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\| \sup\Big\{\Big\|h - \sum_{\kappa\gamma\le u_N - u(\gamma)} \Delta^\eta_\kappa(h) \,\Big|\, L_r\Big\| \,\Big|\, h \in \mathrm{F}^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\Big\}$$
$$\asymp (1 + C_{r,\mathtt{m}}/c_{r,\mathtt{m}})\|T_b \,|\, F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{p\,q}\|\Big(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\Big)^{\varsigma}(\log^{\omega-1} N)^{\mathtt{f}(p,q,r)}. \tag{4.4}$$

Ннапомним, что операторы Δ^η_κ “гладких срезок” ряда Фурье — из определения функциональных пространств типа Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля (см. определение 2 из части I).

Оценим теперь $\Im_2$. В силу п. 2) замечания 4 из части I в условиях теоремы 3 оператор $T_b\colon L_r \to L_r$ ограничен. Отсюда ввиду (5.1) и (5.2) из части I (принимая во внимание (4.1)), снова применяя теорему 4.1 из [8] и учитывая определение u_N, получим

$$\begin{aligned}\Im_2 &\le C_{r,\mathtt{m}}/c_{r,\mathtt{m}}\|T_b \,|\, L_r \to L_r\|\|g - S_{\Lambda(\gamma,N)}(g) \,|\, L_r\| \\ &\le (1 + C_{r,\mathtt{m}}/c_{r,\mathtt{m}})^2\|T_b \,|\, L_r \to L_r\Big\| \sup\Big\{\Big\|h - \sum_{\kappa\gamma \le u_N - u(\gamma)} \Delta^\eta_\kappa(h) \,\Big|\, L_r\Big\| \,\Big|\, h \in \mathrm{F}^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}\Big\}. \\ &\asymp (1 + C_{r,\mathtt{m}}/c_{r,\mathtt{m}})^2\|T_b \,|\, L_r \to L_r\|\Big(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\Big)^{\varsigma}(\log^{\omega-1} N)^{\mathtt{f}(p,q,r)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Таким образом, требуемая оценка сверху в (4.3) вытекает из полученных соотношений (4.4) и (4.5).

Переходим теперь к доказательству соответствующих оценок снизу в (4.3). Для того чтобы установить оценку снизу в (4.3), достаточно указать “плохой” оператор $T_a \in \mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_{\mathtt{f}}, \mathrm{L}]$ такой, что погрешность метода восстановления $\Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}$ этого оператора на классе $\mathrm{F}^{s\mathtt{m}}_{pq}$ будет иметь порядок соответствующего поперечника Фурье класса $\mathrm{F}^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}$. Оказывается, в качестве такого “плохого” оператора можно взять оператор лифтинга $I^{(\tau)}$.

Действительно, прежде всего легко видеть, что для любого распределения $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$

$$S_{\Lambda(\gamma,N)}(I^{(\tau)}S_{\Lambda(\gamma,N)}(f)) = I^{(\tau)}S_{\Lambda(\gamma,N)}(f) = S_{\Lambda(\gamma,N)}(I^{(\tau)}f).$$

Поэтому (при $g = I^{(\tau)}f$) с учетом свойств оператора лифтинга и определения поперечника Фурье имеем

$$\begin{aligned}\sup\{\|g - S_{\Lambda(\gamma,N)}(g) \,|\, L_r\| \,|\, f \in \mathrm{F}^{s\mathtt{m}}_{pq}\} &\asymp \sup\{\|g - S_{\Lambda(\gamma,N)}(g) \,|\, L_r\| \,|\, g \in \mathrm{F}^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}\} \\ &\ge \varphi_{\#\Lambda(\gamma,N)}(\mathrm{F}^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}, L_r) \asymp \varphi_N(\mathrm{F}^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}, L_r).\end{aligned}$$

Итак, требуемая оценка снизу в соотношении (4.3), а вместе с ней и теорема 3 полностью доказаны.

5. Доказательство теоремы 1: оценки снизу

При получении оценок снизу, не ограничивая общности, будем предполагать, что $\omega = n$, т. е. $\dfrac{s_1}{m_1} = \ldots = \dfrac{s_n}{m_n}$.

Легко видеть, что для каждого оператора $T_a \in \mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_{\mathtt{f}}, \mathrm{L}]$, любых операторов информации $\mathcal{I}_\Lambda = \{\mathfrak{d}_\xi \mid \xi \in \Lambda\}$ $(\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\mathtt{m}} : \#\Lambda = N)$ и $\mathcal{J}_{\mathrm{M}} = \{\mathfrak{g}_{\xi,\zeta} \mid (\xi,\zeta) \in \mathrm{M}\}$ $(\mathrm{M} \subset \mathbb{Z}^{\mathtt{m}} \times \mathbb{Z}^{\mathtt{m}} : \#\mathrm{M} < \infty)$ и любого метода Υ верна оценка

$$\sup\{\|T_a f \,|\, L_r\| \,|\, f \in \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{pq}\colon \widehat{f}(\xi) = 0,\ \xi \in \Lambda\} \le \sup\{\|T_a f - \Upsilon(\mathcal{I}_\Lambda(f), \mathcal{J}_{\mathrm{M}}(T_a)) \,|\, L_r\| \,|\, f \in \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{pq}\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\inf\big\{\sup\{\|T_a f \,|\, L_r\| \,|\, f \in \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{pq} : \widehat{f}(\xi) = 0, \xi \in \Lambda\} \,|\, \Lambda \subset \mathbb{Z}^m : \#\Lambda \le N\big\} \\ \le \mathfrak{S}(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_{\mathtt{f}}, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{pq}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Дальнейшие оценки снизу будут получены именно для этого оператора $I^{(\tau)} := T_{a^{(\tau)}}$.

Сначала рассмотрим случай a) теоремы 1. Итак, пусть $2 \le p,\ q \le \infty,\ r \le p$.

Предположим, что Λ — любое множество из $\mathbb{Z}^m$ с $\#\Lambda \le N$. Выберем $u > 0$ так, чтобы $2\#\Lambda \le \#\Lambda_+(u)$ и $\#\Lambda_+(u) \asymp N$, т. е. $N \asymp 2^u u^{n-1}$.

Тогда по теореме 2 найдется тригонометрический полином $t_{\Lambda,u} \in \mathrm{T}(\Lambda_+(u))$ такой, что $\|t_{\Lambda,u} \,|\, L_2\| > c(\mathtt{m})$ и $\widehat{t}_{\Lambda,u}(\xi) = 0$ для всех $\xi \in \Lambda$, причем для нормы $\|t_{\Lambda,u} \,|\, F^{s\,\mathtt{m}}_{pq}\|$ справедлива оценка (3.3).

Определим полином $g(x) := I^{(-\tau)}t_{\Lambda,u}(x)$, тогда, очевидно,

$$h := \frac{g}{\|g \,|\, F^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}\|} \in \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}, \quad \widehat{h}(\xi) = 0, \quad \xi \in \Lambda,$$

кроме того, с учетом свойств оператора лифтинга (см. разд. 3) и оценки (3.3) находим

$$\|I^{(\tau)}h \,|\, L_r\| = \frac{\|t_{\Lambda,u} \,|\, L_r\|}{\|g \,|\, F^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}\|} \asymp \frac{\|t_{\Lambda,u} \,|\, L_r\|}{\|t_{\Lambda,u} \,|\, F^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}\|} \gg \|t_{\Lambda,u} \,|\, L_r\| 2^{-\sigma u} u^{(n-1)(1/2-1/q)}.$$

Если $r \geq 2$, то (поскольку $\|\cdot \,|\, L_r\| \geq \|\cdot \,|\, L_2\|$) отсюда следует, что

$$\|I^{(\tau)}h \,|\, L_r\| \gg c(\mathtt{m}) 2^{-\sigma u} u^{(n-1)(1/2-1/q)}. \tag{5.2}$$

Если же $r < 2$, то, используя неравенство $\|t_{\Lambda,u} \,|\, L_2\| \leq \|t_{\Lambda,u} \,|\, L_1\|^{1/3} \|t_{\Lambda,u} \,|\, L_4\|^{2/3}$, вытекающее из неравенства Гёльдера, и оценку $\|t_{\Lambda,u} \,|\, L_4\| \ll 1$, которая доказывается вполне аналогично оценке $\|g_2 \,|\, L_4\| \ll 1$ в работе [9, с. 276], снова отсюда получим (с учетом неравенства $\|\cdot \,|\, L_r\| \geq \|\cdot \,|\, L_1\|$) оценку типа (5.2).

Таким образом из соотношений (5.1) и (5.2) вытекает требуемая оценка снизу (2.3), если принять во внимание замечание 1.

Теперь перейдем к рассмотрению случая b). Пусть $1 \leq q < 2 \leq p \leq \infty$, $r \leq p$.

Сперва докажем оценку (2.4). Рассуждения п. 3 (там при получении оценки (5.2) нигде не использовалось условие $q \geq 2$) дают оценку

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_{\mathfrak{f}}, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \gg 2^{-\sigma u} u^{(n-1)(1/2-1/q)},$$

которая в силу замечания 1 является искомой оценкой (2.4).

Рассмотрим случай e). Оценка (2.10) следует из оценок (2.3) и (2.4). В самом деле, в силу (2.3), (2.4) и вложения $\mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q} \supset \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{2\,q}$ (которое вытекает из неравенства $\|\cdot \,|\, L_p\| \leq \|\cdot \,|\, L_2\|$ при $p < 2$) имеем (принимая во внимание замечание 1)

$$\begin{gathered}\mathfrak{S}(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_{\mathfrak{f}}, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \\ \geq \mathfrak{S}(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_{\mathfrak{f}}, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{2\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \gg \varphi_N(\mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{2\,q}, L_r)(\log^{\omega-1} N)^{-(1/q-1/2)_+} \\ = \Big(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\Big)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(1/2-1/q)_+ \,-\, (1/q-1/2)_+} = \Big(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\Big)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(1/2-1/q)}.\end{gathered}$$

При получении оценок снизу в соотношениях (2.5), (2.7), (2.9) нам понадобятся оценки линейных поперечников классов $\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}$ в пространстве L_r из [15]. Напомним, что N-м линейным поперечником множества F банахова пространства X (с нормой $\|\cdot \,|\, X\|$) называется величина

$$\lambda_N(\mathrm{F}, X) := \inf_{A \in \mathcal{L}(X) : \mathrm{rank}(A) \leq N} \sup_{f \in \mathrm{F}} \|f - Af \,|\, X\|,$$

здесь $\mathcal{L}(X)$ — пространство линейных непрерывных операторов $A : X \to X$. Линейные поперечники были введены В. М. Тихомировым в 1960 г.

Нетрудно видеть, что верна оценка

$$\mathfrak{S}'(\mathfrak{H}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_{\mathfrak{f}}, \mathrm{L}], \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \gg \lambda_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r).$$

Но в условиях пп. b)–d) теоремы 1 в силу теоремы 2 из [15] (см. там пп. (i), (ii), (v) соответственно) имеет место порядковое равенство

$$\lambda_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r) \asymp \varphi_N(\mathrm{F}^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}, L_r),$$

которое завершает доказательство оценок снизу в соотношениях (2.5), (2.7), (2.9).

Таким образом, все оценки снизу в теореме 1 доказаны полностью.

З а м е ч а н и е 3. В условиях пункта e)

— для классов Лизоркина — Трибеля при $1 < p < 2 \leq q \leq \infty$ (снова с учетом замечания 1), очевидно, имеем

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{H}^{\tau\mathfrak{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon; \mathrm{K}_{\mathsf{f}}, \mathrm{L}], \mathrm{L}^{s\,\mathfrak{m}}_{p\,q}; \mathfrak{I}_N, \mathfrak{J}; L_r) \asymp \varphi_N(\mathrm{L}^{s\,\mathfrak{m}}_{p\,q}, L_r);$$

— для классов Лизоркина — Трибеля при остальных (допустимых) соотношениях между p и q, а также для классов Никольского — Бесова при любых (допустимых) соотношениях между p и q оценка сверху (2.2) и оценка снизу (2.10) совпадают в степенной шкале, но между ними имеется “логарифмический люфт”.

6. Заключительные замечания и комментарии[3]

Как было отмечено во введении, исследованию разнообразных задач (оптимального) восстановления (значений) операторов посвящена обширная литература. История и различные аспекты этой проблематики отражены, в частности, в монографиях [3;6;16–19] и обзорах [1;2;5] (см. также библиографию в обсуждаемых ниже статьях).

Здесь в связи с теоремой 1 обсудим лишь результаты ряда работ, в которых изучаются различные аспекты задач (оптимального) восстановления операторов на классах периодических функций одной и нескольких переменных по спектральной информации или близкие задачи.

Прежде всего отметим работу [20], в которой изучается (в наших обозначениях) задача (1.1), где рассматриваются гильбертово пространство $Y = L_2(M)$ (с окружностью $\mathbb{T}$, кругом D в комплексной плоскости или многомерной сферой $\mathbb{S}^d$ в качестве M) с полной ортонормированной системой $\{\psi_l\}_{l\in\mathcal{N}}$ (в случае окружности берется тригонометрическая система $\{e^{2\pi i l x}\}_{l\in\mathbb{Z}}$, в случае круга — $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, а в случае сферы — система сферических гармоник), единичный шар F некоторого подпространства X из $L_2(M)$ (типичные примеры в случае окружности — классы Соболева $W^s_2(\mathbb{T})$ и Харди $H^s_2(\mathbb{T})$, Бергмана — Соболева $A^{s,\beta}_2(\mathbb{T})$, в случае круга — Соболева — Харди $H^s_2(D)$, Бергмана — Соболева $A^{s,\beta}_2(D)$, а в случае сферы — классы типа Соболева $W^\beta_2(\mathbb{S}^d)$, определяемые ограничениями в метрике $L_2(\mathbb{S}^d)$ на действие (дробной) степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{\beta/2}$) и оператор $T : X \to L_2(M)$ типа мультипликатора (типичные примеры в случае окружности и круга — тождественный оператор и (промежуточная) производная d^k/dx^k, а в случае сферы — тождественный оператор и (“промежуточная” дробная) степень лапласиана $(-\Delta)^{\gamma/2}$). В качестве (оператора) информации рассматривается (полный или конечный) набор коэффициентов Фурье $\{f_l\}_{l\in\mathrm{N}}$ функции $f \in \mathrm{F}$ по системе $\{\psi_l\}_{l\in\mathcal{N}}$ $(\mathrm{N} \subset \mathcal{N})$, заданный с некоторой погрешностью (в той или иной метрике); таким образом, если погрешность ненулевая, то оператор информации $\mathcal{I}$ является, вообще говоря, многозначным, и тогда задача (1.1) принимает вид

$$\mathfrak{S}(T, \mathrm{F}; \mathcal{I}; Y) := \inf\{\, \mathfrak{R}(T, \mathrm{F}; \mathcal{I}, \Upsilon; Y) \mid \Upsilon \,\},$$

$$\mathfrak{R}(T, \mathrm{F}; \mathcal{I}, \Upsilon; Y) := \sup\{\, \| Tf - \Upsilon(y) \,|\, Y \| \mid y \in \mathcal{I}(f), f \in \mathrm{F} \,\}.$$

В [20] применяется подход, основанный на стандартных принципах выпуклой оптимизации, и при некоторых ограничениях на оператор T (все перечисленные выше примеры операторов им удовлетворяют) дается точное решение задачи (1.1): вычисляется точное значение величины (1.1) и выписываются явные выражения для оптимальных методов. Подчеркнем, что в этом подходе ключевую роль играет гильбертова структура пространства Y и класса F. Дальнейшее его развитие и применение к решению других задач оптимального восстановления можно проследить, в частности, по работам [21–23]. Отметим, что в [23] развивается метод, дающий точное решение задач оптимального восстановления линейных операторов по

[3] По согласованию с редакцией здесь приведен краткий обзор исследований, близких по тематике к данной работе.

(неточной) спектральной информации в ряде случаев неевклидовых метрик (т. е. при отказе от гильбертовости); подробности см. [23, § 7].

В серии работ [24–28] проведено весьма полное исследование задачи оптимизации по сложности приближенного решения уравнений Фредгольма второго рода с гладкими ядрами. Вопрос о (точном порядке) сложности приближенного решения (классов) операторных уравнений относится к теории информационной сложности (information — based complexity) и состоит в определении (точного порядка) количества элементарных (в том или ином смысле) операций, потребного для построения приближенного решения таких уравнений с наперед заданной точностью (в той или иной метрике). Мы не будем входить в подробности, лишь сошлемся на монографии [3; 17–19], первая из которых фактически положила начало этой теории, а три последние подводят некоторый промежуточный итог в ее развитии.

Здесь же для нас важно отметить в работах [24–28] ряд важных обстоятельств в связи с рассмотренной выше задачей оптимального восстановления (1.5).

Пусть $C(\mathbb{T}^2)$ — пространство непрерывных на торе $\mathbb{T}^m$ функций. Обозначим через $AW_2^s(\mathbb{T})$ ($A > 0$) множество всех функций $f \in W_2^s(\mathbb{T})$ (см. пример 1 из разд. 1 выше) таких, что $\|f \,|\, L_2(\mathbb{T}^2)\| + \|f^{(s)} \,|\, L_2(\mathbb{T}^2)\| \le A$, через $BW_2^{s,s}(\mathbb{T}^2)$ — множество ($B > 0$)

$$\Big\{h \in C(\mathbb{T}^2) \,|\, \partial^{(\alpha,\beta)} h \in C(\mathbb{T}^2),\ 0 \le \alpha, \beta \le s, \sum_{0 \le \alpha,\beta \le s} \|\partial^{(\alpha,\beta)} h \,|\, L_2(\mathbb{T}^2)\| \le B\Big\}$$

и через $\mathfrak{H}^s(B,C)$ ($C > 0$) — класс всех интегральных операторов

$$T_h : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T}) : f \mapsto T_h f := \int\limits_{\mathbb{T}} h(\,\cdot\,, y) f(y) dy$$

с ядрами $h \in BW_2^{s,s}(\mathbb{T}^2)$ таких, что оператор $Id - T_h : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T})$ обратим (здесь Id — тождественный оператор), причем

$$\|(Id - T_h)^{-1} \,|\, L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T})\| \le C.$$

В [24–26; 28] (в последней работе рассматривается многомерный случай) изучается задача (оценки сложности) приближенного восстановления решения уравнения Фредгольма второго рода (в наших обозначениях)

$$g = T_h g + f$$

с $T_h \in \mathfrak{H}^s(B,C)$ и $f \in AW_2^s(\mathbb{T})$ фактически как задача восстановления значений $\widetilde{T}_h f$ операторов $\widetilde{T}_h$ из класса

$$\mathfrak{H}^{-s}(B,C) := \{\widetilde{T}_h = (Id - T_h)^{-1} \,|\, T_h \in \mathfrak{H}^s(B,C)\}$$

на функциональном классе $AW_2^s(\mathbb{T})$ по информации об f в виде набора тригонометрических коэффициентов Фурье $\{\widehat{f}(l)\colon |l| \le N\}$ и (неполной!) информации об операторе $\widetilde{T}_h$ в виде набора тригонометрических коэффициентов Фурье $\{\widehat{h}(l,k)\colon (k,l) \in \Xi_N\}$ ядра h исходного оператора T_h, где Ξ_N — подходящим (оптимальным в соответствующем смысле) образом выбранный гиперболический крест из $\mathbb{Z}^2$. Кроме того, в этих работах для получения требуемых оценок снизу привлекаются поперечники соответствующих функциональных компактов (например, в [26] для этих целей используются поперечники Александрова, в [27; 28] — поперечники Гельфанда). Между прочим, здесь же отметим, что оценки снизу, доказанные в разд.5 с использованием теремы 2 из разд.3, фактически дают оценки снизу для соответствующих поперечников Гельфанда классов $\mathrm{F}^{s\mathtt{m}}_{pq}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Micchelli C.A., Rivlin T.J.** A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory /eds. C.A. Micchelli, T.J. Rivlin. N Y etc.: Plenum, 1977. P. 1–54. doi: 10.1007/978-1-4684-2388-4_1 .

2. **Micchelli C.A., Rivlin T.J.** Lectures on optimal recovery // Numerical Analysis Lancaster / ed. P.R. Turner. Berlin: Springer–Verlag, 1984. P. 21–93. (Lecture Notes Math.; vol. 1129). doi: 10.1007/BFb0075157 .
3. **Трауб Дж., Вожьняковский Х.** Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983. 382 с.
4. **Арестов В.В.** Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 3–20.
5. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124.
6. **Женсыкбаев А.А.** Проблемы восстановления операторов. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003. 411 с.
7. **Dinh Dung, Temlyakov V.N., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation. Basel: Birkh*ä*user Springer, 2018. 218 p. doi: 10.1007/978-3-319-92240-9 .
8. **Базарханов Д.Б.** Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I // Тр. МИАН. 2010. Т. 269. С. 8–30.
9. **Базарханов Д.Б.** Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. II // Analysis Math. 2012. Vol. 38, no. 4. С. 249–289. doi: 10.1007/s10476-012-0401-3 .
10. **Темляков В. Н.** Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 138–168.
11. **Ruzhansky M., Turunen V.** Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics. Basel: Birkh*ä*user Springer, 2009. 709 p. doi: 10.1007/978-3-7643-8514-9 .
12. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. Москва: Наука, 1977. 456 с.
13. **Трибель Х.** Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986. 448 р.
14. **Schmeisser H. J., Triebel H.** Topics in Fourier analysis and function spaces. Chichester: J. Wiley & Sons, 1987. 300 p.
15. **Bazarkhanov D.B.** Estimates for the widths of classes of periodic functions of several variables. I // Eurasian Math. J. 2010. Vol. 1, no. 3. С. 11–26.
16. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для задач математической физики / ред. К.И. Бабенко. М.: Наука, 1979. 295 с.
17. **Novak E., Wozniakowski H.** Tractability of multivariate problems. Vol. I: Linear information. Zurich: EMS Tracts Math., 2008.
18. **Novak E., Wozniakowski H.** Tractability of multivariate problems. Vol. II: Standard information for functionals. Zurich: EMS Tracts Math., 2010.
19. **Novak E., Wozniakowski H.** Tractability of multivariate problems. Vol. III: Standard information for operators. Zurich: EMS Tracts Math., 2012.
20. **Магарил – Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 3 С. 79–100.
21. **Выск Н. Д., Осипенко К. Ю.** Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 6 С. 803–815.
22. **Магарил – Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** О наилучшем гармоническом синтезе периодических функций // Фунд. и прикладная математика. 2013. Т. 18, № 5 С. 155–174.
23. **Осипенко К. Ю.** Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 10 С. 77–106.
24. **Переверзев С. В.** О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. I // Укр. мат. журн. 1988. Т. 40, № 1 С. 84–91.
25. **Переверзев С. В.** О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. II // Укр. мат. журн. 1989. Т. 41, № 2 С. 189–193.
26. **Переверзев С. В.** Гиперболический крест и сложность приближенного решения уравнений Фредгольма II рода с дифференцируемыми ядрами. // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 1. С. 107–115.
27. **Heinrich S.** Complexity of integral equations and relation to s-numbers // J. Complexity. 1993. Vol. 9, no. 1. P. 141–153. doi: 10.1006/jcom.1993.1010 .
28. **Frank K., Heinrich S., Pereverzev S. V.** Information complexity of multivariate Fredholm integral equations in Sobolev classes // J. Complexity. 1996. Vol. 12, no. 1. P. 17–34. doi: 10.1006/jcom.1996.0004 .

Поступила 9.08.2019
После доработки 18.11.2019
Принята к публикации 25.11.2019

Базарханов Даурен Болысбекович
канд. физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник, зав. отделом теории функций
Институт математики и математического моделирования
г. Алматы
e-mail: dauren.mirza@gmail.com

REFERENCES

1. Micchelli C.A., Rivlin T.J. A survey of optimal recovery. In: *Optimal estimation in approximation theory.* N.Y. etc.: Plenum Press, 1977, pp. 1–54. doi: 10.1007/978-1-4684-2388-4_1 .
2. Micchelli C.A., Rivlin T.J. Lectures on optimal recovery. In: Turner P.R. (ed.), *Numerical Analysis Lancaster* (1984), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1129, Berlin: Springer–Verlag, pp. 21–93. doi: 10.1007/BFb0075157 .
3. Traub J., Wozniakowski H. *A general theory of optimal algorithms.* ACM Monograph Ser., N Y etc.: Acad. Press, 1980, 341 p. ISBN: 0126976503 . Translated to Russian under the title *Obshchaya teoriya optimal'nykh algoritmov.* Moscow: Mir Publ., 1983, 382 p.
4. Arestov V.V. Optimal recovery of operators and related problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, no. 4, pp. 1–20.
5. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russ. Math. Surv.*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001 .
6. Zhensykbaev A.A. *Problemy vosstanovleniya operatorov* (Operator recovery problems). Moscow; Izhevsk: RKhD Publ., 2003, 411 p. ISBN: 5-93972-268-7 .
7. Dinh Dung, Temlyakov V.N., Ullrich T. *Hyperbolic cross approximation.* Basel: Birkhäuser Springer, 2018, 218 p. doi: 10.1007/978-3-319-92240-9 .
8. Bazarkhanov D.B. Wavelet approximation and Fourier widths of classes of periodic functions of several variables. I. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 269, pp. 2–24. doi: 10.1134/S0081543810020021 .
9. Bazarkhanov D.B. Wavelet approximation and Fourier widths of classes of periodic functions of several variables. II. *Analysis math.*, 2012, vol. 38, no. 4, pp. 249–289. doi: 10.1007/s10476-012-0401-3 .
10. Temlyakov V.N. Estimates for the asymptotic characteristics of classes of functions with bounded mixed derivative or difference. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 189, pp. 161–197.
11. Ruzhansky M., Turunen V. *Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics.* Basel: Birkhäuser Springer, 2009, 709 p. doi: 10.1007/978-3-7643-8514-9 .
12. Nikol'skii S.M. *Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems.* Berlin; N Y: Springer-Verlag, 1975, 420 p. doi: 10.1007/978-3-642-65711-5 . Original Russian text (2nd ed.) published in Nikol'skii S.M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 456 p.
13. Triebel H. *Theory of function spaces.* Basel: Birkhäuser, 1983. ISBN: 3764313811 . Translated to Russian under the title *Teoriya funktsional'nykh prostranstv.* Moscow: Mir Publ., 1986.
14. Schmeisser H.J., Triebel H. *Topics in Fourier analysis and function spaces.* Chichester: J. Wiley & Sons, 1987, 300 p. ISBN: 0-471-90895-9 .
15. Bazarkhanov D. Estimates for the widths of classes of periodic functions of several variables. I. *Eurasian Math. J.*, 2010, vol. 1, no. 3, pp. 11–26.
16. Babenko K.I. (eds) *Teoreticheskie osnovy i konstruirovanie chislennykh algoritmov dlya zadach matematicheskoi fiziki* [Theoretical principles and construction of numerical algorithms of mathematical physics]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 295 p.
17. Novak E., Wozniakowski H. *Tractability of multivariate problems.* Vol. I: Linear information. EMS Tracts in Mathematics, Zurich: EMS, 2008. ISBN: 978-3-03719-026-5 .
18. Novak E., Wozniakowski H. *Tractability of multivariate problems. Volume II: Standard information for functionals.* EMS Tracts in Mathematics, Zurich: EMS, 2010. ISBN: 9783037190845 .
19. Novak E., Wozniakowski H. *Tractability of multivariate problems. Volume III: Standard information for operators.* EMS Tracts in Mathematics, Zurich: EMS, 2012. ISBN: 9783037191163 .

20. Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu. Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error. *Sb. Math.*, 2002, vol. 193, no. 3, pp. 387–407. doi: 10.1070/SM2002v193n03ABEH000637 .
21. Vysk N.D., Osipenko K.Yu. Optimal Reconstruction of the Solution of the Wave Equation from Inaccurate Initial Data. *Math. Notes*, 2007, vol. 81, no. 6, pp. 723–733. doi: 10.1134/S0001434607050203 .
22. Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu. On best harmonic synthesis of periodic functions. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 209, no. 1, pp. 115–129. doi: 10.1007/s10958-015-2489-z .
23. Osipenko K.Yu. Optimal recovery of linear operators in non-Euclidean metrics. *Sb. Math.*, 2014, vol. 205, no. 10, pp. 1442–1472. doi: 10.1070/SM2014v205n10ABEH004425 .
24. Pereverzev S.V. Complexity of the problem of finding the solutions of fredholm equations of the second kind with smooth kernels. I. *Ukr. Math. J.*, 1988, vol. 40, no. 1, pp. 71–76. doi: 10.1007/BF01056451 .
25. Pereverzev S.V. Complexity of the problem of finding the solutions of Fredholm equations of the second kind with smooth kernels. II. *Ukr. Math. J.*, 1989, vol. 41, no. 2, pp. 169–173. doi: 10.1007/BF01060382 .
26. Pereverzev S.V. Hyperbolic cross and the complexity of the approximate solution of Fredholm integral equations of the second kind with differentiable kernels. *Sib. Math. J.*, 1991, vol. 32, no. 1, pp. 85–92. doi: 10.1007/BF00970164 .
27. Heinrich S. Complexity of integral equations and relations to s-numbers. *J. Complexity*, 1993, vol. 9, no. 1, pp. 141–153. doi: 10.1006/jcom.1993.1010 .
28. Frank K., Heinrich S., Pereverzev S.V. Information complexity of multivariate Fredholm integral equations in Sobolev classes. *J. Complexity*, 1996, vol. 12, no. 1, pp. 17–34. doi: 10.1006/jcom.1996.0004 .

Received August 9, 2019
Revised November 8, 2019
Accepted November 25, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP05133257).

Dauren B. Bazarkhanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Institute of Mathematics and Math Modeling, Almaty, 050010 Kazakhstan, e-mail: dauren.mirza@gmail.com .

Cite this article as: D. B. Bazarkhanov. Linear recovery of pseudodifferential operators on classes of smooth functions on an m-dimensional torus. II, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 15–30 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.926.4

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ЭФФЕКТА ПЕРРОНА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ К НУЛЮ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Е. А. Барабанов, В. В. Быков

Пусть $\mathcal{M}_n$ — множество линейных дифференциальных систем порядка n с непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами, $n \geqslant 2$. Показатели Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}_n$ обозначаются через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, их спектр — через $\Lambda(A) = (\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))$ и ее индекс экспоненциальной устойчивости (размерность линейного подпространства решений с отрицательными характеристическими показателями) — через $\mathrm{es}(A)$. Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ и метрического пространства M рассматривается класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ непрерывных по совокупности переменных $(n \times n)$-матричнозначных функций $Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих оценке $\|Q(t,\mu)\| \leqslant C_Q \exp(-\sigma_Q t)$ для всех $(t,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times M$, где C_Q и σ_Q — положительные постоянные (свои для каждой функции Q), и таких, что показатели Ляпунова системы $A+Q$, являющиеся функциями $\mu \in M$ и обозначаемые через $\lambda_1(\mu; A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu; A+Q)$, не меньше соответствующих показателей Ляпунова системы A, т. е. $\lambda_k(\mu; A+Q) \geqslant \lambda_k(A)$, $k = \overline{1,n}$, для любого $\mu \in M$. Ставится задача полного описания для каждых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M класса пар $\bigl(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\bigr)$, составленных из спектра $\Lambda(A) \in \mathbb{R}^n$ системы $A \in \mathcal{M}_n$ и из спектра $\Lambda(\cdot\,; A+Q)\colon M \to \mathbb{R}^n$ семейства $A+Q$, когда A пробегает множество $\mathcal{M}_n$, а матричнозначная функция Q при каждом A — класс $\mathcal{E}_n[A](M)$, т. е. класса $\Pi\mathcal{E}_n(M) = \bigl\{\bigl(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\bigr) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\bigr\}$. Решение задачи дает следующее утверждение: для любых натурального $n \geqslant 2$ и метрического пространства M пара $\bigl(l, F(\cdot)\bigr)$, где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ и $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))\colon M \to \mathbb{R}^n$, тогда и только тогда принадлежит классу $\Pi\mathcal{E}_n(M)$, когда выполняются четыре условия: 1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$, 2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ для любого $\mu \in M$, 3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ для всех $i = \overline{1,n}$ и $\mu \in M$, 4) для любого $i = \overline{1,n}$ функция $f_i(\cdot)\colon M \to \mathbb{R}$ ограничена, и при каждом $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f_i^{-1}([r, +\infty))$ полуинтервала $[r, +\infty)$ является G_δ-множеством. Решение аналогичной задачи описания пар, составленных из индекса $\mathrm{es}(A) \in \{0, \ldots, n\}$ экспоненциальной устойчивости системы A и из индекса $\mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)\colon M \to \{0, \ldots, n\}$ экспоненциальной устойчивости семейства $A+Q$, т. е. класса $\mathcal{IE}_n(M) = \bigl\{\bigl(\mathrm{es}(A), \mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)\bigr) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\bigr\}$, описывается утверждением: для любых натурального $n \geqslant 2$ и метрического пространства M пара $\bigl(d, f(\cdot)\bigr)$, где $d \in \{0, \ldots, n\}$ и $f\colon M \to \{0, \ldots, n\}$, принадлежит классу $\mathcal{IE}_n(M)$ тогда и только тогда, когда $f(\mu) \leqslant d$ для любого $\mu \in M$ и при каждом $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}((-\infty, r])$ полуинтервала $(-\infty, r]$ является G_δ-множеством.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, показатели Ляпунова, убывающие к нулю возмущения, классы Бэра.

E. A. Barabanov, V. V. Bykov. Description of the linear Perron effect under parametric perturbations exponentially vanishing at infinity.

Let $\mathcal{M}_n$ be the set of linear differential systems of order $n \geqslant 2$ whose coefficients are continuous and bounded on the time semiaxis $\mathbb{R}_+$. Denote by $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ the Lyapunov exponents of a system $A \in \mathcal{M}_n$, by $\Lambda(A) = (\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))$ their spectrum, and by $\mathrm{es}(A)$ the exponential stability index of A (the dimension of the linear subspace of solutions with negative characteristic exponents). For a system $A \in \mathcal{M}_n$ and a metric space M, we consider the class $\mathcal{E}_n[A](M)$ of continuous $(n \times n)$ matrix-valued functions $Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfying the bound $\|Q(t,\mu)\| \leqslant C_Q \exp(-\sigma_Q t)$ for all $(t,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times M$, where C_Q and σ_Q are positive constants (possibly different for each function Q), and such that the Lyapunov exponents of the system $A+Q$, which are functions of $\mu \in M$ and are denoted by $\lambda_1(\mu; A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu; A+Q)$, are not less than the corresponding Lyapunov exponents of the system A; i.e., $\lambda_k(\mu; A+Q) \geqslant \lambda_k(A)$, $k = \overline{1,n}$, for all $\mu \in M$. The problem is to obtain a complete description for each $n \in \mathbb{N}$ and each metric space M of the class of pairs $\bigl(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\bigr)$ composed of the spectrum $\Lambda(A) \in \mathbb{R}^n$ of a system $A \in \mathcal{M}_n$ and the spectrum $\Lambda(\cdot\,; A+Q)\colon M \to \mathbb{R}^n$ of a family $A+Q$, where A ranges over $\mathcal{M}_n$ and the matrix-valued function Q ranges over the class $\mathcal{E}_n[A](M)$ for each A, i.e., of the class $\Pi\mathcal{E}_n(M) = \bigl\{\bigl(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\bigr) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\bigr\}$. The solution of this problem is provided by the following statement: for each integer $n \geqslant 2$ and every metric space M, a pair $\bigl(l, F(\cdot)\bigr)$, where $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ and $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))\colon M \to \mathbb{R}^n$, belongs to the class $\Pi\mathcal{E}_n(M)$ if and only if the following conditions are met: (1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$, (2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ for all $\mu \in M$, (3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ for all $i = \overline{1,n}$ and $\mu \in M$, (4) for each $i = \overline{1,n}$, the function $f_i(\cdot)\colon M \to \mathbb{R}$ is bounded and, for any $r \in \mathbb{R}$, the preimage $f_i^{-1}([r, +\infty))$ of the half-interval $[r, +\infty)$ is a G_δ-set. The solution of the similar problem of describing the pairs composed of the exponential stability index $\mathrm{es}(A) \in \{0, \ldots, n\}$ of a system A and the exponential stability index $\mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)\colon M \to \{0, \ldots, n\}$ of a family $A+Q$, i.e., the class $\mathcal{IE}_n(M) = \bigl\{\bigl(\mathrm{es}(A), \mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)\bigr) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\bigr\}$, is contained in the following statement: for any positive integer $n \geqslant 2$ and every metric space M, a pair $\bigl(d, f(\cdot)\bigr)$, where $d \in \{0, \ldots, n\}$ and $f\colon M \to \{0, \ldots, n\}$, belongs to the class $\mathcal{IE}_n(M)$ if and only if $f(\mu) \leqslant d$ for all $\mu \in M$ and, for any $r \in \mathbb{R}$, the preimage $f^{-1}((-\infty, r])$ of the half-interval $(-\infty, r]$ is a G_δ-set.

Keywords: linear differential system, Lyapunov exponents, perturbations vanishing at infinity, Baire classes.

MSC: 34D08, 34D10

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-31-43

Введение

Для заданного натурального n через $\mathcal{M}_n$ обозначим множество линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с ограниченными и непрерывными на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Обозначим через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ показатели Ляпунова [1, с. 27; 2, гл. III, §4] системы (1), через $\Lambda(A) = \big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big)$ — ее спектр, а через $\mathrm{es}(A)$ — индекс экспоненциальной устойчивости, т. е. размерность линейного пространства решений этой системы, имеющих отрицательные характеристические показатели. Далее мы отождествляем систему (1) с матричнозначной функцией $A(\cdot)$ и пишем $A \in \mathcal{M}_n$.

В работе [3] О. Перрон построил пример системы $A \in \mathcal{M}_2$ с отрицательными показателями Ляпунова, для которой существует такая непрерывная на полуоси (2×2)-матрица $Q(t)$, экспоненциально убывающая к нулю на бесконечности, что старший показатель Ляпунова $\lambda_2(A{+}Q)$ возмущенной системы $(A{+}Q) \in \mathcal{M}_2$ положителен (в частности, $\lambda_2(A{+}Q) > \lambda_2(A)$), а младший $\lambda_1(A + Q)$ совпадает с показателем $\lambda_1(A)$ невозмущенной системы. Таким образом, в примере Перрона индекс экспоненциальной устойчивости исходной системы равен двум, а возмущенной — единице, т. е. имеет место потеря устойчивости. О. Перроном [4] построен также пример системы $A \in \mathcal{M}_2$ с отрицательными показателями Ляпунова и такого ее определенного в произведении $\mathbb{R}_+ \times G$ (G — окрестность нуля в $\mathbb{R}^2$) непрерывного по совокупности переменных возмущения $f(t, x)$ высшего порядка малости (т. е. $\|f(t, x)\| \leqslant \mathrm{const}\|x\|^m$, $m = \mathrm{const} > 1$), что показатель Ляпунова любого имеющего в начальный момент $t = 0$ ненулевую первую компоненту решения возмущенной системы $\dot{x} = A(t)x + f(t, x)$ больше некоторого положительного числа, а показатель Ляпунова решений с нулевой в начальный момент первой компонентой — тот же, что и у невозмущенной линейной системы.

Эти примеры Перрона послужили отправной точкой многочисленных исследований влияния различных классов линейных и нелинейных возмущений на показатели Ляпунова систем из $\mathcal{M}_n$, а результаты, полученные в этом направлении, составляют существенную часть современной теории показателей Ляпунова. Эффект изменения значений показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}_n$ при тех или иных "малых" ее возмущениях назван в монографии [5, гл. 4] эффектом Перрона. Позднее, начиная с работы [6], это название — эффект Перрона — было усвоено только той ситуации (ее, формально говоря, и рассмотрел О. Перрон), при которой возмущения не уменьшают показатели Ляпунова исходной системы (этой терминологии мы и следуем в дальнейшем). В отличие от работ [5; 6], в которых эффект Перрона, как в [4], рассматривался при возмущениях высшего порядка малости, мы в соответствии с работой [3] рассматриваем линейные убывающие (в частности, экспоненциально) к нулю возмущения матриц коэффициентов систем из $\mathcal{M}_n$ и в этом случае называем эффект Перрона линейным.

Для дальнейшего важно отметить, что построенная в работе [3] матрица-возмущение имела вид $\mu Q(t)$, где μ — вещественный параметр; доказано, что для любого $\mu \neq 0$ при таком возмущении старший показатель Ляпунова возмущенной системы положителен, а младший не изменяется. Имея в виду это обстоятельство, далее, зафиксировав некоторое метрическое пространство M, будем рассматривать семейства линейных дифференциальных систем вида

$$\dot{x} = \big(A(t) + Q(t, \mu)\big)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $A \in \mathcal{M}_n$, а $Q(\cdot, \cdot) \colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — непрерывная по совокупности переменных матричнозначная функция. При каждом фиксированном в семействе (2) значении параметра $\mu \in M$

получаем линейную дифференциальную систему с ограниченными (своей, вообще говоря, для каждого μ постоянной) и непрерывными на полуоси коэффициентами, показатели Ляпунова которой обозначим через $\lambda_1(\mu; A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu; A+Q)$. Таким образом, показатели Ляпунова семейства (2) — функции параметра $\mu \in M$; в частности, определен спектр семейства (2) — вектор-функция $\Lambda(\cdot\,; A+Q) \equiv \bigl(\lambda_1(\cdot\,; A+Q), \ldots, \lambda_n(\cdot\,; A+Q)\bigr)\colon M \to \mathbb{R}^n$.

1. Постановка задачи. Основной результат

Через $\mathcal{E}_n(M)$ обозначим класс непрерывных по совокупности переменных матричнозначных функций $Q(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, экспоненциально убывающих к нулю при $t \to +\infty$ равномерно относительно $\mu \in M$, т.е.

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \ln \sup_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\|^{1/t} < 0. \tag{3}$$

Для каждой системы $A \in \mathcal{M}_n$ через $\mathcal{E}_n[A](M)$ обозначим класс тех возмущений $Q \in \mathcal{E}_n(M)$, которые не уменьшают ее показатели Ляпунова, т.е. для любых системы $A \in \mathcal{M}_n$ и ее возмущения $Q \in \mathcal{E}_n[A](M)$ выполняется неравенство $\inf_{\mu\in M} \lambda_i(\mu; A+Q) \geqslant \lambda_i(A)$ при всех $i = \overline{1,n}$. Очевидно, что для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$ класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ не пуст, поскольку ему принадлежит тождественно нулевая матрица.

Ставится задача полного дескриптивно-множественного описания для каждых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M класса пар $\bigl(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\bigr)$, составленных из спектра $\Lambda(A)$ системы $A \in \mathcal{M}_n$ и вектор-функции $\Lambda(\cdot\,; A+Q)$, когда A пробегает множество $\mathcal{M}_n$, а матричнозначная функция Q при каждом A — класс $\mathcal{E}_n[A](M)$, т.е. класса

$$\Pi\mathcal{E}_n(M) = \bigl\{\bigl(\Lambda(A), \Lambda(\cdot\,; A+Q)\bigr) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\bigr\}.$$

Отметим, что полное описание класса

$$\Lambda\mathcal{E}_n(M) = \{\Lambda(\cdot\,; A+Q) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\},$$

составленного из вторых элементов пар класса $\Pi\mathcal{E}_n(M)$, фактически получено в работе [7].

Очевидно, что решение поставленной задачи будет содержать как частный случай пример Перрона и будет описывать с дескриптивно-множественной точки зрения в том числе и все возможные ситуации, при которых экспоненциально устойчивая линейная система под действием параметрических экспоненциально убывающих возмущений становится неустойчивой. Например, как следует из теоремы работы, существуют такая система $A \in \mathcal{M}_2$ со старшим показателем Ляпунова $\lambda_2(A)$, равным -1, и такое ее возмущение $Q \in \mathcal{E}_2[A](\mathbb{R})$, что старший показатель $\lambda_2(A+Q)$ Ляпунова возмущенной системы при μ рациональном равен -1, а при μ иррациональном равен 1.

Отметим, что направление в теории показателей Ляпунова, ставящее своей целью изучение зависимости от параметра асимптотических свойств и характеристик параметрических дифференциальных систем, возникло благодаря В. М. Миллионщикову, начавшему систематические исследования в этом направлении серией работ, из которых укажем только работу [8]. Ему же мы обязаны пониманием того, что адекватным языком описания такой зависимости является язык теории Бэра разрывных функций [9]. Подчеркнем, что речь идет о полном описании всех возможных типов поведения тех или иных свойств или характеристик при изменении параметров системы, а не об установлении достаточных условий того или иного характера их поведения. К настоящему времени в этом направлении получено большое количество результатов.

Так как при $n = 1$ для любого метрического пространства M и любого семейства $Q \in \mathcal{E}_1(M)$ справедливо равенство $\lambda_1(A) = \lambda_1(A+Q)$, то $\Pi\mathcal{E}_1(M) = \bigl\{\bigl(\Lambda(A), \Lambda(A)\bigr)\bigr\}$. Поэтому далее считаем, что $n > 1$.

Напомним, что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется [10, с. 224] функцией класса $(^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([r, +\infty)\big)$ полуинтервала $[r, +\infty)$ является G_δ-множеством метрического пространства M. В частности, класс $(^*, G_\delta)$ — подкласс второго класса Бэра [10, с. 248].

Полное описание класса $\Pi\mathcal{E}_n(M)$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, и пространства M дает следующее утверждение, которое было анонсировано в [11].

Теорема. *Пусть n — натуральное число, большее единицы, и M — метрическое пространство. Пара $\big(l, F(\cdot)\big)$, где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ и $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))\colon M \to \mathbb{R}^n$, тогда и только тогда принадлежит классу $\Pi\mathcal{E}_n(M)$, когда выполняются следующие условия*:

1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$;
2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ *для любого* $\mu \in M$;
3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ *для всех* $\mu \in M$ *и* $i = \overline{1, n}$;
4) *для любого* $i = \overline{1, n}$ *функция* $f_i(\cdot)\colon M \to \mathbb{R}$ *ограничена и принадлежит классу* $(^*, G_\delta)$.

Следствие 1. *Пусть n — натуральное число, большее единицы, и M — отрезок вещественной прямой. Тогда для всякой пары $(l, F(\cdot)) \in \Pi\mathcal{E}_n(M)$ существуют система $A \in \mathcal{M}_n$ и аналитическое по параметру $\mu \in M$ ее возмущение $Q \in \mathcal{E}_n[A](M)$ такие, что $\Lambda(A) = l$ и $\Lambda(\cdot\,; A + Q) = F$.*

Поставив каждому $\mu \in M$ в соответствие индекс экспоненциальной устойчивости системы (2), получим функцию $\mathrm{es}(\cdot; A) : M \to \mathcal{Z}_n$, где $\mathcal{Z}_n \equiv \{0, \ldots, n\}$. Естественно возникает задача описания класса пар, составленных из индексов экспоненциальной устойчивости исходной и возмущенной систем, т. е. класса $\mathcal{IE}_n(M) = \big\{\big(\mathrm{es}(A), \mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)\big) \mid A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\big\}$. Описание этого класса содержит следующее

Следствие 2. *Пусть n — натуральное число, большее единицы, а M — метрическое пространство. Пара $\big(d, f(\cdot)\big)$, где $d \in \mathcal{Z}_n$ и $f\colon M \to \mathcal{Z}_n$ принадлежит классу $\mathcal{IE}_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:* а) *$f(\mu) \leqslant d$ для любого $\mu \in M$,* б) *функция $(-f)$ принадлежит классу $(^*, G_\delta)$.*

2. Доказательство основных результатов

Сначала сформулируем и докажем три вспомогательных утверждения. Наделим пространство $\mathbb{R}^n$ наиболее удобной для дальнейшего нормой $\|x\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, а пространство $n \times n$ матриц — соответствующей операторной нормой

$$\|Y\| = \sup_{\|x\|=1} \|Yx\|, \quad Y \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Лемма 1. *Пусть заданы числа $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ и отрезок $[c, d] \subset (0, +\infty)$. Тогда для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и решения $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))^{\mathrm{T}}$ системы*

$$\dot{x} = \mathrm{diag}[a_1, \ldots, a_n]x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [c, d],$$

функция $\chi_i^x\colon [c, d] \to \mathbb{R} \sqcup \{-\infty\}$, определяемая равенством $\chi_i^x(t) = \ln|x_i(t)|^{1/t}$, $t \in [c, d]$, монотонна (вообще говоря, нестрого).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и решения $x(\cdot)$ рассматриваемой системы справедливо равенство $x_i(t) = e^{a_i(t-c)}x_i(c)$, $t \in [c, d]$. Следовательно, если $x_i(c) \neq 0$, то $\chi_i^x(t) = a_i + (\ln|x_i(c)| - a_i c)/t$, $t \in [c, d]$, а если $x_i(c) = 0$, то $\chi_i^x(t) = -\infty$ при всех $t \in [c, d]$.

Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}_+$ — неограниченное множество. *Характеристическим показателем* вектор-функции $f\colon \mathrm{S} \to \mathbb{R}^n$ называется величина (считаем $\ln 0 = -\infty$)

$$\lambda[f] = \varlimsup_{\mathrm{S} \ni t \to +\infty} \ln \|f(t)\|^{1/t}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}_+$ *— неограниченное множество. Тогда для любой вектор-функции* $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))^{\mathrm{T}} \colon \mathrm{S} \to \mathbb{R}^n$ *справедливо равенство*

$$\lambda[x] = \max_{1 \le i \le n} \lambda[x_i].$$

Доказательство. По определению

$$\lambda[x] = \varlimsup_{\mathrm{S} \ni t \to +\infty} \ln(\max_{1 \le i \le n} |x_i(t)|)^{1/t}.$$

Для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $t > 0$ из неравенства $\max_{1 \le l \le n} |x_l(t)| \ge |x_i(t)|$ вытекает неравенство $\ln(\max_{1 \le l \le n} |x_l(t)|)^{1/t} \ge \ln |x_i(t)|^{1/t}$, откуда, переходя к верхнему пределу при $t \to +\infty$ по множеству S, получаем неравенство $\lambda[x] \ge \lambda[x_i]$. Следовательно, $\lambda[x] \ge \max_{1 \le i \le n} \lambda[x_i]$.

Установим обратное неравенство. Пусть, напротив, для некоторого числа $r \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $\lambda[x] > r > \max_{1 \le i \le n} \lambda[x_i]$. Значит, для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует такое $T_i > 0$, что при всех $t \ge T_i$ выполнено неравенство $\ln |x_i(t)|^{1/t} < r$. Положим $T = \max_{1 \le i \le n} T_i$. Тогда при всех $t \ge T$ справедливо неравенство $\ln \|x(t)\|^{1/t} < r$. Переходя в последнем неравенстве к верхнему пределу при $t \to +\infty$ по множеству S, получим, что $\lambda[x] \le r$. Пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_n$, *а матричнозначная функция* $Q(\cdot,\cdot) \colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n \times n}$ *непрерывна и при каждом* $\mu \in M$ *удовлетворяет условию* $\lim_{t \to +\infty} \|Q(t, \mu)\| = 0$. *Тогда каждая из функций* $\lambda_i(\cdot\,; A + Q)$, $i = \overline{1, n}$, *ограничена и принадлежит классу* $({}^*, G_\delta)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $i \in \{1, \ldots, n\}$. При каждом $\mu \in M$ из равенства $\lim_{t \to +\infty} \|Q(t, \mu)\| = 0$ вытекает, что существует такое $T > 0$, что для всех $t \ge T$ выполнено неравенство $\|Q(t, \mu)\| \le 1$. В силу известной оценки для показателей Ляпунова [2, гл. III, § 3] справедливо включение $\lambda_i(A{+}Q) \in [-(a{+}1), a{+}1]$, где $a = \sup\{\|A(t)\| \colon t \in \mathbb{R}_+\}$. Следовательно, функция $\lambda_i(\cdot\,; A + Q)$ ограничена. Принадлежность этой функции классу $({}^*, G_\delta)$ по существу вытекает из [12, леммы 6–9] (см. также доказательство теоремы [13]).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы разобьем на шаги.

1. Установим сначала *необходимость* условий теоремы. Условия 1)–3) вытекают непосредственно из определений, а условие 4) — из леммы 3.

2. Докажем *достаточность*. Пусть $l \in \mathbb{R}^n$ и $F = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))$ удовлетворяют условиям 1)–4). В силу результата [14] (см. также [15, замечание 2]) для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует последовательность непрерывных функций $f^i_m \colon M \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, такая, что справедливо представление

$$f_i(\mu) = \varlimsup_{m \to \infty} f^i_m(\mu), \quad \mu \in M. \tag{4}$$

Положим $C = \sup\{\|F(\mu)\| \colon \mu \in M\} + 1$. Без ограничения общности можно считать, что для всех $i = \overline{1, n}$, $m \in \mathbb{N}$ и $\mu \in M$ выполнено неравенство $f^i_m(\mu) \le C - 1$ (в противном случае заменим функцию f^i_m функцией $\min\{f^i_m(\cdot), C - 1\}$).

Для каждого $m \in \mathbb{N}_0$ определим функцию $\sigma_m \colon M \to \mathbb{R}$ равенством

$$\sigma_m(\mu) = (6C + 4l_i - 6f^i_{\max\{q,1\}}(\mu))/5, \quad \mu \in M,$$

где $q \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ однозначно определяются из условия $m = qn + i$.

3. Зададим последовательность T^j_m, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = \overline{0, 6}$, неотрицательных целых чисел рекуррентно равенствами $T^0_0 = 0$ и

$$T^0_{m+1} = T^6_m, \quad T^j_m = T^{j-1}_m + \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = 2, 5, \\ 2^{m+1}, & \text{если} \quad j = 1, 3, 4, 6, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}_0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Легко видеть, что $T_m^0 = 4(2^{m+1}-2)+2m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Для упрощения записи через Δ_m^j, $j=\overline{1,6}$, обозначим полуинтервал $[T_m^{j-1}, T_m^j)$, через Δ_m — полуинтервал $[T_m^0, T_{m+1}^0)$, а через $\bar{\Delta}_m^j$ и $\bar{\Delta}_m$ — соответствующие отрезки.

Для всякой тройки чисел $\alpha = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ определим на отрезке $\bar{\Delta}_m$ матричнозначную функцию $A[\alpha; m]$ при помощи равенства

$$A[\alpha;m](t) = \begin{cases} \mathrm{diag}[0,-c] & \text{при } \ t \in \Delta_m^1 \bigsqcup \Delta_m^4, \\ O_2 & \text{при } \ t \in \Delta_m^2 \bigsqcup \Delta_m^5, \\ \mathrm{diag}[0,c] & \text{при } \ t \in \Delta_m^3, \\ \mathrm{diag}[a,b+c] & \text{при } \ t \in \bar{\Delta}_m^6, \end{cases}$$

а для всякого $\sigma > 0$ — матричнозначную функцию $Q[\sigma;m]$ при помощи равенства

$$Q[\sigma;m](t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^j e^{-\sigma T_m^2} & 0 \end{pmatrix} & \text{при } \ t \in \Delta_m^j, \quad j \in \{2,5\}, \\ O_2 & \text{при остальных } \ t \in \bar{\Delta}_m, \end{cases}$$

где O_2 — нулевая (2×2)-матрица. Положим $C[\alpha,\sigma;m] = A[\alpha;m] + Q[\sigma;m]$. Тогда для матрицы Коши $X_{C[\alpha,\sigma;m]}(\cdot,\cdot)$ системы

$$\dot{x} = C[\alpha,\sigma;m](t)x, \quad x = (x_1,x_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \bar{\Delta}_m,$$

непосредственными вычислениями получаем соотношения

$$\begin{gathered} X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^1, T_m^0) = X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^5, T_m^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-c2^{m+1}} \end{pmatrix}, \\ X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^2, T_m^0) = X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^4, T_m^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\sigma T_m^2} & e^{-c2^{m+1}} \end{pmatrix}, \\ X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^3, T_m^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{c2^{m+1}-\sigma T_m^2} & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{C[\alpha,\sigma;m]}(T_m^6, T_m^0) = \begin{pmatrix} e^{a2^{m+1}} & 0 \\ 0 & e^{b2^{m+1}} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{5}$$

4. Построим кусочно-постоянную матричнозначную функцию $\widetilde{A}(\cdot)$ и семейство кусочно-постоянных матричнозначных функций $\widetilde{Q}(\cdot,\mu)$, $\mu \in M$, со следующими свойствами:

1) все точки разрыва функций $\widetilde{A}(\cdot)$ и $\widetilde{Q}(\cdot,\mu)$, $\mu \in M$, содержатся в множестве $\{T_m^j : m \in \mathbb{N}_0,\ j=\overline{1,6}\}$;

2) функция $\widetilde{Q}(\cdot,\mu)$ экспоненциально стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно относительно $\mu \in M$;

3) спектр $\Lambda(\widetilde{A})$ показателей Ляпунова системы $\widetilde{A}$ совпадает с вектором l;

4) спектр $\Lambda(\cdot;\widetilde{A}+\widetilde{Q})$ показателей Ляпунова семейства $\widetilde{A}+\widetilde{Q}$ совпадает с вектор-функцией $F(\cdot)$.

4.1. Рассмотрим сначала случай $l_1 = 0$. Для каждого $m \in \mathbb{N}_0$ определим на полуинтервале Δ_m систему $\widetilde{A}(\cdot)$ равенствами

$$\dot{x}_j = l_j x_j, \quad \text{если} \quad j \notin \{\theta(m), \theta(m+1)\}, \tag{6}$$

$$\dot{y} = A[a_m, b_m, 6C; m](t)y, \tag{7}$$

а систему $\widetilde{Q}(\cdot,\mu)$ при всяком $\mu \in M$ — равенствами (6) и

$$\dot{y} = Q[\sigma_m(\mu); m](t)y. \tag{8}$$

В равенствах (6)–(8) обозначены $y = (x_{\theta(m)}, x_{\theta(m+1)})^{\mathrm{т}}$, $a_m = (4+2^{-m})l_{\theta(m)}$, $b_m = (4+2^{-m})l_{\theta(m+1)}$ и $\theta\colon \mathbb{N}_0 \to \{1,\ldots,n\}$ — функция, которая задается условием: $\theta(m) \equiv m \pmod{n}$.

Свойство 1) выполнено по построению. Для доказательства свойства 2) заметим, что при всех $m \in \mathbb{N}_0$ и $\mu \in M$ выполнено неравенство $\sigma_m(\mu) \geq 6/5$. Следовательно,

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \ln \sup_{\mu\in M} \|\widetilde{Q}(t,\mu)\|^{1/t} \leq \lim_{m\to+\infty} -6T_m^2/(5T_m^5) = -6/7. \tag{9}$$

4.2. Зафиксируем $\mu \in M$ и вычислим показатели Ляпунова системы $\widetilde{C}(\cdot,\mu) \equiv \widetilde{A}(\cdot)+\widetilde{Q}(\cdot,\mu)$. Рассмотрим произвольное ненулевое решение $x(\cdot)$ этой системы. Поскольку $\|\widetilde{C}(t,\mu)\| \leq 1$ при всех $t \in \bar{\Delta}_m^j$, $j \in \{2,5\}$, из равенства $x(t) = X_{\widetilde{C}(\cdot,\mu)}(t,T_m^j)x(T_m^j)$ в силу известной оценки для нормы матрицы Коши [16, (3.3)] получаем двойное неравенство

$$\ln\|x(T_m^j)\| - 1 \leq \ln\|x(t)\| \leq \ln\|x(T_m^j)\| + 1, \quad t \in \bar{\Delta}_m^j, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \{2,5\}.$$

Следовательно, характеристический показатель решения $x(\cdot)$ совпадает с характеристическим показателем $\lambda[x|_{\mathrm{T}}]$ его сужения на множество $\mathrm{T} = \bigcup\{\bar{\Delta}_m^j : m \in \mathbb{N}_0, j \neq 2,5\}$. Из леммы 2 следует, что упомянутый показатель равен наибольшему из характеристических показателей $\lambda[x_i|_{\mathrm{T}}]$, $i = \overline{1,n}$. Так как на отрезках $\bar{\Delta}_m^j$, $m \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{1,3,4,6\}$, составляющих множество T, система $\widetilde{C}(\cdot,\mu)$ является автономной и диагональной, то в силу леммы 1 каждая из функций χ_i^x, $i = \overline{1,n}$, монотонна, поэтому верхний предел в определении характеристического показателя $\lambda[x_i|_{\mathrm{T}}]$ можно вычислять по последовательности концов отрезков $\bar{\Delta}_m^j$, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = \overline{1,6}$:

$$\lambda[x_i|_{\mathrm{T}}] = \varlimsup_{q\to\infty} \ln|x_i(T_q)|^{1/t}, \text{ где } T_{6m+j} = T_m^j, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Учитывая сказанное и применяя лемму 2 к сужению функции $x(\cdot)$ на множество $\{T_q : q \in \mathbb{N}\}$, получаем цепочку равенств

$$\lambda[x] = \lambda[x|_{\mathrm{T}}] = \max_{1\leq i\leq n} \lambda[x_i|_{\mathrm{T}}] = \max_{1\leq i\leq n} \varlimsup_{q\to\infty} \ln|x_i(T_q)|^{1/t} = \varlimsup_{q\to\infty} \frac{1}{t}\ln\|x(T_q)\|.$$

4.3. Зафиксируем произвольное $i \in \{1,\ldots,n\}$. Через e^i обозначим i-й единичный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Вычислим характеристический показатель $\lambda[x^i]$ решения $x^i(\cdot)$ рассматриваемой системы, выходящего в момент времени $t = 0$ из вектора e^i.

Заметим, что из последнего равенства в (5) и задания систем (6)–(8) вытекает, что для i-й компоненты любого решения $x(\cdot)$ рассматриваемой системы при всех $m \in \mathbb{N}_0$ выполнено соотношение $x_i(T_{m+1}^0) = x_i(T_m^0)\exp(l_i(T_{m+1}^0 - T_m^0))$. Следовательно, справедливо равенство

$$x_i(T_m^0) = \exp(l_iT_m^0)x_i(T_0^0), \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{10}$$

из которого и определения систем (6)–(8) следует, что если ни одно из чисел $m-i$ и $m-i+1$ не делится на n, то функция $\chi_i(t) \equiv t^{-1}\ln\|x^i(t)\|$, $t > 0$, на отрезке $\bar{\Delta}_m$ тождественно равна l_i. Следовательно, при вычислении верхнего предела в определении величины $\lambda[x^i]$ можно ограничиться концами только тех отрезков $\bar{\Delta}_m^j$, $j = \overline{1,6}$, для которых одно из чисел $m-i$ или $m-i+1$ делится на n.

Положим $m_q^i = qn+i$, $q \in \mathbb{N}_0$, $i = \overline{1,n}$. Из (5)–(8) получаем соотношения

$$\|x^i(T_{m_q^i}^5)\| = \|x^i(T_{m_q^i}^4)\| = \|x^i(T_{m_q^i}^2)\| = \|x^i(T_{m_q^i}^1)\| = \|x^i(T_{m_q^i}^0)\|,$$

$$\|x^i(T_{m_q^i-1}^5)\| = \|x^i(T_{m_q^i-1}^4)\| = \|x^i(T_{m_q^i-1}^2)\| = \|x^i(T_{m_q^i-1}^1)\| \leq \|x^i(T_{m_q^i-1}^3)\| = \|x^i(T_{m_q^i-1}^0)\|,$$

откуда с учетом (10) вытекают цепочки неравенств

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i}^5) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i}^4) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i}^2) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i}^1) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i}^0) = l_i,$$

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i-1}^5) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i-1}^4) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i-1}^2) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T_{m_q^i-1}^1)$$

$$\leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^3_{m^i_q-1}) \leq \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^0_{m^i_q-1}) = \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^0_{m^i_q+1}) = l_i.$$

Далее, по построению

$$\varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^3_{m^i_q}) = \varlimsup_{q\to\infty} (6C\cdot 2^{m^i_q+1} - \sigma_{m^i_q}(\mu)T^2_{m^i_q} + l_i T^0_{m^i_q})/T^3_{m^i_q} = \varlimsup_{q\to\infty} f^i_q(\mu) = f_i(\mu).$$

Окончательно получаем

$$\lambda[x^i] = \max_{0\leq j\leq 6} \max\Big\{ \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^j_{m^i_q}), \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^j_{m^i_q-1})\Big\} = \varlimsup_{q\to\infty} \chi_i(T^3_{m^i_q}) = f_i(\mu).$$

4.4. Покажем, что базис $(x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot))$ решений системы $\widetilde{C}(\cdot,\mu)$ является нормальным [17, 2.2]. Для этого докажем, что никакое подмножество набора решений $\{x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)\}$ не допускает понижающей комбинации [17, 2.3.4], т. е. что для каждого $i\in\{2,\ldots,n\}$ и произвольного набора чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_i$, где $\alpha_i\neq 0$, выполняется равенство

$$\lambda\Big[\sum_{k=1}^{i} \alpha_k x^k\Big] = \lambda[x^i]. \tag{11}$$

Пусть S — какое-либо неограниченное подмножество временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$. Тогда функционал

$$\lambda[x|_{\mathrm{S}}] = \varlimsup_{\mathrm{S}\ni t\to+\infty} \ln\|x(t)\|^{1/t},$$

определенный на линейном пространстве решений какой-либо системы (1), является показателем на этом пространстве в смысле [17, 2.1], а именно, обладает свойствами

$$\begin{gathered} \lambda[(cx)|_{\mathrm{S}}] = \lambda[x|_{\mathrm{S}}] \text{ при } c\neq 0,\\ \lambda[(x+y)|_{\mathrm{S}}] \leq \max\{\lambda[x|_{\mathrm{S}}],\lambda[y|_{\mathrm{S}}]\}. \end{gathered} \tag{12}$$

Положим $\mathrm{S}_i = \{T^3_{m^i_q} : q\in\mathbb{N}_0\}$. В силу п. 4.3 справедливы равенства

$$\lambda[x^i] = \lambda[x^i|_{\mathrm{S}_i}] = f_i(\mu), \quad \lambda[x^k|_{\mathrm{S}_i}] = l_k, \quad k=\overline{1,i-1}.$$

Рассмотрим сначала случай $f_i(\mu) = l_i$. Для любого решения $x(\cdot)$, удовлетворяющего условию $x_i(0)\neq 0$, из равенства (10) вытекает цепочка $\lambda[x]\geq\lambda[x_i]\geq l_i$. Следовательно, левая часть (11) не менее правой. Обратное неравенство вытекает из цепочки $f_1(\mu)\leq\ldots\leq f_i(\mu)$ и соотношений (12) при $\mathrm{S}=\mathbb{R}_+$.

Пусть теперь $f_i(\mu) > l_i$. Предположим, что равенство (11) не выполняется. Тогда из соотношений (12) при $\mathrm{S}=\mathbb{R}_+$ получаем цепочку

$$\lambda\Big[\Big(\sum_{k=1}^{i}\alpha_k x^k\Big)\Big|_{\mathrm{S}_i}\Big] \leq \lambda\Big[\sum_{k=1}^{i}\alpha_k x^k\Big] < \lambda[x^i] = \lambda[x^i|_{\mathrm{S}_i}].$$

Применяя (12) при $\mathrm{S}=\mathrm{S}_i$, приходим к противоречию:

$$\lambda[x^i|_{\mathrm{S}_i}] = \lambda\Big[\Big(\sum_{k=1}^{i}\alpha_k x^k - \sum_{k=1}^{i-1}\alpha_k x^k\Big)\Big|_{\mathrm{S}_i}\Big]$$

$$\leq \max\Big\{\lambda\Big[\Big(\sum_{k=1}^{i}\alpha_k x^k\Big)\Big|_{\mathrm{S}_i}\Big], \lambda[x^1|_{\mathrm{S}_i}],\ldots,\lambda[x^{i-1}|_{\mathrm{S}_i}]\Big\} < \lambda[x^i|_{\mathrm{S}_i}].$$

В силу [17, 2.3.10] базис $(x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot))$ является нормальным, а показатели его решений суть показатели системы $\widetilde{C}(\cdot,\mu)$. Таким образом, $\Lambda(\mu;\widetilde{C}) = F(\mu)$.

4.5. Теперь вычислим показатели Ляпунова невозмущенной системы $\widetilde{A}$. По построению эта система диагональна, обозначим ее диагональные коэффициенты $p_1, \ldots, p_n$. В силу [17, 4.1] показатели Ляпунова системы $\widetilde{A}$ с точностью до перестановки совпадают с верхними интегральными средними значениями ее диагональных коэффициентов, т. е. с величинами

$$\overline{p}_i \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \chi_i(t), \text{ где } \chi_i(t) = t^{-1}\int\limits_0^t p_i(\tau)\,d\tau, \quad t>0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, n\}$. Поскольку на каждом полуинтервале Δ_m^j, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = \overline{1,6}$, функция p_i постоянна, функция χ_i на каждом отрезке $\bar{\Delta}_m^j$ является дробно-линейной и, значит, монотонной (вообще говоря, нестрого). Следовательно, верхний предел в (13) можно вычислять по последовательности точек разрыва функции p_i, т. е. по концам тех отрезков $\bar{\Delta}_m^j$, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = \overline{1,6}$, для которых хотя бы одно из чисел $m-i$ или $m-i+1$ делится на n. С помощью непосредственных вычислений нетрудно убедиться в справедливости равенства (10), а также соотношений

$$\chi_i(T^j_{m^i_q}) \le \chi_i(T^0_{m^i_q}) = l_i, \quad \chi_i(T^j_{m^i_q-1}) \le \chi_i(T^0_{m^i_q-1}) = \chi_i(T^0_{m^i_q+1}) = l_i, \quad q\in\mathbb{N}_0, \quad j=\overline{1,5},$$

из которых получаем, что $\overline{p}_i = l_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда из условия 1) следует, что спектр показателей Ляпунова системы $\widetilde{A}$ совпадает с вектором l.

5. Построим теперь непрерывную матричнозначную функцию $A(\cdot)$ и семейство непрерывных матричнозначных функций $Q(\cdot,\mu)$, $\mu \in M$, такие, что спектры показателей Ляпунова систем $\widetilde{A}$ и A, а также спектры показателей Ляпунова семейств $\widetilde{A}+\widetilde{Q}$ и $A+Q$ совпадают между собой и выполнены неравенства

$$\|A(t)\| \le \|\widetilde{A}(t)\|, \quad \|Q(t,\mu)\| \le \|\widetilde{Q}(t,\mu)\|, \quad t\in\mathbb{R}_+, \quad \mu\in M. \tag{14}$$

Положим $\delta_k = 2^{-(k+1)}\exp(-(T_{k+1})^2)$, $k \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем произвольную непрерывную (например, кусочно-линейную) функцию $s_k\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, имеющую носитель, содержащийся в интервале (T_k, T_{k+1}), и тождественно равную единице на отрезке $[T_k+\delta_k, T_{k+1}-\delta_{k+1}]$. Определим функцию $s : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ равенством

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{15}$$

Заметим, что носители слагаемых ряда (15) попарно не пересекаются, поэтому ряд (15) всюду сходится, а функция s непрерывна, обращается в нуль в некоторой окрестности каждой из точек T_k, $k \in \mathbb{N}$, и тождественно равна единице на множестве $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[T_k+\delta_k, T_{k+1}-\delta_{k+1}]$.

Положим $A(t) = s(t)\widetilde{A}(t)$, $Q(t,\mu) = s(t)\widetilde{Q}(t,\mu)$, $C(t,\mu) = s(t)\widetilde{C}(t,\mu)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$. Так как матричнозначная функция $\widetilde{A}(\cdot)$ постоянна на каждом из интервалов (T_k, T_{k+1}), $k \in \mathbb{N}_0$, то матричнозначная функция $A(\cdot)$ непрерывна. Проверим, что $Q \in \mathcal{E}^n[A](M)$. Свойство 3) вытекает из оценок (9) и (14). Покажем, что матричнозначная функция $Q(\cdot,\cdot)$ непрерывна. Пусть заданы $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\mu_0 \in M$. Если t_0 совпадает с одной из точек T_k, $k \in \mathbb{N}$, или лежит внутри одного из промежутков Δ_m^j, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = 1,3,4,6$, то по построению найдется такая окрестность U точки t_0, что $Q(t,\mu)$ — нулевая матрица при всех $t \in U$ и $\mu \in M$. Если t_0 лежит внутри одного из промежутков Δ_m^j, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = 2,5$, то $Q(\cdot,\cdot)$ непрерывна в точке (t_0,μ_0) как произведение постоянной по t в некоторой окрестности точки t_0 и непрерывной по μ матричнозначной функции $\widetilde{Q}(\cdot,\cdot)$ и непрерывной функции $s(\cdot)$.

Заметим, что по построению $\|\widetilde{C}(t,\mu)\| \le 12C$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$. Пусть для некоторого $l \in \mathbb{N}$ выполнено включение $t \in [T_l, T_{l+1})$. Тогда справедлива цепочка неравенств

$$\int\limits_{T_1}^{t} \|s(\tau)\widetilde{C}(\tau,\mu) - \widetilde{C}(\tau,\mu)\| e^{\tau^2}\,d\tau \le 12C\sum_{k=1}^{l+1} 2\delta_k \exp((T_{k+1})^2) \le 12C,$$

из которой получаем, что при всех $\mu \in M$ интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \|C(\tau,\mu) - \widetilde{C}(\tau,\mu)\| e^{\tau^2}\, d\tau$ сходится. Следовательно [17, теорема 29.1.1], спектры показателей Ляпунова систем $C(\cdot,\mu)$ и $\widetilde{C}(\cdot,\mu)$ совпадают между собой. Путем аналогичных рассуждений устанавливается совпадение спектров систем A и $\widetilde{A}$.

6. Пусть теперь заданы произвольные набор $l \in \mathbb{R}^n$ и вектор-функция $F : M \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям 1)–4) теоремы. По доказанному существуют система $A_0 \in \mathcal{M}_n$ и семейство $Q \in \mathcal{E}_n[A_0](M)$, удовлетворяющие равенствам $\Lambda(A_0) = (0, l_2 - l_1, \ldots, l_n - l_1)$ и $\Lambda(\cdot; A_0 + Q) = (f_1 - l_1, \ldots, f_n - l_1)$. Воспользуемся следующим хорошо известным утверждением: показатели Ляпунова $\lambda_i(B)$ и $\lambda_i(B + aE_n)$, $i = \overline{1,n}$, систем

$$\dot{x} = B(t)x \quad\text{и}\quad \dot{y} = (B(t) + aE_n)y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

соответственно, где $a \in \mathbb{R}$ фиксировано, а E_n — единичная $(n \times n)$-матрица, связаны равенством $\lambda_i(B + aE_n) = \lambda_i(B) + a$, которое вытекает из того, что для решений $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ этих систем с одним и тем же начальным вектором $(x(0) = y(0))$ имеет место тождество $y(t) \equiv x(t)\exp(at)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Положим $A(t) = A_0(t) + l_1 E_n$, $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда по выбору системы A_0 и вследствие сказанного выше получаем, что $\Lambda(A) = l$. По той же причине спектр $\Lambda(\cdot\,; A + Q)$ показателей Ляпунова семейства $A + Q$ с так определенной матрицей $A(\cdot)$ совпадает с вектор-функцией $F(\cdot)$. Условие $Q \in \mathcal{E}_n[A](M)$ также, очевидно, выполняется.

Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. В рассматриваемом случае непрерывные функции f_m^i, $m \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,n}$, в представлении (4) можно без ограничения общности считать многочленами. Действительно, по теореме Вейерштрасса для любых $m \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1,n}$ найдется многочлен p_m^i такой, что $f_m^i(\mu) - 1/m < p_m^i(\mu) < f_m^i(\mu) + 1/m$ при всех $\mu \in M$. Следовательно, справедливо равенство

$$f_i(\mu) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, p_m^i(\mu), \quad \mu \in M, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ функция σ_m из п. 2 доказательства теоремы является многочленом, а коэффициенты матричнозначной функции $\widetilde{Q}(t,\cdot)$, а значит, и функции $Q(t,\cdot)$ при всяком $t \in \mathbb{R}_+$ являются аналитическими функциями параметра.

Следствие доказано.

Доказательство следствия 2. Установим *необходимость* указанных условий. Условие а) вытекает из определения класса $\mathcal{E}_n[A](M)$, поскольку для любых $B \in \mathcal{M}_n$ и $k = \overline{0, n-1}$ неравенства $\mathrm{es}(B) \le k$ и $\lambda_{k+1}(B) \ge 0$ равносильны. Условие б) равносильно требованию, что для каждого $k = \overline{0, n-1}$ множество $\{\mu \in M \,|\, \mathrm{es}(\cdot\,; A + Q) \le k\}$ является G_δ-множеством. Последнее вытекает из равенства

$$\{\mu \in M \,|\, \mathrm{es}(\cdot\,; A + Q) \le k\} = \{\mu \in M \,|\, \lambda_{k+1}(\cdot\,; A + Q) \ge 0\}$$

и утверждения теоремы.

Докажем *достаточность*. Пусть заданы $d \in \mathcal{Z}_n$ и функция $f\colon M \to \mathcal{Z}_n$, удовлетворяющие условиям а) и б). Тогда для любого $r \in \mathbb{R}$ множество $\{\mu \,|\, f(\mu) \le r\}$ является G_δ-множеством. Следовательно, тем же свойством обладает при всех $k = \overline{1,n}$ и множество $U_k = \{\mu \in M \,|\, f(\mu) < k\}$, так как при всех $\mu \in M$ неравенство $f(\mu) < k$ равносильно неравенству $f(\mu) \le k - 1$. Для каждого $k = \overline{1,n}$ определим функцию $f_k\colon M \to \{-1, 0\}$ равенствами: $f_k(\mu) = 0$, если $\mu \in U_k$, и $f_k(\mu) = -1$ в противном случае. Несложно видеть, что f_k — функция класса $({}^*, G_\delta)$. В самом деле, множество $\{\mu \in M \,|\, f_k(\mu) \ge r]$ пусто, если $r > 0$, совпадает с множеством U_k, если $r \in (-1, 0]$, и совпадает со всем пространством M, если $r \le -1$.

Далее, из цепочки включений $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n$ следует цепочка неравенств $f_1 \leq \ldots \leq f_n$. Кроме того, по построению для любого $k = \overline{1,n}$ неравенство $f_k(\mu) = -1$ равносильно неравенству $f(\mu) \geq k$, откуда получаем $d \geq k$. Следовательно, в силу теоремы существуют система $A \in \mathcal{M}_n$ и семейство $Q \in \mathcal{E}^n[A](M)$ такие, что первые d показателей Ляпунова системы A равны -1, остальные равны нулю и спектр показателей Ляпунова $(\lambda_1(\cdot\,; A+Q), \ldots, \lambda_n(\cdot\,; A+Q))$ семейства $A+Q$ совпадает с вектор-функцией $(f_1, \ldots, f_n)$. Следующие цепочки эквивалентностей

$$f(\mu) = n \Leftrightarrow \mu \notin U_n \Leftrightarrow \lambda_n(\mu; A+Q) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{es}(\mu; A+Q) = n, \quad \mu \in M,$$

$$f(\mu) = k \Leftrightarrow \mu \in U_{k+1} \backslash U_k \Leftrightarrow \lambda_k(\mu; A+Q) < 0 \leq \lambda_{k+1}(\mu; A+Q) \Leftrightarrow \mathrm{es}(\mu; A+Q) = k, \quad k = \overline{1, n-1},$$

показывают, что функции $f(\cdot)$ и $\mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)$ совпадают, как только одна из них принимает значение из множества $\{1, \ldots, n\}$. Но тогда и значение “нуль” они принимают одновременно. Таким образом, $f(\mu) = \mathrm{es}(\mu; A+Q)$ при всех $\mu \in M$.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ляпунов А.М.** Собрание сочинений: в 6 т. Т. 2. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 476 с.
2. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
3. **Perron O.** Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. 1930. Vol 31, iss. 4. P. 748–766.
4. **Perron O.** Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Vol 32, iss. 5. P. 703–728.
5. **Леонов Г.А.** Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006. 168 с.
6. **Коровин С.К., Изобов Н.А.** Реализация эффекта Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1536–1550.
7. **Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В.** Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 12. С. 1579–1588. doi: 10.1134/S0374064118120014 .
8. **Миллионщиков В.М.** Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408–1416.
9. **Бэр Р.** Теория разрывных функций М.; Л.: ГТТИ, 1932. 134 с.
10. **Хаусдорф Ф.** Теория множеств. М.; Л.: ОНТИ, 193. 306 с.
11. **Барабанов Е.А., Быков В.В.** Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, убывающих к нулю на бесконечности // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Междунар. конф., посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2019. С. 48–53.
12. **Миллионщиков В.М.** Показатели Ляпунова как функции параметра // Мат. сб. 1988. Т. 137, № 3. С. 364–380.
13. **Быков В.В.** Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1579–1592. doi: 10.1134/S0374064117120019 .
14. **Stepanoff W.** Sur les suites des fonctions continues // Fund. Math. 1928. Vol. 11. pp. 264–274.
15. **Карпук М.В.** Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1332–1338. doi: 10.1134/S0374064114100057 .

16. **Изобов Н.А.** Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск.: Изд-во Белорус. гос. ун-т, 2006. 319 с.
17. **Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

Поступила 30.09.2019
После доработки 8.11.2019
Принята к публикации 11.11.2019

Барабанов Евгений Александрович
канд. физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
г. Минск
e-mail: bar@im.bas-net.by

Быков Владимир Владиславович
канд. физ.-мат. наук, доцент
МГУ имени М.В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: vvbykov@gmail.com

REFERENCES

1. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. *Int. J. Control*, 1992, vol. 55, no. 3, pp. 531–773.
2. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* [Lectures on mathematical stability theory]. Moscow: Nauka Publ., 1967, 472 p.
3. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme. *Math Z.*, 1930, vol. 31, no. 1, pp. 748–766. doi: 10.1007/BF01246445 .
4. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. *Math Z.*, vol. 32, no. 1, pp. 703–728. doi: 10.1007/BF01194662 .
5. Leonov G.A. *Khaoticheskaya dinamika i klassicheskaya teoriya ustoichivosti dvizheniya* [Chaotic dynamics and classical theory of motion stability]. Izhevsk: “Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika” Publ., 2006, 168 p. ISBN: 5-93972-470-1 .
6. Korovin S.K., Izobov N.A. Realization of the Perron effect whereby the characteristic exponents of solutions of differential systems change their values. *Diff. Equat.*, vol. 46, no. 11, pp. 1537–1551. doi: 10.1134/S0012266110110029 .
7. Barabanov E.A., Bykov V.V., Karpuk M.V. Complete description of the Lyapunov spectra of families of linear differential systems whose dependence on the parameter is continuous uniformly on the time semiaxis. *Diff. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 12, pp. 1535–1544. doi: 10.1134/S0012266118120017 .
8. Millionshchikov V.M. Baire classes of functions and Lyapunov exponents. I. *Diff. Uravneniya*, 1980, vol. 16, no. 8, pp. 1408–1416 (in Russian).
9. Baire R. *Teoriya razryvnykh funktsii* [Theory of discontinuous functions]. Moscow; Leningrad: GTTI Publ., 1932, 134 p. ISBN: 978-5-4460-6297-3 . Original French text published in Baire R. *Leçons sur les Fonctions Discontinues*, Paris: Gauthier-Villars, 1905, 127 p.
10. Hausdorff F. *Set theory.* N Y: Chelsea Publ. Company, 1962, 352 p. Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv.* Moscow; Leningrad: ONTI Publ., 1937, 306 p.
11. Barabanov E.A., Bykov V.V. Description of a linear Perron effect under parametric perturbations vanishing at infinity. In: T. F. Filippova, V. I. Maksimov, A. M. Tarasyev (eds.), Stability, Control, Differential Games (SCDG2019): Proc. Internat. Conf. devoted to the 95th anniversary of Academician N.N. Krasovskii (Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019). Yekaterinburg, 2019, pp. 48–53 (in Russian).
12. Millionshchikov V.M. Lyapunov exponents as functions of a parameter. *Math. USSR-Sb.*, 1990, vol. 65, no. 2, pp. 369–384. doi: 10.1070/SM1990v065n02ABEH001147 .
13. Bykov V.V. Functions determined by the Lyapunov exponents of families of linear differential systems continuously depending on the parameter uniformly on the Half-Line. *Diff. Eq.*, 2017, vol. 53, no. 12, pp. 1529–1542. doi: 10.1134/S0012266117120011 .

14. Stepanoff W. Sur les suites des fonctions continues. *Fund. Math.*, 1928, vol. 11, no. 1, pp. 264–274.
15. Karpuk M.V. Lyapunov exponents of families of morphisms of metrized vector bundles as functions on the base of the bundle. *Diff. Eq.*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1322–1328. doi: 10.1134/S001226611410005X .
16. Izobov N.A. *Lyapunov exponents and stability.* Cambridge: Cambridge Scientific Publ., 2012, 353 p. ISBN: 978-1-908106-25-4 . Original Russian text published in Izobov N.A. *Vvedenie v teoriyu pokazatelei Lyapunova.* Minsk: Belorusskij Gosudarstvennyj Universitet Publ., 2006, 319 p.
17. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* [Theory of Lyapunov exponents and its application to stability problems]. Moscow: Nauka Publ., 1966, 576 p.

Received September 30, 2019
Revised November 8, 2019
Accepted November 11, 2019

Evgenii Aleksandrovich Barabanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics of National Academy of Sciences, Minsk, 119991 Belarus, e-mail: bar@im.bas-net.by .

Vladimir Vladislavovich Bykov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: vvbykov@gmail.com .

Cite this article as: E. A. Barabanov, V. V. Bykov. Description of the linear Perron effect under parametric perturbations exponentially vanishing at infinity, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 31–43 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.17

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ: ДВОЙСТВЕННЫЕ 2-СХЕМЫ

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с сильно регулярным графом Γ_3. Нахождение параметров графа Γ_3 по массиву пересечений графа Γ является прямой задачей. Нахождение массива пересечений графа Γ по параметрам графа Γ_3 является обратной задачей. Прямая и обратная задачи были решены А. А. Махневым и М. С. Нировой: если граф Γ с массивом пересечений $\{k, b_1, b_2; 1, c_2, c_3\}$ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$, то дополнительный граф к Γ_3 является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Обратно, если Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(k, t)$, то Γ имеет массив пересечений $\{k, c_2t, k-\alpha+1; 1, c_2, \alpha\}$, где $k-\alpha+1 \le c_2t < k$, $1 \le c_2 \le \alpha$. Ранее изучались дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) является псевдогеометрическим графом для сети или обобщенного четырехугольника. В данной работе изучаются массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) является псевдогеометрическим графом для двойственной 2-схемы $pG_{t+1}(l, t)$. Найдены новые серии допустимых массивов пересечений: $\{m(m^2-1), m^2(m-1), m^2; 1, 1, (m^2-1)(m-1)\}$, $\{m(m+1), (m+2)(m-1), m+2; 1, 1, m^2-1\}$, $\{2m(m-1), (2m-1)(m-1), 2m-1; 1, 1, 2(m-1)^2\}$, где $m \equiv \pm 1 \pmod 3$. Известные серии 2-схем Штейнера — это унитали, схемы, отвечающие проективным плоскостям четного порядка, содержащим гиперовал, схемы точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$ и схемы точек и прямых аффинного пространства $AG(n, q)$. Найдены допустимые массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) является псевдогеометрическим графом для одной из известных 2-схем Штейнера.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, дуальная 2-схема.

I. N. Belousov, A. A. Makhnev. Inverse problems in the theory of distance-regular graphs: Dual 2-designs.

Let Γ be a distance-regular graph of diameter 3 with a strongly regular graph Γ_3. Finding the parameters of Γ_3 from the intersection array of Γ is a direct problem, and finding the intersection array of Γ from the parameters of Γ_3 is its inverse. The direct and inverse problems were solved by A. A. Makhnev and M. S. Nirova: if a graph Γ with intersection array $\{k, b_1, b_2; 1, c_2, c_3\}$ has eigenvalue $\theta_2 = -1$, then the graph complementary to Γ_3 is pseudo-geometric for $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Conversely, if Γ_3 is a pseudo-geometric graph for $pG_\alpha(k, t)$, then Γ has intersection array $\{k, c_2t, k-\alpha+1; 1, c_2, \alpha\}$, where $k-\alpha+1 \le c_2t < k$ and $1 \le c_2 \le \alpha$. Distance-regular graphs Γ of diameter 3 for which the graph Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) is pseudogeometric for a net or a generalized quadrangle were studied earlier. In this paper we study intersection arrays of distance-regular graphs Γ of diameter 3 for which the graph Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) is pseudogeometric for a dual 2-design $pG_{t+1}(l, t)$. New infinite families of feasible intersection arrays are found: $\{m(m^2-1), m^2(m-1), m^2; 1, 1, (m^2-1)(m-1)\}$, $\{m(m+1), (m+2)(m-1), m+2; 1, 1, m^2-1\}$, and $\{2m(m-1), (2m-1)(m-1), 2m-1; 1, 1, 2(m-1)^2\}$, where $m \equiv \pm 1 \pmod 3$. The known families of Steiner 2-designs are unitals, designs corresponding to odd-order projective planes containing a hyperoval, designs of points and lines of projective spaces $PG(n, q)$, and designs of points and lines of affine spaces $AG(n, q)$. We find feasible intersection arrays of a distance-regular graph Γ of diameter 3 for which the graph Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) is pseudogeometric for one of the known Steiner 2-designs.

Keywords: distance-regular graph, dual 2-design.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-44-51

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным* с массивом пересечений $\{b_0,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u,w, находящихся на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u).

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). Если $\alpha = t+1$, то геометрия называется двойственной 2-схемой.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=(s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры для некоторых натуральных чисел α,s,t, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$.

Для дистанционно регулярного графа диаметра 3 второе собственное значение θ_1 не меньше $\min\{a_3,(a_1+\sqrt{4k+a_1^2})/2\}$, причем в случае $\theta_1=a_3$ по [2, теорема 7] имеем $\theta_1=(a_1+\sqrt{4k+a_1^2})/2$. *Графом Шилла* называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3. Для графа Шилла Γ число $a=a_3$ делит k. Массив пересечений графа Шилла имеет вид $\{ab,(a+1)(b-1),b_2;1,c_2,a(b-1)\}$, где $b=b(\Gamma)=k/a$, и собственные значения θ_2,θ_3 являются корнями уравнения $x^2-(a_2+a-b-ab)x+(b-1)b_2-a_2=0$. Обратно, граф с указанным массивом пересечений является графом Шилла.

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. Обратной задачей является восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры.

Например, в $AT4(p,q,r)$-графе окрестность каждой вершины является сильно регулярным графом с $k=q^2p+qp+p^2$ и неглавными собственными значениями $p,-q$ (см. [3]). Обратно, данному сильно регулярному графу Δ с параметрами $(q^2p+qp+p^2,(q+1)p,2p-q,p)$ и собственными значениями $p,-q$ отвечает натуральное число r такое, что $pq(p+q)/r$ четно, $r(p+1)<q(p+q)$, r делит $p+q$, и $AT4(p,q,r)$-граф имеет массив пересечений

$$\big\{q(pq+p+q),(q^2-1)(p+1),(r-1)q(p+q)/r,1;1,q(p+q)/r,(q^2-1)(p+1),q(pq+p+q)\big\}.$$

Банг и Кулен изучали дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 сильно регулярен [4, лемма 3.1]. Более точный результат получен в [5, лемма 3]. Из [5, лемма 3] и [1, предложение 4.2.18] следует

Предложение. *Пусть для примитивного дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_3 сильно регулярен. Тогда граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k,b_1/c_2)$. Обратно для графа $\bar\Gamma_3$, являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(k,t)$, граф Γ имеет массив пересечений $\{k,tc_2,k-\alpha+1;1,c_2,\alpha\}$, где $k-\alpha+1\le tc_2<k$ и $c_2\le\alpha$.*

А. А. Махневым, М. П. Голубятниковым и Го Вэнь-бинем изучались дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 является псевдогеометрическим графом для сети. А. А. Махневым и М. С. Нировой изучались дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника.

В данной работе изучаются массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) является псевдогеометрическим для двойственной 2-схемы Штейнера $pG_{t+1}(l,t)$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *и граф* Γ_3 *является псевдогеометрическим для* $pG_{t+1}(l,t)$. *Тогда* $l=(t+1)m$, *где* $m\in\mathbb{N}$, *и выполняются следующие утверждения*:

(1) Γ *является графом Шилла с массивом пересечений* $\{mt,(t+1)(m-1),t+1;1,1,(m-1)t\}$, $m\le t$;

(2) *возникают следующие серии допустимых массивов пересечений*:

(i) $\{m(m^2-1),m^2(m-1),m^2;1,1,(m^2-1)(m-1)\}$ *в случае* $t+1=m^2$, $m\in\{2,3\}$;

(ii) $\{m(m+1),(m+2)(m-1),m+2;1,1,m^2-1\}$ *в случае* $t=m+1$;

(iii) $\{2m(m-1),(2m-1)(m-1),2m-1;1,1,2(m-1)^2\}$ *в случае* $t+2=2m$, $m\in\{2,3,7\}$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть S является двойственной 2-$(v,k,1)$ схемой с $r=(v-1)/(k-1)$ прямыми, проходящими через точку, и с $b=vr/k$ прямыми. Тогда S является частичной геометрией $pG_k(r-1,k-1)$ с b точками и v прямыми.

Известные бесконечные серии 2-схем Штейнера — это унитали, схемы, отвечающие проективным плоскостям четного порядка, содержащим гиперовал, схемы точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$ и схемы точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$ (см., например, [6; 7; 8, разд. 4.3]).

Теорема 2. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3, *для которого граф* Γ_3 *отвечает известной* 2*-схеме Штейнера. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *унитали порядка* $q>1$ (*т.е.* 2-$(q^3+1,q+1,1)$ *схеме*) *отвечают частичная геометрия* $pG_{q+1}(q^2-1,q)$ *и граф Шилла с массивом пересечений* $\{(q-1)q,(q+1)(q-2),q+1;1,1,(q-2)q\}$;

(2) *проективной плоскости четного порядка* $2q$, *содержащей гиперовал* C, *отвечают частичная геометрия* $pG_q(2q,q-1)$ *и граф с массивом пересечений* $\{2q-2,q,q;1,1,q-1\}$, *где* $q\le 4$;

(3) *схеме точек и прямых проективного пространства* $PG(n,q)$ *отвечают частичная геометрия* $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q,q)$ *и при* $n=3$ *граф с массивом пересечений* $\{q^2,q^2-1,q+1;1,1,q(q-1)\}$, *где* $q\in\{2,7\}$;

(4) *схеме точек и прямых аффинного пространства* $AG(n,q)$ *отвечает частичная геометрия* $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q,q-1)$.

Массив пересечений $\{(q-1)q,(q+1)(q-2),q+1;1,1,(q-2)q\}$ в случае (1) теоремы 2 совпадает с массивом $\{m(m+1),(m+2)(m-1),m+2;1,1,m^2-1\}$ из п. (ii) случая (2) теоремы 1 при $q=m+1$. В случае (2) имеем нечетный граф на 7 точках с массивом пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$ или обобщенный шестиугольник порядка (2,2) с массивом пересечений $\{6,4,4;1,1,3\}$. В случае (3) снова имеем граф с массивом пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$ или граф с массивом пересечений $\{49,48,8;1,1,42\}$.

В данной работе решена еще одна обратная задача: по параметрам графа $\bar\Gamma_3$, являющимся псевдогеометрическим для $pG_{t+1}(l,t)$, найден массив пересечений дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3.

Теорема 3. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3, *для которого граф* $\bar\Gamma_3$ *является псевдогеометрическим для* $pG_{t+1}(k,t)$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) Γ *является графом с массивом пересечений* $\{k,tc_2,k-t;1,c_2,t+1\}$, $k-t\le tc_2<k$, $1\le c_2\le t+1$, $t+1$ *делит* $k(k+1)$;

(2) *для известных* 2*-схем Штейнера получим либо*

(i) *унитали порядка* $q>1$ (*т. е.* 2-$(q^3+1,q+1,1)$ *схеме*) *отвечает частичная геометрия* $pG_{q+1}(q^2-1,q)$, *либо*

(ii) *гиперовалу проективной плоскости четного порядка* $2q$ *отвечает частичная геометрия* $pG_q(2q,q-1)$ *и граф с массивом пересечений* $\{2q,2q-2,q+1;1,2,q\}$, $q=18$, *либо*

(iii) *схеме точек и прямых проективного пространства* $PG(n, q)$ *отвечает частичная геометрия* $pG_{q+1}(q^{n-1} + \ldots + q, q)$, *либо*

(iv) *схеме точек и прямых аффинного пространства* $AG(n, q)$ *отвечает частичная геометрия* $pG_q(q^{n-1} + \ldots + q, q - 1)$ *и при* $n = 2$ *антиподальный граф с массивом пересечений* $\{q, q - 1, 1; 1, 1, q\}$, $q \in \{2, 6, 56\}$.

1. Доказательство теорем 1 и 2

Докажем теорему 1. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $pG_{t+1}(l, t)$. Граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим только в случае, когда $t+1$ делит lt. Поэтому $l = (t+1)m$, где $m \in \mathbb{N}$, и граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{(m-1)t}(mt, (t + 1)(m - 1))$.

Теперь по предложению граф Γ имеет массив пересечений $\{mt, c_2(t+1)(m-1), t+1; 1, c_2, (m-1)t\}$. Так как $a_1 = mt - 1 - c_2(t + 1)(m - 1) \geq 0$, то $c_2 = 1$, $m \leq t$, и Γ является графом Шилла. Возникают следующие серии допустимых массивов пересечений (Белоусов И.Н. Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = sc_2$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 16–26):

(i) $\{m(m^2 - 1), m^2(m - 1), m^2; 1, 1, (m^2 - 1)(m - 1)\}$ в случае $t + 1 = m^2$;

(ii) $\{m(m + 1), (m + 2)(m - 1), m + 2; 1, 1, m^2 - 1\}$ в случае $t = m + 1$;

(iii) $\{2m(m - 1), (2m - 1)(m - 1), 2m - 1; 1, 1, 2(m - 1)^2\}$ в случае $t + 2 = 2m$.

Но в случае массива $\{m(m^2-1), m^2(m-1), m^2; 1, 1, (m^2-1)(m-1)\}$ по [1, предложение 4.3.3] выполняется неравенство $kv/((\lambda + 1)(\lambda + 2)) \geq 1 + ((\lambda + 2)/(\lambda + 1))b_1 + ((\lambda + 2)/(\lambda + 1))b_1^2)$, поэтому $m \leq 3$.

В случае массива $\{2m(m-1), (2m-1)(m-1), 2m-1; 1, 1, 2(m-1)^2\}$ кратность некоторого собственного значения равна $(2m^2 - m + 1)(2m^2 - 2m + 1)m/(3m - 1)$, поэтому $m \in \{2, 3, 7\}$.

Теорема 1 доказана. □

Докажем теорему 2.

Лемма 1.1. *Унитали порядка* $q > 1$ *отвечает граф с массивом пересечений* $\{(q-1)q, (q+1)(q - 2), q + 1; 1, 1, (q - 2)q\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Униталь порядка $q > 1$ — это 2-$(q^3 + 1, q + 1, 1)$ схема. По замечанию 1 она является геометрией $pG_{q+1}(q^2 - 1, q)$, и по предложению граф Γ имеет массив пересечений $\{(q-1)q, (q+1)(q-2), q+1; 1, 1, (q-2)q\}$. Заметим, что Γ является графом Шилла с $a = q, b = q - 1, c_2 = 1, b_2 = q + 1$ и собственными значениями $\theta_1 = a = q, \theta_2 = -1, \theta_3 = -q$. При $q = 4$ получим унитарный граф на неизотропных векторах с массивом $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$, а при $q = 5$ получим допустимый массив пересечений $\{20, 18, 6; 1, 1, 15\}$. □

Из леммы 1.1 следует утверждение (1) теоремы 2.

Лемма 1.2. *Проективной плоскости четного порядка* $2q$, *содержащей гиперовал* C, *отвечает граф с массивом пересечений* $\{2q - 2, q, q; 1, 1, q - 1\}$, $q \leq 4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если π — проективная плоскость четного порядка $2q$, содержащая гиперовал C, то геометрия с множеством точек, не лежащих в C, и множеством блоков, состоящим из $q(2q-1)$ прямых, не пересекающих C, является двойственной к 2-$(q(2q-1), q, 1)$ схеме. По замечанию 1 этой схеме отвечает геометрия $pG_q(2q, q-1)$, а по предложению — граф с массивом пересечений $\{2q - 2, q, q; 1, 1, q - 1\}$.

При $q = 3$ получим нечетный граф O_7 с массивом $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$, а при $q = 4$ получим обобщенный шестиугольник $GH(2, 2)$ с массивом $\{6, 4, 4; 1, 1, 3\}$.

При $q > 4$ число $a_1 + 1 = q - 2$ не делит $k = 2q - 2$; противоречие с тем, что окрестность вершины в графе является объединением изолированных $(q - 2)$-клик. □

Из леммы 1.2 следует утверждение (2) теоремы 2.

Лемма 1.3. *Схеме точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$, имеющей параметры 2-$((q^{n+1}-1)/(q-1), q+1, 1)$, отвечает геометрия $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q, q)$, а при $n=3$ — граф с массивом пересечений $\{q^2, q^2-1, q+1; 1, 1, q(q-1)\}$, $q \in \{2, 7\}$.*

Доказательство. По [8, пример 4.4.1] схема точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$ имеет параметры 2-$((q^{n+1}-1)/(q-1), q+1, 1)$, отвечает геометрии $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q, q)$, а по предложению при $n=3$ — графу с массивом пересечений $\{q^2, q^2-1, q+1; 1, 1, q(q-1)\}$.

Граф с массивом пересечений $\{q^2, q^2-1, q+1; 1, 1, q(q-1)\}$ является графом Шилла с $a=b=q, c_2=1, b_2=q+1$ и имеет неглавные собственные значения $q, -1, -(q+1)$. Применяя [1, теорема 4.1.4] получаем, что кратности собственных значений равны $(q^2+q+1)(q^2+1)q/(2q+1)$, $(q^2+q+1)q$, $(q^2+1)(q^2-1)q/(2q+1)$ соответственно. Поэтому $2q+1$ делит $(q^2+1)q(q^2-1, q^2+q+1)$ и делит 15. Отсюда $q=2,7$. $\square$

Из леммы 1.3 следует утверждение (3) теоремы 2.

Лемма 1.4. *Схеме точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$, имеющей параметры 2-$(q^n, q, 1)$, отвечает геометрия $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q, q-1)$.*

Доказательство. По [8, пример 4.4.1.] схема точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$ имеет параметры 2-$(q^n, q, 1)$, и по замечанию 1 отвечает геометрии $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q, q-1)$.

В этом случае по предложению дистанционно регулярный граф должен иметь массив пересечений $\{q^{n-1}+\ldots+q, (q-1)c_2, q^{n-1}+\ldots+q^2+1; 1, c_2, q\}$. По [1, предложение 4.1.6] $(q-1)c_2 \geq q^{n-1}+\ldots+q^2+1$ и $c_2 \leq q$; противоречие. $\square$

Из леммы 1.4 следует утверждение (4) теоремы 2. Теорема 2 доказана. $\square$

2. Доказательство теоремы 3

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{t+1}(k,t)$. Тогда по предложению Γ является графом с массивом пересечений $\{k, tc_2, k-t; 1, c_2, t+1\}$, $k_2=b_0b_1/c_2=kt$, $k_3=k_2b_2/c_3=kt(k-t)/(t+1)$ (см. [1, разд. 4.1 (1c)]), поэтому $k-t \leq tc_2 < k$, $1 \leq c_2 \leq t+1$ и из целочисленности k_3 число $t+1$ делит $k(k+1)$.

Лемма 2.1. *Унитали порядка $q>1$ отвечает граф с массивом пересечений $\{q^2-1, q^2-q, q^2-q-1; 1, q-1, q+1\}$, $q=19$.*

Доказательство. Унитали порядка $q>1$ (т.е. 2-$(q^3+1, q+1, 1)$ схемы) отвечают геометрия $pG_{q+1}(q^2-1, q)$ и граф с массивом пересечений $\{q^2-1, q^2-q, q^2-q-1; 1, q-1, q+1\}$.

Граф с массивом пересечений $\{q^2-1, q^2-q, q^2-q-1; 1, q-1, q+1\}$ имеет неглавные собственные значения $2(q^2-q+1)(q-1)q^3/(4q^3-4q^2-4q+5-2q\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}+3\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5})$, $(q^2-q+1)(q^2-q-1)$, $2(q^2-q+1)(q-1)q^3/(4q^3-4q^2-4q+5+2q\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}-3\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}+5)$ кратностей $(\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}-1)/2$, q^2-1, $(\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}-1)/2$ соответственно.

Положим $y=\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}$. Тогда $y^2-2qy+3y$ делит $2(q^2-q+1)(q-1)q^3$.

Число $(y^2, q)=(4q^3-4q^2-4q+5, q)$ делит 5. Далее, $(y^2, q-1)=(4q^3-4q^2-4q+5, q-1)=1$. Имеем $(y^2, q^2-q+1)=(4q^3-4q^2-4q+5, 4q^3-4q^2+4q)=(8q-5, q^2-q+1)$. Теперь $(8q^2-5q, 8q^2-8q+8)=(8q-5, 3q-8)$ делит 49. С учетом того, что $4q^3-4q^2-4q+5$ является квадратом, имеем $q=19$. $\square$

Замечание 2. По [1, теорема 5.4.1] граф с массивом пересечений из утверждения леммы 2.1 не существует.

Из леммы 2.1 и замечания 2 следует утверждение (2)(i) теоремы 3.

Лемма 2.2. *Проективной плоскости четного порядка $2q$, содержащей гиперовал C, отвечает граф с массивом пересечений $\{2q, 2q-2, q+1; 1, 2, q\}$ и $q = 18$.*

Доказательство. Если π — проективная плоскость четного порядка $2q$, содержащая гиперовал C, то геометрия с множеством точек, не лежащих в C, и множеством блоков, состоящим из $q(2q-1)$ прямых, не пересекающих C, является двойственной к 2-$(q(2q-1), q, 1)$ схеме. Этой схеме отвечают геометрия $pG_q(2q, q-1)$, а по предложению — граф с массивом пересечений $\{2q, 2q-2, q+1; 1, 2, q\}$. Применяя [1, теорема 4.1.4] к полученному массиву пересечений, получаем, что кратность наибольшего неглавного собственного значения графа Γ равна $m_1 = 4(4q^2-1)(q-1)/(16q-3\sqrt{16q+1}+1)$.

В силу целочисленности m_1 имеем $16q+1 = u^2$ для некоторого натурального числа u. Подставляя $q = (u^2-1)/16$ в формулу для m_1, имеем $m_1 = (u^2+7)(u^2-17)(u+3)/(256u)$.

Из целочисленности m_1 число u может принимать только три значения 7, 17 и 119, а значит, $q \in \{3, 18, 885\}$. Граф не существует в первом случае по [1, предложение 5.4.4], а в третьем — по теореме Брука — Райзера [9, теорема 1]. $\square$

Из леммы 2.2 следует утверждение (2)(ii) теоремы 3.

Лемма 2.3. *Схеме точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$, имеющей параметры 2-$((q^{n+1}-1)/(q-1), q+1, 1)$, отвечает геометрия $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q, q)$, а при $n = 3$ — граф с массивом пересечений $\{q^2+q, q^2, q^2; 1, q, q+1\}$, $q = 2$.*

Доказательство. Схеме точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$ отвечает геометрия $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q, q)$, а по предложению при $n = 3$ — граф с массивом пересечений $\{q^2+q, q^2, q^2; 1, q, q+1\}$.

Граф с массивом пересечений $\{q^2+q, q^2, q^2; 1, q, q+1\}$ имеет неглавные собственные значения $2(q^2+q+1)(q^2+1)q^2/(4q^3+4q^2+1-2q\sqrt{4q^3+4q^2+1}+\sqrt{4q^3+4q^2+1})$, $(q^2+1)q^2$, $2(q^2+q+1)(q^2+1)q^2/(4q^3+4q^2+1+2q\sqrt{4q^3+4q^2+1}-\sqrt{4q^3+4q^2+1})$ кратностей $1/2\sqrt{4q^3+4q^2+1}-1/2$, q^2+q, $1/2\sqrt{4q^3+4q^2+1}-1/2$ соответственно (см. [1, теорема 4.1.4]).

Положим $z = \sqrt{4q^3+4q^2+1}$. Тогда $z^2-2qz+z$ делит $2(q^2+q+1)(q^2+1)q^2$. Заметим, что z взаимно просто с $2q$. Далее, $(z^2, q^2+1) = (4q^3+4q^2+1, 4q^3+4q) = (4q^2+4, 4q^2-4q+1) = (4q+3, q^2+1)$, поэтому $(z^2, q^2+1) = (3q-4, 4q+3)$ делит 25. Имеем $(z^2, q^2+q+1) = (4q^3+4q^2+1, 4q^3+4q^2+4q) = (4q-1, q^2+q+1)$. Теперь $(z^2, q^2+q+1) = (4q-1, 5q+4)$ делит 21. С учетом того, что $4q^3+4q^2+1$ является квадратом, имеем $q = 2$. $\square$

Замечание 3. По [1, предложение 5.4.4] граф с массивом пересечений из утверждения леммы 2.3 не существует.

Из леммы 2.3 и замечания 3 следует утверждение (2)(iii) теоремы 3.

Лемма 2.4. *Схеме точек и прямых аффинного пространства $AG(n, q)$ отвечает геометрия $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q, q-1)$, а при $n = 2$ — антиподальный граф с массивом пересечений $\{q, q-1, 1; 1, 1, q\}$, $q \in \{2, 6, 56\}$.*

Доказательство. Схеме точек и прямых аффинного пространства $AG(n, q)$ отвечает $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q, q-1)$, а по предложению при $n = 2$ — антиподальный граф с массивом пересечений $\{q, q-1, 1; 1, 1, q\}$. Кратность наибольшего неглавного собственного значения равна $m_1 = 2(q^2-1)q/(4q-\sqrt{4q+1}+1)$. Значит, $q = (t^2-1)/4$ для подходящего целого числа t и $m_1 = (t^2+3)(t^2-5)(t+1)/(32t)$. Поэтому $t \in \{3, 5, 15\}$ и $q \in \{2, 6, 56\}$. $\square$

Из леммы 2.4 следует утверждение (2)(iv) теоремы 3. Теорема 3 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Koolen J.H., Park J.** Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. Vol. 31. P. 2064–2073.
3. **Jurisic A., Koolen J.** Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4 // Discrete Math. 2002. Vol. 244. P. 181–202. doi: 10.1016/S0012-365X(01)00082-6 .
4. **Bang S., Koolen J.** Distance-regular graphs of diameter 3 having eigenvakue -1 // Linear Algebra Appl. 2017. Vol. 531. P. 38–53. doi: 10.1016/j.laa.2017.05.038 .
5. **Махнев А.А., Нирова М.С.** Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 5. С. 730–744. doi: 10.4213/mzm11503 .
6. **Barwick S., Ebert G.** Unitals in projective planes. N Y etc.: Springer, 2008. 193 p. doi: 10.1007/978-0-387-76366-8 .
7. **Assmus E.F., Key J.D. Jr.** Designs and their codes. Chap. 8: Steiner systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. P. 295–316. doi: 10.1017/CBO9781316529836.009 .
8. **Махнев А.А., Белоусов И.Н., Падучих Д.В.** Конечные геометрии и их автоморфизмы. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 188 с.
9. **Bruck R.H., Ryser H.J.** The nonexistence of certain finite projective planes // Canadian J. Math. 1949. Vol. 1. P. 88–93. doi: 10.4153/cjm-1949-009-2 .

Поступила 1.08.2019
После доработки 8.11.2019
Принята к публикации 25.11.2019

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
зав. отделом, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: i_belousov@mail.ru

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 3-540-50619-5 .
2. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2010, vol. 31, pp. 2064–2073.
3. Jurisic A., Koolen J. Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4. *Discrete Math.*, 2002, vol. 244, pp. 181–202. doi: 10.1016/S0012-365X(01)00082-6 .
4. Bang S., Koolen J. Distance-regular graphs of diameter 3 having eigenvakue -1. *Linear Algebra Appl.*, 2017, vol. 531, pp. 38–53. doi: 10.1016/j.laa.2017.05.038 .
5. Makhnev A.A., Nirova M.S. Distance-regular Shilla graphs with $b_2 = c_2$. *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 5, pp. 780–792. doi: 10.1134/S0001434618050103 .
6. Barwick S., Ebert G. *Unitals in projective planes.* N Y etc.: Springer, 2008, 193 p. doi: 10.1007/978-0-387-76366-8 .
7. Assmus E.F., Key J.D. Jr. *Designs and their codes.* Chap. 8: Steiner systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994, pp. 295–316. doi: 10.1017/CBO9781316529836.009 .

8. Makhnev A.A., Belousov I.N., Paduchikh D.V. *Konechnye geometrii i ikh avtomorfizmy* [Finite geometries and their automorphisms]. *Novosibirsk: SB RAS Publ.*, 2016, 188. ISBN: 978-5-7692-1521-6 .
9. Bruck R.H., Ryser H.J. The nonexistence of certain finite projective planes. *Canadian J. Math.*, 1949, vol. 1, pp. 88–93. doi: 10.4153/cjm-1949-009-2 .

Received August 1, 2019
Revised November 8, 2019
Accepted November 25, 2019

Ivan Nikolaevich Belousov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: i_belousov@mail.ru

Aleksandr Alekseevich Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Cite this article as: I. N. Belousov, A. A. Makhnev. Inverse problems in the theory of distance-regular graphs: Dual 2-designs, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 44–51 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.988.63, 517.965, 515.124.2, 512.562

ТЕОРЕМЫ О ВОЗМУЩЕНИЯХ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С РАССТОЯНИЕМ И В ПРОСТРАНСТВАХ С БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ[1]

С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела

Получены утверждения о существовании решений уравнений специального типа в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением. Полученные результаты обобщают известные теоремы о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений, о липшицевых возмущениях накрывающих отображений в метрических пространствах, а также теоремы о точках совпадения накрывающего и изотонного отображений, об антитонных возмущениях накрывающих отображений в частично упорядоченных пространствах. В первой части работы рассматривается отображение $F : X \times X \to Y$, где X — метрическое пространство, а в Y задано расстояние, удовлетворяющее лишь аксиоме тождества. Определены "ослабленные аналоги" понятий накрывания и липшицевости отображений из X в Y. В предположении, что F по первому аргументу является накрывающим, а по второму — липшицевым (в смысле данных в работе определений этих свойств), установлено существование решения x уравнения $F(x,x) = y$. Показано, что из этого утверждения выводятся условия существования точки совпадения накрывающего и липшицева отображений, действующих из X в Y. Во второй части работы аналогичные результаты получены в случае, когда X — частично упорядоченное пространство, а на Y задано рефлексивное бинарное отношение (не являющееся ни транзитивным, ни антисимметричным). Определены "ослабленные аналоги" понятий упорядоченного накрывания и монотонности отображений из X в Y. В предположении, что F по первому аргументу является накрывающим, а по второму — антитонным (в смысле данных в работе определений этих свойств), установлено существование решения x уравнения $F(x,x) = y$. Из этого утверждения выведены условия существования точки совпадения накрывающего и изотонного отображений, действующих из X в Y. В третьей части установлена взаимосвязь полученных утверждений. А именно, доказано, что из теоремы о разрешимости операторного уравнения в пространствах с бинарным отношением следует аналогичная теорема в пространствах с расстоянием и соответственно утверждения о точках совпадения.

Ключевые слова: метрическое пространство, упорядоченное пространство, накрывающее отображение, липшицево отображение, монотонное отображение.

S. Benarab, E. S. Zhukovskii, W. Merchela. Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation.

Statements on the existence of solutions of special-type equations in spaces with a distance and in spaces with a binary relation are derived. The results obtained generalize the well-known theorems on coincidence points of a covering and a Lipschitz mappings and on Lipschitz perturbations of covering mappings in metric spaces as well as the theorems on coincidence points of a covering and an isotonic mappings and on antitone perturbations of covering mappings in partially ordered spaces. In the first part of the paper, we consider a mapping $F\colon X \times X \to Y$, where X is a metric space and Y is equipped with a distance satisfying only the identity axiom. "Weakened analogs" of the notions of covering and Lipschitz mappings from X to Y are defined. Under the assumption that F is covering in the first argument and Lipschitz in the second argument (in the sense of the definitions of these properties given in the paper), the existence of a solution x to the equation $F(x,x) = y$ is established. It is shown that this statement yields conditions for the existence of a coincidence point of a covering and a Lipschitz mappings acting from X to Y. In the second part of the paper, similar results are obtained in the case when X is a partially ordered space and Y is equipped with a reflexive binary relation (which is neither transitive nor antisymmetric). "Weakened analogs" of the notions of ordered covering and monotonicity of mappings from X to Y are defined. Under the assumption that F is covering in the first argument and antitone in the second argument (in the sense of the definitions of these properties given in the paper), the existence of a solution x to the equation $F(x,x) = y$ is established and conditions for the existence of a coincidence point of a covering and an isotone mappings acting from X to Y are deduced from this statement. In the third part, a connection between the obtained statements is established. Namely, it is proved that the theorem on the solvability of an operator equation in spaces with a binary relation implies a similar theorem in spaces with a distance and, accordingly, the statements on coincidence points.

Keywords: metric space, ordered space, covering mapping, Lipschitz mapping, monotone mapping.

MSC: 47J05, 54H25, 55M20, 47J25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-52-63

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00553, № 17-41-680975, № 17-51-12064.)

Введение

Утверждения о накрывающих отображениях позволяют исследовать разрешимость и получать оценки решений уравнений. Так, теорему Милютина [6] о липшицевых возмущениях накрывающих отображений можно трактовать как утверждение о решениях уравнения

$$\psi(x) - \varphi(x) = y,$$

в котором отображения ψ, φ действуют из метрического пространства X в линейное метрическое пространство Y, отображение ψ является α-накрывающим, а отображение φ — β-липшицевым, $\alpha > \beta$. Теорема Арутюнова [2] о точке совпадения α-накрывающего и β-липшицева отображений ψ, φ, действующих в метрических пространствах, установливает разрешимость уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x). \tag{0.1}$$

В работе [1] получена теорема о липшицевом возмущении накрывающего отображения, позволяющая исследовать уравнение

$$G(x) := F(x, x) = \widehat{y} \tag{0.2}$$

в случае, когда отображение $F : X \times X \to Y$ по первому аргументу является α-накрывающим, а по второму — β-липшицевым. В [12] определено понятие накрывания для отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах и доказаны утверждения о точках совпадения упорядоченно накрывающего и изотонного отображений. В этой статье также показано, что результаты о точках совпадения в упорядоченных пространствах являются более общими, чем соответствующие теоремы в метрических пространствах. Для исследования точек совпадения отображений метрических пространств можно в этих пространствах определить порядок Бишопа — Фелпса, а затем по заданным накрывающему и липшицеву отображениям определить соответствующие упорядоченно накрывающее и изотонное отображения, действующие в полученных упорядоченных пространствах. В [7] доказана теорема об антитонном возмущении упорядоченно накрывающего отображения, позволившая исследовать уравнение (0.2) в частично упорядоченных пространствах.

В последнее время исследователей заинтересовала возможность распространения на пространства с обобщенными метриками теорем о накрывающих отображениях. Эта проблема имеет не только чисто теоретическое значение, ее решение востребовано также в приложениях. Подобные результаты позволяют, в частности, исследовать некоторые модели биологии, задачи математической физики, сводящиеся к сингулярным системам, импульсным системам и др., которые удобнее формализовать в виде уравнений в пространствах, наделенных не метрикой, а расстоянием (например, принимающим значения в конусе некоторого банахова пространства, являющимся несимметричным или не удовлетворяющим неравенству треугольника). В [3] рассмотрена задача о точке совпадения в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. На векторные метрические пространства теоремы о точках совпадения распространены в работе [8], теоремы о липшицевых возмущениях накрывающих отображений — в [9]. В [10] были получены утверждения о точках совпадения отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющим только аксиоме тождества. В [4] рассмотрены точки совпадения отображений, определенных на упорядоченном пространстве, со значениями в пространстве с рефлексивным бинарным отношением.

Здесь мы докажем теоремы о возмущениях накрывающих отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, и теоремы о возмущениях накрывающих отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в пространство с рефлексивным бинарным отношением. Эти утверждения были анонсированы в [5]. Также будет доказано, что из теоремы о разрешимости уравнения (0.2) в пространствах с бинарным отношением следуют аналогичная теорема о пространствах с расстоянием и утверждения о точках совпадения. Эти результаты авторы планируют в дальнейшем применить к исследованию некоторых классов дифференциальных уравнений (в том числе с несуммируемыми особенностями), которые могут быть записаны в виде (0.2), где оператор F действует из произведения Лебеговых пространств в пространство измеримых функций и, если в пространстве измеримых функций определить специальное расстояние, оператор F оказывается по первому аргументу накрывающим, а по второму — липшицевым.

1. Теорема о липшицевом возмущении накрывающего отображения в пространствах с расстоянием

Пусть $X = (X, \rho)$ — метрическое пространство, $Y \neq \varnothing$, $d : Y \times Y \to \mathbb{R}_+$ — расстояние в Y, т. е. для $y_1, y_2 \in Y$ равенства $d(y_1, y_2) = 0$ и $y_1 = y_2$ равносильны (важно, что отображение d не обязано быть симметричным и удовлетворять неравенству треугольника). Обозначим $B_X(x_0, r) := \{x \in X |\, \rho(x_0, x) \leq r\}$, $B_Y(y_0, R) := \{y \in Y |\, d(y_0, y) \leq R\}$ (здесь $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $r, R \geq 0$). В Y определим *сходимость*, полагая $y_i \to y$, если $d(y, y_i) \to 0$. Отметим, что при этом $d(y_i, y)$ может не сходиться к 0, а предел y может быть не единственным.

Приведем вначале предложенные в [10] распространения некоторых определений, ранее известных для отображений метрических пространств, на отображения, действующие из (X, ρ) в (Y, d). Отображение $f : X \to Y$ называется
замкнутым, если

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \ \forall \{x_n\} \subset X \ \ x_n \to x, \quad f(x_n) \to y \ \Rightarrow \ f(x) = y;$$

α-накрывающим, $\alpha > 0$, если

$$\forall u \in X \ \forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ f(x) = y, \quad \rho(x, u) \leq \frac{1}{\alpha} d(y, f(u));$$

β-липшицевым, $\beta \geq 0$, если

$$\forall u, x \in X \ \forall y \in Y \ \ f(x) = y \ \Rightarrow \ d(y, f(u)) \leq \beta \rho(x, u).$$

Если оба пространства X, Y метрические, то приведенные определения совпадают с классическими определениями замкнутости, накрывания и липшицевости (см. [2]).

В [10] получены условия существования точки совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$ — решения уравнения (0.1).

Теорема 1 [10, теорема 2.1]. *Пусть $\alpha > \beta \geq 0$, метрическое пространство X является полным и выполнены следующие условия: отображение ψ является α-накрывающим и замкнутым; отображение φ является β-липшицевым. Тогда множество точек совпадения отображений ψ, φ непусто и, кроме того,*

$$\forall x_0 \in X \ \exists \widehat{x} \in X \ \ \psi(\widehat{x}) = \varphi(\widehat{x}), \quad \rho(\widehat{x}, x_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta} d(\psi(x_0), \varphi(x_0)).$$

В случае, если расстояние d является “обычной метрикой” в Y, приведенное утверждение совпадает с теоремой Арутюнова [2].

Отметим, что для используемого в теореме 1 свойства замкнутости f необходимо выполнение следующего условия: для любой сходящейся последовательности аргументов $x_n \to x$, если последовательность их образов тоже сходится: $f(x_n) \to y$, то ее предел $y \in Y$ должен быть единственным. Таким образом, предположение о замкнутости f накладывает еще и ограничения на пространство Y. Используемые ниже в теореме о разрешимости операторного уравнения предположения менее обременительны, чем в теореме 1, в частности, единственность предела в пространстве Y не требуется. Мы также ослабляем предположения о накрывании и липшицевости соответствующих отображений. А именно, для отображения $f : X \to Y$ определим следующие множества:

$$\mathrm{Cl}[f] := \big\{(x,y) \in X \times Y \,|\, \forall \{x_n\} \subset X \ x_n \to x, \ f(x_n) \to y \ \Rightarrow \ f(x) = y\big\};$$
$$\mathrm{Cov}_\alpha[f] := \big\{(u,y) \in X \times Y \,|\, \exists x \in X \ f(x) = y, \ \rho(x,u) \le \alpha^{-1} d(y, f(u))\big\};$$
$$\mathrm{Lip}_\beta[f] := \big\{(u,y) \in X \times Y \,|\, \forall x \in X \ f(x) = y \ \Rightarrow \ d(y, f(u)) \le \beta\rho(x,u)\big\}.$$

Очевидно, соотношение $\mathrm{Cl}[f] = X \times Y$ равносильно тому, что отображение f замкнуто, соотношение $\mathrm{Cov}_\alpha[f] = X \times Y$ означает, что отображение f является α-накрывающим, а соотношение $\mathrm{Lip}_\beta[f] = X \times Y$ справедливо тогда и только тогда, когда f липшицево с коэффициентом β.

Рассматриваемое здесь множество $\mathrm{Cov}_\alpha[f]$ аналогично определенному в [11] *множеству метрической регулярности* отображений, действующих в пространствах с векторной метрикой (частным случаем которых являются "обычные метрические" пространства).

Пусть заданы элемент $\widehat{y} \in Y$ и отображение $F : X \times X \to Y$. Это отображение как отображение первого аргумента при фиксированном втором аргументе $x \in X$ обозначаем символом $F(\cdot, x)$; аналогично через $F(x, \cdot)$ обозначаем отображение второго аргумента. Сформулируем условия разрешимости уравнения (0.2).

Теорема 2. *Пусть метрическое пространство X является полным, $x_0 \in X$, $\alpha > \beta \ge 0$. Предположим, что для любого $x \in B_X(x_0, R)$, где $R = (\alpha - \beta)^{-1} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0))$, выполнены включения*

$$(x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x)], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x, \cdot)], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G].$$

Тогда существует решение $\widehat{x} \in B_X(x_0, R)$ уравнения (0.2).

Доказательство. Если x_0 является решением уравнения (0.2), то утверждение теоремы справедливо. Поэтому будем предполагать, что x_0 не удовлетворяет уравнению (0.2). Докажем, что существует последовательность $\{x_n\}$, для которой при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполнены условия

$$F(x_n, x_{n-1}) = \widehat{y}, \quad \rho(x_n, x_0) \le \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)), \quad d(\widehat{y}, F(x_n, x_n)) \le \beta\rho(x_n, x_{n-1}). \tag{1.3}$$

Для доказательства используем метод математической индукции.

Сначала проверим соотношения (1.3) при $n = 1$. Очевидно, $x_0 \in B_X(x_0, \widehat{R})$, поэтому согласно условиям теоремы справедливо включение $(x_0, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_0)]$. Это означает существование элемента $x_1 \in X$ такого, что

$$F(x_1, x_0) = \widehat{y} \ \text{ и } \ \rho(x_1, x_0) \le \frac{1}{\alpha} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) < R.$$

Так как $x_1 \in B_X(x_0, R)$, имеем $(x_1, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_1, \cdot)]$; таким образом, справедливо неравенство

$$d(\widehat{y}, F(x_1, x_1)) \le \beta\rho(x_1, x_0).$$

Итак, для $n = 1$ соотношения (1.3) выполнены.

Предположим, что соотношения (1.3) справедливы для всех натуральных $n \le k$. Докажем, что соотношения (1.3) верны при $n = k + 1$. Поскольку

$$\rho(x_k, x_0) \le \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha^k(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) < R,$$

в силу предположений теоремы имеем $(x_k, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_k)]$ и $(x_k, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_k, \cdot)]$. Следовательно, существует элемент x_{k+1}, для которого $F(x_{k+1}, x_k) = \widehat{y}$ и

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \le \frac{1}{\alpha} d\big(\widehat{y}, F(x_k, x_k)\big) = \frac{1}{\alpha} d\big(F(x_k, x_{k-1}), F(x_k, x_k)\big) \le \frac{\beta}{\alpha} \rho\big(x_k, x_{k-1}\big).$$

Так как аналогичное соотношение $\rho(x_{n+1}, x_n) \le \alpha^{-1}\beta\rho\big(x_n, x_{n-1}\big)$ справедливо при любом натуральном $n < k$, получаем

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \le \frac{\beta^k}{\alpha^k}\rho(x_1, x_0) \le \frac{\beta^k}{\alpha^{k+1}} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big).$$

Теперь в силу предположения индукции заключаем

$$\rho(x_0, x_{k+1}) \le \rho(x_0, x_k) + \rho(x_k, x_{k+1}) \le \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha^k(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) + \frac{\beta^k}{\alpha^{k+1}} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big)$$

$$= \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha^{k+1}(\alpha - \beta)} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big).$$

Очевидно, $x_{k+1} \in B_X(x_0, R)$, и поэтому выполнено включение $(x_{k+1}, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_{k+1}, \cdot)]$, которое гарантирует, что

$$d(\widehat{y}, F(x_{k+1}, x_{k+1})) \le \beta\rho(x_{k+1}, x_k).$$

Итак, для $n = k + 1$ все соотношения (1.3) выполнены.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. При любых натуральных n, m, $n < m$ имеем

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{m-1}, x_m)$$
$$\le \frac{1}{\alpha}\sum_{i=n}^{m-1} \frac{\beta^i}{\alpha^i} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big) \le \frac{\beta^n}{\alpha^n}\frac{1}{\alpha - \beta} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$, если определить

$$N = \log_{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\varepsilon(\alpha - \beta)}{d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big)},$$

то при всех n, m, $m > n > N$ будет выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset B_X(x_0, R)$ в полном пространстве X сходится к некоторой точке $\widehat{x} \in B_X(x_0, R)$. Из последнего в (1.3) неравенства $d\big(\widehat{y}, F(x_n, x_n)\big) \le \beta\rho(x_{n+1}, x_n)$ следует сходимость $d\big(\widehat{y}, F(x_n, x_n)\big) \to 0$, т. е. $G(x_n) \to \widehat{y}$. А так как имеет место включение $(x_n, \widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G]$, получим $G(\widehat{x}) = \widehat{y}$. □

Важно, что *из теоремы* 2 *может быть выведена теорема* 1. Для этого следует определить отображение $F : X \times X \to \mathbb{R}$, $F(x, u) := d\big(\psi(x), \varphi(u)\big)$, $x, u \in X$, и рассмотреть уравнение

$$F(x, x) := d\big(\psi(x), \varphi(x)\big) = 0. \tag{1.4}$$

Легко проверить, что из α-накрывания отображения ψ следует, что при любом $x \in X$ выполнено включение $(x, 0) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x)]$, а из β–липшицевости отображения φ — включение $(x, 0) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x, \cdot)]$. Поэтому в условиях теоремы 1 для уравнения (1.4) при любом $x_0 \in X$ выполнены предположения теоремы 2.

Конечно, теорема 2 применима к исследованию точек совпадения отображений, определенных на метрическом пространстве и действующих не только в пространство с расстоянием, но и в пространство с "обычной" метрикой; таким образом из теоремы 2 может быть выведена теорема Арутюнова [2]. Отметим, что связь между уравнениями (0.1) и (0.2) до сих пор оставалась незамеченной, утверждения о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений и утверждения о липшицевом возмущении накрывающего отображения считались независимыми.

2. Теорема об антитонном возмущении накрывающего отображения в пространствах с бинарным отношением

Пусть теперь $X = (X, \le)$ — частично упорядоченное пространство, а на множестве $Y \neq \varnothing$ определено бинарное отношение ω, являющееся рефлексивным (т. е. для любого $y \in Y$ выполнено $(y, y) \in \omega$). Для элементов $u, v \in X$ определим множества $\mathcal{O}_X(u) := \{x \in X : x \le u\}$, $[v, u]_X := \{x \in X : v \le x \le u\}$.

На отображения, действующие из $(X, \le)$ в (Y, ω), в работе [4] были распространены определения, используемые для отображений частично упорядоченных пространств, в том числе предложенное в [12] определение свойства упорядоченного накрывания. Приведем эти определения. Отображение $f : X \to Y$ называется
(*упорядоченно*) *накрывающим*, если

$$\forall u \in X \ \forall y \in Y \quad (y, f(u)) \in \omega \ \Rightarrow \ \exists x \in X \quad f(x) = y, \quad x \le u;$$

изотонным, если

$$\forall u, x \in X \quad u \le x \ \Rightarrow \ (f(u), f(x)) \in \omega;$$

антитонным, если

$$\forall u, x \in X \quad u \le x \ \Rightarrow \ (f(x), f(u)) \in \omega.$$

Если оба пространства X, Y частично упорядочены (т. е. отношение ω есть частичный порядок), то приведенные определения совпадают с классическими определениями свойств накрывания, изотонности и антитонности (см. [12]).

В [4] получены следующие условия существования решения уравнения (0.1) — точки совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$.

Определим совокупность $\Pi := \Pi(\psi, \varphi)$ всех цепей $S \subset X$, удовлетворяющих условию

$$\forall x \in S \quad \big(\varphi(x), \psi(x)\big) \in \omega \quad \text{и} \quad \forall x, u \in S \quad x < u \ \Rightarrow \ \big(\psi(x), \varphi(u)\big) \in \omega. \tag{2.1}$$

Теорема 3 [4, теорема 1.1]. *Пусть для некоторого элемента $x_0 \in X$ имеет место соотношение $\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big) \in \omega$ и любая цепь $S \subset \Pi$, содержащая x_0, имеет нижнюю границу $v \in X$, для которой $\big(\varphi(v), \psi(v)\big) \in \omega$. Предположим также, что отображение ψ является накрывающим, а отображение φ — изотонным. Тогда существует точка совпадения $\widehat{x} \in \mathcal{O}_X(x_0)$ отображений ψ, φ.*

В случае, если отношение ω является еще и антисимметричным и транзитивным, т. е. Y — частично упорядоченное пространство, теорема 3 совпадает с теоремой о точках совпадения, полученной в [12].

Далее мы покажем, что утверждения о разрешимости операторных уравнений, в том числе о существовании точек совпадения, могут быть получены при более слабых предположениях. С этой целью для произвольного отображения $f : X \to Y$ определим множества

$$\mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y \,|\, (y, f(u)) \in \omega \ \Rightarrow \ \exists x \in X \ f(x) = y, \ x \le u\big\};$$
$$\mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y \,|\, \forall x \in X \ f(x) = y, \ u \le x \ \Rightarrow \ (y, f(u)) \in \omega\big\}.$$

Множеству $\mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[f]$ принадлежат, например, все пары (u, y) такие, что $(y, f(u)) \notin \omega$. Отметим, что соотношение $\mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[f] = X \times Y$ равносильно упорядоченному накрыванию отображения f, а соотношение $\mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[f] = X \times Y$ — антитонности отображения f.

Приведенное определение множества $\mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[f]$ аналогично данному в [7] определению *множества упорядоченного накрывания* отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в частично упорядоченное пространство.

Пусть заданы $\widehat{y} \in Y$ и отображение $F : X \times X \to Y$. Определим совокупность $\Xi := \Xi(F, \widehat{y})$ всех цепей $S \subset X$, удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} &\forall x \in S \quad \big(\widehat{y}, F(x, x)\big) \in \omega, \\ &\forall x, u \in S \quad x < u \ \Rightarrow \ \exists \zeta \in [x, u]_X \quad \big(\widehat{y}, F(\zeta, \zeta)\big) \in \omega, \quad F(x, \zeta) = \widehat{y}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Теорема 4. *Пусть существует элемент* $x_0 \in X$ *такой, что* $\big(\widehat{y}, F(x_0,x_0)\big) \in \omega$, *и любая цепь* $S \subset \Xi$, *содержащая* x_0, *имеет нижнюю границу* $v \in X$, *для которой* $\big(\widehat{y}, F(v,v)\big) \in \omega$. *Предположим также, что для любого* $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *справедливы включения*

$$(x,\widehat{y}) \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[F(\cdot,x)], \quad (x,\widehat{y}) \in \mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[F(x,\cdot)].$$

Тогда существует решение $\widehat{x} \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *уравнения* (0.2).

Доказательство. Определим множество

$$U = \{x \in \mathcal{O}_X(x_0) |\, \big(\widehat{y}, F(x,x)\big) \in \omega\}.$$

Это множество непусто, поскольку $x_0 \in U$. На множестве U определим бинарное отношение $\preceq$ следующим соотношением

$$\forall x,u \in U \quad x \preceq u \;\Leftrightarrow\; x \leq u \;\text{ и }\; \big(x < u \;\Rightarrow\; \exists \zeta \in [x,u]_U \quad F(x,\zeta) = \widehat{y}\,\big)$$

(естественно, в случае $x \preceq u$, $x \neq u$ будем писать $x \prec u$). Очевидно, что отношение $\preceq$ является порядком и обладает следующим свойством, более "сильным", чем транзитивность:

$$z \prec x, \quad x \leq u \;\Rightarrow\; z \prec u. \tag{2.3}$$

Из определения пространства $(U,\preceq)$ следует, что цепь относительно порядка $\preceq$ является также цепью относительно порядка $\leq$, более того, удовлетворяет соотношениям (2.2). В пространстве $(U,\preceq)$ согласно принципу максимума Хаусдорфа существует максимальная цепь S, содержащая точку x_0. Поскольку $S \in \Xi$, в силу предположений теоремы цепь S относительно первоначального порядка $\leq$ имеет нижнюю границу $v \in \mathcal{O}_X(x_0)$, для которой выполнено соотношение $\big(\widehat{y}, F(v,v)\big) \in \omega$, т. е. $v \in U$. Покажем, что эта нижняя граница v является решением уравнения (0.2). Предположим противное: $F(v,v) \neq \widehat{y}$.

В силу соотношения $(v,\widehat{y}) \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[F(\cdot,v)]$ существует элемент $\widehat{x} \in O_X(v)$ такой, что выполнено равенство

$$F(\widehat{x},v) = \widehat{y}. \tag{2.4}$$

В этом равенстве $\widehat{x} \neq v$ (так как $F(v,v) \neq \widehat{y}$), поэтому $\widehat{x} < v$. Из (2.4) в силу соотношения $(\widehat{x},\widehat{y}) \in \mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[F(\widehat{x},\cdot)]$ получаем $\big(\widehat{y}, F(\widehat{x},\widehat{x})\big) \in \omega$. Таким образом, доказано, что $\widehat{x} \in U$ и $\widehat{x} \prec v$. Поэтому согласно свойству (2.3) для любого $x \in S$ имеет место неравенство $\widehat{x} \prec x$. Так как цепь S является максимальной в U относительно порядка $\preceq$, элемент $\widehat{x}$ должен принадлежать этой цепи. Но тогда неравенство $\widehat{x} \prec v$ противоречит тому, что v — нижняя граница этой цепи.

Итак, предположение $F(v,v) \neq \widehat{y}$ неверно, т. е. элемент $\widehat{x} = v$ является решением уравнения (0.2). □

Продемонстрируем, каким образом *из теоремы* 4 *выводится теорема* 3 *о точках совпадения.* С этой целью зададим на трехэлементном множестве $Z = \{0,-1,1\}$ бинарное отношение

$$\omega_Z := \big\{(0,0), (-1,-1), (1,1), (0,1)\big\}$$

и определим отображение $\eta : Y \times Y \to Z$ формулой

$$(y,v) \in Y \times Y \;\mapsto\; \eta(y,v) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = v, \\ 1, & \text{если } (v,y) \in \omega, \; v \neq y, \\ -1, & \text{если } (v,y) \notin \omega. \end{cases}$$

Теперь определим отображение $F : X \times X \to Z$, $F(x,u) := \eta\big(\psi(x), \varphi(u)\big)$, $x,u \in X$, и рассмотрим уравнение

$$F(x,x) := \eta\big(\psi(x), \varphi(x)\big) = 0. \tag{2.5}$$

Очевидно, что решение уравнения (2.5) является точкой совпадения отображений ψ, φ. Покажем, что если для отображений ψ, φ выполнены условия теоремы 3, то существование решения уравнения (2.5) следует из теоремы 4.

Итак, предположения теоремы 3 считаем выполненными. Проверяем справедливость условий теоремы 4.

Во-первых, пусть $\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big) \in \omega$, тогда $\eta\big(\psi(x_0), \varphi(x_0)\big)$ равно 1 или 0, следовательно,

$$\big(0, \eta\big(\psi(x_0), \varphi(x_0)\big) \in \omega_Z.$$

Во-вторых, пусть любая цепь $S \subset \Pi$, содержащая x_0, имеет нижнюю границу $v \in X$ такую, что $\big(\varphi(v), \psi(v)\big) \in \omega$. Выберем произвольную цепь $\mathcal{C} \in \Xi$, ее любой элемент $x \in \mathcal{C}$ удовлетворяет условию $\big(0, \eta\big(\psi(x), \varphi(x)\big)\big) \in \omega_Z$. Это условие означает, что $\eta\big(\psi(x), \varphi(x)\big)$ равно 0 или 1, т. е. это условие равносильно соотношению $\big(\varphi(x), \psi(x)\big) \in \omega$. Далее, для любых двух элементов $x, u \in \mathcal{C}$ таких, что $x < u$, существует элемент $\zeta \in [x, u]_X$, удовлетворяющий условиям

$$\big(0, \eta(\psi(\zeta), \varphi(\zeta))\big) \in \omega_Z, \quad \eta\big(\psi(x), \varphi(\zeta)\big) = 0.$$

Отсюда $\psi(x) = \varphi(\zeta)$, и вследствие изотонности отображения φ получаем $\big(\psi(x), \varphi(u)\big) \in \omega$. Таким образом, цепь $\mathcal{C}$ удовлетворяет условиям (2.1), поэтому цепь $\mathcal{C} \in \Pi$ имеет нижнюю границу $v \in X$, для которой $\big(\varphi(v), \psi(v)\big) \in \omega$. Следовательно, $\big(0, \eta(\varphi(v), \psi(v))\big) \in \omega_Z$.

Заключая проверку условий теоремы 4, замечаем, что если отображение ψ накрывающее, то при любом $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ для отображения $\eta(\psi(\cdot), \varphi(x)) : X \to Z$ выполнено включение $\big(0, x\big) \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}\big[\eta(\psi(\cdot), \varphi(x))\big]$, а если отображение φ изотонное, то при любом $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ для отображения $\eta(\psi(x), \varphi(\cdot)) : X \to Z$ справедливо $\big(0, x\big) \in \mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}\big[\eta((\psi\cdot), \varphi(x))\big]$.

Итак, теорема 4 позволяет исследовать задачу о точках совпадения отображений, действующих из $(X, \leq)$ в (Y, ω), где ω — произвольное бинарное отношение, а в частном случае — отношение порядка. Таким образом, из теоремы 4 может быть получена не только [4, теорема 1.1], но и [12, Theorem 1].

3. Связь между теоремами о возмущениях в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением

Как показано выше, теоремы 2, 4 позволяют исследовать не только разрешимость уравнения (0.2), но и устанавливать существование точки совпадения отображений, действующих соответственно в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением. Здесь мы докажем, что *теорема* 2 *является следствием теоремы* 4. Таким образом, из результатов, касающихся уравнения (0.2) в пространствах с бинарным отношением, следуют утверждения и об этом уравнении, и о точках совпадения в случае пространств с расстоянием. Отметим, что в работе [12] было доказано, что из теоремы о точках совпадения упорядоченно накрывающего и изотонного отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах, выводится теорема о точке совпадения накрывающего и липшицева отображений, действующих в метрических пространствах. Доказательство этого результата основывалось на введении в метрических пространствах порядка Бишопа — Фелпса и определении по заданным действующим в метрических пространствах двум отображениям — α-накрывающему и β-липшицеву — двух новых отображений, действующих в полученных частично упорядоченных пространствах соответственно упорядоченно накрывающего и изотонного. Здесь используется такой же подход — в пространстве с расстоянием вводится бинарное отношение, аналогичное порядку Бишопа — Фелпса.

Итак, пусть выполнены условия теоремы 2. В декартовом произведении $\overline{X}$ метрического пространства $X = (X, \rho)$ и множества $\mathbb{R}_+$ неотрицательных чисел определим порядок Бишопа — Фелпса (см. [13; 14]), полагая для произвольных $(u, r), (x, R) \in \overline{X}$ выполненным неравенство $(u, r) \leq (x, R)$ тогда и только тогда, когда

$$\rho(u, x) \leq R - r.$$

Согласно [12, Lemma 3] из полноты метрического пространства X следует, что пространство $\overline{X}$ является упорядоченно полным, т. е. всякая цепь в нем имеет точную нижнюю границу.

Аналогично в декартовом произведении $\overline{Y}$ пространства $Y=(Y,d)$ и пространства $\mathbb{R}$ определим бинарное отношение ω следующим образом:

$$\forall (z,r),(y,R)\in\overline{Y}\quad \big((z,r),(y,R)\big)\in\omega\ \Leftrightarrow\ d(z,y)\le R-r$$

(напомним, что расстояние d не обязано быть симметричным, т. е. при выполнении этого соотношения "симметричное неравенство" $d(y,z)\le R-r$ может не выполняться).

Теперь по заданному отображению $F: X\times X\to Y$ построим отображение

$$\overline{F}:\overline{X}\times\overline{X}\to\overline{Y},\quad \overline{F}\big((x,R),(u,r)\big):=\big(F(x,u),\alpha R-\beta r\big)$$

и рассмотрим уравнение

$$\overline{F}(\overline{x},\overline{x})=(\widehat{y},0) \tag{3.1}$$

относительно неизвестного $\overline{x}=(x,r)\in\overline{X}$. Легко видеть, что пара $(\widehat{x},\widehat{r})$ является решением этого уравнения тогда и только тогда, когда ее вторая компонента $\widehat{r}=0$, а ее первая компонента есть решение уравнения (0.2).

Установим разрешимость уравнения (3.1) на основании теоремы 4.

Для заданных в теореме 2 элемента $x_0\in X$ и числа $R=(\alpha-\beta)^{-1}d(\widehat{y},F(x_0,x_0))$ обозначим $\overline{x}_0=(x_0,R)\in\overline{X}$. Имеем

$$\overline{F}(\overline{x}_0,\overline{x}_0)=\big(F(x_0,x_0),(\alpha-\beta)R\big)=\big(F(x_0,x_0),d(\widehat{y},F(x_0,x_0))\big),$$

следовательно,

$$\big((\widehat{y},0),\overline{F}(\overline{x}_0,\overline{x}_0)\big)\in\omega.$$

Рассмотрим цепь $S\subset\overline{X}$, содержащую точку $\overline{x}_0$ (поэтому без ограничения общности можем полагать, что цепь S вложена в множество $\mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{x}_0):=\{(x,r)\,|\,\rho(x,x_0)\le R-r\}$). Пусть для этой цепи выполнено $S\in\Xi(\overline{F},(\widehat{y},0))$. Любой элемент $\overline{x}=(x,r)\in S$ удовлетворяет соотношению

$$\big((\widehat{y},0),\big((\alpha-\beta)r,F(x,x)\big)\big)\in\omega\ \Leftrightarrow\ d\big(\widehat{y},F(x,x)\big)\le(\alpha-\beta)r. \tag{3.2}$$

Вследствие упорядоченной полноты пространства $\overline{X}$ существует $\overline{v}=(v,\tau)=\inf S$. Если $\overline{v}\in S$, то $\big((\widehat{y},0),\big((\alpha-\beta)\tau,F(v,v)\big)\big)\in\omega$. Пусть $\overline{v}\notin S$. Согласно [12, Lemma 3] существует такая невозрастающая последовательность элементов $\overline{x}_i=(x_i,r_i)\in S$, что $\tau=\inf r_i$, $v=\lim_{i\to\infty}x_i$. Согласно определению совокупности $\Xi(\overline{F},(\widehat{y},0))$ для этой последовательности имеем

$$\exists\overline{\zeta}_i=(\zeta_i,t_i)\in\overline{X}\quad \overline{x}_{i+1}\le\overline{\zeta}_i\le\overline{x}_i,\quad F(\overline{x}_{i+1},\overline{\zeta}_i)=(\widehat{y},0).$$

Из полученных соотношений следует, что $\alpha r_{i+1}-\beta t_i=0$ и $t_i\le r_i$. Поэтому справедлива оценка

$$r_{i+1}=\frac{\beta}{\alpha}t_i\le\frac{\beta}{\alpha}r_i.$$

Таким образом, последовательность $\{r_i\}$ сходится к нулю, т. е. $\tau=0$. Теперь из соотношения (3.2) получаем $d\big(\widehat{y},F(x_i,x_i)\big)\le(\alpha-\beta)r_i\to 0$. А из этого соотношения и сходимости $x_i\to v$ следует $F(v,v)=\widehat{y}$, так как $(x_i,\widehat{y})\in\mathrm{Cl}[G]$. Итак, для нижней границы $\overline{v}=(v,0)$ цепи $S\in\Xi(\overline{F},(\widehat{y},0))$ выполнено $\big((\widehat{y},0),\overline{F}(\overline{v},\overline{v})\big)\in\omega$. Здесь $\overline{F}(\overline{v},\overline{v})=\big(F(v,v),0\big)$.

Теперь покажем, что для произвольного элемента $\overline{u}=(u,r)\in\mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{x}_0)$ (т. е. удовлетворяющего неравенству $\rho(x_0,u)\le R-r$) выполнено включение $(\overline{u},(\widehat{y},0))\in\mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[\overline{F}(\cdot,\overline{u})]$. Пусть $\big((\widehat{y},0),\big((\alpha-\beta)r,F(u,u)\big)\big)\in\omega$, т. е. выполнено неравенство $d(\widehat{y},F(u,u))\le(\alpha-\beta)r$. Так как $(u,\widehat{y})\in\mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot,u)]$, существует $x\in X$ такой, что

$$F(x,u)=\widehat{y},\quad \rho(x,u)\le\frac{1}{\alpha}d(\widehat{y},F(u,u))\le\frac{\alpha-\beta}{\alpha}r.$$

Положим $\overline{x} = (x, \alpha^{-1}\beta r)$. Для этого элемента, очевидно, выполнено

$$\overline{F}(\overline{x}, \overline{u}) = (\widehat{y}, 0), \quad \overline{x} \le \overline{u},$$

и таким образом включение $(\overline{u}, (\widehat{y}, 0)) \in \mathrm{Cov}^{\mathrm{P}}[\overline{F}(\cdot, \overline{u})]$ доказано.

Остается проверить справедливость включения $(\overline{u}, (\widehat{y}, 0)) \in \mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[\overline{F}(\overline{u}, \cdot)]$ при всех $\overline{u} = (u, r) \in \mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{x}_0)$. Пусть для $\overline{x} = (x, t) \in \overline{X}$ выполнено $\overline{F}(\overline{u}, \overline{x}) = (\widehat{y}, 0)$ и $\overline{u} \le \overline{x}$, т. е.

$$F(u, x) = \widehat{y}, \quad \alpha r - \beta t = 0, \quad \rho(u, x) \le t - r.$$

Так как $(u, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(u, \cdot)]$, получаем

$$d(\widehat{y}, F(u, u)) \le \beta\rho(x, u) \le \beta(t - r) = (\alpha - \beta)r,$$

а это означает, что выполнено соотношение $\big((\widehat{y}, 0), \overline{F}(\overline{u}, \overline{u})\big) \in \omega$. Таким образом, включение $(\overline{u}, (\widehat{y}, 0)) \in \mathrm{Dcr}^{\mathrm{P}}[\overline{F}(\overline{u}, \cdot)]$ доказано.

Итак, согласно теореме 4 уравнение (3.1) имеет решение $(\widehat{x}, 0)$, первая компонента которого $\widehat{x} \in B_X(x_0, R)$ является решением уравнения (0.2). Таким образом, утверждение теоремы 2 действительно следует из теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.** Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 613–634.
2. **Арутюнов А.В.** Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. АН. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
3. **Арутюнов А.В., Грешнов А.В.** (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. математическая. 2018. Т. 82. № 2. С. 3–32. doi: 10.4213/im8546 .
4. **Бенараб С., Жуковский Е.С.** Об условиях существования точек совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Вест. Тамбов. ун-та. Серия: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 121. С. 10–16. doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-10-16 .
5. **Бенараб С., Жуковский Е.С., Мерчела В.** Распространение теорем о возмущениях накрывающих отображений // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Междунар. конф., посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2019. С. 67–71.
6. **Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.** Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35. № 6 (216). С. 11–46.
7. **Жуковский Е.С.** Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, № 1. С. 96–127.
8. **Жуковский Е.С.** О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Мат. заметки. 2016. Т. 100. № 3. С. 344–362. doi: 10.4213/mzm10675 .
9. **Жуковский Е.С.** О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 2. С. 297–311. doi: 10.17377/smzh.2016.57.206 .
10. **Мерчела В.** К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств // Вест. Тамбов. ун-та. Сер.: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 121. С. 65–73. doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-65-73 .
11. **Плужникова Е.А., Жуковская Т.В., Моисеев Ю.А.** О множествах метрической регулярности отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Вест. Тамбов. ун-та. Сер.: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 123. С. 547–554. doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-547-554 .
12. **Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.** Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology Appl. 2015. Vol. 179, no. 1. P. 13–33. doi: 10.1016/j.topol.2014.08.013 .

13. **Bishop E., Phelps R.R.** The support functionals of a convex set // Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society. Vol. 7. P. 27–35. doi: 10.1142/9789814415514_0020 .
14. **DeMarr R.** Partially ordered spaces and metric spaces // Am. Math. Mon. 1965. Vol. 72, no. 6. P. 628–631. doi: 10.2307/2313852 .

Поступила 22.10.2019
После доработки 15.11.2019
Принята к публикации 18.11.2019

Бенараб Сарра
аспирант
Тамбовский гос. университет им. Г.Р. Державина
г. Тамбов
e-mail: benarab.sarraa@gmail.com

Жуковский Евгений Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор НИИ
Тамбовский гос. университет им. Г.Р. Державина
г. Тамбов
e-mail: zukovskys@mail.ru

Мерчела Вассим
аспирант
Тамбовский гос. университет им. Г.Р. Державина
г. Тамбов
e-mail: merchela.wassim@gmail.com

REFERENCES

1. Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S. Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative. *Differ. Equ.*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 627–649. doi: 10.1134/S0012266109050024 .
2. Arutyunov A.V. Covering mappings in metric spaces, and fixed points. *Dokl. Math.*, 2007, vol. 76, no. 2, pp. 665–668. doi: 10.1134/S1064562407050079 .
3. Arutyunov A.V., Greshnov A.V. (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 245–272. doi: 10.1070/IM8546 .
4. Benarab S., Zhukovskii E.S. On the conditions of existence coincidence points for mapping in partially ordered spaces. *Tambov University Reports.* Series: Natural and Technical Sciences, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 10–16. (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-10-16 .
5. Benarab S., Zhukovskii E.S., Merchela V. Some generalizations of overing mappings perturbation theorems. In: T. F. Filippova, V. I. Maksimov, A. M. Tarasyev (eds.), Stability, Control, Differential Games (SCDG2019): Proc. Internat. Conf. devoted to the 95th anniversary of Academician N.N. Krasovskii (Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019). Yekaterinburg, 2019, pp. 67–71 (in Russian).
6. Dmitruk A.V., Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. Lyusternik's theorem and the theory of extrema. *Russian Math. Surveys*, 1980, vol. 35, no. 6, pp. 11–51. doi: 10.1070/RM1980v035n06ABEH001973 .
7. Zhukovskiy E.S. On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities. *St. Petersburg Math. J.*, 2019, vol. 30, no. 1, pp. 73–94. doi: 10.1090/spmj/1530 .
8. Zhukovskiy E.S. On Coincidence points of multivalued vector mappings of metric spaces. *Math. Notes*, 2016, vol. 100, no. 3-4, pp. 363–379. doi: 10.1134/S0001434616090030 .
9. Zhukovskii E.S. Perturbations of vectorial coverings and systems of equations in metric spaces. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 230–241. doi: 10.1134/S0037446616020063 .
10. Merchela W. On Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces. *Tambov University Reports.* Series: Natural and Technical Sciences, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 65–73 (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-65-73 .

11. Pluzhnikova E.A., Zhukovskaya T.V., Moiseev Yu.A. On sets of metric regularity of mappings in spaces with vector-valued metric. *Tambov University Reports.* Series: Natural and Technical Sciences, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 547–554 (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-547-554 .
12. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications*, 2015, vol. 179, no. 1, pp. 13–33. doi: 10.1016/j.topol.2014.08.013 .
13. Bishop E., Phelps R.R. The support functionals of a convex set. In: *Convexity.* Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society, vol. 7, Providence: Amer. Math. Soc., 1963, pp. 27–35. doi: 10.1090/pspum/007/0154092 .
14. DeMarr R. Partially ordered spaces and metric spaces. *Am. Math. Mon.*, 1965, vol. 72, no. 6, pp. 628–631. doi: 10.2307/2313852 .

Received October 22, 2019
Revised November 15, 2019
Accepted November 18, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 17-01-00553, no. 17-41-680975, no. 17-51-12064).

Sarra Benarab, doctoral student, Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia, e-mail: benarab.sarraa@gmail.com .

Evgeny Semenovich Zhukovskiy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia, e-mail: zukovskys@mail.ru .

Wassim Merchela, doctoral student, Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia, e-mail: merchela.wassim@gmail.com .

Cite this article as: S. Benarab, E. S. Zhukovskii, W. Merchela. Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 52–63 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.54

О НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ 2-РАНГА ОДИН[1]

Б. Е. Дураков

Строение конечных групп 2-ранга 1 во многом определяется классическими теоремами Бернсайда и Брауэра–Судзуки. Бернсайд доказал, что в каждой конечной группе с циклической силовской 2-подгруппой все элементы нечетного порядка составляют нормальную подгруппу. С. И. Адян показал, что в классе периодических групп аналогичное утверждение неверно даже в случае, когда силовская 2-подгруппа имеет порядок 2 и совпадает с центром группы. Результаты Бернсайда, Брауэра и Судзуки можно сформулировать в виде одной теоремы: в конечной группе G 2-ранга 1 образ любой инволюции в фактор-группе $G/O(G)$ лежит в центре этой фактор-группы. Неизвестно, справедливо ли аналогичное утверждение, если G — периодическая группа (вопрос 4.75 В. П. Шункова из "Коуровской тетради"). Ответ неизвестен даже в случае, когда централизатор инволюции i — локально циклическая группа (вопрос 15.54 В. Д. Мазурова из "Коуровской тетради"). В теореме 1 статьи приводится частичный положительный ответ на вопрос 4.75 при дополнительном условии: в группе G инволюция i порождает с каждым элементов порядка, не делящегося на 4, конечную подгруппу. В частности, вопрос 4.75 решается положительно в классе бинарно конечных и сопряженно бинарно конечных групп. В теореме 2 статьи исследуется строение не локально конечной группы G с конечной инволюцией и инволюцией i, централизатор которой — локально циклическая 2-группа. Инволюция i группы G называется *конечной*, если для каждого $g \in G$ подгруппа $\langle i, i^g \rangle$ конечна. В частности, теорема 2 определяет структуру контрпримера (в предположении его существования) к вопросу 15.54.

Ключевые слова: группа 2-ранга 1, периодическая группа, локально конечная группа, конечная инволюция.

B. E. Durakov. On some groups of 2-rank 1.

The structure of finite groups of 2-rank 1 is largely defined by the classical Burnside and Brauer–Suzuki theorems. Burnside proved that all elements of odd order of a finite group with a cyclic 2-Sylow subgroup form a normal subgroup. S.I. Adyan showed that this statement does not hold in the class of periodic groups even in the case when a Sylow 2-subgroup has order 2 and coincides with the center of the group. The results of Burnside, Brauer, and Suzuki can be formulated as one theorem: in a finite group G of 2-rank 1, the image of any involution in the quotient group $G/O(G)$ lies in the center of this quotient group. It is unknown whether the same statement holds for a periodic group G (V.P. Shunkov's Question 4.75 from the "Kourovka Notebook"). There is no answer even when the centralizer of the involution i is a locally cyclic group (V.D. Mazurov's Question 15.54 from the "Kourovka Notebook"). In Theorem 1, we give a partial affirmative answer to Question 4.75 under an additional condition: in the group G an involution i generates a finite subgroup with any element of order not divisible by 4. In particular, Question 4.75 is solved positively in the classes of binary finite and conjugate binary finite groups. In Theorem 2, we study the structure of a nonlocally finite group G with a finite involution and an involution i whose centralizer is a locally cyclic 2-group. An involution i of a group G is called *finite* if the subgroup $\langle i, i^g \rangle$ is finite for every $g \in G$. In particular, Theorem 2 defines the structure of a counterexample (under the assumption of its existence) to Question 15.54.

Keywords: group of 2-rank 1, periodic group, locally finite group, finite involution.

MSC: 20F50, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-64-68

Введение

2-рангом группы G (конечной или бесконечной) называют максимум рангов ее элементарных абелевых 2-подгрупп [1, § 1.2]. К числу фундаментальных результатов о конечных группах 2-ранга 1 можно отнести теоремы Бернсайда [2, теорема 1.20(ii)] и Брауэра — Судзуки [3, Theorem 2]. Следуя Горенстейну [2, теорема 4.88], мы сформулируем их в виде следующей

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

теоремы Бернсайда — Брауэра — Судзуки. В ее формулировке и всюду далее $O(G)$ — максимальная нормальная в G периодическая подгруппа без инволюций.

Предложение 1 (теорема Бернсайда — Брауэра — Судзуки). *Пусть G — конечная группа, содержащая инволюцию i, и силовские 2-подгруппы группы G являются либо циклическими группами, либо (обобщенными) группами кватернионов. Тогда инволюция $iO(G)$ лежит в центре фактор-группы $G/O(G)$.*

В. П. Шунков доказал [1, теорема 2.15], что 2-группа с единственной инволюцией либо локально циклическая 2-группа, либо конечная или бесконечная (обобщенная) группа кватернионов. До сих пор не решен вопрос 4.75, поставленный В. П. Шунковым в 1973 г. в "Коуровской тетради" [4] о том, справедливо ли обобщение теоремы Бернсайда — Брауэра — Судзуки в классе периодических групп.

Вопрос 1 (В. П. Шунков [4, вопрос 4.75]). *Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию i, и силовские 2-подгруппы группы G являются либо локально циклическими группами, либо (обобщенными) группами кватернионов. Будет ли инволюция $iO(G)$ центральным элементом в $G/O(G)$?*

Ответ на этот вопрос неизвестен, даже если централизатор инволюции i — квазициклическая 2-группа (вопрос 15.54 В. Д. Мазурова из "Коуровской тетради" [4], поставленный в 2002 г.).

Вопрос 2 (В. Д. Мазуров [4, вопрос 15.54]). *Предположим, что периодическая группа G содержит инволюцию i, централизатор которой — локально циклическая 2-группа. Верно ли, что множество всех элементов нечетного порядка из G, инвертируемых инволюцией i, составляет подгруппу?*

Ответ на вопрос 2 положителен в случаях, когда G действует точно дважды транзитивно на множестве $G/C_G(i)$ смежных классов группы G по $C_G(i)$ [5] и когда подгруппа $C_G(i)$ не максимальна в G [6].

В статье приведены частичные решения вопросов 1 и 2 при дополнительных ограничениях на группу G. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — периодическая группа 2-ранга 1 и ее инволюция i порождает с каждым элементом, порядок которого не делится на 4, конечную подгруппу. Тогда $iO(G) \in Z(G/O(G))$.*

В частности, из теоремы 1 следует положительное решение вопроса 1 в классах бинарно конечных и сопряженно бинарно конечных групп (определения см. в [1]).

Инволюция i группы G называется *конечной*, если все подгруппы $\langle i, i^g \rangle$, где $g \in G$, конечны [7]. В периодической группе каждая инволюция конечна.

Теорема 2. *Пусть G — не локально конечная группа с конечной инволюцией и централизатор T некоторой ее инволюции i — локально циклическая 2-группа. Тогда T максимальна в G, группа G проста и изоморфна фактор-группе свободного произведения $X = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_n$ циклических групп порядка 2 и n для любого $n > 2$ из ее спектра.*

1. Доказательство теоремы 1

Будем обозначать через $J(G)$ множество инволюций группы G. Нам понадобятся следующие хорошо известные свойства групп диэдра (см., например, [8, лемма 2.8]). Пусть $D = \langle i, j \rangle$, где i и j — инволюции, $i \neq j$. Тогда i и j инвертируют элемент ij, $D = \langle ij \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle$, в случае четности числа $|ij|$ в D есть центральная инволюция $z \in \langle ij \rangle$, в случае нечетности числа $|ij|$

инволюции i и j сопряжены при помощи инволюции $k \in D$. D конечна тогда и только тогда, когда порядок $|ij|$ конечен; если в D есть конечная подгруппа диэдра, то D сама конечна.

Пусть группа G и ее инволюция i удовлетворяют условиям теоремы 1. Если j, k — инволюции из G, то подгруппа $\langle j, k\rangle$ по условию конечна. Порядок элемента jk нечетен, поскольку иначе по свойствам групп диэдра в $\langle j, k\rangle$ содержалась бы четверная подгруппа Клейна 2-ранга 2. Поэтому по свойствам групп диэдра инволюции j и k сопряжены, а в силу произвольности выбора j и k все инволюции в G сопряжены и $J(G) = i^G$.

Пусть X — множество всех элементов из G, имеющих нечетный порядок, а Y — множество всех элементов из G, имеющих порядок вида $2(2n-1)$, $n \in \mathbb{N}$. Ввиду условий теоремы для любого $x \in X$ подгруппа $H_x = \langle x, i\rangle$ конечна. Поскольку образы $\overline{i}$ и $\overline{x}$ элементов i и x в фактор-группе $\overline{H_x} = H_x/O(H_x)$ в силу предложения 1 перестановочны, а порядки их взаимно просты, то $|\overline{i}\overline{x}| = 2|\overline{x}|$. Так как порядок $O(H_x)$ нечетен, то прообраз $ix \in G$ элемента $\overline{i}\overline{x}$ лежит в Y.

Аналогично, для любого $y \in Y$ подгруппа $H_y = \langle y, i\rangle$ по условию теоремы конечна. Обозначим теперь через $\overline{i}$ и $\overline{y}$ образы элементов i и y в фактор-группе $\overline{H_y} = H_y/O(H_y)$ соответственно. По второй теореме Силова [9, теорема 4.2.2] из сопряженности всех силовских 2-подгрупп в H_y и единственности инволюций в них следует сопряженность инволюций в H_y. Поэтому все инволюции в $\overline{H_y}$ сопряжены, а поскольку $\overline{i} \in Z(\overline{H_y})$ по предложению 1, то $J(\overline{H_y}) = \{\overline{i}\}$. Так как $y \in Y$, то $|\overline{y}| = 2(2k-1)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\overline{y}^{2k-1}$ — инволюция и по доказанному она равна $\overline{i}$. Поэтому $|\overline{i}\overline{y}| = 2k-1$. Отсюда из нечетности числа $|O(H_y)|$ следует, что $iy \in X$.

Таким образом, $iX \subseteq Y$ и $iY \subseteq X$, откуда следуют равенства $iX = Y$ и $iY = X$. Поэтому для каждого $g \in G$ верны равенства $(iX)^g = Y^g$ и $(iY)^g = X^g$, откуда в силу инвариантности множеств X и Y получаем $i^gX = Y$ и $i^gY = X$. Поскольку элемент g был выбран произвольно, то $jX = Y$ и $jY = X$ для любой инволюции $j \in i^G$.

Из вышеизложенного следует, что подгруппа $B = \langle i^G\rangle$ умножениями слева транзитивно действует на множестве $\{X, Y\}$. А именно, те элементы из B, которые представляются произведением четного числа инволюций, оставляют множества X и Y на месте умножениями слева и, следовательно, составляют подгруппу H — стабилизатор точек X и Y [9, теорема 5.2.1], где

$$H = \langle jk \mid j, k \in i^G\rangle = \{h \in B \mid hX = X,\ hY = Y\}.$$

Все оставшиеся элементы из B, являющиеся произведениями нечетного числа инволюций, умножением слева переставляют множества X и Y и составляют смежный класс Hi [9, теорема 5.3.1].

Таким образом, $B = H \leftthreetimes \langle i\rangle$. Подгруппы H и B порождаются инвариантными множествами и, следовательно, нормальны в G. Поэтому в фактор-группе $\overline{G} = G/H$ образ подгруппы B — нормальная подгруппа $\overline{B}$, изоморфная по свойствам полупрямого произведения [10, гл. 10, § 1] подгруппе $\langle i\rangle$. Следовательно, $\overline{B}$ порождается образом $\overline{i}$ инволюции i, и $\overline{i} \in Z(\overline{G})$. Если $O(G) = H$, то теорема доказана; если же $O(G) > H$, то $G/O(G) \simeq (G/H)/(O(G)/H)$ [11, гл. 2, §10], а поскольку группа $\overline{O(G)} = O(G)/H$ нечетного порядка, то образ инволюции $\overline{i}$ в фактор-группе $\overline{G}/\overline{O(G)}$ является инволюцией $iO(G)$. Подгруппа $\langle iO(G)\rangle$ нормальна в $\overline{G}/\overline{O(G)}$ как образ нормальной подгруппы $\overline{B}$ [11, гл. 2, § 10]. Следовательно, инволюция $iO(G)$ лежит в центре фактор-группы $\overline{G}/\overline{O(G)} \simeq G/O(G)$, и теорема доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Пусть группа G, ее инволюция i и подгруппа $T = C_G(i)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Если T не максимальна в G, то по теореме А. И. Созутова [6] G локально конечна, что противоречит условию теоремы. Следовательно, T максимальна в G. Если для некоторого неединичного элемента $x \notin i^G$ подгруппы $\langle i, x^g\rangle$ для каждого $g \in G$ конечны, то G локально конечна [8, теорема 2.12] вопреки условиям. Следовательно, в каждом неединичном классе x^G, отличном от i^G, найдется элемент a такой, что подгруппа $K = \langle i, a\rangle$ бесконечна. Тогда очевидно, что $a \notin T$ и $K \neq T$.

Если $K > T$, то в силу максимальности T имеем $K = G$. Пусть теперь $K \not> T$. Поскольку $i \in K$, то $H = K \cap T > 1$, и в силу строения локально циклической 2-группы T подгруппа H конечна. Инволюция i конечна в K, поскольку она конечна в G, и по теореме В. В. Беляева [12] группа K локально конечна и в силу своей двупорожденности конечна. Получившееся противоречие доказывает, что $G = \langle i, a\rangle$. В силу того, что элемент x мы можем взять любого порядка $n > 2$ из спектра группы, этим доказано третье утверждение теоремы.

Докажем теперь от противного, что группа G проста. Пусть $H \lhd G$. Если $i \in H$, то поскольку в централизаторе инволюции i нет четверных подгрупп Клейна, по свойствам групп диэдра для всякой инволюции $j \in i^G \setminus \{i\}$ произведение ij имеет нечетный порядок, и класс сопряженных с jk элементов содержится в подгруппе H в силу ее нормальности в G. Следовательно, H содержит отличные от $\{1\}$ и i^G классы сопряженных элементов. В каждом из таких классов x^G по доказанному найдется такой элемент a, что $G = \langle i, a\rangle$. Но тогда $H = G$; противоречие.

Если теперь $i \notin H$, то $C_H(i) = H \cap T = 1$. Кроме того, как и в предыдущем случае, в H найдется такой элемент a, что $G = \langle i, a\rangle$. Имеем $G = \langle H, i\rangle = H \leftthreetimes \langle i\rangle$. Но тогда $T = C_G(i) = \langle i\rangle \cdot C_H(i) = \langle i\rangle$; противоречие. Следовательно, G проста, и тем самым теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Изд-во Сиб. федер. ун-та, 2011. 149 с.
2. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Москва: Мир, 1985. 352 с.
3. **Brauer R., Suzuki M.** On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1959. Vol. 45, no. 12. P. 1757–1759. doi: 10.1073/pnas.45.12.1757.
4. Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook / eds. E.I. Khukhro, V.D. Mazurov: [e-resource]. 248 p. Available at: *ArXiv*:1401.0300v13 [math.GR] June 2018.
5. **Сучков Н.М.** О конечности некоторых точно дважды транзитивных групп // Алгебра и логика. 2001. Vol. 40, № 3. С. 190–193.
6. **Созутов А.И.** О группах с квазициклическим централизатором конечной инволюции // Сиб. мат. журн. 2016. Vol. 57, no. 5. С. 1127–1130.
7. **Созутов А.И.** О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. 2000. Vol. 39, № 5. С. 602–617.
8. **Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П.** Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: ИПЦ Краснояр. гос. техн. ун-та, 2004. 211 с.
9. **Холл М.** Теория групп. Москва: ИЛ, 1962. 468 с.
10. **Винберг Э.Б.** Курс алгебры. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Факториал Пресс, 2001. 544 с.
11. **Курош А.Г.** Теория групп. 3-е изд. Москва: Наука, 1967. 648 с.
12. **Беляев В.В.** Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1987. Vol. 26, no. 5. С. 531–535.

Поступила 5.08.2019
После доработки 26.09.2019
Принята к публикации 30.09.2019

Дураков Борис Евгеньевич
аспирант
Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: durakov96@gmail.com

REFERENCES

1. Sozutov A.I., Suchkov N.M., and Suchkova N.G. *Beskonechnye gruppy s involyutsiyami* [Infinite Groups with Involutions]. Krasnoyarsk: Sib. Fed. Univ. Press, 2011, 149 p. ISBN: 978-5-7638-2127-7 .
2. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification.* University Series in Mathematics, N Y: Plenum Publishing Corp., 1982, 333 p. ISBN: 0-306-40779-5 . Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu*, Moscow: Mir Publ., 1985, 352 p.
3. Brauer R., Suzuki M. On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1959, vol. 45, no. 12, pp. 1757–1759. doi: 10.1073/pnas.45.12.1757 .
4. Khukhro E.I., Mazurov V.D. (eds.) *Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook.* 248 p. Available at: *ArXiv*:1401.0300v13 [math.GR] June 2018.
5. Suchkov N.M. Finiteness of some sharply doubly transitive groups. *Algebra and Logic*, 2001, vol. 40, no. 3, pp. 190–193. doi: 10.1023/A:1010216519782 .
6. Sozutov A.I. Groups with the quasicyclic centralizer of a finite involution. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 5, pp. 881–883. doi: 10.1134/S0037446616050189 .
7. Sozutov A.I. On some infinite groups with a strongly embedded subgroup. *Algebra and Logic*, 2000, vol. 39, no. 5, pp. 345–353. doi: 10.1007/BF02681619 .
8. Popov A.M., Sozutov A.I., Shunkov V.P. *Gruppy s sistemami frobeniusovykh podgrupp* [Groups with systems of Frobenius subgroups]. Krasnoyarsk: KSTU Publ., 2004, 211 p. ISBN: 5-7636-0654-X .
9. Hall M. *The theory of groups.* N Y: The Macmillan Co., 1959, 434 p. ISBN: 9780486816906 . Translated to Russian under the title *Teoriya grupp.* Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962, 468 p.
10. Vinberg E.B. *A course in algebra.* Graduate Studies in Mathematics, 56. Providence, RI: AMS, 2003, 511 p. ISBN: 978-0821834138 . Translated to Russian under the title *Kurs algebry.* Moscow: Faktorial Press, 2001, 544 p.
11. Kurosh A.G. *The theory of groups.* Transl. from the 2nd Russian ed., N Y: Chelsea Publishing Co., 1960, vol. 1: 272 p., ISBN: 978-0828401074 , vol. 2: 308 p. ISBN: 978-0821834770 . Original Russian text (3rd ed.) published in Kurosh A.G. *Teoriya grupp.* Moscow: Nauka Publ., 1967, 648 p.
12. Belyaev V.V. Groups with an almost-regular involution. *Algebra and Logic*, 1987, vol. 26, no. 5, pp. 315–317. doi: 10.1007/BF01978688 .

Received August 5, 2019
Revised September 26, 2019
Accepted September 30, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00566 A).

Boris Evgenievich Durakov, doctoral student, Institute of Mathematics and Computer Science of the Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: durakov96@gmail.com .

Cite this article as: B. E. Durakov. On some groups of 2-rank 1, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 64–68 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.16+519.85

КВАДРАТИЧНАЯ ЕВКЛИДОВА ЗАДАЧА 2-КЛАСТЕРИЗАЦИИ 1-MEAN И 1-MEDIAN С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАЗМЕРЫ КЛАСТЕРОВ: СЛОЖНОСТЬ И АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ[1]

А. В. Кельманов, А. В. Пяткин, В. И. Хандеев

В работе рассматривается задача кластеризации N-элементного множества точек в d-мерном евклидовом пространстве на два кластера. В этой задаче требуется найти 2-разбиение, минимизирующее сумму (по обоим кластерам) внутрикластерных квадратичных разбросов точек относительно искомых центров. Центр одного кластера определяется как центроид (геометрический центр), а центр другого кластера является искомой точкой во входном множестве. Анализируется вариант задачи, в котором размеры (т. е. мощности) кластеров заданы, а их суммарный размер совпадает с размером входного множества. Доказано, что задача NP-трудна в сильном смысле. Установлено, что для нее не существует полностью полиномиальной аппроксимационной схемы, если P$\neq$ NP.

Ключевые слова: евклидово пространство, кластеризация, 2-разбиение, квадратичный разброс, центр, центроид, медиана, сильная NP-трудность, несуществование полностью полиномиальной приближенной схемы, эффективная сводимость с сохранением точности.

A. V. Kel'manov, A. V. Pyatkin, V. I. Khandeev. Quadratic Euclidean 1-Mean and 1-Median 2-Clustering Problem with constraints on the size of the clusters: Complexity and approximability.

We consider the problem of partitioning a set of N points in d-dimensional Euclidean space into two clusters minimizing the sum of the squared distances between each element and the center of the cluster to which it belongs. The center of the first cluster is its centroid (the geometric center). The center of the second cluster should be chosen among the points of the input set. We analyze the variant of the problem with given sizes (cardinalities) of the clusters; the sum of the sizes equals the cardinality of the input set. We prove that the problem is strongly NP-hard and there is no fully polynomial-time approximation scheme for its solution.

Keywords: Euclidean space, clustering, 2-partition, quadratic variation, center, centroid, median, strong NP-hardness, nonexistence of FPTAS, approximation-preserving reduction.

MSC: 68W25, 68Q25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-69-78

Введение

Предметом исследования в этой работе является экстремальная задача разбиения конечного множества точек евклидова пространства на два кластера. Цель — анализ вычислительной сложности задачи и выяснение некоторых вопросов ее аппроксимируемости.

Исследование мотивировано неизученностью задачи в математическом плане. А именно, до настоящего времени статус ее вычислительной сложности не был установлен. К тому же вопросы ее алгоритмической аппроксимируемости не были выяснены. Кроме того, задача актуальна не только для дискретной оптимизации, но также, в частности, для компьютерной геометрии и математической статистики. С практической точки зрения рассматриваемая задача важна, например, для решения известной междисциплинарной проблемы интерпретации данных (Data mining).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 19-01-00308 и 18-31-00398, программы ФНИ РАН, проекты 0314-2019-0014, 0314-2019-0015, а также программы Top-5-100 Министерства образования и науки РФ.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 1 даны формулировки названной задачи и нескольких задач, которые в математическом плане близки к ней. В этом же разделе приведены некоторые трактовки задачи и замечания, поясняющие мотивацию настоящего исследования. В следующем разделе анализируется вычислительная сложность задачи. В разд. 3 рассматривается вопрос о существовании полностью полиномиальной аппроксимационной схемы (FPTAS), а также вопросы аппроксимируемости задачи алгоритмами для решения известной задачи.

1. Формулировка задачи и близкие по постановке задачи

Всюду далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Рассматриваемая задача имеет следующую формулировку.

Задача 1 (*Quadratic* 1-*Mean and* 1-*Median* 2-*Clustering with the Constraints on the Cluster Sizes*).

Дано: N-элементное множество $\mathcal{Y}$ точек в d-мерном евклидовом пространстве и натуральное число M. Найти такие точку $x \in \mathcal{Y}$ и разбиение $\mathcal{Y}$ на кластеры $\mathcal{C}$ и $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}$ размеров M и $N - M$ соответственно, что

$$f(\mathcal{C}, x) = \sum_{y \in \mathcal{C}} \|y - \overline{y}(\mathcal{C})\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}} \|y - x\|^2 \to \min, \tag{1}$$

где

$$\overline{y}(\mathcal{C}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{y \in \mathcal{C}} y \text{ — центроид (геометрический центр) кластера } \mathcal{C}.$$

Ниже приведены известные задачи, математические формулировки которых наиболее близки к задаче 1. В этих задачах целевые функции отличны от целевой функции задачи 1, а входы идентичны входу этой задачи. Отличие целевых функций в этих задачах определяется (см. далее) центрами квадратичного разброса точек искомых кластеров. В задаче 1 два оптимизируемых (неизвестных) центра разброса. Один из них — точка $\overline{y}(\mathcal{C})$ в $\mathbb{R}^d$, а другой — точка x в $\mathcal{Y}$.

Следующие три задачи 2-кластеризации относятся к числу известных и близких по постановке к задаче 1.

Задача 2 (2-*Means Clustering with the Constraints on the Cluster Sizes*).

Дано: N-элементное множество $\mathcal{Y}$ точек в d-мерном евклидовом пространстве и натуральное число M. Найти такое разбиение $\mathcal{Y}$ на кластеры $\mathcal{C}$ и $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}$ размеров M и $N - M$ соответственно, что

$$\sum_{y \in \mathcal{C}} \|y - \overline{y}(\mathcal{C})\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}} \|y - \overline{y}(\mathcal{Y} \setminus \mathcal{C})\|^2 \to \min_{\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}},$$

где $\overline{y}(\mathcal{C})$ и $\overline{y}(\mathcal{Y} \setminus \mathcal{C})$ — центроиды кластеров $\mathcal{C}$ и $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}$ соответственно.

В этой задаче центрами квадратичного разброса точек являются центроиды (в $\mathbb{R}^d$) искомых кластеров. Сильная NP-трудность задачи следует из сильной NP-трудности (см. [1]) задачи 2-*Means* (без ограничений на мощности кластеров). Действительно, полиномиальная разрешимость 2-*Means with the Constraints on the Cluster Sizes* влекла бы полиномиальную разрешимость задачи 2-*Means*. Достаточно было бы перебрать за полиномиальное время конечное число точных допустимых решений задачи для каждого M.

Задача 3 (*Quadratic* 2-*Medians Clustering with the Constraints on the Cluster Sizes*).

Дано: N-элементное множество $\mathcal{Y}$ точек в d-мерном евклидовом пространстве и натуральное число M. Найти такие точки $x, z \in \mathcal{Y}$ и разбиение $\mathcal{Y}$ на кластеры $\mathcal{C}$ и $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}$ размеров M и $N - M$ соответственно, что

$$\sum_{y \in \mathcal{C}} \|y - x\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}} \|y - z\|^2 \to \min .$$

Эта задача сходна с известной (см., например, [2]) задачей 2-*Medians* минимизации суммы $\sum\limits_{y\in\mathcal{C}}\|y-x\|+\sum\limits_{y\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}}\|y-z\|$. Легко видеть, что задача 3 разрешима за время $\mathcal{O}(dN^3)$. Достаточно перебрать N^2 пар точек x, z, для каждой пары найти допустимое решение и в полученном семействе найти наилучшее. Допустимое решение строится за $\mathcal{O}(dN)$ операций: 1) проектируем все точки множества $\mathcal{Y}$ на прямую, соединяющую точки x и z; 2) разбиваем индуцированный этим проектированием отрезок на два примыкающих отрезка по M и $N-M$ точек.

З а д а ч а 4 (1-*Mean and Given* 1-*Center with the Constraints on the Cluster Sizes*).

Дано: N-элементное множество $\mathcal{Y}$ точек в d-мерном евклидовом пространстве и натуральное число M. Найти разбиение $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества $\mathcal{C}$ и $\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}$ размеров M и $N-M$ соответственно такие, что

$$g(\mathcal{C})=\sum_{y\in\mathcal{C}}\|y-\overline{y}(\mathcal{C})\|^2+\sum_{y\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}}\|y\|^2\to\min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{C})$ — центроид подмножества $\mathcal{C}$.

В этой задаче неизвестен только один центр квадратичного разброса точек. Этот центр $\overline{y}(\mathcal{C})$ является центроидом искомого кластера $\mathcal{C}$. Центр квадратичного разброса точек второго кластера $\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}$ совпадает с началом координат. Заметим, что задача с центром разброса, который задан в некоторой точке $x\in\mathbb{R}^d$, не равной 0, очевидно, полиномиально сводится к этой задаче. Достаточно перенести в точку x начало координат и пересчитать координаты точек входного множества. Сильная NP-трудность этой задачи следует из равенства

$$g(\mathcal{C})=\sum_{y\in\mathcal{Y}}\|y\|^2-\frac{1}{|\mathcal{C}|}\Big\|\sum_{y\in\mathcal{C}}y\Big\|^2,$$

в котором первый член в правой части не зависит от $\mathcal{C}$, и сильной NP-трудности (см. [3–5]) известной задачи *Longest M-Vector Sum*. Напомним, что в этой задаче дано N-элементное множество $\mathcal{Y}$ точек в евклидовом пространстве размерности d и натуральное число M. Требуется найти подмножество $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{Y}$ размера M, доставляющее максимум норме $\|\sum\limits_{y\in\mathcal{C}}y\|$ суммы элементов из этого подмножества.

Все приведенные экстремальные задачи, включая задачу 1, имеют геометрический характер, который ясен непосредственно из их формулировок. В каждой из задач 1–4 оптимальному разбиению на кластеры соответствует разделяющая поверхность. Этими поверхностями являются оптимальные гиперплоскости, которые перпендикулярны отрезку, соединяющему центры квадратичного разброса. Этот факт легко устанавливается при анализе структурных свойств оптимальных решений задач. Поэтому все задачи можно трактовать как поиск оптимальной гиперплоскости, разделяющей на две части входное множество точек.

Заметим, что построение оптимальных разделяющих поверхностей по имеющимся данным — типичная прикладная проблема машинного обучения (Machine learning), распознавания образов (Pattern recognition) и кластеризации данных (Data clustering) (см. [6–8] соответственно). В отмеченных приложених эта проблема возникает всякий раз, когда в руках у исследователя-прикладника оказываются данные с неясной структурой.

Выяснение структуры данных с помощью так называемого разведочного поиска подходящего (адекватного) описания (т. е. интерпретации) данных в виде модели порождения данных типичен для прикладных проблем Data mining (см. [9]) и математической статистики. В классической статистике, в отличие от Data mining, предполагается, что данные однородны, т. е. являются выборкой из одного распределения. Напротив, в Data mining предполагается, что данные неоднородны, т. е. являются выборкой из нескольких распределений, причем априорное соответствие данных распределениям неизвестно. Из-за отсутствия этого соответствия создаются математические инструменты в виде эффективных алгоритмов решения необозримого множества задач разбиения данных с самой разнообразной структурой на однородные по какому-либо фиксированному критерию кластеры, а также инструменты в виде критериев проверки адекватности аппроксимационных моделей разбиения имеющимся данным. Например, чтобы выяснить, какая из сформулированных выше задач (моделей аппроксимации) разбиения адекватна данным (входному множеству точек) или ни одна из них не адекватна данным, в первую очередь необходимы эффективные алгоритмы решения этих кластеризационных задач. Очевидно, что создание эффективных в вычислительном плане алгоритмов является одной из ключевых проблем для Data mining. В свою очередь, создание таких алгоритмов обусловливает исследование сложностного статуса задач разбиения. Приведенные замечания поясняют мотивацию настоящей статьи. Фактически наша работа отвечает на вопрос, можно ли эффективно (за полиномиальное) время разбить имеющиеся данные в соответствии с (1).

В заключение этого раздела подчеркнем, что рассматриваемая задача 1 не эквивалентна ни одной из приведенных выше близких по постановке кластеризационных задач. Насколько нам известно, она не входит в список других изучавшихся ранее задач дискретной оптимизации. К тому же она не является ни частным случаем, ни обобщением какой-либо из этих задач. Поэтому вопрос о статусе сложности задачи 1 требует отдельного исследования.

2. Анализ вычислительной сложности

Как известно (см., например, [10]), для любого конечного множества точек $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^d$ справедливо равенство

$$\sum_{z\in\mathcal{Z}} \|z - \overline{z}(\mathcal{Z})\|^2 = \frac{1}{2|\mathcal{Z}|}\sum_{y\in\mathcal{Z}}\sum_{z\in\mathcal{Z}} \|y - z\|^2, \tag{2}$$

где $\overline{z}(\mathcal{Z})$ — центроид множества $\mathcal{Z}$. Используя это равенство, запишем целевую функцию (1) в эквивалентном виде и сформулируем задачу 1 в форме верификации свойств.

З а д а ч а 1A. Дано: N-элементное множество $\mathcal{Y}$ точек в d-мерном евклидовом пространстве, натуральное $M < N$ и число $B > 0$. Вопрос: существуют ли в $\mathcal{Y}$ такие кластер $\mathcal{C}$ размера M и точка $x \in \mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$f(\mathcal{C}, x) = \frac{1}{2|\mathcal{C}|}\sum_{y\in\mathcal{C}}\sum_{z\in\mathcal{C}} \|y - z\|^2 + \sum_{y\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}} \|y - x\|^2 \le B\,? \tag{3}$$

Напомним следующую NP-полную задачу (см. [11]).

З а д а ч а Клика (*Clique*). Дано: n-вершинный граф $G = (V, E)$ и положительное число K. Вопрос: Существует ли в графе G клика размера не меньше K?

Для выяснения вопроса о сложности рассматриваемой задачи нам потребуется специальный случай задачи *Clique* для однородного графа, степень Δ которого не фиксирована. Эта задача также относится к числу NP-полных задач (см. [12]).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Задача* 1A *NP-полна в сильном смысле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы построим полиномиальное сведение задачи *Clique* в однородном графе к задаче 1A.

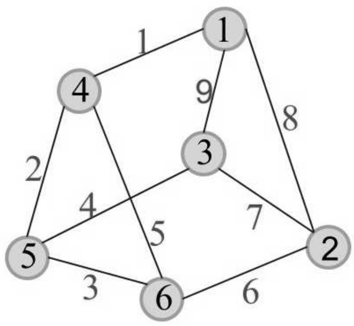
Рассмотрим однородный граф $G = (V, E)$ степени Δ на n вершинах. Будем считать, что $\Delta > 2$ и $n - K > 1$, так как в противном случае задача *Clique*, очевидно, решается за полиномиальное время.

По произвольному входу задачи *Clique* построим следующий пример входа задачи 1A. В задаче 1A положим

$$d = |E|, \quad N = n+1, \quad M = K, \quad B = (n-1)\Delta - K + 1, \quad y_N = 0; \quad y_i = a_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где a_i — i-я строка матрицы $A = \{a_{i,j}\}$ $(i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, d)$ — инцидентности графа G, в которой $a_{i,j} = 1$, если j-е ребро графа G инцидентно вершине v_i, и $a_{i,j} = 0$ в противном случае.

Для пояснения ниже приведен пример 3-регулярного графа G на шести вершинах с девятью ребрами и матрица A для этого графа:



3-регулярный граф на шести вершинах.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица A для графа слева.

Ввиду однородности графа G имеем следующие свойства элементов в построенном примере множества $\mathcal{Y}$:

$$\|y_i - y_j\|^2 = \begin{cases} 2\Delta - 2, \text{ если ребро } v_i v_j \in E(G), \\ 2\Delta \text{ в противном случае}, \end{cases} \qquad 1 \le i < j \le n. \tag{5}$$

$$\|y_i - y_N\|^2 = \Delta, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Кроме того, заметим, что по построению любому кластеру $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y} \setminus \{y_N\}$ однозначно соответствует подмножество $V_C \subseteq V$ вершин графа G.

I. Допустим сначала, что в задаче *Clique* подмножество V_C вершин образует клику размера K. В задаче 1A в качестве центра кластера $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}$ выберем точку $x = y_N$. При этом выборе из (3)–(6) для целевой функции задачи 1A в построенном примере имеем

$$f(\mathcal{C}, x) = \frac{1}{2|\mathcal{C}|} \sum_{y_i \in \mathcal{C}} \sum_{y_j \in \mathcal{C}} \|y_i - y_j\|^2 + \sum_{y_i \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}} \|y_i - y_N\|^2$$
$$= \frac{1}{2M} M(M-1)(2\Delta - 2) + (n - M)\Delta = n\Delta - \Delta - M + 1 = B.$$

Это значит, что условие (3) выполнено в виде равенства, т. е. в примере задачи 1A найдутся соответствующие этому условию кластер $\mathcal{C}$ размера $M = K$ и точка $x = y_N$, если в задаче *Clique* существует клика размера K.

II. Допустим теперь, что в построенном примере задачи 1A существуют некоторый кластер $\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}$ размера $M = K$ и точка $x \in \mathcal{Y}$ такие, что $f(\mathcal{C}, x) \le B$.

Сначала покажем от противного, что в этом случае $y_N \notin \mathcal{C}$. Опираясь на свойства (5), (6) элементов в построенном примере множества $\mathcal{Y}$, найдем следующую оценку для первого слагаемого целевой функции задачи 1A

$$\frac{1}{2|\mathcal{C}|} \sum_{y_i \in \mathcal{C}} \sum_{y_j \in \mathcal{C}} \|y_i - y_j\|^2 \ge \frac{1}{2M} \big((M-1)(M-2)(2\Delta - 2) + 2(M-1)\Delta \big)$$
$$= \frac{\Delta - 2}{M} + M\Delta - M - 2\Delta + 3 = \frac{\Delta - 2}{M} + B + M\Delta - n\Delta - \Delta + 2$$
$$= \frac{\Delta - 2}{M} + B - (n - M + 1)\Delta + 2 > B - (n - M + 1)\Delta + 2. \tag{7}$$

Далее, в случае $y_N \in \mathcal{C}$, $x = y_N$ для второго слагаемого целевой функции задачи 1A справедлива оценка

$$\sum_{y_i \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}} \|y_i - x\|^2 \geq (n - M + 1)\Delta. \tag{8}$$

Объединяя (7) и (8), получим, что если $y_N \in \mathcal{C}$, $x = y_N$, то для целевой функции задачи 1A выполнено

$$f(\mathcal{C}, x) \geq B - (n - M + 1)\Delta + 2 + (n - M + 1)\Delta = B + 2 > B,$$

что противоречит условию $f(\mathcal{C}, x) \leq B$.

В случае $y_N \in \mathcal{C}$, $x \neq y_N$ для второго слагаемого целевой функции задачи 1A имеем оценку

$$\sum_{y_i \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}} \|y_i - x\|^2 \geq (n - M)(2\Delta - 2). \tag{9}$$

Объединяя (7) и (9), получим оценку

$$f(\mathcal{C}, x) \geq B - (n - M + 1)\Delta + 2 + (n - M)(2\Delta - 2) = B + (n - M - 1)(\Delta - 2) > B,$$

которая также противоречит условию $f(\mathcal{C}, x) \leq B$. Таким образом, $y_N \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}$.

Наконец, допустим, что в задаче *Clique* подмножество $V_C \subseteq V$ содержит k пар несмежных вершин. Тогда для кластера $\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}$ из (5) и (6) для целевой функции задачи 1A имеем

$$f(\mathcal{C}, x) \geq \frac{1}{2M}\big(M(M-1)(2\Delta - 2) + 4k\big) + (n - M)\Delta = B + \frac{2k}{M},$$

что при $k > 0$ противоречит сделанному предположению $f(\mathcal{C}, x) \leq B$. Следовательно, $k = 0$, а это значит, что множество V_C образует клику. Иными словами, если в построенном примере задачи 1A существуют некоторые кластер $\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}$ размера M и точка $x \in \mathcal{Y}$ такие, что $f(\mathcal{C}, x) \leq B$, то и в задаче *Clique* существует клика размера $K = M$.

Таким образом, из п. I и п. II следует, что в построенном примере задачи 1A кластер $\mathcal{C}$ размера M и точка x, удовлетворяющие условию (1), существуют тогда и только тогда, когда в задаче *Clique* существует клика размера $K = M$.

Остается заметить, что поскольку координаты точек y_i, а также числа B и M в построенном сведении ограничены полиномом от размера графа, в соответствии с [11] задача 1A NP-полна в сильном смысле.

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует, что оптимизационная задача 1 NP-трудна в сильном смысле.

3. Алгоритмическая аппроксимируемость

Мы показали, что задача 1 NP-трудна в сильном смысле. Из этого результата, как известно, следует, что для этой задачи не существует точного псевдополиномиального алгоритма, если только классы P и NP не совпадают. Однако эта задача имеет числовые входы. Поэтому важный вопрос о существовании для нее полностью полиномиальной аппроксимационной схемы (FPTAS) требует дополнительного анализа (в соответствии, например, с [11; 13]). На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 2. *Если P≠NP, то для задачи* 1 *не существует схемы* FPTAS.

Доказательство. Согласно [11; 13] для доказательства нам достаточно показать справедливость двух условий: (a) для целочисленных входных данных значение целевой функции задачи 1 целочисленно, (b) это значение ограничено полиномом от входных целочисленных значений.

Умножив обе части (1) на $2|\mathcal{C}|$ и применив тождество (2), получим

$$2|\mathcal{C}|f(\mathcal{C},x) = \sum_{y\in\mathcal{C}}\sum_{z\in\mathcal{C}}\|y-z\|^2 + 2|\mathcal{C}|\sum_{y\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}}\|y-x\|^2. \tag{10}$$

Рассмотрим задачу поиска подмножества $\mathcal{C}\subset\mathcal{Y}$ размера M и точки $x\in\mathcal{Y}$, для которых значение правой части (10) минимально. Поскольку $|\mathcal{C}|=M$, эта задача эквивалентна задаче 1, а значит в силу теоремы 1 является NP-трудной в сильном смысле.

Далее, легко видеть, что значение целевой функции этой задачи целочисленно при целочисленных входных данных, т. е. условие (a) выполнено. Кроме того, очевидно, что в этой задаче значение целевой функции ограничено полиномом от максимального (по всем точкам входного множества и их координатам) абсолютного значения целочисленной координаты, т. е. условие (b) также выполнено. Поэтому для этой задачи не существует схемы FPTAS, если P≠NP. Следовательно, если P≠NP, то и для эквивалентной задачи 1 также не существует схемы FPTAS.

Теорема 2 доказана.

Вопрос об аппроксимируемости задачи другими видами алгоритмов раскрывает следующее утверждение.

Утверждение. *Задача* 1 *эффективно аппроксимируема алгоритмами решения задачи* 4 *с той же точностью и вероятностью несрабатывания.*

Доказательство. Действительно, очевидно, что эффективные алгоритмы решения задачи 4 легко переносятся на решение задачи 1. А именно, для этого достаточно: 1) перебрать N кандидатов, т. е. точек множества $\mathcal{Y}$, на роль центра разброса точек в кластере $\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}$; 2) перенести начало координат в перебираемые точки-кандидаты и получить таким образом входы задачи 4; 3) найти приближенное решение задачи 4 с помощью какого-либо из существующих эффективных алгоритмов; 4) в семействе допустимых решений-кандидатов, полученных путем последовательного выполнения отмеченных пп. 1)–3), найти наилучшее в смысле наименьшего значения целевой функции задачи 1.

Утверждение доказано.

Это простое утверждение позволяет применять существующие алгоритмические результаты для известной задачи 4 к рассмотренной в настоящей работе задаче 1. Среди этих результатов отметим, в частности, 2-приближенный полиномиальный алгоритм [14], полиномиальную аппроксимационную схему (PTAS) [15], рандомизированный алгоритм [16] и схему PTAS для случая, когда размерность пространства является медленно растущей функцией от размера входного множества [17].

Заключение

В работе доказана сильная NP-трудность ранее не исследованной квадратичной задачи 2-кластеризации конечного множества точек евклидова пространства. Установлено, что для этой задачи не существует схемы FPTAS, если P≠NP. Получены ответы на некоторые актуальные вопросы об алгоритмической аппроксимируемости задачи. Продолжение исследований этих вопросов — дело ближайшей перспективы.

Ясно, что по точному (экспоненциальному) или эффективному приближенному решению задачи 1 можно найти соответствующее решение варианта задачи с оптимизируемыми размерами кластеров. Для этого достаточно перебрать N соответствующих (точных или приближенных) решений в семействе задач с заданными размерами кластеров и выбрать наилучшее в этом семействе.

Тем не менее в математическом плане значительный интерес представляет вопрос о статусе сложности и аппроксимируемости варианта задачи 1, в котором мощности кластеров оптимизируются вместе с искомыми кластерами. Выяснение этого открытого вопроса — предмет будущих исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aloise D., Deshpande A., Hansen P., Popat P.** NP-hardness of Euclidean sum-of-squares clustering // Machine Learning. 2009. Vol. 75, no. 2. P. 245–248. doi: 10.1007/s10994-009-5103-0 .
2. **Kariv O., Hakimi S.L.** An algorithmic approach to network location problems. Pt. II: The p-Medians // SIAM J. Appl. Math. 1979. Vol. 37, no. 3. P. 513–538. doi: 10.1137/0137041 .
3. **Гимади Э.Х., Кельманов А.В., Кельманова М.А., Хамидуллин С.А.** Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 1(25). С. 55–74.
4. **Gimadi E.Kh., Kel'manov A.V., Kel'manova M.A., Khamidullin S.A.** A posteriori detecting a quasiperiodic fragment in a numerical sequence // Pattern Recognition and Image Anal. 2008. Vol. 18, no. 1. P. 30–42. doi: 10.1134/S1054661808010057 .
5. **Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Пяткин А.В.** Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2007. Т. 14, № 1. С. 32–42.
6. **James G., Witten D., Hastie T., Tibshirani R.** An introduction to statistical learning. N Y: Springer, Science+Business Media, LLC, 2013. 426 p.
7. **Bishop C.M.** Pattern recognition and machine learning. N Y: Springer, Science+Business Media, LLC, 2006. 738 p.
8. **Shirkhorshidi A.S., Aghabozorgi S, Wah T.Y., Herawan T.** Big data clustering: A review // Computational Science and Its Applications (ICCSA 2014): Proc. / eds. B. Murgante et al. 2014. P. 707–720. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 8583). doi: 10.1007/978-3-319-09156-3_49 .
9. **Aggarwal C.C.** Data mining: The Textbook. N Y etc.: Springer, International Publishing, 2015. 734 p.
10. **Edwards A.W.F., Cavalli-Sforza L.L.** A method for cluster analysis // Biometrics. 1965. Vol. 21. P. 362–375. doi: 10.2307/2528096 .
11. **Garey M.R., Johnson D.S.** Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: Freeman, 1979. 338 p.
12. **Papadimitriou C.H.** Computational complexity. N Y: Addison-Wesley, 1994. 523 p.
13. **Vazirani V.V.** Approximation algorithms. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 2001. 380 p.
14. **Долгушев А.В., Кельманов А.В.** Приближенный алгоритм решения одной задачи кластерного анализа // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 2. С. 29–40.
15. **Долгушев А.В., Кельманов А.В., Шенмайер В.В.** Приближенная полиномиальная схема для одной задачи кластерного анализа // Интеллектуализация обработки информации: 9-я междунар. конф. (Респ. Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г.): сб. докл. М.: Торус Пресс, 2012. С. 242–244.
16. **Кельманов А.В., Хандеев В.И.** Рандомизированный алгоритм для одной задачи двухкластерного разбиения множества векторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 335–344.
17. **Kel'manov A.V., Motkova A.V., Shenmaier V.V.** An approximation scheme for a weighted two-cluster partition problem // Analysis of Images, Social Networks and Texts - 6th Internat. Conf. (AIST 2017): Revised Selected Papers. 2018. P. 323–333. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 10716.) doi: 10.1007/978-3-319-73013-4_30 .

Поступила 12.08.2019
После доработки 10.09.2019
Принята к публикации 16.09.2019

Кельманов Александр Васильевич
д-р физ.-мат. наук,
зав. лабораторией
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск
e-mail: kelm@math.nsc.ru

Пяткин Артем Валерьевич
д-р физ.-мат. наук,

зав. лабораторией
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск
e-mail: artem@math.nsc.ru

Хандеев Владимир Ильич
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск
e-mail: khandeev@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Aloise D., Deshpande A., Hansen P., Popat P. NP-hardness of Euclidean sum-of-squares clustering. *Machine Learning*, 2009, vol. 75, no. 2, pp. 245–248. doi: 10.1007/s10994-009-5103-0 .

2. Kariv O., Hakimi S. An algorithmic approach to network location problems. Part II: The p-Medians. *SIAM J. Appl. Math.*, 1979, vol. 37, no. 3, pp. 539–560. doi: 10.1137/0137041 .

3. Gimadi E.Kh., Kel'manov A.V., Kel'manova M.A., Khamidullin S.A. A posteriori detection of a quasiperiodic fragment with a given number of repetitions in a numerical sequence. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2006, vol. 9, no. 1, pp. 55–74 (in Russian).

4. Gimadi E.Kh., Kel'manov A.V., Kel'manova M.A., Khamidullin S.A. A posteriori detecting a quasiperiodic fragment in a numerical sequence. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 2008, vol. 18, no. 1, pp. 30–42. doi: 10.1134/S1054661808010057 .

5. Baburin A.E., Gimadi E.Kh., Glebov, N.I., Pyatkin, A.V. The problem of finding a subset of vectors with the maximum total weight. *J. Appl. Industr. Math.*, 2008, vol. 2, no. 1, pp. 32–38. doi: 10.1007/s11754-008-1004-3 .

6. James G., Witten D., Hastie T., Tibshirani R. *An Introduction to Statistical Learning.* N Y: Springer Science+Business Media, LLC, 2013, 426 p. ISBN: 978-1461471370 .

7. Bishop C.M. *Pattern Recognition and Machine Learning.* N Y: Springer Science+Business Media, LLC, 2006, 738 p. ISBN: 978-0-387-31073-2 .

8. Shirkhorshidi A.S., Aghabozorgi S, Wah T,Y., and Herawan T. Big data clustering: A review. In: Murgante B. et al. (eds), Computational Science and Its Applications (ICCSA 2014), *Lecture Notes in Computer Science*, 2014, vol. 8583, pp. 707–720. doi: 10.1007/978-3-319-09156-3_49 .

9. Aggarwal C.C. *Data mining: The textbook.* Cham: Springer, 2015, 734 p. doi: 10.1007/978-3-319-14142-8 .

10. Edwards A.W.F., Cavalli-Sforza L.L. A method for cluster analysis. *Biometrics*, 1965, vol. 21, pp. 362–375. doi: 10.2307/2528096 .

11. Garey M.R., Johnson D.S. *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness.* San Francisco: Freeman, 1979, 338 p. ISBN: 0716710447 .

12. Papadimitriou C.H. *Computational complexity.* N Y: Addison-Wesley, 1994, 523 p. ISBN: 0-201-53082-1 .

13. Vazirani V.V. *Approximation Algorithms.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 2003, 380 p. doi: 10.1007/978-3-662-04565-7 .

14. Dolgushev A.V., Kel'manov A.V. An approximation algorithm for solving a problem of cluster analysis. *J. Appl. Indust. Math.*, 2011, vol. 5, no. 4, pp. 551–558. doi: 10.1134/S1990478911040107 .

15. Dolgushev A.V., Kel'manov A.V., Shenmaier V.V. A polynomial-time approximation scheme for one problem of cluster analysis In: K. V. Vorontsov (ed.) Intelligent Data Processing: Proc. of the 9th Internat. Conf. (Republic of Montenegro, Budva, September 16–22, 2012), Moscow: Torus Press, 2012, pp. 242–244 (in Russian).

16. Kel'manov A.V., Khandeev V.I. A Randomized algorithm for two-cluster partition of a set of vectors. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 2, pp. 330–339. doi: 10.1134/S096554251502013X .

17. Kel'manov A.V., Motkova A.V., Shenmaier V.V. An approximation scheme for a weighted two-cluster partition problem. Analysis of Images, Social Networks and Texts - 6th Internat. Conf. (AIST 2017), Revised Selected Papers, *Lecture Notes in Computer Science*, 2018. Vol. 10716. P. 323–333. doi: 10.1007/978-3-319-73013-4_30 .

Received August 12, 2019
Revised September 10, 2019
Accepted September 16, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project nos. 19-01-00308 and 18-31-00398), by Program I.5.1 for Fundamental Research of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (project nos. 0314-2019-0014 and 0314-2019-0015), and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the Russian Academic Excellence Project.

Alexander Vasil'evich Kel'manov, Dr. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630990 Russia, e-mail: kelm@math.nsc.ru .

Artem Valer'evich Pyatkin, Dr. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630990 Russia, e-mail: artem@math.nsc.ru .

Vladimir Il'ich Khandeev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630990 Russia, e-mail: khandeev@math.nsc.ru .

Cite this article as: A. V. Kel'manov, A. V. Pyatkin, V. I. Khandeev. Quadratic Euclidean 1-Mean and 1-Median 2-Clustering Problem with constraints on the size of the clusters: Complexity and approximability, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 69–78 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.542

О РАСПОЗНАВАЕМОСТИ СПОРАДИЧЕСКИХ ПРОСТЫХ ГРУПП Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL И Co_3 ПО ГРАФУ ГРЮНБЕРГА — КЕГЕЛЯ

А. С. Кондратьев

Графом Грюнберга — Кегеля (графом простых чисел) $\Gamma(G)$ конечной группы G называется граф, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. В теории конечных групп активно развиваются исследования распознаваемости конечных групп по графу Грюнберга — Кегеля. Для конечной группы G через $h_\Gamma(G)$ обозначается число всех попарно не изоморфных конечных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ (если множество таких групп H бесконечно, то пишем $h_\Gamma(G) = \infty$). Группа G называется n-распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля, если $h_\Gamma(G) = n < \infty$, распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля, если $h_\Gamma(G) = 1$, и нераспознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля, если $h_\Gamma(G) = \infty$. Говорят, что проблема распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля решена для конечной группы G, если найдено значение $h_\Gamma(G)$. Для нераспознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля конечной группы G интересен также вопрос о (нормальном) строении конечных групп с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у G. В 2003 г. М. Хаги исследовала строение конечных групп, граф Грюнберга — Кегеля которых равен графу Грюнберга — Кегеля какой-либо спорадической простой группы. В частности, в этой работе были даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графу Грюнберга — Кегеля, а именно, спорадические простые группы J_1, M_{22}, M_{23}, M_{24} и Co_2. Однако это исследование не было завершено. В 2006 г. в работе А. В. Заварницина была установлена распознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля группы J_4. Нераспознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля спорадических групп M_{12} и J_2 была известна ранее, она следует из нераспознаваемости этих групп по спектру. В данной статье продолжается исследование Хаги с использованием ее результатов. Для каждой из спорадических простых групп S, изоморфных Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL или Co_3, определены все конечные группы с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у S. Тем самым для этих шести групп S завершено исследование Хаги, и, в частности, решена проблема распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, спорадическая группа, спектр, граф Грюнберга — Кегеля, распознавание по графу Грюнберга — Кегеля.

A. S. Kondrat'ev. On the recognizability of sporadic simple groups Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL, and Co_3 by the Gruenberg–Kegel graph.

The Gruenberg–Kegel graph (prime graph) $\Gamma(G)$ of a finite group G is a graph in which the vertices are the prime divisors of the order of G and two distinct vertices p and q are adjacent if and only if G contains an element of order pq. The problem of recognition of finite groups by the Gruenberg–Kegel graph is of great interest in the finite group theory. For a finite group G, $h_\Gamma(G)$ denotes the number of all pairwise nonisomorphic finite groups H such that $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ (if the set of such groups H is infinite, we write $h_\Gamma(G) = \infty$). A group G is called n-recognizable by the Gruenberg–Kegel graph if $h_\Gamma(G) = n < \infty$, recognizable the Gruenberg–Kegel graph if $h_\Gamma(G) = 1$, and unrecognizable the Gruenberg–Kegel graph if $h_\Gamma(G) = \infty$. We say that the problem of recognizability by the Gruenberg–Kegel graph is solved for a finite group G if the value $h_\Gamma(G)$ is found. For a finite group G unrecognizable by the Gruenberg–Kegel graph, the question of the (normal) structure of finite groups with the same Gruenberg–Kegel graph as G is also of interest. In 2003, M. Hagie investigated the structure of finite groups having the same Gruenberg–Kegel graph as some sporadic simple group. In particular, she gave first examples of finite groups recognizable by the Gruenberg–Kegel graph; they were the sporadic simple groups J_1, M_{22}, M_{23}, M_{24}, and Co_2. However, that investigation was not completed. In 2006, A. V. Zavarnitsine established that the group J_4 is recognizable by the Gruenberg–Kegel graph. The unrecognizability of the sporadic groups M_{12} and J_2 was known previously; it follows from the unrecognizability of these groups by the spectrum. In the present paper, we continue Hagie's study and use her results. For any sporadic simple group S isomorphic to Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL, or Co_3, we find all finite groups having the same Gruenberg–Kegel graph as S. Thus, for these six groups, we complete Hagie's investigation and, in particular, solve the problem of recognizability by the Gruenberg–Kegel graph.

Keywords: finite group, simple group, sporadic group, spectrum, Gruenberg–Kegel graph, recognition by the Gruenberg–Kegel graph.

MSC: 20D08, 20D20, 20D60, 20C20, 20C34, 20C40, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-79-87

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф Грюнберга — Кегеля* (или *граф простых чисел*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$.

В теории конечных групп сложилось и динамично развивается направление исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [8]). Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру*, если для любой конечной группы H из равенства $\omega(H) = \omega(G)$ следует изоморфизм $H \cong G$.

С этим направлением тесно связано перспективное направление исследований распознаваемости конечных групп по графу Грюнберга — Кегеля. Конечная группа G называется *распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если для любой конечной группы H равенство графов $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Ясно, что граф $\Gamma(G)$ однозначно определяется по множеству $\omega(G)$, поэтому из распознаваемости конечной группы по графу Грюнберга — Кегеля следует ее распознаваемость по спектру.

Первый необходимый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп по спектру или по графу Грюнберга — Кегеля заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости (которое было введено автором в [1]), более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой* по спектру (соответственно по графу Грюнберга — Кегеля), если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ (соответственно $\Gamma(G) = \Gamma(P)$) имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P.

Для конечной группы G через $h_\Gamma(G)$ обозначается число всех попарно не изоморфных конечных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ (если множество таких групп H бесконечно, то пишем $h_\Gamma(G) = \infty$). Группа G называется *n-распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если $h_\Gamma(G) = n < \infty$, *почти распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если $1 < h_\Gamma(G) < \infty$, и *нераспознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если $h_\Gamma(G) = \infty$. Будем говорить, что *проблема распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля решена для конечной группы G*, если найдено значение $h_\Gamma(G)$. Эта проблема имеет смысл только для групп с тривиальным разрешимым радикалом, поскольку хорошо известно, что группы с нетривиальным разрешимым радикалом не будут распознаваемыми даже по спектру (см. [8]). Для нераспознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля конечной группы G интересен также вопрос о (нормальном) строении конечных групп с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у G.

Первой работой, связанной с распознаваемостью по графу Грюнберга — Кегеля, по-видимому, была работа Чэня [11], в которой он доказал, что каждая из 26 спорадических простых групп однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется в классе конечных групп по своему порядку и графу Грюнберга — Кегеля.

В 2003 г. М. Хаги [14] исследовала строение конечных групп, граф Грюнберга — Кегеля которых равен графу Грюнберга — Кегеля какой-либо спорадической простой группы. В частности, в этой работе были даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графу Грюнберга — Кегеля, а именно, спорадические простые группы J_1, M_{22}, M_{23}, M_{24}, Co_2, а также доказаны 2-распознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля группы M_{11} и квазираспознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля групп J_3, Suz, $O'N$, Ly, Fi_{23}, Fi'_{24}, Th, Ru, Co_1, F_1, F_2. Однако это исследование не было завершено.

В 2006 г. в работе А .В. Заварницина [3] была установлена распознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля группы J_4.

Нераспознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля спорадических групп M_{12} и J_2 была известна ранее, она следует из нераспознаваемости этих групп по спектру (см. [20; 21]). Результаты Хаги о строении конечных групп, граф Грюнберга — Кегеля которых равен $\Gamma(M_{12})$ или $\Gamma(J_2)$, были существенно усилены в работе автора и И.В. Храмцова [5].

В данной статье мы продолжаем исследование Хаги, используя ее результаты из [14]. Для каждой из спорадических простых групп S, изоморфных Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL или Co_3 (графы Грюнберга — Кегеля этих групп имеют точно две компоненты связности), определены все конечные группы с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у S. Тем самым для этих шести групп S завершено исследование Хаги, и, в частности, решена проблема распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Группа Ru распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.*

Теорема 2. *Пусть $S = HN$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда G изоморфна S или $\mathrm{Aut}(S)$. В частности, группа HN 2-распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.*

Теорема 3. *Пусть $S = Fi_{22}$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда G изоморфна S, $\mathrm{Aut}(S)$ или $\mathrm{Aut}(Suz)$. В частности, группа Fi_{22} 3-распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.*

Теорема 4. *Пусть $S = He$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа G изоморфна He, $\mathrm{Aut}(He)$, $S_8(2)$ или $\mathrm{Aut}(O_8^-(2))$;*

(2) *$O_2(G) \neq 1$, группа $\overline{G} = G/O_2(G)$ изоморфна $S_8(2)$, $O_8^-(2)$ или $\mathrm{Aut}(O_8^-(2))$, каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен неприводимому $GF(2)\overline{G}$-модулю размерности 8, 16 или 48.*

В частности, группа He не распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.

Теорема 5. *Пусть $S = M^cL$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа G изоморфна M^cL, $\mathrm{Aut}(HS)$, $\mathrm{Aut}(M_{22})$ или $U_6(2).2$;*

(2) *$O_2(G) \neq 1$, группа $\overline{G} = G/O_2(G)$ изоморфна HS, $\mathrm{Aut}(HS)$, M_{22}, $\mathrm{Aut}(M_{22})$, $U_6(2)$ или $U_6(2).2$, каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен единственному 20-мерному неприводимому $GF(2)\overline{G}$-модулю.*

В частности, группа M^cL не распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.

Теорема 6. *Пусть $S = Co_3$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа G изоморфна Co_3;*

(2) *$O_2(G) \neq 1$, группа $\overline{G} = G/O_2(G)$ изоморфна Co_3 и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен единственному 22-мерному абсолютно неприводимому $GF(2)\overline{G}$-модулю;*

(3) *$O_2(G) \neq 1$, группа $\overline{G} = G/O_2(G)$ изоморфна M_{24} и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен одному из двух 11-мерных абсолютно неприводимых $GF(2)\overline{G}$-модулей.*

В частности, группа Co_3 не распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.

Поскольку каждая из спорадических простых групп имеет несвязный граф Грюнберга — Кегеля (см. [22]), мы используем результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля (см. [5; 22]). Кроме того, используется система компьютерной алгебры GAP (см. [12]).

Заметим, что в работах Б. Хосрави [17; 18], в частности, изучалось строение конечных групп с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у групп $\mathrm{Aut}(M_{22})$, $\mathrm{Aut}(HS)$ и $\mathrm{Aut}(Suz)$. Но ввиду [13] справедливы равенства $\Gamma(\mathrm{Aut}(M_{22})) = \Gamma(\mathrm{Aut}(HS)) = \Gamma(M^cL)$ и $\Gamma(\mathrm{Aut}(Suz)) = \Gamma(Fi_{22})$. Поэтому ввиду наших теорем 3 и 5 результаты Хосрави из [17, теорема 3.1(b,c,f)] и [18, теоремы 3.2(a), 3.4, 3.5(b)], касающиеся этих групп, неполны и, к сожалению, некорректны.

1. Обозначения, терминология и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [6;9;13;15;16].

Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. По теореме Грюнберга — Кегеля [22, теорема A] либо группа G изоморфна группе Фробениуса или двойной группе Фробениуса, либо фактор-группа $\overline{G} := G/F(G)$ почти проста (т. е. имеет простой неабелев цоколь $Soc(\overline{G})$) и известна ввиду результатов [4; 19; 22]. Предположим, что $F(G) \neq 1$ и группа $\overline{G}$ почти проста. Тогда $\pi(F(G)) \cup \pi(\overline{G}/Soc(\overline{G})) \subseteq \pi_1(G)$ (см. [22, теорема A]). Каждой связной компоненте $\pi_i(G)$ графа $\Gamma(G)$ при $i > 1$ соответствует нильпотентная изолированная $\pi_i(G)$-холлова подгруппа $X_i(G)$ группы G (изолированной подгруппой называется собственная подгруппа, содержащая централизатор каждого своего неединичного элемента). Любой неединичный элемент x из $X_i(G)$ при $i > 1$ действует без неподвижных точек на $F(G)$, т. е. $C_{F(G)}(x) = 1$. Пусть K и L — два соседних члена главного ряда группы G, причем $K < L \leq F(G)$. Тогда (главный) фактор $V = L/K$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p, называется *p-главным фактором* группы G, и его можно рассматривать как точный неприводимый $GF(p)\overline{G}$-модуль (так как $C_{G/K}(V) = F(G)/K$), причем каждый неединичный элемент из $X_i(G)$ при $i > 1$ действует без неподвижных точек на V. Поэтому задача изучения строения группы G во многом сводится к имеющей самостоятельный интерес проблеме описания неприводимых $GF(p)\overline{G}$-модулей, на которые некоторый элемент простого порядка (отличного от p) из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек.

Рассмотрим некоторые результаты, используемые в доказательстве теорем.

Следующий полезный результат хорошо известен (см., например, [2, лемма 4]).

Лемма 1.1. *Пусть H — конечная простая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — абсолютно неприводимый FH-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент из H порядка, взаимно простого с p, то*

$$\dim C_V(g) = (\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}) = \frac{1}{|g|}\sum_{x\in\langle g\rangle}\beta(x).$$

Лемма 1.2 [15, теорема VII.1.16]. *Пусть G — конечная группа, $F = GF(p^m)$ — поле определения характеристики $p > 0$ для абсолютно неприводимого FG-модуля V, $\langle\sigma\rangle = \mathrm{Aut}(F)$, V_0 обозначает модуль V, рассматриваемый как $GF(p)G$-модуль, и $W = V_0 \otimes_{GF(p)} F$. Тогда*

(1) $W = \bigoplus_{i=1}^m V^{\sigma^i}$, *где V^{σ^i} — модуль, алгебраически сопряженный с V посредством σ^i;*

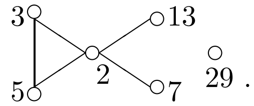
(2) *V_0 является неприводимым $GF(p)G$-модулем, и, в частности, W реализуется как неприводимый $GF(p)G$-модуль V_0;*

(3) *с точностью до изоморфизма модулей неприводимые $GF(p)G$-модули находятся во взаимно однозначном соответствии с классами алгебраической сопряженности неприводимых $\overline{GF(p)}G$-модулей, где $\overline{GF(p)}$ — алгебраическое замыкание поля $GF(p)$.*

Лемма 1.3 [7, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

2. Доказательства теорем

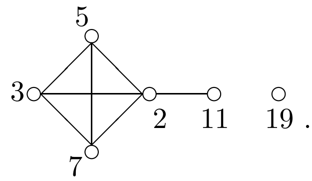
Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $S = Ru$, G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] граф $\Gamma(S)$ имеет вид



Ввиду теоремы Грюнберга—Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $F(G) = O_2(G))$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$. Предположим, что $O_2(G) \neq 1$. Тогда элемент порядка 29 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальную 2-группу $F(G)$, что ввиду леммы 1.1 противоречит таблице 2-модулярных характеров Брауэра группы S (см. [12]). Поэтому $O_2(G) = 1$.

Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть $S = HN$, G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] $|\mathrm{Aut}(S) : S| = 2$ и граф $\Gamma(S) = \Gamma(\mathrm{Aut}(S))$ имеет вид

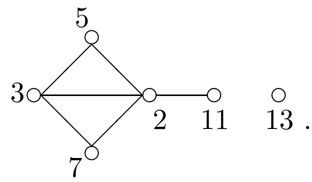


Ввиду теоремы Грюнберга—Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$ или $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [13] $U_3(8) \cong X < \overline{G}$ и $\Gamma(X)$ имеет вид

Пусть H — полный прообраз в G подгруппы X. Тогда граф $\Gamma(H)$ несвязен, $F(H) = F(G)$ и $|\pi(H/O_5(H))| = 4$. По [5, теорема 7] имеем $F(H/O_5(H)) = O_2(H/O_5(H))$ и, следовательно, $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 5\}$. Если $5 \in \pi(F(G))$, то элемент порядка 19 из H действует без неподвижных точек на нетривиальной 5-группе $F(H/O_2(H))$, что ввиду леммы 1.1 противоречит таблице 5-модулярных характеров Брауэра группы $\overline{H}$, совпадающей с ее таблицей обыкновенных характеров из [13]. Поэтому $F(G) = O_2(G)$. Если $O_2(G) \neq 1$, то ввиду леммы 1.1 и таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы S (см. [12]) элемент порядка 19 из G централизует нетривиальный элемент из $O_2(G)$. Полученное противоречие показывает, что $F(G) = 1$.

Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Пусть $S = Fi_{22}$, G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] $|\mathrm{Aut}(S) : S| = 2$ и граф $\Gamma(S) = \Gamma(\mathrm{Aut}(S)) = \Gamma(\mathrm{Aut}(Suz))$ имеет вид

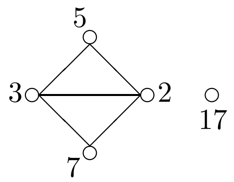


Ввиду теоремы Грюнберга—Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3, 5\}$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$, $\mathrm{Aut}(S)$, Suz или $\mathrm{Aut}(Suz)$. Ввиду [13] ${}^2F_4(2)' \cong X < \overline{G}$ и $\Gamma(X)$ имеет вид

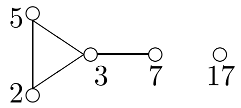
Пусть H — полный прообраз в G подгруппы X. Тогда граф $\Gamma(H)$ несвязен, $F(H) = F(G)$ и $|\pi(H)| = 4$. По [5, теорема 7] имеем $F(H) = 1$ и, следовательно, $F(G) = 1$. Поскольку ввиду [13] в графе $\Gamma(Suz)$ вершины 2 и 11 несмежны, графы $\Gamma(Suz)$ и $\Gamma(S)$ различны, и поэтому $G \cong S$, $\mathrm{Aut}(S)$ или $\mathrm{Aut}(Suz)$.

Теорема 3 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Пусть $S = He$ и G — конечная группа. Докажем *необходимость*. Предположим, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] графы $\Gamma(S) = \Gamma(\mathrm{Aut}(S)) = \Gamma(S_8(2)) = \Gamma(\mathrm{Aut}(O_8^-(2)))$ и $\Gamma(O_8^-(2))$ имеют соответственно вид



и



.

Ввиду теоремы Грюнберга — Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3,5,7\}$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$, $\mathrm{Aut}(S)$, $L_2(16)$, $L_2(16):2$, $L_2(16):4$, $O_8^-(2)$, $\mathrm{Aut}(O_8^-(2))$ или $S_8(2)$. Ввиду [13] группа $\overline{G}$ содержит подгруппу X, изоморфную группе Фробениуса вида $2^4:5$. Пусть H — полный праообраз в G подгруппы X. Если $7 \in \pi(F(G))$, то, применяя лемму 1.3 к группе $H/O_{7'}(H)$, получим, что элемент порядка 5 из H централизует элемент порядка 7 из $F(G)$, а это противоречит виду графа $\Gamma(G)$. Поэтому $7 \notin \pi(F(G))$ и, следовательно, $7 \in \pi(\overline{G})$, откуда следует, что группа $\overline{G}$ не изоморфна группам $L_2(16)$, $L_2(16):2$, $L_2(16):4$. Если $F(G) = 1$, то выполняется утверждение (1) теоремы 4. Если $F(G) \neq 1$, то элемент порядка 17 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальной нильпотентной группе $F(G)$, и ввиду лемм 1.1 и 1.2 и таблиц p-модулярных характеров Брауэра цоколя группы $\overline{G}$ для $p \in \{2,3,5\}$ (см. [12; 16]) выполняется утверждение (2) теоремы 4.

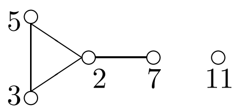
Необходимость доказана.

Докажем *достаточность*. Пусть выполняется заключение теоремы. Если выполняется утверждение (1) теоремы, то из [13] видно, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Пусть выполняется утверждение (2) теоремы. Для доказательства равенства $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ достаточно проверить его для случая, когда $O_2(G)$ — неприводимый $GF(2)\overline{G}$-модуль размерности 8, 16 или 48. Применяя леммы 1.1 и 1.2 для соответствующих 2-модулярных характеров Брауэра и $|g| = 7$, видим, что некоторый элемент порядка 7 из $\overline{G}$ централизует некоторую инволюцию из $O_2(G)$. Отсюда, учитывая вид графа $\Gamma(\overline{G})$, получаем, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$.

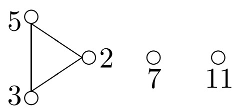
Достаточность доказана.

Теорема 4 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5. Пусть $S = M^cL$ и G — конечная группа. Докажем *необходимость*. Предположим, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] граф $\Gamma(S) = \Gamma(\mathrm{Aut}(M_{22})) = \Gamma(\mathrm{Aut}(HS)) = \Gamma(U_6(2).2)$, граф $\Gamma(U_6(2)) = \Gamma(HS)$ и граф $\Gamma(M_{22})$ имеют соответственно вид



,



и

.

Ввиду теоремы Грюнберга — Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3,5\}$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$, M_{22}, $\mathrm{Aut}(M_{22})$, HS, $\mathrm{Aut}(HS)$, $U_6(2)$ или $U_6(2).2$. Если $F(G) = 1$, то выполняется п. (1) теоремы 5. Пусть $F(G) \neq 1$. Тогда элемент порядка 11 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальной нильпотентной группе $F(G)$, и ввиду лемм 1.1 и 1.2 и таблиц p-модулярных характеров Брауэра цоколя группы $\overline{G}$ для $p \in \{2,3,5\}$ (см. [12; 16]) имеем $F(G) = O_2(G)$, группа $\overline{G}$ изоморфна HS, $\mathrm{Aut}(HS)$, M_{22}, $\mathrm{Aut}(M_{22})$, $U_6(2)$ или $U_6(2).2$, каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен единственному 20-мерному (абсолютно) неприводимому $GF(2)\overline{G}$-модулю. Таким образом, выполняется утверждение (2) теоремы 5.

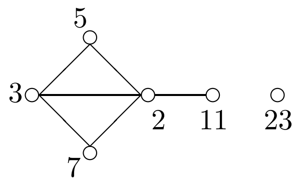
Необходимость доказана.

Докажем *достаточность*. Пусть выполняется заключение теоремы. Если выполняется утверждение (1) теоремы, то из [13] видно, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Пусть выполняется утверждение (2) теоремы. Для доказательства равенства $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ достаточно проверить его для случая, когда $O_2(G)$ — единственный 20-мерный (абсолютно) неприводимый $GF(2)\overline{G}$-модуль. Применяя лемму 1.1 для соответствующего 2-модулярного характера Брауэра и $|g| = 7$, видим, что некоторый элемент порядка 7 из $\overline{G}$ централизует некоторую инволюцию из $O_2(G)$. Отсюда, учитывая вид графа $\Gamma(\overline{G})$, получаем, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$.

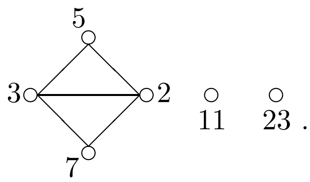
Достаточность доказана.

Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Пусть $S = Co_3$ и G — конечная группа. Докажем *необходимость*. Предположим, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Ввиду [13] граф $\Gamma(S)$ и граф $\Gamma(M_{24})$ имеют соответственно вид



и



Ввиду теоремы Грюнберга—Кегеля [22, теорема A] и [14, теорема 3] имеем $F(G) = O_2(G))$ и $\overline{G} := G/F(G) \cong S$ или M_{24}. Если $O_2(G) = 1$, то выполняется утверждение (1) теоремы 6.

Предположим, что $O_2(G) \neq 1$. Тогда элемент порядка 23 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальной 2-группе $O_2(G)$. Если $\overline{G} \cong S$, то ввиду лемм 1.1 и 1.2 и таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы S (см. [12]) выполняется утверждение (2) теоремы 6. Если $\overline{G} \cong M_{24}$, то ввиду лемм 1.1 и 1.2, таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы M_{24} (см. [16; 10, табл. 8.70] выполняется утверждение (3) теоремы 6.

Необходимость доказана.

Докажем *достаточность*. Пусть выполняется заключение теоремы. Если выполняется утверждение (1) теоремы, то [13] показывает, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$.

Пусть выполняется утверждение (2) теоремы. Для доказательства равенства $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ достаточно проверить его для случая, когда $O_2(G)$ — 22-мерный абсолютно неприводимый $GF(2)\overline{G}$-модуль. Ясно, что в этом случае $\Gamma(G) = \Gamma(S)$.

Пусть выполняется утверждение (3) теоремы. Для доказательства равенства $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ достаточно проверить его для случая, когда $O_2(G)$ — один из двух 11-мерных абсолютно неприводимых $GF(2)\overline{G}$-модулей. Применяя лемму 1.1 для соответствующих 2-модулярных характеров Брауэра и $|g| = 11$, видим, что некоторый элемент порядка 11 из $\overline{G}$ централизует некоторую инволюцию из $O_2(G)$. Отсюда, учитывая вид графа $\Gamma(\overline{G})$, получаем, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$.

Достаточность доказана.

Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость некоторых конечных простых групп по множеству порядков элементов // Укр. мат. конгр. 2001. Алгебра і теор. чисел. Секція 1: Тез. доп. Киев, 2001. С. 4.
2. **Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М.С.** C55-группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.
3. **Заварницин А.В.** О распознавании конечных простых групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.
4. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
5. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
6. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
7. **Мазуров В.Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.

8. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Т. 36. С. 119–138.
9. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p. ISBN: 0198531990 .
10. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407). doi: 10.1017/CBO9781139192576 .
11. **Chen G.** A new characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1996. Vol. 3, no. 1. P. 49–58.
12. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.10.0. 2018: [e-resource]. Available at: http://www.gap-system.org .
13. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
14. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424. doi: 10.1081/AGB-120022800 .
15. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups II. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 531 p.
16. **Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R.** An atlas of Brauer characters. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
17. **Khosravi B.** Groups with the same prime graph as an almost sporadic simple group // Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi (N.S.). 2009. Vol. 25, no. 2. P. 175–187.
18. **Khosravi B.** On the prime graphs of the automorphism groups of sporadic groups // Arch. Math. (Brno). 2009. Vol. 45, no. 2. P. 83–94.
19. **Lucido M.S.** Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1999. Vol. 102. P. 1–22; addendum // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. Vol. 107. P. 189–190.
20. **Mazurov V.D., Shi W.J.** A note to the characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1998. Vol. 5, no. 3. P. 285–288.
21. **Praeger C.E., Shi W.J.** A characterization of some alternating and symmetric groups // Commun. Algebra. 1994. Vol. 22, no. 5. P. 1507–1530. doi: 10.1080/00927879408824920 .
22. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0 .

Поступила 30.09.2019
После доработки 19.11.2019
Принята к публикации 21.11.2019

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Alekseeva O.A., Kondrat'ev A.S. Quasirecognizability of some finite simple groups y the set of element orders. *Ukr. mat. kongr. 2001. Algebra and Number Theory.* Sec. 1: Abstracts. Kiev, 2001. P. 4 (in Russian).
2. Dolfi S., Jabara E., Lucido M. S. $C55$-groups, *Sib. Math. J.*, 2004, Vol. 45, no. 6, pp 1053–1062. doi: 10.1023/B:SIMJ.0000048920.62281.61 .
3. Zavarnitsine A.V. Recognition of finite groups by the prime graph. *Algebra Logic.*, 2006, vol. 45, no. 4, pp. 220–231. doi: 10.1007/s10469-006-0020-9 .
4. Kondrat'ev A. S. Prime graph components of finite simple groups. *Math. USSR Sb.*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1070/SM1990v067n01ABEH001363 .
5. Kondrat'ev A.S., Khramtsov I.V. On finite tetraprimary groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 279, suppl. 1, pp. 43–61. doi: 10.1134/S0081543812090040 .
6. Curtis C.W., Reiner I. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Pure Appl. Math., vol. XI, N Y; London: Interscience Publ., 1962, 689 p. ISBN: 978-0-8218-4066-5 . Translated to Russian under the title *Teoriya predstavlenii konechnykh grupp i assotsiativnykh algebr.* Moscow: Nauka Publ., 1969, 668 p.

7. Mazurov V.D. Characterizations of finite groups by sets of orders of their elements. *Algebra Logic*, 1997, vol. 36, no. 1, pp. 23–32. doi: 10.1007/BF02671951 .
8. Mazurov V.D. Groups with given spectrum. *Izv. Ural'sk. Gos. Univ.*, 2005, no. 36, pp. 119–138 (in Russian).
9. Aschbacher M. *Finite group theory.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986, 274 p. ISBN: 0198531990 .
10. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407, 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576 .
11. Chen G. A new characterization of sporadic simple groups. *Algebra Colloq.*, 1996, vol. 3, no. 1, pp. 49–58.
12. The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming,* Ver. 4.9.1, 2018. Available at: http://www.gap-system.org .
13. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0198531990 .
14. Hagie M. The prime graph of a sporadic simple group. *Comm. Algebra*, 2003, vol. 31, no. 9, pp. 4405–4424. doi: 10.1081/AGB-120022800 .
15. Huppert B., Blackburn N. *Finite groups* II. Berlin: Springer-Verlag, 1982, 531 p. ISBN: 978-3-642-67994-0 .
16. Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R. *An atlas of Brauer characters.* Oxford: Clarendon Press, 1995, 327 p.
17. Khosravi B. Groups with the same prime graph as an almost sporadic simple group. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi (N.S.)*, 2009, vol. 25, no. 2,. pp. 175–187.
18. Khosravi B. On the prime graphs of the automorphism groups of sporadic simple groups. *Arch. Math. (Brno)*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 83–94.
19. Lucido M.S. Prime graph components of finite almost simple groups. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 1999, vol. 102, pp. 1–22; addendum *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 2002, vol. 107, pp. 189–190.
20. Mazurov V., Shi W. A note to the characterization of sporadic simple groups. *Algebra Colloq.*, 1998, vol. 5, no. 3, pp. 285–288.
21. Praeger C.E., Shi W.J. A characterization of some alternating and symmetric groups. *Comm. Algebra*, 1994, vol. 22, no. 5, pp. 1507–1530. doi: 10.1080/00927879408824920 .
22. Williams J.S. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0 .

Received September 30, 2019
Revised November 19, 2019
Accepted November 21, 2019

Anatolii Semenovich Kondrat'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. S. Kondrat'ev. On the recognizability of sporadic simple groups Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL, and Co_3 by the Gruenberg–Kegel graph, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 79–87 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.542

О ПРИМИТИВНЫХ ГРУППАХ ПОДСТАНОВОК СО СТАБИЛИЗАТОРОМ ДВУХ ТОЧЕК, НОРМАЛЬНЫМ В СТАБИЛИЗАТОРЕ ОДНОЙ ИЗ НИХ: СЛУЧАЙ, КОГДА ЦОКОЛЬ ЕСТЬ СТЕПЕНЬ ГРУППЫ $E_8(q)$

А. В. Коныгин

Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. П. Камероном был поставлен вопрос о справедливости в этом случае равенства $G_{x,y} = 1$. Ранее автором было доказано, что если цоколь группы G не является степенью группы, изоморфной $E_8(q)$, q — степень простого числа, то $G_{x,y} = 1$. В настоящей работе рассматривается случай, когда цоколь группы G является степенью группы, изоморфной $E_8(q)$. Вместе с предыдущим результатом мы получаем два следующих утверждения: 1. Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что в случае, если цоколь G изоморфен $E_8(q)$, то G_x для $x \in X$ не является подгруппой Боровика в группе G. Тогда для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен. 2. Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X со свойством $G \leq H\mathrm{wr}S_m$. Предположим, что в случае, если цоколь группы H изоморфен $E_8(q)$, то стабилизатор точки в группе H не является подгруппой Боровика в группе H. Тогда для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона также положителен.

Ключевые слова: примитивная группа подстановок, регулярная подорбита.

A. V. Konygin. On primitive permutation groups with the stabilizer of two points normal in the stabilizer of one of them: The case when the socle is a power of a group $E_8(q)$.

Assume that G is a primitive permutation group on a finite set X, $x \in X \setminus \{x\}$, and $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. P. Cameron raised the question about the validity of the equality $G_{x,y} = 1$ in this case. The author proved earlier that, if the socle of G is not a power of a group isomorphic to $E_8(q)$ for a prime power q, then $G_{x,y} = 1$. In the present paper, we consider the case where the socle of G is a power of a group isomorphic to $E_8(q)$. Together with the previous result, we establish the following two statements. 1. Let G be an almost simple primitive permutation group on a finite set X. Assume that, if the socle of G is isomorphic to $E_8(q)$, then G_x for $x \in X$ is not the Borovik subgroup of G. Then the answer to Cameron's question for such primitive permutation groups is affirmative. 2. Let G be a primitive permutation group on a finite set X with the property $G \leq H\mathrm{wr}S_m$. Assume that, if the socle of H is isomorphic to $E_8(q)$, then the stabilizer of a point in the group H is not the Borovik subgroup of H. Then the answer to Cameron's question for such primitive permutation groups is also affirmative.

Keywords: primitive permutation group, regular suborbit.

MSC: 20B15, 20D06

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-88-98

1. Введение

П. Камероном был сформулирован следующий вопрос (см. [3] и [23, вопрос 9.69]). *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и G_x действует регулярно на G_x-орбите $G_x(y)$, содержащей точку y (т. е. индуцирует на $G_x(y)$ регулярную группу подстановок). Верно ли, что это действие точное, т. е. что $|G_x| = |G_x(y)|$?* Отметим, что вопрос о точности действия стабилизатора G_x на регулярной подорбите $G_x(y)$ изучался и ранее (см. [9; 13; 14; 21; 24; 25]).

Ясно, что регулярность действия группы G_x на $G_x(y)$ эквивалентна свойству $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, а равенство $|G_x| = |G_x(y)|$ эквивалентно равенству $G_{x,y} = 1$. Таким образом, вопрос П. Камерона эквивалентен вопросу о выполнении для произвольной примитивной группы подстановок G на конечном множестве X следующего свойства:

(Pr) если $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$, то $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ влечет $G_{x,y} = 1$.

Очевидно, вопрос П. Камерона эквивалентен также вопросу о выполнении для произвольной конечной группы G следующего свойства:

(Pr*) если M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G, то $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq M_1$ влечет $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq G$.

Согласно теореме О'Нэна — Скотта (см. [15]) любая конечная примитивная группа подстановок подстановочно изоморфна группе одного из перечисленных ниже типов.

I. Примитивные группы с абелевой регулярной нормальной подгруппой.

II. Примитивные почти простые группы. Напомним, что группа G называется почти простой, если группа G изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(T)$, содержащей $\mathrm{Inn}(T)$, для некоторой конечной простой неабелевой группы T.

III. Примитивные группы с неабелевым непростым цоколем. Среди групп этого типа различают группы трех типов:

(a) (*simple diagonal action*). Пусть S_k — симметрическая группа степени $k \geq 2$, T — простая неабелева группа и $W = \{\pi(a_1,\ \ldots,\ a_k) \mid a_i \in \mathrm{Aut}(T),\ \pi \in S_k,\ a_i a_j^{-1} \in \mathrm{Inn}(T),\ i,j \in \{1,\ldots,k\}\} \leq \mathrm{Aut}(T)\mathrm{wr}S_k$. Тогда представление группы W левыми сдвигами на множестве левых смежных классов группы W по подгруппе $W_x = \{\pi(a,\ \ldots,\ a) \mid a \in \mathrm{Aut}(T),\ \pi \in S_k\}$ является точным примитивным представлением степени $|T|^{k-1}$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(a), если она изоморфна подгруппе группы W в этом представлении, содержащей $\mathrm{soc}(W)$.

(b) (*product action*). Пусть S_m — симметрическая группа степени $m \geq 2$ и H — примитивная группа типа II или III(a) на конечном множестве Y. Положим $W = H\mathrm{wr}S_m$. Группа W естественным образом действует на $X = Y^m$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(b), если она изоморфна подгруппе группы W в этом представлении, содержащей K^m, где $K = \mathrm{soc}(H)$, и G транзитивно переставляет m прямых множителей группы K^m.

(c) (*twisted wreath action*). Конечная примитивная группа G имеет тип III(c), если она обладает единственной неабелевой регулярной нормальной подгруппой.

Ранее в работе автора (К вопросу Камерона о тривиальности в примитивных группах подстановок стабилизатора двух точек. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 175–186) было доказано, что если G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X и либо G — группа типа I, III(a) или III(c), либо G — группа типа II с цоколем, не изоморфным $E_8(q)$, q — степень простого числа, то для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**. Там же доказано, что если $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа III(b) и цоколь группы H не изоморфен $E_8(q)$, то для группы подстановок G также выполняется свойство **(Pr)**. В частности, для всех таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен. В настоящей работе рассматривается случай, когда цоколь группы G является степенью группы, изоморфной $E_8(q)$. С учетом предыдущих результатов автора доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что в случае, если цоколь G изоморфен $E_8(q)$, то G_x для $x \in X$ не является подгруппой Боровика* (*см. предложение* 1.IV *ниже*) *в группе G. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* **(Pr)**. *В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.*

Теорема 2. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X такая, что $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа* III(b). *Предположим, что если цоколь группы H изоморфен $E_8(q)$, то стабилизатор точки в группе H не является подгруппой Боровика* (*см. предложение* 1.IV *ниже*) *в группе H. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* **(Pr)**. *В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.*

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Для произвольной конечной группы G и простого числа p в работе используются следующие стандартные обозначения: $\mathrm{soc}(G)$ — цоколь группы G, $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, $F^*(G)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга группы G. Для групп A и B через $A.B$ будет обозначаться (см. [5]) произвольная группа G с нормальной подгруппой H такой, что $H \cong A$ и $G/H \cong B$. При указании структуры группы через p^n будет обозначаться (см. [5]) элементарная абелевая группа порядка p^n.

Пусть A и B — группы. Подгруппу D прямого произведения групп A и B назовем *диагональной*, если $A \cap D = B \cap D = 1$ и AB совпадает с DA или DB.

Пусть R — такая простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K ненулевой характеристики p и F — такой эндоморфизм Стейнберга алгебраической группы R, что $L = R^F := \{g \in R \mid F(g) = g\}$ является конечной простой группой, изоморфной $E_8(q)$, где $q = p^m$. Пусть Q — конечная группа такая, что $F^*(Q) = L$. Группа $\mathrm{Aut}(L)$ порождается сопряжениями посредством элементов из R^F и полевыми автоморфизмами группы L, причем все эти автоморфизмы группы L продолжаются до автоморфизмов абстрактной группы R, коммутирующих с F. Таким образом, существует подгруппа $\tilde{Q}$ группы $C_{\mathrm{Aut}(R)}(F)$ такая, что $Q = \tilde{Q}/\langle F\rangle$, и, следовательно, Q действует на множестве всех F-допустимых подмножеств группы R. Через $N_Q(V)$ будем обозначать нормализатор в Q произвольного F-допустимого подмножества V группы R. Если D является F-допустимой замкнутой связной редуктивной подгруппой группы R, содержащей максимальный тор группы R, и $M = N_Q(D)$, то M называется *группой максимального ранга в* Q. Через $\mathcal{L}(R)$ обозначается алгебра Ли группы R. Будем предполагать, что вершины диаграмм Дынкина пронумерованы стандартным образом (см. [22]).

Пусть X — простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K. Для доминантного веса λ пусть $L_X(\lambda)$ — рациональный неприводимый KX-модуль старшего веса λ и $T_X(\lambda)$ — неразложимый тилтинг-модуль (tilting module) старшего веса λ. Следуя [18; 22], будем писать $L(\lambda)$ или λ для обозначения модуля $L_X(\lambda)$ и $a_1 \dots a_r$ — вместо доминантного веса $\sum_{i=1}^r a_i\omega_i$, где ω_i — фундаментальные доминантные веса и $a_1, ..., a_r$ — неотрицательные целые числа (неоднозначность этих обозначений устраняется контекстом использования). Для KX-модулей M_i, $i \in \{1, \dots, k\}$, через $M_1 \mid M_2 \mid \dots \mid M_k$ будем обозначать рациональный KX-модуль V, имеющий такой ряд подмодулей $0 = V_k < V_{k-1} < \dots < V_1 < V_0 = V$, что $V_{i-1}/V_i \cong M_i$ для $1 \le i \le k$.

Пусть теперь X — полупростая алгебраическая группа и λ, γ, μ — ее доминантные веса такие, что модули $T_X(\lambda) = \mu \mid \lambda \mid \mu$ и $T_X(\gamma) = \mu \mid \gamma \mid \mu$ унисериальны. Следуя [18], через $\Delta(\lambda; \gamma)$ будем обозначать неразложимый модуль вида $\mu \mid (\lambda \oplus \gamma) \mid \mu$, точное определение которого приводится в [18, разд. 9.1].

Предложение 1 [17, теорема 2]. *Пусть (во введенных выше обозначениях) $L = R^F$ — исключительная группа лиева типа, изоморфная группе $E_8(q)$. Предположим, что G — группа со свойством $L \le G \le \mathrm{Aut}(L)$ и M — максимальная подгруппа группы G. Тогда либо $F^*(M)$ является простой группой, либо выполняется одно из следующих утверждений.*

I. *$M = N_G(U^F)$, где U является либо параболической подгруппой группы R, либо редуктивной подгруппой максимального ранга группы R.*

II. *$M = N_G(E)$, где E является элементарной абелевой подгруппой из* [4, теорема 1(II)].

III. *$M = C_G(\tau)$, где τ — полевой автоморфизм простого порядка группы L.*

IV. *$p > 5$ и либо $F^*(M) \cong \mathrm{Alt}_5 \times \mathrm{Alt}_6$ (M — подгруппа Боровика группы G), либо $F^*(M) \cong \mathrm{Alt}_5 \times L_2(q)$.*

V. *Группа $F^*(M)$ изоморфна одной из следующих групп (см.* [17, табл. 3]):

a) $F^*(M) \cong L_2(q) \times L_3^\epsilon(q)$, $p > 3$; b) $F^*(M) \cong G_2(q) \times F_4(q)$;

c) $F^*(M) \cong L_2(q) \times G_2(q) \times G_2(q)$, $p > 2$, $q > 3$; d) $F^*(M) \cong L_2(q) \times G_2(q^2)$, $p > 2$, $q > 3$.

Предложение 2. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $T := \mathrm{soc}(G)$. Предположим, что $T \cong E_8(q)$, где q — степень простого числа. Если для группы подстановок T выполняется свойство* **(Pr)**, *то свойство* **(Pr)** *выполняется и для группы подстановок G.*

Доказательство. Предположим, что для группы подстановок T выполняется свойство **(Pr)**. Пусть x, y — различные элементы из X и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Покажем, что $G_{x,y} = 1$.

Рассмотрим естественный гомоморфизм ϕ группы G в факторгруппу G/T. Тогда $G_{x,y} \cap \ker \phi = G_{x,y} \cap T = T_{x,y} = 1$. Таким образом, группа $G_{x,y}$ изоморфно вкладывается в группу G/T и, следовательно, в группу $\mathrm{Out}(E_8(q)) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$. Поскольку в силу [11, предложение 8] имеем $F(G_{x,y}) = 1$, то $G_{x,y} = 1$. Таким образом, для группы подстановок G выполняется свойство (**Pr**). □

Предложение 3. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что $G \leq H \mathrm{wr} S_m$ — группа типа* III(b) *и H — примитивная почти простая группа с цоколем, изоморфным $E_8(q)$, где q — степень простого числа. Если для группы подстановок H выполняется свойство* (**Pr**), *то для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Справедливость предложения следует из [11, предложение 18] и того факта, что группа автоморфизмов группы $\mathrm{soc}(H)$ не содержит графовых автоморфизмов. □

3. Доказательство теорем 1 и 2

В силу предложений 2 и 3 для доказательства теорем 1 и 2 достаточно показать, что если $G \cong E_8(q)$ — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, то для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому далее будем считать, что $G = L = R^F$. (Здесь и далее используются обозначения, введенные выше.)

Пусть $x \in X$. По предложению 1 либо $F^*(G_x)$ является простой группой, либо для G_x выполняется одно из утверждений I–V предложения 1.

Если $F^*(G_x)$ является простой группой, то G_x является почти простой группой. Поэтому $G_x/\mathrm{soc}(G_x)$ является (согласно "гипотезе Шрейера") разрешимой группой и в силу [11, предложение 20] для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**.

Таким образом, не теряя общности, далее будем считать, что для G_x выполняется одна из возможностей I–V предложения 1. Кроме того, при рассмотрении случаев 1.1–1.8 будем учитывать, что $F(G_{x,y}) = 1$ (см. [12, предложение 1]).

Случай 1. Для G_x выполняется утверждение I предложения 1, т. е. $G_x = N_G(U^F)$, где U является либо параболической подгруппой группы R, либо редуктивной подгруппой максимального ранга группы R.

Пусть U является параболической подгруппой группы R. Тогда G_x является параболической подгруппой группы R^F и, следовательно, $C_{G_x}(O_r(G_x)) \leq O_r(G_x)$ для некоторого простого числа r. Предположим, что $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Тогда $G_{x,y} \cap O_r(G_x) = 1$ [11, предложение 8], $[O_r(G_x), G_{x,y}] = 1$ и $G_{x,y} \leq C_{G_x}(O_r(G_x)) \leq O_r(G_x)$. Таким образом, $G_{x,y} = 1$ и для G выполняется свойство **(Pr)**.

Пусть U является редуктивной подгруппой максимального ранга группы R. Все редуктивные подгруппы максимального ранга конечных исключительных групп лиева типа перечислены в [16, табл. 5.1]. Без ограничения общности можно предполагать (см. [20, теоремы 29.1, 29.5]), что $G_x = M = H^F$, где H — замкнутая F-инвариантная подгруппа группы R, максимальная среди F-инвариантных замкнутых подгрупп группы R, имеющих положительную размерность. Далее будет показано выполнение свойства **(Pr)** для группы G при этом условии.

Пусть $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Проверим, что $G_{x,y} = 1$. Поскольку из $G_{x,y} \trianglelefteq G_y$ следует $G_{x,y} = 1$, то далее будем предполагать, что $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$. Покажем, что в каждом из возникающих здесь случаев 1.1–1.8 (см. [16, табл. 5.1]), это приводит к противоречию.

Случай 1.1. $G_x \cong d.(L_2(q) \times E_7(q)).d$, где $d = (2, q-1)$.

Если $d = 2$, то $Z(G_x) \neq 1$ и получаем противоречие с [12, лемма 1]. Поэтому имеем $d = 1$ и $p = 2$. Из [22, (1.8)] следует, что $H = A_1 \circ E_7$ (A_1, E_7 — полупростые алгебраические группы типов $A_1(K)$ и $E_7(K)$ соответственно), при этом векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет (см. [22, (1.8)]) в указанных в разделе 2 обозначениях следующее разложение:

$$\mathcal{L}(A_1) \oplus \mathcal{L}(E_7) \oplus (1 \otimes 0000001).$$

Пусть A, B — подгруппы группы G_x такие, что $A = A_1^F \cong L_2(q)$, $B = E_7^F \cong E_7(q)$ и $G_x = A \times B$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, то $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$. В случае, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_y$, очевидно, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому далее рассмотрим оставшийся случай, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$.

Сравнение количеств одномерных инвариантных подпространств у A и у D на $\mathcal{L}(A_1) \oplus \mathcal{L}(E_7)$ приводит (в силу сопряженности A и D в G) к тому, что $1 \otimes 0000001$ как KD-модуль имеет прямое одномерное слагаемое. Тогда в силу [1, теорема 2.1] число p не делит 2; противоречие. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.2. $G_x \cong e.(L_3^\epsilon(q) \times E_6^\epsilon(q)).e.2$, где $\epsilon \in \{-1, +1\}$ и $e = (3, q-\epsilon)$.

Если $e = 3$, то $Z(G_x) \neq 1$ и получаем противоречие с [12, лемма 1]. Поэтому имеем $e = 1$. Из [22, (1.8)] следует, что $H = A_2 \circ E_6$ (A_2, E_6 — полупростые алгебраические группы типов $A_2(K)$ и $E_6(K)$ соответственно), при этом векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет (см. [22, (1.8)]) в указанных в разд. 2 обозначениях следующее разложение:

$$\mathcal{L}(A_2) \oplus \mathcal{L}(E_6) \oplus (000001 \otimes 10) \oplus (100000 \otimes 01).$$

Пусть A, B — подгруппы группы G_x такие, что $A = A_2^F \cong L_3^\epsilon(q)$, $B = E_6^F \cong E_6^\epsilon(q)$ и $G_x = A \times B$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, то $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$. В случае, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_y$, очевидно, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому далее рассмотрим оставшийся случай, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$.

Группа A действует тривиально на $\mathcal{L}(E_6)$, и $(000001 \otimes 10) \oplus (100000 \otimes 01)$ как KA-модуль распадается в сумму трехмерных модулей, изоморфных модулю 10 (см. [19]). Тогда $000001 \otimes 10$ и $100000 \otimes 01$ как KD-модули есть прямая сумма одномерных и трехмерных модулей, изоморфных 10. При этом, по крайней мере, один из этих двух модулей должен содержать в качестве прямого слагаемого одномерный тривиальный модуль. Ниже рассуждения будут проведены для модуля $000001 \otimes 10$, для второго модуля $100000 \otimes 01$ рассуждения повторяются практически дословно.

Итак, предположим, что KD-модуль $000001 \otimes 10$ есть прямая сумма тривиальных одномерных модулей и трехмерных модулей, изоморфных 10. Пусть 000001 как KD-модуль есть прямая сумма неразложимых слагаемых $\oplus_i a_i$. Поскольку KD-модуль $000001 \otimes 10$ содержит в качестве прямого слагаемого одномерный тривиальный модуль, то по [10, разд. 2.2] имеем $a_i \cong 10^*$ и по [8, лемма 2.2(ii)] имеем $a_i \otimes 10 \cong W_0 \otimes W_1$, где $\dim(W_0) = 1$, $\dim(W_1) = 8$ и W_1 не содержит прямых одномерных слагаемых. Но тогда W_1 должен раскладываться в прямую сумму трехмерных неразложимых модулей; противоречие.

Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.3. $G_x \cong g.(L_5^\epsilon(q))^2.g.4$, где $g = (5, q-\epsilon)$, $\epsilon \in \{-1, +1\}$.

Если $g = 5$, то $Z(G_x) \neq 1$ и получаем противоречие с [12, лемма 1]. Поэтому имеем $g = 1$. Из [22, (1.8)] следует, что $H = A_4^{(1)} \circ A_4^{(2)}$ ($A_4^{(i)}$ — полупростая алгебраическая группа типа $A_4(K)$,

$i \in \{1,2\}$), при этом векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет (см. [22, (1.8)]) в указанных в разд. 2 обозначениях следующее разложение:

$$\mathcal{L}(A_4^{(1)}) \oplus \mathcal{L}(A_4^{(2)}) \oplus (0010 \otimes 1000) \oplus (0100 \otimes 0001) \oplus (1000 \otimes 0100) \oplus (0001 \otimes 0010).$$

Пусть A, B — подгруппы группы G_x такие, что $A = (A_4^{(1)})^F \cong L_5^\epsilon(q)$, $B = (A_4^{(2)})^F \cong L_5^\epsilon(q)$ и $G_x = A \times B$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, то $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$. В случае, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_y$, очевидно, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому далее рассмотрим оставшийся случай, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$.

Группа A действует тривиально на $\mathcal{L}(B)$, и

$$(0010 \otimes 1000) \oplus (0100 \otimes 0001) \oplus (1000 \otimes 0100) \oplus (0001 \otimes 0010)$$

как KA-модуль распадается в сумму пятимерных и десятимерных модулей (см. [19]). В частности, пространство $\mathcal{L}(R)$ как KA-модуль имеет ровно одно инвариантное подпространство размерности 24. При этом пространство $\mathcal{L}(R)$ как KD-модуль имеет два инвариантных подпространства размерности 24 ($\mathcal{L}(A)$ и $\mathcal{L}(B)$); противоречие.

Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.4. $G_x \cong d^2.(P\Omega_8^+(q))^2.d^2.(S_3 \times 2)$, где $d = (2, q-1)$.

Из [22, (1.8)] следует, что $H = D_4^{(1)} \circ D_4^{(2)}$ ($D_4^{(i)}$ — полупростая алгебраическая группа типа $D_4(K)$, $i \in \{1,2\}$), при этом векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет (см. [22, (1.8)]) в указанных в разд. 2 обозначениях следующее разложение:

$$\mathcal{L}(D_4^{(1)}) \oplus \mathcal{L}(D_4^{(2)}) \oplus (0010 \otimes 0010) \oplus (0001 \otimes 0001) \oplus (1000 \otimes 1000).$$

Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, то из [12, предложение 1] имеем $F(G_{x,y}) = 1$ и $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$, где A, B — подгруппы группы G_x такие, что $A = (D_4^{(1)})^F \cong P\Omega_8^+(q)$, $B = (D_4^{(2)})^F \cong P\Omega_8^+(q)$. В случае, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_y$, очевидно, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому далее рассмотрим оставшийся случай, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$.

Группа A действует тривиально на $\mathcal{L}(B)$, и

$$(0010 \otimes 0010) \oplus (0001 \otimes 0001) \oplus (1000 \otimes 1000)$$

как KA-модуль распадается в сумму восьмимерных модулей (см. [19]). В частности, пространство $\mathcal{L}(R)$ как KA-модуль имеет ровно одно инвариантное подпространство размерности 28. При этом пространство $\mathcal{L}(R)$ как KD-модуль имеет два инвариантных подпространства размерности 28 ($\mathcal{L}(A)$ и $\mathcal{L}(B)$); противоречие.

Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.5. $G_x \cong ({}^3D_4(q))^2.6$.

Из [16, лемма 2.5] следует, что G_x действует транзитивно на прямых множителях группы $\mathrm{soc}(G_x)$, изоморфных ${}^3D_4(q)$. Поэтому $F^*(G_{x,y}) \cong ({}^3D_4(q))^2$ и для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.6. $G_x \cong e^2.(L_3^\epsilon(q))^4.e^2.GL_2(3)$, где $\epsilon \in \{-1, +1\}$ и $e = (3, q-\epsilon)$.

Из [16, лемма 2.5] следует, что G_x действует транзитивно на прямых множителях группы $\mathrm{soc}(G_x)$, изоморфных $L_3^\epsilon(q)$. Поэтому $F^*(G_{x,y}) \cong (L_3^\epsilon(q))^4$ и для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.7. $G_x \cong (U_3(q^2))^2.8$.

Из [16, лемма 2.5] следует, что G_x действует транзитивно на прямых множителях группы $\mathrm{soc}(G_x)$, изоморфных $U^3(q^2)$. Поэтому $F^*(G_{x,y}) \cong (U_3(q^2))^2$ и для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.8. $G_x \cong d^4.(L_2(q))^8.d^4.AGL_3(2)$, где $q > 2$ и $d = (2, q-1)$.

Если $q = 3$, то для группы G выполняется свойство **(Pr)** по [12, предложение 1]. Далее считаем, что $q > 3$.

Из [16, лемма 2.5] следует, что G_x действует транзитивно на прямых множителях группы $\mathrm{soc}(G_x)$, изоморфных $L_2(q)$. Поэтому $F^*(G_{x,y}) \cong (L_2(q))^8$ и для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Таким образом, случай 1 полностью рассмотрен.

Случай 2. Для G_x выполняется утверждение II предложения 1.

Согласно [4, теорема 1(II)] группа G_x в этом случае имеет вид $A.K.B$, где A, B — разрешимые группы и K — простая неабелева группа. Следовательно, по [11, предложение 9] для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 3. Для G_x выполняется утверждение III предложения 1.

Имеем $G_x = C_G(\tau)$, где τ — полевой автоморфизм простого порядка группы G. Из доказательства [17, лемма 3.1] следует, что в этом случае либо $F^*(G_x)$ является простой группой, либо $F(G_x) \neq 1$ и $F(G_x) \leq Z(G_x)$. Если $F^*(G_x)$ является простой группой, то по [11, предложение 20] для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Если $F(G_x) \neq 1$ и $F(G_x) \leq Z(G_x)$, то $Z(G_x) \neq 1$; противоречие с [12, лемма 1].

Случай 4. Для G_x выполняется утверждение IV предложения 1, и группа G_x не является подгруппой Боровика группы G (то есть $F^*(G_x) \not\cong \mathrm{Alt}_5 \times \mathrm{Alt}_6$). Тогда имеем $p > 5$ и $F^*(G_x) \cong \mathrm{Alt}_5 \times L_2(q)$.

В силу [17, лемма 1.5] получаем $G_x = C_G(Y) \times Y^F$, где $Y \leq R$ имеет тип A_1 и $C_G(Y) \cong \mathrm{Sym}_5$. Покажем, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Пусть $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Проверим, что $G_{x,y} = 1$. Поскольку из $G_{x,y} \trianglelefteq G_y$ следует $G_{x,y} = 1$, то далее будем предполагать, что $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$. Тогда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = C_G(Y)'$, и группа $C_G(Y)'$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $C_G(Y) \times Y^F$. Пусть Z — проекция группы D на группу Y^F, $D \cong Z \cong \mathrm{Alt}_5$. Тогда $Z \times C_G(Z)$ — цоколь некоторой подгруппы Боровика группы G (см. [17, лемма 1.5]), и D является некоторой диагональной подгруппой группы $Z \times C_G(Z)$. Таким образом, группа D сопряжена в G с некоторой Alt_5-подгруппой B из Sym_6-подгруппы некоторой подгруппы Боровика группы G. Но 3-элементы групп D и B имеют неизоморфные централизаторы в группе G (см. [2]); противоречие.

Случай 5. Для G_x выполняется утверждение V предложения 1.

Пусть $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Проверим, что $G_{x,y} = 1$. Поскольку из $G_{x,y} \trianglelefteq G_y$ следует $G_{x,y} = 1$, то далее будем предполагать, что $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$. Покажем, что это приводит к противоречию.

Так как для G_x выполняется утверждение V предложения 1, то $\mathrm{soc}(G_x) = F^*(G_x)$ имеет вид $A \times B$ или $A \times B \times B$, где A и B — простые неабелевы группы, $|A| < |B|$. Из строения $F^*(G_x)$ следует, что G_x имеет вид $\mathrm{soc}(G_x).W$, где W — разрешимая группа. Таким образом, $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_x$, $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq \mathrm{soc}(G_x)$.

Покажем, что $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \ntrianglelefteq \mathrm{soc}(G_y)$. Предоположим противное. Тогда

$$\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq \langle G_x, \mathrm{soc}(G_y)\rangle.$$

Если $\langle G_x, \mathrm{soc}(G_y)\rangle = G$, то $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G$; противоречие. Поэтому $\mathrm{soc}(G_y) \leq G_x$, и в силу строения $F^*(G_x)$ имеем $\mathrm{soc}(G_y) = \mathrm{soc}(G_x)$ и $\mathrm{soc}(G_x) \trianglelefteq G$; противоречие. Таким образом, $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \ntrianglelefteq \mathrm{soc}(G_y)$.

Итак, $\mathrm{soc}(G_x)$ имеет вид $A \times B$ или $A \times B \times B$, где A и B — простые неабелевы группы, $|A| < |B|$. При этом $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq \mathrm{soc}(G_x)$ и $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \ntrianglelefteq \mathrm{soc}(G_y)$. Другими словами, $\mathrm{soc}(G_{x,y})^g \ntrianglelefteq \mathrm{soc}(G_x)$ для любого $g \in G$ со свойством $g(x) = y$.

Предположим, что $\mathrm{soc}(G_x)$ имеет вид $A \times B$. Тогда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$. Поскольку $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \ntrianglelefteq \mathrm{soc}(G_y)$, имеем $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = A$ и $\mathrm{soc}(G_{x,y})^g$, где $g \in G$ и $g(x) = y$ — диагональная подгруппа D в группе $A \times B$, сопряженная с A в G.

Предположим, что $\mathrm{soc}(G_x)$ имеет вид $A \times B \times B$. Тогда, аналогично, получаем, что либо в группе $A \times B$ есть диагональная подгруппа D, сопряженная в G с A, либо в группе $B \times B$ есть диагональная подгруппа D, сопряженная в G с B.

Покажем, что в каждом из возникающих здесь случаев 5.1–5.4 это приводит к противоречию.

Случай 5.1. $A \cong L_2(q)$, $B \cong L_3^{\varepsilon}(q)$, где $p \geq 5$.

Из [18] следует, что $H = A_1 \circ A_2$ (A_1, A_2 — полупростые алгебраические группы типов $A_1(K)$ и $A_2(K)$ соответственно).

Если $p \geq 7$, то из [18, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение:

$$(2 \otimes 22) \oplus (6 \otimes 11) \oplus (4 \otimes 30) \oplus (4 \otimes 03) \oplus (2 \otimes 00) \oplus (0 \otimes 11).$$

Как KA-модуль $\mathcal{L}(R)$ состоит из прямой суммы простых неприводимых модулей 0, 2, 4, 6; противоречие с тем, что подпространство $6 \otimes 11$ пространства $\mathcal{L}(R)$ как KD-модуль по [6, лемма 3.1] содержит модуль $T(r)$, где $r \geq 7$.

Если $p = 5$, то из [18, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение:

$$\Delta(2 \otimes 22; 6 \otimes 11) \oplus (4 \otimes 30) \oplus (4 \otimes 03) \oplus (2 \otimes 00) \oplus (0 \otimes 11).$$

Секции прямых слагаемых $\mathcal{L}(R)$ как KA-модуля — это модули 0, 2, 4, 6. Аналогично случаю $p \geq 7$ применение [6, лемма 3.1] приводит к противоречию.

Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 5.2. $A \cong G_2(q)$, $B \cong F_4(q)$.

Из [18] следует, что $H = G_2 \circ F_4$ (G_2, F_4 — полупростые алгебраические группы типов $G_2(K)$ и $F_4(K)$ соответственно).

Если $p \geq 5$, то из [18, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение: $(01 \otimes 0000) \oplus (00 \otimes 1000) \oplus (10 \otimes 0001)$.

Из [19] следует, что $\mathcal{L}(R)$ как KA-модуль состоит из прямой суммы неприводимых модулей размерностей 1, 7 и 14. Следовательно, $10 \otimes 0001$ как KD-модуль раскладывается в прямую сумму неприводимых модулей размерностей 1 и 14. Противоречие следует из [20, предложение 15.12; 19].

Если $p = 3$, то из [18, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение: $\Delta(10 \otimes 0001; 01 \otimes 0000) \oplus (00 \otimes 1000)$. Таким образом, неприводимые прямые слагаемые $\mathcal{L}(R)$ как KA-модуля — это $T(01)$, 10 и 00. Противоречие следует из [20, предложение 15.12; 19].

Если $p = 2$, то из [18, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение: $\Delta(10 \otimes 0001; 00 \otimes 1000) \oplus (01 \otimes 0000)$. Таким образом, $\mathcal{L}(R)$ как KA-модуль содержит в качестве прямого неприводимого слагаемого $T(10)^{24}$ (см. [18, лемма 9.1.5]); противоречие.

Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 5.3. $\mathrm{soc}(G_x)$ имеет вид $A \times B_1 \times B_2$, $A \cong L_2(q)$, $B_1 \cong B_2 \cong G_2(q)$, где $p \geq 3$ и $q \geq 5$.

Из [18] следует, что $H = A_1 \circ G_2^{(1)} \circ G_2^{(2)}$ (A_1, $G_2^{(i)}$ — полупростые алгебраические группы типов $A_1(K)$ и $G_2(K)$ соответственно, $i \in \{1, 2\}$).

Если $p \geq 5$, то из [18, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение:

$$(2 \otimes 10 \otimes 10) \oplus (4 \otimes 10 \otimes 00) \oplus (4 \otimes 00 \otimes 10) \oplus (2 \otimes 00 \otimes 00) \oplus (0 \otimes 01 \otimes 00) \oplus (0 \otimes 00 \otimes 01).$$

Напомним, что если $\mathrm{soc}(G_x)$ имеет вид $A \times B \times B$, то либо в группе $A \times B$ есть диагональная подгруппа $D \cong A$, сопряженная в G с A, либо в группе $B \times B$ есть диагональная подгруппа

$D \cong B$, сопряженная в G с B. Если в группе $A \times B$ есть диагональная подгруппа $D \cong A$, сопряженная в G с A, то получаем противоречие аналогично случаю 5.1. Если в группе $B \times B$ есть диагональная подгруппа $D \cong B$, сопряженная в G с B, то получаем противоречие на основе [20, предложение 15.12; 19].

Если $p = 3$, то из [18, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KM-модуль, имеет следующее разложение:

$$(2 \otimes 10 \otimes 10) \oplus \Delta(4 \otimes 10 \otimes 00; 0 \otimes 01 \otimes 00) \oplus (2 \otimes 00 \otimes 00) \oplus \Delta(4 \otimes 00 \otimes 10; 0 \otimes 00 \otimes 01).$$

Аналогично случаю 5.1 применение [20, предложение 15.12; 19] приводит к противоречию.

Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 5.4. $A \cong L_2(q)$, $B \cong G_2(q^2)$, где $p \geq 3$ и $q \geq 5$.

Из [18] следует, что $H = A_1 \circ G_2^{(1)} \circ G_2^{(2)}$ (A_1, $G_2^{(i)}$ — полупростые алгебраические группы типов $A_1(K)$ и $G_2(K)$ соответственно, $i \in \{1, 2\}$).

Если $p \geq 5$, то из [18, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение (см. случай 5.3):

$$(2 \otimes 10 \otimes 10) \oplus (4 \otimes 10 \otimes 00) \oplus (4 \otimes 00 \otimes 10) \oplus (2 \otimes 00 \otimes 00) \oplus (0 \otimes 01 \otimes 00) \oplus (0 \otimes 00 \otimes 01).$$

Как KA-модуль $\mathcal{L}(R)$ состоит из прямой суммы простых неприводимых модулей размерностей 1, 3 и 5. Следовательно, $\mathcal{L}(R)$ как KD-модуль должен быть вполне приводимым и раскладываться в прямую сумму подпространств размерностей 1, 3 и 5; противоречие.

Если $p = 3$, то из [18, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение (см. случай 5.3):

$$(2 \otimes 10 \otimes 10) \oplus \Delta(4 \otimes 10 \otimes 00; 0 \otimes 01 \otimes 00) \oplus (2 \otimes 00 \otimes 00) \oplus \Delta(4 \otimes 00 \otimes 10; 0 \otimes 00 \otimes 01).$$

Аналогично случаю $p \geq 5$, слагаемое $0 \otimes 01 \otimes 00$ дает секцию размерности 7 (см. [19]); противоречие.

Доказательство теорем 1 и 2 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Benson D., Carlson J.** Nilpotent elements in the Green ring // J. Algebra. 1986. Vol. 104. P. 329–350. doi: 10.1016/0021-8693(86)90219-X .
2. **Borovik A. V.** A maximal subgroup in the simple finite group $E_8(q)$ // Contemporary Mathematics (131). 1992. Part 1, P. 67–79. doi: 10.1090/conm/131.1 .
3. **Cameron P.J.** Suborbits in transitive permutation groups // Combinatorics: Proc. NATO Advanced Study Inst. (Breukelen, 1974). Part 3: Combinatorial Group Theory. Amsterdam: Math. Centrum, 1974. P. 98–129. (Math. Centre Tracts; vol. 57).
4. **Cohen A.M., Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** The local maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic // Proc. London Mat. Soc. (3). 1992. Vol. 64. P. 21–48. doi: 10.1112/plms/s3-64.1.21 .
5. **Conway J.H.** et. al. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p. ISBN: 0-19-853199-0 .
6. **Craven D.A.** On tensor products of simple modules for simple groups // Algebras and Representation Theory. 2013. Vol. 16, iss. 2. P. 377–404. doi: 10.1007/s10468-011-9311-5 .
7. **Doty S., Henke A.** Decomposition of tensor products of modular irreducibles for SL_2 // Q. J. Math. Algebra. 2005. Vol. 56, no. 2. P. 189–207. doi: 10.1093/qmath/hah027 .
8. **Feit W.** The representation theory of finite groups. North-Holland: Elsevier, 1982. 501 p. (North-Holland Mathematical Library). ISBN: 978-0-444-86155-9 .
9. **Фомин А.Н.** Свойства подорбит конечных примитивных групп подстановок // Теоретико-групповые исследования: сб. науч. тр. / УрО АН СССР. Свердловск, 1990. С. 87–94.
10. **Humphreys J.E.** Modular representations of finite groups of Lie type Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 206 p. doi: 10.1017/CBO9780511525940 .

11. **Коныгин А.В.** О примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 387–406.
12. **Коныгин А.В.** К вопросу П. Камерона о примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 187–198.
13. **Knapp W.** Primitive Permutationsgruppen mit einem Subkonstituenten, dessen Stabilisatorgruppe Fittingfrei ist // Arch. Math. 1974. Vol. 25. P. 472–475. doi: 10.1007/BF01238709 .
14. **Knapp W.** Some problems of Wielandt revisited // J. Algebra. 2006. Vol. 302, no. 1. P. 167–185. doi: 10.1016/j.jalgebra.2005.09.013 .
15. **Liebeck M.W., Praeger Ch.E., Saxl J.** On the O'Nan–Scott theorem for finite primitive permutation groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1988. Vol. 44, no. 3. P. 389–396. doi: 10.1017/S144678870003216X .
16. **Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. Vol. 65, no. 2. P. 297–325. doi: 10.1112/plms/s3-65.2.297 .
17. **Liebeck M.W., Seitz G.M.** Maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic // Geom. Dedicata. 1990. Vol. 35, no. 1–3. P. 353–387. doi: 10.1007/BF00147353 .
18. **Liebeck M.W., Seitz G.M.** The maximal subgroups of positive dimension in exceptional algebraic groups. Providence: AMS, 2004. 227 p. (Mem. Amer. Math. Soc.; vol. 169, no 802.) ISBN: 0-8218-3482-7 .
19. **Lubeck F.** Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic // LMS J. Comput. Math. 2001. No. 4. P. 135–169. doi: 10.1112/S1461157000000838 .
20. **Malle G., Testerman D.** Linear algebraic groups and finite groups of Lie type. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. 309 p. doi: 10.1017/CBO9780511994777 .
21. **Reitz H.L.** On primitive groups of odd order // Amer. J. Math. 1904. Vol. 26. P. 1–30. doi: 10.2307/2369903 .
22. **Seitz G.M.** Maximal subgroups of exceptional algebraic groups Providence: AMS, 1991. 197 p. (Mem. Amer. Math. Soc.; vol. 90, no. 441.) ISBN: 0821825046 .
23. Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook / eds. E.I. Khukhro, V.D. Mazurov: [e-resource]. 248 p. Available at: ArXiv:1401.0300v13 [math.GR] June 2018.
24. **Weiss M.J.** On simply transitive groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 401–405. doi: 10.1090/S0002-9904-1934-05871-3 .
25. **Wielandt H.** Finite permutation groups. N Y: Acad. Press, 1964. 114 p. ISBN: 9781483258294 .

Поступила 19.09.2019
После доработки 18.11.2019
Принята к публикации 25.11.2019

Коныгин Антон Владимирович
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: konygin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Benson D., Carlson J. Nilpotent elements in the Green ring. *J. Algebra*, 1986, vol. 104, no. 2, pp. 329–350. doi: 10.1016/0021-8693(86)90219-X .
2. Borovik A. V. A maximal subgroup in the simple finite group $E_8(q)$ *Contemporary Mathematics (131)*, 1992, part 1, pp. 67–79. doi: 10.1090/conm/131.1 .
3. Cameron P.J. Suborbits in transitive permutation groups. In: *Combinatorics: Proc. NATO Advanced Study Inst.* (Breukelen, 1974), Part 3: Combinatorial Group Theory, Math. Centre Tracts, vol. 57. Amsterdam: Math. Centrum, 1974, pp. 98–129.
4. Cohen A.M., Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M. The local maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic. *Proc. London Mat. Soc. (3)*, 1992, vol. 64, no. 1, pp. 21–48. doi: 10.1112/plms/s3-64.1.21 .
5. Conway J.H. et. al. *Atlas of finite groups*. Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0-19-853199-0 .
6. Craven D.A. On tensor products of simple modules for simple groups. *Algebras and Representation Theory*, 2013, vol. 16, iss. 2, pp. 377–404. doi: 10.1007/s10468-011-9311-5 .

7. Doty S., Henke A. Decomposition of tensor products of modular irreducibles for SL_2. *Q.J. Math. Algebra*, 2005, vol. 56, no. 2, pp. 189–207. doi: 10.1093/qmath/hah027 .
8. Feit W. *The representation theory of finite groups*. North Holland: Elsevier, 1982, 501 p. ISBN: 978-0-444-86155-9 .
9. Fomin A.N. Properties of suborbits of finite primitive permutation groups. In: Starostin A.I. (ed.), *Group-theoretic studies*, Collection of scientific works, Sverdlovsk: Ural'skoe Otdelenie AN SSSR Publ., 1990, pp. 87–94.
10. Humphreys J.E. *Modular representations of finite groups of Lie type*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011, 206 p. doi: 10.1017/CBO9780511525940 .
11. Konygin A.V. On primitive permutation groups with a stabilizer of two points normal in the stabilizer of one of them. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2008, vol. 5, pp. 387–406 (in Russian).
12. Konygin A.V. On Cameron's question about primitive permutation groups with stabilizer of two points that is normal in the stabilizer of one of them. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2014, vol. 285, pp. 116–127.
13. Knapp W. Primitive Permutationsgruppen mit einem Subkonstituenten, dessen Stabilisatorgruppe Fittingfrei ist. *Arch. Math.*, 1974, vol. 25, no. 1, pp. 472–475. doi: 10.1007/BF01238709 .
14. Knapp W. Some problems of Wielandt revisited. *J. Algebra*, 2006, vol. 302, no. 1, pp. 167–185. doi: 10.1016/j.jalgebra.2005.09.013 .
15. Liebeck M.W., Praeger Ch.E., Saxl J. On the O'Nan–Scott theorem for finite primitive permutation groups. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 1988, vol. 44, no. 3, pp. 389–396. doi: 10.1017/S144678870003216X .
16. Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M. Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1992, vol. 65, no. 2, pp. 297–325. doi: 10.1112/plms/s3-65.2.297 .
17. Liebeck M.W., Seitz G.M. Maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic. *Geom. Dedicata*, 1990, vol. 35, no. 1-3, pp. 353–387. doi: 10.1007/BF00147353 .
18. Liebeck M.W., Seitz G.M. *The maximal subgroups of positive dimension in exceptional algebraic groups*. Mem. Amer. Math. Soc., vol. 169, no. 802. Providence: AMS, 2004, 227 p. ISBN: 0-8218-3482-7 .
19. Lubeck F. Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic. *LMS J. Comput. Math.*, 2001, vol. 4, pp. 135–169. doi: 10.1112/S1461157000000838 .
20. *Malle G., Testerman D.* Linear algebraic groups and finite groups of Lie type. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 309 p. doi: 10.1017/CBO9780511994777 .
21. Rietz H.L. On primitive groups of odd order. *Amer. J. Math.*, 1904, vol. 26, no. 1, pp. 1–30. doi: 10.2307/2369903 .
22. Seitz G.M. *Maximal subgroups of exceptional algebraic groups*. Mem. Amer. Math. Soc., vol. 90, no. 441. Providence: AMS, 1991, 197 p. ISBN: 0821825046 .
23. *Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook*, Khukhro E.I., Mazurov V.D. (eds), no. 19. Novosibirsk: Russian Academy of Sciences, Siberain Branch, Sobolev Institute of Mathematics, 2018, 248 p. Available at: ArXiv:1401.0300v13 [math.GR] June 2018.
24. Weiss M.J. On simply transitive groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1934, vol. 40, no. 6, pp. 401–405. doi: 10.1090/S0002-9904-1934-05871-3 .
25. Wielandt H. *Finite permutation groups*. N Y: Acad. Press, 1964, 114 p. ISBN: 9781483258294 .

Received September 19, 2019
Revised November 18, 2019
Accepted November 25, 2019

Anton Vladimirovich Konygin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia e-mail: konygin@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. V. Konygin. On primitive permutation groups with the stabilizer of two points normal in the stabilizer of one of them: The case when the socle is a power of a group $E_8(q)$, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 88–98 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.542.5

О ГЛАВНЫХ ФАКТОРАХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ГРУППЫ ${}^2F_4(2^{2n+1})$

В. В. Кораблева

Статья является продолжением работ автора, в которых было получено уточненное описание главных факторов параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унипотентный радикал, для всех конечных простых групп лиева типа (нормальных и скрученных) за исключением групп ${}^2F_4(2^{2n+1})$ и $B_l(2^n)$. В настоящей работе приводится такое описание для группы ${}^2F_4(2^{2n+1})$. Доказана теорема, в которой для каждой параболической максимальной подгруппы группы ${}^2F_4(2^{2n+1})$ дается фрагмент главного ряда, входящий в унипотентный радикал этой параболической подгруппы. Приводится таблица, в которой указываются порождающие элементы соответствующих главных факторов.

Ключевые слова: конечная простая группа, группа лиева типа, параболическая максимальная подгруппа, главный фактор, унипотентный радикал, усиленная версия гипотезы Симса.

V. V. Korableva. On chief factors of parabolic maximal subgroups of the group ${}^2F_4(2^{2n+1})$.

This study continues the author's previous papers where a refined description of the chief factors of a parabolic maximal subgroup contained in its unipotent radical was obtained for all (normal and twisted) finite simple groups of Lie type except for the groups ${}^2F_4(2^{2n+1})$ and $B_l(2^n)$. In present paper, such a description is given the group ${}^2F_4(2^{2n+1})$. We prove a theorem in which, for every parabolic maximal subgroup of ${}^2F_4(2^{2n+1})$, a fragment of the chief series contained in the unipotent radical of this subgroup is given. Generators of the corresponding chief factors are presented in a table.

Keywords: finite simple group, group of Lie type, parabolic maximal subgroup, chief factor, unipotent radical, strong version of the Sims conjecture.

MSC: 20D06, 20G41, 17B22

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-99-106

Введение

Одной из фундаментальных задач теории групп является изучение подгруппового строения групп. В постклассификационной теории конечных групп актуальными стали исследования подгрупп и представлений конечных простых групп. Группы лиева типа составляют основной массив конечных простых групп. Важный класс подстановочных представлений конечных групп лиева типа составляют их параболические представления, т. е. представления на смежных классах по параболическим подгруппам. В ранних работах автора было получено описание примитивных параболических подстановочных представлений всех групп лиева типа (нормальных и скрученных). В настоящее время автор продолжает исследование свойств таких представлений, а именно, изучает главные факторы параболических максимальных подгрупп конечных простых групп лиева типа. С использованием результатов из [9] автором в работах [4–8] было получено уточненное описание главных факторов параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унипотентный радикал, для всех конечных простых групп лиева типа (нормальных и скрученных) за исключением групп ${}^2F_4(2^{2n+1})$ и $B_l(2^n)$. В данной работе приводится такое описание для группы ${}^2F_4(2^{2n+1})$. Заметим, что структура максимальных параболических подгрупп группы ${}^2F_4(2^{2n+1})$ в терминах (B,N)-пар была описана в [12, § 10]. Используя другой подход, автор доказывает следующую теорему в обозначениях разд. 1.

Теорема. *Пусть* $G = {}^2F_4(q)$, *где* $q = 2^{2n+1} \geqslant 2$, *и* P_k *— параболическая максимальная подгруппа в* G *для* $k = 1, 2$. *Тогда фрагмент главного ряда группы* P_k, *лежащий в ее унипотентном радикале* U_k, *при* $k = 1$ *имеет вид* $U_1 = Y_4 > Y_3 > Y_2 > Y_1 > 1$, *где* $\mid Y_4/Y_3 \mid = \mid Y_2/Y_1 \mid = q^4$, $\mid Y_3/Y_2 \mid = \mid Y_1 \mid = q$, *а при* $k = 2$ *имеет вид* $U_2 = Y_5 > Y_4 > Y_3 > Y_2 > Y_1 > 1$, *где* $\mid Y_5/Y_4 \mid = \mid Y_3/Y_2 \mid = \mid Y_1 \mid = q^2$, $\mid Y_4/Y_3 \mid = q^4$, $\mid Y_2/Y_1 \mid = q$. *Кроме того, нижний центральный ряд группы* U_k *имеет вид* $U_1 > Y_2 > Y_1 > 1$ *при* $k = 1$ *и* $U_2 > Y_4 > Y_3 > Y_2 > Y_1 > 1$ *при* $k = 2$.

В конце статьи приводится таблица, в которой указываются порождающие элементы соответствующих главных факторов.

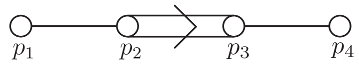
Результаты статьи будут использованы исследователями в доказательстве усиленной версии гипотезы Симса (см. [13]).

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Используемые в статье обозначения из общей теории групп в основном стандартны, их можно найти в [11]. Напомним некоторые из них. Если X и Y — группы, а n — натуральное число, то через $X.Y$ обозначается расширение группы X при помощи группы Y, через X^n — прямое произведение n групп, каждая из которых изоморфна группе X, через n — циклическая группа порядка n. Коммутатор элементов x и y группы обозначается через $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Определения и обозначения, связанные с группами лиева типа, взяты из [10].

Пусть $G = {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2n+1} \geq 2$. Построение и свойства группы G можно найти в [15; 17] или [10]. Группа G определяется как подгруппа группы Шевале $F_4(K)$, где $K = GF(q)$, состоящая из всех элементов, неподвижных относительно некоторого автоморфизма группы $F_4(K)$.

Рассмотрим корневую систему Φ типа F_4 с фундаментальной системой корней $\pi = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ и диаграммой Дынкина



.

Тогда ввиду [1] множество Φ^+ положительных корней системы Φ относительно π состоит из элементов

$$
\begin{array}{lll}
r_1 = p_1, & r_9 = p_2 + 2p_3, & r_{17} = p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4, \\
r_2 = p_2, & r_{10} = p_2 + p_3 + p_4, & r_{18} = p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4, \\
r_3 = p_3, & r_{11} = p_1 + p_2 + 2p_3, & r_{19} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + p_4, \\
r_4 = p_4, & r_{12} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4, & r_{20} = p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 2p_4, \\
r_5 = p_1 + p_2, & r_{13} = p_2 + 2p_3 + p_4, & r_{21} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4, \\
r_6 = p_2 + p_3, & r_{14} = p_1 + 2p_2 + 2p_3, & r_{22} = p_1 + 2p_2 + 4p_3 + 2p_4, \\
r_7 = p_3 + p_4, & r_{15} = p_1 + p_2 + 2p_3 + p_4, & r_{23} = p_1 + 3p_2 + 4p_3 + 2p_4, \\
r_8 = p_1 + p_2 + p_3, & r_{16} = p_2 + 2p_3 + 2p_4, & r_{24} = 2p_1 + 3p_2 + 4p_3 + 2p_4.
\end{array}
$$

Согласно [15] система Φ разбивается на шестнадцать классов:

$$
\begin{array}{ll}
S_1 \;\; = \{r_8, r_{16}, r_{21}, r_{24}\}, & S_2 = \{r_3, r_2, r_6, r_9\}, \\
S_3 \;\; = \{r_{10}, r_{11}, r_{19}, r_{23}\}, & S_4 = \{r_7, r_5, r_{12}, r_{18}\}, \\
S_5 \;\; = \{r_{17}, r_{22}\}, & S_6 = \{r_{15}, r_{20}\}, \\
S_7 \;\; = \{r_{13}, r_{14}\}, & S_8 = \{r_4, r_1\}, \\
S_{-1} = \{-r_8, -r_{16}, -r_{21}, -r_{24}\}, & S_{-2} = \{-r_3, -r_2, -r_6, -r_9\}, \\
S_{-3} = \{-r_{10}, -r_{11}, -r_{19}, -r_{23}\}, & S_{-4} = \{-r_7, -r_5, -r_{12}, -r_{18}\}, \\
S_{-5} = \{-r_{17}, -r_{22}\}, & S_{-6} = \{-r_{15}, -r_{20}\}, \\
S_{-7} = \{-r_{13}, -r_{14}\}, & S_{-8} = \{-r_4, -r_1\}.
\end{array}
$$

Пусть θ — автоморфизм поля K, возводящий его элементы в степень 2^n. В [15] Ри ввел в рассмотрение следующие элементы $\alpha_i(t)$, где $i = 1, 2, \ldots, 12$ и $t \in K$, группы G:

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1(t) = x_{r_3}(t^\theta)x_{r_2}(t)x_{r_6}(t^{\theta+1}), & \alpha_2(t) = x_{r_6}(t^\theta)x_{r_9}(t),\\
\alpha_3(t) = x_{r_4}(t^\theta)x_{r_1}(t), & \alpha_4(t) = x_{r_7}(t^\theta)x_{r_5}(t)x_{r_{12}}(t^{\theta+1}),\\
\alpha_5(t) = x_{r_8}(t^\theta)x_{r_{16}}(t)x_{r_{21}}(t^{\theta+1}), & \alpha_6(t) = x_{r_{10}}(t^\theta)x_{r_{11}}(t)x_{r_{19}}(t^{\theta+1}),\\
\alpha_7(t) = x_{r_{13}}(t^\theta)x_{r_{14}}(t), & \alpha_8(t) = x_{r_{12}}(t^\theta)x_{r_{18}}(t),\\
\alpha_9(t) = x_{r_{15}}(t^\theta)x_{r_{20}}(t), & \alpha_{10}(t) = x_{r_{17}}(t^\theta)x_{r_{22}}(t),\\
\alpha_{11}(t) = x_{r_{19}}(t^\theta)x_{r_{23}}(t), & \alpha_{12}(t) = x_{r_{21}}(t^\theta)x_{r_{24}}(t).
\end{array}
$$

Каждому классу S_i соответствует корневая подгруппа X_{S_i} группы G. Корневые подгруппы X_{S_i} для $1 \le i \le 8$ имеют вид

$$
\begin{array}{ll}
X_{S_1} = \langle \alpha_5(t), \alpha_{12}(u) \mid t, u, \in K\rangle, & X_{S_5} = \langle \alpha_{10}(t) \mid t \in K\rangle,\\
X_{S_2} = \langle \alpha_1(t), \alpha_2(u) \mid t, u \in K\rangle, & X_{S_6} = \langle \alpha_9(t) \mid t \in K\rangle,\\
X_{S_3} = \langle \alpha_6(t), \alpha_{11}(u) \mid t, u \in K\rangle, & X_{S_7} = \langle \alpha_7(t) \mid t \in K\rangle,\\
X_{S_4} = \langle \alpha_4(t), \alpha_8(u) \mid t, u \in K\rangle, & X_{S_8} = \langle \alpha_3(t) \mid t \in K\rangle.
\end{array}
$$

Корневые подгруппы X_{S_i} для $1 \le i \le 8$ порождают максимальную унипотентную подгруппу U группы G. Любой элемент u из U можно однозначно записать в виде $u = \prod_{i=1}^{12} \alpha_i(t_i)$, где $t_i \in K$. Подгруппа Бореля $B = N_G(U)$ группы G является полупрямым произведением подгруппы U и подгруппы Картана H порядка $(q-1)^2$, изоморфной $K^* \times K^*$. Множество π простых корней содержится в объединении классов S_2 и S_8, поэтому в группе G имеется точно две параболические максимальные подгруппы, содержащие B, а именно $P_1 = P_{S_2} = \langle B, X_{S_{-2}}\rangle$ и $P_2 = P_{S_8} = \langle B, X_{S_{-8}}\rangle$. Чтобы определить строение подгруппы U, приведем следующий полный список коммутаторных соотношений между элементами вида $\alpha_i(t)$, где $1 \le i \le 12$ и $t \in K$:

$$
\begin{aligned}
&[\alpha_1(t), \alpha_3(u)] = \alpha_4(tu)\alpha_5(t^{2\theta+1}u^{2\theta})\alpha_7(t^{2\theta+2}u)\alpha_{11}(t^{4\theta+3}u^{2\theta+1})\alpha_{12}(t^{4\theta+3}u^{2\theta+2}),\\
&[\alpha_1(t), \alpha_4(u)] = \alpha_5(tu^{2\theta})\alpha_6(t^{2\theta}u)\alpha_7(t^{2\theta+1}u)\alpha_9(tu^{2\theta+1})\alpha_{10}(t^{2\theta+1}u^{2\theta+1})\\
&\qquad\qquad\qquad \times \alpha_{11}(t^{2\theta+2}u^{2\theta+1})\alpha_{12}(t^{2\theta+1}u^{2\theta+2}),\\
&[\alpha_1(t), \alpha_6(u)] = \alpha_7(tu), \quad [\alpha_1(t), \alpha_{10}(u)] = \alpha_{11}(tu),\\
&[\alpha_1(t), \alpha_8(u)] = \alpha_9(tu)\alpha_{11}(t^{2\theta+2}u)\alpha_{12}(t^{2\theta+1}u^{2\theta}),\\
&[\alpha_1(t), \alpha_9(u)] = \alpha_{10}(t^{2\theta}u)\alpha_{11}(t^{2\theta+1}u)\alpha_{12}(tu^{2\theta}),\\
&[\alpha_2(t), \alpha_3(u)] = \alpha_5(tu^{2\theta})\alpha_6(tu)\alpha_7(t^{2\theta}u)\alpha_8(tu^{2\theta+1})\alpha_9(t^{2\theta}u^{2\theta+1}),\\
&[\alpha_2(t), \alpha_4(u)] = \alpha_7(tu)\alpha_{11}(t^{2\theta}u^{2\theta+1})\alpha_{12}(tu^{2\theta+2}),\\
&[\alpha_2(t), \alpha_8(u)] = \alpha_{10}(tu)\alpha_{11}(t^{2\theta}u)\alpha_{12}(tu^{2\theta}),\\
&[\alpha_2(t), \alpha_9(u)] = \alpha_{11}(tu), \quad [\alpha_3(t), \alpha_5(u)] = \alpha_8(tu),\\
&[\alpha_3(t), \alpha_6(u)] = \alpha_8(t^{2\theta}u)\alpha_9(tu^{2\theta})\alpha_{12}(tu^{2\theta+1}), \quad [\alpha_3(t), \alpha_7(u)] = \alpha_9(t^{2\theta}u)\alpha_{10}(tu^{2\theta}),\\
&[\alpha_3(t), \alpha_{11}(u)] = \alpha_{12}(tu), \quad [\alpha_4(t), \alpha_5(u)] = \alpha_9(tu),\\
&[\alpha_4(t), \alpha_7(u)] = \alpha_{10}(t^{2\theta}u)\alpha_{11}(tu^{2\theta})\alpha_{12}(t^{2\theta+1}u), \quad [\alpha_4(t), \alpha_{10}(u)] = \alpha_{12}(tu),\\
&[\alpha_5(t), \alpha_6(u)] = \alpha_{10}(tu), \quad [\alpha_5(t), \alpha_7(u)] = \alpha_{11}(tu),\\
&[\alpha_6(t), \alpha_9(u)] = \alpha_{12}(tu), \quad [\alpha_7(t), \alpha_8(u)] = \alpha_{12}(tu),\\
&[\alpha_i(t), \alpha_i(u)] = \alpha_{j(i)}(t^{2\theta}u + tu^{2\theta}),
\end{aligned}
$$

где $j(i) = 2, 8, 12, 11$ соответствуют $i = 1, 4, 5, 6$. Все другие коммутаторы $[\alpha_i(t), \alpha_j(u)]$ равны 1. Кроме того, $\alpha_i(t)\alpha_i(u) = \alpha_i(t+u)\alpha_{j(i)}(tu^{2\theta})$ для $i = 1, 4, 5, 6$.

Отметим, что этот список приведен в работе [16], но с ошибкой в формуле для коммутатора $[\alpha_2(t), \alpha_3(u)]$ (см. [14, с. 57]).

2. Доказательство теоремы

Опишем строение параболической максимальной подгруппы P_1, используя ее разложение Леви $P_1 = U_1L_1$, где $U_1 = \langle X_{S_i} \mid i \in \{1, 3, 4, \ldots, 8\}\rangle$ — унипотентный радикал и $L_1 = \langle H, X_{S_2}, X_{S_{-2}}\rangle$ — дополнение Леви в P_1. Рассматривая только те коммутаторные соотношения, в которых не встречаются множители $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, получаем, что $U_1 \cong 2^{2n+1}.2^{4(2n+1)}.2^{5(2n+1)}$. Подгруппа L_1 изоморфна прямому произведению группы ${}^2B_2(q)$ и циклической группы порядка $q-1$ (см. [2]).

Пусть $Y_1 = \langle \alpha_{12}(t) \mid t \in K\rangle$ и $Y_2 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in K, i \in \{8, 9, 10, 11, 12\}\rangle$. Тогда Y_1 является минимальной нормальной подгруппой, а Y_2 — нормальной подгруппой в P_1. Положим $\alpha_{-1}(t) = x_{-r_3}(t^\theta)x_{-r_2}(t)x_{-r_6}(t^{\theta+1})$ и $\alpha_{-2}(t) = x_{-r_6}(t^\theta)x_{-r_9}(t)$. Действие (сопряжением) группы L_1 на фактор-группу Y_2/Y_1 задается следующими коммутаторными соотношениями $(t, u \in K)$:

$$
\begin{aligned}
&[\alpha_8(t), \alpha_1(u)]Y_1 = \alpha_9(tu)\alpha_{11}(tu^{2\theta+2})Y_1,\\
&[\alpha_9(t), \alpha_1(u)]Y_1 = \alpha_{10}(tu^{2\theta})\alpha_{11}(tu^{2\theta+1})Y_1,\\
&[\alpha_{10}(t), \alpha_1(u)]Y_1 = \alpha_{11}(tu)Y_1,\\
&[\alpha_8(t), \alpha_2(u)]Y_1 = \alpha_{10}(tu)\alpha_{11}(tu^{2\theta})Y_1,\\
&[\alpha_9(t), \alpha_2(u)]Y_1 = \alpha_{11}(tu)Y_1,\\
&[\alpha_9(t), \alpha_{-1}(u)]Y_1 = \alpha_8(tu)Y_1,\\
&[\alpha_{10}(t), \alpha_{-1}(u)]Y_1 = \alpha_8(tu^{2\theta+1})\alpha_9(tu^{2\theta})Y_1,\\
&[\alpha_{11}(t), \alpha_{-1}(u)]Y_1 = \alpha_8(tu^{2\theta+2})\alpha_{10}(tu)Y_1,\\
&[\alpha_{10}(t), \alpha_{-2}(u)]Y_1 = \alpha_8(tu)Y_1,\\
&[\alpha_{11}(t), \alpha_{-2}(u)]Y_1 = \alpha_8(tu^{2\theta})\alpha_9(tu)Y_1,
\end{aligned}
$$

поэтому L_1 действует неприводимо на Y_2/Y_1. Получаем фрагмент $Y_2 > Y_1 > 1$ главного ряда группы P_1.

Действие (сопряжением) группы L_1 на фактор-группу U_1/Y_2 задается следующими соотношениями $(t, u \in K)$:

$$
\begin{aligned}
&[\alpha_3(t), \alpha_1(u)]Y_2 = \alpha_4(tu)\alpha_5(t^{2\theta}u^{2\theta+1})\alpha_7(tu^{2\theta+2})Y_2,\\
&[\alpha_4(t), \alpha_1(u)]Y_2 = \alpha_5(t^{2\theta}u)\alpha_6(tu^{2\theta})\alpha_7(tu^{2\theta+1})Y_2,\\
&[\alpha_6(t), \alpha_1(u)]Y_2 = \alpha_7(tu)Y_2,\\
&[\alpha_3(t), \alpha_2(u)]Y_2 = \alpha_5(t^{2\theta}u)\alpha_6(tu)\alpha_7(tu^{2\theta})Y_2,\\
&[\alpha_4(t), \alpha_2(u)]Y_2 = \alpha_7(tu)Y_2,\\
&[\alpha_4(t), \alpha_{-1}(u)]Y_2 = \alpha_3(tu)Y_2,\\
&[\alpha_6(t), \alpha_{-1}(u)]Y_2 = \alpha_3(tu^{2\theta+1})\alpha_4(tu^{2\theta})\alpha_5(t^{2\theta}u)Y_2,\\
&[\alpha_7(t), \alpha_{-1}(u)]Y_2 = \alpha_3(tu^{2\theta+2})\alpha_5(t^{2\theta}u^{2\theta+1})\alpha_6(tu)Y_2,\\
&[\alpha_6(t), \alpha_{-2}(u)]Y_2 = \alpha_3(tu)Y_2,\\
&[\alpha_7(t), \alpha_{-2}(u)]Y_2 = \alpha_3(tu^{2\theta})\alpha_4(tu)\alpha_5(t^{2\theta}u)Y_2.
\end{aligned}
$$

Это действие приводимо. Положим $Y_3 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in K, i \in \{5, 8, 9, 10, 11, 12\}\rangle$. Тогда подгруппа L_1 нормализует Y_3 и действует неприводимо на факторах U_1/Y_3 и Y_3/Y_2. Получаем последний фрагмент $U_1 = Y_4 > Y_3 > Y_2$ главного ряда группы P_1, лежащий в U_1.

Рассмотрим другую параболическую максимальную подгруппу P_2. Она имеет разложение Леви $P_2 = U_2L_2$, где $U_2 = \langle X_{S_i} \mid i \in \{1, 2, \ldots, 7\}\}\rangle$ и $L_2 = \langle H, X_{S_8}, X_{S_{-8}}\rangle$. Рассматривая только те коммутаторные соотношения, в которых не встречается множитель $\alpha_3(t)$, получаем, что $L_2 \cong GL_2(q)$ и $U_2 \cong 2^{2(2n+1)}.2^{2n+1}.2^{2(2n+1)}.2^{4(2n+1)}.2^{2(2n+1)}$ (см. [3]).

Из коммутаторных соотношений в группе U_2 следует, что подгруппа $Y_1 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in K, i \in \{11, 12\}\rangle$ является нормальной подгруппой в P_2. Положим $\alpha_{-3}(t) = x_{-r_4}(t^\theta)x_{-r_1}(t)$. Действие группы L_2 на Y_1 задается двумя соотношениями $(t, u \in K)$

$$[\alpha_{11}(t), \alpha_3(u)] = \alpha_{12}(tu), \quad [\alpha_{12}(t), \alpha_{-3}(u)] = \alpha_{11}(tu).$$

Это действие неприводимо. Получаем фрагмент $Y_1 > 1$ главного ряда группы P_2.

Приведем нетривиальные коммутаторные соотношения в фактор-группе U_2/Y_1 $(t, u \in K)$:

$$\begin{aligned}
&[\alpha_1(t), \alpha_4(u)]Y_1 = \alpha_5(tu^{2\theta})\alpha_6(t^{2\theta}u)\alpha_7(t^{2\theta+1}u)\alpha_9(tu^{2\theta+1})\alpha_{10}(t^{2\theta+1}u^{2\theta+1})Y_1,\\
&[\alpha_1(t), \alpha_6(u)]Y_1 = \alpha_7(tu)Y_1, \quad [\alpha_1(t), \alpha_8(u)]Y_1 = \alpha_9(tu)Y_1,\\
&[\alpha_1(t), \alpha_9(u)]Y_1 = \alpha_{10}(t^{2\theta}u)Y_1, \quad [\alpha_2(t), \alpha_4(u)]Y_1 = \alpha_7(tu)Y_1,\\
&[\alpha_2(t), \alpha_8(u)]Y_1 = \alpha_{10}(tu)Y_1, \quad [\alpha_4(t), \alpha_5(u)]Y_1 = \alpha_9(tu)Y_1,\\
&[\alpha_4(t), \alpha_7(u)]Y_1 = \alpha_{10}(t^{2\theta}u)Y_1, \quad [\alpha_5(t), \alpha_6(u)]Y_1 = \alpha_{10}(tu)Y_1,\\
&[\alpha_1(t), \alpha_1(u)]Y_1 = \alpha_2(t^{2\theta}u + tu^{2\theta})Y_1, \quad [\alpha_4(t), \alpha_4(u)]Y_1 = \alpha_8(t^{2\theta}u + tu^{2\theta})Y_1 \text{ и}\\
&\quad \alpha_1(t)\alpha_1(u)Y_1 = \alpha_1(t+u)\alpha_2(tu^{2\theta})Y_1, \quad \alpha_4(t)\alpha_4(u)Y_1 = \alpha_4(t+u)\alpha_8(tu^{2\theta})Y_1.
\end{aligned}$$

Рассмотрим подгруппу $Y_2 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in K, i \in \{10, 11, 12\}\rangle$. Фактор-группа Y_2/Y_1 является минимальной нормальной подгруппой в P_2/Y_1. Получаем фрагмент $Y_2 > Y_1$ главного ряда группы P_2.

Приведем нетривиальные соотношения в фактор-группе U_2/Y_2 $(t, u \in K)$:

$$\begin{aligned}
&[\alpha_1(t), \alpha_4(u)]Y_2 = \alpha_5(tu^{2\theta})\alpha_6(t^{2\theta}u)\alpha_7(t^{2\theta+1}u)\alpha_9(tu^{2\theta+1})Y_2,\\
&[\alpha_1(t), \alpha_6(u)]Y_2 = \alpha_7(tu)Y_2, \qquad [\alpha_1(t), \alpha_8(u)]Y_2 = \alpha_9(tu)Y_2,\\
&[\alpha_2(t), \alpha_4(u)]Y_2 = \alpha_7(tu)Y_2, \qquad [\alpha_4(t), \alpha_5(u)]Y_2 = \alpha_9(tu)Y_2,\\
&[\alpha_1(t), \alpha_1(u)]Y_2 = \alpha_2(t^{2\theta}u + tu^{2\theta})Y_2, \quad [\alpha_4(t), \alpha_4(u)]Y_2 = \alpha_8(t^{2\theta}u + tu^{2\theta})Y_2 \text{ и}\\
&\quad \alpha_1(t)\alpha_1(u)Y_2 = \alpha_1(t+u)\alpha_2(tu^{2\theta})Y_2, \quad \alpha_4(t)\alpha_4(u)Y_2 = \alpha_4(t+u)\alpha_8(tu^{2\theta})Y_2.
\end{aligned}$$

Рассмотрим нормальную в P_2 подгруппу $Y_3 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in K, i \in \{7, 9, 10, 11, 12\}\rangle$. Действие группы L_2 на Y_3/Y_2 задается соотношениями $(t, u \in K)$

$$[\alpha_7(t), \alpha_3(u)]Y_2 = \alpha_9(tu^{2\theta})Y_2, \quad [\alpha_9(t), \alpha_{-3}(u)]Y_2 = \alpha_7(tu)Y_2.$$

Это действие неприводимо. Получаем фрагмент $Y_3 > Y_2$ главного ряда группы P_2.

Приведем нетривиальные коммутаторные соотношения в фактор-группе U_2/Y_3 $(t, u \in K)$:

$$\begin{aligned}
&[\alpha_1(t), \alpha_4(u)]Y_3 = \alpha_5(tu^{2\theta})\alpha_6(t^{2\theta}u)Y_3, \quad [\alpha_1(t), \alpha_1(u)]Y_3 = \alpha_2(t^{2\theta}u + tu^{2\theta})Y_3,\\
&[\alpha_4(t), \alpha_4(u)]Y_3 = \alpha_8(t^{2\theta}u + tu^{2\theta})Y_3 \text{ и}\\
&\quad \alpha_1(t)\alpha_1(u)Y_3 = \alpha_1(t+u)\alpha_2(tu^{2\theta})Y_3, \quad \alpha_4(t)\alpha_4(u)Y_3 = \alpha_4(t+u)\alpha_8(tu^{2\theta})Y_3.
\end{aligned}$$

Рассмотрим подгруппу $Y_4 = \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in K, i \in \{2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}\rangle$, нормальную в P_2. Неприводимое действие L_2 на фактор-группу Y_4/Y_3 задается соотношениями $(t, u \in K)$

$$\begin{aligned}
&[\alpha_2(t), \alpha_3(u)]Y_3 = \alpha_5(tu^{2\theta})\alpha_6(tu)\alpha_8(tu^{2\theta+1})Y_3, \quad [\alpha_6(t), \alpha_3(u)]Y_3 = \alpha_8(tu^{2\theta})Y_3,\\
&[\alpha_5(t), \alpha_3(u)]Y_3 = \alpha_8(tu)Y_3, \quad [\alpha_5(t), \alpha_{-3}(u)]Y_3 = \alpha_2(tu^{2\theta})Y_3,\\
&[\alpha_6(t), \alpha_{-3}(u)]Y_3 = \alpha_2(tu)Y_3, \quad [\alpha_8(t), \alpha_{-3}(u)]Y_3 = \alpha_2(tu^{2\theta+1})\alpha_5(tu)\alpha_6(tu^{2\theta})Y_3.
\end{aligned}$$

Получаем фрагмент $Y_4 > Y_3$ главного ряда группы P_2.

Главные факторы параболических максимальных подгрупп в $^2F_4(2^{2n+1})$

P_k	Y_{j+1}/Y_j	$\alpha_i(t_i) : Y_{j+1}/Y_j = \prod_i \langle \alpha_i(t_i) \mid t_i \in K\rangle Y_j/Y_j$
P_1	Y_4/Y_3	$\alpha_3(t_3), \alpha_4(t_4), \alpha_6(t_6), \alpha_7(t_7)$
P_1	Y_3/Y_2	$\alpha_5(t_5)$
P_1	Y_2/Y_1	$\alpha_8(t_8), \alpha_9(t_9), \alpha_{10}(t_{10}), \alpha_{11}(t_{11})$
P_1	$Y_1/1$	$\alpha_{12}(t_{12})$
P_2	Y_5/Y_4	$\alpha_1(t_1), \alpha_4(t_4)$
P_2	Y_4/Y_3	$\alpha_2(t_2), \alpha_5(t_5), \alpha_6(t_6), \alpha_8(t_8)$
P_2	Y_3/Y_2	$\alpha_7(t_7), \alpha_9(t_9)$
P_2	Y_2/Y_1	$\alpha_{10}(t_{10})$
P_2	$Y_1/1$	$\alpha_{11}(t_{11}), \alpha_{12}(t_{12})$

Подгруппа U_2/Y_4 нормальна в P_2/Y_4. Неприводимое действие группы L_2 на эту подгруппу задается двумя коммутаторными соотношениями $(t, u \in K)$

$$[\alpha_1(t), \alpha_3(u)]Y_4 = \alpha_4(tu)Y_4, \quad [\alpha_4(t), \alpha_{-3}(u)]Y_4 = \alpha_1(tu)Y_4,$$

а $U_2 = Y_5 > Y_4$ — последний фрагмент главного ряда группы P_2, содержащийся в унипотентном радикале U_2.

Утверждение теоремы о нижнем центральном ряде группы U_k легко следует из приведенных выше рассуждений.

Теорема доказана.

Занесем полученные при доказательстве теоремы результаты в таблицу (см. выше). Во втором столбце таблицы укажем главные факторы Y_{j+1}/Y_j фрагмента главного ряда, входящего в унипотентный радикал, каждой параболической максимальной подгруппы P_k, указанной в первом столбце. Третий столбец нашей таблицы содержит порождающие элементы $\alpha_i(t_i)Y_j$ главного фактора $Y_{j+1}/Y_j = \prod_i U_iY_j/Y_j$, где $U_i = \langle \alpha_i(t) \mid t \in K\rangle$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Гл. VII-VIII. М.: Мир, 1978. 342 с.
2. **Васильев А.В.** Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп скрученного типа // Алгебра и логика. 1998 Т. 37, № 1. С. 17–35.
3. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп $^2F_4(q)$ and $^3D_4(q^3)$ // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 1. С. 69–76. doi 10.4213/mzm815 .
4. **Кораблева В.В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп конечных простых групп нормального лиева типа // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 764–782.
5. **Кораблева В.В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы $^2E_6(q^2)$ // Алгебра и математическая логика, теория и приложения: тез. Междунар. конф. Казань, 2014. С. 82–83.
6. **Кораблева В.В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы $^3D_4(q^3)$ // Мальцевские чтения: тез. Междунар. конф., посвящ. 75-летию Ю. Л. Ершова. Новосибирск, 2015. С. 106.
7. **Кораблева В.В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп скрученных классических групп // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 1100–1110. doi 10.17377/smzh.2015.56.510 .
8. **Кораблева В.В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп специальных конечных простых групп исключительного лиева типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 6. С. 1332–1340. doi 10.17377/smzh.2017.58.612 .
9. **Azad H., Barry M., Seitz G.** On the structure of parabolic subgroup // Com. in Algebra. 1990. Vol. 18, no. 2. P. 551–562. doi 10.1080/00927879008823931 .
10. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972. 332 p. ISBN: 0471137359 .
11. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p. ISBN: 0198531990 .

12. **Fong P., Seitz G.** Groups with (B, N)-pair of rank 2, II // Invent. Math. 1974. Vol. 24. P. 191–239.
13. **Kondrat'ev A.S., Trofimov V.I.** Vertex stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture // Proc. Conf. "Groups St Andrews 2017 in Birmingham". Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2019. P. 419–426. (London Math. Soc. Note Ser. 2019; vol. 455.)
14. **Malle G.** The maximal subgroups of $^2F_4(q^2)$ // J. Algebra. 1991. Vol. 139. P. 52–69. doi 10.1016/0021-8693(91)90283-E.
15. **Ree R.** A family of simple groups associated with simple Lie algebra type F_4// Am. J. Math. 1961. Vol. 83. P. 401–420. doi 10.2307/2372886.
16. **Shinoda K.** A characterization of odd order extensions of the Ree groups $^2F_4(q)$// J. Fac. Sci. Univ. 1975. Vol. 22. P. 79–102.
17. **Tits J.** Algebraic and abstract simple groups // Ann. of Math. 1964. Vol. 80. P. 313–329. doi 10.2307/1970394.

Поступила 7.11.2019
После доработки 22.11.2019
Принята к публикации 25.11.2019

Кораблева Вера Владимировна
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры КБ и ПА
Челябинский государственный университет
г. Челябинск;
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: vvki@csu.ru

REFERENCES

1. Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie (Chapt. IV–VI).* Paris: Hermann, 1968, 282 p. doi: 10.1007/978-3-540-34491-9. Translated to Russian under the title *Gruppy i algebry Li (glavy IV – VI).* Moscow: Mir Publ., 1972, 334 p.
2. Vasil'ev A.V. Minimal permutation representations of finite simple exceptional twisted groups. *Algebra and Logic*, 1998, vol. 37, no. 1, pp. 9–20. doi 10.1007/BF02684081.
3. Korableva V.V. Parabolic permutation representations of the groups $^2F_4(q)$ and $^3D_4(q^3)$. *Math. Notes*, 2000, vol. 67, no. 1, pp. 55–60. doi: 10.1007/BF02675792.
4. Korableva V.V. On the chief factors of parabolic maximal subgroups of finite simple groups of normal Lie type. *Sib. Math. J.*, 2014, vol. 55, no. 4, pp. 622–638. doi: 10.1134/S0037446614040053.
5. Korableva V.V. On chief factors of parabolic maximal subgroups of the group $^2E_6(q^2)$. *International Conf. Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications*, Collection of Abstracts, Kazan: 2014, pp. 82–83 (in Russian).
6. Korableva V.V. On chief factors of parabolic maximal subgroups of the group $^3D_4(q^3)$. *International Conf. Mal'tsev Meeting dedicated to 75th anniversary of Yuri L. Ershov*, Collection of Abstracts, Novosibirsk: 2015. P. 106 (in Russian).
7. Korableva V.V. On the chief factors of maximal parabolic subgroups of twisted classical groups. *Sib. Math. J.*, 2015, vol. 56, no. 5, pp. 879–887. doi 10.1134/S0037446615050109.
8. Korableva V.V. On the chief factors of parabolic maximal subgroups of special finite simple groups of exceptional Lie type. *Sib. Math. J.*, 2017, vol. 58, no. 6, pp. 1034–1041. doi 10.1134/S003744661706012X.
9. Azad H., Barry M., Seitz G. *On the structure of parabolic subgroup.* Comm. Algebra. 1990. vol. 18, no. 2. pp. 551–562. doi 10.1080/00927879008823931.
10. Carter R.W. *Simple groups of Lie type.* London: John Wiley and Sons, 1972. 331 p.
11. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0198531990.
12. Fong P., Seitz G. Groups with (B,N)-pair of rank 2, II . *Invent.Math.* 1974. vol. 24. pp. 191–239.

13. Kondrat'ev A.S., Trofimov V.I. Vertex stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. Proc. conf. "Groups St Andrews 2017 in Birmingham". Cambridge: Cambridge University Press, 2019 (London Math. Soc. Note Ser. 2019. Vol. 455. pp. 419–426.)
14. Malle G. The Maximal subgroups of ${}^2F_4(q^2)$ *J. Algebra*, 1991, vol. 139, pp. 52–69. doi 10.1016/0021-8693(91)90283-E .
15. Ree R. A family of simple groups associated with simple Lie algebra type F_4. *Amer. J. Math.*, 1961, vol. 83, pp. 401–420. doi 10.2307/2372886 .
16. Shinoda K. A characterization of odd order extensions of the Ree groups ${}^2F_4(q)$. *J. Fac. Sci. Univ*, 1975, vol. 22, pp. 79–102.
17. Tits J. Algebraic and abstract simple groups. *Ann. of Math.*, 1964, vol. 80, pp. 313–329. doi 10.2307/1970394 .

Received November 11, 2019
Revised November 22, 2019
Accepted November 25, 2019

Vera Vladimirovna Korableva, Dr. Phys.-Math. Sci., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 45400 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: vvk@csu.ru .

Cite this article as: V. V. Korableva. On the chief factors of parabolic maximal subgroups of the group ${}^2F_4(2^{2n+1})$, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 99–106 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.552

ВОПРОСЫ СТРОЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ПОЧТИ-ПОЛЕЙ

О. В. Кравцова, В. М. Левчук

Полуполем называют простое кольцо, в котором ненулевые элементы по умножению образуют лупу. К более общему понятию квазиполя (в случае ассоциативного кольца — почти-поля) приходим, ослабляя двустороннюю дистрибутивность до односторонней. Исследуемые вопросы строения конечных полуполей и квазиполей изучались в различных ситуациях уже давно. В последние годы они отмечались явно в ряде статей. Ранее эти вопросы были решены для полуполей Кнута — Ру́а и Хентзела — Ру́а — контрпримеры порядков 32 и 64 к известной гипотезе Венэ. Для описания некоторых квазиполей малых порядков использовались также методы компьютерной алгебры. Известно, что центр конечного полуполя всегда содержит простое подполе. Авторы показывают, что центр конечного почти-поля Q содержит простое подполе P кроме четырех почти-полей Цассенхауза порядков 5^2, 7^2, 11^2, 29^2. Ядро почти-поля Q всегда содержит P. При достаточно общих условиях перечислены максимальные подполя конечного почти-поля. Группы автоморфизмов почти-поля Q и его мультипликативной группы Q^* были найдены ранее. Метацикличность группы Q^* позволяет выписать явно спектр групповых порядков ее элементов.

Ключевые слова: квазиполе, полуполе, почти-поле, максимальное подполе, спектр.

O. V. Kravtsova, V. M. Levchuk. Questions of the structure of finite near-fields.

A semifield is a simple ring in which nonzero elements with respect to multiplication form a loop. Weakening distributivity from two-sided to one-sided yields the more general notion of quasifield (near-field under the condition of associativity). Problems of the structure of finite semifields and quasifields have been studied in various cases for a long time. In recent years, they have been mentioned in a number of papers. These problems were solved earlier for Knuth–Rúa and Hentzel–Rúa semifields, which are counterexamples of orders 32 and 64 to Wene's known hypothesis. The methods of computer algebra were used to describe some quasifields of small orders. It is known that the center of a finite semifield always contains the prime subfield. We show that the center of a finite near-field Q contains the prime subfield P except for Zassenhaus' four near-fields of orders 5^2, 7^2, 11^2, and 29^2. The kernel of a near-field Q always contains P. The maximal subfields of a finite near-field are enumerated under sufficiently general conditions. The automorphism groups of a near-field Q and of its multiplicative group Q^* were found earlier. The group Q^* is metacyclic, which makes it possible to explicitly find the spectrum of group orders of its elements.

Keywords: quasifield, semifield, near-field, maximal subfield, spectrum.

MSC: 12K05, 12K10, 17A35

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-107-117

Введение

Полуполе (квазитело в терминологии Куроша [1]) — это простое кольцо, в котором ненулевые элементы по умножению образуют лупу. К более общему понятию *квазиполя* приходим, ослабляя двустороннюю дистрибутивность до односторонней. Тесно связанные исследования проективных плоскостей трансляций и координатизирующих квазиполей проводятся уже более века (Диксон [2], Веблен и Маклаган Веддерберн [3]; см. также [4; 5]).

Следующие вопросы структурного строения конечных полуполей и квазиполей исследовались в различных ситуациях уже давно и записаны в [6].

(A) *Перечислить максимальные подполя, найти их число и возможные порядки.*

(B) *Выявить конечные квазиполя Q с неоднопорожденной лупой Q^*.*

Г и п о т е з а: *лупа Q^* всякого конечного полуполя Q однопорождена.*

(C) *Выявить, какие возможны спектры лупы Q^* конечного полуполя и квазиполя Q.*

(D) *Найти порядок группы автоморфизмов.*

Эти вопросы исследовались для полуполей порядка 16 — наименьший порядок собственных полуполей (т. е. не являющихся полем), полуполей Кнута — Ру́а и Хентзела — Ру́а — контрпримеры порядков 32 и 64 к гипотезе Венэ [7], для других квазиполей малых порядков (см. также [6]).

Целочисленные кратные единицы каждого конечного квазиполя естественно образуют его простое подполе (см. лемму 1 в разд. 1). Известно, что в случае полуполя простое подполе всегда лежит в центре. Оказывается, это не всегда верно даже в ассоциативном квазиполе (*почти-поле*). Все исключения перечисляет теорема 1. Она выявляет взаимосвязи центра, ядра и простого подполя для всех конечных почти-полей.

Вопросы (A)–(D) для конечных почти-полей удается в основном решить в разд. 2 и 3 (см. теоремы 2–4). Мы опираемся прежде всего на результаты Цассенхауза [8].

1. Почти-поля и 2-транзитивные группы

Отказ в определении поля от коммутативности приводит к понятию тела; отказываясь и от ассоциативности, приходят к понятию полуполя. К более общему понятию приводит ослабление двусторонней дистрибутивности до односторонней.

Определение. Множество $Q = (Q, +, \cdot)$ с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ называют *правым квазиполем*, если выполняются следующие аксиомы:

1) $Q^+ = (Q, +)$ — абелева группа;

2) $Q^* = (Q\backslash\{0\}, \cdot)$ — лупа;

3) $x \cdot 0 = 0$ для любого $x \in Q$;

4) правый дистрибутивный закон $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ для любых $x, y, z \in Q$;

5) если $a, b, c \in Q$ и $a \neq b$, то уравнение $x \cdot a = x \cdot b + c$ однозначно разрешимо в Q.

Левое квазиполе определяют аналогично. Из аксиом 1 и 4 вытекает равенство $0 \cdot x = 0$. Для конечного правого квазиполя аксиома 5 следует из аксиом 1–4 (Хьюз и Пайпер [4, теорема 7.3]). Напомним, что множество L с бинарной операцией $\cdot$ называется *лупой*, если в L существует нейтральный элемент и уравнения $a \cdot x = b$ и $x \cdot a = b$ однозначно разрешимы при любых $a, b \in L$, [1; 9]. В частности, группа — это ассоциативная лупа.

В следующем известном утверждении [6, предложение 1] с доказательством в [10, лемма 2]) в любом квазиполе выделяется подкольцо, которое образуют целочисленные кратные единицы

$$ke := \underbrace{e + e + \ldots\ + e}_{k\ \text{раз}} = ek, \quad (-k)e := -(ke) = e(-k) \quad (k > 0), \quad 0e = 0 = e0.$$

Лемма 1. *Пусть Q — правое квазиполе с единицей e. Тогда*

(i) *отображение $\pi : k \to ke$ $(k \in \mathbb{Z})$ есть гомоморфизм кольца $\mathbb{Z}$ в Q;*

(ii) *Q — левый $\pi(\mathbb{Z})$-модуль, и либо $\pi(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, либо $\pi(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p$ для некоторого простого числа p.*

В силу леммы 1 понятие характеристики поля переносится на квазиполя. Если характеристика $p = char\, Q$ квазиполя Q положительна, то $\pi(\mathbb{Z})$ является единственным минимальным в Q (и простым) подполем и $\pi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$. Любое полуполе есть кольцо и поэтому двусторонний $\pi(\mathbb{Z})$-модуль. Как следствие леммы 1 вытекает известное утверждение [5, замечание 5.56]: *в конечном полуполе простое подполе всегда лежит в центре.* Это не всегда так даже в ассоциативном (правом) квазиполе, называемом *почти-полем.*

Центр $Z(Q)$ почти-поля Q определяется равенством $Z(Q) = \{x \in Q \colon xy = yx\ \forall y \in Q\}$. Левый дистрибутивный закон в почти-поле не обязан выполняться. *Ядром почти-поля Q* называют множество $K(Q)$ элементов $x \in Q$, которые можно выносить за знак любой суммы произведений, где x участвует как общий левый множитель слагаемых:

$$K(Q) = \{x \in Q \colon x(y+z) = xy + xz \ \forall y, z \in Q\}.$$

Основной в этом разделе является теорема 1.

Далее для доказательства теоремы 1 и в следующих разделах нам потребуются некоторые известные понятия и результаты о конечных почти-полях.

Все конечные почти-поля описал в 1936 г. Цассенхауз [8], связывая с каждым из них определенную 2-транзитивную группу (см. также [9, гл. 20]). Группу G подстановок множества Ω называют 2-*транзитивной*, если любая пара символов из Ω переводится подходящей подстановкой $T \in G$ в фиксированную (произвольно) пару символов из Ω. Если каждая такая подстановка T определена однозначно, группу G называют *точно* 2-*транзитивной.* В этом случае группе G в [8] сопоставлена алгебраическая система $K = (\Omega, +, \cdot)$ с нулем 0 и единицей 1:

$$a + 0 = a = 0 + a, \quad a0 = 0 = 0a, \quad a1 = a = 1a \quad (a \in \Omega).$$

Подстановки в G, переставляющие все символы, образуют вместе с единичной подстановкой нормальную абелеву подгруппу A, транзитивную на Ω. Через M обозначается стабилизатор символа 0. Сумма $y + b = z$ в Ω и произведение $xm = t$ ненулевых элементов в Ω корректно определяются выбором подстановок соответственно

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & y & \dots \\ b & \dots & z & \dots \end{pmatrix} \in A \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & x & \dots \\ 0 & m & \dots & t & \dots \end{pmatrix} \in M.$$

Согласно [9, теорема 20.7.1] $K = (\Omega, +, \cdot)$ есть почти-поле, причем $K^* := (K \setminus \{0\}, \cdot) \simeq M$ и $(K, +) \simeq A$, а группа преобразований $y = xm + b$, $m \neq 0$, изоморфна G. Обратно, указанные преобразования любого конечного почти-поля K образуют точно 2-транзитивную группу.

Известный способ построения конечного почти-поля как специального расширения его центра $GF(q)$ (поле Галуа порядка q) впервые начал применять еще Диксон. Это расширение, построенное на аддитивной группе $(GF(q^n), +)$, характеризуется порядком q центра и степенью n (*пара Диксона*), которые выбирают произвольно с условиями:

1) каждый простой делитель числа n делит $q - 1$;

2) если $q \equiv 3 \pmod 4$, то $n \not\equiv 0 \pmod 4$.

Построенные конструкцией Диксона — Цассенхауза почти-поля порядка q^n с центром $GF(q)$ называют *почти-полями Диксона.* По теореме Цассенхауза [8; 9, теорема 20.7.2] *все конечные почти-поля Q исчерпываются почти-полями Диксона и, кроме того, семью исключительными почти-полями порядка p^2 для простых чисел $p = 5, 7, 11$ (два почти-поля), $23, 29, 59$.*

Известно и строение силовских подгрупп в Q^* [9, лемма 20.7.K4]: *силовская r-подгруппа S_r группы Q^* является циклической или при $r = 2$ (обобщенной) кватернионной группой.*

Теорема 1. *В конечном почти-поле центр и ядро совпадают, являются подполями и содержат простое подполе. Исключения составляют точно четыре почти-поля Q, для которых порядки $|Q|$ равны 5^2, 7^2, 11^2 и 29^2, порядки центров $Z(Q^*)$ группы Q^* равны $2, 2, 2$ и 14 соответственно, а ядро $K(Q)$ есть простое подполе.*

Доказательство. Известно [4, теорема 7.2], что ядро любого квазиполя есть тело. Следовательно, в конечном почти-поле Q ядро является подполем и содержит простое подполе. Непосредственно из определений ядра и центра получаем также включение $Z(Q) \subseteq K(Q)$.

Для почти-полей Диксона, по построению, центр является подполем и содержит простое подполе, а согласно [8; 11, § 2] ядро и центр совпадают.

Исключительным почти-полям Q порядка p^2 (почти-поля Цассенхауза) присваиваем один из типов I–VII соответственно нумерации после теоремы 20.7.2 в [9]. В каждом из них ядро,

Таблица 1

Исключительные почти-поля Q

Тип Q	$\|Q\|$	Q^*	$\|Z(Q^*)\|$	$\|S_2\|$
I	5^2	$SL(2,3)$	2	8
II	11^2	$SL(2,3) \times \mathbb{Z}_5^+$	10	8
III	7^2	$2O$	2	16
IV	23^2	$2O \times \mathbb{Z}_{11}^+$	22	16
V	11^2	$SL(2,5)$	2	8
VI	29^2	$SL(2,5) \times \mathbb{Z}_7^+$	14	8
VII	59^2	$SL(2,5) \times \mathbb{Z}_{29}^+$	58	8

очевидно, совпадает с простым подполем $P = \pi(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p$. Силовская 2-подгруппа S_2 мультипликативной группы Q^* является (обобщенной) кватернионной порядка 16 или 8, имеет единственную инволюцию и центр $Z(S_2)$ порядка 2. При $|Q| = 7^2$ группа Q^* порядка 48 представляется бинарной октаэдральной группой [12, § 6.5], обозначаемой через $2O$.

Отраженное в [9] строение группы Q^* и ее центра резюмируется в табл. 1.

Для почти-полей Q типа II, IV и VII порядок центра $Z(Q^*)$ мультипликативной группы Q^* совпадает с $|P^*| = p - 1$. Поэтому $P^* = Z(Q^*)$ и P — центр $Z(Q)$ почти-поля Q. В остальных четырех случаях имеем $|Z(Q^*)| < p - 1$, и поэтому центр $Z(Q)$ почти-поля Q лежит в простом подполе P, но не совпадает с ним. В частности, вопрос о равенстве простого подполя и центра решается по-разному для двух почти-полей порядка 11^2 — типа II и V.

Теорема доказана.

Замечание. Т. Н. Яковлева [10] редуцировала утверждение теоремы о связи простого подполя и центра к семи почти-полям Цассенхауза. Она же исследовала исключительное почти-поле порядка 5^2 [10, пример 1], а одна из авторов статьи О. В. Кравцова — порядка 29^2. Для остальных пяти почти-полей теорема доказана совместно тремя авторами.

2. Максимальные подполя конечного почти-поля

Исследуем вопрос **(A)** описания максимальных подполей для конечных почти-полей. Простое подполе является единственным максимальным подполем в почти-поле характеристики p и порядка p^r для любого простого числа r в силу [10, теорема 3] (при $r = 2$ — по теореме 1). Поэтому вопрос **(A)** редуцируется к почти-полям Диксона.

Класс всех почти-полей Диксона порядка q^n с центром $GF(q)$, где $q = p^l$ для простого числа p и $l > 1$, обозначают через $DF(q,n)$. Отметим, что на под-почти-поля почти-поля $Q \in DF(q,n)$ переносится известное соответствие между подполями конечного поля и делителями степени его расширения над простым подполем. В силу основной теоремы Данкс в [13] и [14, лемма 1.2] это обобщенное соответствие можно представить следующей леммой.

Лемма 2. *Для любого под-почти-поля H почти-поля $Q \in DF(p^l, n)$ существуют натуральные числа h и j такие, что $h \,|\, (ln)$, $0 < j \le n$, $|H| = p^h$, $H \in DF(p^z, h/z)$ для $z =$ НОД(jl, h), причем*

$$j \equiv \frac{p^{ln} - 1}{p^h - 1} \,(\operatorname{mod}\, n). \tag{2.1}$$

Обратно: *если $h \,|\, (ln)$, то $Q \in DF(p^l, n)$ имеет единственное под-почти-поле H порядка p^h.*

Выделим случай коммутативных под-почти-полей, или равносильно, подполей.

Следствие. *Под-почти-поле H порядка p^h почти-поля $Q \in DF(p^l, n)$ есть подполе тогда и только тогда, когда h делит произведение $l \cdot$ НОД(j, n), где j определено в* (2.1).

Известно (Фелгнер, [11, теорема 2.1]), что в почти-поле Q максимальное подполе $M(Q)$, содержащее $Z(Q)$, единственно. В следующей теореме мы выявляем как меняются пары Диксона (q,n) при переходе к максимальному под-почти-полю и вместе с тем находим явно порядок максимального подполя $M(Q)$. Запишем каноническое разложение числа n и определим число λ

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}, \qquad \lambda = p_1^{[n_1/2]} p_2^{[n_2/2]} \dots p_r^{[n_r/2]}. \tag{2.2}$$

Теорема 2. *Пусть H — под-почти-поле порядка p^h почти-поля $Q \in DF(q,n)$, $q = p^l$ и $h = ln/p_i$ для некоторого p_i из (2.2). Тогда $H \in DF(q, n/p_i)$ при $n_i = 1$ и $H \in DF(q^{p_i}, n/p_i^2)$ при $n_i > 1$. Кроме того, под-почти-поле порядка q^λ в Q является единственным максимальным подполем в Q, содержащим $Z(Q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу [15, лемма 2.3] для любой пары Диксона (q,n) имеем

$$\frac{q^n - 1}{q^m - 1} \equiv \frac{n}{m} \,(\mathrm{mod}\ n) \qquad \forall m \mid n.$$

Если $n_i = 1$, то для числа $n' = n/p_i$ получаем равенства $h = ln'$ и НОД$(p_i, n') = 1$. Учитывая соответствие из леммы 2, имеем

$$\frac{p^{ln} - 1}{p^{ln'} - 1} \equiv \frac{n}{n'} \equiv p_i \,(\mathrm{mod}\ n),$$

$$z = \text{НОД}(lp_i, ln') = l \cdot \text{НОД}(p_i, n') = l, \quad \frac{h}{z} = n', \quad H \in DF(p^l, n/p_i).$$

Пусть $n_i > 1$. Положим $n' = n/p_i^2$. Тогда $h = lp_i n'$ и с помощью леммы 2 получаем

$$\frac{p^{ln} - 1}{p^{lp_i n'} - 1} (\mathrm{mod}\ n) \equiv \frac{n}{p_i n'} \equiv p_i \ (\mathrm{mod}\ n),$$

$$z = \text{НОД}(lp_i, lp_i n') = lp_i, \quad \frac{h}{z} = n', \quad H \in DF\big(p^{lp_i}, n/p_i^2\big).$$

Построим теперь убывающую последовательность под-почти-полей

$$H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots, \quad \text{где} \ \ |H_i| = p^{h_i}, \quad h_0 = ln \ \ \text{и} \ \ h_{i+1}/h_i \text{ — простые числа}, \tag{2.3}$$

начинающуюся с $H_0 = Q$. Вначале выполним $k_1 = [(n_1 + 1)/2]$ шагов, переходя от H_i к H_{i+1} с простым числом $h_{i+1}/h_i = p_1$ из (2.2). Применяя доказанное первое утверждение теоремы, получаем под-почти-поле

$$H_{k_1} \in DF\big(q^{p_1^{[n_1/2]}}, n/(p_1^{n_1})\big).$$

Затем выполним $k_2 = [(n_2 + 1)/2]$ переходов от H_i к H_{i+1} с простым числом $h_{i+1}/h_i = p_2$. Аналогично получим

$$H_{k_1+k_2} \in DF\big(q^{p_1^{[n_1/2]} p_2^{[n_2/2]}}, n/(p_1^{n_1} p_2^{n_2})\big).$$

Итак, степень под-почти-поля $H_{k_1+k_2}$ над его центром получаем из степени n в разложении (2.2), отбрасывая все простые сомножители p_1 и p_2. Ясно, что $Z(Q) \subseteq Z(H_{k_1}) \subseteq Z(H_{k_1+k_2})$.

Продолжая процесс, через $k = k_1 + k_2 + \dots + k_r$ шагов приходим к под-почти-полю H_k, соответствующему паре Диксона $(q^\lambda, 1)$. Поэтому H_k совпадает со своим центром $Z(H_k)$ и, в частности, является подполем. Утверждение единственности в лемме 2 показывает, что подполе H_k не зависит от последовательности переходов в нашем построении. С другой стороны, $Z(H_i) \neq H_i$ при $i < k$ для любой последовательности (2.3) от $H_0 = Q$ до H_k. Следовательно, H_k — единственное максимальное подполе в Q, содержащее центр $Z(Q)$.

Теорема доказана.

Через $\pi(m)$ обозначим множество простых делителей числа m.

В связи с вопросом **(A)** нас интересует каждое под-почти-поле H_i в (2.3), являющееся подполем, с наименьшим номером i для данной последовательности. В силу теоремы 2 изучения требует случай, когда $h_i/h_{i+1} \notin \pi(n)$.

Теорема 3. *Пусть H — под-почти-поле порядка $p^{l'n}$ почти-поля $Q \in DF(p^l, n)$. Тогда*
(i) *если* НОД$(l/l', n) = 1$ *и* $n|(p^{l'n} - 1)$, *то* $H \in DF(p^{l'}, n)$;
(ii) *если n просто и не делит $p^{l'n} - 1$, то H есть подполе.*
Кроме того, если пересечение $\pi(n) \cap \pi(p-1)$ пусто, l — простое число и l не делит n, то Q имеет точно два максимальных подполя — $M(Q)$ и подполе порядка p^n.

Доказательство. Полагая $k = l/l'$, имеем

$$\frac{p^{ln} - 1}{p^{l'n} - 1} = p^{l'n(k-1)} + p^{l'n(k-2)} + \cdots + 1.$$

Если $p^{l'n} \equiv 1(\bmod n)$, то сравнение (2.1) дает сравнение $j \equiv k(\bmod n)$, и в силу леммы 2

$$z = \text{НОД}(jl, l'n) = \text{НОД}(k^2 l', l'n) = l', \quad H \in DF(p^{l'}, n).$$

Таким образом, утверждение (i) доказано. Если n не делит $p^{l'n} - 1$, то для простого n получим $j = n$ и $z = l'n$. Отсюда $H \in DF(p^{l'n}, 1)$, т. е. H — подполе, что доказывает (ii).

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть l — простое число, не делящее n. Если под-почти-поле H порядка p^n не коммутативно, то $H \in DF(p^{n/k}, k)$ для некоторого делителя k числа n. Тогда каждый простой делитель p_i числа k делит числа $p^{n/k} - 1$ и $p^l - 1$ в силу определения пары Диксона. Следовательно, p_i делит и число $p^d - 1$, где $d =$ НОД$(l, n/k) = 1$; что противоречит условию $p_i \notin \pi(p-1)$. Поэтому под-почти-поле H коммутативно и является подполем. Его максимальность следует из простоты числа l.

Пусть теперь P — любое другое максимальное подполе в Q. Его порядок равен p^{lk} для некоторого делителя k числа n. Тогда по следствию на с. 254 в [15] P содержит центр почти-поля Q и по теореме 2 совпадает с $M(Q)$.

Теорема доказана.

Пример 1. Условие $\pi(n) \cap \pi(p-1) = \varnothing$ в теореме 3 существенно. Например, в почти-поле $Q \in DF(5^3, 2)$ центр $Z(Q)$ является единственным максимальным подполем. Действительно, Q имеет под-почти-поле H порядка 5^2 по лемме 2. Однако H не является подполем, поскольку

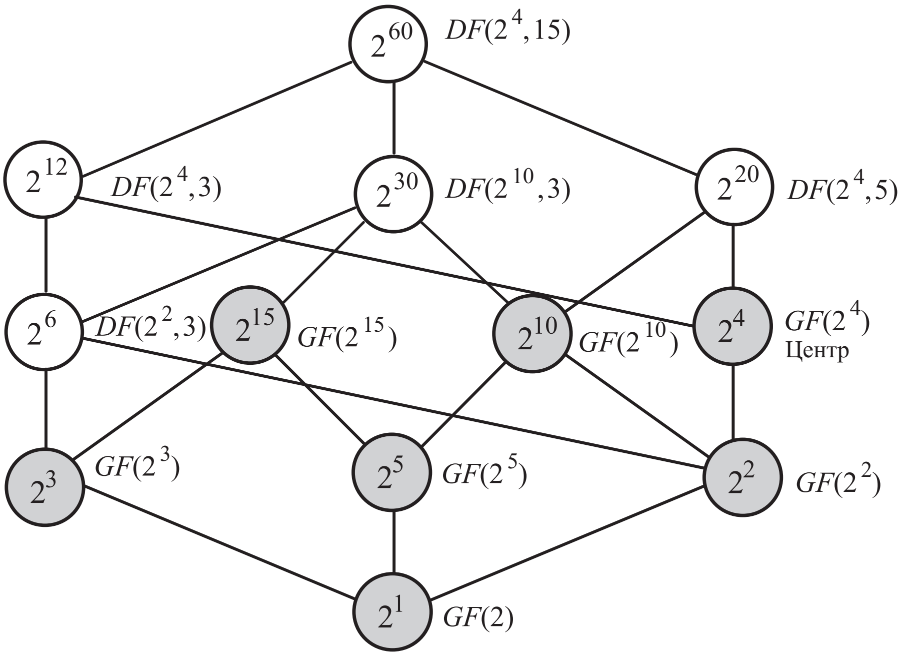
$$\frac{5^6 - 1}{5^2 - 1} = 5^4 + 5^2 + 1 \equiv 1(\bmod 2), \quad j = 1, \quad z = \text{НОД}(3, 2) = 1, \quad H \in DF(5^1, 2).$$

Отметим, что для другого почти-поля $P \in DF(5^2, 3)$ того же порядка 5^6 условие теоремы 3 выполнено, и поэтому P содержит точно два максимальных подполя, их порядки равны 5^3 и 5^2.

Пример 2. Решетку под-почти-полей произвольного почти-поля порядка 2^{60} из класса $DF(2^4, 15)$ находим, используя теоремы 2 и 3 (см. рисунок ниже); это почти-поле имеет три максимальных подполя, их порядки равны 2^{15}, 2^{10} и 2^4. С другой стороны, почти-поле $Q \in DF(2^4, 45)$ порядка 2^{180} имеет три максимальные под-почти-поля

$$H \in DF(2^{10}, 9), \quad P \in DF(2^4, 9), \quad S \in DF(2^{12}, 5).$$

Их попарные пересечения дают три предмаксимальных (т. е. максимальных в максимальных) под-почти-поля, из которых два — $H \cap S = M(H)$ и $P \cap S = M(P) = M(S)$ — являются максимальными в Q подполями порядков 2^{30} и 2^{12} соответственно. Из двух оставшихся предмаксимальных под-почти-полей одно (максимальное в H) порядка 2^{45} дает последнее максимальное в Q подполе.



Решетка под-почти-полей в почти-поле Диксона порядка 2^{60}

3. Мультипликативная группа и автоморфизмы конечного почти-поля

Исследуем вопросы **(B)–(D)** для конечных почти-полей.

Для решения вопроса **(B)** достаточно заметить, что если лупа Q^* почти-поля Q однопорождена, то она является циклической группой и поэтому почти-поле Q коммутативно. Отсюда сразу вытекает

Лемма 3. *Почти-поле Q является полем, если его лупа $(Q^*, \cdot)$ однопорождена.*

Для определения строения группы Q^* конечного почти-поля Q Цассенхауз [8] существенно использовал следующее свойство (см. также [9, лемма 20.7.К3]): *если числа q и s простые, то подгруппы порядков q^2 и qs группы Q^* циклические.*

Строение мультипликативных групп Q^* семи исключительных почти-полей Цассенхауза отражено выше в табл. 1. Для почти-полей Диксона в [8] (см. также [16, предложения 1, 2; 17, теорема IV.1.5]) наряду с цикличностью центра $Z(Q^*)$ и фактор-группы $Q^*/Z(Q^*)$ (метацикличность группы Q^*) установлена

Лемма 4. *Мультипликативная группа Q^* конечного почти-поля Диксона $Q \in DF(q, n)$ есть метациклическая двупорожденная группа:*

$$Q^* = \langle a, b \mid a^m = 1,\ b^n = a^t,\ bab^{-1} = a^q \rangle, \quad \textit{где} \ \ m = \frac{q^n - 1}{n} \ \ \textit{и} \ \ t = \frac{m}{q-1}. \tag{3.1}$$

Кроме того, $Z(Q^*) = \langle a^t \rangle$ *и* НОД$\,(n, t) =$ НОД$\,(q-1, t) \le 2$.

Как показано в [16, предложение 3], условие НОД$(q-1, t) = 1$ равносильно цикличности силовской 2-подгруппы в Q^*.

П р и м е р 3. Если $Q \in DF(7, 2)$, то силовская 2-подгруппа Q^* есть обобщенная кватернионная группа порядка 16, а для $Q \in DF(5, 2)$ — циклическая группа порядка 8.

Вопрос **(C)** о спектре порядков элементов группы Q^* в обозначениях (3.1) решает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $Q \in DF(q,n)$ — почти-поле Диксона, Q^* — его мультипликативная группа. Тогда спектр группы Q^* состоит из всех делителей числа $m = \dfrac{q^n-1}{n}$ и всех делителей z числа q^n-1, минимальных с условием*

$$m \mid \left(k\,\frac{q^{zs}-1}{q^s-1}+\frac{zst}{n}\right), \quad k=0,1,\dots,m-1, \quad s=1,2,\dots,n-1. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем порядки элементов в мультипликативной группе Q^* почти-поля Диксона $Q \in DF(q,n)$. Используя ее определяющие соотношения (3.1) и факторизацию $Q^* = \langle a\rangle\langle b\rangle$, получаем

$$ba^kb^{-1}=a^{kq}, \quad b^2ab^{-2}=a^{q^2},\dots, \quad b^sab^{-s}=a^{q^s}, \quad b^sa^kb^{-s}=a^{kq^s},$$

$$(a^kb^s)(a^kb^s)=a^k(b^sa^kb^{-s})b^{2s}=a^{k(1+q^s)}b^{2s}.$$

Поэтому для произвольных k и s из (3.2) имеем $(a^kb^s)^z = a^{k(1+q^s+q^{2s}+\dots+q^{(z-1)s})}b^{zs}$.

Если $(a^kb^s)^z=1$, то $a^{k(1+q^s+q^{2s}+\dots+q^{(z-1)s})}b^{zs}=1$. Деление zs на n с остатком дает $zs = nu+r$, $0\le r<n$, так что

$$a^{k(1+q^s+q^{2s}+\dots+q^{(z-1)s})}b^{nu+r}=1,$$

и, следовательно, $a^{k(1+q^s+q^{2s}+\dots+q^{(z-1)s})+tu}=b^{-r}$. Учитывая соотношения $b^n=a^t$ и $r<n$, получаем $r=0$, и, следовательно,

$$u=\frac{zs}{n} \quad \text{и} \quad a^{k(1+q^s+q^{2s}+\dots+q^{(z-1)s})+tu}=1.$$

Таким образом, порядок элемента $a^kb^s\neq 1$ — это наименьшее натуральное число z, удовлетворяющее условию (3.2) и делящее q^n-1.

Теорема доказана.

П р и м е р 4. Проиллюстрируем теорему на примере почти-поля $Q\in DF(5,2)$, где

$$Q^*=\{a^kb^s \mid k=0,1,\dots,11,\ s=0,1\}, \quad m=12, \quad t=3, \quad a^{12}=1, \quad b^2=a^3, \quad bab^{-1}=a^5.$$

Для произвольного элемента $a^kb\in\langle a\rangle b$ условие (3.2) принимает вид

$$12 \mid \left(\frac{k(5^z-1)}{4}+\frac{3z}{2}\right),$$

получаем $z=|a^kb|=8$. Поэтому спектр группы Q^* получается присоединением числа 8 к спектру циклической группы $\langle a\rangle$ порядка 12, т. е. равен $\{1,2,3,4,6,8,12\}$. Отметим для сравнения, что спектр мультипликативной группы почти-поля Цассенхауза H порядка 25 совпадает со спектром группы $SL(2,3)$, то есть равен $\{1,2,3,4,6\}$. Подробнее см. табл. 2.

В связи с вопросом **(D)** отметим, что группу автоморфизмов конечного почти-поля Q описал Цассенхауз. В случае $Q\in DF(3,2)$ имеем $\operatorname{Aut}Q\simeq S_3$; для других почти-полей Диксона $Q\in DF(p^l,n)$ группа $\operatorname{Aut}Q$ есть циклическая группа порядка ln/g, где g — порядок p по модулю n [8, предложение 18]. Бойкетт и Хауэлл [18] описали группу Aut Q^*. Группы автоморфизмов для семи исключительных почти-полей Цассенхауза (см. табл. 1) отражает табл. 3.

Т а б л и ц а 2

Число элементов порядка z группы K^* почти-полей K порядка 25

Порядок z элемента	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**8**	**12**
Случай $K=Q$	1	1	2	2	2	12	4
Случай $K=H$	1	1	8	6	8	0	0

Таблица 3

Автоморфизмы исключительных почти-полей Q

Тип	$\|Q\|$	Q^*	$\mathrm{Aut}(Q^*)$	$\|\mathrm{Aut}(Q)\|$
I	5^2	$SL(2,3)$	S_4	4
II	11^2	$SL(2,3)\times\mathbb{Z}_5^+$	$S_4\times\mathbb{Z}_4^+$	2
III	7^2	$2O$	$S_4\times\mathbb{Z}_2^+$	3
IV	23^2	$2O\times\mathbb{Z}_{11}^+$	$S_4\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{10}^+$	1
V	11^2	$SL(2,5)$	S_5	5
VI	29^2	$SL(2,5)\times\mathbb{Z}_7^+$	$S_5\times\mathbb{Z}_6^+$	2
VII	59^2	$SL(2,5)\times\mathbb{Z}_{29}^+$	$S_5\times\mathbb{Z}_{28}^+$	1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Курош А.Г.** Лекции по общей алгебре. Москва: Физматгиз, 1962. 396 с.
2. **Dickson L.E.** Linear algebras in which division is always uniquely possible // Trans. Amer. Math. Soc. 1906. Vol. 7, no. 3. P. 370–390. doi: 10.2307/1986324 .
3. **Veblen O., Maclagan–Wedderburn J.H.** Non-desarguesian and non-Pascalian geometries // Trans. Amer. Math. Soc. 1907. Vol. 8, no. 3. P. 379–388. doi: 10.2307/1988781 .
4. **Hughes D.R., Piper F.C.** Projective planes. N Y Inc.: Springer-Verlag, 1973. 292 p. ISSN: 0-387-90044-6 .
5. **Johnson N.L., Jha V., Biliotti M.** Handbook of finite translation planes. London; N Y: Chapman Hall/CRC, 2007. 888 p. ISBN: 1420011146;.
6. **Levchuk V.M., Kravtsova O.V.** Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes // Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38, no. 4, P. 688–698. doi: 10.1134/S1995080217040138.
7. **Wene G.P.** On the multiplicative structure of finite division rings // Aeq. Math. 1991. Vol. 41. P. 222–233.
8. **Zassenhaus H.** Uber endliche Fastkörper // Abh. Math. Sem. Hamburg, 1936. Vol. 11, no. 1. P. 187–220. doi: 10.1007/BF02940723 .
9. **Холл М.** Теория групп. М.: Госиноиздат, 1962. 468 с.
10. **Яковлева Т.Н.** Вопросы строения квазиполей с ассоциативными степенями. Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. “Математика”. 2019. Т. 29. С. 107–119. doi: 10.26516/1997-7670.2019.29.107 .
11. **Felgner U.** Pseudo-finite near-fields // Near-rings and near-fields / ed. C. Betrh. N Y Inc.: Elsevier Science Publisher B. V. (North-Holland). 1987. P. 15–29. (Ser. North-Holland Mathematics Studies; vol. 137). doi: 10.1016/S0304-0208(08)72282-5 .
12. **Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж.** Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. Москва: Наука, 1980. 240 с.
13. **Dancs S.** The sub-near-field structure of finite near-fields // Bull. Austral. Math. Soc. 1971. Vol. 5. P. 275–280. doi: 10.1017/S000497270004716X.
14. **Dancs Groves S.** Locally finite near-fields // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1979. Vol. 48. P. 89–107. doi: 10.1017/S0004972700043914.
15. **Dancs S.** On finite Dickson near-fields // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1972. Vol. 37. P. 254–257. doi: 10.1007/BF02999702 .
16. **Ellers E., Karzel H.** Endliche Inzidenzgruppen // Abh. Math. Sem. Hamburg. 1964. Vol. 27, no. 3-4. P. 250–264. doi: 10.1007/BF02993220 .
17. **Wähling H.** Theorie der Fastkörper. Vol. 1 of Thales Monographs. Essen: Thales-Verlag, 1987. 393 p.
18. **Boykett T., Howell K.-T.** The multiplicative automorphisms of a finite nearfield, with an application // Commun. Algebra. 2016. Vol. 44, iss. 6. P. 2336–2350. doi: 10.1080/00927872.2015.1044105 .

Поступила 3.09.2019

После доработки 28.10.2019

Принята к публикации 6.11.2019

Кравцова Ольга Вадимовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры высшей математики № 2,
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: ol71@bk.ru

Левчук Владимир Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой алгебры и математической логики,
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

REFERENCES

1. Kurosh A.G. *Lectures on general algebra.* International Ser. Monographs on Pure and Applied Math., vol. 70, N Y Inc.: Elsevier Ltd., 1965, 374 p. doi: 10.1016/C2013-0-01775-6 . Original Russian text published in Kurosh A.G. *Lektsii po obshchei algebre.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1962, 396 p.
2. Dickson L.E. Linear algebras in which division is always uniquely possible. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1906, vol. 7, no. 3, pp. 370–390. doi: 10.2307/1986324 .
3. Veblen O., Maclagan-Wedderburn J.H. Non-desarguesian and Non-pascalian geometries. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1907, vol. 8, no. 3, pp. 379–388. doi: 10.2307/1988781 .
4. Hughes D.R., Piper F.C. *Projective planes.* N Y: Springer-Verlag, 1973, 292 p. ISBN: 0387900446 .
5. Johnson N.L., Jha V., Biliotti M. *Handbook of finite translation planes.* London; N Y: Chapman Hall/CRC, 2007, 888 p. ISBN: 1420011146 .
6. Levchuk V.M., Kravtsova O.V. Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 4, pp. 688–698. doi: 10.1134/S1995080217040138 .
7. Wene G.P. On the multiplicative structure of finite division rings. *Aeq. Math.*., vol. 41, no. 1, pp. 222–233. doi: 10.1007/BF02227457 .
8. Zassenhaus H. Über endliche Fastkörper. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, vol. 11, no. 1, pp. 187–220. doi: 10.1007/BF02940723 .
9. Hall M. *The theory of groups.* N Y: Chelsea Pub. Co., 1976, 434 p. ISBN: 0828402884 . Translated to Russian under the title *Teoriya grupp.* Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962, 468 p.
10. Yakovleva T.N. Questions of construction of quasifields with associative powers. *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.*, 2019, vol. 29, pp. 107–119 (in Russian). doi: 10.26516/1997-7670.2019.29.107 .
11. Felgner U. Pseudo-finite near-fields. In C. Betrh (ed.), *Near-rings and near-fields*, Ser. North-Holland Mathematics Studies, vol. 137, 1987, pp. 15–29. doi: 10.1016/S0304-0208(08)72282-5 .
12. Coxeter H.S.M., Moser W.O.J. *Generators and relations for discrete groups.* Berlin: Springer Verlag, 1972, 164 p. doi: 10.1007/978-3-662-21946-1 . Translated to Russian under the title *Porozhdayushchie elementy i opredelyayushchie sootnosheniya diskretnykh grupp.* Moscow: Nauka Publ., 1980, 240 p.
13. Dancs S. The sub-near-field structure of finite near-fields. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1971, vol. 5, pp. 275–280. doi: 10.1017/S000497270004716X .
14. Dancs Groves S. Locally finite near-fields. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 1979, vol. 48, pp. 89–107. doi: 10.1017/S0004972700043914 .
15. Dancs S. On finite Dickson near-fields. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 1972, vol. 37, no. 3-4, pp. 254–257. doi: 10.1007/BF02999702 .
16. Ellers E., Karzel H. Endliche Inzidenzgruppen. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, vol. 27, no. 3-4, pp. 250–264. doi: 10.1007/BF02993220 .

17. Wähling H. *Theorie der Fastkörper.* Vol. 1 of Thales Monographs. Essen: Thales-Verlag, 1987. 393 p.
18. Boykett T., Howell K.T. The multiplicative automorphisms of a finite nearfield, with an application. *Commun. Algebra*, 2016, vol. 44, no. 6, pp. 2336–2350. doi: 10.1080/00927872.2015.1044105 .

Received September 3, 2019
Revised October 28, 2019
Accepted November 6, 2019

Olga Vadimovna Kravtsova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: ol71@bk.ru .

Vladimir Mikhailovich Levchuk, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru .

Cite this article as: O. V. Kravtsova, V. M. Levchuk. Questions of the structure of finite near-fields, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 107–117 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.145

ПОЛУПОЛЕВЫЕ ПЛОСКОСТИ РАНГА 2, ДОПУСКАЮЩИЕ ГРУППУ S_3[1]

О. В. Кравцова, Т. В. Моисеенкова

Одна из классических задач проективной геометрии — построение объекта по известным ограничениям на его автоморфизмы. Рассматриваются конечные проективные плоскости, координатизируемые полуполем, т. е. алгебраической системой, удовлетворяющей аксиомам тела, за исключением ассоциативности умножения. Такая плоскость является плоскостью трансляций и обладает также транзитивной группой элаций с аффинной осью. Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} с ядром, содержащим $GF(p^n)$ (p — простое число), группа линейных автотопизмов которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Для построения и исследования таких плоскостей применяется подход с использованием линейного пространства и регулярного множества — специального семейства линейных преобразований. Построено матричное представление подгруппы H и регулярного множества полуполевой плоскости для $p = 2$ и $p > 2$. Изучена возможность присутствия центральных коллинеаций в подгруппе H. Показано, что полуполевая плоскость порядка 3^{2n} с ядром $GF(3^n)$ не допускает S_3 в группе линейных автотопизмов. Найдены примеры полуполевых плоскостей порядков 16 и 625, допускающих S_3. Полученные результаты могут быть обобщены на случай полуполевых плоскостей ранга более двух и могут быть использованы, в частности, при исследовании известной гипотезы о разрешимости полной группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевой плоскости.

Ключевые слова: полуполевая плоскость, группа автотопизмов, симметрическая группа, бэровская инволюция, гомология, регулярное множество.

O. V. Kravtsova, T. V. Moiseenkova. Semifield planes of rank 2 admitting the group S_3.

One of the classical problems in projective geometry is to construct an object from known constraints on its automorphisms. We consider finite projective planes coordinatized by a semifield, i.e., by an algebraic system satisfying all axioms of a skew-field except for the associativity of multiplication. Such a plane is a translation plane admitting a transitive elation group with an affine axis. Let π be a semifield plane of order p^{2n} with a kernel containing $GF(p^n)$ for prime p, and let the linear autotopism group of π contain a subgroup H isomorphic to the symmetric group S_3. For the construction and analysis of such planes, we use a linear space and a spread set, which is a special family of linear mappings. We find a matrix representation for the subgroup H and for the spread set of a semifield plane if $p = 2$ and if $p > 2$. We also study the existence of central collineations in H. It is proved that a semifield plane of order 3^{2n} with kernel $GF(3^n)$ admits no subgroups isomorphic to S_3 in the linear autotopism group. Examples of semifield planes of order 16 and 625 admitting S_3 are found. The obtained results can be generalized for semifield planes of rank greater than 2 and can be applied, in particular, for studying the known hypothesis that the full collineation group of any finite non-Desarguesian semifield plane is solvable.

Keywords: semifield plane, autotopism group, symmetric group, Baer involution, homology, spread set.

MSC: 51A35, 51A40, 20B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-118-128

Введение

Координатизация точек и прямых в конечной проективной плоскости устанавливает связь между геометрическими свойствами плоскости и алгебраическими свойствами ее координатизирующего множества. Так, классическая или дезаргова, проективная плоскость координатизируется полем, а плоскость трансляций — квазиполем.

Проективная плоскость называется полуполевой, если ее координатизирующее множество является полуполем (semifield). Такая плоскость одновременно является плоскостью трансляций и дуальна плоскости трансляций. Особенности строения координатизирующего множества

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

вызывают ряд вопросов, связанных со строением полной группы коллинеаций (автоморфизмов) полуполевых плоскостей. Наиболее известна гипотеза [1, вопрос 11.76] о разрешимости полной группы коллинеаций всякой полуполевой недезарговой плоскости конечного порядка. К настоящему времени эта гипотеза подтверждена лишь для некоторых классов полуполевых плоскостей (см., например, [2]). В связи с этим информация о коллинеациях конечной полуполевой плоскости является важной.

Известен способ задания полуполевой плоскости, как и всякой плоскости трансляций, с использованием линейного пространства и специального семейства линейных преобразований, так называемого регулярного множества. Матричное представление регулярного множества определяет алгебраические свойства координатизирующего полуполя и геометрические свойства полуполевой плоскости, в том числе строение группы коллинеаций. Таким образом, представляет интерес как задача исследования группы коллинеаций при известном представлении регулярного множества, так и обратная задача — построение конечных проективных плоскостей по известным ограничениям на группу коллинеаций (см., например, [3]). Большое значение приобрели результаты [4] о полуполевой плоскости, допускающей бэровскую инволюцию.

Симметрическая группа S_3 является некоммутативной группой минимального порядка, ее наличие в группе коллинеаций проективной плоскости и в группе автоморфизмов координатизирующего множества может указывать на наличие особенных свойств. Так, среди всех 23 неизоморфных полуполей порядка 16 ровно одно имеет группу автоморфизмов, изоморфную S_3. Таким же свойством обладает исключительное полуполе Хентзела—Ру́а порядка 64, не являющееся ни лево-, ни правопримитивным [5]. Кроме того, поскольку S_3 содержится во многих известных группах, условие существования S_3 в группе автотопизмов приводит к получению важных технических результатов для дальнейших исследований. Отметим также особую роль группы S_3 в исследовании полуполевых плоскостей в связи с классификацией полуполей не только с точностью до изотопизма, но и с точностью до S_3 (так называемые орбиты Кнута, см., например, [6]).

Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} с ядром порядка p^n (p — простое число), подгруппа линейных автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник) которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Построено матричное представление подгруппы H в $GL_4(p^n)$ и регулярного множества плоскости π в $GL_2(p^n) \cup \{0\}$. Найдены примеры таких плоскостей порядка 16 и 625.

Основные результаты работы, приведеные в теоремах 1–3, анонсированы в [7].

1. Основные определения и предварительные обсуждения

Введем кратко основные определения, обозначения и результаты, необходимые для работы. Для подробного ознакомления рекомендуем [8; 9].

О п р е д е л е н и е 1. В соответствии с [8, гл. VIII] *полуполем* будем называть множество S, на котором определены две бинарные алгебраические операции $+$ и $*$, при выполнении условий:

1) $\langle S, +\rangle$ — абелева группа с нейтральным элементом 0;

2) $\langle S^*, *\rangle$ — лупа ($S^* = S \setminus \{0\}$);

3) выполняются дистрибутивные законы $a*(b+c) = a*b + a*c$, $(b+c)*a = b*a + c*a$ для любых $a, b, c \in S$.

Полуполе S содержит подмножества N_r, N_m, N_l, называемые *правым, средним и левым ядрами* соответственно:

$$N_r = \{n \in S \mid (a*b)*n = a*(b*n)\ \forall a, b \in S\},$$
$$N_m = \{n \in S \mid (a*n)*b = a*(n*b)\ \forall a, b \in S\},$$
$$N_l = \{n \in S \mid n*(a*b) = n*(a*b)\ \forall a, b \in S\},$$

пересечение $N_l \cap N_m \cap N_r$ называют *ядром* полуполя. Ядра конечного полуполя являются подполями, и полуполе можно рассматривать как линейное пространство над каждым из них. Следовательно, порядок конечного полуполя равен степени простого числа.

Рассмотрим линейное пространство W размерности d над полем $F \simeq GF(p^n)$ и инъективное отображение $\theta : W \to GL_d(p^n) \cup \{0\}$, удовлетворяющее условиям:

1) образом нулевого вектора является нулевая матрица;

2) единичная матрица E имеет прообраз в W;

2) $\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$ для всех $x, y \in W$.

Определим на W умножение правилом $x * y = x \cdot \theta(y)$, тогда $\langle W, +, *\rangle$ — полуполе порядка p^{nd}. Множество матриц $R = \{\theta(y) \mid y \in W\}$ называют при этом *регулярным множеством* (spread set, см. [8, гл. VII]). Рассмотрим внешнюю прямую сумму $V = W \oplus W$ и определим проективную плоскость π следующим образом:

1) элементы (x, y), где $x, y \in W$, пространства V назовем аффинными точками плоскости π;

2) аффинными прямыми назовем смежные классы по подгруппам

$$V(m) = \{(x, x\theta(m)) \mid x \in W\}, \quad m \in W,$$
$$V(\infty) = \{(0, y) \mid y \in W\};$$

3) множество всех смежных классов по одной подгруппе $V(m)$ или $V(\infty)$ назовем особой точкой (m) или (∞) соответственно;

4) множество особых точек назовем особой прямой $[\infty]$;

5) инцидентность определим теоретико-множественным включением.

Построенная таким образом проективная плоскость является полуполевой плоскостью порядка p^{nd}, число d будем называть ее *рангом.*

Полная группа коллинеаций полуполевой плоскости содержит подгруппу *автотопизмов* Λ, т. е. коллинеаций, фиксирующих треугольник с вершинами $(0,0)$, (0), (∞) и сторонами $[0,0]$, $[0]$, $[\infty]$. Автотопизмы задаются полулинейными преобразованиями пространства V и определяются блочно-диагональными матрицами,

$$(x, y)^\lambda = (x^\sigma, y^\sigma) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix};$$

здесь σ — автоморфизм основного поля F, действующий на координаты вектора; $A, B \in GL_d(p^n)$. При этом сохранение инцидентности требует выполнения условия

$$A^{-1} \left[\theta(m)\right]^\sigma B \in R \quad \forall \theta(m) \in R.$$

Обозначим через Λ_0 подгруппу линейных автотопизмов ($\sigma = 1$), $\Lambda/\Lambda_0 \subset \mathrm{Aut}(F)$,

$$A^{-1}\theta(m)B \in R \quad \forall \theta(m) \in R. \tag{1.1}$$

Мы рассматриваем полуполевые плоскости ранга 2 над полем $F \simeq GF(p^n)$, считая, что ядро полуполя либо совпадает с F, либо содержит F (в этом случае плоскость дезаргова, R — поле). Группа линейных автотопизмов состоит из матриц размерности 4×4 с элементами из F, регулярное множество R содержится в $GL_2(p^n) \cup \{0\}$. Пусть $H < \Lambda_0$, $H = \langle \tau, \sigma \rangle \simeq S_3$, где τ и σ — неперестановочные инволюции, коллинеация $\gamma = \tau\sigma$ имеет порядок 3. Обсудим прежде всего геометрический смысл элементов группы H. Как известно, всякая коллинеация порядка два проективной плоскости является либо центральной, либо бэровской коллинеацией [8, теорема 4.3].

О п р е д е л е н и е 2. Коллинеация проективной плоскости π порядка m называется *бэровской*, если она фиксирует поточечно максимальную подплоскость порядка $\sqrt{|\pi|} = \sqrt{m}$ (бэровскую подплоскость).

О п р е д е л е н и е 3. Коллинеация проективной плоскости π называется *центральной* (или перспективностью), если она фиксирует поточечно некоторую прямую (ось), некоторую точку (центр) и все прямые, проходящие через центр (не поточечно). Если центр инцидентен оси, то коллинеация называется элацией, в противном случае — гомологией. Если m — порядок проективной плоскости, то m делится на порядок всякой элации, $m-1$ делится на порядок всякой гомологии.

Центральные коллинеации образуют в группе автотопизмов следующие циклические подгруппы [2]:

1) $H_r \simeq N_r^*$ — группа гомологий с осью $[0,0]$ и центром (∞);

2) $H_l \simeq N_l^*$ — группа гомологий с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$;

3) $H_m \simeq N_m^*$ — группа гомологий с осью $[0]$ и центром (0).

При этом

$$H_r = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta(m)A \in R \ \forall \theta(m) \in R \right\},$$

$$H_m = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \;\middle|\; A\theta(m) \in R \ \forall \theta(m) \in R \right\},$$

$$H_l = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta(m)A = A\theta(m) \ \forall \theta(m) \in R \right\}.$$

Таким образом, если порядок рассматриваемой полуполевой плоскости π равен p^{2n}, то при $p=2$ инволюции τ и σ могут быть только бэровскими, при $p>2$ — бэровскими коллинеациями либо гомологиями, произведение $\tau\sigma$ может быть гомологией при $p \neq 3$. Случаи $p=2$, $p=3$ и $p>3$ требуют отдельного изучения.

2. Случай $p = 2$

Теорема 1. *Пусть π — полуполевая плоскость порядка 2^{2n} с ядром, содержащим поле $F \simeq GF(2^n)$, группа линейных автотопизмов которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Тогда базис 4-мерного линейного пространства над F может быть выбран так, что регулярное множество плоскости в $GL_2(F) \cup \{0\}$ имеет вид*

$$R = \left\{ \theta(v,u) = \begin{pmatrix} u+v+m(v) & f(v)+m(u) \\ v & u \end{pmatrix} \;\middle|\; u,v \in F \right\}, \tag{2.1}$$

где m, f — аддитивные функции на F, причем f взаимнооднозначна и $m(1)=0$. Кроме того,

1) *если H содержит гомологию с осью $[0,0]$ и центром (∞), то $f(x)=x \ \forall x \in F$;*

2) *если H содержит гомологию с осью $[0]$ и центром (0), то $f(x) = m(m(x)) + m(x) + x$ $\forall x \in F$;*

3) *если H содержит гомологию с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$, то $f(x)=x$, $m(x)=0 \ \forall x \in F$, плоскость дезаргова;*

4) *если H не содержит гомологий, то функции m и f удовлетворяют условиям*

$$m(m(x)) = m(x), \quad f(m(x)) = m(x), \quad m(f(x)) = m(x)+f(x)+x, \quad f(f(x)) = x \quad \forall x \in F.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $|\pi| = 2^{2n}$, элементы τ и σ являются бэровскими инволюциями. Воспользуемся результатами [4]: если полуполевая плоскость порядка 2^{2n} с ядром порядка $\geq 2^n$ допускает бэровскую инволюцию τ в линейном трансляционном дополнении, то

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

регулярное множество имеет вид (2.1). Положим

$$L=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}L&0\\0&L\end{pmatrix},\quad \sigma=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix},\ \text{где}\ \ A,B\in GL_2(p^n).$$

Тогда для инволюции σ выполнены условия

1) $A^2=B^2=E$,
2) $AL\neq LA$ или $BL\neq LB$,
3) $(LA)^3=(LB)^3=E$.

Отсюда матрицы A и B равны либо L (не одновременно), либо матрице вида

$$\begin{pmatrix}a&a^2+1\\1&a\end{pmatrix},\quad a\in F.$$

Заметим, что верно равенство $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&a^2+1\\1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=M$, поэтому базис линейного пространства можно выбрать так (не меняя τ), что

$$\sigma\in\left\{\begin{pmatrix}L&0\\0&M\end{pmatrix},\begin{pmatrix}M&0\\0&L\end{pmatrix},\begin{pmatrix}M&0\\0&M\end{pmatrix}\right\}.$$

Рассмотрим подробно все три возможных случая. В первом случае коллинеация $\gamma=\tau\sigma$ определяется матрицей

$$\gamma=\begin{pmatrix}E&0\\0&LM\end{pmatrix}$$

и является гомологией порядка 3 с осью $[0,0]$ и центром (∞), при этом матрица LM удовлетворяет условию $\theta(v,u)LM\in R$ для всех v,u. При $v=0$ имеем

$$\theta(0,u)LM=\begin{pmatrix}u&m(u)\\0&u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u+m(u)&u\\u&0\end{pmatrix}=\theta(u,0),$$

отсюда $f(u)=u$. Рассмотрение $u=0$ не дает новых ограничений на функции f и m.

Во втором случае

$$\gamma=\begin{pmatrix}LM&0\\0&E\end{pmatrix}$$

является гомологией порядка 3 с осью $[0]$ и центром (0), при этом $LM\theta(v,u)\in R$ для всех v,u. При $v=0$

$$LM\theta(0,u)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u&m(u)\\0&u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&m(u)+u\\u&m(u)\end{pmatrix}=\theta(0,m(u)),$$

отсюда $f(u)=m(m(u))+m(u)+u$. При $u=0$ получим то же условие.

В третьем случае для $A=B=M$ должно выполняться условие (1.1). При $v=0$ имеем

$$M^{-1}\theta(0,u)M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u&m(u)\\0&u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&0\\m(u)&u\end{pmatrix}=\theta(m(u),u),$$

поэтому $m(m(x))=m(x)$, $f(m(x))=m(x)$. При $u=0$ получаем

$$M^{-1}\theta(v,0)M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v+m(v)&f(v)\\v&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&v\\f(v)&v+m(v)\end{pmatrix}=\theta(f(v),v+m(v)),$$

поэтому $m(f(x))=m(x)+f(x)+x$, $f(f(x))=x$. Поскольку отображение $m(x)$ в общем случае не является биективным, полученные условия трудно преобразовать к более удобному виду.

Заметим, что если в третьем случае коллинеация γ является гомологией, то ее ось — особая прямая $[\infty]$, центр — точка $(0,0)$, при этом матрица LM должна быть перестановочна со всеми матрицами регулярного множества. Из этого условия $LM\theta(v,u)=\theta(v,u)LM$ получим $f(v)=v$, $m(v)=0$ для всех v, поэтому в силу линейности m и f регулярное множество является полем, т. е. плоскость π дезаргова.

Теорема 1 полностью доказана.

3. Случай $p > 2$

Лемма. *Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} с ядром, содержащим поле $F \simeq GF(p^n)$ ($p > 2$ — простое), группа линейных автотопизмов которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Тогда инволюции $\tau, \sigma \in H$ являются бэровскими, базис 4-мерного линейного пространства над F может быть выбран так, что*

$$\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

регулярное множество плоскости в $GL_2(F) \cup \{0\}$ имеет вид

$$R = \left\{ \theta(v,u) = \begin{pmatrix} m(u) & f(v) \\ v & u \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v \in F \right\}, \tag{3.2}$$

где m, f — аддитивные взаимнооднозначные функции на F, причем $m(1) = 1$. При этом $\sigma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где $A, B \in \{L, M\}$ при $p > 3$; *$A, B \in \{L, A_1, A_2\}$ при $p = 3$; $(A, B) \neq (L, L)$,*

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае нечетного порядка плоскости π центральные коллинеации порядка 2 в группе автотопизмов Λ являются гомологиями и определяются матрицами

$$\begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

которые не сопряжены в Λ. Поэтому инволюции τ, σ, как и для $p = 2$, являются бэровскими коллинеациями. Воспользуемся результатами [10]: в подходящем базисе линейного пространства бэровская инволюция определяется матрицей (3.1), а регулярное множество имеет вид (3.2).

Инволюция σ должна удовлетворять условиям 1–3 из доказательства теоремы 1. При этом для матрицы A (аналогично для B) возможны четыре ситуации ($a \in F$, $a \neq 0$):

1) $A = L$; 2) $p = 3$ и $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$; 3) $p = 3$ и $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $p \neq 3$ и $A = \begin{pmatrix} 1/2 & a \\ 3/(4a) & -1/2 \end{pmatrix}$.

Для случаев 2)–4) можно выбрать замену базиса линейного пространства, упрощающую вид матрицы A и сохраняющую вид L. Действительно,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_1,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ 3/(4a) & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(2a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = M.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Если π — полуполевая плоскость порядка 3^{2n} с ядром, содержащим поле $F \simeq GF(3^n)$, то группа линейных над F автотопизмов не содержит подгруппу, изоморфную симметрической группе S_3.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $A = L$ или $B = L$, то $\gamma = \tau\sigma$ является гомологией порядка 3, что невозможно, так как $|\pi| - 1$ не делится на 3.

Для остальных выделенных в лемме случаев при $p = 3$ проверим выполнение условия (1.1). Непосредственные расчеты показывают, что

$$A_1^{-1}\theta(v,0)A_1 = \begin{pmatrix} -f(v) & -f(v) \\ -v+f(v) & f(v) \end{pmatrix} = \theta(-v+f(v), f(v)) \Rightarrow f(f(v)) = 0 \ \forall v;$$

$$A_2^{-1}\theta(v,0)A_2 = \begin{pmatrix} -v & v-f(v) \\ -v & v \end{pmatrix} = \theta(-v,v) \Rightarrow f(-v) = v - f(v) \ \forall v;$$

$$A_1^{-1}\theta(0,u)A_2 = \begin{pmatrix} m(u) & -m(u) \\ -m(u) & m(u)+u \end{pmatrix} = \theta(-m(u), m(u)+u) \Rightarrow m(m(u)) = 0 \ \forall u;$$

$$A_2^{-1}\theta(0,u)A_1 = \begin{pmatrix} m(u)+u & u \\ u & u \end{pmatrix} = \theta(u,u) \Rightarrow m(u) = m(u)+u \ \forall u.$$

Учитывая инъективность отображений m и f, заключаем, что все перечисленные случаи невозможны.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что частный случай $|\pi| = 81$ представлен первым автором в докладе на Международной конференции G2A2 (Екатеринбург, 2015): если полуполевая плоскость порядка 81 допускает бэровскую инволюцию в группе автотопизмов, то порядок группы автотопизмов равен 2^k, где $8 \le k \le 11$.

Теорема 3. *Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n}, с ядром, содержащим поле $F \simeq GF(p^n)$ ($p > 3$ — простое), группа линейных автотопизмов которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Тогда базис 4-мерного линейного пространства над F может быть выбран так, что регулярное множество плоскости в $GL_2(F) \cup \{0\}$ имеет вид* (3.2)*. Кроме того,*

1) *если H содержит гомологию с осью $[0,0]$ и центром (∞), то $f(x) = -m(x)/3 \ \forall x \in F$;*

2) *если H содержит гомологию с осью $[0]$ и центром (0), то $f(m(x)) = m(f(x)) = -x/3 \ \forall x \in F$;*

3) *если H содержит гомологию с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$, то $p-3$ не является квадратом, $f(x) = -x/3$, $m(x) = x \ \forall x \in F$, плоскость дезаргова;*

4) *если H не содержит гомологий, то функции m и f удовлетворяют условиям* ($\forall x \in F$)

$$m(m(x)) = x, \quad f(f(x)) = \frac{1}{9}x,$$

$$m(f(x)) = -\frac{1}{3}m(x) - f(x) - \frac{1}{3}x, \quad f(m(x)) = \frac{1}{3}m(x) + f(x) - \frac{1}{3}x.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству теоремы 2 рассмотрим случаи для $p > 3$, выделенные в лемме.

При $(A,B) = (L,M)$ коллинеация $\gamma = \tau\sigma$ является гомологией с осью $[0,0]$ и центром (∞), поэтому матрица $LM = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ должна удовлетворять условию $\theta(v,u)LM \in R$ для всех $v, u \in F$. В силу замкнутости R по сложению вместо LM достаточно рассмотреть матрицу $N = 2LM + E$. Тогда при $v = 0$ получим $\theta(0,u)N = \begin{pmatrix} 0 & -m(u) \\ 3u & 0 \end{pmatrix} = \theta(3u, 0)$, откуда $f(x) = -m(x)/3$ для всех x. Случай $u = 0$ дает то же условие.

При $(A,B) = (M,L)$, аналогично, γ является гомологией с осью $[0]$ и центром (0), матрица N удовлетворяет условию $N\theta(v,u) \in R$ для всех v, u. Рассматривая отдельно случаи $v = 0$ и $u = 0$, получим условие $f(m(x)) = m(f(x)) = -x/3$ для всех x.

При $A = B = M$ проверяем выполнение условия (1.1). При $v = 0$ получим

$$M^{-1}\theta(0,u)M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} m(u)+3u & m(u)-u \\ 3m(u)-3u & 3m(u)+u \end{pmatrix} \in R,$$

из замкнутости регулярного множества по сложению следуют равенства

$$m(3m(u)+u) = m(u)+3u, \quad f(3m(u)-3u) = m(u)-u.$$

Аналогично, при $v = 0$ условие (1.1) приводит к равенствам

$$m(-v-3f(v)) = v+3f(v), \quad f(-v+9f(v)) = v-f(v).$$

Преобразуя, получаем условия теоремы 3.

Дополнительно рассмотрим ситуацию, когда коллинеация γ является гомологией с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$. Тогда матрица LM централизует R, поэтому матрица $N = 2LM + E$ также удовлетворяет условию $N\theta(v,u) = \theta(v,u)N$ для всех v, u, $f(v) = -v/3$, $m(u) = u$,

$$|\theta(v,u)| = \begin{vmatrix} u & -\frac{1}{3}v \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{u^2}{3}\left(3 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right).$$

Если $p-3$ не является квадратом, то $|\theta(v,u)| \neq 0$ для всякой ненулевой матрицы, и плоскость π дезаргова.

Теорема 3 доказана.

Рассматривая произведение гомологий

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & LM \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} LM & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

приходим к очевидному следствию теоремы 3.

Следствие. *Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} ($p = 2$ или $p > 3$ — простое число) с ядром $\supseteq GF(p^n)$, ее группа линейных автотопизмов содержит подгруппы*

$$H_1 = \langle \tau, \gamma_1 \rangle \simeq S_3, \quad H_2 \langle \tau, \gamma_2 \rangle \simeq S_3,$$

где τ — бэровская инволюция; γ_1 — гомология порядка 3 с осью $[0,0]$ и центром (∞); γ_2 — гомология порядка 3 с осью $[0]$ и центром (0). Тогда подгруппа $H_3 = \langle \tau, \gamma_1\gamma_2 \rangle$ также изоморфна S_3 и не содержит гомологий.

4. Примеры

Заметим, что указание матричного представления регулярного множества с достаточно общими ограничениями не является достаточным условием существования плоскости трансляций с таким регулярным множеством. Так, например, существование полуполевых плоскостей ранга 2 с регулярным множеством (2.1), допускающих бэровскую инволюцию (см. [4]), было подтверждено только в 1990 г. Хуангом и Джонсоном, построившими примеры восьми полуполевых плоскостей порядка 64 (см. [12]). Перечисление любых условий на группу автотопизмов приводит к естественному вопросу: существуют ли проективные плоскости при таких условиях? Покажем, что множество недезарговых полуполевых плоскостей, описанное теоремами 1 и 3, не пусто, т. е. найдем примеры таких плоскостей минимального возможного порядка. Напомним, что всякая аддитивная функция $g(x)$ на $GF(p^n)$ согласно [11] имеет вид

$$g(x) = c_0x + c_1x^p + c_1x^{p^2} + \cdots + c_{n-1}x^{p^{n-1}}, \quad c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} \in GF(p^n).$$

П р и м е р 1. Пусть $p = 2$, $p^{2n} = 16$, $F = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$, $\alpha^2 = \alpha + 1$. Известно, что существуют ровно две неизоморфные недезарговы полуполевые плоскости порядка 16 (см., например, [5]). Покажем, что одна из них дает необходимый пример. Рассмотрим условия в теореме 1, полагая

$$m(x) = m_0(x + x^2), \quad f(x) = f_0x + f_1x^2 \quad (x \in F), \quad \text{где} \ \ m_0, f_0, f_1 \in F.$$

Достаточным условием существования полуполевой плоскости, удовлетворяющей теореме 1, является требование

$$\begin{vmatrix} u + v + m_0(v + v^2) & f_0v + f_1v^2 + m_0(u + u^2) \\ v & u \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall u, v \in F, \ (u, v) \neq (0, 0). \qquad (4.1)$$

Перебор коэффициентов m_0, f_0, f_1, удовлетворяющих условиям теоремы 1 и (4.1), приводит к результатам, перечисленным в табл. 1.

Таким образом, найдены четыре полуполевые плоскости порядка 16 с регулярными множествами R_1, R_2, R_3, R_4, группа линейных автотопизмов которых содержит подгруппу, изоморфную S_3. Отметим, что эти плоскости изоморфны. Действительно, автоморфизм $x \to x^2$ поля F переводит R_3 в R_4, и непосредственная проверка показывает, что выполнены равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_1 \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R_2, \quad \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix} R_1 = R_3.$$

П р и м е р 2. Построим примеры плоскостей порядка 625, используя результаты теоремы 3. Рассмотрим поле $GF(25) = GF(5^2)$ как фактор-кольцо кольца $\mathbb{Z}_5[x]$ по идеалу, порожденному неприводимым в $\mathbb{Z}_5[x]$ многочленом $x^2 - 2$,

$$GF(25) \simeq \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 - 2) = \{0, 1, 2, 3, 4, \alpha, \alpha + 1, \ldots, 4\alpha + 4\}, \quad \text{где} \ \ \alpha^2 = 2.$$

Т а б л и ц а 1

Регулярное множество	m_0	f_0	f_1	Случай теоремы 1
R_1	1	1	0	1
R_2	1	0	1	2
R_3	α	1	0	1, 2, 4
R_4	$\alpha+1$	1	0	1, 2, 4

Т а б л и ц а 2

№	m_0	m_1	f_0	f_1	Случай теоремы 3
1	2	4	1	2	1
2	4	2	2	1	1
3	$\alpha+4$	$4\alpha+2$	$3\alpha+2$	$2\alpha+1$	1
4	$2\alpha+1$	3α	$\alpha+3$	4α	1
5	$2\alpha+2$	$3\alpha+4$	$\alpha+1$	$4\alpha+2$	1
6	2	4	2	1	2
7	4	2	1	2	2
8	$\alpha+4$	$4\alpha+2$	$\alpha+1$	$4\alpha+2$	2
9	$2\alpha+1$	3α	$4\alpha+3$	α	2
10	$2\alpha+2$	$3\alpha+4$	$3\alpha+2$	$2\alpha+1$	2
11	α	$4\alpha+1$	2α	4	4
12	2α	$3\alpha+1$	4α	3α	4
13	α	$4\alpha+1$	3α	$2\alpha+3$	1, 2, 4
14	$\alpha+4$	$4\alpha+2$	$3\alpha+2$	$2\alpha+1$	1, 2, 4

Рассмотрим условия в теореме 3, полагая

$$m(x) = m_0x + m_1x^5, \quad f(x) = f_0x + f_1x^5 \quad (x \in F), \quad \text{где} \quad m_0, m_1, f_0, f_1 \in F.$$

Достаточным условием существования полуполевой плоскости, удовлетворяющей теореме 3, является требование

$$\begin{vmatrix} m_0u + m_1u^5 & f_0v + f_1v^5 \\ v & u \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall u, v \in F, \quad (u, v) \neq (0, 0). \tag{4.2}$$

Компьютерный перебор коэффициентов m_0, m_1, f_0, f_1, удовлетворяющих условиям теоремы 3 и (4.2), приводит к результатам, перечисленным в табл. 2. В таблице исключены изоморфные копии, полученные автоморфизмом $x \to x^5$ поля F.

Дальнейшее выделение в приведенном списке попарно изоморфных полуполевых плоскостей не проводилось, поскольку значительно более трудоемко в сравнении со случаем $|\pi| = 16$. Существование полуполевых плоскостей порядка 625 с подгруппой линейных автотопизмов, изоморфной S_3, подтверждено.

В заключение следует заметить, что использованный метод может быть обобщен на случай полуполевых плоскостей ранга более 2. Доказанные результаты и найденные примеры могут быть использованы при дальнейшем исследовании полуполевых плоскостей с ограничениями на группу коллинеаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мазуров В.Д., Хухро Е.И.** Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь: изд. 16-е, доп., включающее архив решенных задач / Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Новосибирск, 2006. 193 с.
2. **Подуфалов Н.Д., Дураков Б.К., Кравцова О.В., Дураков Е.Б.** О полуполевых плоскостях порядка 16^2 // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 616–623.
3. **Jha V., Johnson N.L.** The translation planes of order 81 admitting $SL(2, 5)$ // Note di Matematica. 2005. Vol. 24, no. 2. P. 59–73. doi: 10.1285/i15900932v24n2p59 .
4. **Biliotti M., Jha V., Johnson N.L., Menichetti G.** A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2 // Geom. Dedicata. 1989. Vol. 29. P. 7–43. doi: 10.1007/BF00147468 .
5. **Levchuk V.M., Kravtsova O.V.** Problems on structure of finite quasifelds and projective translation planes // Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38, no 4. P. 688—698. doi: 10.1134/S1995080217040138 .
6. **Rúa I.F., Combarro E.F., Ranilla J.** Classification of semifields of order 64 // J. Algebra, 2009, vol. 322, no. 11, pp. 4011–4029. doi: 10.1016/j.jalgebra.2009.02.020 .
7. **Кравцова О.В., Моисеенкова Т.В.** Полуполевые проективные плоскости, допускающие подгруппу коллинеаций, изоморфную S_3. // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: материалы Междунар. конф. посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула: Изд-во Тульского гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 260–262.
8. **Hughes D.R., Piper F.C.** Projective planes. N Y: Springer-Verlag, 1973. 292 p.
9. **Johnson N.L., Jha V., and Biliotti M.** Handbook of finite translation planes. Boca Raton; London; N Y: Chapman and Hall, 2007. 861 p.
10. **Кравцова О.В.** Полуполевые плоскости, допускающие бэровскую инволюцию // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2013. №2. С. 26–38.
11. **Vaughan, T.P.** Polynomials and linear transformations over finite fields // J. Reine Angew. Math. 1974. Vol. 267. P. 179–206. doi: 10.1515/crll.1974.267.179 .
12. **Huang H. , Johnson N.L.** 8 semifield planes of order 8^2 // Discrete Math. 1990. Vol. 80, no. 1. P. 69–79. doi: 10.1016/0012-365X(90)90296-T .

Поступила 25.07.2019
После доработки 7.10.2019
Принята к публикации 14.10.2019

Кравцова Ольга Вадимовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры высшей математики № 2
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
e-mail: ol71@bk.ru

Моисеенкова Татьяна Владимировна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры высшей математики № 2
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
e-mail: tanya-mois11@yandex.ru

REFERENCES

1. Mazurov V.D. and Khukhro E.I. (eds.). *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory, 16th ed.*, Novosibirsk: Sobolev Inst. Math. Publ., 2006, 195 p.
2. Podufalov N.D., Durakov B.K., Kravtsova O.V., Durakov E.B. On semifield planes of order 16^2. *Siberian Math. J.*, 1996, vol. 37, no. 3, pp. 535–541. doi: 10.1007/BF02104857 .
3. Jha V., Johnson N.L. The translation planes of order 81 admitting $SL(2,5)$. *Note di Matematica*, 2005, vol. 24, no. 2, pp. 59–73. doi: 10.1285/i15900932v24n2p59 .
4. Biliotti M., Jha V., Johnson N.L., Menichetti G. A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2. *Geom. Dedicata*, 1989, vol. 29, pp. 7–43. doi: 10.1007/BF00147468 .
5. Levchuk V.M., Kravtsova O.V. Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes. *Lobachevskii J. Math.*, vol. 38, no. 4, pp. 688–698. doi: 10.1134/S1995080217040138 .
6. Rúa I.F., Combarro E.F., Ranilla J. Classification of semifields of order 64. *J. of Algebra*, 2009, vol. 322, no. 11, pp. 4011–4029. doi: 10.1016/j.jalgebra.2009.02.020 .
7. Kravtsova O.V., Moiseenkova T.V. Semifield projective plane that admit collineation subgroup isomorphic to S_3. In: XVI International Conference “Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: modern problems and applications”, dedicated to the 80th anniversary of the birth of professor Michel Desa, Tula: Tula State Pedagogical University of Leo Tolstoy Publ., 2019, pp. 260–262.
8. Hughes D.R., Piper F.C. *Projective planes.* New York: Springer-Verlag, 1973, 292 p. ISBN: 9780387900445 .
9. Johnson N.L., Jha V., and Biliotti M. *Handbook of finite translation planes.* Boca Raton; London; N Y: Chapman and Hall, 2007, 861 p. ISBN: 1-58488-605-6/hbk .
10. Kravtsova O.V. Semifield planes of even order that admit the baer involution. *The Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Mathematics*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 26–37 (in Russian).
11. Vaughan T.P. Polynomials and linear transformations over finite fields. *J. Reine Angew. Math.*, 1974, vol. 267, pp. 179–206. doi: 10.1515/crll.1974.267.179 .
12. Huang H. , Johnson N.L. 8 semifield planes of order 8^2. *Discrete Math.*, 1990, vol. 80, no. 1, pp. 69–79. doi: 10.1016/0012-365X(90)90296-T .

Received July 25, 2019
Revised October 7, 2019
Accepted October 14, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00566 A).

Olga Vadimovna Kravtsova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: ol71@bk.ru .

Tatyana Vladimirovna Moiseenkova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: tanya-mois11@yandex.ru .

Cite this article as: O. V. Kravtsova, T. V. Moiseenkova. Semifield planes of rank 2 admitting the group S_3, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 118–128 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА — СЕГЕ В ПРОСТРАНСТВЕ L_0 ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

А. О. Леонтьева

Неравенства вида $\|f_n^{(\alpha)}\cos\theta+\tilde f_n^{(\alpha)}\sin\theta\|_p\le B_n(\alpha,\theta)_p\|f_n\|_p$ для классических производных при $\alpha\in\mathbb{N}$ и производных Вейля вещественного порядка $\alpha\ge 0$ тригонометрических полиномов f_n порядка $n\ge 1$ и их сопряженных при вещественном θ и $0\le p\le\infty$ называют неравенствами Бернштейна — Сеге. Они являются обобщением классического неравенства Бернштейна ($\alpha=1$, $\theta=0$, $p=\infty$). Такие неравенства изучаются уже более 90 лет. Задача исследования неравенства Бернштейна — Сеге состоит в изучении свойств наилучшей (наименьшей) константы $B_n(\alpha,\theta)_p$, ее точного значения и экстремальных полиномов, на которых это неравенство обращается в равенство. Г. Сеге (1928), А. Зигмунд (1933), А. И. Козко (1998) показали, что в случае $p\ge 1$ для вещественных $\alpha\ge 1$ и любых вещественных θ для наилучшей константы выполняется равенство $B_n(\alpha,\theta)_p=n^\alpha$. Представляют интерес неравенства Бернштейна — Сеге при $p=0$ как минимум по той причине, что среди всех $0\le p\le\infty$ константа $B_n(\alpha,\theta)_p$ является наибольшей по p при $p=0$. В 1981 г. В. В. Арестов доказал, что при $r\in\mathbb{N}$ и $\theta=0$ в пространствах L_p, $0\le p<1$, неравенство Бернштейна выполняется с константой n^r, т. е. $B_n(r,0)_p=n^r$. В 1994 г. он доказал, что при $p=0$ для производной сопряженного полинома порядка $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, т. е. при $\theta=\pi/2$, точная константа имеет показательный рост по n, а точнее, справедливо соотношение $B_n(r,\pi/2)_0=4^{n+o(n)}$. В двух недавних работах автора (2018) получен подобный результат для производных Вейля положительного нецелого порядка при любом вещественном θ. В данной работе доказано, что формула $B_n(\alpha,\theta)_0=4^{n+o(n)}$ имеет место и для производных неотрицательных целых порядков α и произвольных вещественных $\theta\ne\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ключевые слова: тригонометрический полином, сопряженный полином, производная Вейля, неравенство Бернштейна — Сеге, пространство L_0.

A. O. Leont'eva. Bernstein–Szegő inequality for trigonometric polynomials in the space L_0.

Inequalities of the form $\|f_n^{(\alpha)}\cos\theta+\tilde f_n^{(\alpha)}\sin\theta\|_p\le B_n(\alpha,\theta)_p\|f_n\|_p$ for classical derivatives of order $\alpha\in\mathbb{N}$ and Weyl derivatives of real order $\alpha\ge 0$ of trigonometric polynomials f_n of order $n\ge 1$ and their conjugates for real θ and $0\le p\le\infty$ are called Bernstein–Szegő inequalities. They are generalizations of the classical Bernstein inequality ($\alpha=1$, $\theta=0$, $p=\infty$). Such inequalities have been studied for more than 90 years. The problem of studying the Bernstein–Szegő inequality consists in analyzing the properties of the best (the smallest) constant $B_n(\alpha,\theta)_p$, its exact value, and extremal polynomials for which this inequality turns into an equality. G. Szegő (1928), A. Zygmund (1933), and A. I. Kozko (1998) showed that, in the case $p\ge 1$ for real $\alpha\ge 1$ and any real θ, the best constant $B_n(\alpha,\theta)_p$ is n^α. For $p=0$, Bernstein–Szegő inequalities are of interest at least because the constant $B_n(\alpha,\theta)_p$ is the largest for $p=0$ over $0\le p\le\infty$. In 1981, V. V. Arestov proved that, for $r\in\mathbb{N}$ and $\theta=0$, the Bernstein inequality is true with the constant n^r in the spaces L_p, $0\le p<1$; i.e., $B_n(r,0)_p=n^r$. In 1994, he proved that, for $p=0$ and the derivative of the conjugate polynomial of order $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, i.e., for $\theta=\pi/2$, the exact constant grows exponentially in n; more precisely, $B_n(r,\pi/2)_0=4^{n+o(n)}$. In two recent papers of the author (2018), a similar result was obtained for Weyl derivatives of positive noninteger order for any real θ. In the present paper, we prove that the formula $B_n(\alpha,\theta)_0=4^{n+o(n)}$ holds for derivatives of nonnegative integer orders α and any real $\theta\ne\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Keywords: trigonometric polynomial, conjugate polynomial, Weyl derivative, Bernstein–Szegő inequality, space L_0.

MSC: 42A05, 41A17, 26A33

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-129-135

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

1. Постановка задачи

Обозначим через $\mathscr{T}_n$ множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.1}$$

порядка n с комплексными коэффициентами. Вместе с полиномом (1.1) будем рассматривать тригонометрически сопряженный ему полином

$$\tilde{f}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (b_k \cos kt - a_k \sin kt).$$

Для значений $0 \le p \le \infty$ параметра p рассмотрим на множестве $\mathscr{T}_n$ функционал $\|\cdot\|_p$, определенный следующими формулами:

$$\|f_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\|f_n\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f_n\|_p = \max_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| = \|f_n\|_C;$$

$$\|f_n\|_0 = \lim_{p\to 0} \|f_n\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f_n(t)| dt\right);$$

лишь при $p \ge 1$ этот функционал является нормой.

Для вещественного параметра $\alpha \ge 0$ рассмотрим производную Вейля [9] (см. также [8, гл. 19, § 4]) порядка α полинома (1.1)

$$D^\alpha f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right) + b_k \sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right).$$

При натуральных α производная Вейля совпадает с классической производной: $D^\alpha f_n = f_n^{(\alpha)}$. В дальнейшем вместо $D^\alpha f_n$ будем писать $f_n^{(\alpha)}$. Производная Вейля обладает полугрупповым свойством: $D^\beta D^\alpha = D^{\alpha+\beta}$ для $\alpha, \beta \ge 0$. В случае $\alpha = 0$ она отбрасывает свободный член полинома: $D^0 f_n = f_n - a_0/2$.

Для вещественного числа θ рассмотрим на $\mathscr{T}_n$ оператор Вейля — Сеге D_θ^α, определенный формулой

$$\begin{aligned} D_\theta^\alpha f_n(t) &= f_n^{(\alpha)}(t)\cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)}(t)\sin\theta \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right) + b_k \sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right)\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Нас интересует норма оператора (1.2) относительно функционала $\|\cdot\|_p$, т. е. точная (наименьшая) константа $B_n(\alpha,\theta)_p$ в неравенстве

$$\|f_n^{(\alpha)}\cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)}\sin\theta\|_p \le B_n(\alpha,\theta)_p \|f_n\|_p, \quad f_n \in \mathscr{T}_n. \tag{1.3}$$

Неравенства такого типа называются неравенствами Бернштейна — Сеге. Эти неравенства имеют богатую историю (см., к примеру, работы [3–5] и приведенную в них библиографию). В данной статье неравенство (1.3) обсуждается при $p = 0$; этот случай важен, в частности, по той причине, что константа $B_n(\alpha,\theta)_p$ является наибольшей по p для $0 \le p \le \infty$ именно при $p = 0$ [1, следствие 1].

В работе (А. О. Леонтьева. Неравенство Бернштейна — Сеге для производной Вейля тригонометрических полиномов в пространстве L_0 // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 199–207) была получена логарифмическая асимптотика точной константы в неравенстве Бернштейна — Сеге (1.3) при $p = 0$ для производной положительного нецелого порядка α

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n(\alpha,\theta)_0} = 4, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathbb{N}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

В настоящей статье получен аналогичный результат для производных целого неотрицательного порядка, а именно, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть r — неотрицательное целое число, θ — произвольное вещественное число, не равное πk, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда для точной константы в неравенстве* (1.3) *при $p = 0$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n(r,\theta)_0} = 4.$$

2. Вспомогательные результаты

Формула

$$f_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}) \tag{2.1}$$

устанавливает взаимнооднозначное соответствие между множеством $\mathscr{P}_{2n}$ алгебраических многочленов степени (не выше) $2n$ и множеством $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка n. С помощью формулы (2.1) экстремальные задачи для тригонометрических полиномов можно переформулировать в терминах задач для алгебраических многочленов на единичной окружности комплексной плоскости.

На множестве $\mathscr{P}_n$ алгебраических многочленов степени n будем рассматривать функционалы

$$\|P_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P_n(e^{it})|^p dt\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\|P_n\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f_n\|_p = \max\{|P_n(e^{it})|\colon t \in \mathbb{R}\};$$

$$\|P_n\|_0 = \lim_{p\to+0} \|P_n\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|P_n(e^{it})| dt\right).$$

Видно, что если $P_{2n}(e^{it}) = e^{int} f_n(t)$, то $\|P_{2n}\|_p = \|f_n\|_p$.

Для многочленов P_n и Λ_n степени не выше n, записанных в виде

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^k, \quad \Lambda_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_k z^k,$$

многочлен

$$\Lambda_n P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_k a_k z^k, \quad \text{где} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{2.2}$$

называется композицией Сеге многочленов Λ_n и P_n. Свойства композиции Сеге можно найти в [7, отд. V; 6, гл. 4]. При фиксированном Λ_n композиция Сеге (2.2) является линейным оператором в $\mathscr{P}_n$.

В. В. Арестов [1] доказал, что для композиции Сеге справедливо неравенство

$$\|\Lambda_n P_n\|_0 \le \|\Lambda_n\|_0 \|P_n\|_0. \tag{2.3}$$

Неравенство (2.3) точное и обращается в равенство на многочлене $P_n^*(z) = (1+z)^n$.

Убедимся, что оператору D_θ^α на множестве $\mathscr{T}_n$ соответствует во множестве $\mathscr{P}_{2n}$ операция композиции Сеге

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = e^{-int}\left(\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta} P_{2n}\right)(e^{it}), \quad f_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}), \tag{2.4}$$

с многочленом

$$\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}(z) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} |k|^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)\operatorname{sign} k} z^{n+k}.$$

Запишем тригонометрический полином f_n в виде

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} c_k e^{ikt}. \tag{2.5}$$

По формуле (2.1) ему будет соответствовать алгебраический многочлен

$$P_{2n}(z) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} c_k z^{n+k}.$$

В этом случае

$$\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta} P_{2n}(z) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} c_k |k|^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)\operatorname{sign} k} z^{n+k},$$

и, следовательно,

$$e^{-int}\left(\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta} P_{2n}\right)(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} c_k |k|^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)\operatorname{sign} k} e^{ikt}. \tag{2.6}$$

С другой стороны, при $1 \le k \le n$

$$D_\theta^\alpha e^{\pm ikt} = D_\theta^\alpha(\cos kt \pm i \sin kt)$$
$$= k^\alpha\left(\cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right) \pm i \sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right)\right) = |\pm k|^\alpha e^{\pm i(\pi\alpha/2+\theta)} e^{\pm ikt};$$

помимо того, константу оператор D_θ^α обращает в ноль. Следовательно, для полинома (2.5) справедлива формула

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} c_k |k|^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)\operatorname{sign} k} e^{ikt}. \tag{2.7}$$

Формулы (2.6) и (2.7) влекут (2.4).

Экстремальному в неравенстве (2.3) для $\left\|\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta} P_{2n}\right\|_0$ многочлену $P_{2n}^*(z) = (1+z)^{2n}$ по формуле (2.1) соответствует полином

$$e^{-int} P_{2n}^*(e^{it}) = e^{-int}(1+e^{it})^{2n} = 4^n h_n(t),$$

в силу (2.4) экстремальный в неравенстве (1.3) при $p = 0$, как и полином

$$h_n(t) = \cos^{2n}\frac{t}{2}. \tag{2.8}$$

Для полинома (2.8) по формуле (2.4) получаем

$$4^n D_\theta^\alpha h_n(t) = e^{-int}\left(\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta} P_{2n}^*\right)(e^{it}) = e^{-int}\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}(e^{it}).$$

Отсюда и из неравенства (2.3) следует, что

$$B_n(\alpha,\theta)_0 = \|\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}\|_0 = 4^n \|D_\theta^\alpha h_n\|_0.$$

Таким образом, полином h_n экстремален в неравенстве (1.3) при $p = 0$, и задача вычисления точной константы сводится к изучению производной Вейля — Сеге этого полинома.

3. Поточечная асимптотика производной Вейля — Сеге неотрицательного целого порядка экстремального полинома

В доказательстве теоремы 1 важную роль играет асимптотика полинома

$$D_\theta^r h_n(x) = h_n^{(r)}(x)\cos\theta + \tilde{h}_n^{(r)}(x)\sin\theta \tag{3.1}$$

при неотрицательном целом r для фиксированного $x \in (0, 2\pi)$ при $n \to \infty$. Приведем асимптотическую формулу для r-й производной сопряженного полинома.

Лемма 1 [2, лемма 4]. *Пусть r — неотрицательное целое число, $h_n(x) = \cos^{2n}\dfrac{x}{2}$. Тогда для производной сопряженного полинома $\tilde{h}_n^{(r)}(x)$ при $x \in (0, 2\pi)$ справедливо асимптотическое соотношение $\tilde{h}_n^{(r)}(x) \sim -\dfrac{1}{2^r\sqrt{\pi n}}\operatorname{ctg}^{(r)}\dfrac{x}{2}$.*

Осталось получить в (3.1) асимптотику для r-й производной экстремального полинома.

Лемма 2. *Для производной неотрицательного целого порядка r полинома h_n, определенного формулой (2.8), при фиксированном $x \in (0, 2\pi)$ справедливы следующие соотношения:*

$$h_n^{(0)}(x) \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

$$\left|h_n^{(r)}(x)\right| \le n^r \cos^{2(n-r)}\frac{x}{2} \quad \text{при} \quad r \in \mathbb{N}, \quad 1 \le r \le n,$$

так что производная фиксированного порядка $r \ge 1$ экспоненциально стремится к нулю при $n \to \infty$.

Сначала докажем первое утверждение леммы 2. Найдем асимптотику $h_n^{(0)}(x)$ при $x \in (0, 2\pi)$. Запишем полином h_n в экспоненциальной форме

$$h_n(x) = \cos^{2n}\frac{x}{2} = \Big(\frac{e^{ix/2} + e^{-ix/2}}{2}\Big)^{2n} = e^{-inx}\Big(\frac{1 + e^{ix}}{2}\Big)^{2n} = \frac{e^{-inx}}{4^n}\sum_{j=0}^{2n} C_{2n}^j e^{ijx}$$

$$= \frac{e^{-inx}}{4^n}\sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} e^{i(n+k)x} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} e^{ikx}.$$

Свободный член полинома h_n равен $\dfrac{C_{2n}^n}{4^n}$. В силу формулы Стирлинга $\dfrac{C_{2n}^n}{4^n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

С другой стороны, полином $h_n(x) = \cos^{2n}(x/2)$ при $x \in (0, 2\pi)$ стремится к нулю с экспоненциальной скоростью при $n \to \infty$. Поэтому при $x \in (0, 2\pi)$

$$h_n^{(0)}(x) = h_n(x) - \frac{C_{2n}^n}{4^n} \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{при } n \to \infty.$$

Теперь докажем второе утверждение леммы 2. Для этого покажем, что при $1 \le r \le n$ имеет место представление

$$h_n^{(r)}(t) = \Big(\cos^{2(n-r)}\frac{t}{2}\Big) g_r(t), \tag{3.2}$$

в котором g_r есть тригонометрический полином порядка r, для равномерной нормы которого справедлива оценка

$$\|g_r\|_\infty \leqslant n^r. \tag{3.3}$$

Докажем (3.2) и (3.3) индукцией по r. При $r = 1$ имеем

$$h_n'(t) = -n\cos^{2n-1}\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} = -n\Big(\cos^{2(n-1)}\frac{t}{2}\Big)\frac{1}{2}\sin t,$$

и равенство (3.2) вместе с оценкой (3.3) выполняются. Теперь предположим, что они верны для $1 \le r \le n-1$, и докажем их для производной порядка $r+1$. По предположению индукции имеет место представление (3.2), в котором полином g_r обладает свойством (3.3). Продифференцируем (3.2); в результате получим

$$h_n^{(r+1)}(t) = -(n-r)\cos^{2n-2r-1}\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}g_r(t) + g_r'(t)\cos^{2(n-r)}\frac{t}{2} = \Big(\cos^{2(n-r-1)}\frac{t}{2}\Big)g_{r+1}(t),$$

где $g_{r+1}(t) = -(n-r)\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}g_r(t) + \cos^2\frac{t}{2}g_r'(t)$. Имеем

$$\Big\|\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\Big\|_\infty = \frac{1}{2}\,\|\sin t\|_\infty = \frac{1}{2}, \quad \Big\|\cos^2\frac{t}{2}\Big\|_\infty = 1.$$

Используя неравенство Бернштейна в равномерной норме, получим оценку сверху для равномерной нормы полинома g_{r+1}

$$\|g_{r+1}\|_\infty \le \frac{n-r}{2}\|g_r\|_\infty + r\|g_r\|_\infty \le \frac{n+r}{2}\|g_r\|_\infty \le n\|g_r\|_\infty.$$

Тем самым показано, что равенство (3.2) и оценка (3.3) справедливы для всех $1 \le r \le n$, и второе утверждение леммы 2 также доказано. □

Из лемм 1, 2 вытекает

Теорема 2. *Для производной Вейля — Сеге неотрицательного целого порядка r экстремального полинома $h_n(x)$ при $x \in (0, 2\pi)$ и при $n \to \infty$ справедливы асимптотические соотношения*

$$D_\theta^0 h_n(x) \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\cos\theta + \Big(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\Big)\sin\theta\right), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$D_\theta^r h_n(x) \sim -\frac{\sin\theta}{2^r\sqrt{\pi n}}\operatorname{ctg}^{(r)}\frac{x}{2}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad \theta \ne \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Завершим доказательство теоремы 1, используя метод, разработанный В. В. Арестовым (см. [2]), и результаты теоремы 2. Для случая производной Вейля — Сеге нулевого порядка важно, что в силу монотонности функции $\operatorname{ctg}(x/2)$ при $x \in (0, 2\pi)$ функция $\cos\theta + (\sin\theta)\operatorname{ctg}(x/2)$ не обращается в ноль нигде на $(0, 2\pi)$, кроме, быть может, одной точки. □

Автор благодарит своего научного руководителя профессора В. В. Арестова за постановку задачи и постоянное внимание к исследованиям автора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В. В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 7–18.
2. **Арестов В. В.** Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 6. С. 10–26.
3. **Леонтьева А. О.** Неравенство Бернштейна для производных Вейля тригонометрических полиномов в пространстве L_0 // Мат. заметки. 2018. Т. 104, вып. 2. С. 255–264.
4. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1: 391 с.; Т. 2: 431 с.
5. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 638 с.
6. **Arestov V. V.** Sharp integral inequalities for trigonometric polynomials // Constructive theory of functions: in memory of Borislav Bojanov: Proc. Internat. Conf. / eds. G. Nikolov and R. Uluchev (Sozopol, 2010). Sofia: Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, 2012. P. 30–45.
7. **Arestov V. V., Glazyrina P. Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164. P. 1501–1512. doi:10.1016/j.jat.2012.08.004 .
8. **Marden M.** The geometry of the zeros of polynomials in a complex variable. N Y: Amer. Math. Soc, 1949. 184 p. (Math. Survey, № 3.)

9. **Weyl H.** Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich. 1917. Bd 62, № 1–2. S. 296–302.

Поступила 6.08.2019
После доработки 21.10.2019
Принята к публикации 28.10.2019

Леонтьева Анастасия Олеговна
аспирант
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина;
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
г. Екатеринбург
e-mail: sinusoida2012@yandex.ru

REFERENCES

1. Arestov V.V. Integral inequalities for algebraic polynomials on the unit circle. *Math. Notes*, 1990, vol. 48, no. 4, pp. 977–984. doi: 10.1007/BF01139596 .
2. Arestov V.V. The Szegő inequality for derivatives of a conjugate trigonometric polynomial in L_0. *Math. Notes*, 1994, vol. 56, no. 6, pp. 1216–1227. doi 10.1007/BF02266689 .
3. Arestov V.V. Sharp integral inequalities for trigonometric polynomials. In: Nikolov G., Uluchev R. (eds), *Proc. Internat. Conf. "Constructive theory of functions: in memory of Borislav Bojanov"* (Sozopol, 2010). Sofia: Prof. Marin Drinov Acad. Publ. House, 2012, pp. 30–45. ISBN: 978-954-322-490-6 .
4. Arestov V.V., Glazyrina P.Yu. Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials. *J. Approx. Theory*, 2012, vol. 164, no. 11, pp. 1501–1512. doi: 10.1016/j.jat.2012.08.004 .
5. Leont'eva A.O. Bernstein inequality for the Weyl derivatives of trigonometric polynomials in the space L_0. *Math. Notes*, 2018, vol. 104, no. 2, pp. 263–270. doi: 10.1134/S0001434618070271 .
6. Marden M. *The geometry of the zeros of polynomials in a complex variable.* Math. Survey, no. 3. N Y: Amer. Math. Soc., 1949, 184 p.
7. Polya G., Szegő G. *Problems and Theorems in Analysis,* I. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, 386 p. ISBN: 3-540-63640-4/pbk . Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza,* I, Moscow: Nauka Publ., 1978, 391 p.
8. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications.* Yverdon: Gordon and Breach Sci. Publ., 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641 . Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya*, Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 638 p.
9. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, 1917, vol. 62, no. 1–2, pp. 296–302.

Received August 6, 2019
Revised October 21, 2019
Accepted October 28, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Anastasia Olegovna Leont'eva, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: sinusoida2012@yandex.ru .

Cite this article as: A. O. Leont'eva. Bernstein–Szegő inequality for trigonometric polynomials in the space L_0, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 129–135 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.17

НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ Q-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ[1]

А. А. Махнев, М. П Голубятников

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев и М. С. Нирова нашли описание Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Пусть $a = a_3$. Γ — граф типа (I), если $c_2 + 1$ делит a; Γ — граф типа (II), если $c_2 + 1$ делит $a + 1$; Γ — граф типа (III), если $c_2 + 1$ не делит a и не делит $a + 1$. Если Γ – граф типа (II), то $a + 1 = w(c_2 + 1)$, $t^2 = w(w(c_2 + 1) + c_2)$ и либо

(i) $w = s^2$, $t^2 = s^2(s^2(c_2 + 1) + c_2)$, $(s^2(c_2 + 1) + c_2$ является квадратом некоторого целого числа u, $c_2 = (u^2 - s^2)/(s^2 + 1)$, $t = su$, $a = (u^2s^2 - 1)/(s^2 + 1)$, либо

(ii) $c_2 = sw$, $t^2 = w^2(sw + 1 + s)$, $sw + 1 + s$ является квадратом некоторого целого числа u, $c_2 = (u^2 - 1)w/(w + 1)$, $t = uw$, $a = (u^2w^2 - 1)/(w + 1)$ и Γ имеет массив пересечений

$$\left\{\frac{u^3w^2 + u^2w^2 + uw - 1}{w + 1}, \frac{(u^2 - 1)uw^2}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)w}{w + 1}; 1, \frac{(u^2 - 1)w}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)uw}{w + 1}\right\}.$$

В случае графа типа (IIii) для $w = u$ мы получаем массив пересечений $\{w^4 + w - 1, w^4 - w^3, (w^2 - w + 1)w; 1, w(w - 1), (w^2 - w + 1)w^2\}$. В статье доказано, что графы с такими массивами пересечений не существуют для четных w.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, Q-полиномиальный граф.

A. A. Makhnev, M. P. Golubyatnikov. Nonexistence of certain Q-polynomial distance-regular graphs.

I. N. Belousov, A. A. Makhnev, and M. S. Nirova described Q-polynomial distance-regular graphs Γ of diameter 3 for which the graphs Γ_2 and Γ_3 are strongly regular. Set $a = a_3$. A graph Γ has type (I) if $c_2 + 1$ divides a, type (II) if $c_2 + 1$ divides $a + 1$, and type (III) if $c_2 + 1$ divides neither a nor $a + 1$. If Γ is a graph of type (II), then $a + 1 = w(c_2 + 1)$, $t^2 = w(w(c_2 + 1) + c_2)$, and either

(i) $w = s^2$, $t^2 = s^2(s^2(c_2 + 1) + c_2)$, $(s^2(c_2 + 1) + c_2$ is the square of an integer u, $c_2 = (u^2 - s^2)/(s^2 + 1)$, $t = su$, and $a = (u^2s^2 - 1)/(s^2 + 1)$ or

(ii) $c_2 = sw$, $t^2 = w^2(sw + 1 + s)$, $sw + 1 + s$ is the square of an integer u, $c_2 = (u^2 - 1)w/(w + 1)$, $t = uw$, $a = (u^2w^2 - 1)/(w + 1)$, and Γ has intersection array

$$\left\{\frac{u^3w^2 + u^2w^2 + uw - 1}{w + 1}, \frac{(u^2 - 1)uw^2}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)w}{w + 1}; 1, \frac{(u^2 - 1)w}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)uw}{w + 1}\right\}.$$

If a graph of type (IIii) is such that $w = u$, then it has intersection array $\{w^4 + w - 1, w^4 - w^3, (w^2 - w + 1)w; 1, w(w - 1), (w^2 - w + 1)w^2\}$. We prove that graphs with such intersection arrays do not exist for even w.

Keywords: distance-regular graph, Q-polynomial graph.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-136-141

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

[1]Работа выполнена при поддержке соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006.

Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{2, 3, \ldots, d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа и $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ (см. [1]).

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев и М. С. Нирова [2] нашли описание Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Положим $a = a_3$. Скажем, что Γ — граф типа (I), если $c_2 + 1$ делит a; Γ — граф типа (II), если $c_2 + 1$ делит $a + 1$; Γ — граф типа (III), если $c_2 + 1$ не делит a и не делит $a + 1$.

Граф типа (Ii) имеет массив пересечений

$$\Big\{\frac{(s^2+su-1)(u^2-1)}{s^2-1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2-1}, u^2; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2-1}, \frac{su^3-su}{s^2-1}\Big\}.$$

Граф типа (Iii) имеет массив пересечений

$$\Big\{\frac{(u^2w+u^2-1)(uw+u+w)}{w}, \frac{(u^2-1)u(w+1)^2}{w}, u^2(w+1); 1, \frac{(w+1)(u^2-1)}{w}, \frac{(u^2w+u^2-1)u(w+1)}{w}\Big\}.$$

Граф типа (IIi) имеет массив пересечений

$$\Big\{\frac{u^3s+u^2s^2+us-1}{s^2+1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2+1}, \frac{(u^2+1)s^2}{s^2+1}; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2+1}, \frac{(u^2+1)su}{s^2+1}\Big\}.$$

Граф типа (IIii) имеет массив пересечений

$$\Big\{\frac{u^3w^2+u^2w^2+uw-1}{w+1}, \frac{(u^2-1)uw^2}{w+1}, \frac{(u^2w+1)w}{w+1}; 1, \frac{(u^2-1)w}{w+1}, \frac{(u^2w+1)uw}{w+1}\Big\}.$$

В классе графов типа (IIii) при $w = u$ возникает серия массивов пересечений $\{w^4 + w - 1, w^4 - w^3, (w^2 - w + 1)w; 1, w(w - 1), (w^2 - w + 1)w^2\}$. Положим $s = w + 1$. В работе доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(s+1)^4+s, (s+1)^4-(s+1)^3, (s^2+s+1)(s+1); 1, (s+1)s, (s^2+s+1)(s+1)^2\}$ не существует при нечетном s.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{(s+1)^4+s, (s+1)^4-(s+1)^3, (s^2+s+1)(s+1); 1, (s+1)s, (s^2+s+1)(s+1)^2\}.$$

Если число s нечетно, то Γ не существует.

Теорема 2. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{83, 54, 21; 1, 6, 63\}$ $(s = 2)$ *и* $\{629, 500, 105; 1, 20, 525\}$ $(s = 4)$ *не существуют.*

Доказательства теорем опираются на метод вычисления тройных чисел пересечений [3].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right\}$ — множество вершин

$w \in \Gamma$ таких, что $d(w,u_i) = r_i$, $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix} = \left| \begin{Bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{Bmatrix} \right|$. Числа $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1r_2r_3]$ нет общих формул. Однако в [4] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v)$, $U = d(v,w)$, $V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u,v,w\}$. Сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим $\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p^U_{jh} - [0jh]$, $\sum_{l=1}^{d}[ilh] = p^V_{ih} - [i0h]$, $\sum_{l=1}^{d}[ijl] = p^W_{ij} - [ij0]$.

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p^W_{ij} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0,\dots,d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$. Если параметр Крейна q^h_{ij} равен 0, то из [3, теорема 3] имеем $S_{ijh}(u,v,w) = 0$.

1. Доказательство теоремы 1

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений

$$\{(s+1)^4+s, (s+1)^4-(s+1)^3, (s^2+s+1)(s+1); 1, (s+1)s, (s^2+s+1)(s+1)^2\},$$

спектром $((s+1)^4+s)^1$, $(s^3+3s^2+4s+1)^{f(s)}$, $-1^{f(s)(s+1)^2}$, $(-s^2-s-1)^{f(s)(s+1)}$ и дуальной матрицей собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & f(s) & f(s)(s+1)^2 & f(s)(s+1) \\ 1 & s^3+3s^2+4s+1 & -(s+1)^2 & -(s^2+s+1)(s+1) \\ 1 & -1 & -(s+1)^2 & (s+1)^2 \\ 1 & -s^2-s-1 & (s+1)^3 & -(s^2+s+1)(s+1) \end{pmatrix},$$

где $f(s) = s^4+4s^3+6s^2+5s+1$.

Если $s=1$, то Γ имеет массив пересечений $\{17,8,6;1,2,12\}$. Для этого графа $\mu=2$, $\lambda=8$, $17 < 1/2\cdot 8\cdot(8+3) = 44$, и по [1, предложение 4.3.2] должно выполняться условие делимости $(8+1)$ делит 17; противоречие. В дальнейшем будем считать, что $s \geq 2$.

Лемма 1.1. *Числа пересечений графа Γ равны*

(1) $p^1_{11} = s(s^2+3s+4)$, $p^1_{21} = s(s+1)^3$, $p^1_{22} = s(s^2+s+1)(s+2)(s+1)^2$, $p^1_{32} = (s^2+s+1)(s+1)^3$, $p^1_{33} = s(s^2+2s+2)(s+1)$;

(2) $p^2_{11} = s(s+1)$, $p^2_{21} = s(s^2+s+1)(s+2)$, $p^2_{22} = s(s^3+3s^2+3s+3)(s+1)^2$, $p^2_{31} = (s^2+s+1)(s+1)$, $p^2_{32} = s(s^2+s+1)(s+2)(s+1)$, $p^2_{33} = s(s^2+2s+2)(s+1)$;

(3) $p^3_{21} = (s^2+s+1)(s+1)^2$, $p^3_{22} = s(s^2+s+1)(s+2)(s+1)^2$, $p^3_{31} = s(s^2+2s+2)$, $p^3_{32} = s(s^2+2s+2)(s+1)^2$, $p^3_{33} = s(s^2+s+2)(s+1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения проверяются непосредственно с помощью формул из [1, лемма 4.1.7]. □

Лемма 1.2. *Пусть u,v,w — вершины графа Γ с $d(u,v)=2, d(u,w)=d(v,w)=1$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$ и $a = [111]$. Тогда*

$[233] = \big(as^2 - 3s^3 + 2as - 6s^2 + 2a - 4s\big)\big(s^2+2s+2\big)/s^2$,

$[112] = s^2 - a + s - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $[113] = [123] = [131] = [133] = [213] = [231] = [311] = [313] = [321] = [331] = 0$. Отсюда сразу получаем $[312] = [132] = p^2_{13} - 0 = (s^2 + s + 1)(s + 1)$, $[121] = [211] = s(s^2 + 3s + 4) - a$ и $[112] = p^2_{11} - 1 = (s^2 + s - 1) - a$. Далее, $[122] = s(s^2 + s + 1)(s + 2) - [121]$, $[122] = s^4 + 2s^3 + a - 2s$, $[221] = s^4 + 2s^4 - 3s - 1 + a$, $[211] = s^3 + 3s^2 - a + 4s$ и $[212] = s^4 + 2s^3 + a - 2s$.

Положим $b = [223]$. Отсюда получаем $[323] = [233] = (s^2 + s + 1)(s + 1)^3 - b$. Далее, $[232] = [322] = -s^3 - 2s^2 - 2s - 1 + b$. Из соотношения $[221] + [222] + b = p^2_{22}$ получаем $[222] = s^6 + 5s^5 + 9s^4 + 10s^3 + 9s^2 + 6s + 1 - a - b$. Далее, из соотношения $[132] + [232] + [332] = p^1_{32} - 0 = (s^2+s+1)(s+1)^3$ имеем $[332] = s^5+4s^4+7s^3+7s^2+4s+1-b$. Наконец, из соотношения $[332] + [333] = p^2_{33} - 0 = s(s^2 + 2s + 2)(s + 1)$ получаем $[333] = -s^5 - 3s^4 - 4s^3 - 3s^2 - 2s - 1 + b$.

Для завершения доказательства леммы заметим, что $q^3_{11} = 0$, отсюда мы имеем $S_{311} = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{r1}Q_{s1}Q_{t3}[rst] = 0$. Подставляя в это равенство ранее полученные значения тройных чисел пересечений и выражая параметр b, имеем

$$b = \frac{s^7 + 4\,s^6 - as^4 + 10\,s^5 - 4\,as^3 + 19\,s^4 - 8\,as^2 + 26\,s^3 - 8\,as + 21\,s^2 - 4\,a + 8\,s}{s^2}$$

и $[233] = (as^2 - 3s^3 + 2as - 6s^2 + 2a - 4s)(s^2 + 2s + 2)/s^2$. □

По лемме 1.2 выполняются неравенства $a > \dfrac{3s^3 + 6s^2 + 4s}{s^2 + 2s + 2}$ и $a \le s^2 + s - 1$.

Кроме того, из условия целочисленности числа [233] следует делимость числа $4(a-2s+2as)$ на s^2. Если s — нечетное число, то $(2s + 1)a \equiv 2s \pmod{s^2}$. Отсюда $a = 2s + ts^2$.

Заметим, что $\dfrac{3s^3 + 6s^2 + 4s}{s^2 + 2s + 2} > 2s$, поэтому $t \ge 1$. Однако в этом случае $s^2+s-1 < 2s+ts^2$; противоречие.

Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим сначала дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{83, 54, 21; 1, 6, 63\}$. Этот граф имеет спектр 83^1, 29^{83}, -1^{747}, -7^{249} и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 83 & 747 & 249 \\ 1 & 29 & -9 & -21 \\ 1 & -1 & -9 & 9 \\ 1 & -7 & 27 & -21 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.1. *Числа пересечений графа* Γ *равны*
(1) $p^1_{11} = 28$, $p^1_{21} = 54$, $p^1_{32} = 189$, $p^1_{22} = 504$, $p^1_{33} = 60$;
(2) $p^2_{11} = 6$, $p^2_{12} = 56$, $p^2_{13} = 21$, $p^2_{22} = 522$, $p^2_{23} = 168$, $p^2_{33} = 60$;
(3) $p^3_{12} = 63$, $p^3_{13} = 20$, $p^3_{22} = 504$, $p^3_{23} = 180$, $p^3_{33} = 48$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения проверяются непосредственно с помощью формул из [1, лемма 4.1.7]. □

Лемма 2.2. *Пусть* u, v, w — *вершины графа* Γ *с* $d(u,v) = 2, d(u,w) = d(v,w) = 1$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$ *и* $a = [111]$. *Тогда*
$[112] = -a + 5$, $[121] = [211] = -a + 28$, $[122] = [212] = a + 28$,
$[132] = [312] = 21$,
$[221] = a + 25$, $[222] = 24a + 168$, $[223] = -25a + 329$,
$[232] = [322] = -25a + 308$, $[233] = [323] = [332] = 25a - 140$,
$[332] = 25a - 140$, $[333] = -25a + 200$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что граф с массивом пересечений $\{83,54,21;1,6,63\}$ принадлежит серии $\{(s+1)^4+s,(s+1)^4-(s+1)^3,(s^2+s+1)(s+1);1,(s+1)s,(s^2+s+1)(s+1)^2\}$ при $s=2$. Подставляя $s=2$ в формулу выше, получаем требуемые равенства. $\square$

По лемме 2.2 имеем $[112]=-a+5$ и $[323]=25a-140$. Поэтому $28/5\le a\le 5$; противоречие.

Рассмотрим теперь дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{629,500,105;1,20,525\}$. Этот граф имеет спектр $629^1,129^{629},-1^{15725},-21^{3145}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 629 & 15725 & 3145 \\ 1 & 129 & -25 & -105 \\ 1 & -1 & -25 & 25 \\ 1 & -21 & 125 & -105 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.3. *Числа пересечений графа* Γ *равны*
(1) $p^1_{11}=128$, $p^1_{21}=500$, $p^1_{32}=2625$, $p^1_{22}=12600$, $p^1_{33}=520$;
(2) $p^2_{11}=20$, $p^2_{12}=504$, $p^2_{13}=105$, $p^2_{22}=12700$, $p^2_{23}=2520$, $p^2_{33}=520$;
(3) $p^3_{12}=525$, $p^3_{13}=104$, $p^3_{22}=12600$, $p^3_{23}=2600$, $p^3_{33}=440$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения проверяются непосредственно с помощью формул из [1, лемма 4.1.7]. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть* u,v,w — *вершины графа* Γ *с* $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=3$, $[ijh]=\begin{bmatrix} uvw \\ ijh\end{bmatrix}$ *и* $b=[122]$. *Тогда*
$[123]=[132]=[213]=[231]=[312]=[321]=-b+525$, $[133]=[313]=[331]=b-421$,
$[222]=-15b+33075/2$, $[223]=[232]=[322]=14b-7875/2$, $[233]=[323]=[332]=-13b+12025/2$ *и*
$[333]=12b-10305/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $[111]=[112]=[113]=[121]=[131]=[211]=[311]=0$. Из соотношений $b+[132]=p^3_{12}-0=525$ и $b+[123]=p^3_{13}-0=525$ получаем $[132]=[123]=525-b$. Равенство $[132]+[133]=p^3_{13}-0=104$ влечет $[133]=104-(525-b)=b-421$.

Положим $c=[221]$. Из соотношений $c+[321]=p^3_{31}-0=525$ и $c+[231]=p^3_{21}-0=525$ получаем $[321]=[231]=525-c$. Аналогично, $[231]+[331]=p^3_{31}-0=104$ влечет $[331]=-421$.

Положим $d=[312]$. Из соотношений $[212]+d=p^3_{32}-0=525$ получим $[212]=525-d$. Равенство $d+[313]=p^3_{33}-0=104$ влечет $[313]=104-d$. Соотношение $[212]+[213]=p^3_{23}-0=525$ дает $[213]=d$.

Положим теперь $e=[222]$. Из соотношений $b+e+[322]=p^3_{32}-0=12600$ и $c+e+[223]=p^3_{23}-0=12600$ получаем $[322]=12600-b-e$ и $[223]=12600-c-e$. Равенство $d+[322]+[332]=p^3_{32}-0=2600$ влечет $[332]=b-d+e-10000$. Из равенства $[212]+e+[232]=p^3_{22}-0=12600$, получаем $[232]=d-e+12075$. Далее, $[323]=2600-(525-b)-(12600-c-e)=b+c+e-10525$. Затем получаем $[233]=c-d+e-10000$ и из соотношения $[333]=439-[133]-[233]$ имеем $[333]=-b-c+d-e+10860$.

Так как $q^3_{11}=q^1_{31}=q^1_{13}=0$, то $S_{311}=S_{131}=S_{113}=0$. Получаем еще 3 уравнения: $15c-15d+2e=25200$, $15b+15c+2e=33075$ и $15b-15d+2e=25200$. Отсюда $e=-15b+33075/2$, $d=525-b$ и $c=b$. $\square$

Ввиду леммы 2.4 имеем противоречие с тем, что число $[222]=-15b+33075/2$ не целое.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p.

2. **Белоусов И.Н., Махнев А.А., Нирова М.С.** О дистанционно регулярных Q-полиномиальных графах Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1358–1365.
3. **Coolsaet K., Jurishich A.** Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory. Ser. A. 2008. Vol. 115, no. 6. P. 1086–1095. doi: 10.1016/j.jcta.2007.12.001 .

Поступила 10.09.2019
После доработки 7.11.2019
Принята к публикации 11.11.2019

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Голубятников Михаил Петрович
математик 1 кат.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: mike_ru1@mail.ru

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 3-540-50619-5 .
2. Belousov I.N., Makhnev A.A., Nirova M.S., On Q-polynomial distance-regular graphs Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, vol. 16, pp. 1385–1392. doi: 10.33048/semi.2019.16.096 .
3. Coolsaet K., Jurishich A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs. *J. Comb. Theory.* Ser. A, 2008, vol. 115, no. 6, pp. 1086–1095. doi: 10.1016/j.jcta.2007.12.001 .

Received September 10, 2019
Revised November 7, 2019
Accepted November 11, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Aleksandr Alekseevich Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: makhnev@imm.uran.ru .

Mikhail Petrovich Golubyatnikov, graduate student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: mike_ru1@mail.ru .

Cite this article as: A. A. Makhnev, M. P. Golubyatnikov. Nonexistence of certain Q-polynomial distance-regular graphs, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 136–141 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ПОЧТИ ПРОСТЫЕ 4-ПРИМАРНЫЕ ГРУППЫ СО СВЯЗНЫМ ГРАФОМ ГРЮНБЕРГА — КЕГЕЛЯ[1]

Н. А. Минигулов

Пусть G — конечная группа. Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей порядка группы G. Графом Грюнберга — Кегеля (графом простых чисел) группы G называется граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе G есть элемент порядка pq. Группа G называется n-примарной, если $|\pi(G)| = n$. В 2011 г. в работе А. С. Кондратьева и И. В. Храмцова были описаны конечные 4-примарные почти простые группы с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. В данной работе описаны конечные 4-примарные почти простые группы со связным графом Грюнберга — Кегеля. Для каждой такой группы указан ее граф Грюнберга — Кегеля. Полученные результаты приведены в таблице. Согласно таблице число групп с указанным свойством равно 32. Результаты получены с использованием компьютерной системы GAP.

Ключевые слова: конечная группа, почти простая группа, 4-примарная группа, граф Грюнберга — Кегеля.

N. A. Minigulov. Finite almost simple 4-primary groups with connected Gruenberg–Kegel graph.

Let G be a finite group. Denote by $\pi(G)$ the set of prime divisors of the order of G. The Gruenberg–Kegel graph (prime graph) of G is the graph with the vertex set $\pi(G)$ in which two different vertices p and q are adjacent if and only if G has an element of order pq. If $|\pi(G)| = n$, then the group G is called n-primary. In 2011, A.S. Kondrat'ev and I.V. Khramtsov described finite almost simple 4-primary groups with disconnected Gruenberg–Kegel graph. In the present paper we describe finite almost simple 4-primary groups with connected Gruenberg–Kegel graph. For each of these groups, its Gruenberg–Kegel graph is found. The results are presented in a table. According to the table, there are 32 such groups. The results are obtained with the use of the computer system GAP.

Keywords: finite group, almost simple group, 4-primary group, Gruenberg–Kegel graph.

MSC: 20D60, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-142-146

Введение

Пусть G — конечная группа. Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей ее порядка. Графом Грюнберга — Кегеля (графом простых чисел) $\Gamma(G)$ группы G называется граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе G есть элемент порядка pq. Группа G называется n-примарной, если $|\pi(G)| = n$.

В работе А. С. Кондратьева и И. В. Храмцова [1] описаны конечные почти простые 4-примарные группы с несвязным графом Грюнберга — Кегеля.

Цель данной работы — описать конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга — Кегеля.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная почти простая 4-примарная группа. Граф $\Gamma(G)$ связен тогда и только тогда, когда группа G изоморфна одной из следующих групп*: A_{10}, S_9, S_{10}, $\mathrm{Aut}(\mathrm{J_2})$, $L_2(81).2^2$, $\mathrm{Aut}(\mathrm{L_2(q)})$ *при* $q \in \{25, 27, 49, 81\}$; $PGL_3(4)$, $PGL_3(4).2_2$, $PGL_3(4).2_3$, $L_3(4).6$, $L_3(4).2^2$, $\mathrm{Aut}(\mathrm{L_3(4)})$, $PGL_3(7)$, $\mathrm{Aut}(\mathrm{L_3(7)})$, $L_4(3).2_1$, $\mathrm{Aut}(\mathrm{L_4(3)})$, $U_3(5).3$, $\mathrm{Aut}(\mathrm{U_3(5)})$,

[1]Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 19-71-10067).

$U_3(8).3_2$, $U_3(8).3^2$, $U_3(8).S_3$, $\mathrm{Aut(U_3(8))}$, $S_4(9).2_2$, $\mathrm{Aut(S_4(q))}$ *при* $q \in \{5,7,9\}$; $O_8^+(2).2$, $O_8^+(2).3$, $\mathrm{Aut(O_8^+(2))}$. *Графы Грюнберга — Кегеля этих групп приведены в таблице ниже.*

Из теоремы следует, что число конечных почти простых 4-примарных групп со связным графом Грюнберга — Кегеля равно 32.

Полученные результаты могут быть использованы при исследованиях конечных групп по свойствам их графов Грюнберга — Кегеля.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [2; 3].

Для доказательства теоремы нам потребуются следующая лемма.

Лемма 1 [4, Theorem 1–Theorem 3; 5, Theorem I–Theorem III; 6]. *Пусть G – конечная простая 4-примарная группа. Тогда G изоморфна одной из следующих групп*:

(1) A_n *при* $7 \leq n \leq 10$, $L_2(q)$ *при* $q \in \{16,25,49,81\}$; $L_3(q)$ *при* $q \in \{4,5,7,8,17\}$; $L_4(3)$, $S_4(q)$ *при* $q \in \{4,5,7,9\}$; $S_6(2)$, $U_3(q)$ *при* $q \in \{4,5,7,8,9\}$; $U_4(3)$, $U_5(2)$, $O_8^+(2)$, $G_2(3)$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, M_{11}, M_{12}, J_2;

(2) $L_2(r)$, *где* r — *простое число,* $17 \neq r \geq 11$, $r^2-1 = 2^a3^bs^c$, $s > 3$ — *простое число,* $a, b \in \mathbb{N}$ *и* c *равно либо* 1, *либо* 2 *при* $r \in \{97, 577\}$;

(3) $L_2(2^m)$, *где* m, 2^m-1 *и* $(2^m+1)/3$ — *простые числа, большие* 3;

(4) $L_2(3^m)$, *где* m *и* $(3^m-1)/2$ — *нечетные простые числа, а* $(3^m+1)/4$ *равно либо простому числу, либо* 11^2 *при* $m = 5$.

2. Доказательство теоремы

Пусть G — конечная почти простая 4-примарная группа и L – ее цоколь.

Докажем условие необходимости теоремы. Пусть граф $\Gamma(G)$ связен.

Лемма 2. *Группа L не изоморфна группе из п.* (2) *леммы* 1.

Доказательство. Предположим, что L изоморфна группе из п. (2) леммы 1. Тогда $G \cong \mathrm{Aut(L)}$, и ввиду [1, табл. 1] граф $\Gamma(G)$ несвязен; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3. *Группа L не изоморфна группе из п.* (3) *леммы* 1.

Доказательство. Предположим противное. Тогда $L \cong L_2(2^m)$, где $m, u = 2^m-1$ и $t = (2^m+1)/3$ — простые числа, большие 3. Поскольку граф $\Gamma(L)$ несвязен, имеем $L < G$ и, следовательно, $G \cong \mathrm{Aut(L)} \cong \mathrm{L_2(2^m) : \mathbb{Z}_m}$. Поскольку $\pi(G) = \{2,3,u,t\}$, имеем $m \in \{u,t\}$.

Пусть $m = u$. Тогда $m = 2^m-1$, т. е. $2^m = m+1$. Индукцией по m покажем, что $2^m > m+1$ при $m \geq 2$. При $m = 2$ получим, что $2^2 = 4 > 2+1 = 3$, так что база индукции выполняется. Предположим, что $m \geq 2$ и $2^m > m+1$. Тогда $2^{m+1} > 2m+2 = m+(m+2) > m+2$, так что и шаг индукции выполняется. Таким образом, $m \neq u$.

Итак, $m = t = (2^m+1)/3$. Тогда $2^m = 3m-1$. Индукцией по m покажем, что $2^m > 3m-1$ при $m > 3$. При $m = 4$ получаем, что $2^4 = 16 > 3 \cdot 4 - 1 = 11$, так что база индукции выполняется. Предположим, что $m > 3$ и $2^m > 3m-1$. Тогда $2^{m+1} > 6m-2 = 3(m+1)-1+(3m-4) > 3(m+1)-1$, так что и шаг индукции выполняется. Таким образом, $m \neq t$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4. *Если группа L изоморфна группе из п.* (4) *леммы* 1, *то* $G \cong \mathrm{Aut(L_2(27))}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $L \cong L_2(3^m)$, где m и $u = (3^m - 1)/2$ – нечетные простые числа, а $(3^m + 1)/4$ равно либо простому числу, либо 11^2 при $m = 5$. Тогда $\pi((3^m + 1)/4) = \{t\}$ для некоторого простого числа t. Ввиду [1, табл. 1] графы $\Gamma(L_2(3^m))$ и $\Gamma(PGL_2(3^m))$ несвязны.

Поскольку $|\mathrm{Out(L)}| = 2\mathrm{m}$ (см. [3, табл. 5]) и граф $\Gamma(G)$ связен, группа G изоморфна либо $L : \mathbb{Z}_m$, либо $\mathrm{Aut(L)}$. Поэтому $m \in \pi(G) = \pi(L) = \{2, 3, u, t\}$.

Предположим, что $m \in \{u, t\}$. Тогда $m > 3$ и, следовательно, $m \in \pi(L)$. Но тогда полевой автоморфизм φ порядка m группы L централизует в L элемент порядка m. Но $C_L(\varphi) \cong L_2(3) \cong A_4$ (см. [2, 4.9.1]); противоречие. Итак, $m = 3$. Ввиду [1, табл. 1] граф $\Gamma(L_2(3^3).\mathbb{Z}_3)$ несвязен, поэтому $G \cong \mathrm{Aut(L_2(3^3))}$.

Лемма доказана.

Из лемм 2–4 следует, что либо группа L изоморфна группе из п. (1) леммы 1, либо $G \cong \mathrm{Aut(L_2(27))}$. Все 4-примарные почти простые группы с таким цоколем L можно либо найти в [3], либо вычислить, используя строение группы Out(L), указанное, например, в [3, с. 239–242]. С использованием [1, табл. 1] из множества этих групп исключаются все конечные 4-примарные почти простые группы с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Оставшиеся после этого исключения группы и их графы Грюнберга — Кегеля приведены в таблице ниже. Графы Грюнберга — Кегеля этих групп строятся с использованием их таблиц характеров, которые приводятся либо в [3], либо в [7].

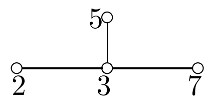
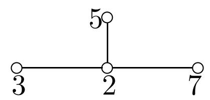
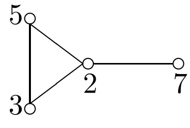
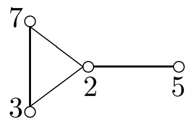
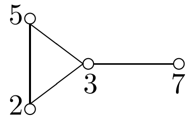
Условие необходимости теоремы доказано.

Пусть группа G изоморфна одной из групп из списка, приведенного в теореме. Графы Грюнберга — Кегеля этих групп приведены в таблице, и все они связны. Условие достаточности теоремы доказано.

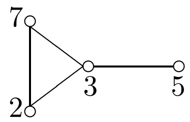
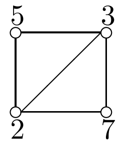
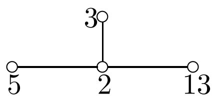
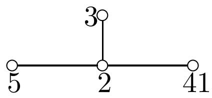
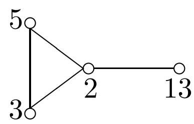
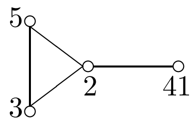
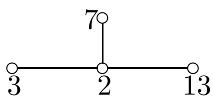
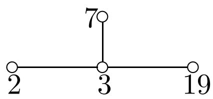
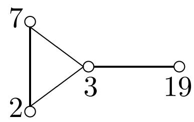
Теорема доказана.

Т а б л и ц а

Конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга — Кегеля

Группа G	Граф $\Gamma(G)$
$PGL_3(4), L_3(4).6$	
$U_4(3).2_1, U_4(3).4, U_4(3).2^2, \mathrm{Aut(U_4(3))}, \mathrm{Aut(L_2(49))}, \mathrm{L_3(4).2^2}$	
$S_9, \mathrm{Aut(J_2)}, \mathrm{O_8^+(2).2}$	
$\mathrm{Aut(S_4(7))}$	
$A_{10}, PGL_3(4).2_3, O_8^+(2).3, U_3(5).3, \mathrm{Aut(U_3(5))}$	

Продолжение таблицы

Группа G	Граф $\Gamma(G)$
$PGL_3(4).2_2$	
$S_{10}, \mathrm{Aut}(\mathrm{L}_3(4)), \mathrm{Aut}(\mathrm{O}_8^+(2))$	
$L_4(3).2_1, \mathrm{Aut}(\mathrm{L}_4(3)), \mathrm{Aut}(\mathrm{L}_2(25))$	
$L_2(81).2^2, \mathrm{Aut}(\mathrm{L}_2(81))$	
$\mathrm{Aut}(\mathrm{S}_4(5))$	
$S_4(9).2_2, \mathrm{Aut}(\mathrm{S}_4(9))$	
$\mathrm{Aut}(\mathrm{L}_2(27))$	
$U_3(8).3_2, U_3(8).3^2$	
$PGL_3(7), \mathrm{Aut}(\mathrm{L}_3(7)), \mathrm{U}_3(8).\mathrm{S}_3,$ $\mathrm{Aut}(\mathrm{U}_3(8))$	

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
2. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. 420 p. (Math. Surveys Monographs; vol. 40.3).
3. **Conway J.N., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Oxford University Press, 1985. 252 p. ISBN 0-19-853199-0 .
4. **Bugeaud Y., Cao Z., Mignotte M.** On simple K_4-groups // J. Algebra. 2001. Vol. 241, no. 10, P. 658–668. doi: 10.1006jabr.2000.8742 .

5. **Huppert B., Lempken W.** Simple groups of order divisible by at most four primes // Izv. Gomel. Gos. Univ. Im. F. Skoriny. Vopr. Algebry. 2000. No. 3 (16). P. 64–75.
6. **Shi W.J.** On simple K_4-groups // Chinese Science Bull. 1991. Vol. 36 (17). P. 1281–1283. doi: 10.1360/csb1991-36-17-1281 .
7. GAP System for Computational Discrete Algebra [e-resource]. Ver. 4.10.0. 2018. Available at: http://www.gap-system.org .

Поступила 12.08.2019
После доработки 15.09.2019
Принята к публикации 23.09.2019

Минигулов Николай Александрович
аспирант
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: nikola-minigulov@mail.ru

REFERENCES

1. Kondrat'ev A.S., Khramtsov I.V. On finite tetraprimary groups *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 279, suppl. 1, pp. 43-61. doi: 10.1134/S0081543812090040 .
2. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups. Number 3. Ser. Math. Surveys Monographs, vol. 40.3, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997, 420 p. ISBN-10: 0-8218-0391-3 .
3. Conway J.N., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Oxford University Press, 1985, 252 p. ISBN 0-19-853199-0 .
4. Bugeaud Y., Cao Z., Mignotte M. On simple K_4-groups. *J. Algebra*, 2001, vol. 241, no. 10, pp. 658–668. doi:10.1006jabr.2000.8742 .
5. Huppert B., Lempken W.*Izv. Gomel. Gos. Univ. Im. F. Skoriny*, 2000, No. 3 (16), pp. 64–75.
6. Shi W.J. On simple K_4-groups. *Chinese Science Bull*, 1991, vol. 36 (17), pp. 1281–1283. doi: 10.1360/csb1991-36-17-1281 .
7. GAP System for Computational Discrete Algebra [e-resource]. Ver. 4.10.0. 2018. Available at: http://www.gap-system.org .

Received August 12, 2019
Revised September 15, 2019
Accepted September 23, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-10067).

Nikolai Aleksandrovich Minigulov, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: nikola-minigulov@mail.ru .

Cite this article as: N. A. Minigulov. Finite almost simple 4-primary groups with connected Gruenberg–Kegel graph, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 142–146 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.9

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ОБРАЩЕНИИ[1] РЯДОВ ВОЛЬФА — ДАНЖУА

А. Р. Миротин, А. А. Атвиновский

Пусть функция f с вещественными полюсами, образующими монотонную и ограниченную последовательность, разлагается в ряд Вольфа — Данжуа с положительными коэффициентами. В основном результате статьи утверждается, что если мы вычтем из функции $1/f$ ее "линейную часть", то оставшаяся "дробная часть" этой функции тоже будет разлагаться в ряд Вольфа — Данжуа (и ее полюсы тоже вещественны, а коэффициенты ряда отрицательны). Дано приложение полученного результата к теории операторов.

Ключевые слова: ряд Вольфа — Данжуа, замкнутый оператор, левый обратный оператор, функциональное исчисление.

A. R. Mirotin, A. A. Atvinovskii. On multiplicative inversion for Wolff–Denjoy series.

Let a function f with real poles that form a monotone bounded sequence be expanded in a Wolff–Denjoy series with positive coefficients. The main result of the paper states that, if we subtract the "linear part" from the function $1/f$, then the remaining "fractional part" is also expanded in a Wolff–Denjoy series (its poles are also real and the coefficients of the series are negative). An application of the result to operator theory is given.

Keywords: Wolff–Denjoy series, closed operator, left inverse operator, functional calculus.

MSC: 30D30 47A60

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-147-154

Введение

Следуя [1], *рядами Вольфа — Данжуа* мы будем называть ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z-\lambda_k}, \tag{$*$}$$

где $A_k \in \mathbb{C}, \{A_k\}_{k\geq 1} \in l^1$, $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ — ограниченная последовательность комплексных чисел.

Как было отмечено в [1], ряды указанного вида интенсивно изучались в работах А. Пуанкаре, Ж. Вольфа, А. Данжуа, Э. Бореля, Т. Карлемана, А. Бёрлинга, Т. А. Леонтьевой [2; 3] прежде всего в связи с проблемами квазианалитичности и аналитического продолжения. Они также имеют приложения к теории рядов Дирихле и теории операторов [1].

Кроме того (см. статью [4] и приведенную там библиографию), различные свойства функций, допускающих представления вида $(*)$, изучались и использовались в ряде работ М. Г. Крейна, Г. Л. Гамбургера, Б. Я. Левина, М. В. Келдыша и И. В. Островского, Л. де Бранжа, Ю. Ф. Коробейника, А. Боричева и М. Л. Содина, Л. С. Маергойза, В. Б. Шерстюкова по теории функций и гармоническому анализу, теории операторов и дифференциальных уравнений. Отметим также работу Н. И. Ахиезера [5].

Как известно, класс функций Неванлинны $\mathcal{R}$ [6] (см. также [7], где эти функции называются функциями Пика) переходит в себя при преобразовании $f \mapsto -1/f$. Суть основного результата данной заметки состоит в уточнении этого свойства для некоторого подкласса класса $\mathcal{R}$.

[1]От английского "multiplicative inverse". Авторы отдают себе отчет в том, что термин "мультипликативное обращение функции f" применительно к функции $1/f$ не принят в математической литературе на русском языке.

А именно, показано, что если функция f с вещественными полюсами, образующими монотонную и ограниченную последовательность, разлагается в ряд Вольфа — Данжуа с положительными коэффициентами и если мы вычтем из функции $1/f$ ее "линейную часть", то оставшаяся "дробная часть" этой функции тоже будет разлагаться в ряд Вольфа — Данжуа (и ее полюсы тоже вещественны, а коэффициенты ряда отрицательны). При этом оказалось, что условия положительности коэффициентов и вещественности полюсов нельзя отбросить (см. замечания 1 и 2 ниже). Дано также приложение полученного результата к теории операторов.

Статья анонсирована в [8].

1. Основной результат

Теорема 1. *Пусть функция f представима в виде*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda_k-z}, \tag{1}$$

где $c_k>0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k<\infty, \{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ — монотонная и ограниченная последовательность действительных чисел. Тогда

$$\frac{1}{f(z)}=\alpha+\beta z-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{t_n-z}, \tag{2}$$

где

$$\alpha=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\lambda_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\right)^2},\quad \beta=-\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k},$$

t_n — все нули функции $f(z)$, $b_n=1/f'(t_n)>0$ $(n=1,2,\dots)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда последовательность $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ монотонно возрастает, и положим $a:=\lambda_1, b:=\sup_k\lambda_k$. Ясно, что ряд (1) сходится локально равномерно и функция f голоморфна на множестве $\mathbb{C}\setminus[a,b]$, в некоторой окрестности каждого из интервалов $(\lambda_{k-1},\lambda_k)$ и в бесконечности и имеет в бесконечности нуль первого порядка. Особыми точками функции f в расширенной комплексной плоскости являются полюсы λ_k и точка b, предельная для полюсов. Заметим, что все нули t_n функции f принадлежат отрезку $[a,b]$, так как $(z=x+iy)$,

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(\lambda_k-x)}{|\lambda_k-z|^2}+iy\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{|\lambda_k-z|^2},$$

и кратность этих нулей равна единице, поскольку при $x\in\mathbb{R}\setminus(\{\lambda_k\}_{k\geq 1}\cup\{b\})$

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(\lambda_k-x)^2}>0.$$

Из последнего неравенства следует также, что f строго возрастает на любом интервале, содержащемся в $\mathbb{R}\setminus(\{\lambda_k\}_{k\geq 1}\cup\{b\})$. Поскольку $f(\lambda_{k-1}+0)=-\infty$, $f(\lambda_k-0)=+\infty$, множество нулей функции f на каждом интервале $(\lambda_{k-1},\lambda_k)$ состоит ровно из одной точки. Следовательно, множество $\{t_n\}$ всех нулей функции f счетно, и мы можем считать последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ строго возрастающей.

Покажем, что функция $\varphi(z) := \dfrac{1}{f(z)}$ $(\varphi(\lambda_k) := 0,\ \varphi(b) := 0)$ имеет вид

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z - \int\limits_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z},$$

где τ — ограниченная неотрицательная регулярная борелевская мера, сосредоточенная на $[a,b]$ (см. [9]). Действительно, так как

$$\mathrm{Im} f(z) = y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|\lambda_k - z|^2},$$

то функция $-\varphi(z)$ принадлежит классу Неванлинны $\mathcal{R}$ [6] (см. также [7, с. 217]), т. е. голоморфна в верхней полуплоскости, и $\mathrm{Im}(-\varphi(z)) > 0$ при $y > 0$, а потому по теореме Неванлинны

$$-\varphi(z) = \alpha_1 + \beta_1 z + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\Big) d\tau(t),$$

где τ — неотрицательная регулярная борелевская мера, для которой сходится интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^2)^{-1} d\tau(t)$, α_1, β_1 — вещественные числа. Воспользуемся формулой обращения Стилтьеса — Перрона, которая в случае функции $-\varphi(z)$ при подходящей нормировке интегрирующей функции имеет вид (см., например, [10, с. 521])

$$\tau(s_2) - \tau(s_1) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{s_1}^{s_2} \mathrm{Im}(\varphi(x + i\varepsilon)) dx$$

(через $\tau(t)$ мы обозначаем функцию распределения меры τ). Ввиду вещественности функции $\varphi(z)$ при $z = x < a$ и $z = x > b$ правая часть здесь равна нулю при $s_1 < s_2 < a$ и при $s_2 > s_1 > b$, а потому функция $\tau(t)$ постоянна при $t < a$ и $t > b$ и, в частности, ограничена. Поэтому

$$-\varphi(z) = \alpha_2 + \beta_1 z + \int\limits_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z}, \quad \text{т. е.} \quad \varphi(z) = \alpha + \beta z - \int\limits_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z},$$

где α, β — вещественные числа.

Аналогично, если $t_{k-1} < s_1 < s_2 < t_k$, формула обращения Стилтьеса — Перрона показывает, что функция $\tau(t)$ постоянна на каждом интервале (t_{k-1}, t_k), что приводит к формуле (2), в которой $b_k > 0$ — скачок функции τ в точке t_k (предельный переход под знаком интеграла в формуле Стилтьеса — Перрона возможен в силу непрерывности подинтегральной функции в комплексной окрестности отрезка $[s_1, s_2]$). Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ есть вариация функции $\tau(t)$ на отрезке $[a,b]$, а потому этот ряд сходится.

Наконец, из равенства $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n/(x - t_n) = 0$ и формулы (2) вытекает, что график линейной функции $\alpha + \beta x$ есть наклонная асимптота графика функции $1/f(x)$, а потому коэффициенты α и β определяются следующим образом:

$$\beta = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xf(x)}, \quad \alpha = \lim_{x\to\infty} \Big(\frac{1}{f(x)} - \beta x\Big).$$

Тогда

$$\beta = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{xc_k}{\lambda_k - x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{\lambda_k/x - 1}} = -\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k},$$

и

$$\alpha = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k} \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\Big(1+\dfrac{x}{\lambda_k - x}\Big)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{\lambda_k - x}}$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k} \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k\lambda_k}{\lambda_k - x}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{\lambda_k - x}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k} \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k\lambda_k}{\lambda_k/x - 1}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{\lambda_k/x - 1}} == \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\lambda_k}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\Big)^2}.$$

Законность предельного перехода под знаками сумм следует из того, что при $|x| > 2\sup_{k\geq 1}|\lambda_k|$ для всех $k \geq 1$ справедливо неравенство $|\lambda_k/x - 1| > 1/2$, а потому ряды имеют суммируемые мажоранты.

В случае, когда последовательность $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ монотонно убывает, доказательство проводится аналогично, если положить $a := \inf_k \lambda_k$, $b := \lambda_1$ и вместо интервалов $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$ рассматривать интервалы $(\lambda_k, \lambda_{k-1})$. Это завершает доказательство теоремы. □

З а м е ч а н и е 1. Требование положительности коэффициентов c_k в теореме 1 существенно, так как в противном случае кратность нуля функции f (а потому и порядок соответствующего полюса функции $1/f$) может быть больше единицы, что показывает следующий пример:

$$\frac{1}{2z} - \frac{4}{z+1} + \frac{9}{2(z+2)} = \frac{(z-1)^2}{z(z+1)(z+2)}.$$

2. Приложения

Следствием теоремы 1 является теорема об обращении функции f вида (1) от замкнутого оператора в банаховом пространстве. Пусть для определенности последовательность $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ монотонно возрастает. Если A — замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр $\sigma(A)$ которого не пересекается с отрезком $[a,b]$, где $a := \lambda_1, b := \sup_k \lambda_k$, то мы положим

$$f(A) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k R(\lambda_k, A),$$

где $R(\lambda_k, A) = (\lambda_k I - A)^{-1}$ — значения резольвенты оператора A. Это определение согласуется с голоморфным функциональным исчислением Рисса — Данфорда замкнутых операторов в пространстве X [11], поскольку f принадлежит пространству $\mathcal{F}(A)$ функций, голоморфных в некоторой (своей для каждой функции) окрестности множества $\sigma(A)$ и в бесконечности. Приведенное ниже следствие обобщает результат из [12], который был получен с помощью функционального исчисления, построенного в [13;14]. Континуальный аналог этого результата был установлен в [15].

Следствие. *Пусть функция f задана формулой* (1)*, где $c_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ — монотонно возрастающая и ограниченная последовательность действительных чисел, $a := \lambda_1, b := \sup_k \lambda_k$ и A — замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр которого не пересекается с отрезком $[a,b]$. Тогда левый обратный к оператору $f(A)$ существует и имеет вид*

$$f(A)^{-1} = \alpha I + \beta A - \sum_{n=1}^{\infty} b_n R(t_n, A),$$

где t_n $(n = 1, 2, \dots)$ — все нули функции f, а значения b_n, α и β даются теоремой 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что функция f принадлежит классу $R[a,b]$ (относительно последнего см. [10, с. 525; а также 13]). Поэтому по теореме 1 из [13] левый обратный к оператору $f(A)$ существует и равен $\varphi(A)$ (как и выше, $\varphi = 1/f$). Осталось заметить, что в силу теоремы 1

$$\varphi(A) = \alpha I + \beta A - \sum_{n=1}^{\infty} b_n R(t_n, A). \qquad \square$$

В работе [12] был рассмотрен частный случай следствия, в котором ряд заменен конечной суммой. Там же была поставлена задача обобщения этого результата на случай комплексных полюсов (метод, использованный в [12], здесь неприменим, см. ниже замечание 2). Нижеследующая теорема 2 решает эту задачу.

Рассмотрим рациональную функцию

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_j - z},$$

где $a_j > 0$, а λ_j — произвольные попарно различные комплексные числа. Если A — замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр $\sigma(A)$ которого не пересекается с множеством $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, то мы, как и выше, положим

$$f(A) = \sum_{j=1}^{n} a_j R(\lambda_j, A).$$

Это определение также согласуется с голоморфным функциональным исчислением Рисса — Данфорда замкнутых операторов в пространстве X, поскольку $f \in \mathcal{F}(A)$.

Ниже мы получим условия левой обратимости оператора $f(A)$ и вычислим соответствующий левый обратный. Для формулировки основного результата заметим, что рациональная функция $g = 1/f$ имеет в бесконечности полюс первого порядка. Следовательно, выделяя целую часть и разлагая дробную часть на простейшие дроби, мы можем ее представить в виде

$$g(z) = \alpha + \beta z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{jk}}{(t_j - z)^k}, \tag{3}$$

где t_j — все нули функции f, m_j — кратность нуля t_j.

З а м е ч а н и е 2. В отличие от случая, когда λ_j — действительные числа, рассмотренного выше, нули функции f могут быть кратными, даже если все коэффициенты положительны. Например, так будет в случае $f(z) = \dfrac{1}{z-\lambda} + \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z}$, где λ — корень уравнения $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть A — замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр $\sigma(A)$ которого не пересекается с выпуклой оболочкой $\operatorname{conv}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ множества $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Тогда левый обратный к оператору $f(A)$ существует и имеет вид*

$$f(A)^{-1} = \alpha I + \beta A + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} R(t_j, A)^k,$$

где t_j $(j = 1, \ldots, m)$ — все нули функции f, m_j — кратность нуля t_j и

$$\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \lambda_j}{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\Big)^2}, \quad \beta = -\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Значениz коэффициентов α и β выводятся из формулы (3) аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 1.

Теперь покажем, что все корни уравнения $f(z) = 0$ принадлежат $\mathrm{conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Если допустить противное, то найдется прямая на комплексной плоскости, разделяющая $\mathrm{conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и некоторый корень z_0 этого уравнения. Следовательно, найдется прямая, разделяющая $\mathrm{conv}(\lambda_1 - z_0, \dots, \lambda_n - z_0)$ и 0. Совершая поворот $w = e^{i\theta} z$ на подходящий угол, получаем, что прямая $\mathrm{Re} w = a, a > 0$, разделяет $\mathrm{conv}(e^{i\theta}(\lambda_1 - z_0), \dots, e^{i\theta}(\lambda_n - z_0))$ и 0. Ясно, что $\sum_{j=1}^n a_j / w_j = 0$, где $w_j = e^{i\theta}(\lambda_j - z_0)$.

С другой стороны, дробно-линейное преобразование $\zeta = 1/w$ переводит прямую $\mathrm{Re} w = a$ в окружность, проходящую через 0 и содержащую внутри все точки $\zeta_j = 1/w_j$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{w_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j \zeta_j \neq 0;$$

у нас $a_j > 0$, и все точки ζ_j лежат по одну сторону от касательной к окружности, проведенной в точке 0, и мы получили противоречие.

Из доказанного выше следует, что функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \alpha + \beta z + h(z),$$

где

$$h(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{jk}}{(t_j - z)^k},$$

голоморфна в окрестности спектра оператора A, а потому функции h принадлежат пространству $\mathcal{F}(A)$. Из определения функционального исчисления Рисса — Данфорда сразу следует, что

$$g(A) = \alpha I + \beta A + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} R(t_j, A)^k.$$

Заметим, что оба слагаемых правой части очевидного равенства

$$1 = g(z) f(z) = (\alpha + \beta z) f(z) + h(z) f(z)$$

принадлежат $\mathcal{F}(A)$. Следовательно, применяя функцию $(\alpha + \beta z) f(z) + h(z) f(z)$ к оператору A и воспользовавшись свойствами полиномиального исчисления и голоморфного функционального исчисления Рисса — Данфорда [11, VII.9], будем иметь $(\alpha I + \beta A) f(A) + h(A) f(A) = I$. Таким образом, $f(A)^{-1} = g(A)$, что и требовалось доказать. $\square$

З а м е ч а н и е 3. Легко проверяемое равенство ($a, b \geq 0$, $a + b = 1$)

$$a R(\lambda_1, A) + b R(\lambda_2, A) = R(\lambda_1, A) \left((a\lambda_2 + b\lambda_1) - A \right) R(\lambda_2, A)$$

показывает, что его левая часть обратима слева тогда и только тогда, когда число $a\lambda_2 + b\lambda_1$ не принадлежат точечному спектру $\sigma_p(A)$. Отсюда следует, что всевозможные линейные комбинации с положительными коэффициентами двух значений резольвенты оператора A обратимы слева тогда и только тогда, когда $\sigma_p(A)$ не пересекается с выпуклой оболочкой $\mathrm{conv}(\lambda_1, \lambda_2)$ множества $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, т. е. с отрезком с концами λ_1 и λ_2. Таким образом, условие $\mathrm{conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cap \sigma(A) = \varnothing$ в предыдущей теореме существенно.

З а м е ч а н и е 4. Как в ситуации, описываемой следствием, приведенным выше, так и в ситуации теоремы 2 задача $f(A)x = y$ является некорректной при неограниченном A. Причиной этого служит член βA в формуле для $f(A)^{-1}$, которая в обоих случаях имеет вид

$$f(A)^{-1} = \alpha I + \beta A + g(A),$$

где оператор $g(A)$ ограничен. Из этой же формулы вытекает следующий подход к регуляризации этих задач. Если оператор A^{-1} ограничен и R_t $(0 < t < t_0)$ есть регуляризующее семейство задачи $A^{-1}x = y$ (т.е. $R_t A^{-1} x \to x$ $(t \to 0)$ при всех $x \in X$, см., например, [16]), то $R'_t = \alpha I + \beta R_t + g(A)$ есть, как легко проверить, регуляризующее семейство задачи $f(A)x = y$.

Авторы благодарят рецензентов за замечания и предложения, способствовавшие улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сибилев Р.В.** Теорема единственности для рядов Вольфа — Данжуа // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, вып. 1. С. 170–199.
2. **Леонтьева Т.А.** Представление аналитических функций рядами рациональных функций // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 4. С. 347–355.
3. **Леонтьева Т.А.** Представление функций, аналитических в замкнутой области рядами рациональных функций // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 2. С. 191–200.
4. **Шерстюков В.Б.** Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 12. С. 137–156.
5. **Ахиезер Н.И.** О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1945. Т. 19. P. 275 –290.
6. **Nevanlinna R.**, Asymptotische Entwicklungen Beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1922. Vol. 18. P. 1–53.
7. **Donoghue W.F**. Distributions and Fourier transforms. N Y; London: Acad. Press, 1969. 315 p. (Ser. Pure Appl. Math. (Book 32)). ISBN: 0122206509 .
8. **Mirotin A.R., Atvinovskii A.A.** Analog for the Wiener lemma for Wolff–Denjoy series [e-resource]. 8 p. Available at: *ArXiv*: arXiv:1908.08029v1 [math.FA] 21 Aug 2019.
9. **Атвиновский А.А.** Об интегральном представлении одного класса аналитических функций // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. 2011. № 4 (67). С. 3–7.
10. **Крейн М.Г., Нудельман, А.А.** Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М. : Наука, 1973. 551 с.
11. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Том 1: Общая теория. М. : ИЛ, 1962. 896 с.
12. **Миротин А.Р., Атвиновский А.А.** Обращение линейной комбинации значений резольвенты замкнутого оператора // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 3 (20). С. 77–79.
13. **Атвиновский А.А., Миротин А.Р.** Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве // Изв. вузов. Математика. 2013. Т. 10. С. 3–15.
14. **Атвиновский А.А., Миротин А.Р.** Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. II // Изв. вузов. Математика. 2015. Т. 5. С. 3–16.
15. **Миротин А.Р.** Обращение операторно-монотонных функций негативных операторов в банаховом пространстве // Тр. Института математики (Минск). 2004. Т. 12, № 1. С. 104–108.
16. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 p.

Поступила 12.09.2019
После доработки 13.11.2019
Принята к публикации 18.11.2019

Миротин Адольф Рувимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины
г. Гомель
e-mail: amirotin@yandex.ru

Атвиновский Александр Алексеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины
г. Гомель
e-mail: aatvinovskiy@gmail.com

REFERENCES

1. Sibilev R.V. A uniqueness theorem for Wolff–Denjoy series. *St. Petersburg Math. J.*, 1996, vol. 7, no. 1, pp. 145–168.
2. Leont'eva T.A. The representation of analytic functions by series of rational functions. *Math. Notes*, 1967, vol. 2, no. 4, pp. 695–702. doi: 10.1007/BF01093644 .
3. Leont'eva T.A. Representation of functions analytic in a closed domain by series of rational functions. *Math. Notes*, 1968, vol. 4, no. 2, pp. 606–611. doi: 10.1007/BF01094960 .
4. Sherstyukov V.B. Expanding the reciprocal of an entire function with zeros in a strip in a Kreĭn series. *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 12, pp. 1853–1871. doi: 10.1070/SM2011v202n12ABEH004210 .
5. Akhiezer N. On some inversion formulae for singular integrals. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1945, vol. 9, no. 4, pp. 275–290 (in Russian).
6. Nevanlinna R. Asymptotische Entwicklungen Beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A*, 1922, vol. 18, no. 5, pp. 1–53.
7. Donoghue W.F. *Distributions and Fourier transforms*, N Y; London: Acad. Press, 1969, Ser. Pure Appl. Math. (Book 32), 315 p. ISBN: 0122206509 .
8. Mirotin A.R., Atvinovskii A.A. Analog for the Wiener lemma for Wolff-Denjoy series, 8 p., Available at: *ArXiv*: arXiv:1908.08029v1 [math.FA] 21 Aug 2019.
9. Atvinovskii A.A. On integral representation of a class of analytical functions. *Izv. Gomel. Gos. Univ. im. F. Skoriny*, 2011, vol. 67, no. 4, pp. 3–7 (in Russian).
10. Krein M.G., Nudelman A.A. *The Markov Moment Problem and Extremal Problems.* Leipzig: Max Planck Institute, 1977, 417 p. doi: 10.1090/mmono/050 . Original Russian text published in Krein M.G., Nudel'man A.A. *Problema momentov Markova i ekstremal'nye zadachi.* Moscow: Nauka Publ., 1973. 551 p.
11. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators* Part 1: *General Theory.* N Y: Interscience, 1988, 872 p. ISBN: 978-0-471-60848-6 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory*, T. 1: *Obshchaya teoriya.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962.
12. Mirotin A.R., Atvinovskii A.A. Inversion of a linear combination of values of the resolvent of a closed operator. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2014, no. 3 (20), pp. 77–79 (in Russian).
13. Atvinovskii A.A., Mirotin A.R. On some functional calculus of closed operators in a Banach space. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 10, pp. 1–12. doi: 10.3103/S1066369X13100010 .
14. Atvinovskii A.A., Mirotin A.R. On some functional calculus of closed operators in a Banach space. II. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 5, pp. 1–12. doi: 10.3103/S1066369X15050011 .
15. Mirotin A.R. The inverse of operator monotonic functions of negative operators on Banach spaces. *Trudy Instituta Matematiki (Minsk)*, 2004, vol. 12, no. 1, pp. 104–108. (in Russian)
16. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Inverse and Ill-Posed Problems Series, Utrecht: VSP, 2002, 281 p. ISBN: 90-6764-367-X/hbk . Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 208 p.

Received September 12, 2019
Revised November 13, 2019
Accepted November 18, 2019

Adolf Ruvimovich Mirotin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, g. Gomel, 246699 Belarus, e-mail: amirotin@yandex.ru .

Aleksandr Alekseevich Atvinovskii, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Francisk Skorina Gomel State University, g. Gomel, 246699 Belarus, e-mail: aatvinovskiy@gmail.com .

Cite this article as: A. R. Mirotin, A. A. Atvinovskii. On multiplicative inversion for Wolff–Denjoy series, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 147–154 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ СО СВЕРХРАЗРЕШИМЫМИ ПОДГРУППАМИ ЗАДАННЫХ ПОРЯДКОВ

В. С. Монахов, В. Н. Тютянов

Изучается конечная группа G, обладающая следующим свойством: для каждой ее максимальной подгруппы H существует подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$ и $H_1 \in \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — формация всех нильпотентных групп или всех сверхразрешимых групп. Доказано, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп и группа G ненильпотентна, то $|\pi(G)| = 2$ и в G есть нормальная силовская подгруппа. Для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп и разрешимой группы G с рассматриваемым свойством доказывается, что G сверхразрешима или $2 \le |\pi(G)| \le 3$; при $|\pi(G)| = 3$ группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа; при $|\pi(G)| = 2$ или G имеет нормальную силовскую подгруппу, или для наибольшего $p \in \pi(G)$ некоторая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы группы G нормальна в G. Если G — неразрешимая группа и для каждой максимальной подгруппы в G существует сверхразрешимая подгруппа такого же порядка, то каждый неабелев композиционный фактор группы G изоморфен $PSL_2(p)$ для некоторого простого числа p и все такие значения p перечислены.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа, нильпотентная подгруппа, сверхразрешимая подгруппа.

V. S. Monakhov, V. N. Tyutyanov. Finite groups with supersoluble subgroups of given orders.

We study a finite group G with the following property: for any of its maximal subgroups H, there exists a subgroup H_1 such that $|H_1| = |H|$ and $H_1 \in \mathfrak{F}$, where $\mathfrak{F}$ is the formation of all nilpotent groups or all supersoluble groups. We prove that, if $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ is the formation of all nilpotent groups and G is nonnilpotent, then $|\pi(G)| = 2$ and G has a normal Sylow subgroup. For the formation $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ of all supersoluble groups and a soluble group G with the above property, we prove that G is supersoluble, or $2 \le |\pi(G)| \le 3$; if $|\pi(G)| = 3$, then G has a Sylow tower of supersoluble type; if $|\pi(G)| = 2$, then either G has a normal Sylow subgroup or, for the largest $p \in \pi(G)$, some maximal subgroup of a Sylow p-subgroup is normal in G. If G is nonsoluble and, for each maximal subgroup of G, there exists a supersoluble subgroup of the same order, then every nonabelian composition factor of G is isomorphic to $PSL_2(p)$ for some prime p; we list all such values of p.

Keywords: finite group, soluble group, maximal subgroup, nilpotent subgroup, supersoluble subgroup.

MSC: 20D10, 20D20, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-155-163

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Множество всех простых делителей порядка группы G обозначается через $\pi(G)$.

Хорошо известно строение группы, у которой все максимальные подгруппы нильпотентны [1]. Такие ненильпотентные группы называются группами Шмидта. Известно также строение несверхразрешимой группы, у которой все максимальные подгруппы сверхразрешимы [2]. Простые группы, у которых все максимальные подгруппы разрешимы, перечислены Томпсоном [3]. Разрешимые группы, не принадлежащие насыщенной формации $\mathfrak{F}$, у которых все максимальные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$, также достаточно хорошо исследованы [4, § 24]. Авторами [5] исследованы группы, в которых каждая максимальная подгруппа нильпотентна или проста, и группы, в которых каждая максимальная подгруппа сверхразрешима или проста.

В настоящей статье изучается конечная группа G, обладающая следующим свойством: для каждой ее максимальной подгруппы H существует подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$ и $H_1 \in \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — формация всех нильпотентных групп или всех сверхразрешимых групп. Доказано, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп и группа G ненильпотентна, то $|\pi(G)| = 2$ и в G есть нормальная силовская подгруппа. Для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп и разрешимой группы G с рассматриваемым свойством доказывается, что либо G сверхразрешима или $2 \leq |\pi(G)| \leq 3$; при $|\pi(G)| = 3$ группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа; при $|\pi(G)| = 2$ или G имеет нормальную силовскую подгруппу, или для наибольшего $p \in \pi(G)$ некоторая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы группы G нормальна в G. Если G — неразрешимая группа и для каждой максимальной подгруппы в G существует сверхразрешимая подгруппа такого же порядка, то каждый неабелев композиционный фактор группы G изоморфен $PSL_2(p)$ для некоторого простого числа p и все такие значения p перечислены.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Используемая терминология соответствует [6]. Через S_n и A_n обозначаются симметрическая и знакопеременная группы степени n соответственно, а Z_m — циклическая группа порядка m. Если m и n — натуральные числа, то (m, n) обозначает их наибольший общий делитель. Запись $M < G$ ($M \lessdot G$) означает, что M — собственная (максимальная) подгруппа группы G. Полупрямое произведение подгрупп A и B с нормальной подгруппой A обозначается через $A \rtimes B$. $S(G)$ — наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G.

Лемма 1. *В разрешимой группе максимальная подгруппа наибольшего порядка нормальна.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть G — разрешимая группа и K — ее максимальная подгруппа наибольшего порядка. Предположим, что $K_G = 1$. Тогда $G = N \rtimes K$, где N — минимальная нормальная подгруппа в G. Если $x \in G \setminus K$, то

$$K \cap K^x < K, \quad N(K \cap K^x) < G, \quad KK^x \neq G,$$

$$|G| = |K||N| > |KK^x| = \frac{|K||K^x|}{|K \cap K^x|}, \quad |K \cap K^x||N| > |K|.$$

Теперь подгруппа $N(K \cap K^x)$ имеет порядок больший, чем порядок подгруппы K. Получили противоречие. Поэтому наше допущение неверно и $K_G \neq 1$. По индукции подгруппа K/K_G нормальна в G/K_G, значит, K нормальна в G.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — сверхразрешимая группа и натуральное число k делит $|G|$. Тогда в группе G существует подгруппа H порядка k.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по порядку группы G. Так как группа G сверхразрешима, то любая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс. Поэтому для каждого $p \in \pi(G)$ индекс максимальной в G подгруппы, содержащей p'-холлову подгруппу из G, равен p. Если $k = |G|$, то искомой подгруппой будет вся группа G. Если $k \neq |G|$, то в G найдется максимальная подгруппа M такая, что k делит $|M|$. Так как M сверхразрешима, то по индукции в M найдется подгруппа H порядка k.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы H_1 имеется сверхразрешимая подгруппа H такая, что $|H| = |H_1|$. Если N — нормальная подгруппа группы G, то в фактор-группе G/N для каждой максимальной подгруппы M_1/N найдется сверхразрешимая подгруппа M/N такая, что $|M/N| = |M_1/N|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M_1/N — произвольная максимальная подгруппа в G/N. По условию в группе G найдется сверхразрешимая подгруппа K, для которой $|K| = |M_1|$. Поскольку $|M_1/N|$ делит $|KN/N|$ и $KN/N \cong K/K \cap N$ сверхразрешима, то в KN/N имеется по лемме 2 подгруппа M/N порядка M_1/N.

Лемма доказана.

Рассмотрим множество $\mathfrak{R}$ неабелевых групп $PSL_2(p)$ (p — простое число), удовлетворяющих одному из условий:

(1) $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$, $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$ и одно из чисел $p \pm 1$ делится на 120;

(2) $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$ и одно из чисел $p \pm 1$ делится на 60;

(3) $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$ и одно из чисел $p \pm 1$ делится на 24;

(4) $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$ и одно из чисел $p \pm 1$ делится на 12.

Отметим, что $\mathfrak{R} \neq \varnothing$. Например, группа $PSL_2(239)$ удовлетворяет условию (1), группа $PSL_2(61)$ — условию (2), группа $PSL_2(23)$ — условию (3), группа $PSL_2(13)$ — условию (4).

Лемма 4. *Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы M_1 существует сверхразрешимая подгруппа M такая, что $|M| = |M_1|$. Группа G изоморфна простой неабелевой группе $PSL_2(p^n)$, где p — нечетное простое число и n — натуральное число, тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{R}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы M_1 существует сверхразрешимая подгруппа M такая, что $|M| = |M_1|$, и G изоморфна $PSL_2(p^n)$, где p — нечетное простое число, n — натуральное число. Максимальными подгруппами порядка $\frac{1}{2}p^n(p^n - 1)$ в группе G являются только сопряженные с подгруппой Бореля подгруппы. Так как подгруппа Бореля является группой Фробениуса [9, теорема 2.8.2] и она сверхразрешима по условию, то $n = 1$ и $G \cong PSL_2(p)$. Отметим, что $(p+1, p-1) = 2$ и в G существуют диэдральные подгруппы порядков $p \pm 1$. По теореме Диксона [6, теорема II.8.27] несверхразрешимыми максимальными подгруппами в G могут быть только подгруппы, изоморфные A_4, S_4, A_5. Возможны следующие случаи.

(1) Обе подгруппы, изоморфные A_5 и S_4, максимальны в G. Тогда $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$ и $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$ [6, теорема II.8.27]. Поэтому либо $p+1$, либо $p-1$ делится на 120. По лемме 2 в G имеются сверхразрешимые подгруппы порядков 60 и 24.

(2) Только подгруппа, изоморфная A_5, максимальна в G. Тогда $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$ и $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$ [6, теорема II.8.27]. Поэтому либо $p+1$, либо $p-1$ делится на 60. По лемме 2 в G имеется сверхразрешимая подгруппа порядка 60.

(3) Только подгруппа, изоморфная S_4, максимальна в G. Тогда $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$ и $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$ [6, теорема II.8.27]. Поэтому либо $p+1$, либо $p-1$ делится на 24. По лемме 2 в G имеется сверхразрешимая подгруппа порядка 24.

(4) Только подгруппа, изоморфная A_4, максимальна в G. Тогда $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$ и $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$ [6, теорема II.8.27]. Поэтому либо $p+1$, либо $p-1$ делится на 12. По лемме 2 в G имеется сверхразрешимая подгруппа порядка 12.

Таким образом, $G \in \mathfrak{R}$. Из доказательства ясно, что если $G \in \mathfrak{R}$, то она удовлетворяет условию леммы.

Лемма доказана.

2. Нильпотентный случай

Напомним, что $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G.

Теорема 1. *Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы H существует нильпотентная подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Тогда либо группа G нильпотентна, либо $|\pi(G)| = 2$ и $G/F(G)$ имеет простой порядок.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что в группе G нет нормальных силовских подгрупп. Тогда для каждого $p \in \pi(G)$ нормализатор $N_G(P)$ силовской p-подгруппы P из G будет собственной подгруппой в G. Пусть H — максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(P)$. По условию существует нильпотентная подгруппа H_1 такая, что $|H| = |H_1|$. Пусть P_1 — силовская p-подгруппа из H_1. Так как $|P_1| = |P|$, то P_1 — силовская подгруппа группы G и $N_G(P_1) = H_1$. По теореме Силова $P_1 = P^x$ для некоторого $x \in G$. Так как нормализаторы сопряженных подгрупп сопряжены, то

$$H_1 = N_G(P)^x \leq H^x, \quad H_1 = H^x.$$

Поскольку p — произвольное, то нормализаторы всех силовских подгрупп группы G нильпотентны. Но нормализаторы силовских подгрупп самонормализуемы [6, I.7.6], поэтому являются подгруппами Картера. По теореме Е. П. Вдовина [7] нормализаторы всех силовских подгрупп будут сопряжены. Значит, группа G нильпотентна. Противоречие.

Следовательно, наше предположение неверно, и группа G содержит нормальную силовскую подгруппу. Пусть таковой является подгруппа $P = G_p$, $p \in \pi(G)$. По теореме Цассенхауза [6, I.18.1] в G существует p'-холлова подгруппа H и все p'-холловы подгруппы в G сопряжены. Пусть M — максимальная подгруппа группы G и $H \leq M$. По условию существует нильпотентная подгруппа M_1 такая, что $|M_1| = |M|$. Поскольку порядок M_1 делится на порядок H, то подгруппа H нильпотентна и группа $G = P \rtimes H$ метанильпотентна.

Пусть Q — силовская q-подгруппа из H, $q \in \pi(H)$. Предположим, что $PQ \neq G$, и пусть K — максимальная в G подгруппа, содержащая PQ. По условию существует нильпотентная подгруппа K_1 такая, что $|K_1| = |K|$. Теперь группа PQ нильпотентна. Это верно для любого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, поэтому группа G нильпотентна. Противоречие. Значит, наше предположение неверно, и $PQ = G = P \rtimes Q$. Пусть Q_1 — максимальная в Q подгруппа. По условию существует нильпотентная подгруппа F такая, что $|F| = |PQ_1|$. Ясно, что $F = F(G)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы H существует нильпотентная подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Если $|\pi(G)| \neq 2$, то группа G нильпотентна.*

Каждая группа Шмидта удовлетворяет условию теоремы 1. Следующий пример показывает, что группа из теоремы 1 не наследует некоторые свойства групп Шмидта.

П р и м е р. В группе $S_3 \times Z_2$ ненормальная силовская подгруппа нециклическая, она изоморфна $Z_2 \times Z_2$. В группе $S_3 \times Z_9$ нормальная силовская подгруппа не шмидтовского типа, она изоморфна $Z_3 \times Z_9$. Обе группы $S_3 \times Z_2$ и $S_3 \times Z_9$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

3. Сверхразрешимый случай

Теорема 2. *Пусть в разрешимой группе G для каждой максимальной подгруппы H существует сверхразрешимая подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $|\pi(G)| \geq 4$, то G сверхразрешима*;

(2) *если $|\pi(G)| = 3$, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа*;

(3) *если $|\pi(G)| = 2$, то либо G имеет нормальную силовскую подгруппу, либо для наибольшего $p \in \pi(G)$ некоторая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы нормальна в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в разрешимой группе G для каждой максимальной подгруппы H существует сверхразрешимая подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Если H_1 имеет наибольший порядок среди всех собственных подгрупп группы G, то согласно лемме 1 подгруппа H нормальна в G. Ясно, что индекс H в G будет простым числом. Описание таких групп с единичной подгруппой Фраттини получено в работе [8]. Мы получим новые свойства группы G.

Пусть $p \in \pi(G)$, $G_{p'}$ — p'-холлова подгруппа группы G и H_1 — максимальная в G подгруппа, содержащая $G_{p'}$. По условию существует сверхразрешимая подгруппа H такая, что $|H| = |H_1|$. Так как порядок H делится на порядок $G_{p'}$, то $G_{p'}$ сверхразрешима. Поскольку p — произвольное число из $\pi(G)$, то $G_{p'}$ сверхразрешима для каждого $p \in \pi(G)$. Если

$$|\pi(G)| \geq 4,\ \pi(G) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots\},$$

то в группе G имеются четыре сверхразрешимые подгруппы

$$G_{p_1'},\ G_{p_2'},\ G_{p_3'},\ G_{p_4'}$$

попарно взаимно простых индексов $p_1^{a_1}$, $p_2^{a_2}$, $p_3^{a_3}$ и $p_4^{a_4}$ соответственно, где $p_i^{a_i}$ — порядок силовской p_i-подгруппы группы G. По теореме Дёрка [2] группа G сверхразрешима.

Пусть $|\pi(G)| = 3$, $\pi(G) = \{p_1, p_2, p_3\}$, $p_1 > p_2 > p_3$. Поскольку подгруппы $G_{(p_1)'}$, $G_{(p_2)'}$ и $G_{(p_3)'}$ сверхразрешимы, то $G_{(p_2)'}$ и $G_{(p_3)'}$ p_1-замкнуты [6, VI.9.1]. Поэтому группа G p_1-замкнута и $G = G_{p_1} \rtimes G_{(p_1)'}$. Так как подгруппа $G_{(p_1)'}$ p_2-замкнута [6, VI.9.1], то группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

Пусть $|\pi(G)| = 2$, $\pi(G) = \{p, q\}$, $p > q$. Предположим, что в G нет нормальных силовских подгрупп. Тогда нормализаторы $N_G(G_p)$ и $N_G(G_q)$ — собственные подгруппы в G.

Пусть $N_G(G_p) \leq H_1$, где H_1 — максимальная в G подгруппа. По условию в G существует сверхразрешимая подгруппа H такая, что $|H| = |H_1|$. Пусть P — силовская p-подгруппа из H, она нормальна в H и $H \leq N_G(P)$. Так как $|P| = |G_p|$, то P — силовская подгруппа группы G. По теореме Силова $P = (G_p)^x$ для некоторого $x \in G$. Так как нормализаторы сопряженных подгрупп сопряжены, то

$$H \leq N_G((G_p)^x) = (N_G(G_p))^x,\quad H^{x^{-1}} \leq N_G(G_p) \leq H_1,$$

$$H^{x^{-1}} = N_G(G_p) = H_1,\quad N_G(P) = H.$$

Поскольку нормализаторы силовских подгрупп самонормализуемы [6, I.7.6] и $p > q$, то $|G : H| = q^b > q$. Следовательно, H является подгруппой Гашюца группы G [4, 15.3].

Выберем максимальную в G подгруппу K_1 такую, что $|G_q|$ делит $|K_1|$ и индекс $|G : K_1| = p^a$ — наименьший. По условию существует сверхразрешимая подгруппа K такая, что $|K| = |K_1|$. Из выбора подгруппы K_1 следует, что K — максимальная в G подгруппа. Пусть R — силовская p-подгруппа из K (она нормальна в G) и Q — силовская q-подгруппа из K. Так как $|Q| = |G_q|$, то Q — силовская подгруппа группы G и $|G : K| = p^a$. Если $a > 1$, то K является подгруппой Гашюца группы G [4, 15.3]. Согласно [4, 15.5] подгруппы H и K сопряжены в G, что невозможно. Поэтому $|G : K| = p$ и $|G_p : R| = p$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть в неразрешимой группе G для каждой максимальной подгруппы H существует сверхразрешимая подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Тогда любой неабелевый композиционный фактор группы G принадлежит $\mathfrak{R}$.*

Доказательство. Будем считать, что G — минимальный контрпример к теореме. Предположим, что G — простая неабелева группа. Рассмотрим все случаи.

1. G — простая группа лиева типа.

Предположим, что G определена над полем характеристики $p = 2$. Пусть U — унипотентная подгруппа группы G и P_1 — параболическая максимальная подгруппа в G. Покажем, что $\pi(P_1) = \{2\}$, и, следовательно, $P_1 = U$. По условию теоремы в группе G существует сверхразрешимая подгруппа T_1, для которой $|T_1| = |P_1|$. Если $T_1 \lessdot G$, то по [12, лемма (1.6)] подгруппа T_1 является параболической подгруппой. Из теоремы Бореля — Титса [13, 13-4] следует, что

$C_G(O_2(T_1)) \le O_2(T_1)$. Так как T_1 — сверхразрешимая группа, то $O(T_1)$ централизует $O_2(T_1)$, и, следовательно, $O(T_1) = 1$. Поэтому $\pi(T_1) = \pi(P_1) = \{2\}$. Таким образом, $T_1 < P_2 \lessdot G$, где P_2 — параболическая максимальная подгруппа группы G. Найдется сверхразрешимая подгруппа T_2 группы G такая, что $|T_2| = |P_2|$. Если $T_2 \lessdot G$, то $\pi(T_2) = \pi(P_2) = \{2\}$. Следовательно, $T_2 < P_3 \lessdot G$, где P_3 — параболическая максимальная подгруппа группы G. Продолжая этот процесс, получим, что найдется число k, для которого сверхразрешимая параболическая подгруппа T_k максимальна в G. При этом $\pi(T_k) = \{2\}$ и $|P_1|$ делит $|T_k|$. Следовательно, $\pi(P_1) = \{2\}$. Таким образом, все параболические максимальные подгруппы группы G сопряжены с унипотентной подгруппой $U \lessdot G$.

Из [14; 15] следует, что G изоморфна $PSL_2(r)$, где r — простое число Ферма или Мерсенна и $r \ge 17$, или $PSL_2(9)$. Так как группа G определена над полем характеристики 2, то она не принадлежит указанному списку.

Таким образом, группа G определена над полем характеристики $p > 2$. Предположим, что группа G имеет лиев ранг $l \ge 2$ и P — параболическая максимальная подгруппа в G. Согласно [10, (2.1), (2.2)] имеет место разложение Леви $P = O_p(P)L_IH$, где H — подгруппа Картана, а L_I — центральное произведение групп Шевалле, каждая из которых находится по соответствующей связной компоненте диаграммы, полученной из диаграммы Дынкина группы G отбрасыванием вершин, входящих в I. По [16, теорема 2.13] разрешимой группой лиева типа над полем нечетной характеристики является только группа $A_1(3)$, которая несверхразрешима. Поэтому сомножители в дополнении Леви, а значит, и P не являются сверхразрешимыми. Выберем параболическую максимальную подгруппу P_1 в G, для которой $|G : P_1| = \min\{|G : P| \mid P$ — параболическая максимальная подгруппа в $G\}$. По условию теоремы в группе G найдется сверхразрешимая подгруппа T, для которой $|T| = |P_1|$. В силу выбора P_1 подгруппа T является параболической максимальной подгруппой в G. Следовательно, в G имеется сверхразрешимая параболическая максимальная подгруппа, что невозможно.

Таким образом, лиев ранг группы G равен 1 и $G \in \{PSL_2(p^n);\ PSU_3(p^n);\ {}^2G_2(3^{2n+1}),\ n \ge 1\}$. Если $G \cong PSL_2(p^n)$, то по лемме 4 $G \in \mathfrak{R}$. Пусть $G \cong PSU_3(p^n)$. Все параболические максимальные подгруппы в G исчерпываются сопряженными к подгруппе Бореля $B = q^{1+2} : ((q^2-1)/(3, q+1))$, которая несверхразрешима. Противоречие с тем, что в группе G существует сверхразрешимая подгруппа T, для которой $|T| = |B|$. Точно так же, если $G \cong {}^2G_2(3^{2n+1}) = {}^2G_2(q)$, то все параболические максимальные подгруппы в G исчерпываются сопряженными к подгруппе Бореля $q^{1+1+1} : (q-1)$, которая несверхразрешима.

2. $G \cong A_n$, $n \ge 5$.

В силу изоморфизмов $A_5 \cong PSL_2(5)$ и $A_6 \cong PSL_2(9)$ можно считать, что $n \ge 7$. Из [11, лемма 3] следует, что все подгруппы индекса n в A_n сопряжены в A_n. Так как $A_{n-1} \lessdot A_n$ и $|A_n : A_{n-1}| = n$, то по условию теоремы найдется сверхразрешимая подгруппа $T < A_n$, для которой $|A_n : T| = n$. Следовательно, $T \cong A_{n-1}$, что невозможно.

3. G — простая спорадическая группа.

В итоговой таблице работы [17] приведены степени минимальных подстановочных представлений всех простых спорадических групп. При этом, если G — спорадическая группа и n — степень ее минимального подстановочного представления, то соответствующие максимальные подгруппы индекса n в G являются неразрешимыми. Поэтому не существует сверхразрешимых подгрупп индекса n в группе G. Это противоречит условию теоремы.

Следовательно, G не является простой неабелевой группой. Пусть $1 \ne S \lhd G$. По лемме 3 фактор-группа $\overline{G} = G/S$ удовлетворяет условию теоремы. В силу минимальности контрпримера $S(G) = 1$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i — изоморфные простые неабелевы группы. Рассмотрим максимальную собственную нормальную подгруппу M в группе G, содержащую N. По условию теоремы G обладает сверхразрешимой подгруппой T, для которой $|T| = |M|$. Предположим, что $\overline{G} = G/M$ разрешима. Тогда $|G : M| = p \in \pi(G)$. Следовательно, $|G : T| = p$ и группа G обладает сверхразрешимой p'-холловой подгруппой. По [18, лемма 1] подгруппа N, а поэтому и N_1, обладают сверхразрешимыми p'-холловыми подгруппами. Если $(|N_1|, p) = 1$, то N_1 сверхразрешима, что невозможно. Поэтому $(|N_1|, p) = p$ и N_1 имеет сверхразрешимую холлову подгруппу индекса p^t. Из [19, теорема 1] следует, что $N_1 \cong PSL_2(q)$, где $q + 1 = p^t$. Если $p > 2$, то $q = 2^m$ и $N_1 \cong SL_2(2^m)$, $m \geq 2$. В этом случае p'-холлова подгруппа в N_1 будет изоморфна подгруппе Бореля в N_1, которая несверхразрешима. Последнее невозможно.

Таким образом, $p = 2$. Тогда $|G : M| = |G : T| = 2$. Если $T \leq M$, то $T = M$ и подгруппа M сверхразрешима, что невозможно. Поэтому $T \not\leq M$ и $G = MT$. Отсюда следует, что

$$|G| = (|M||T|)/|M \cap T|, \ |G : T| = |M : M \cap T| = 2.$$

Значит, $M \cap T \lhd M$. Поскольку $M \cap T$ является сверхразрешимой группой, то подгруппа M разрешима. Последнее невозможно.

Следовательно, $\overline{G}$ — простая неабелева группа. Пусть

$$\overline{R} \lessdot \overline{G}, \ |\overline{G} : \overline{R}| = \min\{|\overline{G} : \overline{F}| \mid \overline{F} \lessdot \overline{G}\}.$$

Обозначим через R полный прообраз $\overline{R}$ в G. Тогда $R \lessdot G$ и по условию теоремы существует сверхразрешимая подгруппа T группы G, для которой $|R| = |T|$. Если $M \leq T$, то подгруппа M является сверхразрешимой группой, что невозможно. Поэтому $M \not\leq T$. Рассмотрим подгруппу $T_1 = MT$. Очевидно, что $|T_1| > |R|$. В силу выбора $\overline{R}$ получим, что $\overline{G} = \overline{T_1}$ — сверхразрешимая группа. Последнее невозможно.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3-4. С. 366–372.
2. **Doerk K.** Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Vol. 91, no. 3. P. 198–205. doi: 10.1007/BF01312426 .
3. **Thompson J.G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74. P. 383–437.
4. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. Минск: Наука, 1978. 271 с.
5. **Монахов В.С., Тютянов В.Н.** О конечных группах с некоторыми подгруппами простых индексов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 833–836.
6. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; N Y, 1967. 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
7. **Vdovin E.P.** Carter subgroups of finite groups // Siberian Adv. Math. 2009. Vol. 19, iss. 1. P. 24–74. doi: 10.3103/S1055134409010039 .
8. **Казарин Л.С., Корзюков Ю.А.** Конечные разрешимые группы со сверхразрешимыми максимальными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 1980. № 5. С. 22–27.
9. **Gorenstein D.** Finite groups. N Y: Harper and Row, 1968. 519 p.
10. **Кондратьев А. С.** Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1 (247). С. 57–96.
11. **Li S., Shi W.** A note on the solvability of groups // J. Algebra. 2006. Vol. 304, no. 1. P. 278–285. doi: 10.1016/j.jalgebra.2005.09.028 .
12. **Seitz G.M.** Flag-transitive subgroups of Chevalley groups // Ann. Math. 1973. Vol. 97, no. 1. P. 27–56. doi: 10.2307/1970876 .
13. **Gorenstein D., Lyons R.** The local structure of finite groups of characteristic 2 type Providence, RI: Am. Math. Soc., 1983. 731 p. (Mem. Amer. Math. Soc; vol. 42). doi: 10.1090/memo/0276 .
14. **Baumann B.** Endliche nichtauflosbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppen // J. Algebra. 1975. Vol. 38, no. 1. P. 119–135. doi: 10.1016/0021-8693(76)90249-0 .
15. **Thompson J.G.** A special class of non solvable groups // Math. Z. 1960. Vol. 72, no. 1. P. 458–462. doi: 10.1007/BF01162968 .
16. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.

17. **Мазуров В.Д.** Минимальное подстановочное представление простой группы Томпсона // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 5. С. 562–580.
18. **Hall P.** Theorems like Sylow's // Proc. Lond. Math. Soc. (3) 1956. Vol. s3-6, no. 2. P. 286–304. doi: 10.1112/plms/s3-6.2.286 .
19. **Guralnick R.M.** Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. Vol. 81, no. 2. P. 304–311. doi: 10.1016/0021-8693(83)90190-4 .

Поступила 15.04.2019

После доработки 27.06.2019

Принята к публикации 8.07.2019

Монахов Виктор Степанович

д-р физ.-мат. наук, профессор

профессор кафедры алгебры и геометрии

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

г. Гомель

e-mail: victor.monakhov@gmail.com

Тютянов Валентин Николаевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

профессор кафедры общенаучных и гуманитарных дисциплин

Международный университет "МИТСО", Гомельский филиал

г. Гомель

e-mail: vtutanov@gmail.com

REFERENCES

1. Schmidt O. Groups, all subgroups of which are special. *Mat. Sb.*, 1924, vol. 31, no. 3–4, pp. 366–372 (in Russian).
2. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen. *Math. Z.*, 1966, vol. 91, no. 3, pp. 198–205. doi: 10.1007/BF01312426 .
3. Thompson J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1968, vol. 74, pp. 383–437. doi: 10.1090/S0002-9904-1968-11953-6 .
4. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Minsk: Nauka Publ., 1978, 271 p.
5. Monakhov V.S., Tyutyanov V.N. On finite groups with some subgroups of prime indices. *Siberian Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 4, pp. 666–668. doi: 10.1007/s11202-007-0068-3 .
6. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer, 1967, 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
7. Vdovin E.P. Carter subgroups of finite groups. *Siberian Adv. Math.*, 2009, vol. 19, no. 1, pp. 24–74. doi: 10.3103/S1055134409010039 .
8. Kazarin L.S., Korzyukov Yu.A. Finite solvable groups with supersolvable maximal subgroups. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1980, vol. 24, no. 5, pp. 23–29.
9. Gorenstein D. *Finite groups.* N Y: Harper and Row, 1968. 519 p.
10. Kondrat'ev A.S. Subgroups of finite Chevalley groups. *Russian Math. Surveys*, 1986, vol. 41, no. 1, pp. 65–118. doi: 10.1070/RM1986v041n01ABEH003203 .
11. Li S., Shi W. A note on the solvability of groups. *J. Algebra*, 2006, vol. 304, no. 1, pp. 278–285. doi: 10.1016/j.jalgebra.2005.09.028 .
12. Seitz G.M. Flag-transitive subgroups of Chevalley groups. *Ann. Math.*, 1973, vol. 97, no. 1, pp. 27–56. doi: 10.2307/1970876 .
13. Gorenstein D., Lyons R. *The local structure of the finite groups of characteristic 2 type.* Mem. Amer. Math. Soc, vol. 42, 731 p. doi: 10.1090/memo/0276 .
14. Baumann B. Endliche nichtauflösbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppen. *J. Algebra*, 1975, vol. 38, no. 1, pp. 119–135. doi: 10.1016/0021-8693(76)90249-0 .

15. Thompson J.G. A special class of non solvable groups. *Math. Z.*, 1960, vol. 72, no. 1, pp. 458–462. doi: 10.1007/BF01162968 .
16. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification.* University Series in Mathematics, N Y: Plenum Publishing Corp., 1982, 333 p. ISBN: 0-306-40779-5 . Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu.* Moscow: Mir Publ., 1985, 352 p.
17. Mazurov V.D. The minimal permutation representation of the Thompson simple group. *Algebra and Logic*, 1988, vol. 27, no 5, pp. 350–361. doi: 10.1007/BF01982274 .
18. Hall P. Theorems like Sylow's. *Proc. London Math. Soc.*, 1956, vol. s3-6, no. 2, pp. 286–304. doi: 10.1112/plms/s3-6.2.286 .
19. Guralnick R.M. Subgroups of prime power index in a simple group. *J. Algebra*, 1983, vol. 81, no. 2, pp. 304–311. doi: 10.1016/0021-8693(83)90190-4 .

Received April 15, 2019
Revised June 27, 2019
Accepted July 8, 2019

Viktor Stepanovich Monakhov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: victor.monakhov@gmail.com .

Valentin Nikolayevich Tyutyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gomel Branch of International University "MITSO", Gomel, 246029, Republic of Belarus, e-mail: vtutanov@gmail.com .

Cite this article as: V. S. Monakhov, V. N. Tyutyanov. Finite groups with supersoluble subgroups of given orders, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 155–163 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.5

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДЛЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. И. Новиков

Статья посвящена задаче экстремальной интерполяции функций с минимальным значением равномерной нормы линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}f(t) = f''(t) + (1/t)f'(t)$ на классе интерполируемых значений этих функций в точках равномерной сетки $\{kh : k = 1, 2, \ldots, N\}$ с шагом h $(h > 0)$ при достаточно большом, но конечном числе узлов сетки N. Класс интерполируемых данных определяется разностным аналогом дифференциального оператора $\mathcal{L}$. Этот разностный оператор выбирается из условия зануления сужений функций из ядра дифференциального оператора на равномерную сетку. Основным результатом статьи является двусторонняя оценка константы типа Ю. Н. Субботина экстремальной интерполяции с правильным порядком относительно шага h. Задачу нахождения этой константы можно также интерпретировать как обобщенную интерполяционную задачу Фавара, рассматриваемую на классе интерполируемых данных. С помощью этого одномерного результата в настоящей работе найдена оценка сверху в аналогичной задаче для равномерной нормы оператора Лапласа функции двух переменных при трансфинитной интерполяции в конечном числе концентрических окружностей с общим центром в начале координат.

Ключевые слова: интерполяция, дифференциальный оператор, разностный оператор, оператор Лапласа.

S. I. Novikov. Extremal function interpolation for a second-order linear differential operator.

The paper is devoted to the problem of extremal interpolation of functions with the minimum value of the uniform norm of the linear differential operator $\mathcal{L}f(t) = f''(t) + (1/t)f'(t)$ on a class of interpolated values of these functions at the points of a uniform grid $\{kh : k = 1, 2, \ldots, N\}$ with step h $(h > 0)$ for a rather large but finite number N of knots of the grid. The class of interpolation data is defined by a difference analog of the differential operator $\mathcal{L}$. The difference operator is determined by the condition of vanishing of the restrictions of functions from the kernel of the differential operator to the uniform grid. The main result of the paper is a two-sided estimate for an extremal interpolation constant of Subbotin's type with a correct order with respect to the step h. The problem of finding this constant can also be interpreted as a generalized interpolation problem of Favard's type considered on the described class of interpolation data. We use this one-dimensional result to derive an upper bound in a similar problem for the uniform norm of the Laplace operator of a function of two variables in the case of transfinite interpolation at a finite number of concentric circles centered at the origin.

Keywords: interpolation, differential operator, difference operator, Laplace operator.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-164-176

1. Введение

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ заданы N $(1 \le N < +\infty)$ равноотстоящих друг от друга концентрических окружностей с общим центром в начале координат и радиусами $R_k = kh$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$,

$$S_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le N^2h^2\}$$

— круг радиуса $R_N = Nh$ с центром в начале координат.

Через $C^1(S_N)$ обозначим пространство функций, имеющих непрерывные частные производные первого порядка в круге S_N. Под $L_\infty(S_N)$ будем, как обычно, понимать класс измеримых существенно ограниченных функций двух переменных $f(x, y)$, определенных в этом круге, с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{(x,y)\in S_N} |f(x, y)|$, и пусть $\boldsymbol{\Delta} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Пусть функция двух переменных $u(x,y)$ принимает одно и то же значение z_k во всех точках k-й окружности, т. е. $u(x,y)\Big|_{x^2+y^2=R_k^2} = z_k$.

Определим класс интерполирующих функций

$$F_N = \Big\{u \in C^1(S_N)\colon \mathbf{\Delta} u \in L_\infty(S_N),\ u(x,y)\Big|_{x^2+y^2=R_k^2} = z_k,\ k = 1, 2. \dots, N\Big\}.$$

Заметим, что интерполяцию непрерывных данных, заданных на кривых (или гиперповерхностях в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$), часто называют *трансфинитной интерполяцией* (см., например, [1–3] и ссылки в этих работах). *Трансфинитная интерполяция* используется в геометрическом моделировании и численном анализе, например, для построения поверхностей по данным на линиях уровня, при генерировании сеток и для визуализации объектов по результатам сканирования. Сами интерполянты при трансфинитной интерполяции иногда называются blending функциями.

Пусть $Y_N = \{z\colon z = \{z_k\}_{k=1}^N,\ \|z\|_{l_\infty^N} \leq 1\}$, где $\|z\|_{l_\infty^N} = \max\{|z_k|\colon k = 1, 2, \dots, N\}$ — класс интерполируемых данных.

Задача состоит в исследовании величины

$$\mathcal{A}_N(\mathbf{\Delta}) = \sup_{z \in Y_N} \inf_{u \in F_N} \|\mathbf{\Delta} u\|_\infty. \tag{1.1}$$

Решить задачу (1.1) — значит найти норму оператора Лапласа, примененного к "наилучшей" интерполирующей функции для "наихудшей" интерполируемой последовательности из заданного класса.

Для фиксированной последовательности $z = \{z_k\}$ задача минимизации нормы производной на классе интерполирующих функций известна как интерполяционная задача Фавара (см., например, [4]). Поэтому задачу нахождения величины (1.1) можно интерпретировать как обобщенную (в том числе, в смысле вида интерполяции) интерполяционную задачу Фавара, рассматриваемую для всего определенного выше класса интерполируемых данных.

Данные, заданные на окружностях в $\mathbb{R}^2$, естественно интерполировать радиальными функциями, т. е. такими что $u(x,y) = u(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, а оператор Лапласа записывать в полярных координатах (r,φ) (см., например, [5, п. 222]). Поскольку значения радиальных функций не зависят от полярного угла φ, то $u''_{\varphi\varphi} \equiv 0$, и оператор Лапласа превращается в обыкновенный линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathbf{\Delta} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) = u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r.$$

Таким образом, на радиальных функциях задача (1.1) сводится к экстремальной задаче интерполяции для функций одной переменной. Для ее исследования рассмотрим задачу экстремальной функциональной интерполяции для этого линейного дифференциального оператора, которая по мнению автора имеет также и самостоятельное значение.

Пусть $D = d/dt$ — оператор дифференцирования;

$$\mathcal{L}(D)f(t) \overset{\text{def}}{=} D^2 f(t) + \frac{1}{t}\ Df(t) = \Big(D + \frac{1}{t}\Big)Df(t) \quad (t > 0)$$

— линейный дифференциальный оператор второго порядка с переменными коэффициентами; $\operatorname{Ker} \mathcal{L}(D) = \operatorname{span}\{1, \ln t\}$ — ядро оператора $\mathcal{L}(D)$.

Пусть

$h > 0$, $\delta_{h,N} = \{kh : k = 1, 2, \dots, N\}$ — сетка, состоящая из N точек;

$z = \{z_k\}_{k=1}^N$ — конечная последовательность вещественных чисел, которые мы интерполируем в узлах сетки $\delta_{h,N}$;

$\Delta_{\mathcal{L}}$ — разностный оператор второго порядка со старшим коэффициентом, равным единице, зануляющий сужения функций из $\operatorname{Ker}\mathcal{L}(D)$ на сетку $\delta_{h,N}$. Он имеет вид

$$\Delta_{\mathcal{L}}(z_k) = z_{k+2} - \left(\frac{\ln(\dfrac{k+2}{k})}{\ln(\dfrac{k+1}{k})}\right) z_{k+1} + \left(\frac{\ln(\dfrac{k+2}{k+1})}{\ln(\dfrac{k+1}{k})}\right) z_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N-2).$$

Для натурального $N \geq 3$ зададим класс интерполируемых данных

$$Y_N(\Delta_{\mathcal{L}}) = \{z\colon z = \{z_k\}_{k=1}^N,\ \|\Delta_{\mathcal{L}}(z)\|_{l_\infty^N} \leq 1\},$$

где $\|z\|_{l_\infty^N} = \max\{|z_k|\colon k = 1, 2, \ldots, N\}$, и определим класс интерполирующих функций

$$F_N^h(\mathcal{L}, z) = \Big\{f\colon f' \in AC[h, hN],\ \mathcal{L}(D)f \in L_\infty[h, hN], f(kh) = z_k,\ k = 1, 2, \ldots, N\Big\},$$

где через $AC[a, b]$ обозначено множество функций, абсолютно непрерывных на $[a, b]$; $L_\infty[a, b]$ — класс измеримых существенно ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций с обычной нормой $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Определим величину

$$\mathcal{A}_N(\mathcal{L}) = \sup_{z\in Y_N(\Delta_{\mathcal{L}})} \ \inf_{f\in F_N^h(\mathcal{L},z)} \|\mathcal{L}(D)f\|_{L_\infty[h,hN]}, \tag{1.2}$$

которую мы будем называть *константой экстремальной интерполяции*. Задачу нахождения величины (1.2) будем называть *задачей экстремальной функциональной интерполяции* для дифференциального оператора $\mathcal{L}(D)$.

Задача экстремальной функциональной интерполяции в равномерной метрике для оператора n-й производной впервые точно была решена Ю. Н. Субботиным в 1965 году [6], позже А. Шарма и Дж. Цимбаларио [7] получили ее решение для формально самосопряженного линейного дифференциального оператора с постоянными вещественными коэффициентами, а В. Т. Шевалдин [8] — для произвольного линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Подробный обзор результатов, относящихся к задачам экстремальной интерполяции в пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $(1 \leq p \leq \infty)$ и их приложениям, можно найти в недавней работе (Ю. Н. Субботин, С. И. Новиков, В. Т. Шевалдин. Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225), которая содержит также подробную библиографию по этим задачам. В работах [6–8] интерполирование осуществлялось в точках равномерной сетки на всей вещественной оси $\mathbb{R}$. Подобные задачи экстремальной функциональной интерполяции на полуоси и конечном отрезке, а также для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами ранее не рассматривались.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Существует число $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $N > N_0$ и $h > 0$ справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{1}{h^2} \leq \mathcal{A}_N(\mathcal{L}) \leq \frac{C}{h^2}\ ,$$

где $C \simeq 2.540856\ldots$.

Из теоремы для задачи (1.1) вытекает оценка сверху:

Следствие. *Существует число $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $N > N_0$ и $h > 0$ справедлива оценка*

$$\mathcal{A}_N(\boldsymbol{\Delta}) \leq \frac{4C}{h^2}.$$

где $C \simeq 2.540856\ldots$.

В разд. 2 мы находим интегральное представление разностного оператора $\Delta_{\mathcal{L}}$ через дифференциальный оператор $\mathcal{L}(D)$, в разд. 3 устанавливаем необходимые для получения основного результата свойства вспомогательных функций, в разд. 4 доказываем основные результаты.

2. Интегральное представление разностного оператора через дифференциальный оператор

Для того чтобы вывести представление, связывающее линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(D)$ с его разностным аналогом $\Delta_{\mathcal{L}}$, нам потребуется формула Коши — Грина

$$f(t) = a_1 + a_2 \ln t + \int\limits_{t_0}^{t} \tau\Big(\ln\frac{t}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau, \tag{2.1}$$

в которой a_1, a_2 — любые вещественные числа, $t > t_0 > 0$. Представление (2.1) — результат применения метода вариации постоянных Лагранжа для решения дифференциального уравнения $\mathcal{L}(D)f(t) = u(t)$. Заметим, что интегральный оператор в представлении (2.1) не является оператором свертки в отличие от аналогичной формулы для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Лемма 1. *Пусть* $f \in F_N^h(\mathcal{L}, z)$ *для фиксированной последовательности* $z = \{z_j\}_{j=1}^N$ *и* $z_j = f(jh)$ $(j = 1, 2, \dots, N)$. *Тогда имеет место следующее равенство*:

$$\Delta_{\mathcal{L}}(z_k) = \left(\int\limits_{kh}^{(k+1)h} t\Big(\ln\frac{t}{kh}\Big)\mathcal{L}(D)f(t)dt\right)\left(\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\right) + \int\limits_{(k+1)h}^{(k+2)h} t\ \ln\Big(\frac{(k+2)h}{t}\Big)\mathcal{L}(D)f(t)dt,$$

где $k = 1, 2, \dots, N-2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись формулой (2.1), представим $f(t)$ в виде суммы двух функций $f(t) = \varphi(t) + \psi(t)$, где $\varphi(t) = a_1 + a_2 \ln t$ и

$$\psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \tau\Big(\ln\frac{kh}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau.$$

Тогда $\Delta_{\mathcal{L}}(z_k) = \Delta_{\mathcal{L}}(\varphi(kh)) + \Delta_{\mathcal{L}}(\psi(kh))$, и в силу выбора разностного оператора имеем

$$\Delta_{\mathcal{L}}(\varphi(kh)) = a_1\Delta_{\mathcal{L}}(1) + a_2\Delta_{\mathcal{L}}(\ln kh) = 0.$$

Далее, $\Delta_{\mathcal{L}}(\psi(kh)) = Q_1 + Q_2$ и

$$Q_1 = \int\limits_{t_0}^{kh} \tau\Big(\ln\frac{(k+2)h}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau - \left(\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\right)\int\limits_{t_0}^{kh} \tau\Big(\ln\frac{(k+1)h}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau$$

$$+ \left(\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\right)\int\limits_{t_0}^{kh} \tau\Big(\ln\frac{kh}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau = v_1\int\limits_{t_0}^{kh} \tau\ \mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau - v_2\int\limits_{t_0}^{kh} \tau\ln\tau\ \mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau = 0,$$

поскольку в силу построения разностного оператора

$$v_1 = \ln(k+2)h - \frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\ \ln(k+1)h + \frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\ \ln kh = 0,$$

$$v_2 = 1 - \frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)} + \frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\frac{k+1}{k}\Big)} = 0;$$

$$Q_2 = \int\limits_{kh}^{(k+2)h} \tau\Big(\ln\frac{(k+2)h}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau - \left(\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\right)\int\limits_{kh}^{(k+1)h} \tau\Big(\ln\frac{(k+1)h}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau$$

$$= \int\limits_{(k+1)h}^{(k+2)h} \tau\Big(\ln\frac{(k+2)h}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau + \int\limits_{kh}^{(k+1)h} \tau\; V_k(\tau)\; \mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau;$$

здесь

$$V_k(\tau) = \ln\frac{(k+2)h}{\tau} - \frac{\ln\dfrac{k+2}{k}}{\ln\dfrac{k+1}{k}}\;\ln\frac{(k+1)h}{\tau}$$

$$= \Big(\ln\frac{k+1}{k}\Big)^{-1}\Big(\ln\frac{\tau}{h}\;\ln\frac{k+2}{k+1} - \ln k\;\ln\frac{k+2}{k+1}\Big) = \frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\;\ln\frac{\tau}{kh}\;.$$

Лемма 1 доказана.

3. Вспомогательные функции и их свойства

Для доказательства основных результатов нам потребуются свойства некоторых конкретных функций.

Лемма 2. *Функция*

$$G(x) = 2x - (2x+1)\;\frac{\ln\Big(\dfrac{x+2}{x+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{x+1}{x}\Big)}$$

монотонно возрастает на полуоси $[1, +\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислив производную функции $G(x)$, имеем

$$G'(x) = \frac{H(x)}{x(x+1)(x+2)\ln^2\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)}, \tag{3.1}$$

где

$$H(x) = (2x^3+6x^2+4x)\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\ln\frac{(x+1)^2}{x(x+2)} + (2x+1)\left(x\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - (x+2)\ln\Big(1+\frac{1}{x+1}\Big)\right).$$

Знаменатель в (3.1) положителен, поэтому достаточно убедиться в том, что на полуоси $[1, +\infty)$ функция $H(x)$ также положительна.

Поскольку $\ln\dfrac{(x+1)^2}{x(x+2)} > 0$ и на положительной полуоси имеет место неравенство $2x^3+6x^2+4x > 2x^3+5x^2+2x = x(x+2)(2x+1)$, то

$$H(x) > x(x+2)(2x+1)\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\ln\frac{(x+1)^2}{x(x+2)}$$

$$+ (2x+1)\left(x\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - (x+2)\ln\Big(1+\frac{1}{x+1}\Big)\right) = (2x+1)Q(x),$$

где

$$Q(x) = (x^2+2x)\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\ln\frac{(x+1)^2}{x(x+2)} + x\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - (x+2)\ln\Big(1+\frac{1}{x+1}\Big).$$

Для оценки функции $Q(x)$ воспользуемся следующими тремя известными неравенствами:

$$\ln a - \ln b > \frac{2(a-b)}{a+b}, \quad 0 < b < a, \tag{3.2}$$

$$\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) > \frac{2}{2x+1}, \tag{3.3}$$

$$\ln(1+t) < t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\ , \quad 0 < t < 1,$$

первые два из которых доказаны в монографии [9, p. 273], а третье представляет собой известное свойство частичных сумм ряда Тейлора для функции $\ln(1+t)$.

В неравенстве (3.2) полагаем $a = (x+1)/x$, $b = (x+2)/(x+1)$ и после выполнения несложных преобразований получаем

$$\ln\frac{(x+1)^2}{x(x+2)} > \frac{2}{2x^2+4x+1}, \tag{3.4}$$

а в третьем неравенстве полагаем $t = 1/(x+1)$ и тогда

$$\ln\Big(1+\frac{1}{x+1}\Big) < \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3}. \tag{3.5}$$

Теперь применяем неравенства (3.3)–(3.5) к логарифмическим функциям, входящим в выражение функции $Q(x)$. В результате имеем

$$Q(x) > \frac{4(x^2+2x)}{(2x+1)(2x^2+4x+1)} + \frac{2x}{2x^2+4x+1} - 2\Big(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3}\Big)$$

$$= \frac{6x^4+16x^3+4x^2-9x-5}{3(2x+1)(x+1)^3(2x^2+4x+1)}.$$

Знаменатель этой дробно-рациональной функции положителен при неотрицательных x. Исследуем ее числитель

$$P_4(x) = 6x^4 + 16x^3 + 4x^2 - 9x - 5.$$

Согласно теореме Декарта (см., например, [10, с. 255]) количество положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно числу перемен знака в наборе его коэффициентов или меньше этого числа на четное число. Многочлен $P_4(x)$ имеет одну перемену знака в наборе его коэффициентов и $P_4(0) < 0$, $P_4(1) > 0$, поэтому единственный положительный корень этого многочлена лежит на интервале $(0,1)$, а на $[1,+\infty)$ многочлен $P_4(x)$ положителен. Следовательно, $Q(x) > 0$ на $[1,+\infty)$, поэтому $H(x) > 0$ и функция $G(x)$ монотонно возрастает на $[1,+\infty)$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Функция*

$$\Phi(x) = \frac{\ln\Big(\dfrac{x+2}{x+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{x+1}{x}\Big)}$$

монотонно возрастает при $x > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислив производную функции $\Phi(x)$, получим

$$\Phi'(x) = \frac{q(x)}{x(x+1)(x+2)\ln^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)},$$

где $q(x) = (x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x$.

Достаточно убедиться в том, что $q(x) > 0$ при положительных x. Заметим, что функция $q(x)$ является конечной разностью второго порядка функции $t\ln t$ по узлам $\{x, x+1, x+2\}$, а потому (см., например, [11, с. 46]) имеет место равенство

$$q(x) = C(t\ln t)''|_{t=\xi} = \frac{C}{\xi}$$

для некоторой положительной константы C в некоторой точке $\xi \in (x, x+2)$. Поэтому $q(x) > 0$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Функция*

$$v(x) = \frac{1}{2}\Big[(x+1)^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right) - \frac{1}{4}\Big]$$

монотонно убывает при $x > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислив первую и вторую производные функции $v(x)$, получим

$$v'(x) = (x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right) - \frac{1}{4x},$$

$$v''(x) = \frac{1}{4x^2} - \ln\Big(1+\frac{1}{4x(x+1)}\Big).$$

Воспользовавшись известным неравенством $\ln(1+\tau) \le \tau$ $(\tau \ge 0)$ при $\tau = (4x^2+4x)^{-1}$, имеем

$$v''(x) \ge \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4x^2+4x} = \frac{1}{4x^2(x+1)} > 0$$

при положительных x. Отсюда следует, что функция $v'(x)$ возрастает на $[1, +\infty)$. Кроме того, нетрудно проверить, что $\lim\limits_{x\to+\infty} v'(x) = 0$. Таким образом, $v'(x)$ является возрастающей функцией и стремится к нулю при $x \to +\infty$, следовательно, $v'(x) < 0$, т. е. функция $v(x)$ убывает при $x > 0$.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Функция*

$$g(x) = \int\limits_0^{1/2}(x+t+1)\ln\Big(\frac{x+2}{x+1+t}\Big)dt - \int\limits_{1/2}^{1}(x+t+1)\ \ln\Big(\frac{x+2}{x+1+t}\Big)dt$$

возрастает при $x > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем интегралы с помощью теоремы о среднем. В результате получаем

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big[(x+\xi+1)\ln\left(\frac{x+2}{x+1+\xi}\right) - (x+\eta+1)\ln\left(\frac{x+2}{x+1+\eta}\right)\Big],$$

где $0 \le \xi \le 1/2$, $1/2 \le \eta \le 1$.

Теперь дифференцируем функцию $g(x)$ и после выполнения элементарных преобразований имеем

$$g'(x) = \frac{1}{2}\Big[\ln(x+\eta+1) - \ln(x+\xi+1) - \frac{\eta-\xi}{x+2}\Big].$$

Разность логарифмов в правой части этого выражения оценим с помощью неравенства (3.2), полагая в нем $a = x+\eta+1$, $b = x+\xi+1$. В результате получаем

$$g'(x) > \frac{(\eta-\xi)(2-\xi-\eta)}{2(x+2)(2x+2+\xi+\eta)}.$$

Знаменатель дробно-рациональной функции в правой части этого неравенства положителен, а поскольку $0 \le \xi \le 1/2$, $1/2 \le \eta \le 1$, то положителен и числитель. Следовательно, $g'(x) > 0$, т. е. функция $g(x)$ возрастает на положительной полуоси.

Лемма 5 доказана.

4. Доказательства основных результатов

Переходим непосредственно к доказательству основной теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о оценки снизу. Поскольку $\ln\dfrac{t}{kh} \ge 0$ на промежутке $[kh, (k+1)h]$ и $\ln\dfrac{(k+2)h}{t} \ge 0$ на промежутке $[(k+1)h, (k+2)h]$, то, переходя к модулям в лемме 1, имеем

$$|\Delta_{\mathcal{L}}(z_k)| \le \|\mathcal{L}(D)f\|_\infty \left[\left(\frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}\right)\int\limits_{kh}^{(k+1)h} t\Big(\ln\frac{t}{kh}\Big)dt + \int\limits_{(k+1)h}^{(k+2)h} t\Big(\ln\frac{(k+2)h}{t}\Big)dt\right]. \qquad (4.1)$$

Непосредственными вычислениями получим

$$\int\limits_{kh}^{(k+1)h} t\Big(\ln\frac{t}{kh}\Big)dt = \frac{h^2}{2}\Big[(k+1)^2\Big(\ln\frac{k+1}{k} - \frac{1}{2}\Big) + \frac{k^2}{2}\Big],$$

$$\int\limits_{(k+1)h}^{(k+2)h} t\Big(\ln\frac{(k+2)h}{t}\Big)dt = \frac{h^2}{2}\Big[-(k+1)^2\Big(\ln\frac{k+2}{k+1} + \frac{1}{2}\Big) + \frac{(k+2)^2}{2}\Big].$$

Теперь подставим данные выражения в правую часть (4.1) и после выполнения элементарных преобразований выражение в квадратных скобках в (4.1) запишем в виде

$$\frac{h^2}{4}\left(2k+3-(2k+1)\,\frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}\right).$$

Тем самым из (4.1) получаем, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, N-2$ справедливо неравенство

$$|\Delta_{\mathcal{L}}(z_k)| \le \frac{h^2}{4}\,\|\mathcal{L}(D)f\|_\infty \left(2k+3-(2k+1)\,\frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}\right)$$

$$\le \frac{h^2}{4}\,\|\mathcal{L}(D)f\|_\infty \sup_{x\in[1,+\infty)}\left(2x+3-(2x+1)\,\frac{\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}\right),$$

в котором правая часть не зависит ни от k, ни от N. Отсюда

$$\|\mathcal{L}(D)f\|_\infty \geq \frac{4}{h^2}\;|\Delta_{\mathcal{L}}(z_k)|\;\left[3+\sup_{x\in[1,+\infty)}\left(2x-(2x+1)\;\frac{\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}\right)\right]^{-1}. \tag{4.2}$$

Вычислим точную верхнюю грань в правой части (4.2). Согласно лемме 2 функция

$$G(x)=2x-(2x+1)\;\frac{\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}$$

монотонно возрастает на $[1,+\infty)$, а поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=1$, то $\sup\limits_{x\in[1,+\infty)} G(x)=1$, и неравенство (4.2) при любом $N\in\mathbb{N}$ принимает вид $\|\mathcal{L}(D)f\|_\infty \geq \dfrac{1}{h^2}\;|\Delta_{\mathcal{L}}(z_k)|,\quad k=1,2,\ldots,N-2$. Теперь в полученном неравенстве переходим к нижней грани по всем функциям $f\in F_N^h(\mathcal{L},z)$, а затем — к верхней грани по классу интерполируемых последовательностей $Y_N(\Delta_{\mathcal{L}})$ и в результате получаем $\mathcal{A}_N(\mathcal{L})\geq \dfrac{1}{h^2}$.

Оценка снизу в теореме доказана. □

Доказательство оценки сверху в теореме базируется на применении известных результатов об оценках решений систем линейных алгебраических уравнений с матрицами, имеющими диагональное преобладание.

Как известно, квадратная матрица $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ имеет *диагональное преобладание* (или *доминирующую главную диагональ*), если имеют место неравенства

$$|a_{ii}|-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|=r_i>0,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Равномерная норма матрицы A определятся, как обычно, равенством

$$\|A\|_\infty=\max_{i=1,2,\ldots,n}\;\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

Перечислим нужные нам в дальнейшем свойства таких матриц (см., например, [12, с. 333–335] и имеющиеся там ссылки):

1. Матрица A с доминирующей главной диагональю является невырожденной, т. е. ее определитель отличен от нуля и существует обратная матрица A^{-1}.

2. Для нормы вектора $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ решений системы линейных алгебраических уравнений $Ax=d$, где $d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)^T$, справедлива оценка

$$\|x\|_{l_\infty^n}\leq \max_{i=1,2,\ldots,n}\;\frac{|d_i|}{r_i}\;. \tag{4.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о оценки сверху в теореме. Пусть $N>3$. Функцию f будем строить в виде $\mathcal{L}$-сплайна третьего порядка, определяемого линейным дифференциальным оператором $D\mathcal{L}(D)$. Для этого полагаем

$$\mathcal{L}(D)f(t)=\begin{cases} 0, & h\leq t\leq 3h/2,\\ M_{k+1}, & (k+1/2)h<t<(k+3/2)h\ (k=1,2,\ldots,N-2),\\ 0, & (N-1/2)h\leq t\leq Nh,\end{cases}$$

где $\{M_j\}_{j=2}^{N-1}$ — неизвестные вещественные числа.

Воспользовавшись леммой 1, получаем, что числа $\{M_j\}_{j=2}^{N-1}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &B_1M_2 + C_1M_3 = \frac{1}{h^2}\ \Delta_{\mathcal{L}}(z_1),\\ &A_kM_k + B_kM_{k+1} + C_kM_{k+2} = \frac{1}{h^2}\ \Delta_{\mathcal{L}}(z_k) \quad (k = 2, 3, \ldots, N-3),\\ &A_{N-2}M_{N-2} + B_{N-2}M_{N-1} = \frac{1}{h^2}\ \Delta_{\mathcal{L}}(z_{N-2}), \end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$$A_k = \left(\frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}\right) \int\limits_0^{1/2} (k+t)\ \ln\left(\frac{k+t}{k}\right)dt, \tag{4.5}$$

$$B_k = \left(\frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}\right) \int\limits_{1/2}^{1} (k+t)\ln\left(\frac{k+t}{k}\right)dt + \int\limits_0^{1/2} (k+t+1)\ln\left(\frac{k+2}{k+1+t}\right)dt, \tag{4.6}$$

$$C_k = \int\limits_{1/2}^{1} (k+t+1)\ \ln\left(\frac{k+2}{k+1+t}\right)dt. \tag{4.7}$$

Рассматриваем соотношения (4.4) как систему линейных алгебраических уравнений. Матрица W_{N-2} этой системы имеет вид

$$W_{N-2} = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{N-3} & B_{N-3} & C_{N-3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{N-2} & B_{N-2} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $r_1 = B_1 - C_1,\ r_k = B_k - A_k - C_k\ (k = 2, 3, \ldots, N-3),\ r_{N-2} = B_{N-2} - A_{N-2}$.

Оценим снизу $\min\limits_{k=1,2,\ldots,N-2} r_k$. Непосредственными вычислениями проверяется, что $r_1 > r_2$, поэтому при оценке минимума r_1 можно не учитывать.

Теперь вместо трех наборов чисел A_k, B_k, C_k рассмотрим три функции $A(x), B(x), C(x)$, которые получаются из (4.5)–(4.7) заменой дискретного параметра k на непрерывную вещественную переменную x. Ясно, что $A(k) = A_k,\ B(k) = B_k,\ C(k) = C_k\ (k = 1, 2, \ldots, N-2)$. Аналогичным образом по набору чисел r_k определим функцию непрерывной переменной $r(x)$, для которой $r(k) = r_k\ (k = 2, 3, \ldots, N-3)$, т. е.

$$r(x) = B(x) - A(x) - C(x).$$

С помощью выражений (4.5)–(4.7), записанных для функций непрерывной переменной x, представим $r(x)$ в виде $r(x) = g(x) + \varphi(x)$, где $g(x)$ — функция из леммы 5;

$$\varphi(x) = \left(\frac{\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}\right) \left[\ \int\limits_{1/2}^{1} (x+t)\ln\left(\frac{x+t}{x}\right)dt - \int\limits_0^{1/2} (x+t)\ln\left(\frac{x+t}{x}\right)dt\right].$$

Вычислим интегралы в правой части этого выражения и после выполнения несложных преобразований получим $\varphi(x) = \Phi(x)v(x)$, где $\Phi(x)$ — функция из леммы 3; $v(x)$ — функция из леммы 4.

Покажем, что при достаточно большом N величину r_{N-2} также можно не учитывать при нахождении $\min\limits_{k=1,2,\dots,N-2} r_k$, т. е. она не меньше величины $\min\limits_{k=1,2,\dots,N-3} r_k$ при достаточно большом N. Действительно, из лемм 3–5 и легко проверяемых предельных соотношений

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{1}{4}$$

вытекает, что при всех $x\geq 2$ выполняется неравенство

$$r(x)\leq v(2)+\frac{1}{4}=0.55495<\frac{5}{8}\ ,$$

поэтому $r_k<5/8$ $(k=2,3,\dots,N-3)$. Кроме того, нетрудно проверить, что

$$\lim_{x\to+\infty}B(x)=\frac{3}{4},\qquad \lim_{x\to+\infty}A(x)=\frac{1}{8},$$

следовательно, r_{N-2} стремится к $5/8$ при $N\to+\infty$. Выберем $N_0\in\mathbb{N}$ достаточно большим, чтобы при $N>N_0$ обеспечить справедливость неравенства $r_{N-2}>0.55495$, и тем самым добьемся того, чтобы r_{N-2} оказалась больше всех r_k при $k=2,3,\dots,N-3$.

Теперь оценим $\min\{r_k\colon k=2,3,\dots,N-3\}$ при $N>N_0$. Применяя леммы 3–5, получаем

$$r(x)=\Phi(x)v(x)+g(x)\geq\inf_{x\in[2,Nh]}\Phi(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}v(x)+\inf_{x\in[2,Nh]}g(x)=\frac{\Phi(2)}{4}+g(2)$$

$$=\frac{2\ln 2-\ln 3}{4(\ln 3-\ln 2)}+\frac{49}{4}(3\ln 2-\ln 7)-\frac{9}{2}(2\ln 2-\ln 3)-\frac{1}{8}\geq 0.393568\dots,$$

в частности $r_k\geq 0.393568\dots$ при всех $k=2,3,\dots,N-3$, т. е.

$$\min\{r_k\colon k=2,3,\dots,N-3\}\geq 0.393568\dots\ .$$

Это неравенство означает, что матрица W_{N-2} имеет доминирующую главную диагональ. Теперь применяем неравенства (4.3) и $\|\Delta_{\mathcal{L}}(z)\|_{l_\infty^N}\leq 1$; в результате получаем следующую оценку для решения системы (4.4):

$$\|M\|_\infty\leq\frac{1}{h^2}\big(\min\{r_k\colon k=1,2,\dots,N-2\}\big)^{-1}\simeq\frac{1}{h^2}\,\frac{1}{0.393568\dots}=\frac{C}{h^2},$$

где $C=2.540856\dots$, $M=(0,M_2,M_3,\dots,M_{N-1},0)$.

Оценка сверху установлена. □

Доказательство теоремы завершено. □

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия. Класс интерполируемых данных Y_N вкладывается в класс последовательностей

$$Y_{N,K}(\Delta_{\mathcal{L}})=\{z\colon z=\{z_k\}_{k=1}^N,\ \|\Delta_{\mathcal{L}}(z)\|_{l_\infty^N}\leq K\}$$

при $K=4$, который отличается от $Y_N(\Delta_{\mathcal{L}})$ только лишь значением константы, ограничивающей норму.

Действительно, поскольку

$$\ln\Big(\frac{k+2}{k}\Big)=\ln\Big(\frac{k+2}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k}\Big)=\ln\Big(\frac{k+2}{k+1}\Big)+\ln\Big(\frac{k+1}{k}\Big),$$

то в силу леммы 3

$$|\Delta_{\mathcal{L}}(z_k)|\leq|z_{k+2}|+\left(1+\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\right)|z_{k+1}|+\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}|z_k|$$

$$\leq \|z\|_{l_\infty} \left(2 + 2\,\frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)} \right) \leq 4\|z\|_{l_\infty} \leq 4.$$

Отсюда для величины (1.1) из теоремы получаем оценку сверху

$$\mathcal{A}_N(\mathbf{\Delta}) \leq \frac{4C}{h^2} \simeq \frac{10.163424\ldots}{h^2}.$$

Следствие доказано.

Информацию о некоторых других задачах минимизации равномерной нормы оператора Лапласа на интерполянтах можно найти, например, в [13; 14], а также в упомянутой в первом разделе настоящей работы обзорной статье Ю. Н. Субботина, С. И. Новикова и В. Т. Шевалдина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gordon W.J., Hall C.A.** Transfinite element methods: blending–function interpolation over arbitrary curved element domains // Numer. Math. 1973. Vol. 21, no. 2. P. 109–129.
2. **Bejancu A.** Thin plate splines for transfinite interpolation at concentric circles // Math. Model. Anal. 2013. Vol. 18, no. 3. P. 446–460. doi: 10.3846/13926292.2013.807317 .
3. **Bejancu A.** Transfinite thin plate spline interpolation // Constr. Approx. 2011. Vol. 34, no. 2. P. 237–256. doi: 10.1007/s00365-010-9118-3 .
4. **Favard J.** Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no 9. P. 281–306.
5. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
6. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
7. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
8. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
9. **Mitrinovic′ D.S., Vasic′ P.M.** Analytic inequalities. Berlin etc.: Springer Verlag, 1970. 400 p.
10. **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 432 с.
11. **Бахвалов Н.С.** Численные методы. М.: Наука, 1975. 632 с.
12. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
13. **Fisher S., Jerome J.** Minimum norm extremals in function spaces // Lecture Notes in Math. 1975. Vol. 479. P. 1–209.
14. **Новиков С.И.** Интерполяция с минимальным значением нормы оператора Лапласа в шаре // Збірник праць Інституту матем. НАН України. 2008. Т. 5, no. 1. P. 248–262.

Поступила 24.06.2019
После доработки 9.09.2019
Принята к публикации 14.10.2019

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Gordon W.J., Hall C.A. Transfinite element methods: blending–function interpolation over arbitrary curved element domains. *Numer. Math.*, 1973, vol. 21, no. 2, pp. 109–129.
2. Bejancu A. Thin plate splines for transfinite interpolation at concentric circles. *Math. Model. Anal.*, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 446–460. doi: 10.3846/13926292.2013.807317 .
3. Bejancu A. Transfinite thin plate spline interpolation. *Constr. Approx.*, 2011, vol. 34, no. 2, pp. 237–256. doi: 10.1007/s00365-010-9118-3 .
4. Favard J. Sur l'interpolation. *J. Math. Pures Appl.*, 1940, vol. 19, no. 9, pp. 281–306.
5. Fikhtenholtz G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Vol. 1. Moscow: Nauka Publ., 1970, 608 p. (in Russian). ISBN: 978-5-8114-0673-9 .
6. Subbotin Yu.N. On the connection between finite differences and corresponding derivatives. *Tr. Math. Inst. Steklov*, 1965, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).
7. Sharma A., Tzimbalario J. Certain linear differential operators and generalized differences. *Math. Notes*, 1977, vol. 21, no. 2, pp. 91–97. doi: 10.1007/BF02320546 .
8. Shevaldin V.T. *Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators. Proc. Steklov Inst. Math.*, 1985, vol. 164, pp. 233–273.
9. Mitrinović D.S., Vasić P.M. *Analytic inequalities.* Berlin etc.: Springer Verlag, 1970, 400 p. doi: 10.1007/978-3-642-99970-3 .
10. Kurosh A.G. *Higher algebra.* Moscow: Mir Publ., 1988, 428 p. ISBN: 9785030001319 . Original Russian text published in Kurosh A.G. *Kurs vysshei algebry.* Moscow: Nauka Publ., 1971, 432 p.
11. Bakhvalov N.S. *Numerical methods.* Moscow: Mir Publ., 1977, 663 p. Original Russian text published in Bakhvalov N.S. *Chislennye metody.* Moscow: Nauka Publ., 1975, 632 p.
12. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splain-funktsii* [Methods of spline-functions]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p.
13. Fisher S., Jerome J. *Minimum norm extremals in function spaces.* Lecture Notes in Math, vol. 479. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1975, 209 p. doi: 10.1007/BFb0097059 .
14. Novikov S.I. Interpolation with minimal norm of the Laplace operator in a ball. *Zbirnik prats Inst. Math. NAN Ukraine*, 2008, vol. 5, no. 1, pp. 248–262 (in Russian).

Received Juny 24, 2019
Revised September 9, 2019
Accepted October 14, 2019

Novikov Sergey Igorevich, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru .

Cite this article as: S. I. Novikov. Extremal function interpolation for a second-order linear differential operator, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 164–176 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 515.122+517.982

О РАСШИРЕНИИ ХЬЮИТТА И τ-РАСПОЛОЖЕННОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А. В. Осипов

В работе исследуется связь между расширениями типа расширений Хьюитта и пространствами строго τ-F-отображений. Получен критерий вещественной полноты пространства бэровских отображений класса α. Доказано, что пространство $B(X,G)$ бэровских отображений G-z-нормального пространства X в не компактное метризуемое сепарабельное пространство G является линделёфовым тогда и только тогда, когда X счетно.

Ключевые слова: вещественно полные пространства, слабая функциональная теснота, бэровское отображение, τ-расположенность, расширение Хьюитта.

A. V. Osipov. On the Hewitt realcompactification and τ-placedness of function spaces.

We study the relation between extensions of the Hewitt realcompactification type and spaces of strictly τ-F-functions. A criterion is obtained for the realcompleteness of the space of Baire functions of class α. It is proved that the space $B(X,G)$ of Baire functions from a G-z-normal space X to a noncompact metrizable separable space G is Lindelöf if and only if X is countable.

Keywords: realcomplete spaces, weak functional tightness, Baire function, τ-placedness, Hewitt realcompactification.

MSC: 54C35 54C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-177-183

Введение

Один из важных видов топологической полноты был введен Э. Хьюиттом и Л. Нахбином в [1]. Пространство X называется *вещественно полным*, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $\mathbb{R}^\tau$ для некоторого кардинального числа τ. В литературе вещественно полные пространства иногда называют Q-пространствами, или вещественно компактными пространствами (realcompact space), или R-полными пространствами, или пространствами Хьюитта — Нахбина [1–4].

Полным по Дьедонне называют пространство, полное относительно максимальной равномерной структуры, совместимой с его топологией. Полные по Дьедонне пространства характеризуются как гомеоморфные образы замкнутых подпространств произведений метрических пространств [3].

Кардинал τ называют *измеримым по Уламу*, если на множестве мощности τ существует максимальная центрированная система с пустым пересечением, пересечение любого счетного семейства которой не пусто.

В системе ZFC (Цермело — Френкеля) аксиом теории множеств можно считать, что измеримых кардиналов не существует. При этом предположении каждое полное по Дьедонне пространство вещественно полно. Обратное верно всегда.

Заметим, что пространство $C_p(X)$ непрерывных вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X, с топологией поточечной сходимости вещественно полно в том и только том случае, если $C_p(X)$ полно по Дьедонне. Это следует из того, что число Суслина пространства $C_p(X)$ счетно [2; 5].

В работах [5–8] были исследованы связи между расширениями типа Хьюитта и пространствами строго τ-непрерывных функций.

Отображение $f : X \to Y$ называется *строго τ-непрерывным*, если для каждого множества $A \subset X$ такого, что $|A| \le \tau$, найдется непрерывное отображение $g : X \to Y$, для которого $g|A = f|A$ (т. е. $f(x) = g(x)$ при всех $x \in A$) [5]. При $Y = \mathbb{R}$ пространство всех строго τ-непрерывных функций на пространстве X с топологией поточечной сходимости обозначают через ${}^{(\tau)}C_p(X)$ [8].

О п р е д е л е н и е 1. *Слабой функциональной теснотой* $t_Y(X)$ пространства X будем называть наименьший бесконечный кардинал τ такой, что каждое строго τ-непрерывное отображение $f : X \to Y$ непрерывно.

При $Y = \mathbb{R}$ получаем слабую функциональную тесноту $t_{\mathbb{R}}(X)$ пространства X [5].

Напомним, что $A \subset X$ есть множество типа G_τ в X, если существует семейство γ открытых в X множеств такое, что $A = \bigcap \gamma$ и $|\gamma| \le \tau$.

Множество $A \subset X$ называют *τ-расположенным в* X, если для каждой точки $x \in X \setminus A$ найдется множество P типа G_τ в X такое, что $x \in P \subset X \setminus A$.

Числом Хьюитта — Нахбина пространства X называют кардинал $q(X) = \min\{\tau\colon X$ τ-расположено в $\beta X\} + \aleph_0$. Известно, что $q(X) = \aleph_0$ в том и только том случае, если пространство X вещественно полно [5].

А. В. Архангельский доказал, что для любого тихоновского пространства X выполняется равенство $t_{\mathbb{R}}(X) = q(C_p(X))$ [5, теорема II.4.16].

В работе [8] О. Г. Окунев определяет для каждых топологического пространства X и кардинального числа τ расширение, обобщающее понятие расширения Хьюитта νX.

О п р е д е л е н и е 2. *τ-расширением Хьюитта* пространства X называется пространство $\nu_\tau X = \{x \in \beta X\colon$ каждое множество типа G_τ в βX, которое содержит точку x, имеет непустое пересечение с $X\}$ в топологии подпространства βX.

Очевидно, что $\nu_{\aleph_0} X$ совпадает с расширением Хьюитта νX и $X \subseteq \nu_\tau X \subseteq \nu_\lambda X$ при $\lambda \le \tau$. Ясно также, что $\nu_\tau X = X$, если $q(X) \le \tau$.

О. Г. Окунев доказал, что для тихоновского пространства X пространства ${}^{(\tau)}C_p(X)$ и $\nu_\tau C_p(X)$ гомеоморфны [8, теорема 2].

В этой работе мы исследуем свойство τ-расположенности и число Хьюитта — Нахбина для широкого класса пространств отображений, включающего пространства $B_\alpha(X, Y)$ бэровских отображений класса $\alpha \in [0, \omega_1]$. В частности, мы получим критерий вещественной полноты и свойства линделёфовости для пространства $B(X)$ бэровских функций, определенных на тихоновском пространстве X.

Основные определения и обозначения. Все рассматриваемые в этой работе топологические пространства являются бесконечными и тихоновскими. Все пространства отображений подразумеваются наделенными топологией поточечной сходимости.

Для топологических пространств X и Y через Y^X будем обозначать множество $\{f : f : X \to Y\}$ всех отображений пространства X в пространство Y.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть X и Y — топологические пространства и $F(X, Y) \subseteq Y^X$. Отображение $f : X \to Y$ будем называть *строго* τ-F-отображением, если для каждого множества $A \subset X$ такого, что $|A| \le \tau$, найдется отображение $g \in F(X, Y)$, для которого $g|A = f|A$.

Множество всех строго τ-F-отображений в пространстве Y^X будем обозначать через ${}^{(\tau)}F(X, Y)$.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть X и Y — топологические пространства и $F(X, Y) \subseteq Y^X$. *Слабой функциональной теснотой* $t_{Y,F}(X)$ пространства X будем называть наименьший бесконечный кардинал τ такой, что каждое строго τ-F-отображение f принадлежит $F(X, Y)$.

Основные обозначения можно найти в работах [3; 9; 10].

1. Основные результаты

Лемма 1.1. *Пусть X — топологическое пространство, Y — топологическое пространство с псевдохарактером, равным τ, и $F(X,Y) \subseteq Y^X$. Если $t_{Y,F}(X) \leq \tau$, то пространство $F(X,Y)$ τ-расположено в Y^X.*

Доказательство. Пусть $g \in Y^X \setminus F(X,Y)$. Из условия $t_{Y,F}(X) \leq \tau$ следует, что существует $A \subset X$ такое, что $|A| \leq \tau$ и $g|A \neq f|A$ при всех $f \in F(X,Y)$. Рассмотрим отображение сужения $\pi : Y^X \to Y^A$, т. е. $\pi(h) = h|A$ для всех $h \in Y^X$.

Множество $Z = \pi(F(X,Y))$ τ-расположено в Y^A, так как $|A| \leq \tau$ и Y имеет псевдохарактер, равный τ (все одноточечные подмножества Y^A имеют тип G_τ). Так как $\pi(g) = g|A \notin Z$ и $\{\pi(g)\}$ — множество типа G_τ в Y^A, то $P = \pi^{-1}(\pi(g))$ — множество типа G_τ в Y^X и $g \in P \subset Y^X \setminus F(X,Y)$.

Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть X и Y — топологические пространства и $F(X,Y) \subseteq Y^X$. Если $F(X,Y)$ τ-расположено в Y^X, то $t_{Y,F}(X) \leq \tau$.*

Доказательство. Пусть $g \in {}^{(\tau)}F(X,Y)$ и P — любое множество типа G_τ в Y^X такое, что $g \in P$. Пусть $P = \bigcap\{W_\alpha : \alpha < \tau\}$, где W_α — открытое множество в Y^X для каждого $\alpha < \tau$. Так как $g \in W_\alpha$, то для каждого $\alpha < \tau$ существует базисная окрестность S_α точки g такая, что $g \in S_\alpha \subseteq W_\alpha$. Здесь

$$S_\alpha = \langle g, x_{1,\alpha}, \ldots, x_{n(\alpha),\alpha}, V_{1,\alpha}, \ldots, V_{n(\alpha),\alpha} \rangle :=$$

$$\{f \in Y^X \colon f(x_{i,\alpha}) \in V_{i,\alpha} \ \text{ для каждого } \ i = 1, \ldots, n(\alpha)\},$$

где $x_{i,\alpha} \in X$ и $V_{i,\alpha}$ — открытое множество в пространстве Y такое, что $g(x_{i,\alpha}) \in V_{i,\alpha}$ для $i = 1, \ldots, n(\alpha)$ и $n(\alpha) \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $g \in \bigcap_{\alpha<\tau} S_\alpha \subseteq P$.

Пусть $A = \bigcup_{\alpha<\tau}\{x_{1,\alpha}, \ldots, x_{n(\alpha),\alpha}\}$. Тогда $|A| \leq \tau$ и $g \in \{f \in Y^X : f|A = g|A\} \subset P$.

Так как $g \in {}^{(\tau)}F(X,Y)$, существует $h \in F(X,Y)$ такое, что $h|A = g|A$. Тогда $h \in P$. Итак, $P \cap F(X,Y) \neq \varnothing$ для любого множества P типа G_τ в Y^X, содержащего g. Так как $F(X,Y)$ τ-расположено в Y^X, заключаем, что $g \in F(X,Y)$. Следовательно, $t_{Y,F}(X) \leq \tau$.

Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Для топологического пространства X, вещественно полного пространства Y со счетным характером и плотного подмножества $F(X,Y) \subseteq Y^X$ выполняется равенство $q(F(X,Y)) = t_{Y,F}(X)$.*

Доказательство. Положим $\tau = t_{Y,F}(X)$. По лемме 1.1 пространство $F(X,Y)$ τ-расположено в Y^X. Произведение любого числа вещественно полных пространств является вещественно полным [3, теорема 3.11.5]. Следовательно, вещественно полное пространство Y^X $\aleph_0$-расположено в $\beta(Y^X)$ [2]. Пространство $F(X,Y)$ τ-расположено в $\beta(Y^X)$ [5, предложение 4.9]. Значит, $q(F(X,Y)) \leq t_{Y,F}(X)$.

Положим $\lambda = q(F(X,Y))$. Произведение любого числа пространств счетного характера является московским пространством, т. е. любое канонически замкнутое множество представимо в виде объединения G_δ-множеств [10, следствие 6.3.15]. Следовательно, Y^X — московское пространство и $F(X,Y)$ λ-расположено в Y^X [5, предложение II.4.13]. Применяя лемму 1.2, заключаем, что $t_{Y,F}(X) \leq \lambda$.

Таким образом, $t_{Y,F}(X) \leq q(F(X,Y))$ и, значит, $q(F(X,Y)) = t_{Y,F}(X)$.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Для топологического пространства X, вещественно полного пространства Y со счетным характером и плотного подмножества $F(X,Y) \subseteq Y^X$ слабая функциональная теснота $t_{Y,F}(X)$ пространства X счетна в том и только том случае, когда пространство $F(X,Y)$ вещественно полно.*

Следующая теорема является обобщением теоремы Окунева, но по сути использует идею доказательства теоремы 2 из работы [8] для функционального пространства $C_p(X)$.

Теорема 1.2. *Для топологического пространства X, топологического пространства Y с весом не больше, чем τ и плотного подмножества $F(X,Y) \subseteq Y^X$ пространства ${}^{(\tau)}F(X,Y)$ и $\nu_\tau F(X,Y)$ гомеоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$ {}^{(\tau)}F(X,Y) = \bigcap\{\pi_A(F(X,Y)) \times Y^{X\setminus A} \colon A \subset X,\ |A| \leq \tau\}, $$

где $\pi_A : Y^X \to Y^A$ — проекция для каждого $A \subset X$. Заметим, что $w(\pi_A(F(X,Y)) \leq \tau$, $q(\pi_A(F(X,Y)) \times Y^{X\setminus A}) \leq \tau$ и $q({}^{(\tau)}F(X,Y)) \leq \tau$. Осталось доказать, что $F(X,Y)$ C-вложено в ${}^{(\tau)}F(X,Y)$. Пусть $g : F(X,Y) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Так как $F(X,Y)$ — плотное подмножество в Y^X и Y — пространство с весом, не превосходящем τ, мы можем применить факторизационную теорему [10, следствие 1.7.4]. Тогда найдутся множество $A \subset X$ с $|A| \leq \tau$ и непрерывная функция $\varphi : \pi_A(F(X,Y)) \to \mathbb{R}$ такие, что $g = \varphi\pi_A$. Очевидно, что отображение $p = \varphi\pi_A : \pi_A(F(X,Y)) \times Y^{X\setminus A} \to \mathbb{R}$ непрерывно, и так как ${}^{(\tau)}F(X,Y) \subset \pi_A(F(X,Y)) \times Y^{X\setminus A}$, то требуемое продолжение функции g построено.

Теорема доказана.

2. Приложение для бэровских отображений

Для топологических пространств X и Y определим классы бэровских отображений. Пусть $B_0(X,Y) := C(X,Y)$ — множество непрерывных отображений пространства X в Y. Множество $B_\alpha(X,Y)$ состоит из всех поточечных пределов сходящихся в пространстве Y^X последовательностей отображений классов $< \alpha$. $B(X,Y) := B_{\omega_1}(X,Y) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha(X,Y)$ — пространство бэровских отображений. Если $Y = \mathbb{R}$, то $B_\alpha(X) := B_\alpha(X,\mathbb{R})$ и $B(X) := B_{\omega_1}(X,\mathbb{R})$.

Для пространства $B_\alpha(X,Y)$ бэровских отображений класса α определение строго τ-B_α-отображения имеет следующий вид.

О п р е д е л е н и е 5. Отображение $f : X \to Y$ будем называть *строго τ-бэровским класса α*, если для каждого множества $A \subset X$ такого, что $|A| \leq \tau$, найдется отображение $g : X \to Y$ бэровского класса α, для которого $g|A = f|A$.

О п р е д е л е н и е 6. *Слабой B_α-теснотой $t_{Y,B_\alpha}(X)$* пространства X будем называть наименьший бесконечный кардинал τ такой, что каждое строго τ-бэровское отображение $f : X \to Y$ класса α является бэровским отображением класса α, т. е. $f \in B_\alpha(X,Y)$.

Следствием теоремы 1.1 является следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Для топологического пространства X, вещественно полного пространства Y со счетным характером и $\alpha \in [0,\omega_1]$ выполняется равенство $q(B_\alpha(X,Y)) = t_{Y,B_\alpha}(X)$.*

Следствие 2.1. *Для топологического пространства X, вещественно полного пространства Y со счетным характером и $\alpha \in [0,\omega_1]$ слабая B_α-теснота $t_{Y,B_\alpha}(X)$ пространства X счетна в том и только том случае, когда пространство $B_\alpha(X,Y)$ вещественно полно.*

В частности, при $Y = \mathbb{R}$ получаем такое следствие теоремы 2.1.

Следствие 2.2. *Для топологического пространства X и $\alpha \in [0, \omega_1]$ выполняется равенство $q(B_\alpha(X)) = t_{B_\alpha}(X)$.*

Следствием теоремы 1.2 для бэровских отображений является следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Для топологического пространства X, топологического пространства Y с весом не более чем τ и $\alpha \in [0, \omega_1]$ пространства ${}^{(\tau)}B_\alpha(X, Y)$ и $\nu_\tau B_\alpha(X, Y)$ гомеоморфны.*

Следствие 2.3. *Для топологического пространства X, $\alpha \in [0, \omega_1]$ и $\tau \geq \aleph_0$ пространства ${}^{(\tau)}B_\alpha(X)$ и $\nu_\tau B_\alpha(X)$ гомеоморфны.*

О п р е д е л е н и е 7. Пусть X и Y — топологические пространства. Пространство X будем называть *Y-z-нормальным*, если X — T_1-пространство и для любых дизъюнктного семейства $F_1, \dots, F_k$ нуль-множеств пространства X и точек $y_1, \dots, y_k$ пространства Y существует непрерывное отображение $f : X \to Y$ такое, что $f(F_i) = y_i$ для каждого $i = 1, \dots, k$.

Лемма 2.1. *Пусть X является Y-z-нормальным для некоторого топологического пространства Y, F — нуль-множество пространства X и $a, b \in Y$. Тогда отображение $f : X \to Y$ такое, что $f(F) = \{a\}$ и $f(X \setminus F) = \{b\}$, является бэровским отображением первого класса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как F — нуль-множество пространства X, множество $X \setminus F$ функционально открыто в X и $X \setminus F = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$, где S_j — нуль-множества пространства X и $S_j \subset S_{j+1}$ для $j \in \omega$. Так как X — Y-z-нормальное пространство, для любого $j \in \omega$ существует $f_j \in C_p(X, Y)$ такое, что $f_j(F) = \{a\}$ и $f_j(S_j) = \{b\}$. Осталось заметить, что отображение $f = \lim\limits_{j \to \infty} f_j$ является бэровским отображением первого класса и $f(F) = \{a\}$, $f(X \setminus F) = \{b\}$.

Лемма доказана.

Теорема 2.3. *Пусть Y — топологическое пространство счетного псевдохарактера и X — Y-z-нормальное пространство. Тогда ${}^{(\aleph_0)}B_2(X, Y) = Y^X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in Y^X$, $A = \{a_i : i \in \omega\} \subset X$ и $y \in Y$. Для каждой точки $a \in A$ зафиксируем множество $Z_a := f^{-1}(f(a))$. Так как Y — тихоновское пространство со счетным псевдохарактером, множество $\{f(a)\}$ — нуль-множество в пространстве Y. Следовательно, Z_a — нуль-множество в пространстве X.

Рассмотрим отображения $f_n : X \to Y$ такие, что $f_n | Z_a = f(a)$ и

$$f_n\Big(X \setminus \bigcup_{a \in \{a_1, \dots, a_n\}} Z_a\Big) \subseteq \{y\} \text{ для всех } a \in \{a_1, \dots, a_n\} \text{ и каждого } n \in \omega.$$

По лемме 2.1 отображение $f_n \in B_1(X, Y)$ для каждого $n \in \omega$. Рассмотрим отображение $g := \lim f_n$ при $n \to \infty$. Отображение g определено во всех точках X, и, значит, $g \in B_2(X, Y)$. В силу произвольности отображения f и множества A получаем, что $Y^X \subseteq {}^{(\aleph_0)}B_2(X, Y)$.

Теорема доказана.

Следствие 2.4. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда ${}^{(\aleph_0)}B_2(X) = \mathbb{R}^X$.*

Таким образом, вещественная полнота пространства $B_\alpha(X)$ ($\alpha \geq 2$) влечет (теоремы 1.1 и 1.2) вырожденность пространства X, выражающуюся в равенстве $B_\alpha(X) = \mathbb{R}^X$.

Напомним, что топологическое пространство X называется *линделёфовым*, если из любого открытого покрытия пространства X можно выделить счетное подпокрытие. Хорошо известно, что любое линделёфовое пространство вещественно полно [3, теорема 3.11.12] и нормально [3, теорема 3.8.2].

Теорема 2.4. *Пусть X — G-z-нормальное пространство, где G — некомпактное топологическое пространство со счетной базой и $\alpha \in [2, \omega_1]$. Тогда линделёфовость пространства $B_\alpha(X, G)$ эквивалентна счетности пространства X.*

Доказательство. Предположим, что $B_\alpha(X, G)$ — линделёфово пространство. Тогда $B_\alpha(X, G)$ вещественно полно и по теореме 2.3 $B_\alpha(X, G) = G^X$. Отсюда следует, что пространство G^X нормально. Так как G — некомпактное пространство, то G^X — нормальное пространство тогда и только тогда, когда X счетно [11].

Если X счетно, то G^X — пространство со счетной базой (сепарабельное метризуемое), а значит, наследственно линделёфово. Следовательно, пространство $B_\alpha(X, G)$ линделёфово.

Теорема доказана.

В качестве следствия получаем результат, доказанный А. В. Пестряковым в работе [12].

Следствие 2.5. *Пусть X — тихоновское пространство и $\alpha \in [2, \omega_1]$. Тогда линделёфовость пространства $B_\alpha(X)$ эквивалентна счетности пространства X.*

В частности, линделёфовость пространства бэровских функций на тихоновском пространстве X эквивалентна счетности пространства X.

Вопрос 1. Существует ли некомпактное топологическое пространство со счетной базой G и несчетное G-z-нормальное пространство X такие, что $B_1(X, G)$ линделёфово?

Ослаблением вопроса 1 может быть следующий вопрос.

Вопрос 2. Существует ли некомпактное топологическое пространство со счетной базой G и несчетное G-z-нормальное пространство X такие, что $B_1(X, G)$ нормально и вещественно полно?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hewitt E.** Rings of real-valued continuous functions, I // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 64, no. 1. P. 45–99.
2. **Архангельский А.В., Пономарев В.И.** Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 424 с.
3. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
4. **Nachbin L.** Topological vector spaces of continuous functions // Proc. Nat. Acad. Sci. (USA). 1954. Vol. 40, no. 6. P. 471–474.
5. **Архангельский А.В.** Топологические пространства функций. М: Изд-во МГУ, 1989. 222 с.
6. **Архангельский А.В.** Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, no. 6 (204). С. 29–84.
7. **Arhangel'skii A.V.** Functional tightness, q-spaces and τ-embeddings // Comment. Math. Univ. Carol. 1983. Vol. 24, no. 1. P. 105–120.
8. **Окунев О.Г.** О пространствах функций в топологии поточечной сходимости: расширение Хьюитта и τ-непрерывные функции // Вестн. Моск. ун-та. Сер 1. Математика. Механика. 1985. № 4. С. 78–80.
9. **Куратовский К.** Топология: в 2-х томах. Т.1. М.: Мир, 1966. 591 с.
10. **Arhangel'skii A., Tkachenko M.** Topological group and related structure. Paris: Atlantis Press; Hackensack, NJ: World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd., 2008. 781 p. (Atlantis Studies Math.; vol. 1).
11. **Stone A.H.** Paracompactness and product spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 54. P. 977–982.
12. **Пестряков А.В.** Бэровские функции и пространства бэровских функций: дис ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1987. 74 с.

Поступила 3.06.2019
После доработки 12.08.2019
Принята к публикации 12.09.2019

Осипов Александр Владимирович
д-р физ.-мат. наук, зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет;
Уральский государственный экономический университет
г. Екатеринбург
e-mail: OAB@list.ru

REFERENCES

1. Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1948, vol. 64, no. 1, pp. 45–99. doi: 10.2307/1990558 .
2. Archangel'skii A.V., Ponomariov V.I. *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises.* N Y: Springer, 1984, 416 p. ISBN: 978-90-277-1355-1 . Original Russian text published in Arkhangel'skii A.V., Ponomarev V.I. *Osnovy obshchei topologii v zadachakh i uprazhneniyakh.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 424 p.
3. Engelking R. *General Topology.* Sigma series in pure mathematics, vol. 6, Berlin: Heldermann Verlag, 1989, 535 p. ISBN: 3885380064 . Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Mir Publ., 1986, 752 p.
4. Nachbin L. Topological vector spaces of continuous functions. *Proc. Nat. Acad. Sci. (USA)*, 1954, vol. 40, no. 6, pp. 471–474. doi: 10.1073/pnas.40.6.471 .
5. Arkhangel'skii A.V. *Topological function spaces.* Math. its Appl., vol. 78, Dordrecht: Kluwer, 1992, 205 p. ISBN: 0-7923-1531-6 . Original Russian text published in Arkhangel'skii A.V. *Topologicheskie prostranstva funktsii*, Moscow: MGU Publ., 1989, 222 p.
6. Arkhangel'skii A.V. Structure and classification of topological spaces and cardinal invariants. *Russian Math. Surveys*, 1978, vol. 33, no. 6, pp. 33–96. doi: 10.1070/RM1978v033n06ABEH003884 .
7. Arhangel'skii A.V. Functional tightness, q-spaces and τ-embeddings. *Comment. Math. Univ. Carol.*, 1983, vol. 24, no. 1, pp. 105–120.
8. Okunev O.G. On function spaces in the topology of pointwise convergence: Hewitt extension and τ-continuous functions. *Vestn. Mosk. Univ., Ser. I*, 1985, no. 4, pp. 78–80.
9. Kuratowski K. *Topology. Vol. I.* N Y; London: Acad. Press, 1966, 560 p. ISBN: 978-0-12-429201-7 . Translated to Russian under the title *Topologiya.* T. 1, Moscow: Mir Publ., 1966, 594 p.
10. Arhangel'skii A., Tkachenko M. *Topological group and related structure.* Ser. Atlantis Studies in Math., vol. 1, Paris: Atlantis Press, 2008, 781 p. doi: 10.2991/978-94-91216-35-0 .
11. Stone A.H. Paracompactness and product spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1948, vol. 54, pp. 977–982. doi: 10.1090/S0002-9904-1948-09118-2 .
12. Pestriakov A.V. *Berovskie funktsii i prostranstva berovskikh funktsii* (Baire functions and spaces of Baire functions). Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation. Sverdlovsk: Ural State of University Publ., 1987, 74 p.

Received June 3, 2019
Revised August 12, 2019
Accepted September 5, 2019

Alexander Vladimirovich Osipov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Ural State University of Economicis, Yekaterinburg, 620144 Russia, e-mail: OAB@list.ru .

Cite this article as: A. V. Osipov. On the Hewitt realcompactification and τ-placedness of function spaces, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 177-183 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.544

О ГЕНЕТИЧЕСКИХ КОДАХ НЕКОТОРЫХ ГРУПП С 3-ТРАНСПОЗИЦИЯМИ[1]

В. М. Синицин

Группы Кокстера имеют многочисленные приложения в математике и за ее пределами, а группы с 3-транспозициями Б. Фишера лежат в основе внутреннего геометрического анализа теории конечных (простых) групп. Пересечение этих классов групп состоит из конечных групп Вейля $W(A_n) \simeq S_{n+1}$, $W(D_n)$, $W(E_n)$ $(n = 6, 7, 8)$ простых конечномерных алгебр и групп Ли. В предыдущих работах А. И. Созутова, А. А. Кузнецова и автора были найдены системы S порождающих трансвекций (3-транспозиций) групп $Sp_{2m}(2)$ и $O^{\pm}_{2m}(2)$, графы $\Gamma(S)$ которых являются деревьями. Множество $\{\Gamma_n\}$ $(n \geq m)$ вложенных друг в друга графов называем *E-серией*, если они являются деревьями, содержат подграф E_6 и их подграфы с вершинами $m, m+1, \ldots, n$ являются простыми цепями. В настоящей работе найдены генетические коды групп $Sp_{2m}(2)$ и $O^{\pm}_{2m}(2)$, $8 \leq 2m \leq 20$, близкие к генетическим кодам некоторых групп Кокстера. Основная гипотеза исследований: группы $Sp_{2m}(2)$ и $O^{\pm}_{2m}(2)$ (пп. (ii)–(iii) в теореме Фишера) можно получить из соответствующих бесконечных групп Кокстера с помощью одного или двух дополнительных соотношений вида $w^2 = 1$. Рассматриваемые в работе графы I_n содержат подграф E_6 и составляют E-серию вложенных графов $\{I_n \mid n = 7, 8, \ldots\}$, в которых подграф $I_n \setminus E_6$ — простая цепь. В работе доказано, что для групп $X(I_n)$, полученных из групп Кокстера $G(I_n)$ наложением дополнительного соотношения $(s_4^t s_7)^2 = 1$, где $t = s_3s_2s_1s_5s_6s_3s_2s_5s_3s_4$, при указанных пределах изменения $n = 4k+\delta$ $(\delta = 0, 1, 2)$ имеют место изоморфизмы $X(I_{4k+1}) \simeq Sp_{4k}(2) \times Z_2$, $X(I_{2m}) \simeq O^{\pm}_{2m}(2)$ (знак $\pm$ зависит от m). В доказательстве используется алгоритм Тодда — Кокстера системы GAP.

Ключевые слова: генетические коды, группы и графы Кокстера, группы Вейля, группы с 3-транспозициями, симплектические трансвекции.

V. M. Sinitsin. On genetic codes of certain groups with 3-transpositions.

Coxeter groups have numerous applications in mathematics and beyond, and B. Fischer's 3-transposition groups underly the internal geometric analysis in the theory of finite (simple) groups. The intersection of these classes of groups consists of finite Weyl groups $W(A_n) \simeq S_{n+1}$, $W(D_n)$, and $W(E_n)$ for $n = 6, 7, 8$, simple finite-dimensional algebras, and Lie groups. In previous papers by A. I. Sozutov, A. A. Kuznetsov, and the author, systems S of generating transvections (3-transpositions) of groups $Sp_{2m}(2)$ and $O^{\pm}_{2m}(2)$ were found such that the graphs $\Gamma(S)$ are trees. A set $\{\Gamma_n\}$, $n \geq m$, of nested graphs is called an *E-series* if these graphs are trees, contain the subgraph E_6, and their subgraphs with vertices $m, m+1, \ldots, n$ are simple chains. In the present paper, we find genetic codes of the groups $Sp_{2m}(2)$ and $O^{\pm}_{2m}(2)$, $8 \leq 2m \leq 20$; these codes are close to the genetic codes of some Coxeter groups. Our main hypothesis is the following: the groups $Sp_{2m}(2)$ and $O^{\pm}_{2m}(2)$ (cases (ii)–(iii) in Fischer's theorem) can be obtained from the corresponding infinite Coxeter groups with the use of one or two additional relations of the form $w^2 = 1$. The graphs I_n considered in this paper contain the subgraph E_6 and comprise an E-series of nested graphs $\{I_n \mid n = 7, 8, \ldots\}$, in which the subgraph $I_n \setminus E_6$ is a simple chain. We prove that the isomorphisms $X(I_{4k+1}) \simeq Sp_{4k}(2) \times Z_2$ and $X(I_{2m}) \simeq O^{\pm}_{2m}(2)$ (the sign $\pm$ depends on m) hold for the groups $X(I_n)$ obtained from the Coxeter groups $G(I_n)$ by imposing an additional relation $(s_4^t s_7)^2 = 1$, where $t = s_3s_2s_1s_5s_6s_3s_2s_5s_3s_4$, if $n = 4k + \delta$ $(\delta = 0, 1, 2)$. The proof uses the Todd–Coxeter algorithm from the GAP system.

Keywords:Keywords: genetic code, Coxeter group, Coxeter graph, Weyl group, 3-transposition group, symplectic transvection.

MSC: 20C40

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-184-188

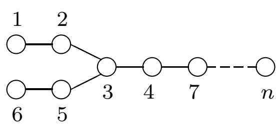
1. Введение

Согласно Б. Фишеру (см. [1–3]) множество $D = a^G$ инволюций группы $G = \langle D \rangle$ называется *классом 3-транспозиций*, если $|ab| \leq 3$ для любых $a, b \in D$; при этом подгруппа $H = \langle D \cap H \rangle$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №19-01-00566 А.

из G называется *D-подгруппой.* Если в такой группе G нет D-подгрупп порядков 18 и 54, то G называется *группой с симплектическими* 3*-транспозициями.* В известной теореме Б. Фишера [3, теорема 2.58, пп. (i)–(iii)] это симметрические группы S_n, симплектические группы $Sp_{2m}(2)$ и ортогональные группы $O^{\pm}_{2m}(2)$; Б. Фишер в доказательстве использует их описание из [4]. В работе [5] эта часть теоремы Б. Фишера [3, теорема 2.58, пп. (i)–(iii)] была (пере)доказана с помощью определяющих соотношений и некоторой связи групп $Sp_{2m}(2)$ и $O^{\pm}_{2m}(2)$ с группами Кокстера и алгебрами Ли, установленной в [5]. Исследования этой связи групп S_n, $Sp_{2m}(2)$ и $O^{\pm}_{2m}(2)$ продолжились в [6; 7] и в данной статье.

В настоящей работе найдены генетические коды групп $Sp_{2m}(2)$ и $O^{\pm}_{2m}(2)$, $8 \le 2m \le 20$, близкие к генетическим кодам некоторых бесконечных групп Кокстера [8; 9]. В статье вершины графа Γ_n в зависимости от контекста обозначаются через s_i, p_i, w_i с помощью индексов i. Каждой минимальной системе $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset D$ порождающих 3-транспозиций группы $G = \langle D \rangle$ поставим в соответствие граф $\Gamma(S) = \Gamma_n$ — граф Кокстера — с множеством вершин $I = \{1, \dots, n\}$ и ребер (i, j), где $s_i s_j \ne s_j s_i$. Определенные цепочки $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$, $n = k, k+1, \dots$, вложенных друг в друга графов-деревьев, содержащих подграф E_6, ранее названы А. И. Созутовым и автором *E-сериями* (по аналогии с [10, с. 220]). Рассматриваемые в работе графы Γ_n принадлежат E-серии $\{I_n, n = 6,\ 7,\ \dots\}$ (см. [7]):

$I_n,\ n \ge 7:$ 

.

Множество порождающих и определяющих соотношений Кокстера, задаваемых графом Γ_n, обозначим через $S(\Gamma_n)$ и $R(\Gamma_n)$ соответственно, а группу Кокстера — через $G(\Gamma_n)$, в частности, $G(\Gamma_n) = \langle\, S(\Gamma_n) \mid R(\Gamma_n) \,\rangle$ [10, §12.2]. Хорошо известно, что группы $G(I_n)$ при $n \ge 7$ бесконечны [8; 9]. Положим $X(I_n) = \langle\, S(I_n) \mid R(I_n), (s_4^t s_7)^2 \rangle$, где $t = s_3 s_2 s_1 s_5 s_6 s_3 s_2 s_5 s_3 s_4$, и обозначим через $Y(I_n)$ подгруппу в $X(I_n)$, порожденную элементами $s_1 s_2$, $s_2 s_3$, $\dots$, $s_{n-1} s_n$.

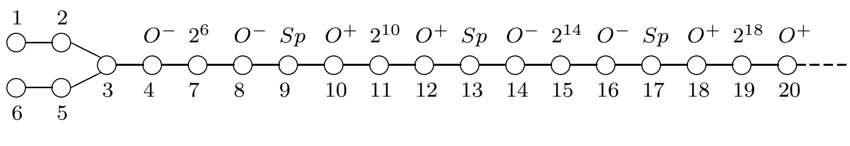
Если вид графа известен, то будем применять обозначения $S = S(\Gamma_n)$, R_n, G_n, X_n, W_n, Y_n. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\Gamma_n = I_n$, $X_n = \langle S \mid R_n,\ (s_4^t s_7)^2 = 1 \rangle$, *где* $t = s_3 s_2 s_1 s_5 s_6 s_3 s_2 s_5 s_3 s_4$ *и* $7 \le n \le 20$. *Тогда* Y_n *— нормальная в* X_n *подгруппа индекса* 2, *и при указанных пределах изменения* $n = 4k + \delta$ $(\delta = 0, 1, 2)$ *имеют место изоморфизмы*

1) $X_{4k+1} \simeq Sp_{4k}(2) \times Z_2$ *и* $Y_{4k+1} \simeq Sp_{4k}(2)$;
2) $X_{4k} \simeq O^-_{4k}(2)$ *при четном* k *и* $X_{4k} \simeq O^+_{4k}(2)$ *при нечетном* k;
3) $X_{4k+2} \simeq O^-_{4k+2}(2)$ *при нечетном* k *и* $X_{4k+2} \simeq O^+_{4k+2}(2)$ *при четном* k.

2. Доказательство теоремы

Вначале докажем вспомогательные предложения 1, 2. Воспользуемся разметкой E-серии графов $\{I_n\}$, введенной в недавней статье (Созутов А.И., Синицин В.М. О графах Кокстера групп с симплектическими 3-транспозициями // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 251–258):

$I_n,\ n \ge 7:$ 

.

Предложение 1. *Графу* Γ_n *из* E*-серии* $\{I_n\}$ $(n \ge 6)$ *соответствует подгруппа* W_n *из* $GL_n(2)$, *изоморфная группе* $O^{\pm}_{2m}(2)$ *при* $n = 2m$ *и группе* $Sp_{4k}(2)$ *при* $n = 4k + 1$. *Если над вершиной с номером* n *стоит число* 2^{n-1}, *то группа* W_n *обладает нормальной элементарной абелевой* 2*-подгруппой порядка* 2^{n-1}. *В* E*-сериях* $\{\Gamma_n\}$ *последовательность типов групп имеет период* 8, *т. е.* W_{n+8} *— группа того же типа, что и группа* W_n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть V_n — векторное пространство над полем F_2 с базисом $v_1, \dots, v_n$ и $\Gamma_n = I_n$ — граф Кокстера, вершинами которого являются векторы $v_1, \dots, v_n$. Введем на V_n квадратичную форму $F(x)$ и билинейную форму $f(x, y)$, полагая

$$F(x) = \sum_{i \in \Gamma_n} x_i^2 + \sum_{(i,j) \in \Gamma_n} x_i x_j \quad \text{для } x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V_n,$$

$$f(x, y) = F(x + y) + F(x) + F(y).$$

Как доказано в [7, лемма 19], $f(x, y)$ — симплектическая форма, невырожденная при $n = 2m$. Для каждого вектора $r \in V_n$ с $F(r) = 1$ через w_r обозначим трансвекцию (сдвиг)

$$w_r(x) = x^{w_r} = x + f(x, r)r, \quad x \in V_n.$$

Очевидно, что $F(v_i) = 1$, положим $w_i = w_{p_i}$, $i = 1, \dots, n$. Непосредственно проверяются формула $w_r^{w_s} = w_{w_s(r)}$ (см. также [7, лемма 3]) и действие трансвекций w_i на элементах базиса: $v_i^{w_i} = v_i$ при $i \neq j$, $v_j^{w_i} = v_j + v_i$, если $(i, j) \in \Gamma_n$, и $v_j^{w_i} = v_j$, если $(i, j) \notin \Gamma_n$. Отсюда следует, что $(w_i w_j)^2 = 1$, если $(i, j) \notin \Gamma_n$, и $(w_i w_j)^3 = 1$, если $(i, j) \in \Gamma_n$. Это означает, что Γ_n является графом Кокстера группы $W_n = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ в системе порождающих $w_1, \dots, w_n$.

Как доказано в [7, лемма 20], выполняются включения $W_n \leq I(F) \leq I(f)$, где $I(F)$, $I(f)$ — группы изометрий форм F, f. По [7, леммы 21–24] имеют место следующие изоморфизмы:

1) $W_{4k+1} \simeq Sp_{4k}(2)$;
2) $W_{4k} \simeq O_{4k}^{\delta_k}(2)$, где $\delta_k = +$ при четном k и $\delta_k = -$ при нечетном k;
3) $W_{4k+2} \simeq O_{4k+2}^{\delta_k}(2)$, где $\delta_k = +$ при четном k и $\delta_k = -$ при нечетном k.

По [7, леммы 14, 19] при $n = 4k + 1$ и $n = 4k + 3$ для графа $\Gamma_n = I_n$ форма f на V_n вырождена, и группа W_{4k+3} является полупрямым произведением элементарной абелевой 2-подгруппы порядка 2^{4k+2} на группу W_{4k+2}. Полученная информация о строении групп $W_n = W(I_n)$ изображена на общем графе серии с помощью разметки.

Предложение доказано.

С помощью алгоритма Тодда — Кокстера на компьютере было показано, что группы $X(I_n)$ для $7 \leq n \leq 20$ конечны, и вычислены их порядки.

Предложение 2. *Порядки групп $X(I_n)$ удовлетворяют следующим равенствам:*
$|X(I_7)| = 3317760 = 2^6 \cdot |O_6^-(2)|$;
$|X(I_8)| = 119 \cdot |X(I_7)| = |W(I_8)| = |O_8^-(2)|$;
$|X(I_9)| = 240 \cdot |X(I_8)| = 2 \cdot |Sp_8(2)|$;
$|X(I_{10})| = 496 \cdot |X(I_9)| = |O_{10}^+(2)|$;
$|X(I_{11})| = 1024 \cdot |X(I_{10})| = 2^{10} \cdot |O_{10}^+(2)|$;
$|X(I_{12})| = 2079 \cdot |X(I_{11})| = |O_{12}^+(2)|$;
$|X(I_{13})| = 4160 \cdot |X(I_{12})| = 2 \cdot |Sp_{12}(2)|$;
$|X(I_{14})| = 8256 \cdot |X(I_{13})| = |O_{14}^-(2)|$;
$|X(I_{15})| = 16384 \cdot |X(I_{14})| = 2^{14} \cdot |O_{14}^-(2)|$;
$|X(I_{16})| = 32639 \cdot |X(I_{15})| = |O_{16}^-(2)|$;
$|X(I_{17})| = 65280 \cdot |X(I_{16})| = 2 \cdot |Sp_{16}(2)|$;
$|X(I_{18})| = 130816 \cdot |X(I_{17})| = |O_{18}^+(2)|$;
$|X(I_{19})| = 262144 \cdot |X(I_{18})| = 2^{18} \cdot |O_{18}^+(2)|$;
$|X(I_{20})| = 524799 \cdot |X(I_{19})| = |O_{20}^+(2)|$;
$|X(I_{20})| = 215890246834351581553827402011789144778028831953911808 0000.$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Пусть $\Gamma_n = I_n$. Группа $G(E_6) = \langle s_1, \dots, s_6 \rangle$ изоморфна группе Вейля $W(E_6)$ [8; 10] и по условиям теоремы содержится во всех группах G_n при $n \geq 7$. В корневой системе типа E_6 с фундаментальной системой корней $\{p_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$ возьмем максимальный положительный корень $r = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6$ (см. [8; 10]). Симметрия (отражение) $s_r = s_4^t$, где $t = s_3s_2s_1s_5s_6s_3s_2s_5s_3s_4$, из группы $W(E_6)$ принадлежит всем группам G_n при $n \geq 7$.

В пространстве V_n над полем F_2 из доказательства предложения 1 вектор r имеет вид $r = v_1 + v_3 + v_6$. Он ортогонален вектору v_7 относительно билинейной формы, и порядок элемента w_rw_7 группы W_n равен 2. Следовательно, в группах W_n выполняется соотношение $(s_4^ts_7)^2 = 1$.

В группе $O_{2m}^{\pm}(2)$ центр тривиален, коммутант имеет индекс 2 и является простой группой, изоморфной $D_m(2)$ или ${}^2D_m(2)$ [11]. По предложению 1 $W_{4k} = O_{4k}^-(2)$ при четном k и $W_{4k} = O_{4k}^+(2)$ при нечетном k; $W_{4k+2} = O_{4k+2}^-(2)$ при нечетном k и $W_{4k+2} = O_{4k+2}^+(2)$ при четном k, а по предложению 2 порядки групп X_n для $6 \leq n \leq 20$ совпадают с порядками соответствующих групп W_n. Это доказывают отмеченные в теореме изоморфизмы для групп $O_n^{\pm}(2)$.

Далее, определяющие соотношения группы Кокстера G_n и дополнительное соотношение $(s_4^ts_7)^2 = 1$ для групп X_n имеют четную длину (как слова в алфавите S). Поэтому каждый элемент группы X_n либо “четен”, либо “нечетен” в соответствии с четностью или нечетностью числа букв (порождающих), входящих в его выражение, и “четные” элементы составляют в X_n подгруппу индекса 2 [9, § 9.5, с. 180]. По определению Y_n есть образ подгруппы $H_n = \langle s_is_j \mid (i,j) \in \Gamma_n \rangle$ группы G_n, и поскольку Γ_n — дерево, то имеет место равенство $H_n = \langle s_ks_j \mid 1 \leq k,j \leq n \rangle$ и H_n совпадает с коммутантом группы G_n [9, § 9.5, с. 180]. Значит, и подгруппа Y_n совпадает с коммутантом группы X_n.

Для случаев $n = 4k+1$ по предложению 1 и лемме 21 из [7] имеем $W_{4k+1} \simeq Sp_{4k}(2)$. Согласно предложению 2 $|X_{4k+1})| = 2|W_{4k+1}|$ ввиду того, что в группах X_n индекс подгруппы Y_n равен 2, порядок подгруппы $Y_{4k+1} = \langle s_1s_2, s_2s_3, s_3s_4, s_3s_5, s_5s_6, s_4s_7 \rangle$ из X_{4k+1} совпадает с порядком группы $Sp_{4k}(2)$. Так как центр группы $Sp_{2m}(2)$ тривиален, а группа $Sp_{2m}(2)$ проста [12] и совпадает с коммутантом, нормальная в X_{4k+1} подгруппа Y_{4k+1} изоморфна $Sp_{4k}(2)$ и $X(I_{4k+1}) \simeq Sp_{4k}(2) \times Z_2$.

Теорема доказана.

Расчеты подтвердили основную гипотезу исследований для групп $Sp_{2m}(2)$ и $O_{2m}^{\pm}(2)$ с графами Кокстера из E-серии $\{I_n\}$ при $7 \leq n \leq 20$. Аналогичные проводятся для групп $Sp_{2m}(2)$ и $O_{2m}^{\pm}(2)$ с графами Кокстера из других E-серий из [7; 8] и другими дополнительными соотношениями. Ведется поиск теоретического обоснования результатов расчетов.

Автор выражает благодарность профессору А. И. Созутову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fischer B.** Finite groups generated by 3-transpositions. // Inventiones Math. 1971. Vol. 13, no.. 3. P. 232–246. doi: 10.1007/BF01404633 .
2. **Aschbacher M.** 3-transposition groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. (Cambridge Tracts in Math.; vol. 124). 260 p.
3. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. М.: Мир, 1985. 352 с.
4. **McLaughlin J.** Some subgroups of $SL_n(F_2)$ // Ill. J. Math. 1969. Vol. 13, no. 1. P. 108–115. doi: 10.1215/ijm/1256053741 .
5. **Созутов А.И.** О группах типа Σ_4, порожденных 3-транспозициями // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 140–149.
6. **Созутов А.И.** Об алгебрах Ли с мономиальным базисом // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 5. С. 188–201.
7. **Созутов А.И., Кузнецов А.А., Синицин В.М.** О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 285–301.
8. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Тикса, группы, порожденные отражениями системы корней. М.: Мир, 1972. 334 с.
9. **Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж.** Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980. 240 с.

10. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 310 с.
11. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
12. **О'Мира О.** Лекции о симплектических группах. М.: Мир, 1979. 167 с.

Поступила 17.09.2019
После доработки 25.10.2019
Принята к публикации 18.11.2019

Синицин Владимир Михайлович
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: sinkoro@yandex.ru

REFERENCES

1. Fischer B. Finite groups generated by 3-transpositions. *Invent. Math.*, 1971, vol. 13, no. 3, pp. 232–246. doi: 10.1007/BF01404633 .
2. Aschbacher M. *3-transposition groups.* Ser. Cambridge Tracts in Math., vol. 124, Cambridge: Cambridge University Press, 1997, 260 p. ISBN: 0-521-57196-0 .
3. Gorenstein D. *Finite simple groups.* University Ser. in Math. N Y: Plenum Publishing Corp., 1982, 333 p. ISBN: 0-306-40779-5 . Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy.* Moscow: Mir Publ., 1985, 352 p.
4. McLaughlin J. Some subgroups of $SL_n(F_2)$. *Ill. J. Math.*, 1969, vol. 13, no. 1, pp. 108–115. doi: 10.1215/ijm/1256053741 .
5. Sozutov A.I. Groups of type Σ_4 generated by 3-transpositions. *Sib. Math. J.*, 1992, vol. 33, no. 1, pp. 117–124. doi: 10.1007/BF00972943 .
6. Sozutov A.I. On lie algebras with monomial basis. *Sib. Math. J.*, 1993, vol. 34, no. 5, pp. 959–971. doi: 10.1007/BF00971409 .
7. Sozutov A.I., Kuznetsov A.A., Sinitsin V.M. About systems of generators of some groups with 3-transpositions. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2013, vol. 10, pp. 285–301 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2013.10.022 .
8. Bourbaki N. *Groupes et algebres de Lie* (Chapt. IV–VI). Paris: Hermann, 1968, 282 p. doi: 10.1007/978-3-540-34491-9 . Translated to Russian under the title *Gruppy i algebry Li* (glavy IV–VI). Moscow: Mir Publ., 1972, 334 p.
9. Coxeter H.S.M., Moser W.O.J. *Generators and Relations for Discrete Groups.* Berlin: Springer-Verlag, 1972, 164 p. doi: 10.1007/978-3-662-21946-1 . Translated to Russian under the title *Porozhdajushhie jelementy i opredeljajushhie jelementy diskretnyh grupp.* Moscow: Nauka Publ., 1980, 240 p.
10. Kondratiev A.S. *Gruppy i algebry Li* [Lie groups and Lie algebras. Ekaterinburg, 2009, 310 p. ISBN: 978-5-7691-2111-1 .
11. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0198531990 .
12. O'Meara O.T. *Lectures on symplectic groups.* Indiana: University of Notre Dame, 1976. Translated to Russian under the title *Lekcii o simplekticheskih gruppah.* Moscow: Mir Publ., 1979, 167 p.

Received September 17, 2019
Revised October 25, 2019
Accepted November 18, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00566 A).

Vladimir Mihaylovich Sinitsin, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia,
e-mail: sinkoro@yandex.ru .

Cite this article as: V. M. Sinitsin. On genetic codes of certain groups with 3-transpositions, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 184–188 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.853

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КВАЗИРЕШЕНИЙ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Д. Скарин

В работе рассматривается важный с точки зрения приложений класс задач выпуклого программирования с возможно несовместной системой ограничений. Такие постановки характеризуются как несобственные задачи выпуклой оптимизации. В силу частоты появления подобных задач актуальной становится проблема разработки их теории и численных методов коррекции (аппроксимации). Под коррекцией понимается построение близких в определенном смысле разрешимых моделей, решение которых определяется как обобщенное решение исходной несобственной задачи. В данной работе корректирующие задачи строятся на основе минимизации некоторой функции штрафа от ограничений. Для откорректированной задачи в условиях возможного неточного задания информации о функциях исходной модели применяется один из стандартных способов регуляризации некорректных задач оптимизации — метод квазирешений. Устанавливаются условия и оценки сходимости предлагаемых процедур.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, методы штрафных функций, метод квазирешений.

V. D. Skarin. On the application of the quasisolution method to the correction of improper convex programs.

We consider a class of improper convex programs with a possibly inconsistent system of constraints, which is important from the viewpoint of applications. Such problems are characterized as improper problems of convex optimization. Since improper problems are rather frequent, it is important to develop the theory and numerical methods of their correction (approximation). The correction is understood as the construction of solvable models that are close to the original problems in a certain sense. Solutions of these models are taken as generalized solutions of the original improper problems. In the present paper the correcting problems are constructed based on the minimization of a certain penalty function depending on the constraints. Since the information about the functions of the original model may be inexact, we apply for the corrected problem the quasisolution method, which is a standard regularization method for ill-posed optimization problems. Convergence conditions are formulated for the proposed methods and convergence rates are established.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, penalty function methods, quasisolution method.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-189-200

Введение

При математическом моделировании конкретных постановок из области экономики, управления и проектирования часто возникают оптимизационные задачи с несовместной системой ограничений. Модели с противоречивыми ограничениями составляют (см. [1]) важнейший класс несобственных задач (НЗ) линейного и выпуклого программирования (ВП). По причине частоты возникновения НЗ особое значение приобретают вопросы теории и численного анализа подобных задач. В первую очередь требуется произвести оптимальную коррекцию НЗ, т. е. построить близкие в определенном смысле разрешимые задачи, решение которых принимается за обобщенное решение НЗ.

Одной из распространенных причин появления несовместности в ограничениях является неточное задание исходных данных. Если информация о функциях в задаче носит приближенный характер, то такие постановки типичны для теории некорректных экстремальных задач

[1]Исследования поддержаны РФФИ, грант № 19-07-01243.

(см. [2–5]). Поэтому представляется естественной попытка использовать при коррекции НЗ идею регуляризации некорректных моделей. В качестве примера работ, где для анализа задач с противоречивыми ограничениями применялись известные методы регуляризации, можно указать [6–9].

В настоящей работе для НЗ ВП строится общая задача оптимальной коррекции путем вариации правых частей ограничений относительно минимума некоторой функции штрафа. В основу построения метода аппроксимации положена идея метода квазирешений (см. [3]) — стандартного способа регуляризации некорректных задач оптимизации. Определяются условия и оценки сходимости предлагаемых методов.

1. Несобственная задача ВП, метод квазирешений

Рассмотрим задачу ВП
$$\min\{f_0(x) \mid x \in X\}, \tag{1}$$
где $X = \{x \mid f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots, m$. Обозначим через $L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ функцию Лагранжа для задачи (1), $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. Будем считать, что $X = \varnothing$, $\Lambda \ne \varnothing$, где
$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \mid \inf_x L(x, \lambda) > -\infty\}.$$
Такие задачи с противоречивыми ограничениями характеризуются в [1] как НЗ ВП 1-го рода. Они наиболее часто встречаются в практике математического моделирования экономических ситуаций и отмечаются следующим свойством: если вместо X в (1) взять множество $X_\xi = \{x \mid f(x) \le \xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, такое, что $X_\xi \ne \varnothing$, то $\inf\{f_0(x) \mid x \in X_\xi\} > -\infty$.

Введем меру несовместности системы ограничений задачи (1) как
$$\bar\varphi = \inf_x \varphi(x), \tag{2}$$
где $\varphi(x) = \omega(f^+(x))$, $\omega(z)$ — выпуклая функция, определенная на $\mathbb{R}^m_+$ и такая, что
$$\omega(0) = 0, \qquad \omega(z) > 0 \qquad (\forall z \in \mathbb{R}^m_+,\ z \ne 0). \tag{3}$$
Пусть значение $\bar\varphi$ в (2) достигается в точке $\bar x \in \mathbb{R}^n$: $\bar\varphi = \varphi(\bar x)$. Очевидно, что множество X в (1) непусто тогда и только тогда, когда $\bar\varphi = 0$. Поэтому естественным является определение оптимальной коррекции для НЗ ВП (1) в виде задачи
$$\min\{f_0(x) \mid x \in \bar X\}, \tag{4}$$
где $\bar X = \{x \mid \varphi(x) \le \bar\varphi\}$.

Если $\bar\varphi = \varphi(\bar x) = 0$, то задачи (1) и (4) совпадают, в противном случае решение задачи (4) будем считать обобщенным (аппроксимационным) решением НЗ ВП (1). Таким образом, для существования обобщенного решения задачи (1) требуется, чтобы 1) $\bar X \ne \varnothing$; 2) нашлась точка $\bar x = \arg\min\{f_0(x) \mid x \in \bar X\}$.

Примерами функции $\varphi(x) = \omega(z(x))$, удовлетворяющей условиям (3), могут служить $\omega_1(z) = \|z\|_1 = \sum\limits_{i=1}^m z_i$, $\omega_2(z) = \|z\|_2^2 = \sum\limits_{i=1}^m z_i^2$, $\omega_3(z) = \|z\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} z_i$. Если $\bar\varphi = \varphi(\bar x) = \omega(f^+(\bar x))$, то можно определить коррекцию НЗ ВП (1) в виде
$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar\xi}\}, \tag{5}$$
где $\bar\xi = f^+(\bar x)$. Нетрудно показать, что при выборе $\varphi(x) = \|f^+(x)\|^2$ задачи (4) и (5) совпадают. Если же в качестве $\varphi(x)$ взять $\|f^+(x)\|_1$ или $\|f^+(x)\|_\infty$, то справедливо включение $X_{\bar\xi} \subset \bar X$.

Пусть в задаче (1) вместо функций $f_i(x)$ известны их приближения $f_i^\varepsilon(x)$ такие, что

$$|f_i^\varepsilon(x) - f_i(x)| \leq \varepsilon \tag{6}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$. В этом случае задача коррекции (4) примет вид

$$\min\{f_0^\varepsilon(x) \mid x \in \bar{X}_\varepsilon\}, \tag{7}$$

где $\bar{X}_\varepsilon = \operatorname{Arg}\min\limits_x \varphi^\varepsilon(x)$, $\varphi^\varepsilon(x) = \omega(f^{\varepsilon^+}(x))$, функция $\omega(z)$ определена на множестве $\mathbb{R}_+^m$ и удовлетворяет условиям (3).

Для того чтобы с помощью анализа возмущенной задачи (7) получить решение задачи коррекции (4), необходимо применить некоторый метод регуляризации для некорректных задач оптимизации. Привлечем для этой цели идеологию известного метода квазирешений (см. [3]).

Выберем вначале стабилизатор задачи (1) как выпуклую функцию $\Omega(x)$, определенную на $\mathbb{R}^n$, для которой

1) $\Omega(x) \geq 0$ $(\forall\, x)$;

2) множество $Q_C = \{x \mid \Omega(x) \leq C\}$ ограничено при всех C таких, что $Q_C \neq \varnothing$.

Ограничения возмущенной задачи (1) будем агрегировать с помощью некоторой штрафной функции $P_\varepsilon(x)$. Обычно в качестве такой функции рассматривается $P_\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x))^p, p \geq 1$.

Метод квазирешений (см. [3]) состоит в отыскании приближенного решения $x_{Rd}^{\varepsilon\delta}$ задачи

$$\min_x\{\Phi^\varepsilon(x, R) = f_0^\varepsilon(x) + RP_\varepsilon(x) \mid x \in S_d\},$$

где $\Phi^\varepsilon(x_{Rd}^{\varepsilon\delta}, R) \leq \bar{\Phi}_d^\varepsilon(R) + \delta$, $\bar{\Phi}_d^\varepsilon(R) = \inf\limits_{x \in S_d} \Phi^\varepsilon(x, R)$, $S_d = \{x \mid \Omega(x) \leq d\}$, $R > 0$, $d > 0$, $\delta \geq 0$. Требуется найти согласование параметров ε, R, δ и d такое, чтобы точки $x_{Rd}^{\varepsilon\delta}$ приближали решение задачи (4), т. е. решали бы НЗ ВП (1) в обобщенном смысле.

2. Разрешимая задача оптимальной коррекции

Рассмотрим вначале случай, когда функции $f_i(x)$ в задаче (1) известны точно, т. е. когда в (6) $\varepsilon = 0$. Сведем задачу (7) к проблеме минимизации штрафной функции

$$\min_x\{F_d(x, r) = f_0(x) + R\varphi(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^+\}, \tag{8}$$

где $r = [R, \rho] > 0$, $d > 0$, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (3).

Предположим, что задача (4) имеет решение. Данное утверждение будет иметь место, например, когда $\varphi(x) = P(x) = \sum\limits_{i=1}^m f_i^{+^p}(x)$, $p \geq 1$, и множество $X_\xi = \{x \mid f(x) \leq \xi\}$ непусто и ограничено для некоторого $\xi = \xi_0$.

В самом деле, пусть $X_{\xi_0} \neq \varnothing$. Тогда непустыми и ограниченными будут и множества X_ξ при $\xi > \xi_0$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $X^0 = \{x \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$, $x' \in X^0$. Тогда $\varphi(x_0) \geq \varphi(x') = \sum\limits_{i=1}^m f_i^{+^p}(x') \geq f_i^{+^p}(x')$, $i = 1, \ldots, m$. Отсюда $f_i(x') \leq f_i^+(x') \leq \sqrt[p]{\varphi(x_0)}$, т. е. $x' \in X_{\tilde{\xi}}$, где $\tilde{\xi} = [\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_m] \in \mathbb{R}_+^m$, $\tilde{\xi}_i = \max\{\xi_i^0, \sqrt[p]{\varphi(x_0)}\}$, ξ_i^0 — i-я компонента вектора ξ_0, $i = 1, \ldots, m$. Так как $X^0 \subset X_{\tilde{\xi}}$, то множество X^0 ограничено. Тогда $\bar{\varphi} = \inf\limits_x \varphi(x) = \min\limits_{x \in X^0} \varphi(x)$, что влечет разрешимость задачи (4).

Исследуем связь между задачами (4) и (8).

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1) $f_0(x) \geq \tilde{f} > -\infty$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$, *задача* (4) *разрешима в точке* $\bar{x}$. *Тогда для любых* $r > 0$ *и* $d > 0$ *существует решение* x_{rd} *задачи* (8). *Любая предельная точка последовательности* $\{x_{rd}\}$ *при* $R \to \infty$, $\rho > 0$, $d \geq \Omega(\bar{x})$ *решает задачу* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество

$$M_{rd} = \{x \mid F_d(x,r) \le F_d(x^0,r)\},$$

где x^0 — произвольная фиксированная точка $\mathbb{R}^n$. Для $x' \in M_{rd}$ имеем

$$f_0(x') + R\varphi(x') + \rho\,(\Omega(x') - d)^+ \le f_0(x^0) + R\varphi(x^0) + \rho\,(\Omega(x^0) - d)^+. \tag{9}$$

Отсюда

$$\rho\,(\Omega(x') - d) \le f_0(x^0) - f_0(x') + R\varphi(x^0) + \rho\,(\Omega(x^0) - d)^+.$$

Поэтому, если $d \ge \Omega(x^0)$, то $\Omega(x') \le d + \dfrac{f_0(x^0) - \tilde f}{\rho} + \dfrac{R}{\rho}\varphi(x^0)$, если $d < \Omega(x^0)$, то $\Omega(x') \le \Omega(x^0) + \dfrac{f_0(x^0) - \tilde f}{\rho} + \dfrac{R}{\rho}\varphi(x^0)$. Следовательно, $M_{rd} \subset Q_{rd} = \{x \mid \Omega(x) \le C(x^0,r,d)\}$, где $C(x^0,r,d) = \dfrac{f_0(x^0) - \tilde f}{\rho} + \dfrac{R}{\rho}\varphi(x^0) + \max\{d,\, \Omega(x^0)\}$. Из ограниченности множества Q_{rd} следует ограниченность M_{rd}, а поскольку $\inf\limits_x F_d(x,r) = \min\limits_x \{F_d(x,r) \mid x \in M_{rd}\}$, то для каждых $r > 0$ и $d > 0$ существует точка $x_{rd} = \arg\min\limits_x F_d(x,r)$.

Положим в неравенстве (9) $x^0 = \bar x$, $x' = x_{rd}$. Если $d \ge \Omega(\bar x)$, получим

$$\Omega(x_{rd}) \le d + \frac{f_0(\bar x) - \tilde f}{\rho}, \quad \varphi(x_{rd}) \le \bar\varphi + \frac{f_0(\bar x) - \tilde f}{R}, \quad f_0(x_{rd}) \le f_0(\bar x) + R(\bar\varphi - \varphi(x_{rd})) \le f_0(\bar x).$$

Отсюда следуют ограниченность последовательности $\{x_{rd}\}$ для любого $r > 0$, существование предельной точки $\tilde x$ при $R \to \infty$ и $\rho > 0$ и выполнение неравенств $\varphi(\tilde x) \le \bar\varphi$, $f_0(\tilde x) \le f_0(\bar x)$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1) $f_0(x) \ge \tilde f > -\infty$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$, *задача* (4) *разрешима в точке* $\bar x$, $x_{rd} = \arg\min\limits_x F_d(x,r)$, $d \le \Omega(\bar x)$, $R \to \infty$, $\rho = \rho_0$, *где* $0 < \rho_0\Omega(\bar x) \le \varepsilon_0$, ε_0 — *заданная точность. Тогда для любой предельной точки* $\tilde x$ *последовательности* $\{x_{rd}\}$ *справедливо:* $\tilde x \in \bar X$, $|f_0(\tilde x) - f_0(\bar x)| \le \varepsilon_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в неравенстве (9) $x^0 = \bar x$, $x' = x_{rd}$ (существование x_{rd} гарантировано теоремой 1). Имеем

$$f_0(x_{rd}) + R\varphi(x_{rd}) + \rho\,(\Omega(x_{rd}) - d) \le f_0(\bar x) + R\bar\varphi + \rho\,(\Omega(\bar x) - d),$$

из чего следует

$$\Omega(x_{rd}) \le \Omega(\bar x) + \frac{f_0(\bar x) - \tilde f}{\rho}; \tag{10}$$

$$\varphi(x_{rd}) \le \bar\varphi + \frac{f_0(\bar x) - \tilde f}{R} + \frac{\rho}{R}\Omega(\bar x); \tag{11}$$

$$f_0(x_{rd}) \le f_0(\bar x) + \rho\,\Omega(\bar x). \tag{12}$$

Из неравенства (10) при $\rho = \rho_0$ вытекают ограниченность последовательности $\{x_{rd}\}$ и существование предельной точки $\tilde x$. Из (11) при $R \to \infty$ получаем $\tilde x \in \bar X$, а из (12) следует оценка $|f_0(\tilde x) - f_0(\bar x)| \le \varepsilon_0$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Можно несколько усилить условия теоремы 2, потребовав ограниченности допустимого множества $\bar X$ задачи (4). Пусть $R \to \infty$, $\rho \to 0$. Тогда можно указать значения $\bar R$ и $\bar\rho$ такие, что $\dfrac{f_0(\bar x) - \tilde f}{R} + \dfrac{\rho}{R}\Omega(\bar x) \le D = \mathrm{const}$ при $R \ge \bar R$, $0 < \rho \le \bar\rho$. Функция $\varphi(x)$ выпуклая, поэтому из ограниченности $\bar X$ будет следовать ограниченность множества $X_D = \{x \mid \varphi(x) \le \bar\varphi + D\}$. Из неравенства (11) вытекает, что $x_{rd} \in X_D$ для $R \ge \bar R$, $\rho \le \bar\rho$. Пусть $\tilde x$ — предельная точка для $\{x_{rd}\}$ при $R \to \infty$, $\rho \to 0$. Тогда в силу (11) и (12) справедливо $\tilde x \in \bar X$ и $f_0(\tilde x) = f_0(\bar x)$.

3. Случай неразрешимости задачи оптимальной коррекции

В утверждениях, сформулированных выше, существенное значение имела разрешимость оптимальной коррекции (4). Для этого требовалось выполнение двух условий: 1) чтобы непусто было множество $\bar{X}$, 2) чтобы имела решение $\bar{x}$ задача (4): $f_0(\bar{x}) \leq f_0(x)$ $(\forall x \in \bar{X})$. Попробуем отказаться от этих условий.

Рассмотрим случай, когда $\bar{\varphi} = \inf\limits_x \varphi(x)$ не достигается. Применим для отыскания $\bar{\varphi}$ некоторый монотонно убывающий итерационный метод для минимизации функций многих переменных: $\varphi(x_k) \searrow \bar{\varphi}$ $(k \to \infty)$. Зафиксируем номер $\bar{k}$ так, чтобы $\varphi(x_{\bar{k}}) - \bar{\varphi} \leq \bar{\delta}$, где $\bar{\delta} > 0$ — заданная точность. В качестве оптимальной коррекции для НЗ ВП (1) положим задачу

$$\min\{f_0(x) \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_{\bar{k}}),\ \Omega(x) \leq d\}, \tag{13}$$

где $\Omega(x)$ — как и прежде, некоторый стабилизатор, $d \geq \Omega(x_{\bar{k}})$.

Задача (13) всегда имеет некоторое решение $\bar{x}_k$. Очевидно, что в случае разрешимости задачи оптимальной коррекции (4) и достаточно больших $\bar{k}$ и d точка $\bar{x}_k$ будет хорошим приближением для решения (4).

Выпишем для задачи (13) функцию Лагранжа

$$L_k(x; \lambda, \mu) = f_0(x) + \lambda\,(\varphi(x) - \varphi(x_{\bar{k}})) + \mu\,(\Omega(x) - d),$$

где $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$. Предположим, что функция $L_k(x; \lambda, \mu)$ имеет в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1_+$ седловую точку $[\bar{x}_k; \bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k]$. Заметим, что это предположение гарантированно выполняется, если считать $d > \bar{d} = \max\{\Omega(x_{\bar{k}}), \Omega(x_{\bar{k}+1})\}$. В этом случае точка $x_{\bar{k}+1}$ будет удовлетворять условию Слейтера для задачи (13), что обеспечивает существование седловой точки.

Из определения седловой точки $[\bar{x}_k; \bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k]$ следует неравенство

$$f_0(\bar{x}_k) \leq f_0(x) + \bar{\lambda}_k\,(\varphi(x) - \varphi(x_{\bar{k}})) + \bar{\mu}_k\,(\Omega(x) - d), \tag{14}$$

справедливое для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $d > \bar{d}$.

Исследуем связь между задачами (8) и (13).

Теорема 3. *Пусть в задаче* (8) $R > \bar{\lambda}_k$, $\rho > \bar{\mu}_k$, $d > \bar{d}$. *Тогда задача* (8) *разрешима в некоторой точке* x_{rd} *и справедливы оценки*:

$$\varphi(x_{rd}) \leq \bar{\varphi} + \bar{\delta}; \tag{15}$$

$$\Omega(x_{rd}) \leq d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\,\bar{\delta}; \tag{16}$$

$$f_0(x_{rd}) \leq f_0(\bar{x}_k) + R\bar{\delta}. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем ограниченность множества $M^k_{rd} = \{x \mid F_d(x, r) \leq F_d(\bar{x}_k, r)\}$ для любых достаточно больших R, ρ и d. Пусть $x' \in M^k_{rd}$. Тогда

$$f_0(x') + R\varphi(x') + \rho\,(\Omega(x') - d)^+ \leq f_0(\bar{x}_k) + R\varphi(\bar{x}_k) + \rho\,(\Omega(\bar{x}_k) - d)^+. \tag{18}$$

Учитывая, что $\Omega(\bar{x}_k) \leq d$, из (18) и (14) получим

$$\rho\,(\Omega(x') - d)^+ \leq f_0(\bar{x}_k) - f_0(x') + R(\varphi(\bar{x}_k) - \varphi(x'))$$

$$\leq \bar{\lambda}_k\,(\varphi(x') - \varphi(x_{\bar{k}})) + \bar{\mu}_k\,(\Omega(x') - d) + R(\varphi(\bar{x}_k) - \varphi(x')).$$

Так как $\varphi(\bar{x}_k) \leq \varphi(x_{\bar{k}}) \leq \bar{\varphi} + \delta$, из последнего неравенства имеем

$$(\rho - \bar{\mu}_k)(\Omega(x') - d)^+ \leq (R - \bar{\lambda}_k)(\varphi(x_{\bar{k}}) - \varphi(x')) \leq (R - \bar{\lambda}_k)\,\bar{\delta}, \tag{19}$$

$$\Omega(x') \le d + \frac{R - \bar\lambda_k}{\rho - \bar\mu_k}\,\bar\delta. \tag{20}$$

В силу (20) справедливо включение

$$M^k_{rd} \subset Q^k\,(r, d, \bar\delta) = \Big\{x \mid \Omega(x) \le d + \frac{R - \bar\lambda_k}{\rho - \bar\mu_k}\,\bar\delta\Big\}$$

для любых $R > \bar\lambda_k$, $\rho > \bar\mu_k$, $d > \bar d$. Из ограниченности множества $Q^k\,(r, d, \bar\delta)$ следует существование точки $x_{rd} = \arg\min\limits_x F_d(x, r)$.

Поскольку $x_{rd} \in M^k_{rd}$, то полагая в рассуждениях выше $x' = x_{rd}$, сразу получаем из (19), (20) оценки (15) и (16). Оценка (17) следует из (18) и (15):

$$f_0(x_{rd}) \le f_0(\bar x_k) + R(\varphi(\bar x_k) - \varphi(x_{rd})) \le f_0(\bar x_k) + R\bar\delta.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Любая предельная точка $\tilde x$ последовательности $\{x_{rd}\}$ при $R > \bar\lambda_k$, $d > \bar d$ и $\rho \to \infty$ допустима в задаче* (13) *и приближает $f_0(\bar x_k)$ — оптимальное значение* (13) *— с точностью $|f_0(\tilde x) - f_0(\bar x_k)| \le R\bar\delta$.*

4. Метод коррекции в условиях приближенного задания функций

Далее предположим, что функция $\varphi(x)$ в задаче (4) есть функция квадратичного штрафа: $\varphi(x) = \|f^+(x)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^m f_i^{+^2}(x)$. В разд. 1 уже отмечалось, что в этом случае задачу (4) можно представить в виде (5): $\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar\xi}\}$, где $\bar\xi = f^+(\bar x)$, $\bar x = \arg\min\limits_x \varphi(x)$, $\|\bar\xi\| = \min\{\|\xi\| \mid X_\xi \ne \varnothing\}$.

Если инфимум в (2) недостижим, то определим последовательность $\{x_k\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \bar\varphi$. Зафиксируем, как и ранее, номер $\bar k$ так, чтобы $\varphi(x_{\bar k}) - \bar\varphi \le \bar\delta$, $\bar\delta > 0$. Положим $\xi_k = f^+(x_{\bar k})$ и рассмотрим аналог задачи (13)

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_k \cap S_d\}, \tag{21}$$

где $X_k = \{x \mid f(x) \le \xi_k\}$, $S_d = \{x \mid \Omega(x) \le d\}$.

Пусть вместо $f_i(x)$ в задаче (1) известны функции $f_i^\varepsilon(x)$, удовлетворяющие неравенствам (6), $i = 0, 1, \ldots, m$. Тогда задача (8) примет вид

$$\min_x F_d^\varepsilon(x, r), \tag{22}$$

где $F_d^\varepsilon(x, r) = f_0^\varepsilon(x) + R\varphi^\varepsilon(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^+$, $\varphi^\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x))^2$, $r = [R, \rho] > 0$, $d > 0$.

Лемма 1. *Пусть в задаче* (1) $f_0(x) \ge \tilde f > -\infty$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$. *Тогда задача* (22) *разрешима для любых $r > 0$, $d > 0$ и $\varepsilon \ge 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество $M_{rd} = \{x \mid F_d(x, r) \le F_d(x^0, r)\}$, где $F_d(x, r)$ — из (8), x^0 — фиксированная точка из $\mathbb{R}^n$. При доказательстве теоремы 1 было показано, что множество M_{rd} ограничено для любых $r > 0$, $d > 0$.

Из неравенств (6) следует $|f_i^{\varepsilon^+}(x) - f_i^+(x)| \le |f_i^\varepsilon(x) - f_i(x)| \le \varepsilon$. Тогда

$$|\varphi^\varepsilon(x) - \varphi(x)| = \Big|\sum_{i=1}^m [(f_i^{\varepsilon^+}(x))^2 - (f_i^+(x))^2]\Big| = \Big|\sum_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x) - f_i^+(x)) \times (f_i^{\varepsilon^+}(x) + f_i^+(x))\Big|$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{m} (f_i^{\varepsilon^+}(x) + f_i^+(x)) \leq \sum_{i=1}^{m} (2\varepsilon f_i^{\varepsilon^+}(x) + \varepsilon^2). \tag{23}$$

Заметим, что в (23) слагаемые в последней сумме могут иметь вид $(2\varepsilon f_i^+(x) + \varepsilon^2)$. Краткости ради в дальнейшем будем применять обозначения $s = [r, d, \varepsilon]$, $r > 0$, $d > 0$, $\varepsilon \geq 0$, $F_s(x) = F_d^\varepsilon(x, r)$. Рассмотрим равенство

$$F_d(x, r) = F_s(x) - f_0^\varepsilon(x) + f_0(x) + R(\varphi(x) - \varphi^\varepsilon(x)).$$

Из (23) вытекает $\sum\limits_{i=1}^{m} (2\varepsilon f_i^{\varepsilon^+}(x) + \varepsilon^2) \leq \sum\limits_{i=1}^{m} (f_i^{\varepsilon^+}(x))^2 + 2m\varepsilon^2 = \varphi^\varepsilon(x) + 2m\varepsilon^2$. Поэтому

$$F_d(x, r) \leq F_s(x) + \varepsilon + R\varphi^\varepsilon(x) + 2Rm\varepsilon^2$$

$$= 2F_s(x) + \varepsilon - f_0^\varepsilon(x) + 2Rm\varepsilon^2 - \rho\,(\Omega(x) - d)^+ \leq 2F_s(x) + 2\varepsilon + 2Rm\varepsilon^2 - \tilde{f}.$$

Обозначим $M_s = \{x \mid F_s(x) \leq F_s(x^0)\}$. Пусть $x' \in M_s$. Тогда $F_d(x', r) \leq 2(F_s(x^0) + Rm\varepsilon^2) - \tilde{f}$, т. е. $M_s \subset M_{rd}(C_1) = \{x \mid F_d(x, r) \leq C_1(x^0, r, d, \varepsilon)\}$, где $C_1(x^0, r, d, \varepsilon) = 2(F_s(x^0) + Rm\varepsilon^2) - \tilde{f}$. В силу ограниченности M_{rd} будет ограничено и множество $M_{rd}(C_1)$, а вместе с ним и M_s. Но $\inf\limits_x F_s(x) = \min\limits_{x \in M_s} F_s(x)$, поэтому существует точка $x_s = \arg\min\limits_x F_s(x)$ для любых $s = [r, d, \varepsilon]$, $r > 0$, $d > 0$, $\varepsilon \geq 0$.

Лемма доказана.

Оценим связь между задачами (21) и (22).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы* 1, $\bar{x}_k$ *— решение задачи* (21) *и* $d \geq \Omega(\bar{x}_k)$. *Справедливы соотношения*:

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 \leq B(\bar{x}_k, \varepsilon, R); \tag{24}$$

$$\Omega(x_s) \leq d + B_1(\bar{x}_k, \varepsilon, R); \tag{25}$$

$$f_0^\varepsilon(x_s) - f_0(\bar{x}_k) \leq R\bar{\delta} + \varepsilon\, B_2(\bar{x}_k, \varepsilon, R), \tag{26}$$

где

$$B(\bar{x}_k, \varepsilon, R) = \frac{f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon}{R} + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + \frac{1}{R^2},$$

$$B_1(\bar{x}_k, \varepsilon, R) = \frac{1}{\rho}\,(R\|\xi_k\|^2 + 2R\varepsilon\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon^2 + f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon),$$

$$B_2(\bar{x}_k, \varepsilon, R) = \varepsilon(4R\|\xi_k\|_1 + 2RmB^{1/2}(\bar{x}_k, \varepsilon, R) + m\varepsilon + 1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения точки x_s вытекает

$$f_0^\varepsilon(x_s) + R\varphi^\varepsilon(x_s) + \rho\,(\Omega(x_s) - d)^+ \leq f_0^\varepsilon(\bar{x}_k) + R\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k), \tag{27}$$

где $\varphi^\varepsilon(x) = \|f^{\varepsilon^+}(x)\|^2$. Учитывая (23), имеем

$$\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) - \varphi(\bar{x}_k) = \|f^{\varepsilon^+}(\bar{x}_k)\|^2 - \|f^+(\bar{x}_k)\|^2 \leq 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2. \tag{28}$$

Поэтому из (27) следует

$$R(\varphi^\varepsilon(x_s) - \|\xi_k\|^2) \leq f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon + 2R\varepsilon\|\xi_k\|_1 + mR\varepsilon^2. \tag{29}$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \bar{\varphi}$, то $\varliminf\limits_{k\to\infty} (\nabla\varphi(x_k), x - x_k) \geq 0$, и, следовательно,

$$(\nabla\varphi(x_k), x - x_k) \geq -\frac{1}{R^2} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ R > 1,\ \forall k). \tag{30}$$

В силу выпуклости функций $f_i(x)$ справедливо

$$(\nabla\varphi(x_k), x - x_k) = 2\sum_{i=1}^{m} f_i^+(x_k)(\nabla f_i(x_k), x - x_k)$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{m} \xi_i^k [f_i(x) - f_i(x_k)] = 2(\xi_k, f(x)) - 2\|\xi_k\|^2,$$

где ξ_i^k — i-я компонента вектора ξ_k $(i = 1, \ldots, m)$. Отсюда с учетом (30) получаем

$$(\xi_k, f(x_k)) - \|\xi_k\|^2 \geq -\frac{1}{2R^2} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{31}$$

Далее оценим

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 = \|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|^2 + \|\xi_k\|^2 - 2(\xi_k, f^{\varepsilon^+}(x_s))$$

$$\leq \|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|^2 + \|\xi_k\|^2 - 2(\xi_k, f^+(x_s)) + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1,$$

что вместе с (31) дает

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 \leq \|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|^2 - \|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \frac{1}{R^2}. \tag{32}$$

Применим в (32) оценку (29). Тогда

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 \leq \frac{f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon}{R} + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + \frac{1}{R^2},$$

т. е. имеет место соотношение (24).

Запишем неравенство (27) следующим образом:

$$\rho\,(\Omega(x_s) - d)^+ \leq R(\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) - \varphi^\varepsilon(x_s)) + f_0^\varepsilon(\bar{x}_k) - f_0^\varepsilon(x_s).$$

Отсюда и из (28) следует

$$\rho\,(\Omega(x_s) - d)^+ \leq R(\|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2) + f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon.$$

Поэтому

$$\Omega(x_s) \leq d + \frac{R}{\rho}(\|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2) + \frac{f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon}{\rho},$$

т. е. выполняется оценка (25).

Далее из (27) и (28) имеем

$$f_0^\varepsilon(x_s) - f_0^\varepsilon(\bar{x}_k) \leq R(\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) - \varphi^\varepsilon(x_s)) \leq R(\varphi(\bar{x}_k) - \varphi^\varepsilon(x_s)) + 2R\varepsilon\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon^2. \tag{33}$$

Так как $(f_i^{\varepsilon^+}(x_s) + \varepsilon)^2 \geq f_i^{+^2}(x_s)$, то $\|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|^2 + 2\varepsilon\|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|_1 + m\varepsilon^2 \geq \|f^+(x_s)\|^2 = \varphi(x_s) \geq \bar{\varphi}$. Поэтому из (33) с учетом (24) получаем

$$f_0^\varepsilon(x_s) - f_0(\bar{x}_k) \leq R(\varphi(\bar{x}_k) - \bar{\varphi}) + 2\varepsilon R\|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|_1 + Rm\varepsilon^2 + 2\varepsilon R\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon^2 + \varepsilon$$

$$\leq R\bar{\delta} + 2\varepsilon R\sum_{i=1}^{m}(\xi_i^k + \sqrt{B(\bar{x}_k, \varepsilon, R)}) + 2\varepsilon R\|\xi_k\|_1 + 2Rm\varepsilon^2 + \varepsilon$$

$$= R\bar{\delta} + \varepsilon(4R\|\xi_k\|_1 + 2Rm\sqrt{B(\bar{x}_k, \varepsilon, R)} + 2Rm\varepsilon + 1).$$

Этим доказана оценка (26).

Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть функция Лагранжа* $L_k(x;\lambda,\mu) = f_0(x) + \lambda(\varphi(x) - \varphi(x_{\bar{k}})) + \mu(\Omega(x) - d)$ *для задачи* (21) *имеет седловую точку* $[\bar{x}_k; \bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+$. *Тогда задача* (22) *разрешима для любых* $R > \bar{\lambda}_k$, $\rho > \bar{\mu}_k$, $d > 0$ *и* $\varepsilon \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (23)

$$|\varphi^\varepsilon(x) - \varphi(x)| \leq \sum_{i=1}^m (2\varepsilon f_i^{\varepsilon^+}(x) + \varepsilon^2) \leq \sum_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x))^2 + 2m\varepsilon^2 = \varphi^\varepsilon(x) + 2m\varepsilon^2 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Поэтому

$$F_d(x,r) = f_0(x) + R\varphi(x) + \rho(\Omega(x) - d)^+ \leq f_0(x) + R(2\varphi^\varepsilon(x) + 2m\varepsilon^2) + \rho(\Omega(x) - d)^+$$

$$= 2F_s(x) + f_0(x) - 2f_0^\varepsilon(x) + 2Rm\varepsilon^2 - \rho(\Omega(x) - d)^+ \leq 2F_s(x) - f_0(x) + 2\varepsilon + 2Rm\varepsilon^2.$$

Оценим слагаемое $-f_0(x)$ с помощью неравенства (14). Получим

$$F_d(x,r) = 2F_s(x) - f_0(\bar{x}_k) + \bar{\lambda}_k(\varphi(x) - \varphi(x_{\bar{k}})) + \bar{\mu}_k(\Omega(x) - d) + 2\varepsilon + 2Rm\varepsilon^2$$

$$\leq 2F_s(x) - f_0(\bar{x}_k) + \bar{\lambda}_k\varphi(x) + \bar{\mu}_k(\Omega(x) - d) + 2\varepsilon + 2Rm\varepsilon^2.$$

Положим $\tilde{r} = [R - \bar{\lambda}_k, \rho - \bar{\mu}_k]$, $\tilde{r} > 0$. Тогда из последнего неравенства следует

$$F_d(x,\tilde{r}) = f_0(x) + (R - \bar{\lambda}_k)\varphi(x) + (\rho - \bar{\mu}_k)(\Omega(x) - d)^+ \leq 2F_s(x) - f_0(\bar{x}_k) + 2\varepsilon(1 + Rm\varepsilon).$$

Обозначим $M_s(x^0) = \{x \mid F_s(x) \leq F_s(x^0)\}$, где x^0 — произвольная фиксированная точка из $\mathbb{R}^n$. Возьмем $x' \in M_s(x^0)$. Тогда

$$F_d(x',\tilde{r}) \leq 2F_s(x^0) - f_0(\bar{x}_k) + 2\varepsilon(1 + Rm\varepsilon).$$

В теореме 3 была доказана ограниченность множества $M_{rd} = \{x \mid F_d(x,r) \leq F_d(x^0,r)\}$ для $R > \bar{\lambda}_k$, $\rho > \bar{\mu}_k$, $d \geq \Omega(x_{\bar{k}})$. Поэтому будет ограниченным и множество $M_{\tilde{r}d} = \{x \mid F_d(x,\tilde{r}) \leq C_2\}$ для $\tilde{r} > 0$, $d \geq \Omega(x_{\bar{k}})$, где $C_2 = C_2(x^0,r,d,\varepsilon) = 2F_s(x^0) - f_0(\bar{x}_k) + 2\varepsilon(1 + Rm\varepsilon)$. Так как $M_s(x^0) \subset M_{\tilde{r}d}$, то множество $M_s(x^0)$ ограничено, и, следовательно, существует точка $x_s = \arg\min\limits_x F_s(x) = \arg\min\{F_s(x) \mid x \in M_s(x^0)\}$.

Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия леммы* 2, $\bar{x}_k$ *и* x_s — *решения задач* (21) *и* (22) *соответственно,* $d \geq \Omega(x_{\bar{k}})$, $R > \bar{\lambda}_k$, $\rho > \bar{\mu}_k$. *Справедливы соотношения*

$$\|f^+(x_s)\| \leq D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k), \tag{34}$$

где

$$D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k) = \Big(\|f^+(\bar{x}_k)\|^2 + \frac{2\varepsilon}{R - \bar{\lambda}_k}(1 + R\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2R^2m}{(R - \bar{\lambda}_k)^2}\Big)^{1/2} + \frac{\varepsilon R\sqrt{m}}{R - \bar{\lambda}_k};$$

$$\Omega(x_s) \leq d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\bar{\delta} + \frac{2\varepsilon}{\rho - \bar{\mu}_k}(1 + R\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + R\sqrt{m}D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k) + Rm\varepsilon); \tag{35}$$

$$f_0(x_s) \leq f_0(\bar{x}_k) + R\bar{\delta} + 2\varepsilon R(\|\xi_k\|_1 + \sqrt{m}D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k) + m\varepsilon) + 2\varepsilon. \tag{36}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения точки x_s и условия $d \geq \Omega(\bar{x}_{\bar{k}})$ имеем

$$f_0^\varepsilon(x_s) + R\varphi^\varepsilon(x_s) + \rho(\Omega(x_s) - d)^+ \leq f_0^\varepsilon(\bar{x}_k) + R\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k).$$

Тогда

$$R(\varphi^\varepsilon(x_s) - \varphi^\varepsilon(\bar{x}_k)) + \rho(\Omega(x_s) - d)^+ \leq f_0(\bar{x}_k) - f_0(x_s) + 2\varepsilon. \tag{37}$$

Из оценок (23) следует

$$\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) < \varphi(\bar{x}_k) + 2\varepsilon\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + m\varepsilon^2, \qquad \varphi^\varepsilon(x_s) > \varphi(x_s) - 2\varepsilon\|f^+(x_s)\|_1 - m\varepsilon^2,$$

т. е.

$$\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) - \varphi^\varepsilon(x_s) < \varphi(\bar{x}_k) - \varphi(x_s) + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + 2\varepsilon\|f^+(x_s)\|_1 + 2m\varepsilon^2. \tag{38}$$

Поэтому с учетом неравенства (14) из (37) получаем

$$R(\varphi^\varepsilon(x_s) - \varphi^\varepsilon(\bar{x}_k)) + (\rho - \bar{\mu}_k)(\Omega(x_s) - d)^+ \leq \bar{\lambda}_k(\varphi(x_s) - \varphi(\bar{x}_k)) + 2\varepsilon, \tag{39}$$

и далее из (38) —

$$(R - \bar{\lambda}_k)(\varphi(x_s) - \varphi(\bar{x}_k)) \leq 2\varepsilon + R(2\varepsilon\|f^+(x_s)\|_1 + 2\varepsilon\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + 2m\varepsilon^2),$$

т. е.

$$(R - \bar{\lambda}_k)(\|f^+(x_s)\|^2 - \|f^+(\bar{x}_k)\|^2) \leq 2\varepsilon(1 + R\sqrt{m}\|f^+(x_s)\| + R\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon).$$

Отсюда

$$\Big(\sqrt{R - \bar{\lambda}_k}\,\|f^+(x_s)\| - \frac{\varepsilon R\sqrt{m}}{\sqrt{R - \bar{\lambda}_k}}\Big)^2 \leq (R - \bar{\lambda}_k)\|f^+(\bar{x}_k)\|^2 + 2\varepsilon(1 + R\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon),$$

что после извлечения квадратного корня и деления на $\sqrt{R - \bar{\lambda}_k}$ приводит к оценке (34).

Далее оценим величину $(\Omega(x_s) - d)^+$. Из (39) и (38) имеем

$$(\rho - \bar{\mu}_k)(\Omega(x_s) - d)^+ \leq \bar{\lambda}_k(\varphi(x_s) - \varphi(\bar{x}_k)) - R(\varphi^\varepsilon(x_s) - \varphi^\varepsilon(\bar{x}_k)) + 2\varepsilon$$
$$\leq (R - \bar{\lambda}_k)(\varphi(\bar{x}_k) - \varphi(x_s)) + 2\varepsilon + 2\varepsilon R(\|f^+(x_s)\|_1 + \|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + m\varepsilon).$$

Так как $\varphi(\bar{x}_k) \leq \varphi(x_{\bar{k}}) \leq \bar{\varphi} + \delta$, то отсюда при $\rho > \bar{\mu}_k$ получаем

$$\Omega(x_s) \leq d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\delta + \frac{2\varepsilon}{\rho - \bar{\mu}_k}(1 + R\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + R\sqrt{m}\|f^+(x_s)\| + Rm\varepsilon)$$
$$\leq d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\delta + \frac{2\varepsilon}{\rho - \bar{\mu}_k}(1 + R\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + R\sqrt{m}D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k) + Rm\varepsilon),$$

т. е. справедлива оценка (35).

Из неравенства (37) вытекает $f_0(x_s) - f_0(\bar{x}_k) \leq R(\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) - \varphi^\varepsilon(x_s)) + 2\varepsilon$. Отсюда с учетом (38) и (34) получаем оценку (36)

$$f_0(x_s) - f_0(\bar{x}_k) \leq R(\varphi(\bar{x}_k) - \varphi(x_s)) + 2\varepsilon R(\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + \|f^+(x_s)\|_1 + m\varepsilon) + 2\varepsilon$$
$$\leq R\bar{\delta} + 2\varepsilon R(\|\xi_k)\|_1 + \sqrt{m}\|f^+(x_s)\| + m\varepsilon) + 2\varepsilon$$
$$\leq R\bar{\delta} + 2\varepsilon R(\|\xi_k)\|_1 + \sqrt{m}D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k) + m\varepsilon) + 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть в задаче* (22) $R > \bar{\lambda}_k$, $\rho > \bar{\mu}_k$, $d \geq \Omega(\bar{x}_k)$, $\varepsilon \to 0$. *Тогда любая предельная точка* $\tilde{x}$ *последовательности* $\{x_s\}$ *удовлетворяет соотношениям*

$$f^+(\tilde{x}) \leq \xi_k, \qquad \Omega(\tilde{x}) \leq d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\bar{\delta}, \qquad f_0(\tilde{x}) \leq f_0(\bar{x}_k) + R\bar{\delta}.$$

Заключение

В работе продолжены исследования автора относительно возможности применения классических методов регуляризации некорректных экстремальных задач с целью построения методов оптимальной коррекции несобственных задач линейного и выпуклого программирования. Ранее предлагались подходы к коррекции НЗ ВП на основе стандартного метода невязки (см. [8]) и метода стабилизирующих функций Тихонова (см. [9]). В настоящей работе рассматриваются методы коррекции НЗ ВП, использующие идеологию метода квазирешений. Исходная задача ВП с возможно несовместной системой ограничений заменяется аппроксимирующей задачей, которая получается в результате минимизации некоторой функции штрафа как сложной функции от невязок ограничений. Такой подход обобщает естественные случаи коррекции вектора правых частей ограничений относительно минимума той или иной векторной нормы. Построенная задача подвергается регуляризации по методу квазирешений, что позволяет снять многие вопросы, связанные с существованием решений возникающих задач, в частности, в условиях приближенного характера информации о функциях исходной проблемы. Помимо общей конструкции функции внешнего штрафа особое внимание уделяется классическому варианту — квадратичной штрафной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
3. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации: кн. 1, 2. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
4. **Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
5. **Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O.** Iterative regularization methods in nonlinear ill-posed problems. Berlin; N Y: W. de Gruyter, 2008. 194 p.
6. **Golub G. N., Hansen P. C., O'Leary D. P.** Tikhonov regularization and total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1999. Vol. 21, no. 1. P. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432.
7. **Renaut R. A., Guo N.** Efficient algorithms for solution of regularized total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. Vol. 26, no. 2. P. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889.
8. **Skarin V. D.** On the parameter control of the residual method for the correction of improper problems of convex programming // Discrete Optimization and Operations Research: 9 th Intern. Conf. (DOOR 2016): Proc. Vladivostok, 2016. P. 441–451. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 9869). doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_35.
9. **Skarin V. D.** Correction of improper convex programming problems using regularization // Optimization and Applications. 8 th Intern. Conf. OPTIMA-2017. (Petrovac, Montenegro, Sept. 2017): Book abstr. Moscow, 2017. P. 132.

Поступила 15.07.2019
После доработки 3.10.2019
Принята к публикации 7.10.2019

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук, зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: skavd@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Eremin I.I., Mazurov V.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper Problems of Linear and Convex Programming]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 336 p.

2. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for the solution of ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 288 p.
3. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]: vol. 1 2. Moscow: MTsNMO Publ., 2011, 1056 p. ISBN: 978-5-94057-706-5 .
4. Bakushinsky A., Goncharsky A. *Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. Dordrecht: Springer, 1994. ISBN: 978-94-010-4447-9 . Original Russian text published in Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V. *Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach*. Moscow: Nauka Publ., 1989, 128 p.
5. Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. *Iterative regularization methods in nonlinear ill-posed problems*. Berlin; N Y: de Gruyter, 2008, 194 p. ISBN: 978-3-11-020827-6 .
6. Golub G.N., Hansen P.C., O'Leary D.P. Tikhonov regularization and total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1999, vol. 21, no. 1, pp. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432 .
7. Renaut R.A., Guo N. Efficient algorithms for solution of regularized total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2005, vol. 26, no. 2, pp. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889 .
8. Skarin V.D. On the parameter control of the residual method for the correction of improper problems of convex programming. In: Kochetov Y., Khachay M., Beresnev V., Nurminski E., Pardalos P. (eds.), *Discrete Optimization and Operations Research* (DOOR 2016), *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 9869, 2016, pp. 441–451. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_35 .
9. Skarin V.D. Correction of improper convex programming problems using regularization methods. In: *Book of abstr. 8 th Intern. Conf. "Optimization and Applications"*: OPTIMA-2017 (Petrovac, Montenegro, Oct. 2017), Moscow, 2017, p. 134.

Received July 15, 2019
Revised October 3, 2019
Accepted October 7, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-07-01243).

Vladimir Dmitrievich Skarin, Dr. Phys.-Math. Sci, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: skavd@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. D. Skarin. On the application of the quasisolution method to the correction of improper convex programs, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 189–200 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ С РЕГУЛЯРНЫМ АВТОМОРФИЗМОМ ПОРЯДКА ЧЕТЫРЕ[1]

А. И. Созутов

Изучаются периодические группы вида $G = F \leftthreetimes \langle a \rangle$ с условиями $C_F(a) = 1$ и $|a| = 4$. Отображение $a : F \to F$ по правилу $t \to t^a = a^{-1}ta$ есть автоморфизм группы F без неподвижных точек (регулярный автоморфизм). Конечная группа F разрешима, и ее коммутант нильпотентен (Д. Горенстейн и И. Херстейн, 1961). Локально конечная группа F разрешима, и ее второй коммутант содержится в центре $Z(F)$ группы F(Л. Г. Ковач, 1961). Неизвестно, всегда ли локально конечна периодическая группа F (вопрос 12.100 П. В. Шумяцкого из "Коуровской тетради"). В работе доказаны следующие свойства групп. Для $\pi = \pi(F) \setminus \pi(C_F(a^2))$ группа F π'-замкнута, подгруппа $O_{\pi'}(F)$ абелева и содержится в $Z([a^2, F])$ (теорема 1). Группа F, не имеющая бесконечных элементарных абелевых a^2-допустимых подгрупп, локально конечна (теорема 2). В не локально конечной группе F есть не локально конечная a-допустимая подгруппа, факторизуемая двумя локально конечными a-допустимыми подгруппами (теорема 3). Для любого натурального числа n, кратного нечетному простому числу, указаны примеры не локально конечных периодических групп с регулярным автоморфизмом порядка n.

Ключевые слова: периодические группы, регулярный автоморфизм (автоморфизм без неподвижных точек), разрешимость, локальная конечность, нильпотентность.

A. I. Sozutov. On periodic groups with a regular automorphism of order 4.

We study periodic groups of the form $G = F \leftthreetimes \langle a \rangle$ with the conditions $C_F(a) = 1$ and $|a| = 4$. In this case, a finite group F is solvable and its commutator subgroup is nilpotent (Gorenstein and Herstein, 1961), and a locally finite group F is solvable and its second commutator subgroup is contained in the center $Z(F)$ (Kovach, 1961). A locally finite group F is solvable and its second commutator subgroup is contained in the center $Z(F)$ (Kovach, 1961). It is unknown whether a periodic group F is always locally finite (Shumyatskii's Question 12.100 from the Kourovka Notebook). We establish the following properties of groups. For $\pi = \pi(F) \setminus \pi(C_F(a^2))$, the group F is π-closed and the subgroup $O_\pi(F)$ is abelian and is contained in $Z([a^2, F])$ (Theorem 1). A group F without infinite elementary abelian a^2-admissible subgroups is locally finite (Theorem 2). In a nonlocally finite group F, there is a nonlocally finite a-admissible subgroup factorizable by two locally finite a-admissible subgroups (Theorem 3). For any positive integer n divisible by an odd prime, we give examples of nonlocally finite periodic groups with a regular automorphism of order n.

Keywords: periodic group, regular automorphism (fixed-point-free automorphism), solvability, local finiteness, nilpotency.

MSC: 20F50

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-201-209

Введение

В работе изучаются свойства периодических групп, допускающих регулярный автоморфизм (автоморфизм без неподвижных точек [1]) порядка 4. В 1961 г. Д. Горенстейн и И. Херстейн доказали [2], что конечная группа с регулярным автоморфизмом порядка 4 разрешима, а ее коммутант нильпотентен. В том же году Л. Г. Ковач [3] установил, что второй коммутант локально конечной группы, допускающей регулярный автоморфизм порядка 4, содержится в ее центре. Давно известно, что периодическая группа F с регулярным автоморфизмом порядка 2 абелева [4–6], а с регулярным расщепляющим автоморфизмом порядка 3 нильпотентна [7–9]. Но если порядок регулярного автоморфизма не является степенью числа 2, то F не обязана быть локально конечной (см. предложение 6 и пример 1) даже в случаях порядка 3 и 6.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №19-01-00566 А.

В 1992 г. П. В. Шумяцкий записал в “Коуровскую тетрадь” [10] под номером 12.100 такой вопрос: *всякая ли периодическая группа с регулярным автоморфизмом порядка 4 является локально конечной?* Изучаемые в работе группы удовлетворяют условиям этого вопроса.

Итак, пусть F — бесконечная периодическая группа, допускающая регулярный автоморфизм a порядка 4, $C = C_F(a^2)$, $\pi = \pi(C)$ — множество простых делителей порядков элементов из C и $\pi' = \pi(F) \setminus \pi$. Доказаны следующие свойства группы F.

Теорема 1. *Группа F π'-замкнута, и подгруппа $O_{\pi'}(F)$ содержится в $Z([a^2, F])$.*

Теорема 2. *Группа F с конечными a^2-допустимыми элементарными абелевыми подгруппами локально конечна.*

Из теорем 1, 2 и результатов работ [2; 3] (см. предложения 2, 3 ниже) вытекает

Следствие. *Группа F без бесконечных a^2-допустимых элементарных абелевых p-подгрупп для всех $p \in \pi(C)$ локально конечна, и ее второй коммутант содержится в $Z(F)$.*

Теорема 3. *В не локально конечной группе F есть не локально конечная a-допустимая подгруппа, факторизуемая двумя локально конечными a-допустимыми подгруппами.*

1. Определения, используемые результаты, примеры

Пусть F — группа и a — автоморфизм группы F. Образ элемента $f \in F$ под действием автоморфизма a обозначаем через f^a. Автоморфизм a называется *регулярным*, или *автоморфизмом без неподвижных точек*, если $f^a \neq f$ для любого $f \in F \setminus \{1\} = F^\#$; автоморфизм a называется *расщепляющим*, если $ff^a \ldots f^{a^{|a|-1}} = 1$. Инволюцию i группы G называем *изолированной в* G, если для любого элемента $g \in G$ порядок произведения ii^g нечетен. Собственная подгруппа H группы G называется *сильно вложенной в* G, если в H есть инволюция и для каждого элемента $g \in G \setminus H$ в подгруппе $H \cap H^g$ инволюций нет. Множество простых делителей порядков элементов непустого множества $X \subseteq G^\#$ обозначаем через $\pi(X)$, а в случае $X = \{b\}$ — через $\pi(b)$. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Элемент b группы F называется π-*элементом*, когда $\pi(b) \subseteq \pi$. Следуя Б. Фишеру [11; 12], группу F называем π-*замкнутой*, если произведение любых двух π-элементов в F есть π-элемент, т. е. максимальная нормальная в F π-подгруппа $O_\pi(F)$ состоит из всех π-элементов группы F. На протяжении всей работы p и q — простые нечетные числа, m и n — натуральные числа. Далее, $y^X = \{x^{-1}yx \mid x \in X\}$, $[y, x] = y^{-1}x^{-1}yx$ — коммутатор элементов y и x, $[y, X]$ — подгруппа, порожденная всеми коммутаторами $[y, x]$. Инволюция i бесконечной группы G называется *почти регулярной*, если ее централизатор $C_G(i)$ конечен [13]. Остальные определения и обозначения можно найти в [1; 14].

Предложение 1 [4–6; 15, лемма 2.20]. *Периодическая группа F, допускающая регулярный автоморфизм i порядка 2, абелева, и $f^i = f^{-1}$ для любого $f \in F$.*

Д. Горенстейн и И. Херстейн в [2] доказали фундаментальный для наших исследований результат.

Предложение 2 [2, теоремы 1 и 2]. *Конечная группа F, допускающая автоморфизм порядка 4, оставляющий на месте только единичный элемент из F, разрешима, а ее коммутант F' нильпотентен.*

Из предложения 2 и работы Л. Г. Ковача (см. [3, введение]) вытекает следующий результат:

Предложение 3. *Если локально конечная группа допускает регулярный автоморфизм порядка четыре, то ее второй коммутант содержится в ее центре.*

Предложение 4 (теорема Шункова, [13]). *Периодическая группа с почти регулярной инволюцией локально конечна, почти разрешима и обладает 2-полной частью.*

Предложение 5 [16; 15, теорема 2.14]. *Если в периодической группе G есть конечная силовская 2-подгруппа, то все силовские 2-подгруппы в G конечны и сопряжены.*

Покажем существенность условия $|a| = 4$ в вопросе 12.100 из [10] и теоремах 1, 2.

Предложение 6. *Периодическая группа F с регулярным автоморфизмом a порядка $|a| \neq 2^k$ и циклическими абелевыми подгруппами не обязана быть локально конечной.*

В качестве доказательства данного предложения укажем в голоморфах групп Новикова — Адяна $B = B(2, n) = \langle b, d\rangle$ [17] элементы a соответствующих порядков, действующие сопряжением на подгруппе $F = \langle d^B\rangle$ регулярно (без неподвижных точек).

П р и м е р 1. Если $|a| = m$ — нечетное число, то выберем $n = mk \geq 665$ и $a \in \langle b\rangle$. В силу известных свойств групп $B(2, n)$ [12] отображение $f \to f^a = a^{-1}fa$ является регулярным автоморфизмом группы F. Отметим также, что при $m = n$ данный автоморфизм группы F является расщепляющим, а при $m = 3$ не является расщепляющим.

Если $|a| = 2^k m$, где m — нечетное число и $m > 1$, то выберем $n = mp$, где p — простое число вида $1 + r2^k$. Элемент a ищем в виде $a = a_1a_2$, где a_1 — элемент порядка m из подгруппы $\langle b\rangle$, а элемент a_2 — автоморфизм группы $B(2, n)$, централизующий подгруппу $\langle b\rangle$ и действующий на подгруппе $\langle d\rangle$ как автоморфизм порядка 2^k. Ввиду кратности $\varphi(n)$ числу 2^k (φ — функция Эйлера) и свободы группы $B(2, n)$ в многообразии групп периода n [18] такой автоморфизм a_2 существует. Элемент $a = a_1a_2$ из $\mathrm{Hol}(B(2, n))$ имеет нужный порядок $2^k m$ и содержится в нормализаторе подгруппы F. Поскольку все инволюции в группе $G = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ сопряжены и элемент a_1 действует на $C_F(a_2^{2^{k-1}})$ регулярно, то и a действует на F без неподвижных точек. Отметим здесь, что при $m = 3$ автоморфизм a группы F имеет порядок 6 и не является расщепляющим.

Заметим, что отображение $t : a \to b^{-1},\ b \to a$ продолжается до автоморфизма порядка 4 группы $B(2, n)$, который ввиду теоремы 2 и предложения 4 не является регулярным. Приведем различные простейшие примеры разрешимых ступени 2 групп F.

П р и м е р 2. Пусть C и Q — абелевы группы без инволюций и кручения, $R = C \leftthreetimes \langle a\rangle$, где $|a| = 4$ и $c^a = c^{-1}$ для любого $c \in C$, и $X = Q \wr R = V \leftthreetimes R$ — прямое сплетение групп Q и R с базой сплетения V. Пусть собственная нормальная в X подгруппа N содержит $C_V(a^2)$, $G = X/C_V(a^2) = F \leftthreetimes \langle\overline{a}\rangle$, где $F = VC/N$ и $\overline{a} = aN$. Тогда элемент $\overline{a}$ имеет порядок 4 и действует сопряжением на F регулярно. Если C и Q — p-группы и C бесконечна, то группа F разрешима, локально нильпотентна, но не нильпотентна. Если C — квазициклическая p-группа, S — ее подгруппа порядка p, Q — p'-группа и $N = C_V(S)C_V(a^2)$, то F — группа Фробениуса с абелевым ядром V/N и дополнением CN/N; она метаабелева, но не локально нильпотентна.

Рассмотрим пример 3-ступенной разрешимой группы F минимального порядка.

П р и м е р 3. Пусть $P = \langle b, d\rangle$ — неабелева группа периода 7 и порядка 7^3 — свободная группа ранга 2 многообразия двуступенно нильпотентных групп периода 7 [18]. В силу относительной свободы группы P отображения $a : b \to d^{-1},\ d \to b$ и $c : b \to b^2,\ d \to d^4$ продолжаются до автоморфизмов a и c группы P, при этом $|a| = 4$, $|c| = 3$ и $D = \langle a, c\rangle = \langle c\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle$, $c^a = c^{-1}$. Подгруппа $F = P \leftthreetimes \langle c\rangle$ голоморфа $\mathrm{Hol}\,(P)$ 3-ступенно разрешима и $a : f \to f^a$ — регулярный автоморфизм группы F.

2. Предварительные леммы

Пусть F — периодическая группа, допускающая регулярный автоморфизм a порядка 4. В силу регулярности автоморфизмы a и a^2 группы F внешние, образуем группу $G = F \leftthreetimes \langle a\rangle$.

Положим $A = \langle a\rangle$, $i = a^2$, $C = C_F(i)$, $R = C_G(i)$, $\mathfrak{N} = \{b \in F \mid b^i = b^{-1}\}$ и через J обозначим множество инволюций группы G.

Утверждения лемм данного раздела доказывались и передоказывались многократно при различных дополнительных условиях. Автор считает безнадежным и нецелесообразным поиск первоисточников таких утверждений и ссылок на них с неизбежными пояснениями. Так, например, утверждения лемм 2, 3 в классе (локально) конечных групп верны при любом порядке автоморфизма a, а в классе периодических групп для выделенных в примере 1 порядков $|a| = 3$ и $|a| = 6$ эти утверждения, очевидно, неверны. Поэтому доказательства лемм 1–10 в данном разделе приведены полностью и в них не используются результаты из [2–9], так как они были доказаны при более сильных предположениях.

Лемма 1. *Подгруппа C абелева, $C = \{c \in F \,|\, c^a = c^{-1}\}$, $R = C \leftthreetimes A$, $R \cap J = \{i\}$, группа F не содержит инволюций, инволюция i изолирована в G, $J = i^F \subseteq iF$ и подгруппа $A = \langle a\rangle$ является силовской 2-подгруппой группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию отображение $\overline{a} : C \to C$ по правилу $c \to c^a$ является регулярным автоморфизмом порядка 2 группы C. По предложению 1 $c^a = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$ и C — абелева группа без инволюций. Отсюда следуют равенства $C = \{c \in F \mid c^a = c^{-1}\}$, $R = C \leftthreetimes A$ и $J \cap R = \{i\}$. Из свойств конечных групп диэдра выводим, что F не содержит инволюций, A — силовская 2-подгруппа группы G, $J = i^F \subseteq iF$ и порядок элемента ik нечетен для любой инволюции $k \in J$, т. е. инволюция i изолирована в G.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого элемента $f \in F$ элемент af сопряжен в подгруппе $\langle a, f\rangle$ с элементом a, $a^G = aF$, автоморфизм $f \to f^a$ является расщепляющим автоморфизмом группы F и отображение $t \to [a, t]$ биективно на подгруппах F и $F \cap \langle a, f\rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in F$. Из леммы 1 и предложения 5 следует, что силовская 2-подгруппа S из циклической подгруппы $\langle af\rangle$ сопряжена в G с подгруппой A. Поскольку $C_F(a) = 1$, то $C_F(af) = 1$, $(af)^4 = 1$, $\langle af\rangle$ — силовская 2-подгруппа в G и $a^G = aF$. В частности, автоморфизм $f \to f^a$ является расщепляющим, поскольку равенство $(fa^{-1})^4 = 1$ равносильно равенству $ff^a \dots f^{a^3} = 1$. По предложению 5 подгруппы A и $\langle af\rangle$ сопряжены в $\langle a, f\rangle$. Следовательно, $af = a^t$ для подходящего элемента $t \in F \cap \langle a, f\rangle$, $f = [a, t]$ и отображение $t \to [a, t]$ биективно.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любой нормальной в G собственной в F подгруппы T элемент $\overline{a} = aT$ действует на фактор-группе $\overline{F} = F/T$ без неподвижных точек. Если $F \neq TC$, то $\overline{a}$ индуцирует на $\overline{F}$ регулярный расщепляющий автоморфизм порядка 4.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f \in F$ и $(aT)^f = aT$, то для некоторого элемента $t \in T$ имеем $a^f = at$, и в силу леммы 2 $at = a^x$ для подходящего элемента $x \in T$. Отсюда $fx^{-1} \in C_F(a) = 1$ и $f = x \in T$. Это доказывает первое утверждение леммы. Если $x^{-1}ixT = iT$, то ввиду лемм 1 и 2 $i^x = i^t$ для подходящего $t \in T$, $xt^{-1} = c \in C$ и $xT = cT \in CT/T$, что доказывает второе утверждение леммы.

Лемма доказана.

Лемма 4. (1) *Имеют место включение $C \leq N_F(\mathfrak{N})$, равенство $\mathfrak{N} = iJ$ и разложения $G = RJ = R\mathfrak{N}$ и $F = C\mathfrak{N}$. $|Rx \cap J| = |Cy \cap \mathfrak{N}| = 1$ для любых элементов $x \in G$ и $y \in F$.*

(2) *Если $b, d, bd \in \mathfrak{N}$ или $b, d, b^d \in \mathfrak{N}$, то $bd = db$, так что для любого элемента $b \in \mathfrak{N}^{\#}$ выполняются равенства $b^{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{N} = \{b\}$, $b^F \cap \mathfrak{N} = b^C$.*

(3) *Если B — подгруппа в G и $B \subseteq \mathfrak{N}$, то B абелева и $N_F(B) = (C_G(B) \cap \mathfrak{N}) \leftthreetimes N_C(B)$.*

Доказательство. Равенства $iJ = \mathfrak{N}$ и $J = i\mathfrak{N}$ и включения $C \leq R \leq N_F(\mathfrak{N})$ вытекают из определений множеств J и $\mathfrak{N}$ и подгрупп C и R.

По лемме 1 $R \cap J = \{i\}$ и инволюция i изолирована в G, значит, для любого элемента $g \in G \setminus R$ инволюции i и i^g сопряжены в группе диэдра $D = \langle i, i^g\rangle$ при помощи инволюции t из $D: i = i^{gt}$. Отсюда $Rg = Rt$, $G = RJ = RJi = R\mathfrak{N}$ и $F = C\mathfrak{N}$. Если $j, k \in J$ и $Rj = Rk$, то $c = jk \in C$ и $c^{ik} = c^{-1}$, что невозможно ввиду нечетности $|jk|$.

Далее, из $b, d, bd \in \mathfrak{N}$ имеем $d^{-1}b^{-1} = (bd)^{-1} = (bd)^i = b^id^i = b^{-1}d^{-1}$ и $bd = db$. Аналогично, из $b, d, b^d \in \mathfrak{N}$ получаем $b^{-1}d^{-1}b = (b^{-1}db)^i = bd^{-1}b^{-1}$, $b^2d^{-1} = d^{-1}b^2$, и поскольку $\langle b^2\rangle = \langle b\rangle$ по лемме 1, то $bd = db$. Отсюда $b^{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{N} = \{b\}$, и ввиду разложения $F = \mathfrak{N}C$ имеем $b^F \cap \mathfrak{N} = b^C$. Наконец, из доказанного выше следует справедливость п. (3) леммы.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Подгруппа $\langle\mathfrak{N}\rangle = [a^2, \mathfrak{N}]$ нормальна в G, $G = [a^2, \mathfrak{N}]C$, $F' \leq [a^2, \mathfrak{N}]$ и $G' = F$.*

Доказательство. Очевидно, $G' \leq F$, в силу леммы 1 имеем $[a, C] = C$ и $[a^2, \mathfrak{N}] = \langle\mathfrak{N}\rangle$, по лемме 4 справедливо равенство $F = C\mathfrak{N}$, и, значит, $G' = F$.

Пусть f_1, f_2 — произвольные элементы из F. По лемме 4 имеем $f_1 = b_1c_1$, $f_2 = b_2c_2$, где $c_1, c_2 \in C$, $b_1, b_2 \in \mathfrak{N}$. Применяя формулы (10.2.1.2), (10.2.1.3) из [19, с. 171] и равенство $[c_1, c_2] = 1$ (см. лемму 1), получаем

$$[f_1, f_2] = [b_1c_1, f_2] = [b_1, f_2]^{c_1}[c_1, f_2], \quad [b_1, f_2] = [b_1, c_2b_2] = [b_1, c_2][b_1, b_2]^{c_2},$$

$$[c_1, f_2] = [c_1, c_2b_2] = [c_1, b_2][c_1, c_2]^{b_2} = [c_1, b_2] \text{ и } [f_1, f_2] = [b_1, c_2]^{c_1}[b_1, b_2]^{c_2c_1}[c_1, b_2].$$

Поскольку $C \leq N_G(\mathfrak{N})$, то $C \leq N_G(\langle\mathfrak{N}\rangle)$ и коммутаторы $[b_1, c_2]^{c_1}$, $[b_1, b_2]^{c_2c_1}$, $[c_1, b_2]$ содержатся в $\langle\mathfrak{N}\rangle$. Следовательно, $[f_1, f_2] \in \langle\mathfrak{N}\rangle$, $F' \leq \langle\mathfrak{N}\rangle$ и $\langle\mathfrak{N}\rangle$ нормальна в G. Наконец, для произвольных элементов $c \in C$ и $b \in \mathfrak{N}$ коммутатор $[a^2, cb] = [a^2, b][a^2, c]^b = b^{-1}$, и, значит, выполняется равенство $\langle\mathfrak{N}\rangle = [a^2, F]$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любых элементов $b \in \mathfrak{N}^\#$ и $c \in C$ подгруппа $L = \langle ac, b\rangle$ есть конечная группа Фробениуса с абелевым ядром $F_b = \langle b, b^{ac}\rangle$ и дополнением $\langle ac\rangle$.*

Доказательство. В силу леммы 1 имеем $(ac)^2 = i$, $ac \in a^C$, $ac \in N_G(\mathfrak{N})$, $b^{(ac)^2} = b^i = b^{-1}$ и $b^{(ac)^3} = (b^{ac})^{-1}$. По лемме 2 $(b(ac)^{-1})^4 = 1$, значит, $bb^{ac}b^{(ac)^2}b^{(ac)^3} = bb^{ac} \cdot b^{-1}(b^{ac})^{-1} = 1$, $bb^{ac} = b^{ac}b$ и, следовательно, подгруппа $F_b = \langle b, b^{ac}\rangle$ абелева. Значит, каждый элемент $f \in F_b$ представим в виде $f = b^kd^m$, где $d = b^{ac} \in \mathfrak{N}$, $1 \leq k, m \leq |b|$ (в том числе и в случае $F_b = \langle b\rangle$) и $f^i = b^{-k}d^{-m} = f^{-1}$. Так как по лемме 1 в F_b нет инволюций, то $L = F_b \leftthreetimes \langle ac\rangle$ — конечная группа Фробениуса с ядром F_b и дополнением $\langle ac\rangle$.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Для любого элемента $b \in \mathfrak{N}^\#$ подгруппа $T_b = T = \langle b^C, b^{aC}\rangle$ нильпотентна класса ≤ 2, iT' инвертирует фактор-группу T/T', $T \cap R \leq Z(T)$, $R \leq N_G(T)$, и T — прямое произведение своих силовских p-подгрупп T_d, где $\langle d\rangle$ — силовская p-подгруппа в $\langle b\rangle$.*

Доказательство. По лемме 6 имеем $bb^{ac} = b^{ac}b$ для любого $c \in C$. Отсюда $b^{aC} \subseteq C_G(b)$ и $b^{aC} \subseteq C_G(b^c)$ для каждого $c \in C$. Значит, подгруппы $K = \langle b^C\rangle$ и $K^a = \langle b^{Ca}\rangle = \langle b^{aC}\rangle$ поэлементно перестановочны, в частности $Z = K \cap K^a \leq Z(T)$.

Понятно, что $K^i = K$, $(K^a)^i = K^a$, и если подгруппа K абелева, например, в случае $K = K^a$, то T — абелева группа, инвертируемая инволюцией i. Если K неабелева, то $K \neq K^a$, $(K^a)^a = K$, $a \in N_G(Z)$, и по лемме 3 $\overline{a} = aZ$ индуцирует регулярный автоморфизм порядка 4 на фактор-группе $\overline{T} = T/Z$. Имеем $\overline{T} = \overline{K} \times \overline{K}^{\overline{a}}$, и ввиду леммы 1 $C_{\overline{K}}(\overline{i}) = \overline{1}$. Так как $\overline{K}^{\overline{i}} = \overline{K}$, то $\overline{i} = iZ$ инвертирует подгруппы $\overline{K}$, $\overline{K}^{\overline{a}}$, по предложению 1 фактор-группа $\overline{T}$ абелева, и, значит, T нильпотентна класса ≤ 2. Отсюда выводим, что $\pi(T) = \pi(b)$, i инвертирует фактор-группы T/T' и T/Z и $T \cap C = Z \cap C$. Ввиду леммы 1 и доказанного выше $R \leq N_G(Z)$ и $R \leq N_G(T) \cap N_G(C \cap T)$.

Ввиду нильпотентности подгруппы T_b и ее порождаемости множеством $T_b \cap b^G$ она разлагается в прямое произведение подгрупп T_d.

Лемма доказана.

Согласно лемме 7 множества T_bC и $H_b = T_bCA$ являются подгруппами в G, ряд

$$1 \leq (C \cap T_b) \leq Z(T_b) \leq T_b \leq T_bC \leq H_b \tag{2.1}$$

состоит из нормальных в H_b подгрупп, и все его факторы абелевы. При этом, если группа T_b абелева, то $H_b = T_b \leftthreetimes R$, а если группа T_b неабелева, то $(C \cap T_b) \leq Z(T_bC)$, фактор-группа $\overline{T}_b = T_b/(C \cap T_b)$ абелева и $\overline{H}_b = H_b/(C \cap T_b) = \overline{T}_b \leftthreetimes \overline{R}$, где $\overline{R} = R(C \cap T_b)/(C \cap T_b)$.

Лемма 8. *Для любого элемента $b \in \mathfrak{N}^\#$ подгруппа H_b разрешима, локально конечна, сильно вложена в G (если $H_b \neq G$), и ее второй коммутант нильпотентен класса ≤ 2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разрешимость группы H_b следует из существования ряда (2.1), а локальная конечность — из теоремы Шмидта [20, теорема 23.1.1]. Ввиду лемм 1 и 7 $H_b' = T_bC = F \cap H_b$, а второй коммутант совпадает с $T_b = \langle b^C, b^{aC} \rangle$, который нильпотентен класса ≤ 2 по лемме 7. Если $G \neq H_b$, то из $R = C_G(i) \leq H_b$ и равенства $J \cap H_b = i^{H_b}$ (см. леммы 1, 4) следует сильная вложенность подгруппы H_b в G.

Лемма доказана.

Для уточнения строения подгрупп $L_g = \langle a, a^g \rangle$ $(g \in F \setminus C)$ введем обозначения

$$L_g = \langle a, a^g \rangle, \quad g = cb \in F \setminus C = C\mathfrak{N}^\#, \quad c \in C, \quad b \in \mathfrak{N}^\#,$$

$$F_g = F \cap L_g, \quad C_g = C \cap F_g, \quad Q_g = L_g \cap T_b, \quad Z_g = Q_g \cap C.$$

Лемма 9. *Подгруппа L_g конечна, $b, c, g \in L_g = F_g \leftthreetimes A$, $F_g = Q_g\langle c \rangle$, подгруппы Q_g и Z_g нормальны в L_g, $Z_g \leq Z(F_g)$, Q_g нильпотентна класса ≤ 2 и $L_g \cap \mathfrak{N} \subseteq Q_g$. Если, дополнительно, группа T_b абелева или подгруппа Q_g абелева, то $Q_g \subset \mathfrak{N}$ и $F_g = Q_g \leftthreetimes \langle c \rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $L_g \leq H_b$, и в силу леммы 8 подгруппа L_g конечна. Далее,

$$(a^g)^2 = i^g = b^{-1}c^{-1}icb = b^{-1}ib = ib^2, \quad b^2 \in F_g,$$

и ввиду леммы 1 $b \in L_g$. Значит, $a^c = ba^gb^{-1} \in L_g$, согласно лемме 1 $c^2 = [a, c] \in L_g$ и $c, g \in L_g$. Поскольку $b, c, g \in Q_g\langle c \rangle$ и подгруппа $Q_g\langle c \rangle$ a-допустима, то $F_g = Q_g\langle c \rangle$ и $C_g = (Q_g \cap C)\langle c \rangle$. Применение лемм 7, 8 и свойств ряда (2.1) дают остальные свойства, в том числе и включение $L_g \cap \mathfrak{N} \subseteq Q_g$. Действительно, из $d \in L_g \cap \mathfrak{N}$ следует $dQ_g = (dQ_g)^i = d^{-1}Q_g$, и поскольку в $F_g/Q_g \simeq C_g/(Q_g \cap C_g)$ инволюций нет, то $d \in Q_g$.

Пусть группа Q_g абелева. Учитывая, что $Q_g = \langle b^{\langle c \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle} \rangle$ и $b^i = b^{-1}$, получаем $Q_g \subset \mathfrak{N}$, $C_g \cap Q_g = 1$ и $F_g = Q_g \leftthreetimes \langle c \rangle$.

Лемма доказана.

Положим $X = \{b \in \mathfrak{N} \mid |b^C| < \infty\}$.

Лемма 10. *Подгруппа $\langle a, X, C \rangle$ локально конечна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $X^a = X$ и $C \leq N_G(X)$. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — произвольные элементы из X и $V = C_R(b_1) \cap \ldots \cap C_R(b_n)$. По теореме Пуанкаре (см. [20, упражнение 2.4.7; 14, теорема I.2.7.3]) подгруппа V имеет конечный индекс в R и, значит, содержит нормальную в R подгруппу $D = \cap_{x \in R} V^x$ конечного индекса. Рассмотрим подгруппу $K = \langle R, b_1, \ldots, b_n \rangle$. Поскольку $D \leq C_K(b_r)$ $(r = 1, \ldots, n)$ и подгруппа D нормальна в R, то D нормальна и в K.

Согласно леммам 2 и 3 в фактор-группе $\overline{K} = K/D$ элемент aK имеет порядок 4 и действует на подгруппе $(K \cap F)/D$ регулярно. Пусть $\overline{c} \in (K \cap F)/D$ и $\overline{c}^{\overline{i}} = \overline{c}$. Поскольку $D \leq C$ и F не содержит инволюций (см. лемму 1), то $\overline{c} \in \overline{C}$. Следовательно, централизатор $C_{\overline{K}}(\overline{i})$ конечен, и в силу теоремы Шункова (см. предложение 4) группа $\overline{K}$ локально конечна. По теореме Шмидта группа K локально конечна, и ввиду произвольности элементов $b_1, \dots, b_n \in X$ локально конечна и группа $\langle a, X, C\rangle$.

Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится лемма 6 из [2], доказательство которой дословно переносится на бесконечные группы.

Лемма 11 [2, лемма 6]. *Если K, M — a-инвариантные подгруппы из F, нормализуемые подгруппой C, то KMC — a-инвариантная подгруппа из F.*

3. Доказательство теорем и следствия

Ввиду предложений 2, 3 доказываемые теоремы 1–3 и следствие работы для конечных групп верны. Поэтому на протяжении раздела будем считать, что группа $G = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ бесконечна.

Доказательство теоремы 1. Из лемм 4 и 9 следует, что $\pi(F) = \pi(C) \cup \pi(\mathfrak{N})$. Согласно лемме 5 имеем $\pi(F/[a^2, F]) \subseteq \pi(C)$, и доказательство теоремы 1 завершает следующее утверждение.

Лемма 12. *Для $q \in \pi(\mathfrak{N}) \setminus \pi(C)$ множество $\mathfrak{N}_q$ всех q-элементов из $\mathfrak{N}$ (вместе с единицей) есть абелева нормальная в G подгруппа, $\mathfrak{N}_q \leq Z([a^2, F])$ и $q \notin \pi(F/\mathfrak{N}_q)$.*

Доказательство. Пусть $t \notin R$, $b \in \mathfrak{N}_q$ и $d = t^{-1}bt = cb'$, где $c \in C$, $b' \in \mathfrak{N}$ (см. лемму 4). Очевидно, $L_d = \langle a, d\rangle = F_d \leftthreetimes A$, где $F_d = \langle d, d^a, d^{a^2}, d^{a^3}\rangle$. Из леммы 9 и условия $q \notin \pi(C)$ следует, что $F_d = Q_d$ — конечная q-группа. Следовательно, $F_d \cap C = 1$, инволюция i инвертирует Q_q, $d \in \mathfrak{N}_q$ и $t \in N_G(\mathfrak{N}_q)$. Поскольку $R \leq N_G(\mathfrak{N}_q)$, то $N_G(\mathfrak{N}_q) = G$. Поэтому для любых $d \in \mathfrak{N}$ и $b \in \mathfrak{N}_q$ выполняется включение $d^{-1}bd \in \mathfrak{N}_q$, и по лемме 4 $db = bd$. Следовательно, $\langle \mathfrak{N}_q\rangle \leq Z(\langle \mathfrak{N}\rangle) = Z([a^2, F])$.

Лемма доказана.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть b — p-элемент из $\mathfrak{N}$ и T_b — группа из леммы 7. По лемме 7 T_b — абелева или нильпотентная класса 2 p-группа периода $|b|$. По [14, теорема 13.5.4] центр $Z = Z(T_b)$ есть прямое произведение циклических групп, и ввиду условий теоремы, Z — конечная группа. Очевидно, каждая максимальная абелева подгруппа в T_b содержит Z и ввиду леммы 7 a^2-допустима. В силу конечности периода группы T_b и известной теоремы Блэкберна [21, теорема 4.1] группа T_b и множество b^C конечны. Отсюда следуют конечность множества b^C для любого элемента $b \in \mathfrak{N}$ и равенство $\mathfrak{N} = X$. Ввиду лемм 10 и 4 группа F локально конечна.

Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия. Как замечено выше, $\pi(F) = \pi(C) \cup \pi(\mathfrak{N}) = \pi \cup \pi'$. По теореме 1 F π'-замкнута, ее характеристическая подгруппа $O_{\pi'}(F) = T$ абелева. Если $CT = F$, то фактор-группа F/T абелева (см. лемму 1), и F локально конечна по теореме Шмидта. Если $F \neq CT$, то $\overline{a} = aT$ индуцирует на фактор-группе $\overline{F} = F/T$ регулярный расщепляющий автоморфизм порядка 4, при этом $C_{\overline{F}}(\overline{a}^2) = \overline{C} = CT/T$ (см. лемму 3), и очевидно, что $\pi(\overline{F}) = \pi(C)$. Пусть $\overline{P}$ — элементарная абелева $\overline{a}^2$-допустимая p-подгруппа из $\overline{F}$. Ее полный прообраз P в F метаабелев, локально конечен и a^2-допустим. В силу леммы 4 $C_P(T) = S \times T$ и $P = C_P(T)(C \cap T)$, где S и $C \cap P$ — конечные элементарные абелевые a^2-допустимые подгруппы, конечные по условиям следствия. Значит, подгруппа $\overline{P}$ конечна, и группа $\overline{F}$ локально конечна по теореме 2. По теореме Шмидта группа F локально конечна, и применение предложения 3 завершает доказательство следствия.

Доказательство теоремы 3. Пусть группа F не локально конечна. Ввиду леммы 11 и теоремы Шмидта [20, теорема 23.1.1] a-допустимая подгруппа $\langle\mathfrak{N}\rangle$ не локально конечна, и, значит, для некоторых элементов $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{N}$ группа $M = \langle a, b_1, \ldots, b_n\rangle$ бесконечна. По лемме 8 подгруппы $H_{b_1}, \ldots, H_{b_n}$ локально конечны. В силу леммы 5 все множества $M_2 = H_{b_1}H_{b_2}$, $M_3 = M_2H_{b_3}, \ldots, M_k = M_{k-1}H_{b_k}$ являются подгруппами в F. Очевидно, для некоторого $k \leq n$ группа M_k не локально конечна и является произведением двух локально конечных a-допустимых подгрупп M_{k-1} и H_k $(M_1 = H_1)$.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Москва: Мир, 1985. 352 с.
2. **Gorenstein D., Herstein I.N.** Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order 4 // *Am. J. Math.* 1961. Vol. 83, no. 1. P. 71–78. doi: 10.2307/2372721 .
3. **Kovacs L.G.** Groups with regular automorphisms of order four // Math Z. Vol. 75, no. 1. P. 277–294. doi: 10.1007/BF01211026 .
4. **Burnside W.** Theory of groups of finite order. 1st ed. Cambridge: University Press, 1897. 387 p.
5. **Nagata M.** Note on groups with involutions // Proc. Japan Acad. 1952. Vol. 28, no. 10. P. 564–566. doi: 10.3792/pja/1195570787 .
6. **Neumann B.H.** On the commutativity of addition // J. London Math. Soc. 1940. Vol. 15, no. 3. P. 203–208. doi: 10.1112/jlms/s1-15.3.203 .
7. **Burnside W.** Theory of groups of finite order. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1911. 512 p. ISBN: 1108050328 .
8. **Neumann B.H.** Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed // Arch. Math. 1956. Vol. 7, no. 1. P. 1–5. doi: 10.1007/BF01900516 .
9. **Журтов А. Х.** О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2000. Vol. 52, № 2. С. 329–338.
10. Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook / eds. E.I. Khukhro, V.D. Mazurov. 227 p. Available at: *ArXiv*:1401.0300v6 [math.GR] June 2015.
11. **Fischer B.** Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order $2p$ (I) // J. Algebra. 1966. Vol. 3, no. 1. P. 99–114. doi: 10.1016/0021-8693(66)90021-4 .
12. **Fischer B.** Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order $2p$ (II) // J. Algebra. 1967. Vol. 5, no. 1. P. 25–40. doi: 10.1016/0021-8693(67)90023-3 .
13. **Шунков В.П.** О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–494.
14. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2009. 310 с.
15. **Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Изд-во Сиб. федерал. ун-та, 2011. 149 с.
16. **Шунков В.П.** О бесконечных централизаторах в группах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 2. С. 224–226.
17. **Адян С.И.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. Москва: Наука, 1975. 335 с.
18. **Нейман Х.** Многообразия групп. Москва: Мир, 1969. 264 с.
19. **Холл М.** Теория групп. Москва: ИЛ, 1962. 468 с.
20. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. Москва: Наука, 1977. 240 с.
21. **Blackburn N.** Some remarks on Cernikov p-groups // Illinois J. Math. 1962. Vol. 6, no. 3. P. 421–431. doi: 10.1215/ijm/1255632502 .

Поступила 13.07.2019
После доработки 30.09.2019
Принята к публикации 21.10.2019

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

REFERENCES

1. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification.* University Series in Mathematics. N Y: Plenum Publishing Corp., 1982, 333 p. ISBN: 0-306-40779-5 . Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu.* Moscow: Mir Publ., 1985, 352 p.
2. Gorenstein D., Herstein I.N. Finite Groups admitting a fixed-point-free automorphism of order 4. *Am. J. Math.*, 1961, vol. 83, no. 1, pp. 71–78. doi: 10.2307/2372721 .
3. Kovacs L.G. Groups with regular automorphisms of order four. *Math Z.*, vol. 75, no. 1, pp. 277–294. doi: 10.1007/BF01211026 .
4. Burnside W. *Theory of groups of finite order.* Cambridge: Cambridge University Press, 1897, 387 p.
5. Nagata M. Note on groups with involutions. *Proc. Japan Acad.*, 1952, vol. 28, no. 10, pp. 564–566. doi: 10.3792/pja/1195570787 .
6. Neumann B.H. On the commutativity of addition. *J. London Math. Soc.*, 1940, vol. 15, no. 3, pp. 203–208. doi: 10.1112/jlms/s1-15.3.203 .
7. Burnside W. *Theory of groups of finite order.* Cambridge: Cambridge University Press, 1911, 512 p. ISBN: 1108050328 .
8. Neumann B.H. Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed. *Arch. Math.*, 1956, vol. 7, no. 1, pp. 1–5. doi: 10.1007/BF01900516 .
9. Zhurtov A.Kh. Regular automorphisms of order 3 and Frobenius pairs. *Siberian Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 2, pp. 268–275. doi: 10.1007/BF02674596 .
10. Khukhro E.I., Mazurov V.D. (eds) *Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook.* 227 p. Available at: *ArXiv*:1401.0300v6 [math.GR] June 2015.
11. Fischer B. Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order $2p$ (I). *J. Algebra*, 1966, vol. 3, no. 1, pp. 99–114. doi: 10.1016/0021-8693(66)90021-4 .
12. Fischer B. Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order $2p$ (II). *J. Algebra*, 1967, vol. 5, no. 1, pp. 25–40. doi: 10.1016/0021-8693(67)90023-3 .
13. Shunkov V.P. On periodic groups with an almost regular involution. *Algebr Logic.*, vol. 11, no. 4, pp. 260–272. doi: 10.1007/BF02219098 .
14. Kondratiev A.S. *Gruppy i algebry Li* [Lie groups and Lie algebras]. Ekaterinburg: UrO RAS Publ., 2009, 310 p. ISBN: 978-5-7691-2111-1 .
15. Sozutov A.I., Suchkov N.M., Suchkova N.G. *Beskonechnye gruppy s involyutsiyami* [Infinite groups with involutions]. Krasnoyarsk: Siberian Federal University Publ., 2011, 149 p. ISBN: 978-5-7638-2127-7 .
16. Shunkov V.P. On infinite centralizers of groups. *Algebra and Logic.*, vol. 13, no. 2, pp. 129–130. doi: 10.1007/BF01463152 .
17. Adyan S.I. *The Burnside problem and identities in groups.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1979, 311 p. ISBN: 978-3-642-66934-7 . Original Russian text published in Adyan S.I. *Problema Bernsaida i tozhdestva v gruppakh.* Moscow: Nauka Publ., 1975. 335 p.
18. Neumann H. Varieties of Groups. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1967, 194 p. doi: 10.1007/978-3-642-88599-0 . Translated to Russian under the title *Mnogoobraziya grupp.* Moscow: Mir Publ., 1969, 264 p.
19. Hall M., Jr. *The theory of groups.* N Y: MacMillan Co., 1959, 434 pp. Translated to Russian under the title *Teoriya grupp*, Moskva: Inostran. Literatura Publ., 1962, 468 p.
20. Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Fundamentals of the theory of groups.* N Y; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1979, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0 . Original Russian text published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp.* Moscow: Nauka Publ., 1977. 240 p.
21. Blackburn N. Some remarks on Cernikov p-groups. *Illinois J. Math.*, 1962, vol. 6, no. 3, pp. 421–431. doi: 10.1215/ijm/1255632502 .

Received July 13, 2019
Revised September 30, 2019
Accepted October 21, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project № 19-01-00566 A) .

Sozutov Anatoliy Ilich, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: sozutov_ai@mail.ru .

Cite this article as: A. I. Sozutov. On periodic groups with a regular automorphism of order 4, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 201–209 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.85

АДАПТАЦИЯ К ВЕЛИЧИНАМ ПОГРЕШНОСТЕЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА[1]

Ф. С. Стонякин

Введено новое понятие неточной модели выпуклой целевой функции, учитывающее возможность погрешностей при как задании функции, так и ее градиента. Для этой концепции предложен градиентный метод с адаптивной настройкой некоторых параметров модели, и получена оценка скорости сходимости. Эта оценка оптимальна на классе достаточно гладких задач при наличии погрешностей. Рассмотрен специальный класс задач выпуклой негладкой оптимизации, к которым применима предложенная методика за счет искусственного введения неточности. Показано, что для таких задач возможно модифицировать метод так, чтобы гарантированно имела место сходимость по функции со скоростью, близкой к оптимальной на классе задач выпуклой негладкой оптимизации. Предложен адаптивный градиентный метод для целевых функций с некоторой релаксацией условия липшицевости градиента, удовлетворяющих условию градиентного доминирования Поляка — Лоясиевича. При этом учитывается возможность неточного задания целевой функции и градиента. Адаптивный выбор параметров при работе метода выполняется как по величине константы Липшица градиента, так и по величине, соответствующей погрешности задания градиента и целевой функции. Обоснована линейная сходимость метода с точностью до величины, связанной с погрешностями.

Ключевые слова: градиентный метод, адаптивный метод, липшицев градиент, негладкая оптимизация, условие градиентного доминирования.

F. S. Stonyakin. Adaptation to inexactness for some gradient-type optimization methods.

We introduce a notion of inexact model of a convex objective function, which allows for errors both in the function and in its gradient. For this situation, a gradient method with an adaptive adjustment of some parameters of the model is proposed and an estimate for the convergence rate is found. This estimate is optimal on a class of sufficiently smooth problems in the presence of errors. We consider a special class of convex nonsmooth optimization problems. In order to apply the proposed technique to this class, an artificial error should be introduced. We show that the method can be modified for such problems to guarantee a convergence in the function with a nearly optimal rate on the class of convex nonsmooth optimization problems. An adaptive gradient method is proposed for objective functions with some relaxation of the Lipschitz condition for the gradient that satisfy the Polyak–Lojasievicz gradient dominance condition. Here, the objective function and its gradient can be given inexactly. The adaptive choice of the parameters is performed during the operation of the method with respect to both the Lipschitz constant of the gradient and a value corresponding to the error of the gradient and the objective function. The linear convergence of the method is justified up to a value associated with the errors.

Keywords: gradient method, adaptive method, Lipschitz gradient, nonsmooth optimization, gradient dominance condition.

MSC: 90C25, 90C06, 65K10

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-210-225

1. Введение

Хорошо известно, что методы градиентного типа отличаются относительной простотой и малыми затратами памяти, что объясняет их популярность в работах по многомерной оптимизации (см., например, [1–9]). Напомним, что для вывода оценок скорости сходимости градиентного метода можно использовать идею аппроксимации функции в исходной точке (текущем положении метода) мажорирующим ее параболоидом вращения. Так, для задачи минимизации выпуклого функционала $f : Q \to \mathbb{R}$, заданного на выпуклом замкнутом множестве $Q \subset \mathbb{R}^n$ с

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 18-71-00048.

липшицевым градиентом (для некоторой константы $L > 0$ при произвольных $x, y \in Q$ верно $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leqslant L\|x - y\|$), выполняются неравенства

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle \leqslant f(y) \leqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{L}{2}\|y - x\|^2. \tag{1.1}$$

Неравенства (1.1) позволяют получить для обычного градиентного спуска с постоянным шагом оценку скорости сходимости

$$f(\hat{x}) - f^* \leqslant \frac{C_1}{N}, \tag{1.2}$$

где $\hat{x}$ — выход работы метода после N итераций, f^* — точное значение искомого минимума функции f, C_1 — некоторая положительная константа.

В новых работах, посвященных методам градиентного типа, например в [4], введено условие относительной гладкости оптимизируемого функционала, предполагающее замену правого неравенства в (1.1) на ослабленный вариант

$$f(y) \leqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + LV(y, x),$$

где $V(y, x)$ — широко используемый в оптимизации аналог расстояния между точками x и y, который называют *расхождением Брэгмана*. Обычно *расхождение Брэгмана* вводится с использованием вспомогательной 1-сильно выпуклой функции d (порождает расстояния), которая дифференцируема во всех точках $x \in Q$,

$$V(y, x) = d(x) - d(y) - \langle \nabla d(x), y - x\rangle \quad \forall x, y \in Q;$$

здесь $\langle \cdot, \cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, причем ввиду 1-сильной выпуклости функции d для произвольных $x, y \in Q$ верно неравенство $V(y, x) \geqslant 1/2\,\|y - x\|^2$. В частности, для стандартной евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$ и соответствующего расстояния в $\mathbb{R}^n$ можно считать, что $V(y, x) = d(y, x) = 1/2\,\|y - x\|_2^2$ для произвольных $x, y \in Q$. Однако рассмотренное в [4] условие относительной гладкости предполагает лишь выпуклость (но не сильную выпуклость) порождающей функции d. Как показано в [4], концепция относительной гладкости позволяет применить вариант градиентного метода для некоторых задач, к которым ранее применялись лишь методы внутренней точки.

Весьма естественно возникает вопрос влияния на скорость сходимости метода погрешностей задания целевой функции и/или градиента. В этом плане можно отметить хорошо известную концепцию неточного оракула О. Деволдера — Ф. Глинера — Ю. Е. Нестерова [5; 6]. Говорят, что функция f допускает неточный оракул $(f_\delta(x), g_\delta(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в произвольной запрошенной точке $x \in Q$, если для некоторых $\delta > 0$ и $L > 0$ выполняется аналог неравенства (1.1):

$$f_\delta(x) + \langle g_\delta(x), y - x\rangle \leqslant f(y) \leqslant f_\delta(x) + \langle g_\delta(x), y - x\rangle + \frac{L}{2}\|y - x\|^2 + \delta \;\; \forall x, y \in Q. \tag{1.3}$$

По сути, (1.3) означает, что $f_\delta(x)$ — приближенное значение $f(x)$ ($f_\delta(x) \leqslant f(x) \leqslant f_\delta(x) + \delta$), а $g_\delta(x)$ — некоторый δ-субградиент f в произвольной точке x. Оказывается [5], что при выполнении условия (1.3) для градиентного метода (с заменой пары $(f, \nabla f)$ на (f_δ, g_δ)) верна оценка скорости сходимости

$$f(\hat{x}) - f^* \leqslant \frac{C_1}{N} + \delta,$$

т. е. в оценке не происходит накопления величин, соответствующих погрешностям.

Идеология Деволдера — Глинера — Нестерова была развита в работе [2], где обобщена концепция (δ, L)-оракула и введено понятие (δ, L)-модели целевой функции. Идея этого обобщения заключается в том, что линейная функция $\langle \nabla f(y), x - y\rangle$ в неравенстве (1.3) заменяется на некоторую абстрактную выпуклую функцию $\psi(x, y)$ [2].

О п р е д е л е н и е 1. Говорят, что функция f допускает (δ, L)-модель $(f_\delta(x), \psi(y,x))$ в точке $x \in Q$, если для любого $y \in Q$ справедливо неравенство

$$0 \le f(y) - f_\delta(x) - \psi(y,x) \le \frac{L}{2}\|y-x\|^2 + \delta, \tag{1.4}$$

где $\psi(x,x) = 0 \ \forall x \in Q$ и $\psi(x,y)$ — выпуклая функция по x для всякого $y \in Q$.

Концепция из определения 1 позволяет обосновать сходимость градиентного метода для достаточно широкого класса задач оптимизации [2; 3]. По сути, она дает возможность унифицировать подходы к различным на первый взгляд классам задач оптимизации с описанием степени влияния погрешностей данных на гарантированное качество решения, достижимое в ходе работы метода.

В настоящей работе предлагается модификация концепции (δ, L)-модели целевой функции, которая учитывает возможность неточного задания не только значения целевой функции, но и самой функции-модели. В частности, для линейной модели $\psi(x,y) = \langle \nabla f(x), y-x\rangle$ описывается ситуация некоторой модификации условий (1.4) с учетом отдельно погрешности задания f и ∇f. Если положить, что $\forall x \in Q$ справедливо

$$\big\|\nabla f(x) - \widetilde{\nabla} f(x)\big\| \leqslant \Delta, \quad \Delta > 0 \tag{1.5}$$

для некоторого доступного приближенного значения $\widetilde{\nabla} f(x)$ градиента ∇f, то будет верно неравенство $\big|\big\langle \nabla f(x) - \widetilde{\nabla} f(x), y-x\big\rangle\big| \leqslant \Delta\|y-x\|$, т. е. для всяких $x, y \in Q$

$$f(y) \leqslant f(x) + \big\langle \widetilde{\nabla} f(x), y-x\big\rangle + \frac{L}{2}\|y-x\|^2 + \Delta\|y-x\|,$$

а также $f(y) \geqslant f(x) + \big\langle \widetilde{\nabla} f(x), y-x\big\rangle - \Delta\|y-x\|$.

Если кроме этого учесть неравенство $f_\delta(x) \leqslant f(x) \leqslant f_\delta(x) + \delta$ при $\delta > 0$, то получим следующий аналог (1.3):

$$f_\delta(x) + \big\langle \widetilde{\nabla} f(x), y-x\big\rangle - \Delta\|y-x\| \leqslant f(y)$$

$$\leqslant f_\delta(x) + \big\langle \widetilde{\nabla} f(x), y-x\big\rangle + \frac{L}{2}\|y-x\|^2 + \Delta\|y-x\| + \delta \ \ \forall x, y \in Q, \tag{1.6}$$

откуда $f_\delta(x) \leqslant f(x) \leqslant f_\delta(x) + \delta$.

В разд. 2 настоящей работы мы рассмотрим (в модельной общности подобно определению 1) следующий аналог неравенства (1.6) с параметрами $\delta, \gamma, \Delta \geqslant 0$:

$$f_\delta(x) + \big\langle \widetilde{\nabla} f(x), y-x\big\rangle - \gamma\|y-x\| \leqslant f(y)$$

$$\leqslant f_\delta(x) + \big\langle \widetilde{\nabla} f(x), y-x\big\rangle + \frac{L}{2}\|y-x\|^2 + \Delta\|y-x\| + \delta \ \ \forall x, y \in Q. \tag{1.7}$$

Смысл такого обобщения заключается в возможности различных значений параметров γ и Δ в (1.7). Один из основных результатов работы — обоснование потенциального уменьшения влияния Δ на оценку скорости сходимости метода. Отметим еще, что далее в разд. 3 подробно разобрано несколько примеров негладких задач, когда $\delta = \gamma = 0$ при $\Delta > 0$. Если положить $\gamma = 0$, то $\widetilde{\nabla} f(x)$ — δ-субградиент f в точке x, и параметр $\Delta > 0$ может указывать в этом случае на скачки $\widetilde{\nabla} f(x)$ в точках негладкости f. Если положить $\delta = 0$, то при $\gamma > 0$ $\widetilde{\nabla} f(x)$ — так называемый аналитический γ-субградиент f [10, Sect. 1.3]. В итоге мы предлагаем максимально общую концепцию неточной модели целевой функции, которая могла бы охватить все указанные ситуации. Для функций, допускающих существование такой модели в любой запрошенной точке, мы предлагаем адаптивный градиентный метод (алгоритм 1) и доказываем теорему о скорости его сходимости (теорема 1).

Неравенства (1.6) и (1.7) аналогичны (1.3), но величины $\Delta\|y-x\|$ и $\gamma\|y-x\|$ уже зависят от выбора x и y. Заменить их обе в (1.7) на постоянные величины, вообще говоря, возможно только в случае ограниченного допустимого множества задачи Q. Более того, хорошо известно, что при использовании $\widetilde{\nabla} f(x)$ из (1.5) метод может расходиться [6, Sect. 4]. Поэтому важно выделить класс задач, для которых можно получать приемлемые оценки скорости сходимости на неограниченных множествах. Это, в частности, мотивировало вторую часть основных результатов работы (разд. 4). Хорошо известно, что в случае сильной выпуклости целевого функционала оценки скорости сходимости градиентного метода могут существенно улучшаться. Например, для сильно выпуклого целевого функционала с липшицевым градиентом известно, что градиентный метод сходится с линейной скоростью. Весьма интересен и важен вопрос о том, насколько можно условие сильной выпуклости ослабить. В этом случае известен подход, основанный на использовании вместо сильной выпуклости условия градиентного доминирования Поляка — Лоясиевича [11] (см. также недавнюю работу [9] и имеющиеся там ссылки)

$$f(x)-f(x_*)\leqslant \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|^2 \quad \forall x\in Q, \tag{1.8}$$

где x_* — точное решение задачи минимизации f, а $\mu>0$ — некоторая постоянная. Известно, что неравенство (1.8) в предположении липшицевости градиента с константой L позволяет получить оценку скорости сходимости градиентного метода с постоянным шагом

$$f(x^N)-f(x_*)\leqslant \Big(1-\frac{\mu}{L}\Big)^N\big(f(x^0)-f(x_*)\big)\leqslant \exp\Big(-\frac{\mu}{L}N\Big)\big(f(x^0)-f(x_*)\big). \tag{1.9}$$

В настоящей работе мы рассматриваем следующий ослабленный вариант условия L-липшицевости градиента

$$f(y)\leqslant f(x)+\big\langle\widetilde{\nabla} f(x),y-x\big\rangle+\frac{L}{2}\|y-x\|^2+\Delta\|y-x\|+\delta \quad \forall\, x,y\in Q$$

для некоторых δ и $\Delta>0$. Например, это предположение естественно в случае, если значения функции f немного отличаются от значений некоторой достаточно гладкой функции $\widetilde{f}$, удовлетворяющей условию Липшица градиента (при этом $\widetilde{\nabla} f(x)$ — некоторое возмущенное с точностью Δ значение градиента $\nabla f(x)$). По сути, в разд. 4 работы левая часть неравенства (1.7) заменяется условием градиентного доминирования. Мы предлагаем метод с адаптивным подбором шага с настройкой на величины L, Δ и δ и показываем оценку скорости сходимости, аналогичную (1.9). В частности, запуск предлагаемого метода (алгоритм 2) не предполагает знания никакой верхней оценки L и может применяться для задач с неточным заданием градиента на неограниченных допустимых множествах. Более того, возможно использование данного подхода для некоторого класса негладких задач (см. определение 3).

Подытожим основные результаты (вклад) настоящей работы:

— В раз. 2 обобщено ранее предложенное в [2] понятие (δ,L)-модели целевой функции в запрошенной точке и введена концепция (δ,γ,Δ,L)-модели функции (определение 2). Предложен градиентный метод (алгоритм 1) для задач выпуклой минимизации с адаптивным выбором шага и адаптивной настройкой на некоторые из параметров (δ,γ,Δ,L)-модели, получена оценка качества решения в зависимости от номера итерации (теорема 1).

— В разд. 3 рассмотрен специальный класс задач выпуклой негладкой оптимизации, к которым применима концепция определения 2 ($\delta=\gamma=0$, $\Delta>0$). Показано, что для таких задач возможно модифицировать алгоритм 1 так, чтобы гарантированно имела место сходимость по функции со скоростью $O(\varepsilon^{-2}\log_2\varepsilon^{-1})$, которая близка к оптимальной на классе задач выпуклой негладкой оптимизации (теорема 2). При этом рассмотрены примеры негладких задач, для которых за счет адаптивности алгоритма 1 может наблюдаться существенно более высокая скорость сходимости.

— В разд. 4 предложен адаптивный градиентный метод (алгоритм 2) для целевых функционалов с липшицевым градиентом (а также некоторой релаксацией этого условия), удовлетворяющих условию Поляка — Лоясиевича. При этом учитывается возможность неточного задания градиента и предлагается адаптивная настройка работы метода на основные входные параметры. Обоснована линейная сходимость метода с точностью до величины, связанной с погрешностью (теорема 3).

2. Концепция (δ,γ,Δ,L)-модели функции в запрошенной точке и оценка скорости сходимости для градиентного метода

Введем анонсированный выше аналог понятия (δ,γ,Δ,L)-модели целевой функции, который учитывает погрешность Δ задания градиента и применим также для задач с относительно гладкими целевыми функционалами [4].

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что f допускает (δ,γ,Δ,L)-модель в точке $x \in Q$, если для некоторой выпуклой по первой переменной функции $\psi(y,x)$ такой, что $\psi(x,x)=0$ для произвольных $x,y \in Q$, будет верно неравенство

$$f_\delta(x)+\psi(y,x)-\gamma\|y-x\| \leqslant f(y) \leqslant f_\delta(x)+\psi(y,x)+\delta+\Delta\|y-x\|+LV(y,x). \tag{2.1}$$

Покажем пример, поясняющий смысл использования модельной общности в предыдущем определении.

П р и м е р 1. Отметим задачу выпуклой композитной оптимизации $f(x)=g(x)+h(x)\to\min$, где g — гладкая выпуклая функция, а h — выпуклая необязательно гладкая функция простой структуры (операция проектирования на любое множество уровня h несильно затратна). Если при этом для градиента ∇g задано его приближение $\widetilde{\nabla} g$: $\|\widetilde{\nabla} g(x)-\nabla g(x)\| \leqslant \Delta$, причем $g(y) \geqslant g(x)+\langle\widetilde{\nabla} g(x), y-x\rangle-\gamma\|y-x\|-\delta$, то можно положить $\psi(y,x)=\langle\widetilde{\nabla} g(x), y-x\rangle+h(y)-h(x)$, и будет верно (2.1). Композитная оптимизация весьма часто возникает во многих прикладных задачах (см., например, [7]).

Рассмотрим следующий метод для минимизации выпуклых функций, которые допускают существование (δ,γ,Δ,L)-модели во всякой точке $x \in Q$ и докажем результат о его скорости сходимости.

А л г о р и т м 1: Адаптивный градиентный метод для выпуклых функций, допускающих (δ,γ,Δ,L)-модель в произвольной запрошенной точке.

Require: x^0 — начальная точка, $V(x_*,x^0) \leqslant R^2$, параметры $\delta_0,\ L_0,\ \Delta_0$ $(\delta_0 \leqslant 2\delta,\ L_0 \leqslant 2L,\ \Delta_0 \leqslant 2\Delta)$.

1: $L_{k+1} := L_k/2,\ \Delta_{k+1} := \Delta_k/2,\ \delta_{k+1} := \delta_k/2$.

2: $x^{k+1} := \arg\min\limits_{x\in Q}\{\psi(x,x^k)+LV(x,x^k)\}$.

3: **if** $f_\delta(x^{k+1}) \leqslant f_\delta(x^k)+\psi(x^{k+1},x^k)+L_{k+1}V(x^{k+1},x^k)+\Delta_{k+1}\|x^{k+1}-x^k\|+\delta_{k+1}$ **then**

4: $\quad k := k+1$ и выполнение п. 1.

5: **else**

6: $\quad L_{k+1} := 2\cdot L_{k+1};\ \Delta_{k+1} := 2\cdot\Delta_{k+1};\ \delta_{k+1} := 2\cdot\delta_{k+1}$ и выполнение п. 2.

7: **end if**

Ensure: $\widehat{x} := \frac{1}{S_N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\frac{x^{k+1}}{L_{k+1}},\ S_N := \sum\limits_{k=0}^{N-1}\frac{1}{L_{k+1}}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f : Q \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция и для некоторой постоянной $R>0$ имеет место $V(x_*,x^0) \leqslant R^2$, где x^0 — начальное приближение, а x_* — точное решение* *задачи минимизации f, ближайшее к x^0 с точки зрения расхождения Брэгмана. Тогда после N итераций для выхода $\hat{x}$ алгоритма 1 будет верно неравенство*

$$f(\hat{x}) - f(x_*) \leqslant \frac{R^2}{S_N} + \frac{2}{S_N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\delta_{k+1} + \Delta_{k+1}\|x^{k+1} - x^k\| + \gamma\|x^k - x_*\|}{L_{k+1}} + \delta. \tag{2.2}$$

При этом количество обращений к задаче п. 2 листинга алгоритма 1 не превышает

$$2N + \max\Big\{\log_2\frac{2L}{L_0}, \log_2\frac{2\delta}{\delta_0}, \log_2\frac{2\Delta}{\Delta_0}\Big\}. \tag{2.3}$$

Доказательство. 1. Согласно лемме 1 из [2] после завершения k-й итерации ($k = 0, 1, 2, \ldots$) алгоритма 1 будут верны неравенства

$$\psi(x^{k+1}, x^k) \leqslant \psi(x, x^k) + L_{k+1}V(x, x^k) - L_{k+1}V(x, x^{k+1}) - L_{k+1}V(x^{k+1}, x^k),$$

$$f_\delta(x^{k+1}) \leqslant f_\delta(x^k) + \psi(x^{k+1}, x^k) + L_{k+1}V(x, x^k) - L_{k+1}V(x, x^{k+1}) + \Delta_{k+1}\|x^{k+1} - x^k\| + \delta_{k+1}.$$

Поэтому ввиду того, что $f_\delta(x) \le f(x) \le f_\delta(x) + \delta$ при всяком $x \in Q$ имеем

$$f(x^{k+1}) \leqslant f(x^k) + \psi(x, x^k) + L_{k+1}V(x, x^k) - L_{k+1}V(x, x^{k+1}) + \Delta_{k+1}\|x^{k+1} - x^k\| + \delta_{k+1} + \delta.$$

Далее, с учетом левой части неравенства (2.1) при $x = x_*$ получим

$$f(x^{k+1}) - f(x_*) \leqslant L_{k+1}V(x_*, x^k) - L_{k+1}V(x_*, x^{k+1}) + \Delta_{k+1}\|x^{k+1} - x^k\| + \delta_{k+1} + \delta + \gamma\|x^k - x_*\|,$$

откуда после суммирования по $k = 0, 1, \ldots, N-1$ ввиду выпуклости f имеем

$$f(\hat{x}) - f(x_*) \leqslant \frac{1}{S_N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{f(x^{k+1})}{L_{k+1}} - f(x_*) \leqslant V(x_*, x^0)$$

$$+ \frac{1}{S_N}\sum_{k=0}^{N-1}L_{k+1}^{-1}\Big(\Delta_{k+1}\|x^{k+1} - x^k\| + \delta_{k+1} + \gamma\|x^k - x_*\|\Big) + \delta.$$

2. Проверим оценку (2.3). Пусть на $(k+1)$-й итерации ($k = 0, 1, \ldots, N-1$) алгоритма 1 вспомогательная задача решается i_{k+1} раз. Тогда

$$2^{i_{k+1}-2} = \frac{L_{k+1}}{L_k} = \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k},$$

поскольку в начале каждой итерации параметры L_k, δ_k, Δ_k делятся на 2. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{N-1} i_{k+1} = 2N + \log_2\frac{L_N}{L_0}, \quad \log_2\frac{L_N}{L_0} = \log_2\frac{\delta_N}{\delta_0} = \log_2\frac{\Delta_N}{\Delta_0}.$$

Ясно, что верно хотя бы одно из неравенств $L_N \leqslant 2L$, $\delta_N \leqslant 2\delta$ и $\Delta_N \leqslant 2\Delta$, что и обосновывает оценку (2.3). □

Замечание 1. Оценка (2.3) показывает, что в среднем трудоемкость итерации предложенного адаптивного алгоритма превышает трудоемкость аналогичного неадаптивного метода с постоянным шагом не более, чем в постоянное число раз. Отметим также, что при $k = 0, 1, 2, \ldots$ верно $L_{k+1} \leqslant 2CL$, где $C = \max\Big\{1, \frac{2\delta}{\delta_0}, \frac{2\Delta}{\Delta_0}\Big\}$. Поэтому $S_N \leqslant \frac{N}{2CL}$, что указывает на скорость сходимости метода $O(\varepsilon^{-1})$, но при наличии в оценке (2.2) слагаемых, определяемых параметрами δ, γ, Δ (при этом ввиду адаптивности метода δ_k и Δ_k могут быть меньше δ и Δ соответственно). Можно доказать, что эта величина ограничена в случае ограниченного допустимого множества задачи Q, что вполне может считаться оптимальным [12].

З а м е ч а н и е 2. Если дополнительно предположить, что в произвольной точке $x \in Q$ верно $f_\delta(x) = f(x)$, то в оценке (2.2) можно считать $\delta = 0$. В таком случае оценка (2.2) полностью адаптивна по параметрам L, Δ и δ.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что ввиду адаптивности алгоритма 1 полученная в теореме 1 оценка скорости сходимости может быть применена даже в случаях $L = +\infty$ или $\Delta = +\infty$. Если не происходит зацикливания и каждый раз выполняется критерий выхода из итерации, то алгоритм 1 применим и в этом случае. Пример, когда такое возможно ($\Delta = +\infty$), приведен в следующем разделе (задача 2).

3. О применимости метода к одному классу негладких задач за счет введения искусственных неточностей

Отметим, что на величину Δ в (1.5) можно смотреть как на искусственную неточность, описывающую степень негладкости функционала f. Точнее говоря, Δ можно понимать, например, как верхнюю оценку суммы диаметров субдифференциалов f в точках негладкости вдоль всевозможных векторных отрезков $[x; y]$ из области определения f. В [13] введен следующий класс негладких выпуклых функционалов.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что выпуклый функционал $f\colon Q \to \mathbb{R}$ ($Q \subset \mathbb{R}^n$) имеет (δ, L)-липшицев субградиент ($f \in C^{1,1}_{L,\hat{\Delta}}(Q)$), если для некоторых $\delta > 0$ и $L > 0$

(i) для произвольных $x, y \in Q$ выпуклый функционал f дифференцируем во всех точках множества $\{y_t\}_{0 \le t \le 1}$ ($y_t = (1-t)x + ty$), за исключением последовательности (возможно, конечной)

$$\{y_{t_j}\}_{j=1}^{\infty}: \ t_1 < t_2 < t_3 < \ldots \ \text{ и } \lim_{j\to\infty} t_j = 1; \tag{3.1}$$

(ii) для последовательности точек из (3.1) существуют конечные субдифференциалы в смысле выпуклого анализа $\{\partial f(y_{t_j})\}_{j=1}^{\infty}$ и

$$\operatorname{diam} \partial f(y_{t_j}) =: \hat{\Delta}_j > 0, \quad \text{где } \sum_{j=1}^{+\infty} \hat{\Delta}_j =: \hat{\Delta} < +\infty;$$

(iii) для произвольных $x, y \in Q$ при условии, что $y_t \in Q \setminus Q_0$ при всяком $t \in (0,1)$ (то есть существует градиент $\nabla f(y_k)$) для некоторой фиксированной константы $L > 0$, не зависящей от выбора x и y, выполняется неравенство

$$\min_{\nabla f(x) \in \partial f(x),\, \nabla f(y) \in \partial f(y)} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_* \leqslant L\|x - y\|.$$

В [13], в частности, показано, что всякий функционал $f \in C^{1,1}_{L,\delta}(Q)$ удовлетворяет для произвольного субградиента $\nabla f(x) \in \partial f(x)$ неравенству

$$f(y) \leqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{L}{2}\|y - x\|^2 + 2\hat{\Delta}\|y - x\| \quad \forall y \in Q. \tag{3.2}$$

С другой стороны, ввиду выпуклости f будет верно $f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$. Поэтому всякая функция $f \in C^{1,1}_{L,\hat{\Delta}}(Q)$ удовлетворяет определению 2 при $\psi(y,x) = \langle \nabla f(x), y - x\rangle$ с параметрами $\delta = \gamma = 0$ и $\Delta = 2\hat{\Delta}$.

Оказывается, что экспериментально можно получать существенно лучшую скорость сходимости метода, чем по отмеченной выше оценке. Приведем некоторые примеры. Начнем с примера задачи (см., например, [14]) с бесконечным числом точек негладкости (недифференцируемости) целевого функционала, но с конечной величиной Δ.

Результаты численных экспериментов

	Задача 1					Задача 2				
Итерации	200	400	600	800	1000	200	400	600	800	1000
Оценка	0.0232	0.0117	0.0079	0.006	0.0048	0.79	0.44	0.31	0.24	0.2
Время, с	27	54	82	110	136	15	29	44	58	72

З а д а ч а 1 (Аналог задачи Ферма — Торричелли — Штейнера). Для заданных шаров ω_k с центрами $a_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$ (координаты точек a_k выбираются случайно так, чтобы $1 < \sqrt{a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \ldots + a_{nk}^2} < 1.5$, $k = \overline{1, m}$, $m = 10$) и единичными радиусами в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n = 10^5$) необходимо найти такую точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, чтобы целевая функция $f(x) := \sum_{k=1}^{m} d(x, \omega_k)$ принимала наименьшее значение на множестве точек единичного шара с центром в нуле, где $d(x, \omega_k) = \|x - a_k\| - 1$, если $\|x - a_k\| > 1$, и 0 в противном случае (здесь $\|x - a_k\| = \sqrt{(x_1 - a_{1k})^2 + (x_2 - a_{2k})^2 + \ldots + (x_n - a_{nk})^2}$).

В таблице выше для задачи 1 приведены усредненные результаты 10 экспериментов со случайным подбором координат точек для указанного количества итераций. Как видим, скорость сходимости метода близка к $O(\varepsilon^{-1})$. Это свойственно для неускоренных градиентных методов на классе задач оптимизации выпуклых функций с липшицевым градиентом (так называемых гладких задач). Однако рассматриваемая задача негладкая, поскольку точки недифференцируемости f лежат в области определения (в единичном шаре с центром в нуле). Для задач минимизации выпуклых липшицевых функций, как известно, оптимальная оценка скорости сходимости (суб)градиентных методов — $O(\varepsilon^{-2})$ [15]. Оценку $O(\varepsilon^{-1})$ можно объяснить адаптивностью предложенного метода.

Рассмотрим еще пример, где довольно много точек негладкости. В частности, все точки некоторого векторного отрезка могут быть точками негладкости, и условие (3.2) выполнено лишь для бесконечного значения Δ.

З а д а ч а 2 (Задача о наименьшем покрывающем шаре). Для заданных точек

$$a_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$$

найти евклидов шар наименьшего радиуса, в котором лежат эти точки. Координаты точек a_k выбираются случайно так, что $0.5 < \sqrt{a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \ldots + a_{nk}^2} < 1$, $k = \overline{1, 10}$, в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (размерность $n = 10^5$) необходимо найти такую точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, чтобы целевая функция

$$f(x) := \max_{k=\overline{1,m}} \|x - a_k\| = \max_{k=\overline{1,m}} \sqrt{(x_1 - a_{1k})^2 + (x_2 - a_{2k})^2 + \ldots + (x_n - a_{nk})^2}$$

принимала наименьшее значение. Мы рассматриваем задачу нахождения наиболее подходящей точки на единичном шаре с центром в нуле.

В таблице выше для задачи 2 приведены усредненные результаты 10 экспериментов со случайным подбором координат точек для определенного количества итераций. Как видим, скорость сходимости метода снова близка к $O(\varepsilon^{-1})$.

Приведенные результаты экспериментов указывают на потенциально неплохую эффективность предложенной адаптивной процедуры регулировки шага в методе. Отметим, что все вычисления были произведены с помощью программного обеспечения CPython 3.7 на компьютере с 3-ядерным процессором AMD Athlon II X3 450 с тактовой частотой 3,2 ГГц на каждое ядро. ОЗУ компьютера составляло 8 Гб.

Однако можно в некотором смысле и теоретически показать оптимальность предложенной схемы для рассматриваемых негладких задач. Оказывается, в случае известной величины

$\Delta < +\infty$ возможно несколько модифицировать алгоритм 1, обеспечив уменьшение $\Delta_k\|x^{k+1} - x^k\|$ в (2.2) до любой заданной величины. Это позволит показать оптимальность данного метода в теории нижних оракульных оценок [15] с точностью до логарифмического множителя.

Покажем, как это возможно сделать. Предположим, что на (k+1)-й итерации алгоритма 1 ($k = 0, 1, \ldots, N-1$) верно неравенство $L \leqslant L_{k+1} \leqslant 2L$ (как показано в п. 2 доказательства теоремы 1, этого можно всегда добиться выполнением не более чем постоянного числа операций п. 2 листинга алгоритма 1). Для каждой итерации алгоритма 1 ($k = 0, 1, \ldots, N-1$) предложим такую процедуру

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Повторяем операции п. 2 } p \text{ раз, увеличивая } L_{k+1} \text{ в два}\\ \text{раза при неизменной } \Delta_{k+1} \leqslant 2\Delta.\end{array}} \tag{3.3}$$

Процедуру (3.3) остановим в случае выполнения одного из неравенств

$$\Delta_{k+1}\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.4}$$

или

$$f(x^{k+1}) \leqslant f(x^k) + \left\langle \widetilde{\nabla} f(x^k), x^{k+1} - x^k \right\rangle + 2^{p-1}L\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2. \tag{3.5}$$

Отметим, что здесь мы полагаем f точно заданной, т. е. $f_\delta = f$ ($\delta = 0$); $\widetilde{\nabla} f$ — некоторый субградиент f. Процедура (3.3) предполагает на $(k+1)$-й итерации ($k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$) обновления x^{k+1} (при сохранении x^k). Оценим количество повторений p шага п. 2 листинга алгоритма 1, необходимое для достижения альтернативы (3.4), (3.5). Для всяких $x^k, x^{k+1} \in Q$ по предположению верно неравенство

$$f(x^{k+1}) \leqslant f(x^k) + \left\langle \widetilde{\nabla} f(x^k), x^{k+1} - x^k \right\rangle + \frac{L}{2}\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2 + \Delta\left\|x^{k+1} - x^k\right\|,$$

причем $\Delta_{k+1} \leqslant 2\Delta$. Если не выполнено (3.4), то $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| > \dfrac{\varepsilon}{4\Delta}$ и (3.5) заведомо верно при

$$2^p > 1 + \frac{16\Delta^2}{\varepsilon L}, \tag{3.6}$$

поскольку в таком случае

$$\frac{2^p - 1}{2}L\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2 > 2\Delta\left\|x^{k+1} - x^k\right\|.$$

Итак, после повторения p процедур (p удовлетворяет (3.6)) типа (3.3) на каждой из N итераций алгоритма 1 неравенство (2.2) примет вид

$$f(\hat{x}) - f^* \leqslant \frac{R^2}{S_N} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{где} \quad S_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_{k+1}} \geqslant \frac{N}{2^{p+1}L}.$$

Поэтому $\dfrac{R^2}{S_N} \leqslant \dfrac{2^{p+1}LR^2}{N} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ в случае $N \geqslant \dfrac{2^{p+2}LR^2}{\varepsilon}$. С учетом (3.6) получаем оценку

$$N \geqslant \frac{4LR^2}{\varepsilon} + \frac{64\Delta^2R^2}{\varepsilon^2}.$$

При этом (3.6) означает, что на каждой итерации потребуется не более чем

$$p = \left\lceil \log_2\left(1 + \frac{16\Delta^2}{\varepsilon L}\right)\right\rceil$$

шагов типа п. 2 листинга алгоритма 1 (т. е. операций проектирования) для стандартной модели $\psi(y, x) = \langle \nabla f(x), y - x \rangle$. Итак, верна

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет определению 2 при $\psi(y,x) = \langle \nabla f(x), y-x\rangle$ с параметрами $\delta = \gamma = 0$ и $\Delta > 0$. Тогда в обозначениях теоремы 1 для выхода $\hat{x}$ модифицированного алгоритма 1 с учетом дополнительной процедуры (3.3) неравенство $f(\hat{x}) - f^* \leqslant \varepsilon$ будет гарантированно выполнено не более чем после*

$$\left\lceil \left(\frac{4LR^2}{\varepsilon} + \frac{64\Delta^2 R^2}{\varepsilon^2}\right)\right\rceil \cdot \left\lceil \log_2\left(1 + \frac{16\Delta^2}{\varepsilon L}\right)\right\rceil \tag{3.7}$$

вычислений субградиента f.

Таким образом доказано, что для рассмотренного класса негладких задач приемлемое качество решения можно достичь за $O\big(\varepsilon^{-2}\log_2\varepsilon^{-1}\big)$ вычислений субградиента f, что близко к оптимальной оценке с точностью до логарифмического множителя. Отметим, что примеры сходимости метода со скоростью $O(\varepsilon^{-1})$ для некоторых выпуклых негладких задач наблюдались и для так называемого универсального градиентного метода [16] с другой концепцией искусственной неточности. Однако для негладких задач с липшицевым целевым функционалом в [16] доказана оценка скорости сходимости вида $O\big(M_f\varepsilon^{-2}\big)$, зависящая еще от константы Липшица целевого функционала M_f. Полученная нами оценка (3.7) может быть лучше при малом $\Delta > 0$ (в этом случае оценка (3.7) близка к $O\big(\varepsilon^{-1}\big)$).

4. Метод для минимизации функций, удовлетворяющих условию градиентного доминирования при неточном задании целевой функции и градиента

Теперь предложим подход к задаче минимизации, вообще говоря, невыпуклых функций с неточно заданным градиентом. При этом метод предполагает адаптивную настройку на некоторые параметры, в том числе связанные с величиной погрешности задания градиента. Пусть рассматривается задача минимизации функции на всем пространстве $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой

(i) существует $x_* \in \mathbb{R}^n$ такое, что

$$f(x_*) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) =: f^*; \tag{4.1}$$

(ii) выполнено условие Поляка — Лоясиевича (1.8) (или (PL)-условие);

(iii) для некоторых постоянных $L > 0$ и $\Delta > 0$ верно неравенство

$$f(y) \leqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y-x\rangle + \frac{L\|y-x\|^2}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{4.2}$$

где норма $\|\cdot\|$ евклидова.

Если предположить, что в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ доступно приближенное значение $\widetilde{\nabla} f(x)$ градиента $\nabla f(x)$: $\big\|\widetilde{\nabla} f(x) - \nabla f(x)\big\| \leqslant \Delta \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ при некотором фиксированном $\Delta > 0$, то (4.2) верно с заменой градиента $\nabla f(x)$ на $\widetilde{\nabla} f(x)$. Далее для удобства будем обозначать $g_x := \|\nabla f(x)\|$ и $\widetilde{g}_x := \|\widetilde{\nabla} f(x)\|$. К задаче (4.1) будем применять градиентный метод вида

$$x^{k+1} = x^k - h_k\widetilde{\nabla} f(x^k), \tag{4.3}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ и $h_k > 0$. При этом h_k выберем так, чтобы

$$f(x^{k+1}) \leqslant f(x^k) + \big\langle \widetilde{\nabla} f(x^k), x^{k+1} - x^k\big\rangle + \frac{L\big\|x^{k+1}-x^k\big\|^2}{2} + \Delta_{k+1}\big\|x^{k+1}-x^k\big\|, \tag{4.4}$$

где $\Delta_{k+1} > 0$ — адаптивно подбираемая величина. В начале каждой итерации $\Delta_{k+1} := \dfrac{\Delta_k}{2}$, а далее Δ_{k+1} ($k = 0, 1, 2, \ldots$) увеличивается в два раза, и процедура (4.3) повторяется до тех пор, пока не выполняется (4.4).

Ясно, что (4.4) заведомо верно при $\Delta_{k+1} \geqslant \Delta$. Поэтому аналогично п. 2) доказательства теоремы 1 проверяется, что за конечное число таких шагов (4.4) будет выполнено на любой итерации ($k = 0, 1, 2, \ldots$), после чего

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \leqslant \varphi(h_k), \text{ где } \varphi(h) = -h\widetilde{g}_{x^k}^2 + \frac{Lh^2}{2}\widetilde{g}_{x^k} + 2h\widetilde{g}_{x^k}.$$

Выберем шаг h_k так, чтобы минимизировать величину $\varphi(h_k)$, т. е. $\varphi'(h_k) = 0$, и

$$h_k = \frac{1}{L} - \frac{\Delta_{k+1}}{L\widetilde{g}_{x^k}}.$$

В таком случае (4.4) означает, что

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \leqslant -\frac{1}{2L}\big(\widetilde{g}_{x^k} - \Delta_{k+1}\big)^2 \leqslant -\frac{1}{2L}\Big(\frac{\widetilde{g}_{x^k} - \Delta_{k+1}}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta}\Big)g_{x^k}^2, \tag{4.5}$$

поскольку $|\widetilde{g}_{x^k} - g_{x^k}| \leqslant \big\|\widetilde{\nabla} f(x^k) - \nabla f(x^k)\big\| \leqslant \Delta$ и $\widetilde{g}_{x^k} + \Delta \geqslant g_{x^k}$. Неравенство (4.5) означает, что для произвольного $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geqslant \frac{1}{2L}\Big(\frac{\widetilde{g}_{x^k} - \Delta_{k+1}}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta}\Big)^2 g_{x^k}^2 \geqslant \frac{\mu}{L}\Big(\frac{\widetilde{g}_{x^k} - \Delta_{k+1}}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta}\Big)^2\big(f(x^k) - f^*\big)$$

ввиду (PL)-условия (1.8). Поэтому

$$f(x^{k+1}) - f(x_*) \leqslant \Big(1 - \frac{\mu}{L}\Big(\frac{\widetilde{g}_{x^k} - \Delta_{k+1}}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta}\Big)^2\Big)\big(f(x^k) - f(x_*)\big),$$

откуда

$$f(x^{k+1}) - f^* \leqslant \prod_{i=0}^{k}\Big(1 - \frac{\mu}{L}\Big(\frac{\widetilde{g}_{x^i} - \Delta_{i+1}}{\widetilde{g}_{x^i} + \Delta}\Big)^2\Big)\big(f(x^0) - f^*\big). \tag{4.6}$$

Можно считать, что $\mu \leqslant L$, и ввиду $\widetilde{g}_{x^i} - \Delta_{i+1} < \widetilde{g}_{x^i} + \Delta$ в (4.6) справа входит произведение $k + 1$ числа, каждое из которых меньше 1. Адаптивность подбора $\Delta_{k+1} \leqslant 2\Delta$ на каждой итерации может привести к увеличению дроби $\dfrac{\widetilde{g}_{x^k} - \Delta_{k+1}}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta}$ и уменьшению множителей в (4.6), что потенциально улучшает оценку по сравнению с неадаптивным вариантом

$$f(x^{k+1}) - f^* \leqslant \prod_{i=0}^{k}\Big(1 - \frac{\mu}{L}\Big(\frac{\widetilde{g}_{x^i} - \Delta}{\widetilde{g}_{x^i} + \Delta}\Big)^2\Big)\big(f(x^0) - f^*\big). \tag{4.7}$$

Аналогичную оценку можно предложить, также используя следующий метод с адаптивным выбором не только погрешности на итерациях, но и величины L (см. алгоритм 2).

Для данного алгоритма будет верна оценка (4.8), обоснование которой аналогично (4.7). Более того, можно показать, что либо невязка $\min\limits_k f(x^k) - f^*$ убывает со скоростью геометрической прогрессии при увеличении k (см. (4.9)), либо она ограничена величиной Δ (см. (4.10)). Справедливо следующее утверждение.

А л г о р и т м 2: Адаптивный градиентный метод для функций, удовлетворяющих (PL)-условию.

Require: x^0 — начальная точка, параметры $\Delta_0,\ L_0$
$(2\mu \leqslant L_0 < 2L,\ \Delta_0 \leqslant 2\Delta)$.
1: $L_{k+1} := {}^{L_k}/_2,\ \Delta_{k+1} := {}^{\Delta_k}/_2$.
2: $x^{k+1} = x^k - h_k\widetilde{\nabla} f(x^k)$,

$$h_k = \frac{1}{L_{k+1}} - \frac{\Delta_{k+1}}{L_{k+1}\widetilde{g}_{x^k}},\ \widetilde{g}_{x^k} = \big\|\widetilde{\nabla} f(x^k)\big\|.$$

3: **repeat**
4: **if** $f(x^{k+1}) \leqslant f(x^k) + \Big\langle \widetilde{\nabla} f(x^k), x^{k+1} - x^k\Big\rangle + \frac{L_{k+1}}{2}\big\|x^{k+1} - x^k\big\|^2 + \Delta_{k+1}\big\|x^{k+1} - x^k\big\|$ **then**
5: $k := k + 1$ и выполнение п. 1.
6: **else**
7: $L_{k+1} := 2 \cdot L_{k+1};\ \Delta_{k+1} := 2 \cdot \Delta_{k+1}$ и выполнение п. 2.
8: **end if**
9: **until** $k >= N$
Ensure: x^{k+1}.

Теорема 3. *После k итераций алгоритма 2 будет выполняться следующее неравенство:*

$$f(x^{k+1}) - f^* \leqslant \prod_{i=0}^{k}\Big(1 - \frac{\mu}{L_{k+1}}\Big(\frac{\widetilde{g}_{x^i} - \Delta_{i+1}}{\widetilde{g}_{x^i} + \Delta}\Big)^2\Big)\big(f(x^0) - f^*\big). \tag{4.8}$$

Более того, если дополнительно потребовать для алгоритма 2 $\Delta_{k+1} = \min\{\Delta_{k+1}, \Delta\}$, то для всякого $C > 1$ будет выполняться одно из двух неравенств

$$f(x^{k+1}) - f^* \leqslant \Big(1 - \frac{\mu}{L}\Big(\frac{C-1}{C+1}\Big)^2\Big)^{k+1}\big(f(x^0) - f^*\big) \tag{4.9}$$

или

$$\min_{i=\overline{1,k+1}} f(x^i) - f^* < \frac{(C+1)^2\Delta^2}{2\mu}. \tag{4.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим лишь, что при произвольном $k \geqslant 0$ верно

$$\frac{\widetilde{g}_{x^k} - \Delta_{k+1}}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta} \geqslant \frac{\widetilde{g}_{x^k} - \Delta}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta} = 1 - \frac{2\Delta}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta}.$$

Пусть $\widetilde{g}_{x^k} \geqslant C\Delta$ для некоторой постоянной $C > 1$. Тогда $1 - \frac{2\Delta}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta} \geqslant 1 - \frac{2}{C+1} = \frac{C-1}{C+1} > 0$ и (4.6) принимает вид (4.9). Если же для некоторого k верно $\widetilde{g}_{x^k} < C\Delta$, то $g_{x^k} < C\Delta + \Delta = \Delta(C+1)$, и (4.10) верно в силу (PL)-условия (1.8). $\square$

З а м е ч а н и е 4. Можно рассматривать вместо (4.3) более слабое условие

$$f_\delta(y) \leqslant f_\delta(x) + \langle \widetilde{\nabla} f(x), y - x\rangle + \frac{L}{2}\|y - x\|^2 + \Delta\|y - x\| + \delta \quad \forall\, x, y \in Q \tag{4.11}$$

для некоторого $\delta > 0$ и приближения f_δ: $f_\delta(x) \leq f(x) \leq f_\delta + \delta$. Например, это актуально в случае, если значения f немного отличаются от значений некоторой достаточно гладкой функции $\widetilde{f}$, удовлетворяющей (4.3) (при этом $\widetilde{\nabla} f(x)$ — некоторое возмущенное с точностью Δ значение градиента $\nabla \widetilde{f}(x)$). Тогда рассмотрим метод (4.4), (4.5) с видоизмененным критерием выхода из итерации

$$f_\delta(x^{k+1}) \leqslant f_\delta(x^k) + \langle \widetilde{\nabla} f(x^k), x^{k+1} - x^k\rangle + \frac{L_{k+1}\|x^{k+1} - x^k\|^2}{2} + \Delta_{k+1}\|x^{k+1} - x^k\| + \delta_{k+1},$$

который предполагает адаптивный подбор величин Δ_{k+1} и δ_{k+1} при заданных изначально $L_0 \leqslant 2L$, $\Delta_0 \leqslant \Delta$ и $\delta_0 \leqslant 2\delta$. Тогда на каждой итерации вместо неравенства (4.5) будет верно

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) + \delta_{k+1} + \delta \geqslant f_\delta(x^k) - f_\delta(x^{k+1}) + \delta_{k+1} \geqslant \frac{\mu}{L_{k+1}} \Big(\frac{\widetilde{g}_{x^k} - \Delta_{k+1}}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta} \Big)^2 \big(f(x^k) - f^* \big),$$

откуда аналогично (4.6) имеем

$$f(x^{k+1}) - f^* \leqslant \Big(1 - \frac{\mu}{L_{k+1}} \Big(\frac{\widetilde{g}_{x^k} - \Delta_{k+1}}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta} \Big)^2 \Big) \big(f(x^k) - f^* \big) + \delta_{k+1} + \delta$$

$$\leqslant \Big(1 - \frac{\mu}{L_{k+1}} \Big(\frac{\widetilde{g}_{x^k} - \Delta_{k+1}}{\widetilde{g}_{x^k} + \Delta} \Big)^2 \Big) \Big(1 - \frac{\mu}{L_k} \Big(\frac{\widetilde{g}_{x^{k-1}} - \Delta_k}{\widetilde{g}_{x^{k-1}} + \Delta} \Big)^2 \Big) \big(f(x^{k-1}) - f^* \big)$$

$$+ \ (\delta_k + \delta) \Big(1 - \frac{\mu}{L_{k+1}} \Big(\frac{\widetilde{g}_{x^{k-1}} - \Delta_k}{\widetilde{g}_{x^{k-1}} + \Delta} \Big)^2 \Big) + \delta + \delta_{k+1} \leqslant \ldots$$

$$\leqslant \prod_{i=0}^{k} \Big(1 - \frac{\mu}{L_{i+1}} \Big(\frac{\widetilde{g}_{x^i} - \Delta_{i+1}}{\widetilde{g}_{x^i} + \Delta} \Big)^2 \Big) \big(f(x^0) - f^* \big) + \sum_{i=0}^{k-1} (\delta + \delta_{i+1}) \prod_{j=i}^{k} \Big(1 - \frac{\mu}{L_{j+1}} \Big(\frac{\widetilde{g}_{x^j} - \Delta_{j+1}}{\widetilde{g}_{x^j} + \Delta} \Big)^2 \Big) + \delta_{k+1} + \delta.$$

Полученная оценка выглядит несколько громоздко. Конкретизируя ее при постоянном $L_{i+1} = L$, $\Delta = 0$ и $\delta_{i+1} \leqslant 2\delta$ $(i \geqslant 0)$, получаем

$$f(x^{k+1}) - f^* \leqslant \Big(1 - \frac{\mu}{L} \Big)^{k+1} \big(f(x^0) - f^* \big) + \sum_{i=0}^{k} (\delta + \delta_{i+1}) \Big(1 - \frac{\mu}{L} \Big)^{k-i}$$

$$\leqslant \Big(1 - \frac{\mu}{L} \Big)^{k+1} \big(f(x^0) - f^* \big) + 3\delta \sum_{i=0}^{k} \Big(1 - \frac{\mu}{L} \Big)^{k-i} = \Big(1 - \frac{\mu}{L} \Big)^{k+1} \big(f(x^0) - f^* \big) + \frac{3\delta L}{\mu}.$$

Данное неравенство приводит к таким выводам. С одной стороны мы видим, что величина, связанная с погрешностью δ, ограничена. Однако она может быть довольно немалой при большом значении числа обусловленности $\dfrac{L}{\mu}$. Это показывает также, что замена слагаемого $\Delta\|y - x\|$ в (4.11) на $\dfrac{\Delta^2 + \|y - x\|^2}{2}$ может привести к ухудшению оценки качества решения при достаточно большом $\dfrac{L}{\mu}$.

З а м е ч а н и е 5. Аналогично второй части доказательства теоремы 1 можно проверить, что трудоемкость итерации адаптивного алгоритма 2 сопоставима с трудоемкостью аналогичного неадаптивного метода.

З а м е ч а н и е 6. Предложенные в этом разделе подходы можно применять и для некоторых задач негладкой оптимизации (см. предыдущий раздел и определение 3), для которых целевая функция удовлетворяет (PL)-условию (в частности, μ-сильно выпукла). Если определяющий степень негладкости функции параметр Δ достаточно мал, то найденные оценки (4.6)–(4.10) (см. также замечание 4) позволяют сделать вывод о близкой к линейной скорости сходимости.

Заключение

В настоящей работе рассмотрены некоторые подходы к концепции неточной модели целевой функции в оптимизации, которые учитывают как погрешность задания целевого функционала, так и погрешность задания градиента. Предложены методы с адаптивным выбором шага, а также адаптивной настройкой величины в оценке скорости сходимости, которая определяется упомянутыми погрешностями.

Сравнивая алгоритмы 1 и 2 между собой, отметим следующее. Преимущества алгоритма 1 (и его модификации из третьего раздела статьи) состоят в максимальной общности (метод можно использовать для широкого класса задач выпуклой оптимизации [2; 3], в том числе с условиями относительной гладкости [4]). Также, в отличие от алгоритма 2, для работы алгоритма 1 и использования найденной оценки скорости сходимости нет необходимости знать Δ (оценку неточности задания градиента). Как преимущества алгоритма 2 для функций, удовлетворяющих (PL)-условию, можно упомянуть близкую к линейной скорость сходимости и возможность использования метода на неограниченном допустимом множестве. Однако для оценок (4.6)–(4.10) необходимо знать верхнюю оценку величины Δ. Также существенно использована безусловность поставленной задачи. Оценка для алгоритма 1 в свою очередь проигрывает полученной для алгоритма 2 возможностью сколь угодно большого влияния погрешности градиента при $\gamma > 0$ для неограниченной области Q. Хорошо известно, что (PL)-условие заведомо верно в случае μ-сильной выпуклости целевой функции f относительно евклидовой нормы. Однако довольно хорошо известны примеры, когда нельзя быть уверенным даже в выпуклости $f(x)$, но (PL)-условие имеет место (см., например, разд. 4.3 из диссертации [8]). Это означает, что алгоритм 2 применим и для некоторых задач невыпуклой оптимизации. Интересно, что все рассмотренные методы применимы к некоторому классу задач негладкой оптимизации (см. определение 3).

В качестве актуальной задачи на будущее можно было бы выделить проблему построения так называемых ускоренных методов для рассмотренных классов задач. В частности, к ускоренным методам относят самые разные вариации так называемого быстрого градиентного метода (БГМ) (см., например, [1; 5; 8]). Для задач выпуклой гладкой оптимизации без погрешностей БГМ гарантирует лучшую оценку скорости сходимости по сравнению с (1.2). Известно также, что в сильно выпуклом случае использование ускоренных методов позволяет уменьшить знаменатель геометрической прогрессии, которая описывает скорость сходимости. Более того, неадаптивные ускоренные методы для релаксаций условия сильной выпуклости исследовались в [1]. Однако стоит отметить, что при наличии погрешностей ситуация становится уже менее тривиальной: в отличие от обычного градиентного метода возможно их накопление в итоговой оценке [6], либо же необходимо использовать довольно ограничительные условия на величины таких погрешностей [17]. Также пока не удалось предложить ускоренный метод, который применим в общем случае для относительно гладких задач [4]. Представляется интересной задача исследования применимости результатов настоящей работы для приближенного решения бесконечномерных задач, в частности, для некоторых типов линейных и нелинейных операторных уравнений.

Автор благодарит Александра Владимировича Гасникова, а также рецензента за полезные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Necoara I., Nesterov Y. Glineur F.** Linear convergence of first order methods for non-strongly convex optimization // Math. Program. 2019. Vol. 175. P. 69–107. doi: 10.1007/s10107-018-1232-1 .
2. **Тюрин А. И., Гасников А. В.** Быстрый градиентный спуск для задач выпуклой минимизации с оракулом, выдающим (δ, L)-модель функции в запрошенной точке. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 7. С. 1137–1150. doi: 10.1134/S0044466919070081 .
3. **Stonyakin F. S., Dvinskikh D., Dvurechensky P., Kroshnin A., Kuznetsova O., Agafonov A., Gasnikov A., Tyurin A., Uribe C. A., Pasechnyuk D., Artamonov S.** Gradient methods for problems with inexact model of the objective // Intern. Conf. on Mathematical optimization theory and operations research (MOTOR 2019): extended conference abstracts / eds. M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos. Cham: Springer, 2019. P. 97–114. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11548). doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_8 .

4. **Lu H., Freund R. M., Nesterov Y.** Relatively smooth convex optimization by Firstorder methods, and applications. // SIAM J. Optim. 2018. Vol. 28, no 1. P. 333–354. doi: 10.1137/16M1099546 .
5. **Devolder O., Glineur F., Nesterov Yu.** First-order methods of smooth convex optimization with inexact oracle. // Math. Program. 2014. Vol. 146, no. 1–2. P. 37–75. doi: 10.1007/s10107-013-0677-5 .
6. **Devolder O.** Exactness, inexactness and stochasticity in first-order methods for large-scale convex optimization: PhD thesis. 2013. 320 p.
7. **Nesterov Yu.** Gradient methods for minimizing composite functions // Math. Program. 2013. Vol. 140, no. 1. P. 125–161. doi: 10.1007/s10107-012-0629-5 .
8. **Нестеров Ю. Е.** Алгоритмическая выпуклая оптимизация: дисс… д-р физ.-мат. наук: 01.01.07. М.: МФТИ, 2013. 367 с.
9. **Karimi H., Nutini J., Schmidt M.** Linear convergence of пradient and зroximal-gradient methods under the Polyak–Lojasiewicz condition // Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases / eds. B. Berendt etc. Cham: Springer, 2016. P. 795–811. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 9851). doi: 10.1007/978-3-319-46128-1_50 .
10. **Mordukhovich B.** Variational analysis and generalized differentiation I, theory and examples. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. 579 p. (Part of the Grundlehren der mathematischen Wissenschaften book series; vol 330). doi: 10.1007/3-540-31247-1 .
11. **Поляк Б. Т.** Градиентные методы минимизации функционалов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Том 3, № 4. С. 643–653. doi: 10.1016/0041-5553(63)90382-3 .
12. **Поляк Б. Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
13. **Стонякин Ф. С.** Аналог квадратичной интерполяции для специального класса негладких функционалов и одно его приложение к адаптивному методу зеркального спуска // Динамические системы. 2019. Т. 9 (37), № 1. С. 3–16.
14. **Mordukhovich B. S., Nam N. M.** Applications of variational analysis to a generalized Fermat–Torricelli problem // J. Optim. Theory Appl. 2011. Vol. 148, no. 3. P. 431–454. doi: 10.1007/s10957-010-9761-7 .
15. **Немировский А. С., Юдин Д. Б.** Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука. Гл. редакция физ.-мат. литературы, 1979. 384 с.
16. **Nesterov Yu.** Universal gradient methods for convex optimization problems // Math. Program. Ser. A. 2015. Vol. 152, iss. 1-2. P. 381–404. doi: 10.1007/s10107-014-0790-0 .
17. **D'Aspremont A.** Smooth optimization with approximate gradient. // SIAM J. Optimi. 2008. Vol. 19, no. 3. P. 1171–1183. doi: 10.1137/060676386 .

Поступила 8.09.2019
После доработки 21.10.2019
Принята к публикации 28.10.2019

Стонякин Федор Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
г. Симферополь
e-mail: fedyor@mail.ru

REFERENCES

1. Necoara I., Nesterov Y. Glineur F. Linear convergence of first order methods for non-strongly convex optimization. *Math. Program.*, 2019, vol. 175, pp. 69–107. doi: 10.1007/s10107-018-1232-1 .
2. Tyurin A. I., Gasnikov A. V. Fast gradient descent for convex minimization problems with an oracle issuing (δ, L)-model of the function at the requested point. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 7, pp. 1085–1097. doi: 10.1134/S0044466919070081 .
3. Stonyakin F. S., Dvinskikh D., Dvurechensky P., Kroshnin A., Kuznetsova O., Agafonov A., Gasnikov A., Tyurin A., Uribe C. A., Pasechnyuk D., Artamonov S. Gradient methods for problems with inexact model of the objective. In: M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos (eds.) Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019), *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 11548, Cham: Springer, 2019, pp. 97–114. doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_8 .
4. Lu H., Freund R. M., Nesterov Y. Relatively smooth convex optimization by Firstorder methods, and applications. *SIAM J. Optim.*, 2018, vol. 28, no 1, pp. 333–354. doi: 10.1137/16M1099546 .

5. Devolder O., Glineur F., Nesterov Yu. First-order methods of smooth convex optimization with inexact oracle. *Math. Program.*, 2014, vol. 146, no. 1-2, pp. 37–75. doi: 10.1007/s10107-013-0677-5 .
6. Devolder O. Exactness, Inexactness and Stochasticity in First-Order Methods for Large-Scale Convex Optimization, *PhD thesis*, 2013, 320 p.
7. Nesterov Yu. Gradient methods for minimizing composite functions. *Math. Program.*, 2013, vol. 140, no. 1, pp. 125–161. doi: 10.1007/s10107-012-0629-5 .
8. Nesterov Yu. E. *Algoritmicheskaya vypuklaya optimizatsiya* [Algorithmic convex optimization]. Doctor Sci. (Phys.-Math.) Dissertation. Moscow: Mosk. Phys.-Tech. Inst. (State University), 2013, 367 p.
9. Karimi H., Nutini J., Schmidt M. Linear convergence of gradient and proximal-gradient methods under the Polyak–Lojasiewicz condition. In: B. Berendt etc. (eds.), Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases, *Lecture Notes in Computer Science,* vol. 9851, Cham: Springer, 2016, pp. 795–811. doi: 10.1007/978-3-319-46128-1_50 .
10. Mordukhovich B. *Variational analysis and generalized differentiation* I*, Theory and examples*, Part of the Grundlehren der mathematischen Wissenschaften book series, vol 330, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006, 579 p. doi: 10.1007/3-540-31247-1 .
11. Polyak B. T. Gradient methods for minimizing functionals. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 3, no. 4, pp. 643–653. doi: 10.1016/0041-5553(63)90382-3 .
12. Polyak B. T. *Vvedenie v optimizaciju* [Introduction to Optimization]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 384 p.
13. Stonyakin F. S. An analog of quadratic interpolation for a special class of non-smooth functionals and one of its applications to the adaptive method of mirror descent. *Dinamicheskie sistemy*, 2019, vol. 9 (37), no. 1, pp. 3–16 (in Russian).
14. Mordukhovich B. S., Nam N. M. Applications of variational analysis to a generalized Fermat–Torricelli problem. *J. Optim. Theory Appl.*, 2011, vol. 148, no. 3, pp. 431–454. doi: 10.1007/s10957-010-9761-7 .
15. Nemirovsky A. S., Yudin D. B. *Slozhnost' zadach i effektivnost' metodov optimizatsii* [The complexity of tasks and the effectiveness of optimization methods]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 384 p.
16. Nesterov Yu. Universal gradient methods for convex optimization problems. *Math. Program. Ser. A*, 2015, vol. 152, iss. 1-2, pp. 381–404. doi: 10.1007/s10107-014-0790-0 .
17. D'Aspremont A. Smooth optimization with approximate gradient. *SIAM J. Optim.*, 2008, vol. 19, no 3, pp. 1171–1183. doi: 10.1137/060676386 .

Received September 8, 2019
Revised October 21, 2019
Accepted October 28, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-71-00048).

Fedor Sergeevich Stonyakin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Republic of Crimea, 295007 Russia, e-mail: fedyor@mail.ru .

Cite this article as: F. S. Stonyakin, Adaptation to inexactness for some gradient-type optimization methods, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 210–225 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.54+519.175

О ПРЕДЕЛАХ ВЕРШИННО-СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ И ИХ АВТОМОРФИЗМАХ

В. И. Трофимов

С использованием простого, но весьма общего способа построения графов Кэли с тривиальным стабилизатором вершины строится пример бесконечного локально конечного графа Кэли (и, следовательно, пример бесконечного связного локально конечного вершинно-симметрического унимодулярного графа), изолированного в пространстве связных локально конечных вершинно-симметрических графов. Приводятся также примеры неизолированных в этом пространстве графов Кэли, которые изолированы от множества связных вершинно-симметрических конечных графов.

Ключевые слова: связный локально конечный вершинно-симметрический граф, граф Кэли, сходимость графов.

V. I. Trofimov. On limits of vertex-symmetric graphs and their automorphisms.

Using a simple but rather general method of constructing Cayley graphs with trivial vertex stabilizers, we give an example of an infinite locally finite Cayley graph (and, hence, an example of an infinite connected locally finite vertex-symmetric unimodular graph) which is isolated in the space of connected locally finite vertex-symmetric graphs. We also give examples of Cayley graphs which are not isolated in this space but are isolated from the set of connected vertex-symmetric finite graphs.

Keywords: connected locally finite vertex-symmetric graph, Cayley graph, convergence of graphs.

MSC: 05C25, 20F65, 20F69

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-226-234

1. Введение и вспомогательные результаты

Настоящая заметка возникла в связи с [8]. В ней показывается, что простые наблюдения, касающиеся сходимости связных локально конечных вершинно-симметрических графов, в сочетании с одним способом построения графов Кэли с тривиальным стабилизатором вершины, а также некоторыми известными результатами делают возможным указать в пространстве связных локально конечных вершинно-симметрических графов изолированный бесконечный граф Кэли (и, следовательно, изолированный бесконечный унимодулярный граф, что отвечает на вопрос из [8]) и неизолированный граф Кэли, который изолирован от множества связных вершинно-симметрических конечных графов.

Под графом в этой заметке понимается неориентированный граф без петель и без кратных ребер. Если Γ — граф, то $V(\Gamma)$ — множество его вершин, $E(\Gamma)$ — множество его ребер, $d_\Gamma(.,.)$ — обычное расстояние (метрика, если Γ связен) на $V(\Gamma)$, $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ — группа автоморфизмов графа Γ (рассматриваемых как подстановки на $V(\Gamma)$). Далее, если $x \in V(\Gamma)$, то $\Gamma(x) = \{y \in V(\Gamma) : \{x, y\} \in E(\Gamma)\}$ — окрестность x в Γ, $B_\Gamma(x, r) = \{y \in V(\Gamma) : d_\Gamma(x, y) \leq r\}$, где $r \in \mathbb{R}$, — шар радиуса r с центром x графа Γ, G_x, где $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$, — стабилизатор вершины x в группе G. Кроме того, $\langle X\rangle_\Gamma$, где $X \subseteq V(\Gamma)$, — подграф графа Γ, порожденный X. Граф Γ вершинно-симметричен, если $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ транзитивна на $V(\Gamma)$. Для группы G и системы ее порождающих $M = M^{-1} \not\ni 1$ через $\Gamma_{G,M}$ обозначается граф Кэли группы G, построенный по M.

Пусть $\mathfrak{G}$ — множество всех (классов изоморфных) связных локально конечных вершинно-симметрических графов, наделенное следующей метрикой $\rho(.,.)$: для $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathfrak{G}, \Gamma_1 \not\cong \Gamma_2$,

$\rho(\Gamma_1,\Gamma_2)=2^{-n}$, где $n=\max\{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}:\langle B_{\Gamma_1}(x_1,m)\rangle_{\Gamma_1}\cong\langle B_{\Gamma_2}(x_2,m)\rangle_{\Gamma_2},\ x_1\in V(\Gamma_1),x_2\in V(\Gamma_2)\}$ (здесь и далее $\mathbb{N}$ — множество целых положительных чисел). Во многом обязанное своим появлением работам [9] и [1] метрическое пространство связных локально конечных вершинно-симметрических графов $\mathfrak{G}$ существенно используется в [2; 3]. Далее в этом разделе при описании простых свойств пространства $\mathfrak{G}$ мы во многом следуем [2, п. 1][1] и [3, § 2].

Нам будет удобно зафиксировать следующую ситуацию, возникающую при сходимости в $\mathfrak{G}$ последовательности $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ к Γ.

(*) $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность графов из $\mathfrak{G}$, сходящаяся к $\Gamma\in\mathfrak{G}$, $x\in V(\Gamma)$, $x_i\in V(\Gamma_i)$ для $i\in\mathbb{N}$, φ_i для $i\in\mathbb{N}$ — изоморфизм $\langle B_\Gamma(x,n_i)\rangle_\Gamma$ на $\langle B_{\Gamma_i}(x_i,n_i)\rangle_{\Gamma_i}$, отображающий x в x_i, где $n_i\in\mathbb{N}$ и $n_i\to\infty$ при $i\to\infty$.

Предположим, что имеет место (*). Тогда, если $y_1,\dots,y_k,z_1,\dots,z_k$ — вершины графа Γ такие, что для бесконечного множества значений i существует автоморфизм g_i графа Γ_i, отображающий $\varphi_i(y_j)$ в $\varphi_i(z_j)$ для всех $1\le j\le k$, то существует такой автоморфизм g графа Γ, что $g(y_j)=z_j$ для всех $1\le j\le k$. Отсюда следует, что для произвольного фиксированного $r\in\mathbb{N}$ для всех достаточно больших i группа $\varphi_i^{-1}\mathrm{Aut}(\Gamma_i)_{x_i}\varphi_i$ идуцирует на $B_\Gamma(x,r)$ подгруппу группы, индуцируемой $\mathrm{Aut}(\Gamma)_x$ на $B_\Gamma(x,r)$. В частности, если для некоторого $r\in\mathbb{N}$ поэлементный стабилизатор $B_\Gamma(x,r-1)$ в $\mathrm{Aut}(\Gamma)_x$ действует тривиально на $B_\Gamma(x,r)$, то для всех достаточно больших i поэлементный стабилизатор $B_{\Gamma_i}(x_i,r-1)$ в $\mathrm{Aut}(\Gamma_i)_{x_i}$ действует тривиально на $B_{\Gamma_i}(x_i,r)$. Поскольку (в силу вершинной транзитивности $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\mathrm{Aut}(\Gamma_i)$) последние условия эквивалентны соответственно точности действия $\mathrm{Aut}(\Gamma)_x$ на $B_\Gamma(x,r-1)$ и точности действия $\mathrm{Aut}(\Gamma_i)_{x_i}$ на $B_{\Gamma_i}(x_i,r-1)$, то справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Если $\mathrm{Aut}(\Gamma)_x$ — конечная группа, то для всех достаточно больших i имеем $\mathrm{Aut}(\Gamma_i)_{x_i}\lesssim\mathrm{Aut}(\Gamma)_x$. В частности, если $\mathrm{Aut}(\Gamma)_x=1$, то $\mathrm{Aut}(\Gamma_i)_{x_i}=1$ для всех достаточно больших i.*

Последовательность $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$, где $g_i\in\mathrm{Aut}(\Gamma_i)$ для $i\in\mathbb{N}$, $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$-сходится к $g\in\mathrm{Aut}(\Gamma)$, если для произвольной вершины y графа Γ и всех достаточно больших i (вершины $\varphi_i(y)$ и $\varphi_i(g(y))$ определены и) $g_i(\varphi_i(y))=\varphi_i(g(y))$ (см. [3, § 2]). Далее, пусть $G_i\le\mathrm{Aut}(\Gamma_i)$ для всех $i\in\mathbb{N}$. Тогда автоморфизм g графа Γ называется $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$-предельным для $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$, если для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $(i_t)_{t\in\mathbb{N}}$ найдутся такие $g_{i_t}\in G_{i_t}$, что последовательность $(g_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$ $(\varphi_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$-сходится к g (см. [3, § 2]). Вообще говоря, множество $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$-предельных для $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ автоморфизмов графа Γ не является подгруппой группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Однако, как легко заметить, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Предположим, что имеет место (*) и $G_i\le\mathrm{Aut}(\Gamma_i)$, $i\in\mathbb{N}$, — вершинно-транзитивные группы. Тогда группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ содержит вершинно-транзитивную подгруппу, состоящую из $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$-предельных для $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ автоморфизмов графа Γ. Более того, существуют такая возрастающая последовательности натуральных чисел $(i_t)_{t\in\mathbb{N}}$ и такая вершинно-транзитивная подгруппа G группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, что для каждого $g\in G$ найдутся $g_{i_t}\in G_{i_t}$, $t\in\mathbb{N}$, для которых последовательность $(g_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$ $(\varphi_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$-сходится к g.*

В качестве следствия получаем

Предложение 3. *Если $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность графов Кэли из $\mathfrak{G}$, сходящаяся к $\Gamma\in\mathfrak{G}$, то Γ также является графом Кэли. Другими словами, в $\mathfrak{G}$ графы Кэли групп образуют замкнутое подмножество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем предполагать (без потери общности), что для $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и Γ выполняется (*). Тогда, если Γ_i есть граф Кэли группы G_i, то Γ есть граф Кэли группы G, для

[1] Пользуясь случаем, укажем на имеющиеся в [2] опечатки: на с. 150 в строке 14 вместо “изоморфно” должно быть “содержит подгруппу, изоморфную”, а в строке 23 вместо $\cong$ должно быть $\lesssim$.

которой имеется последовательность натуральных чисел $(i_t)_{t\in\mathbb{N}}$ с указанным в предложении 2 свойством.

Формулировке предложения 4 предпошлем определения (см. [7]). Подмножество группы называется дискриминирующим, если оно не содержит 1 и имеет непустое пересечение с каждой неединичной нормальной подгруппой группы. Группа, обладающая конечным дискриминирующим подмножеством, называется конечно дискриминируемой. По [7, Proposition 2.2] группа изолирована тогда и только тогда, когда она конечно определена и обладает конечным дискриминирующим подмножеством. (Определение изолированной группы см. в [7]; однако в дальнейшем нами используется, по существу, лишь указанная характеризация таких групп.)

Предложение 4. *Пусть G — изолированная группа, порожденная конечным множеством $M = M^{-1} \not\ni 1$. Предположим, что стабилизатор вершины графа $\Gamma_{G,M}$ в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma_{G,M})$ тривиален. Тогда граф $\Gamma_{G,M}$ изолирован в $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Предположим, что, напротив, имеется последовательность $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ связных вершинно-симметрических графов, сходящаяся к $\Gamma := \Gamma_{G,M}$, причем $\Gamma_i \not\cong \Gamma$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Далее мы используем применительно к $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и Γ обозначения из (*), причем предполагаем, что x есть вершина 1 графа Кэли $\Gamma_{G,M}$ (и следовательно, окрестность x в графе Γ есть M).

Поскольку $\mathrm{Aut}(\Gamma)_x = 1$, то согласно предложению 1 для всех достаточно больших i, скажем, для всех $i > i_0$, где $i_0 \in \mathbb{N}$, имеем $\mathrm{Aut}(\Gamma_i)_{x_i} = 1$ и, следовательно, Γ_i является графом Кэли группы $G_i := \mathrm{Aut}(\Gamma_i)$, построенным по некоторой системе ее порождающих $M_i = M_i^{-1} \not\ni 1$. Для таких i будем, не теряя общности, считать, что x_i есть вершина 1 графа Кэли Γ_{G_i,M_i} (и следовательно, окрестность x_i в графе Γ_i есть M_i). Из $\mathrm{Aut}(\Gamma)_x = 1$ следует, кроме того, что $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ совпадает с группой левых сдвигов G и является единственной вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа Γ. Согласно предложению 2 это влечет существование такой возрастающей последовательности натуральных чисел $(i_t)_{t\in\mathbb{N}}$, где $i_1 > i_0$, что для каждого $g \in G$ найдутся $g_{i_t} \in G_{i_t}$, $t \in \mathbb{N}$, для которых последовательность $(g_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$ $(\varphi_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$-сходится к g.

Пусть $M = \{h_1, \dots, h_d\}$. Для каждого $1 \le s \le d$ пусть $h_{s,t} \in G_{i_t}$, $t \in \mathbb{N}$, таковы, что последовательность $(h_{s,t})_{t\in\mathbb{N}}$ $(\varphi_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$-сходится к h_s. Ясно, что $M_{i_t} = \{h_{1,t}, \dots, h_{d,t}\}$ для всех достаточно больших t. Далее, для произвольного произведения $h_{j_1} \dots h_{j_k}$, где $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, d\}$, последовательность $(h_{j_1,t} \dots h_{j_k,t})_{t\in\mathbb{N}}$ $(\varphi_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$-сходится к $h_{j_1} \dots h_{j_k}$. В частности, если $h_{j_1} \dots h_{j_k} = 1$, то для всех достаточно больших t имеем $h_{j_1,t} \dots h_{j_k,t}(x_{i_t}) = x_{i_t}$, что с учетом тривиальности стабилизатора x_{i_t} в G_{i_t} для всех $t \in \mathbb{N}$ влечет $h_{j_1,t} \dots h_{j_k,t} = 1$ для всех достаточно больших t. В силу конечной определенности изолированной группы G отсюда следует, что для всех достаточно больших t отображение $h_s \mapsto h_{s,t}$, $1 \le s \le d$, продолжается до гомоморфизма группы G на группу G_{i_t}. Предположим, что для бесконечного множества значений $t \in \mathbb{N}$ эти гомоморфизмы определены и имеют нетривиальное ядро. Тогда, поскольку изолированная группа G имеет конечное дискриминирующее подмножество, найдется произведение $h_{j_1} \dots h_{j_k}$, где $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, d\}$, принадлежащее этим ядрам для бесконечного множества значений $t \in \mathbb{N}$, но отличное от 1. Для бесконечного множества значений $t \in \mathbb{N}$ имеем, следовательно, $h_{j_1,t} \dots h_{j_k,t} = 1$. Но последовательность $(h_{j_1,t} \dots h_{j_k,t})_{t\in\mathbb{N}}$ $(\varphi_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$-сходится к $h_{j_1} \dots h_{j_k}$. Поэтому $h_{j_1} \dots h_{j_k}(x) = x$, что влечет $h_{j_1} \dots h_{j_k} = 1$, а это противоречит выбору $h_{j_1} \dots h_{j_k}$. Таким образом, для всех достаточно больших t имеется изоморфизм группы G на группу G_{i_t}, отображающий M на M_{i_t}, а потому и изоморфизм графа $\Gamma = \Gamma_{G,M}$ на граф $\Gamma_{i_t} = \Gamma_{G_{i_t},M_{i_t}}$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения 4.

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний относительно модулярных функций для графов и свойства унимодулярности (ср. [4]). Пусть $\Gamma \in \mathfrak{G}$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, наделенная естественной топологией поточечной сходимости, хаусдорфова и локально компактна. В частности, для произвольной замкнутой подгруппы H группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ на σ-кольце, порожденном всеми компактными подмножествами группы H, определена (однозначно с точностью до вещественного положительного постоянного множителя) левоинвариантная мера

Хаара μ_H, а на H определена модулярная функция Δ_H (являющаяся гомоморфизмом группы H в мультипликативную группу положительных вещественных чисел), причем для произвольных $x \in V(\Gamma)$ и $h \in H$ имеем $0 < \mu_H(H_x) < \infty$ и

$$\Delta_H(h) = \mu_H(H_{h^{-1}(x)})/\mu_H(H_x) = |H_{h^{-1}(x)} : H_{h^{-1}(x)} \cap H_x|/|H_x : H_{h^{-1}(x)} \cap H_x|$$
$$= |H_{h^{-1}(x)}(x)|/|H_x(h^{-1}(x))| = |H_x(h(x))|/|H_x(h^{-1}(x))|. \quad (1)$$

Замкнутая подгруппа H группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ называется унимодулярной, если Δ_H всюду на H принимает единичное значение; граф Γ называется унимодулярным, если группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ унимодулярна. Если H — вершинно-транзитивная замкнутая группа автоморфизмов графа Γ и $x \in V(\Gamma)$, то H порождается компактной подгруппой H_x (на которой Δ_H всюду принимает единичное значение) и произвольным набором элементов $\{h_i : i \in I\}$ группы H таким, что $\Gamma(x) = \{h_i(x) : i \in I\}$. Следовательно, в этом случае унимодулярность H эквивалентна выполнению равенства $\Delta_H(h_i) = 1$ для всех $i \in I$, что с учетом (1) эквивалентно, в свою очередь, совпадению для каждой H_x-орбиты на $\Gamma(x)$ ее длины с длиной спаренной с ней (в группе H) H_x-орбиты на $\Gamma(x)$. (Напомним, что если H — произвольная вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ, $x \in V(\Gamma)$ и Y — H_x-орбита, то спаренной с Y (в группе H) H_x-орбитой называется H_x-орбита $Y^* = \{h^{-1}(x) : h \in H \text{ и } h(x) \in Y\}$.) Замечая, кроме того, что для произвольной вершинно-транзитивной группы H автоморфизмов графа Γ и $x \in V(\Gamma)$ стабилизатор x в замыкании H в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ имеет на $\Gamma(x)$ те же орбиты, что H_x, получаем справедливость утверждения (1) следующего предложения.

Предложение 5. (1) *Пусть* $\Gamma \in \mathfrak{G}$ *и* $x \in V(\Gamma)$. *Если* H *— вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа* Γ, *то ее замыкание в* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *тогда и только тогда является унимодулярной группой, когда длина каждой* H_x*-орбиты на* $\Gamma(x)$ *совпадает с длиной спаренной с ней* (*в группе* H) H_x*-орбиты на* $\Gamma(x)$.

(2) *Если* $\Gamma \in \mathfrak{G}$ *и* $H \leq G$ *— вершинно-транзитивные замкнутые группы автоморфизмов графа* Γ, *то из унимодулярности* H *следует унимодулярность* G. *В частности, если* $\Gamma \in \mathfrak{G}$ *допускает вершинно-транзитивную замкнутую унимодулярную группу автоморфизмов, то* Γ *унимодулярен.*

Доказательство. Утверждение (1) предложения доказано выше. Докажем утверждение (2). Пусть $\Gamma \in \mathfrak{G}$ и $H \leq G$ — вершинно-транзитивные замкнутые группы автоморфизмов графа Γ, причем H унимодулярна. Согласно (1) для $x \in V(\Gamma)$ длина каждой H_x-орбиты на $\Gamma(x)$ совпадает с длиной спаренной с ней (в группе H) H_x-орбиты на $\Gamma(x)$. Но каждая G_x-орбита на $\Gamma(x)$ есть объединение некоторого набора H_x-орбит на $\Gamma(x)$, причем спаренная с ней (в группе G) G_x-орбита на $\Gamma(x)$ есть объединение H_x-орбит на $\Gamma(x)$, спаренных с H_x-орбитами из этого набора (в группе H). Поэтому длина каждой G_x-орбиты на $\Gamma(x)$ совпадает с длиной спаренной с ней (в группе G) G_x-орбиты на $\Gamma(x)$, что согласно (1) влечет унимодулярность группы G. Предложение доказано.

Замечание 1. Вершинно-транзитивная замкнутая группа автоморфизмов унимодулярного графа $\Gamma \in \mathfrak{G}$ (например, регулярного дерева валентности 3) может не быть унимодулярной.

Следствием предложения 5 является унимодулярность графа $\Gamma \in \mathfrak{G}$, являющегося графом Кэли или, более общо, допускающего вершинно-транзитивную дискретную группу автоморфизмов.

2. Способ получения графов Кэли с тривиальным стабилизатором вершины

Предложение 7 настоящего раздела дает весьма общий способ построения графов Кэли с тривиальным стабилизатором вершины в группе всех автоморфизмов графа. Предложение 6 используется при доказательстве предложения 7.

Предложение 6. *Пусть F — свободная группа со свободными порождающими x_1, x_2, и пусть*

$$D := \{x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, x_1^2, x_1^{-2}, x_1x_2, x_2^{-1}x_1^{-1}, x_2^4, x_2^{-4}\}.$$

Обозначим через Δ подграф графа $\Gamma_{F,D}$, порожденный шаром радиуса 2 с центром в 1 графа $\Gamma_{F,D}$. Тогда автоморфизмы графа Δ, стабилизирующие вершину 1, поэлементно стабилизируют множество $\Delta(1) = D$.

Доказательство. Хотя здесь можно было ограничиться указанием, что справедливость утверждения предложения несложно устанавливается непосредственной проверкой, мы приведем соответствующие аргументы.

Смежными с вершиной 1 в графе Δ являются следующие вершины:
x_1, для которой $\Delta(x_1) \cap \Delta(1) = \{x_1^{-1}, x_1^2, x_1x_2\}$;
x_1^{-1}, для которой $\Delta(x_1^{-1}) \cap \Delta(1) = \{x_1, x_2, x_1^{-2}\}$;
x_2, для которой $\Delta(x_2) \cap \Delta(1) = \{x_1^{-1}\}$;
x_2^{-1}, для которой $\Delta(x_2^{-1}) \cap \Delta(1) = \{x_2^{-1}x_1^{-1}\}$;
x_1^2, для которой $\Delta(x_1^2) \cap \Delta(1) = \{x_1\}$;
x_1^{-2}, для которой $\Delta(x_1^{-2}) \cap \Delta(1) = \{x_1^{-1}\}$;
x_1x_2, для которой $\Delta(x_1x_2) \cap \Delta(1) = \{x_1\}$;
$x_2^{-1}x_1^{-1}$, для которой $\Delta(x_2^{-1}x_1^{-1}) \cap \Delta(1) = \{x_2^{-1}\}$;
x_2^4, для которой $\Delta(x_2^4) \cap \Delta(1) = \varnothing$;
x_2^{-4}, для которой $\Delta(x_2^{-4}) \cap \Delta(1) = \varnothing$.

Отсюда следует, что каждый автоморфизм графа Δ, стабилизирующий вершину 1, оставляет на месте следующие множества: $\{x_1, x_1^{-1}\}$, $\{x_2, x_1^2, x_1^{-2}, x_1x_2\}(= \{((\Delta(x_1)\cap\Delta(1))\cup(\Delta(x_1^{-1})\cap\Delta(1))) \setminus \{x_1, x_1^{-1}\}\})$, $\{x_2^4, x_2^{-4}\}$, $\{x_2^{-1}, x_2^{-1}x_1^{-1}\}$.

Предположим, что некоторый автоморфизм a графа Δ стабилизирует вершину 1, но меняем местами вершины x_1 и x_1^{-1}. Тогда a также меняет местами множества $\Delta(x_1) \cap \Delta(1)$ и $\Delta(x_1^{-1}) \cap \Delta(1)$ и потому меняет местами множества $\{x_1^2, x_1x_2\}$ и $\{x_2, x_1^{-2}\}$. В частности, $a(x_2) \in \{x_1^2, x_1x_2\}$. Но в графе Δ имеется не проходящий через 1 путь длины 3, начинающийся в x_2 и заканчивающийся в x_2^4, и в то же время отсутствует не проходящий через 1 путь длины 3, начинающийся в одной из вершин x_1^2, x_1x_2 и заканчивающийся в одной из вершин x_2^4, x_2^{-4}, что противоречит a-допустимости множества $\{x_2^4, x_2^{-4}\}$. Таким образом, каждый автоморфизм графа Δ, стабилизирующий вершину 1, оставляет на месте каждую из вершин x_1, x_1^{-1}, а потому и каждое из множеств $(\Delta(x_1)\cap\Delta(1))\setminus\{x_1^{-1}\} = \{x_1^2, x_1x_2\}$, $(\Delta(x_1^{-1})\cap\Delta(1))\setminus\{x_1\} = \{x_2, x_1^{-2}\}$. Итак, с учетом предыдущего каждый автоморфизм графа Δ, стабилизирующий вершину 1, оставляет на месте следующие множества:

$$\{x_1\}, \{x_1^{-1}\}, \{x_2, x_1^{-2}\}, \{x_1^2, x_1x_2\}, \{x_2^4, x_2^{-4}\}, \{x_2^{-1}, x_2^{-1}x_1^{-1}\}. \tag{2}$$

Далее, поскольку в графе Δ имеется не проходящий через 1 путь длины 3, начинающийся в x_2 и заканчивающийся в x_2^4, но отсутствует не проходящий через 1 путь длины 3, начинающийся в x_1^{-2} и заканчивающийся в одной из вершин x_2^4, x_2^{-4}, то с учетом (2) заключаем, что каждый автоморфизм графа Δ, стабилизирующий вершину 1, оставляет на месте следующие множества:

$$\{x_1\}, \{x_1^{-1}\}, \{x_2\}, \{x_1^{-2}\}, \{x_1^2, x_1x_2\}, \{x_2^4, x_2^{-4}\}, \{x_2^{-1}, x_2^{-1}x_1^{-1}\}. \tag{3}$$

Таким образом, для доказательства предложения 6 остается показать, что каждый автоморфизм графа Δ, стабилизирующий вершину 1, стабилизирует вершины x_1^2, x_1x_2, x_2^{-1}, $x_2^{-1}x_1^{-1}$, x_2^4, x_2^{-4}.

Поскольку в графе Δ имеется не проходящий через 1 путь длины 2, начинающийся в x_1 и заканчивающийся в x_1^2, но отсутствует не проходящий через 1 путь длины 2, начинающийся в x_1 и заканчивающийся в x_1x_2, то с учетом (3) заключаем, что каждый автоморфизм графа Δ, стабилизирующий вершину 1, оставляет на месте каждую из вершин x_1^2, x_1x_2.

Предположим, что имеется такой стабилизирующий вершину 1 автоморфизм a графа Δ, что $a(x_2^4) = x_2^{-4}$. Согласно (3) при этом a стабилизирует вершину x_2. Так как в графе Δ имеется единственный не проходящий через 1 путь длины 3, начинающийся в x_2 и заканчивающийся в x_2^{-4}, а именно путь $(x_2, x_2^{-3}, x_2^{-4}x_1^{-1}, x_2^{-4})$, и имеется не проходящий через 1 путь $(x_2, x_2^2, x_2^3, x_2^4)$ длины 3, начинающийся в x_2 и заканчивающийся в x_2^4, то отсюда следует, что $a(x_2^2) = x_2^{-3}$. Но $x_2^{-3} \in \Delta(x_2^{-4})$, а $a^{-1}(x_2^{-3}) = x_2^2 \notin \Delta(x_2^4) = a^{-1}(\Delta(x_2^{-4}))$. Полученное противоречие означает, что каждый автоморфизм графа Δ, стабилизирующий вершину 1, оставляет на месте каждую из вершин x_2^4, x_2^{-4}.

Наконец, предположим, что имеется такой стабилизирующий вершину 1 автоморфизм a графа Δ, что $a(x_2^{-1}) = x_2^{-1}x_1^{-1}$. Как было показано, a стабилизирует вершину x_2^{-4}. Так как в графе Δ имеется единственный не проходящий через 1 путь длины 3, начинающийся в $x_2^{-1}x_1^{-1}$ и заканчивающийся в x_2^{-4}, а именно путь $(x_2^{-1}x_1^{-1}, x_2^{-1}, x_2^{-5}, x_2^{-4})$, и имеется не проходящий через 1 путь $(x_2^{-1}, x_2^{-2}, x_2^{-3}, x_2^{-4})$ длины 3, начинающийся в x_2^{-1} и заканчивающийся в x_2^{-4}, то отсюда следует, что $a(x_2^{-2}) = x_2^{-1}$. Но $x_2^{-1} \in \Delta(1)$, а $x_2^{-2} \notin \Delta(1)$. Полученное противоречие означает, что каждый автоморфизм графа Δ, стабилизирующий вершину 1, оставляет на месте каждую из вершин x_2^{-1}, $x_2^{-1}x_1^{-1}$.

Предложение 6 доказано.

З а м е ч а н и е 2. Указанное в предложении 6 множество D отнюдь не является исключительным. Можно привести примеры других множеств с подобными свойствами.

Предложение 7. *Пусть группа G порождается множеством $M = \{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}\}$, где $g_1^2 \neq 1 \neq g_2^2$ и $g_2 \notin \{g_1, g_1^{-1}\}$, причем обхват графа $\Gamma_{G,M}$ больше 20. Положим*

$$M_1 := \{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}, g_1^2, g_1^{-2}, g_1g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}, g_2^4, g_2^{-4}\}.$$

Тогда стабилизатор вершины графа Γ_{G,M_1} в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma_{G,M_1})$ тривиален (и, следовательно, $\mathrm{Aut}(\Gamma_{G,M_1})$ совпадает с группой левых сдвигов на элементы из G).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — свободная группа со свободными порождающими x_1, x_2. Каждая вершина x графа Кэли $\Gamma_{F,X}$, где $X = \{x_1,\ x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}\}$, есть значение однозначно определенного свободно несократимого слова $W_x(x_1,\ x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1})$ над алфавитом X. Каждой вершине x шара радиуса 8 с центром 1 графа $\Gamma_{F,X}$ сопоставим вершину $W_x(g_1, g_1^{-1},\ g_2, g_2^{-1})$ графа $\Gamma_{G,M}$. В силу условий предложения 7 это отображение индуцирует изоморфизм φ подграфа графа $\Gamma_{F,X}$, порожденного шаром радиуса 8 с центром 1 графа $\Gamma_{F,X}$, на подграф графа $\Gamma_{G,M}$, порожденный шаром радиуса 8 с центром 1 графа $\Gamma_{G,M}$, такой, что $\varphi(1) = 1$ и ограничение φ на шар радиуса 2 с центром 1 графа $\Gamma_{F,D}$, где $D = \{x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, x_1^2, x_1^{-2}, x_1x_2, x_2^{-1}x_1^{-1}, x_2^4, x_2^{-4}\}$, есть изоморфизм порожденного этим шаром подграфа графа $\Gamma_{F,D}$ на подграф графа Γ_{G,M_1}, порожденный шаром радиуса 2 с центром 1 графа Γ_{G,M_1}. Согласно предложению 6 отсюда следует, что каждый автоморфизм графа Γ_{G,M_1}, стабилизирующий вершину 1, поэлементно стабилизирует ее окрестность M_1 в графе Γ_{G,M_1}. Так как для связного вершинно-симметрического графа тривиальность действия стабилизатора вершины в группе всех автоморфизмов графа на окрестности этой вершины влечет тривиальность стабилизатора вершины, то предложение 7 доказано.

З а м е ч а н и е 3. Имеются также другие весьма общие способы построения связных локально конечных графов Кэли групп с тривиальным стабилизатором вершины в группе всех автоморфизмов графа (см., например, [12] и [11]).

3. Некоторые приложения

В [8] ставится вопрос о наличии в $\mathfrak{G}$ изолированных бесконечных связных локально конечных вершинно-симметрических унимодулярных графов. Ответ на него содержится в следующей теореме. (Напомним, см. конец разд. 1, что графы Кэли из $\mathfrak{G}$ унимодулярны.)

Теорема. *В $\mathfrak{G}$ имеется изолированный бесконечный граф Кэли* (*и, следовательно, имеется изолированный бесконечный связный локально конечный вершинно-симметрический граф с унимодулярной группой автоморфизмов*).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно указать изолированную бесконечную группу G, обладающую такой системой порождающих $M = \{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}\}$, где $g_1^2 \neq 1 \neq g_2^2$ и $g_2 \notin \{g_1, g_1^{-1}\}$, что обхват графа Кэли $\Gamma_{G,M}$ больше 20. Действительно, тогда согласно предложениям 7 и 4 граф Кэли Γ_{G,M_1}, где $M_1 := \{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}, g_1^2, g_1^{-2}, g_1g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}, g_2^4, g_2^{-4}\}$, обладает требуемым в теореме свойством.

В качестве группы G можно взять, например, группу Р. Томпсона, имеющую обозначение F. Действительно, согласно [7, Proposition 5.14] группа F изолирована, а из [5] следует наличие у F такой (явно указываемой в [5]) системы порождающих $M = \{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}\}$, где $g_1^2 \neq 1 \neq g_2^2$ и $g_2 \notin \{g_1, g_1^{-1}\}$, что обхват графа Кэли $\Gamma_{F,M}$ больше 20.

Теорема доказана.

Замечание 4. Для доказательстве теоремы (точнее, для нахождения такой конечной системы порождающих $X = X^{-1} \not\ni 1$ группы Р. Томпсона F, что стабилизатор вершины графа $\Gamma_{F,X}$ в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma_{F,X})$ тривиален) можно вместо предложения 7 использовать теорему 1.1 из [11] (хорошо известно, что группа F не имеет кручения).

Сходным образом, используя известные результаты, можно показать, что *существует неизолированный в $\mathfrak{G}$ граф Кэли* (*и, следовательно, связный локально конечный вершинно-симметрический унимодулярный граф*), *который не является пределом связных вершинно-симметрических конечных графов.* Покажем, что таковым является, например, граф Кэли Γ_{G,M_1} группы Баумслага — Солитера $G = BS(m,n) = \langle g_1, g_2 : g_1g_2^mg_1^{-1} = g_2^n\rangle$, где целые положительные взаимно простые числа m, n таковы, что $n > m > 7$ и $m + n > 18$, построенный по системе порождающих $M_1 := \{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}, g_1^2, g_1^{-2}, g_1g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}, g_2^4, g_2^{-4}\}$. Хорошо известно, что G — бесконечная неразрешимая группа (причем $g_1^2 \neq 1 \neq g_2^2$ и $g_2 \notin \{g_1, g_1^{-1}\}$). При этом второй коммутант группы G — свободная группа (см. [10]), и следовательно, ряд коммутантов $G^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, группы G (где $G^{(0)} = G$ и $G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}]$ при $k > 0$) строго убывает и имеет единичное пересечение. Кроме того, согласно [13, Proposition 2] обхват графа Кэли $\Gamma_{G,M}$, где $M = \{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}\}$, равен $\min\{m + n + 2, 2m + 6\} > 20$. Согласно предложению 7 стабилизатор вершины графа Γ_{G,M_1} в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma_{G,M_1})$ тривиален, а $\mathrm{Aut}(\Gamma_{G,M_1})$, следовательно, совпадает с группой левых сдвигов на элементы из G.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ пусть $G_i := G/G^{(i)}$, $M_{1,i} := \{g_1G^{(i)}, g_1^{-1}G^{(i)}, g_2G^{(i)}, g_2^{-1}G^{(i)}, g_1^2G^{(i)}, g_1^{-2}G^{(i)}, g_1g_2G^{(i)}, g_2^{-1}g_1^{-1}G^{(i)}, g_2^4G^{(i)}, g_2^{-4}G^{(i)}\}$. Ясно, что последовательность графов Кэли $(\Gamma_{G_i,M_{1,i}})_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к графу Кэли Γ_{G,M_1}. Из тривиальности стабилизатора вершины графа Γ_{G,M_1} в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma_{G,M_1})$ согласно предложению 1 следует тривиальность стабилизатора вершины графа $\Gamma_{G_i,M_{1,i}}$ в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma_{G_i,M_{1,i}})$ (и совпадение $\mathrm{Aut}(\Gamma_{G_i,M_{1,i}})$ с группой левых сдвигов на элементы из G_i) для всех достаточно больших i. С учетом того, что $G_i \not\cong G$ для всех $i \in \mathbb{N}$ (действительно, в отличие от группы G группа G_i разрешима), это влечет $\mathrm{Aut}(\Gamma_{G_i,M_{1,i}}) \cong G_i \not\cong G \cong \mathrm{Aut}(\Gamma_{G,M_1})$ для всех достаточно больших i, а потому и $\Gamma_{G_i,M_{1,i}} \not\cong \Gamma_{G,M_1}$ для всех достаточно больших i. Таким образом, граф Γ_{G,M_1} является пределом отличных от него связных вершинно-симметрических графов.

С другой стороны, предположим, что граф Γ_{G,M_1} является пределом последовательности $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ связных вершинно-симметрических конечных графов. Тогда, поскольку стабилизатор вершины графа Γ_{G,M_1} в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma_{G,M_1})$ тривиален и группа G конечно определена, из предложений 1 и 2 следует, что для всех достаточно больших i граф Γ_i является графом Кэли конечной факторгруппы группы G. Но конечная факторгруппа группы G является метациклической (или циклической) группой, а обхват графа Γ_i для всех достаточно больших i совпадает с обхватом графа Γ_{G,M_1} и, следовательно, больше 20. Полученное противоречие (см., например, [6, Theorem 7]) завершает доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Григорчук Р.И.** Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1984. Т. 48, № 5. С. 939–985.
2. **Трофимов В.И.** Локальное строение графов и полиномиальность роста // Подгрупповое строение групп Свердловск: Изд-во УрО РАН. 1988. С. 149–152.
3. **Трофимов В.И.** О действии примитивных групп // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 3. С. 337–363.
4. **Трофимов В.И.** Группы автоморфизмов графов как топологические группы // Мат. заметки. 1985. Т. 38, вып. 3. С. 378–385.
5. **Brin M.** The free group of rank 2 is a limit of Thompson's group F // Groups Geom. Dyn. 2010. Vol. 4. P. 433–454.
6. **Condera M., Exoo G., Jajcay R.** On the limitations of the use of solvable groups in Cayley graph cage constructions // European J. Combin. 2010. Vol. 31. P. 1819–1828.
7. **de Cornulier Y., Guyot L., Pitsch W.** On the isolated points in the space of groups // J. Algebra. 2007. Vol. 307. P. 254–277.
8. **Frisch J., Tamuz O.** Transitive graphs uniquely determined by their local structure // Proc. Amer. Math. Soc. 2016. Vol. 144. P. 1913–1918.
9. **Gromov M.** Groups of polynomial growth and expanding maps // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1981. Vol. 53. P. 53–73.
10. **Kropholler P.H.** Baumslag–Solitar groups and some other groups of cohomological dimension two // Comment. Math. Helvetici. 1990. Vol. 65. P. 547–558.
11. **Leemann P.-H., de la Salle M.** Cayley graphs with few automorphisms. Available at: *Arxiv*: 1812.02199v1 [math.CO] 5 Dec 2018.
12. **de la Salle M., Tessera R.** Characterizing a vertex-transitive graph by a large ball // J. Topology. 2019. Vol. 12. P. 705–743.
13. **Stalder Y.** Convergence of Baumslag-Solitar groups // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2006. Vol. 13, no. 2. P. 221–233.

Поступила 19.09.2019
После доработки 15.10.2019
Принята к публикации 21.10.2019

Трофимов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
г. Екатеринбург
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Grigorchuk R.I. Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means. *Math. USSR-Izv.*, 1985, vol. 25, no. 2, pp. 259–300. doi: 10.1070/IM1985v025n02ABEH001281 .
2. Trofimov V.I. The local structure of graphs and the polynomiality of growth. In: *Podgruppovoe stroenie grupp* (The subgroup structure of groups), Sverdlovsk: Akad. Nauk SSSR Ural. Otdel. Publ., 1988, pp. 149–152 (in Russian).
3. Trofimov V.I. On the action of primitive groups. *Algebra and Logic*, 1990, vol. 28, no. 3, pp. 220–237. doi: 10.1007/BF01978726 .
4. Trofimov V.I. Automorphism groups of graphs as topological groups. *Math. Notes*, 1985, vol. 38, no. 3, pp. 717–720. doi: 10.1007/BF01163706 .
5. Brin M. The free group of rank 2 is a limit of Thompson's group *F*. *Groups Geom. Dyn.*, 2010, vol. 4, no. 3, pp. 433–454. doi: 10.4171/GGD/90 .
6. Condera M., Exoo G., Jajcay R. On the limitations of the use of solvable groups in Cayley graph cage constructions. *European J. Combin.*, 2010, vol. 31, no. 7, pp. 1819–1828. doi: 10.1016/j.ejc.2010.02.002 .
7. de Cornulier Y., Guyot L., Pitsch W. On the isolated points in the space of groups. *J. Algebra*, 2007, vol. 307, no. 1, pp. 254–277. doi: 10.1016/j.jalgebra.2006.02.012 .

8. Frisch J., Tamuz O. Transitive graphs uniquely determined by their local structure. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2016, vol. 144, no. 5, pp. 1913–1918. doi: 10.1090/proc/12901 .
9. Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Publications Mathematiques I.H.E.S.*, 1981, vol. 53, no. 1, pp. 53–73. doi: 10.1007/BF02698687 .
10. Kropholler P.H. Baumslag–Solitar groups and some other groups of cohomological dimension two. *Comment. Math. Helvetici*, 1990, vol. 65, no. 4, pp. 547–558. doi: 10.1007/BF02566625 .
11. Leemann P.-H., de la Salle M. Cayley graphs with few automorphisms. Available at: *ArXiv*:1812.02199v1 [math.CO] 5 Dec 2018.
12. de la Salle M., Tessera R. Characterizing a vertex-transitive graph by a large ball. *Journal of Topology*, 2019, vol. 12, no. 3, pp. 705–743. doi: 10.1112/topo.12095 .
13. Stalder Y. Convergence of Baumslag–Solitar groups. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2006, vol. 13, no. 2, pp. 221–233. doi: 10.36045/bbms/1148059458 .

Received September 19, 2019
Revised October 15 2019
Accepted October 21, 2019

Trofimov Vladimir Ivanovich, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: trofimov@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. I. Trofimov. On limits of vertex-symmetric graphs and their automorphisms, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 226–234 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.16 + 519.85

АППРОКСИМАЦИОННАЯ СХЕМА ХАЙМОВИЧА — РИННОЯ КАНА ДЛЯ CVRP В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ФИКСИРОВАННОЙ РАЗМЕРНОСТИ УДВОЕНИЯ[1]

М. Ю. Хачай, Ю. Ю. Огородников

Задача маршрутизации транспорта с ограничением на грузоподъемность (Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP) — одна из классических маршрутных экстремальных комбинаторных задач, обладающих большим числом приложений в области исследования операций. Оставаясь NP-трудной в сильном смысле как в общем случае, так и на евклидовой плоскости, задача CVRP допускает квазиполиномиальные и даже полиномиальные приближенные схемы (QPTAS и PTAS) в евклидовых пространствах фиксированной размерности. В то же время метрическая постановка задачи APX-полна даже в случае произвольной фиксированной грузоподъемности $q \geq 3$. В данной работе показывается, что классический алгоритм М. Хаймовича и А. Ринноя Кана реализует полиномиальную приближенную схему PTAS и эффективную полиномиальную приближенную схему (EPTAS) в произвольном метрическом пространстве фиксированной размерности при $q = o(\log\log n)$ и произвольной постоянной грузоподъемности соответственно.

Ключевые слова: задача маршрутизации транспорта с ограничением на грузоподъемность (CVRP), полиномиально приближенная схема (PTAS), метрическое пространство, размерность удвоения.

M. Yu. Khachai, Yu. Yu. Ogorodnikov. Haimovich–Rinnooy Kan polynomial-time approximation scheme for the CVRP in metric spaces of a fixed doubling dimension.

The Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP) is a classical extremal combinatorial routing problem with numerous applications in operations research. Although the CVRP is strongly NP-hard both in the general case and in the Euclidean plane, it admits quasipolynomial- and even polynomial-time approximation schemes (QPTAS and PTAS) in Euclidean spaces of fixed dimension. At the same time, the metric setting of the problem is APX-complete even for an arbitrary fixed capacity $q \geq 3$. In this paper, we show that the classical Haimovich–Rinnooy Kan algorithm implements a PTAS and an Efficient Polynomial-Time Approximation Scheme (EPTAS) in an arbitrary metric space of fixed doubling dimension for $q = o(\log\log n)$ and for an arbitrary constant capacity, respectively.

Keywords: Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP), Polynomial-Time Approximation Scheme (PTAS), metric space, doubling dimension.

MSC: 90C27, 90C59, 90B06

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-235-248

Введение

Задача маршрутизации с ограничением на грузоподъемность транспортных средств (Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP) — одна из наиболее известных экстремальных комбинаторных задач, обладающая широким спектром приложений в области исследования операций [11; 27]. По-видимому первая постановка задачи CVRP была приведена Г. Данцигом и Дж. Рамсером в их классической работе [9], посвященной построению экономически эффективного набора маршрутов, обеспечивающих доставку топлива с центрального терминала по сети заправочных станций, распределенной на местности.

Как и для большинства задач комбинаторной оптимизации, результаты в области алгоритмического анализа задачи CVRP условно могут быть разделены на три основных направления.

Первое направление связано с редукцией исследуемой задачи к подходящей постановке задачи целочисленной (смешанной) оптимизации и применением для поиска оптимального

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-07-01243 и 17-08-01385).

решения последней одной из модификаций метода ветвей и границ (см. обзор в [27]). К сожалению, ввиду известной NP-трудности задачи CVRP размеры постановок, поддающихся эффективному решению в рамках данного подхода, остаются достаточно скромными, несмотря на стремительные темпы развития вычислительной техники и очевидные успехи последних лет [22–24] в области совершенствования алгоритмов.

Второе направление связано с применением специализированных эвристик и метаэвристик, среди которых: методы локального поиска [3], переменных окрестностей (VNS) [25], поиска с запретами [26], генетические [28] и биоинспирированные алгоритмы [20], а также их комбинации [19]. Методы этой группы зачастую демонстрируют потрясающую производительность, позволяя эффективно находить близкие к оптимальным или даже точные решения для постановок CVRP чрезвычайно большого размера. Тем не менее отсутствие теоретически обоснованных оценок точности и трудоемкости влечет дополнительные трудозатраты, связанные с численным оцениванием производительности (и возможной донастройкой параметров) алгоритмов при переходе к каждому новому классу постановок. Кроме того, нередко необходимые для этого тестовые наборы данных не могут быть предоставлены заказчиком, например, из соображений безопасности.

Последнее подтверждает актуальность развития третьего направления, связанного с аппроксимируемостью задачи в классе эффективных алгоритмов с гарантированными оценками. Являясь обобщением классической задачи коммивояжера, задача CVRP NP-трудна в сильном смысле и сохраняет труднорешаемость (при условии, что грузоподъемность является частью входа) даже на евклидовой плоскости [21]. Метрическая постановка задачи APX-полна[2] [5; 12], более того, CVRP APX-трудна даже при произвольной фиксированной грузоподъемности $q \geq 3$ и метрики со значениями 0, 1 и 2.

Наибольших успехов в области аппроксимируемости задачи CVRP удалось достичь в конечномерных числовых пространствах. Известные результаты в этой области восходят к классическим работам М. Хаймовича, А. Ринноя Кана [12] и С. Ароры [4]. Так, в статье [12] предложена первая полиномиальная приближенная схема (PTAS) для планарной задачи CVRP при $q = o(\log\log n)$, которую впоследствии удалось распространить на случаи более слабых верхних оценок грузоподъемности (см., например, [5; 16]), произвольной фиксированной размерности [17;18], дополнительных ограничений на временные промежутки обслуживания [14] и неоднородность спроса [15]. Результат работы [4] — PTAS для евклидовой задачи коммивояжера — лег в основу полиномиальной приближенной схемы [2], находящей $(1+\varepsilon)$-приближенное решение для задачи CVRP на плоскости при рекордно слабой верхней оценке $q \leq 2^{\log^{\delta(\varepsilon)} n}$, и квазиполиномиальной приближенной схемы (QPTAS) [10] для наиболее общей постановки планарной CVRP в условиях отсутствия каких-либо дополнительных ограничений на грузоподъемность.

Таким образом, известные классы эффективно аппроксимируемых случаев задачи CVRP за редким исключением, быть может, случаев описанных в работе [8], исчерпываются сугубо геометрическими постановками задачи. В то же время, как показано в недавней работе Я. Бартала и коллег [7], близкая к CVRP задача коммивояжера обладает PTAS в существенно более общем случае — в произвольном метрическом пространстве конечной размерности удвоения (doubling dimension).

По-видимому, в данной работе впервые удалось получить аналогичный результат для задачи CVRP.

Мы показываем, что в классе постановок CVRP, задаваемых метрикой размерности удвоения $d > 2$ такой, что расстояние $\rho(x, y)$ от произвольного потребителя x до склада y удовлетворяет соотношению $a \leq \rho(x, y) \leq b$ для наперед заданных вещественных чисел $0 < a < b$, приближенный алгоритм Хаймовича — Ринноя Кана сохраняет свойства, обоснованные ранее в классической работе [12] для случая евклидовой плоскости. А именно:

[2] Т. е. задача аппроксимируема в классе полиномиальных приближенных алгоритмов с фиксированной точностью, и построение для нее полиномиальной приближенной схемы влечет $P = NP$.

1) реализует полиномиальную приближенную схему (PTAS) при условии $q = o(\log\log n)$,
2) является эффективной полиномиальной приближенной схемой (EPTAS) при произвольной фиксированной грузоподъемности q.

1. Постановка задачи

Содержательная постановка задачи CVRP задается множеством потребителей X, обладающих идентичным объемом спроса на однородную продукцию (без ограничения общности полагаемым единичным), складом y, хранящим неограниченный запас этой продукции, и штатом одинаковых транспортных средств, обладающих заданной грузоподъемностью q. Задача состоит в построении набора циклических маршрутов, начинающихся и завершающихся на складе, удовлетворяющих совокупный потребительский спрос и доставляющих минимальные транспортные издержки.

В свою очередь математическая постановка задачи может быть сформулирована следующим образом. Пусть заданы полный взвешенный граф $G = (X \cup \{y\}, E, w)$ и натуральное число q. Симметричная весовая функция $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ произвольной паре узлов $\{u, v\} \subset X \cup \{y\}$ сопоставляет транспортные издержки $w(u, v)$. *Допустимым маршрутом* называется произвольный простой цикл $R = y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, y$ в графе G, удовлетворяющий ограничению на грузоподъемность $s \le q$. Как обычно, *стоимостью* маршрута R называем величину $w(R) = w(y, x_{i_1}) + w(x_{i_1}, x_{i_2}) + \cdots + w(x_{i_{s-1}}, x_{i_s}) + w(x_{i_s}, y)$. Задача CVRP состоит в построении множества допустимых маршрутов $S = \{R_1, \ldots, R_l\}$ минимальной суммарной стоимости $w(S) = \sum_{j=1}^{l} w(R_j)$, удовлетворяющих совокупный потребительский спрос.

Если весовая функция w удовлетворяет *неравенству треугольника*, т. е. для произвольного подмножества $\{v_1, v_2, v_3\} \subset X \cup \{y\}$ справедливо соотношение $w(v_1, v_2) \le w(v_1, v_3) + w(v_3, v_2)$, то величину $w(u, v)$ принято называть *расстоянием* между точками u и v, стоимость $w(R)$ произвольного маршрута R — его *длиной*, а саму задачу — *метрической*.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением исключительно метрических постановок задачи CVRP. Более того, задавшись произвольным натуральным числом $d > 2$ и вещественными числами $0 < a < b$, мы потребуем, чтобы каждая рассматриваемая постановка задачи обладала следующими свойствами.

Свойство 1. Пара (Z, ρ), в которой $Z = X \cup \{y\}$ и $\rho|_E \equiv w$, задает метрическое пространство фиксированной *размерности удвоения* $d > 2$.

Свойство 2. Расстояние $\rho(x, y)$ от произвольного потребителя $x \in X$ до склада y удовлетворяет двустороннему ограничению $a \le \rho(x, y) \le b$.

По традиции всюду ниже мы будем использовать обозначения $\mathrm{CVRP}^*(X)$ и $\mathrm{TSP}^*(X)$ для оптимальных значений постановок задач маршрутизации и коммивояжера, задаваемых множеством потребителей X.

2. Метрические пространства фиксированной размерности удвоения

Нам потребуется несколько определений и вспомогательных результатов, полученных в теории конечных метрических пространств (см., например, [1]).

Определение 1. Метрическое пространство (Z, ρ) имеет размерность удвоения d, если для произвольных $z_0 \in Z$ и $R > 0$ найдутся число $M \le 2^d$ и точки $z_1, \ldots, z_M \in Z$ такие, что метрический шар

$$B(z_0, R) = \{z \in Z\colon \rho(z_0, z) \le R\} \subset \bigcup_{j=1}^{M} B(z_j, R/2).$$

Нас будут интересовать инъективные отображения (вложения) f заданного метрического пространства (Z, ρ) в конечномерные линейные нормированные пространства.

О п р е д е л е н и е 2. Конечное метрическое пространство (Z,ρ), $|Z|=n$ вкладывается в пространство l_p^D с искажением L, если существует билипшицево вложение $f\colon Z\to l_p^D$, для которого соотношение
$$\rho(z_1,z_2)\le\|f(z_1)-f(z_2)\|_p\le L\cdot\rho(z_1,z_2)$$
выполнено для произвольных $z_1,z_2\in Z$.

Как правило, размерность D результирующего пространства и константа Липшица L зависят от мощности исходного пространства (Z,ρ). Однако для метрических пространств (Z,ρ^α), получаемых из пространств фиксированной размерности удвоения (Z,ρ) путем возведения метрики ρ в произвольную степень $\alpha\in(0,1)$, справедлива известная теорема П. Ассуада [6], гарантирующая вложение таких пространств с константным искажением в пространства фиксированной размерности. Для дальнейших рассуждений нам потребуется более современная версия этого результата [1, теорема 17].

Лемма 1. *Пусть (Z,ρ) — произвольное метрическое пространство размерности удвоения d, $p>1$, $0<\alpha<1$, $\theta>0$ и $2^{192/\theta}\le k\le d$. Существует билипшицево вложение $f\colon Z\to l_p^D$ такое, что*
$$L=O\big(k^{1+\theta}2^{d/(pk)}/(1-\alpha)\big)\quad и\quad D=O\Big(\frac{d2^{d/k}}{\alpha\theta}\Big(1-\frac{\log(1-\alpha)}{\log k}\Big)\Big).$$

В частности, для используемых нами конкретных значений параметров $p=2$, $\alpha=1/2$, $\theta=192/\log\log d$ и $k=d$ лемма 1 гарантирует существование вложения $f\colon(Z,\rho)\to l_2^D$ с константой Липшица $L=\mathrm{poly}(d)$ в пространство размерности $D=O(d\log\log d)$.

3. Схема Хаймовича — Ринноя Кана

В классической статье М. Хаймовича и А. Ринноя Кана [12] предложен приведенный ниже приближенный алгоритм для метрической задачи CVRP и показано, что он реализует полиномиальную приближенную схему (PTAS) для постановок задачи на евклидовой плоскости, удовлетворяющих соотношению $q=o(\log\log n)$.

Алгоритм основан на разбиении множества X на два непересекающихся подмножества X_{out} и X_{in} внешних и внутренних потребителей соответственно. Принципиальный момент, на котором базируется обоснование полиномиальности данной схемы, состоит в том, что для поиска $(1+\varepsilon)$-приближенного решения исходной задачи можно ограничиться разбиениями, в которых $|X_{out}|$ не зависит от n, что позволяет применять для поиска решения соответствующей "внешней" подзадачи точные алгоритмы экспоненциальной трудоемкости. В свою очередь приближенное решение "внутренней" подзадачи, задаваемой подмножеством X_{in}, может быть найдено существенно более грубым, но высокопроизводительным приближенным методом итерированного разбиения маршрута (ITP) [12], принимающим на вход произвольное β-приближенное решение вспомогательной метрической задачи коммивояжера.

А л г о р и т м Хаймовича — Ринноя Кана

1. Упорядочить множество потребителей X по убыванию расстояния $r_i=\rho(x_i,y)$ от склада.

2. Для заданного $\varepsilon>0$ найти наименьшее значение $\tilde k=\tilde k(\varepsilon,q,\beta)$, для которого относительная погрешность алгоритма удовлетворяет соотношению
$$e(\tilde k)=\frac{\mathrm{CVRP}^*(X_{out})+\mathrm{ITP}(X_{in})-\mathrm{CVRP}^*(X)}{\mathrm{CVRP}^*(X)}\le\varepsilon.$$
Здесь $X_{out}=\{x_1,\dots,x_{\tilde k-1}\}$, $X_{in}=X\setminus X_{out}$ и $\mathrm{ITP}(X_{in})$ — верхняя оценка стоимости приближенного решения, возвращаемого алгоритмом ITP.

3. Для поиска точного решения $\mathrm{S_{DP}}$ “внешней” подзадачи и приближенного решения $\mathrm{S_{ITP}}$ “внутренней” применить схему динамического программирования Хорна [13] и алгоритм ITP соответственно.

4. Выдать приближенное решение исходной задачи в виде $S = \mathrm{S_{DP}} \cup \mathrm{S_{ITP}}$.

4. Основной результат

В этом разделе мы покажем, что результат Хаймовича — Ринноя Кана справедлив для гораздо более широкого (чем евклидова плоскость) класса постановок CVRP.

Теорема. $(1+\varepsilon)$-*приближенное решение произвольной метрической постановки задачи* CVRP, *обладающей свойствами* 1 *и* 2, *может быть получено для произвольного* $\varepsilon > 0$ *за время*

$$O\big(qk^3 2^k\big) + \mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \beta, n) + O(n^2),$$

где

$$k = k(\varepsilon, q, \beta, D, a) = O\Big(\Big(\frac{q}{\varepsilon}\Big)^D \Big(\frac{4\sqrt{2}\beta D^{(1+3/D)/2}\, L}{\sqrt{a}}\Big)^D + \frac{\beta D^2 2^D L}{2\sqrt{a}}\Big)\,\Big(\exp\Big(\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big)^2,$$

$\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \beta, n)$ — *время решения вспомогательной задачи коммивояжера*, $D = O(d \log\log d)$ и $L = \mathrm{poly}(d)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы следует из приведенных ниже известных лемм (см., например, [5; 12]).

Лемма 2. *Стоимость* $w(\mathrm{S_{ITP}})$ *приближенного решения, получаемого методом* ITP *для произвольной (необязательно метрической) постановки* CVRP, *удовлетворяет соотношению*

$$\mathrm{ITP}(X) = w\,(S_{ITP}) \le 2\left\lceil \frac{n}{q}\right\rceil \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}{n} + (1 - 1/q)\,\mathrm{TSP}^*(X).$$

Лемма 3. *Стоимость оптимального решения* $\mathrm{CVRP}^*(X)$ *произвольной метрической постановки задачи* CVRP *допускает нижнюю оценку*

$$\mathrm{CVRP}^*(X) \ge \max\Big\{\mathrm{TSP}^*(X \cup \{y\}), 2r_1, \frac{2}{q}\sum_{i=1}^{n} r_i\Big\}.$$

Следующая лемма устанавливает верхнюю оценку неустранимой погрешности, возникающей на шаге 2 схемы Хаймовича — Ринноя Кана при декомпозиции исходной постановки.

Лемма 4. *Для произвольного* $1 \le k \le n$ *и разбиения множества потребителей* X *произвольной метрической постановки* CVRP *на подмножества* X_{in} *и* X_{out} *справедливо соотношение*

$$\mathrm{CVRP}^*(X_{in}) + \mathrm{CVRP}^*(X_{out}) \le \mathrm{CVRP}^*(X) + 4(k-1)r_k.$$

Последняя лемма из ранее доказанных устанавливает верхнюю оценку для веса оптимального решения задачи коммивояжера на множестве потребителей $X \in l_2^D$. Впервые данный технический результат был представлен в работе [17, лемма 5].

Лемма 5. *Пусть* $X \subset B(0,R) = \{x \in l_2^D \colon \|x\|_2 \le R\}$. *Для длины* $\mathrm{TSP}^*(X)$ *оптимального маршрута коммивояжера справедлива верхняя оценка*

$$\mathrm{TSP}^*(X) \le C_D\, R + C_D^*\, R^{1/D}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i\Big)^{1-1/D}, \tag{1}$$

где $C_D = D^2\, 2^{D+1}$ *и* $C_D^* = 4\sqrt{2}\, D^{(1+3/D)/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим метрическое пространство $\mathcal{S} = (S^{D-1}, dist)$, задаваемое на поверхности единичной сферы S^{D-1} пространства l_2^D *угловым* расстоянием $dist(\xi_1, \xi_2) = \arccos(\xi_1, \xi_2)$. Проверим, что пространство $\mathcal{S}$ содержит конечное δ-плотное подмножество для произвольного достаточно малого $\delta > 0$. В самом деле, поместим сферу S^{D-1} в D-мерный гиперкуб со стороной 2. Задавшись произвольным $h \in (0, 2]$, разобьем каждое одномерное ребро гиперкуба на $\left\lceil \dfrac{2}{h} \right\rceil$ ячеек, каждая из которых, за исключением, может быть, одной, имеет длину h. В свою очередь каждая фасета гиперкуба будет содержать $\left\lceil \dfrac{2}{h} \right\rceil^{D-1}$ ячеек размерности $D-1$, а общее число ячеек на его поверхности составит

$$2D\,\lceil 2/h \rceil^{D-1} \le 2D(1 + 2/h)^{D-1} = 2^D D\, h^{1-D}(1 + h/2)^{D-1} \le \tilde{C}_D\, h^{1-D},$$

где $2\tilde{C}_D = D\,4^D$.

Легко убедиться в том, что множество $\mathcal{S}'_h$, состоящее из проекций геометрических центров построенных ячеек на поверхность сферы S^{D-1}, является искомым δ-плотным подмножеством $\mathcal{S}$ при $\delta = h\sqrt{D-1}/2$, мощность которого не превосходит $\tilde{C}_D\, h^{1-D}$.

2. Для получения искомой верхней оценки $\mathrm{TSP}^*(X)$ сделаем следующее:
— через каждую точку $\xi_j \in \mathcal{S}'_h$ проведем радиус шара $B(0, R)$, содержащего множество X;
— произвольную точку $x_i \in X$ соединим перпендикуляром с ближайшим к ней радиусом;
— построим замкнутый маршрут, проходящий по каждому из построенных радиусов от начала координат до поверхности шара $B(0, R)$, посещая при необходимости присоединенные к нему точки x_i.

Легко видеть, что длина построенного маршрута не превосходит величины

$$W(h) = 2\tilde{C}_D h^{1-D} R + h\sqrt{D-1} \sum_{i=1}^{n} r_i,$$

и, следовательно,

$$\mathrm{TSP}^*(X) \le \min\{W(h) \colon 0 < h \le 2\}. \tag{2}$$

В силу выпуклости функции $W = W(h)$ оптимум в задаче (2) достигается либо в стационарной точке

$$h^* = \left(\frac{2\tilde{C}_D R\sqrt{D-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} \right)^{1/D}, \tag{3}$$

в которой

$$W'(h) = 2\tilde{C}_D(1-D)Rh^{-D} + \sqrt{D-1} \sum_{i=1}^{n} r_i = 0,$$

либо при $h^* \ge 2$ на правой границе интервала.

Рассмотрим каждый из случаев в отдельности. Пусть $h^* < 2$, тогда

$$\mathrm{TSP}^* \le W(h^*) = 2\tilde{C}_D R \left(\frac{2\tilde{C}_D R\sqrt{D-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} \right)^{\frac{1-D}{D}} + \left(\frac{2\tilde{C}_D R\sqrt{D-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} \right)^{1/D} \sqrt{D-1} \sum_{i=1}^{n} r_i$$

$$= (2\tilde{C}_D)^{1/D} \big((D-1)^{\frac{1-D}{2D}} + (D-1)^{\frac{D+1}{2D}} \big) R^{1/D} \Big(\sum_{i=1}^{n} r_i \Big)^{1-1/D} \le C_D^* R^{1/D} \Big(\sum_{i=1}^{n} r_i \Big)^{1-1/D}, \tag{4}$$

где $4D^{1/D}\big((D-1)^{\frac{1-D}{2D}} + (D-1)^{\frac{D+1}{2D}} \big) \le C_D^* = 4\sqrt{2}\, D^{(1+3/D)/2}$ при произвольном $D > 1$.

Если $h^* \geq 2$, то из соотношения (3) имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i \leq 2^{1-D}\tilde{C}_D R\sqrt{D-1}$, откуда

$$\mathrm{TSP}^* \leq W(2) = 2\tilde{C}_D 2^{1-D} R + 2\sqrt{D-1}\sum_{i=1}^{n} r_i$$

$$\leq 2^{2-D}\tilde{C}_D R + 2^{2-D}(D-1)\tilde{C}_D R = 2^{1-D}\, D^2 2^{2D}\, R = D^2 2^{D+1}\cdot R. \tag{5}$$

Полагая $C_D = D^2 2^{D+1}$ и суммируя оценки (4) и (5), завершаем обоснование неравенства (1).

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь произвольную метрическую постановку задачи CVRP, обладающую свойствами 1 и 2. Зададимся произвольным непустым подмножеством $X' = X \cap B(y, R)$ множества потребителей, определим $R = \max\{r_i \colon x_i \in X'\}$ и получим верхнюю оценку длины $\mathrm{TSP}^*(X')$ оптимального маршрута коммивояжера в терминах расстояний от потребителей до складов, подобную оценке (1). Без ограничения общности полагаем $b \leq 1/2$.

Пусть $f \colon Z \to l_2^D$ — вложение пространства $(Z, \rho^{1/2})$ в конечномерное евклидово пространство, соответствующее конкретным значениям параметров $p = 2$, $\alpha = 1/2$, $\theta = 192/\log\log d$ и $k = d$, удовлетворяющее соотношению

$$\rho^{1/2}(z_1, z_2) \leq \|f(z_1) - f(z_2)\|_2 \leq L\,\rho^{1/2}(z_1, z_2). \tag{6}$$

Существование вложения f гарантируется леммой 1 для размерности $D = O(d\log\log d)$ и $L = \mathrm{poly}(d)$. По построению неравенство

$$\rho(z_1, z_2) \leq \rho^{1/2}(z_1, z_2) \leq 1 \tag{7}$$

верно для произвольной пары $\{z_1, z_2\}$ из подмножества $Z' = X' \cup \{y\}$.

Обозначим длину оптимальных маршрутов коммивояжера на множестве X' в исходной метрике ρ, метрике $\rho^{1/2}$ и на множестве $f(X') \subset l_2^D$ в метрике, порождаемой евклидовой нормой через $\mathrm{TSP}^*_\rho(X')$, $\mathrm{TSP}^*_{\rho^{1/2}}(X')$ и $\mathrm{TSP}^*_{l_2^D}(X')$ соответственно.

Лемма 6. *Справедлива следующая оценка*:

$$\mathrm{TSP}^*_\rho(X') \leq \mathrm{TSP}^*_{\rho^{1/2}}(X') \leq \mathrm{TSP}^*_{l_2^D}(X') \leq \frac{C_D L}{\sqrt{a}}\, R + \frac{C_D^* L}{\sqrt{a}}\, R^{1/D}\Big(\sum_{x_i \in X'} r_i\Big)^{1-1/D}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенства $\mathrm{TSP}^*_\rho(X') \leq \mathrm{TSP}^*_{\rho^{1/2}}(X') \leq \mathrm{TSP}^*_{l_2^D}(X')$ следуют непосредственно из соотношений (6) и (7). В самом деле, обоснуем, например, первое из них. Пусть T — оптимальный маршрут коммивояжера в метрике $\rho^{1/2}$. Неравенство (7) влечет соотношение $w_\rho(T) \leq w_{\rho^{1/2}}(T)$ для весов маршрута T в исходной метрике и метрике $\rho^{1/2}$ соответственно. Следовательно,

$$\mathrm{TSP}^*_\rho(X') \leq w_\rho(T) \leq w_{\rho^{1/2}}(T) = \mathrm{TSP}^*_{\rho^{1/2}}(X').$$

Далее, по лемме 5

$$\mathrm{TSP}^*_{l_2^D}(X') \leq C_D\,\tilde{R} + C_D^*\,\tilde{R}^{1/D}\Big(\sum_{x_i \in X'} \tilde{r}_i\Big)^{1-1/D}, \tag{8}$$

где $\tilde{r}_i = \|f(x_i) - f(y)\|_2$ и $\tilde{R} = \max\{\tilde{r}_i \colon x_i \in X'\}$. Поскольку рассматриваемая постановка обладает свойством 2, для каждого $x_i \in X'$ имеем $\sqrt{r_i} \leq r_i/\sqrt{a}$, и, следовательно, в силу (6) $\tilde{r}_i \leq L\sqrt{r_i} \leq L/\sqrt{a}\, r_i$. Применяя это соображение к соотношению (8) и учитывая доказанное выше, получаем искомую оценку.

Лемма доказана.

Далее оценим относительную погрешность $e(k)$ исследуемой схемы.

Лемма 7. *Для любого $k < n$ относительная погрешность $e(k)$ может быть оценена следующим образом*:

$$e(k) \le q\Big(2k + 1 + \frac{\beta C_D L}{2\sqrt{a}}\Big)\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} + \frac{q\beta C_D^* L}{2\sqrt{a}}\left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\right)^{1/D},$$

где β — точность решения вспомогательной задачи коммивояжера.

Доказательство. По определению для рассматриваемой схемы $e(k)$ имеет вид

$$e(k) = \frac{\mathrm{CVRP}^*(X_{out}) + \mathrm{ITP}(X_{in}) - \mathrm{CVRP}^*(X)}{\mathrm{CVRP}^*(X)}.$$

Добавим и вычтем в числителе величину $\mathrm{CVRP}^*(X_{in})$:

$$e(k) = \frac{\mathrm{CVRP}^*(X_{out}) + \mathrm{ITP}(X_{in}) - \mathrm{CVRP}^*(X) + \mathrm{CVRP}^*(X_{in}) - \mathrm{CVRP}^*(X_{in})}{\mathrm{CVRP}^*(X)}.$$

Воспользовавшись леммами 2–6, получаем цепочку неравенств

$$e(k) \le \frac{4(k-1)r_k + \dfrac{2}{q}\sum\limits_{i=k}^{n} r_i + \beta \mathrm{TSP}^*(X_{in}) + 2r_k - \dfrac{2}{q}\sum\limits_{i=k}^{n} r_i}{\dfrac{2}{q}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}$$

$$\le \frac{4kr_k + \beta\Big(\frac{C_D L r_k}{\sqrt{a}} + \frac{C_D^* L r_k^{1/D}}{\sqrt{a}}\Big(\sum\limits_{i=k}^{n} r_i\Big)^{1-1/D}\Big) + 2r_k}{\dfrac{2}{q}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}$$

$$\le q\Big(2k + 1 + \frac{\beta C_D L}{2\sqrt{a}}\Big)\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} + \frac{q\beta C_D^* L}{2\sqrt{a}}\left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\right)^{1/D}.$$

Лемма доказана.

Доказательство существования для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ номера $k = k(\varepsilon)$, обеспечивающего верхнюю оценку относительно погрешности $e(k) < \varepsilon$, основано на следующей технической лемме.

Лемма 8. *Пусть для некоторых чисел $A, B, C > 0$ и $D > 1$ система*

$$s_k^D + \frac{2B}{2k+A}s_k - \frac{C}{2k+A} \ge 0 \qquad (1 \le k \le \tilde{k}) \tag{9}$$

обладает решением $s_1, s_2, \ldots, s_{\tilde{k}}$, для которого $\sum\limits_{k=1}^{\tilde{k}} s_k^D \le 1$. Тогда

$$\tilde{k} \le \Big(\Big(\frac{C}{4B}\Big)^{-D} + A + 1\Big)\exp\Big(\frac{2}{C}\Big).$$

Доказательство. В самом деле, зададимся произвольным решением $s_1, s_2, \ldots, s_{\tilde{k}}$ системы (9), удовлетворяющим соотношению $\sum\limits_{k=1}^{\tilde{k}} s_k^D \le 1$. Для произвольного $1 \le k \le \tilde{k}$ возможен один из двух вариантов

$$s_k^D \le \frac{C/2}{2k+A} \quad \text{и} \quad s_k^D > \frac{C/2}{2k+A}.$$

Пусть $K \subset \{1,\dots,\tilde{k}\}$ — подмножество номеров неравенств, для которых справедлива первая альтернатива. Для каждого $k \in K$ из соответствующего неравенства системы (9) имеем

$$\frac{2B}{2k+A}s_k \geq \frac{C/2}{2k+A},$$

т. е. $s_k^D \geq \dfrac{C}{4B}$. Таким образом,

$$1 \geq \sum_{k=1}^{\tilde{k}} s_k^D = \sum_{k\in K} s_k^D + \sum_{k\notin K} s_k^D \geq \Big(\frac{C}{4B}\Big)^D |K| + \frac{C}{2}\sum_{k\notin K}\frac{1}{2k+A} \geq \Big(\frac{C}{4B}\Big)^D |K| + \frac{C}{2}\sum_{k=|K|+1}^{\tilde{k}}\frac{1}{2k+A},$$

где справедливость последнего неравенства следует из монотонности функции $1/(2k+A)$. Поскольку для произвольного $|K| < \tilde{k}$

$$\Big(\frac{C}{4B}\Big)^D|K| + \int\limits_{|K|+1}^{\tilde{k}} \frac{C dx}{2(x+A)} = \Big(\frac{C}{4B}\Big)^D|K| + \frac{C}{2}\ln\Big(\frac{\tilde{k}+A}{|K|+1+A}\Big),$$

то

$$1 \geq \max\Big\{\frac{C}{2}\ln\Big(\frac{\tilde{k}+A}{|K|+1+A}\Big), \Big(\frac{C}{4B}\Big)^D|K|\Big\},$$

откуда

$$\tilde{k} \leq (|K|+1+A)\exp\Big(\frac{2}{C}\Big) = \Big(\Big(\frac{C}{4B}\Big)^{-D} + A + 1\Big)\exp\Big(\frac{2}{C}\Big).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма, устанавливающая точность алгоритма Хаймовича — Ринноя Кана, является непосредственным следствием леммы 8.

Лемма 9. *Для произвольных значений параметров $\varepsilon > 0$, $\beta \geq 1$, $D > 2$, $q > 1$ существует значение*

$$\tilde{k} = \tilde{k}(\varepsilon, q, \beta, D, a) = O\Big(\Big(\frac{q}{\varepsilon}\Big)^D\Big(\frac{4\sqrt{2}\beta D^{(1+3/D)/2}L}{\sqrt{a}}\Big)^D + \frac{\beta D^2 2^D L}{2\sqrt{a}}\Big)\Big(\exp\Big(\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big)^2$$

такое, что условие

$$e(k) \leq q\Big(2k+1+\frac{\beta C_D L}{2\sqrt{a}}\Big)\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^n r_i} + \frac{q\beta C_D^* L}{2\sqrt{a}}\left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^n r_i}\right)^{1/D} < \varepsilon$$

выполнено по крайней мере для одного значения k из интервала $1 \leq k \leq \tilde{k}$.

Доказательство. В самом деле, достаточно положить

$$s_k = \left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^n r_i}\right)^{1/D}, \qquad A = 1 + \frac{\beta D^2 2^D L}{2\sqrt{a}}, \qquad B = \frac{\beta\sqrt{2}D^{(1+3/D)/2}L}{\sqrt{a}}, \qquad C = \frac{\varepsilon}{q},$$

после чего применить утверждение леммы 8.

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы оценим трудоемкость схемы Хаймовича — Ринноя Кана. В самом деле, трудоемкость поиска оптимального решения “внешней” подзадачи для подмножества потребителей X_{out} посредством схемы динамического программирования Хорна [13] не превосходит $O(q\tilde{k}^3 2^{\tilde{k}})$, где верхняя оценка $\tilde{k}$ приведена в лемме 9. Трудоемкость приближенного решения “внутренней” подзадачи определяется трудоемкостью $\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \beta, n)$ β-приближенного алгоритма для вспомогательной метрической задачи коммивояжера[3]. Учитывая известную верхнюю оценку $O(n^2)$ времени работы алгоритма ITP, получаем суммарную общую оценку

$$O(q\tilde{k}^3 2^{\tilde{k}}) + \mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \beta, n) + O(n^2)$$

трудоемкости исследуемой схемы, чем завершаем доказательство теоремы.

Следствие. *Алгоритм Хаймовича — Ринноя Кана в классе метрических постановок* CVRP, *обладающих свойствами* 1 *и* 2, *реализует полиномиально приближенную схему* (PTAS) *при* $q = o(\log\log n)$ *и эффективную полиномиально приближенную схему* (EPTAS) *для произвольного фиксированного значения* q.

5. Заключение

В данной работе впервые показано, что семейство постановок задачи CVRP, аппроксимируемых за полиномиальное время с любой заданной точностью, не ограничено постановками, заданными в конечномерных числовых пространствах. В частности, доказано, что классический алгоритм М. Хаймовича и А. Ринноя Кана сохраняет аппроксимационные свойства, обоснованные ранее для конечномерных евклидовых пространств, в пространствах существенно более общей природы — метрических пространствах с фиксированной размерностью удвоения. Как следует из результатов статьи, данный алгоритм реализует полиномиальную приближенную схему (PTAS) при условии отделимости потребителей от склада и ограничении на грузоподъемность $q = o(\log\log n)$ и является эффективной полиномиальной приближенной схемой (EPTAS) при произвольном фиксированном q. Отметим, что процедура поиска $(1+\varepsilon)$-приближенного решения задачи CVRP реализуется исследуемым в работе алгоритмом непосредственно в исходном метрическом пространстве. Техника билипшицевого вложения метрического пространства в пространство l_2^D подходящей размерности используется в доказательстве теоремы исключительно при обосновании точности приближения. Из вопросов, оставшихся на данный момент открытыми, отметим возможность распространения результата А. Дас и К. Матье [10] об аппроксимируемости CVRP без ограничения роста грузоподъемности в классе квазиполиномиальных приближенных схем (QPTAS) на семейство метрических постановок в пространствах ограниченной размерности удвоения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abraham I., Bartal Y., Neiman O.** Advances in metric embedding theory // Advances in Mathematics. 2011. Vol. 228, no. 6. P. 3026–3126. https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.08.003
2. **Adamaszek A., Czumaj A., Lingas A.** PTAS for k-tour cover problem on the plane for moderately large values of k // Inter. J. of Foundations of Computer Science. 2010. Vol. 21, no. 06. P. 893–904. https://doi.org/10.1142/S0129054110007623
3. **Arnold F., Sörensen K.** Knowledge-guided local search for the vehicle routing problem // Comput. Oper. Res. 2019. Vol. 105. P. 32–46. https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.01.002
4. **Arora S.** Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45. P. 753–782.

[3]Например, для алгоритма Кристофидеса — Сердюкова $\beta = 3/2$ и $\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \beta, n) = O(n^3)$.

5. **Asano T., Katoh N., Tamaki H., Tokuyama T.** Covering points in the plane by k-tours: Towards a polynomial time approximation scheme for general k // Proceedings of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '97). N Y: ACM, 1997. P. 275–283. https://doi.org/10.1145/258533.258602
6. **Assouad P.** Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$ // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1983. Vol. 111. P. 429–448. http://eudml.org/doc/87452
7. **Bartal Y., Gottlieb L. A., Krauthgamer R.** The traveling salesman problem: Low-dimensionality implies a polynomial time approximation scheme // SIAM J. Computing. 2016. Vol. 45, no. 4. P. 1563–1581. https://doi.org/10.1137/130913328
8. **Becker A., Klein P. N., Schild A.** A PTAS for bounded-capacity vehicle routing in planar graphs // Algorithms and Data Structures / eds. Z. Friggstad., J.-R. Sack, M. Salavatipour. Cham: Springer, 2019. P. 99–111. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11646).
9. **Dantzig G. B., Ramser J. H.** The truck dispatching problem // Management science. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 80–91.
10. **Das A., Mathieu C.** A quasipolynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing // Algorithmica. 2015. Vol. 73. P. 115–142. https://doi.org/10.1007/s00453-014-9906-4
11. **Demir E., Huckle K., Syntetos A., Lahy A., Wilson M.** Vehicle routing problem: Past and future // Contemporary Operations and Logistics / ed. P. Wells Cham: Springer, 2019. P. 97–117. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14493-7_7
12. **Haimovich M., Rinnooy Kan A. H. G.** Bounds and heuristics for capacitated routing problems // Math. Oper. Res. 1985. Vol. 10, no. 4. P. 527–542. https://doi.org/10.1287/moor.10.4.527
13. **van Hoorn J. J.** Dynamic programming for routing and scheduling: Optimizing sequences of decisions. Ph. D. thesis, 2016. 210 p. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14344.88329
14. **Khachay M., Ogorodnikov Y.** Efficient PTAS for the Euclidean CVRP with time windows // Analysis of Images, Social Networks and Texts (AIST 2018) / ed. van der W. Aalst. Cham: Springer, 2018. P. 318–328. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11179). https://doi.org/10.1007/978-3-030-11027-7_30
15. **Khachay M., Ogorodnikov Y.** Approximation scheme for the capacitated vehicle routing problem with time windows and non-uniform demand // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019) / eds. M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos. Cham: Springer, 2019. P. 309–327. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11548). https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_22
16. **Khachay M., Ogorodnikov Y.** Improved polynomial time approximation scheme for capacitated vehicle routing problem with time windows // Optimization and Applications (OPTIMA 2018) / Y. Evtushenko, M. Jaćimović, M. Khachay, Y. Kochetov, V. Malkova, M. Posypkin. Cham: Springer, 2019. P. 155–169. (Communications in Computer and Information Science; vol. 974). https://doi.org/10.1007/978-3-030-10934-9_12
17. **Khachay M., Dubinin R.** PTAS for the Euclidean capacitated vehicle routing problem in R^d // Discrete Optimization and Operations Research / eds. Y. Kochetov, M. Khachay, V. Beresnev, E. Nurminski, P. Pardalos. Cham: Springer, 2016. P. 193–205. (Lecture Notes in Computer Science,;vol. 9869). https://doi.org/10.1007/978-3-319-44914-2_16
18. **Khachay M., Zaytseva H.** Polynomial time approximation scheme for single-depot Euclidean capacitated vehicle routing problem // Combinatorial Optimization and Applications / eds. Z. Lu, D. Kim, W. Wu, W. Li, D.Z Du. Cham: Springer, 2015. P. 178–190. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 9486). https://doi.org/10.1007/978-3-319-26626-8_14
19. **Nalepa J., Blocho M.** Adaptive memetic algorithm for minimizing distance in the vehicle routing problem with time windows // Soft Computing. 2016. Vol. 20, no. 6. P. 2309–2327. https://doi.org/10.1007/s00500-015-1642-4
20. **Necula R., Breaban M., Raschip M.** Tackling dynamic vehicle routing problem with time windows by means of ant colony system // IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2017. P. 2480–2487. https://doi.org/10.1109/CEC.2017.7969606
21. **Papadimitriou C.** Euclidean TSP is NP-complete // Theoret. Comput. Sci. 1977. Vol. 4. P. 237–244.
22. **Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Uchoa E.** Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing // Mathematical Programming Computation. 2017. Vol. 9, no. 1. P. 61–100. https://doi.org/10.1007/s12532-016-0108-8
23. **Pessoa A. A., Sadykov R., Uchoa E.** Enhanced branch-cut-and-price algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems // European J. Oper. Res. 2018. Vol. 270, no. 2. P. 530–543. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.04.009

24. **Pessoa A. A., Sadykov R., Uchoa E., Vanderbeck F.** A generic exact solver for vehicle routing and related problems // Integer Programming and Combinatorial Optimization: Proc. 20th Inter. Conf. / eds. A. Lodi, V. Nagarajan. Cham: Springer, 2019, pp. 354–369. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11480). https://doi.org/10.1007/978-3-030-17953-3_27
25. **Polat O.** A parallel variable neighborhood search for the vehicle routing problem with divisible deliveries and pickups // Comput. Oper. Res. 2017. Vol. 85. P. 71–86. https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.03.009
26. **Qiu M., Fu Z., Eglese R., Tang Q.** A tabu search algorithm for the vehicle routing problem with discrete split deliveries and pickups // Comput. Oper. Res. 2018. Vol. 100. P. 102–116. https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.07.021
27. **Toth P., Vigo D.** Vehicle routing: Problems, methods and applications. Second Edition. MOS-Siam Series on Optimization, SIAM, 2 edn. 2014. 481 p.
28. **Vidal T., Crainic T. G., Gendreau M., Prins C.** A hybrid genetic algorithm with adaptive diversity management for a large class of vehicle routing problems with time-windows // Comput. Oper. Res. 2013. Vol. 40, no. 1. P. 475–489. https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.07.018

Поступила 30.08.2019
После доработки 30.09.2019
Принята к публикации 7.10.2019

Хачай Михаил Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
профессор РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
г. Екатеринбург
Омский государственный технический университет
г. Омск
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Огородников Юрий Юрьевич
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
г. Екатеринбург
e-mail: yogorodnikov@gmail.com

REFERENCES

1. Abraham I., Bartal Y., Neiman O. Advances in metric embedding theory. *Advances in Mathematics*, 2011, vol. 228, no. 6, pp. 3026–3126. https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.08.003
2. Adamaszek A., Czumaj A., Lingas A. PTAS for k-tour cover problem on the plane for moderately large values of k. *Inter. J. Foundations of Computer Science*, 2010, vol. 21, no. 06, pp. 893–904. https://doi.org/10.1142/S0129054110007623
3. Arnold F., Sörensen K. Knowledge-guided local search for the vehicle routing problem. *Comput. Oper. Res.*, 2019, vol. 105, pp. 32–46. https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.01.002
4. Arora S. Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. *J. ACM*, 1998, vol. 45, pp. 753–782.
5. Asano T., Katoh N., Tamaki H., Tokuyama T. Covering points in the plane by k-tours: Towards a polynomial time approximation scheme for general k. In: *Proc. of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (STOC '97), N Y, USA: ACM, 1997. P. 275–283. https://doi.org/10.1145/258533.258602
6. Assouad P. Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1983, vol. 111, pp. 429–448. http://eudml.org/doc/87452
7. Bartal Y., Gottlieb L. A., Krauthgamer R. The traveling salesman problem: Low-dimensionality implies a polynomial time approximation scheme. *SIAM J. on Computing*, 2016, vol. 45, no. 4, pp. 1563–1581. https://doi.org/10.1137/130913328

8. Becker A., Klein P. N., Schild A. A PTAS for bounded-capacity vehicle routing in planar graphs. In: Friggstad Z., Sack J.-R., Salavatipour M. (eds), *Algorithms and Data Structures*, 2019, Lecture Notes in Computer Science, vol. 11646, Cham: Springer, pp. 99–111.
9. Dantzig G. B., Ramser J. H. The truck dispatching problem. *Management science*, 1959, vol. 6, no. 1, pp. 80–91.
10. Das A., Mathieu C. A quasipolynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing. *Algorithmica*, 2015, vol. 73, pp. 115–142. https://doi.org/10.1007/s00453-014-9906-4
11. Demir E., Huckle K., Syntetos A., Lahy A., Wilson M. Vehicle routing problem: Past and future. In: Wells P. (ed.), *Contemporary Operations and Logistics*, Cham: Springer, 2019, pp. 97–117. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14493-7_7
12. Haimovich M., Rinnooy Kan A. H. G. Bounds and heuristics for capacitated routing problems. *Math. Oper. Res.* , 1985, vol. 10, no. 4, pp. 527–542. https://doi.org/10.1287/moor.10.4.527
13. van Hoorn J. J. Dynamic programming for routing and scheduling: Optimizing sequences of decisions. *Ph. D. thesis*, 2016, 210 p. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14344.88329
14. Khachay M., Ogorodnikov Y. Efficient PTAS for the Euclidean CVRP with time windows. In: van der Aalst W. et al. (eds), *Analysis of Images, Social Networks and Texts* (AIST 2018), Lecture Notes in Computer Science, vol. 11179, Cham: Springer, 2018, pp. 318–328. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11027-7_30
15. Khachay M., Ogorodnikov Y. Approximation scheme for the capacitated vehicle routing problem with time windows and non-uniform demand. In: Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds), *Mathematical Optimization Theory and Operations Research* (MOTOR 2019), Lecture Notes in Computer Science, vol. 11548, Cham: Springer, 2019, pp. 309–327. https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_22
16. Khachay M., Ogorodnikov Y. Improved polynomial time approximation scheme for capacitated vehicle routing problem with time windows. In: Evtushenko Y., Jaćimović M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M. (eds), *Optimization and Applications* (OPTIMA 2018), Communications in Computer and Information Science, vol. 974, Cham: Springer, 2019, pp. 155–169. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10934-9_12
17. Khachay M., Dubinin R. PTAS for the Euclidean capacitated vehicle routing problem in R^d. In: Kochetov Y., Khachay M., Beresnev V., Nurminski E., Pardalos P. (eds), *Discrete Optimization and Operations Research*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 9869, Cham: Springer, 2016, pp. 193–205. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44914-2_16
18. Khachay M., Zaytseva H. Polynomial time approximation scheme for single-depot Euclidean capacitated vehicle routing problem. In: Lu Z., Kim D., Wu W., Li W., Du D.Z. (eds), *Combinatorial Optimization and Applications*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 9486, Cham: Springer, 2015, pp. 178–190. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26626-8_14
19. Nalepa J., Blocho M. Adaptive memetic algorithm for minimizing distance in the vehicle routing problem with time windows. *Soft Computing*, 2016, vol. 20, no. 6, pp. 2309–2327. https://doi.org/10.1007/s00500-015-1642-4
20. Necula R., Breaban M., Raschip M. Tackling dynamic vehicle routing problem with time windows by means of ant colony system. *IEEE Congress on Evolutionary Computation* (CEC), 2017, pp. 2480–2487. https://doi.org/10.1109/CEC.2017.7969606
21. Papadimitriou C. Euclidean TSP is NP-complete *Theoret. Comput. Sci.*, 1977, vol. 4, pp. 237–244.
22. Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Uchoa E. Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing. *Math. Programming Computation*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 61–100. https://doi.org/10.1007/s12532-016-0108-8
23. Pessoa A. A., Sadykov R., Uchoa E. Enhanced branch-cut-and-price algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems. *European J. Oper. Res.,* 2018, vol. 270, no. 2, pp. 530–543. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.04.009
24. Pessoa A. A., Sadykov R., Uchoa E., Vanderbeck F. A generic exact solver for vehicle routing and related problems. In: Lodi A., Nagarajan V. (eds), *Proc. 20th Inter. Conf. "Integer Programming and Combinatorial Optimization"* (IPCO), Lecture Notes in Computer Science, vol. 11480, Cham: Springer, 2019, pp. 354–369. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17953-3_27
25. Polat O. A parallel variable neighborhood search for the vehicle routing problem with divisible deliveries and pickups. *Comput. Oper. Res.*, 2017, vol. 85, pp. 71–86. https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.03.009
26. Qiu M., Fu Z., Eglese R., Tang Q. A tabu search algorithm for the vehicle routing problem with discrete split deliveries and pickups. *Comput. Oper. Res.*, 2018, vol. 100, pp. 102–116. https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.07.021

27. Toth P., Vigo D. *Vehicle routing: Problems, methods and applications.* Philadelphia: SIAM, 2014, 481 p.
28. Vidal T., Crainic T. G., Gendreau M., Prins C. A hybrid genetic algorithm with adaptive diversity management for a large class of vehicle routing problems with time-windows. *Comput. Oper. Res.*, 2013, vol. 40, no. 1, pp. 475–489. https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.07.018

Received August 30, 2019
Revised September 30, 2019
Accepted October 7, 2019

Funding Agency: This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19-07-01243 and 17-08-01385).

Mikhail Yur'evich Khachai, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Omsk State Technical University, Omsk, 644050 Russia, e-mail: mkhachay@imm.uran.ru .

Yurii Yur'evich Ogorodnikov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 6200083 Russia, e-mail: yogorodnikov@gmail.com .

Cite this article as: M. Yu. Khachai, Yu. Yu. Ogorodnikov. Haimovich–Rinnooy Kan polynomial-time approximation scheme for the CVRP in metric spaces of a fixed doubling dimension, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 235–248 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.54+519.17

НЕКОТОРЫЕ ШУРОВЫ СХЕМЫ ОТНОШЕНИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ГРУППАМИ СУДЗУКИ И РИ

Л. Ю. Циовкина

Схемой отношений называется пара $(\Omega, \mathcal{R})$, состоящая из конечного множества Ω и множества $\mathcal{R} = \{R_0, R_1 \ldots, R_s\}$ бинарных отношений на Ω, удовлетворяющего следующим условиям: (1) $\mathcal{R}$ — разбиение множества Ω^2; (2) $\{(x,x) \mid x \in \Omega\} \in \mathcal{R}$; (3) ${R_t}^T = \{(y,x) \mid (x,y) \in R_t\} \in \mathcal{R}$ для всех $0 \le t \le s$; (4) для всех $0 \le i,j,t \le s$ существуют константы c_{ij}^t (называемые *числами пересечений* схемы) такие, что $c_{ij}^t = |\{z \in \Omega | (x,z) \in R_i$ и $(z,y) \in R_j\}|$ для любой пары $(x,y) \in R_t$. Схема отношений $(\Omega, \mathcal{R})$ называется *шуровой*, если для некоторой группы подстановок на Ω ее набор орбиталов на Ω совпадает с $\mathcal{R}$. Данная работа посвящена исследованию шуровых схем отношений, связанных с группами Судзуки $Sz(q)$ и Ри ${}^2G_2(q)$, где $q > 3$, для которых графы ряда базисных отношений являются антиподальными дистанционно регулярными графами диаметра 3. Пусть G — одна из указанных групп, $r = (q-1)_{2'}$, B — подгруппа Бореля группы G, U — унипотентная подгруппа группы G, содержащаяся в B, K — подгруппа из B индекса r, g — инволюция из $G - B$ и f — элемент из $B \cap B^g$ порядка r. Пусть Ω — множество правых смежных классов группы G по подгруппе K, $h_i = f^i$ и $h_{r+i} = gf^i$ для всех $i \in \{0, \ldots, r-1\}$. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество $\{R_0, R_1, \ldots, R_{2r-1}\}$ бинарных отношений на Ω, определенных для каждого $t \in \{0, 1, \ldots, 2r-1\}$ по правилу: $(Kx, Ky) \in R_t$ тогда и только тогда, когда элемент xy^{-1} содержится в двойном смежном классе Kh_tK. В работе доказано, что $\mathcal{X} = (\Omega, \mathcal{R})$ — шурова схема отношений, множество базисных отношений которой совпадает с набором орбиталов G на Ω, и установлено, что число пересечений c_{ij}^t, где $0 \le i,j,t \le 2r-1$, схемы $\mathcal{X}$ равно $|U|$ при $t \le r-1, i,j \ge r$ и $j - i \equiv t \pmod r$; $(|U|-1)/r$ — при $i,j,t \ge r$; 1 — в случаях, если $t \le r-1, i,j \le r-1$ и $i+j \equiv t \pmod r$, или $i \le r-1, t,j \ge r$ и $j - i \equiv t \pmod r$, или $t, i \ge r, j \le r-1$ и $i + j \equiv t \pmod r$; 0 — в остальных случаях; здесь $|U| = q^2$ при $G = Sz(q)$ и $|U| = q^3$ при $G = {}^2G_2(q)$. Как следствие, найдены структурные параметры $m_{h_t}(h_i, h_j) = |\{Kx \in \Omega |\ Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kh_t \cap Kh_jK\}|$ алгебры Гекке $\mathbb{C}(K \backslash G/K)$ группы G относительно K. А именно, показано, что $m_{h_t}(h_i, h_j)$ — это в точности число пересечений c_{ij}^t схемы $\mathcal{X}$ для всех $0 \le i,j,t \le 2r-1$. По построению граф базисного отношения R_t с $t \ge r$ схемы $\mathcal{X}$ эквивалентен графу $\Gamma(G, K, Kh_tK)$ смежных классов группы G относительно подгруппы K и элемента h_t, и, как известно, является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 3 с массивом пересечений $\{|U|, (|U|-1)(r-1)/r, 1; 1, (|U|-1)/r, |U|\}$. Последний факт доказан в более ранней статье автора, где был предложен метод исследования графов $\Gamma(G, K, Kh_tK)$, основанный на анализе взаимного распределения окрестностей их вершин. В настоящей работе приведено доказательство дистанционной регулярности этих графов как следствие из найденных свойств схемы $\mathcal{X}$.

Ключевые слова: шурова схема отношений, дистанционно регулярный граф, антиподальный граф.

L. Yu. Tsiovkina. Some Schurian association schemes related to Suzuki and Ree groups.

An *association scheme* is a pair $(\Omega, \mathcal{R})$ consisting of a finite set Ω and a set $\mathcal{R} = \{R_0, R_1 \ldots, R_s\}$ of binary relations on Ω satisfying the following conditions: (1) $\mathcal{R}$ is a partition of the set Ω^2; (2) $\{(x,x) \mid x \in \Omega\} \in \mathcal{R}$; (3) ${R_t}^T = \{(y,x) \mid (x,y) \in R_t\} \in \mathcal{R}$ for all $0 \le t \le s$; (4) for all $0 \le i,j,t \le s$, there exist constants c_{ij}^t (called the *intersection numbers* of the scheme) such that $c_{ij}^t = |\{z \in \Omega | (x,z) \in R_i, (z,y) \in R_j\}|$ for any pair $(x,y) \in R_t$. An association scheme $(\Omega, \mathcal{R})$ is called *Schurian* if, for some permutation group on Ω, the set of orbitals of this group on Ω coincides with $\mathcal{R}$. This work is devoted to the study of Schurian association schemes related to Suzuki groups $Sz(q)$ and Ree groups ${}^2G_2(q)$ with $q > 3$ for which some graphs of their basic relations are antipodal distance-regular graphs of diameter 3. Assume that G is one of the mentioned groups, $r = (q-1)_{2'}$, B is a Borel subgroup of G, U is a unipotent subgroup of G contained in B, K is a subgroup of B with index r, g is an involution in $G - B$, and f is an element of order r in $B \cap B^g$. Let Ω be the set of the right K-cosets of G, and put $h_i = f^i$ and $h_{r+i} = gf^i$ for all $i \in \{0, \ldots, r-1\}$. Denote by $\mathcal{R}$ the set $\{R_0, R_1, \ldots, R_{2r-1}\}$ of binary relations on Ω defined for each $t \in \{0, 1, \ldots, 2r-1\}$ by the rule: $(Kx, Ky) \in R_t$ if and only if xy^{-1} is contained in the double coset Kh_tK. We prove that $\mathcal{X} = (\Omega, \mathcal{R})$ is a Schurian association scheme and its set of basic relations coincides with the set of orbitals of G on Ω. We find that the intersection number c_{ij}^t, where $0 \le i,j,t \le 2r-1$, of the scheme $\mathcal{X}$ is $|U|$ if $t \le r-1$, $i,j \ge r$, and $j - i \equiv t \pmod r$; $(|U|-1)/r$ if $i,j,t \ge r$; 1 if either $t \le r-1$, $i,j \le r-1$, and $i+j \equiv t \pmod r$, or $i \le r-1$, $t,j \ge r$, and $j-i \equiv t \pmod r$, or $t, i \ge r$, $j \le r-1$, and $i+j \equiv t \pmod r$; and 0 in the remaining cases, where $|U| = q^2$ if $G = Sz(q)$ and $|U| = q^3$ if $G = {}^2G_2(q)$. As a corollary, we find the structural parameters $m_{h_t}(h_i, h_j) = |\{Kx \in \Omega |\ Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kh_t \cap Kh_jK\}|$ of the Hecke algebra $\mathbb{C}(K \backslash G/K)$ of G with respect to K. Namely, we show that $m_{h_t}(h_i, h_j)$ is exactly the intersection number c_{ij}^t of the scheme $\mathcal{X}$ for all $0 \le i,j,t \le 2r-1$. By definition, the graph of the basic relation R_t with $t \ge r$ of $\mathcal{X}$ is equivalent to the coset graph $\Gamma(G, K, Kh_tK)$ of G with respect to K and the element h_t and, as is known, is an antipodal distance-regular graph of diameter 3 with intersection array $\{|U|, (|U|-1)(r-1)/r, 1; 1, (|U|-1)/r, |U|\}$. The latter fact was proved in the author's earlier paper, where we proposed a technique for studying the graphs $\Gamma(G, K, Kh_tK)$; the technique is based on analyzing the mutual distribution of the neighborhoods of vertices. In the present work, we prove the distance regularity of these graphs as a corollary of the properties of the scheme $\mathcal{X}$.

Keywords: Schurian association scheme, distance-regular graph, antipodal graph.

MSC: 05E30, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-249-254

Введение

Приведем некоторые основные определения и обозначения, используемые в настоящей статье. Как обычно, декартов квадрат множества Ω обозначается через Ω^2. *Когерентной конфигурацией* называется пара $(\Omega, \mathcal{R})$, состоящая из конечного множества Ω и множества $\mathcal{R} = \{R_0, R_1 \ldots, R_s\}$ бинарных отношений на Ω, удовлетворяющего следующим четырем условиям:

(1) $\mathcal{R}$ — разбиение множества Ω^2;

(2) в $\mathcal{R}$ существует подмножество $\mathcal{R}_0$, являющееся разбиением диагонали $\{(x, x) \mid x \in \Omega\}$;

(3) ${R_t}^T = \{(y, x) \mid (x, y) \in R_t\} \in \mathcal{R}$ для всех $0 \le t \le s$;

(4) для всех $0 \le i, j, t \le s$ существуют константы c^t_{ij} (называемые *числами пересечений* когерентной конфигурации) такие, что для любой пары $(x, y) \in R_t$ число точек $z \in \Omega$ таких, что $(x, z) \in R_i$ и $(z, y) \in R_j$, равно c^t_{ij}.

Пусть $\mathcal{X} = (\Omega, \mathcal{R})$ — когерентная конфигурация. Ее *базисными отношениями* называются элементы множества $\mathcal{R}$. Множество всех подстановок на Ω, оставляющих инвариантным каждое из базисных отношений когерентной конфигурации $\mathcal{X}$, образует ее *группу автоморфизмов* и обозначается через $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$. *Графом базисного отношения* $R_t \in \mathcal{R}$ называется пара (Ω, R_t), обозначаемая также через $\Gamma(R_t)$, при этом Ω — *множество вершин*, а R_t — *множество ребер* графа $\Gamma(R_t)$. Если $R_t = {R_t}^T \in \mathcal{R}$, то можно считать, что $\Gamma(R_t)$ — неориентированный граф (возможно, содержащий петли). Если $\{(x, x) \mid x \in \Omega\} \in \mathcal{R}$, то когерентная конфигурация $\mathcal{X}$ называется *однородной*. Следуя [1], однородные когерентные конфигурации будем называть *схемами отношений* или просто *схемами*. Если Y — группа подстановок на Ω и $\mathrm{Orb}_2(Y)$ — множество орбиталов группы Y на Ω (т. е. Y-орбит на Ω^2), то $\mathcal{X} = (\Omega, \mathrm{Orb}_2(Y))$ является когерентной конфигурацией и, очевидно, $Y \le \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$. Всякая когерентная конфигурация такой формы называется *шуровой*. В частности, если Y — транзитивная группа подстановок на Ω, то $(\Omega, \mathrm{Orb}_2(Y))$ является шуровой схемой отношений (или однородной шуровой когерентной конфигурацией).

Пусть далее Γ — неориентированный связный граф без петель и кратных ребер. Обозначим через d диаметр графа Γ. Если для любого $0 \le i \le d$ существуют константы b_i, a_i и c_i, такие, что для любой пары вершин x и y графа Γ, находящихся на расстоянии i, среди соседей вершины y найдется ровно b_i вершин, находящихся на расстоянии $i + 1$ от вершины x, ровно a_i вершин, находящихся на расстоянии i от вершины x, и ровно c_i вершин, находящихся на расстоянии $i - 1$ от вершины x, то граф Γ называется *дистанционно регулярным*, а последовательность параметров $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$ называется его *массивом пересечений*. Если бинарное отношение "совпадать или находиться на расстоянии d" на множестве вершин графа Γ является отношением эквивалентности, то граф Γ называется *антиподальным*.

Наши обозначения и терминология из теории групп, в основном, стандартны и могут быть найдены в [3]. Пусть G — одна из групп Судзуки $Sz(q)$ или групп Ри ${}^2G_2(q)$, где $q > 3$, B — ее подгруппа Бореля и K — подгруппа группы B индекса, равного $(q-1)_{2'}$. Для элемента g_1 из $G - B$ через $\Gamma(G, K, Kg_1K)$ будем обозначать *граф смежных классов* группы G относительно подгруппы K и элемента g_1, т. е. граф на множестве правых смежных классов группы G по K, в котором вершины Kx и Ky смежны тогда и только тогда, когда элемент xy^{-1} лежит в двойном смежном классе Kg_1K.

Ранее в статье [2] автором был предложен метод исследования некоторых графов смежных классов группы G относительно ее подгруппы K, основанный на анализе взаимного распределения окрестностей их вершин, и доказано, что они являются антиподальными дистанционно регулярными графами диаметра 3.

Здесь мы строим шурову схему отношений группы G на множестве ее правых смежных классов по подгруппе K, графы ряда базисных отношений которой эквивалентны упомянутым выше графам смежных классов, и находим ее числа пересечений. Также мы приводим доказательство дистанционной регулярности этих графов в терминах схем отношений.

Теорема. *Пусть $G = Sz(q)$ и $q = 2^{2e+1} \geq 8$ или $G = {}^2G_2(q)$ и $q = 3^{2e+1} \geq 27$. Пусть B — подгруппа Бореля группы G, U — унипотентная подгруппа группы G, содержащаяся в B, K — подгруппа из B индекса $r = (q-1)_{2'}$, g — инволюция из $G - B$ и f — элемент порядка r из $B \cap B^g$. Пусть Ω — множество правых смежных классов группы G по K, $h_i = f^i$ и $h_{r+i} = gf^i$, где $i \in \{0, \dots, r-1\}$. Для каждого $t \in \{0, \dots, 2r-1\}$ зададим бинарное отношение R_t на Ω, полагая $(Kx, Ky) \in R_t$ в том и только том случае, если $xy^{-1} \in Kh_tK$. Тогда $\mathcal{X} = (\Omega, \{R_0, R_1, \dots, R_{2r-1}\})$ — шурова схема отношений, множество базисных отношений которой совпадает с набором орбиталов G на Ω, и числа пересечений c_{ij}^t, где $0 \leq i, j, t \leq 2r-1$, схемы $\mathcal{X}$ таковы:*

$$c_{ij}^t = \begin{cases} |U|, & \text{\textit{если} } t \leq r-1, i, j \geq r \text{ \textit{и} } j - i \equiv t \pmod r, \\ (|U|-1)/r, & \text{\textit{если} } i, j, t \geq r, \\ 1, & \text{\textit{если} } t \leq r-1, i, j \leq r-1 \text{ \textit{и} } i + j \equiv t \pmod r, \\ 1, & \text{\textit{если} } i \leq r-1, t, j \geq r \text{ \textit{и} } j - i \equiv t \pmod r, \\ 1, & \text{\textit{если} } t, i \geq r, j \leq r-1 \text{ \textit{и} } i + j \equiv t \pmod r, \\ 0 & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$$

Кроме того, для каждого $t \geq r$ граф $\Gamma(R_t)$ схемы $\mathcal{X}$ является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 3 с массивом пересечений

$$\{|U|, (|U|-1)(r-1)/r, 1; 1, (|U|-1)/r, |U|\},$$

где $|U| = q^2$ при $G = Sz(q)$ и $|U| = q^3$ при $G = {}^2G_2(q)$, при этом $\Gamma(R_r) \simeq \Gamma(R_t)$ и $\mathrm{Aut}(\Gamma(R_t)) = \mathrm{Aut}(G)$.

1. Доказательство теоремы

Пусть $G = Sz(q)$ и $q = 2^{2e+1} \geq 8$ или $G = {}^2G_2(q)$ и $q = 3^{2e+1} \geq 27$. Пусть B — подгруппа Бореля группы G и U — унипотентная подгруппа группы G, содержащаяся в B. Как известно (см., например, [3; 4]), U — силовская p-подгруппа группы G, где p — характеристика группы G, $B = N_G(U)$, G действует 2-транзитивно на $Syl_p(G)$ и U имеет дополнение H в B, которое является циклической подгруппой порядка $q-1$. При этом можно считать, что $H = B \cap B^g$ для некоторой инволюции g из $G - B$. Тогда $H\langle g\rangle \simeq D_{2(q-1)}$. Положим $r = (q-1)_{2'}$, т. е. r — максимальный нечетный делитель числа $q-1$. Зафиксируем элемент f порядка r из H и подгруппу K из B индекса r. Тогда $H = \langle h\rangle \times \langle f\rangle$, где $h = 1$ при $G = Sz(q)$ (т. е. f порождает H) и h — (единственная) инволюция из H при $G = {}^2G_2(q)$.

Имеем $G = B \cup BgB$ и каждый элемент g_1 из $G - B$ единственным образом представим в виде $uwgv$, где $u, v \in U$ и $w \in H$. Такая форма записи элемента g_1 называется *канонической.* Положим $U^\# = U - \{1\}$. Пусть $\tau, \sigma : U^\# \to U$ и $\eta : U^\# \to H$ — это три функции, определенные с помощью канонической формы элементов в G по правилу $gsg = \tau(s)\eta(s)g\sigma(s)$ для всех $s \in U^\#$. Обозначим через Ω множество правых смежных классов группы G по K. Для удобства мы будем отождествлять группу G с подгруппой из $Sym(\Omega)$, индуцируемой действием группы G правым умножением на Ω.

Для того чтобы определить числа пересечений рассматриваемых далее схем, нам потребуется исследовать поведение функции η. Рассмотрим разбиение $\mathcal{P}$ множества U^2 на классы $C_0, C_1, \dots C_r$, определенные следующим образом:

$$C_0 = \{(x,x)|x \in U\} \text{ и } C_i = \{(x,y) \in U^2 | x \neq y \text{ и } \eta(xy^{-1}) \in f^i\langle h\rangle\} \text{ для всех } 1 \leq i \leq r.$$

Очевидно, что $\eta(xy^{-1}) = \eta(xs(ys)^{-1})$ для всех элементов x, y и s из U таких, что $x \neq y$, и поэтому для каждого $i \in \{0,1,\dots,r\}$ класс C_i замкнут относительно действия группы U правыми сдвигами на самой себе. Таким образом, U действует регулярно на C_0 и полурегулярно на C_i при $i > 0$. Так как $\eta(s^{-1}) = \eta(s)$ для всех $s \in U^\#$, то для всех $i \in \{0,1,\dots,r\}$ класс C_i совпадает с $C_i^T = \{(y,x) \in U^2 | (x,y) \in C_i\}$. Кроме того, действие сопряжениями группы H на U индуцирует транзитивную группу подстановок на $\mathcal{P} - \{C_0\}$, поскольку $\langle h, f^2\rangle = H$ и $\eta(s^f) = f^2\eta(s)$ для всех $s \in U^\#$ ввиду равенства

$$gs^f g = fgsgf^{-1} = \tau(s)^{f^{-1}} f^2\eta(s)g\sigma(s)^{f^{-1}}.$$

Отсюда классы $C_1, \dots C_r$ имеют одинаковый размер, равный $|U^2 - C_0|/r = |U|(|U|-1)/r$, в частности, для каждого $j \in \{0,1,\dots,r-1\}$ существует ровно $(|U|-1)/r$ элементов $s \in U^\#$ таких, что $\eta(s) \in f^j\langle h\rangle$.

Положим $h_i = f^i$ и $h_{r+i} = gf^i$ для всех $i \in \{0,\dots,r-1\}$. Для каждого $t \in \{0,\dots,2r-1\}$ зададим бинарное отношение R_t на Ω, полагая $(Kx, Ky) \in R_t \Leftrightarrow xy^{-1} \in Kh_tK$. Учитывая разложение $G = \bigcup_{t=0}^{2r-1} Kh_tK$, получим, что $\mathcal{R} = \{R_0, \dots, R_{2r-1}\}$ является разбиением множества Ω^2.

По определению $R_t = \{(Kf^ty, Ky)|y \in G\}$ при $0 \leq t \leq r-1$ и $R_t = \{(Kgf^ty, Ky)|y \in G\}$ при $r \leq t \leq 2r-1$. Таким образом, $\mathcal{R}$ совпадает со множеством орбиталов G на Ω. Значит, $\mathcal{X} = (\Omega, \mathcal{R})$ — шурова схема отношений.

Теперь найдем числа пересечений c_{ij}^t схемы $\mathcal{X}$.

Пусть $t \leq r-1$. Тогда неравенство $Kh_i^{-1}Kf^t \cap Kh_jK \neq \varnothing$ может иметь место только в случаях, когда либо $i, j \leq r-1$, либо $i, j \geq r$.

Если $i, j \leq r-1$, то $Kf^{-i+t} = Kf^j \Leftrightarrow i + j \equiv t \pmod r$, и поэтому число смежных классов Kx таких, что $Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kf^t \cap Kh_jK$, очевидно, равно 1.

Если $i, j \geq r$, то для $i' = i - r$ и $j' = j - r$ имеем $Kf^{i'+t} = Kf^{j'} \Leftrightarrow i + t \equiv j \pmod r$, и поэтому число смежных классов Kx таких, что $Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kf^t \cap Kh_jK = Kgf^iKf^t \cap Kgf^jK$, равно $|U| = |Kgf^jK : Kx|$.

Таким образом, для всех $t \leq r-1$ имеем

$$c_{ij}^t = \begin{cases} |U|, & \text{если } j - i \equiv t \pmod r \text{ и } i, j \geq r, \\ 1, & \text{если } i + j \equiv t \pmod r \text{ и } i, j \leq r-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теперь пусть $t \geq r$. Тогда неравенство $Kh_i^{-1}Kf^t \cap Kh_jK \neq \varnothing$ может иметь место только в случаях, когда либо $i \leq r-1$ и $j \geq r$, либо $i \leq r-1$ и $j \geq r$, либо $i, j \geq t$.

Если $i \leq r-1$ и $j \geq r$, то

$$Kgf^{t+i} \subseteq Kgf^jK \Leftrightarrow t + i \equiv j \pmod r,$$

и поэтому число смежных классов Kx таких, что $Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kgf^t \cap Kh_jK = Kf^{i-t}g \cap Kgf^jK$, равно 1.

Если $i \geq r$ и $j \leq r-1$, то

$$\varnothing \neq Kgf^iKgf^t \cap Kf^j \Leftrightarrow Kgf^igf^t = Kf^j \Leftrightarrow i + j \equiv t \pmod r,$$

и поэтому число смежных классов Kx таких, что $Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kgf^t \cap Kh_jK = Kgf^iKgf^t \cap Kf^j$, снова равно 1.

Наконец, если $i, j \geq r$, то

$$\varnothing \neq Kgf^iKgf^t \cap Kgf^jK \Leftrightarrow gf^ih^lsgf^t = \tau(s)^{f^ih^l}f^{-i}h^l\eta(s)f^{-t}g\sigma(s)^{f^t} = uh^mf^{-j}gv$$

для некоторых $l, m \in \{0, 1\}$ и элементов s, u, v из U. Последнее равенство влечет $\eta(s) = f^{i-j+t}h^{m-l}$, и по доказанному выше число смежных классов Kx таких, что

$$Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kgf^t \cap Kh_jK = Kgf^iKgf^t \cap Kgf^jK,$$

равно $(|U| - 1)/r$.

Таким образом, для всех $t \geq r$ имеем

$$c_{ij}^t = \begin{cases} (|U|-1)/r, & \text{если } i, j \geq r, \\ 1, & \text{если } j - i \equiv t \pmod r \text{ и } i \leq r-1, j \geq r, \\ 1, & \text{если } i + j \equiv t \pmod r \text{ и } i \geq r, j \leq r-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\Gamma(R_t) = (\Omega, R_t)$ — граф базисного отношения R_t и $t \geq r$. В этом случае ${R_t}^T = R_t$, и, отождествив графы $\Gamma(R_t)$ и $\Gamma(G, K, Kgf^tK)$, можно полагать, что $\Gamma(R_t)$ — неориентированный граф с транзитивной на дугах группой автоморфизмов G. В [2, теорема 1] было доказано, что для каждого $t \geq r$ граф $\Gamma(R_t)$ схемы $\mathcal{X}$ является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 3 с массивом пересечений $\{|U|, (|U|-1)(r-1)/r, 1; 1, (|U|-1)/r, |U|\}$. Кроме того, как следует из [2], графы $\Gamma(R_t)$ попарно изоморфны для всех $t \geq r$, при этом $\mathrm{Aut}(\Gamma(R_t)) = \mathrm{Aut}(G)$. Ясно, что $G \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ (по определению $\mathrm{Aut}(\mathcal{X}) = \{\varphi \in Sym(\Omega) | R^\varphi = R$ для всех $R \in \mathcal{R}\})$.

Заметим также, что дистанционная регулярность графа $\Gamma(R_t)$ следует из найденных выше значений чисел пересечений схемы $\mathcal{X}$. Действительно, отношение $\mathcal{A} = R_0 \cup R_1 \cup \ldots \cup R_{r-1}$ на Ω является отношением эквивалентности, классы которого отвечают максимальным блокам импримитивности группы G на Ω, на которых G действует 2-транзитивно. Теперь, рассмотрев числа пересечений схемы $\mathcal{X}$, получим, что граф $\Gamma(R_t)$ является r-накрытием полного графа на $|U| + 1$ вершинах (поскольку вершины графа $\Gamma(R_t)$ из одного и того же произвольного класса отношения $\mathcal{A}$ индуцируют r-коклику в $\Gamma(R_t)$, а объединение любых двух различных классов отношения $\mathcal{A}$ индуцирует совершенное паросочетание в $\Gamma(R_t)$) и любые две вершины из различных классов отношения $\mathcal{A}$ имеют ровно $(|U| - 1)/r$ общих соседей в $\Gamma(R_t)$.

Теорема доказана.

Результат доказанной теоремы позволяет определить произведение векторов алгебры смежности схемы $\mathcal{X}$, а также структурные параметры изоморфной ей алгебры Гекке. Пусть $A(R_t)$ — матрица смежности отношения R_t и $\mathbb{C}\mathcal{X} = \langle A(R_t) \rangle_{R_t \in \mathcal{R}}$ — алгебра смежности схемы $\mathcal{X}$. Произведение ее базисных векторов зависит от чисел пересечений схемы $\mathcal{X}$:

$$A(R_i)A(R_j) = \sum_{t=0}^{2r-1} c_{ij}^t A(R_t).$$

Отметим, что отображение $R_t \mapsto Kh_tK$ определяет изоморфизм алгебры $\mathbb{C}\mathcal{X}$ на алгебру Гекке $\mathbb{C}(K \backslash G / K)$ группы G относительно K (см., например, [1]), причем структурный параметр $m_{h_t}(h_i, h_j) = |\{Kx \in \Omega| \; Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kh_t \cap Kh_jK\}|$ последней — это в точности число c_{ij}^t для всех $0 \leq i, j, t \leq 2r - 1$.

Представляется возможным модифицировать и применить приведенное доказательство теоремы для исследования схем группы G в случае, если r — произвольный неединичный делитель числа $(q-1)_{2'}$, а также для исследования подобных шуровых схем для групп $L_2(q)$ и $U_3(q)$. Это планируется осуществить в одной из последующих публикаций автора. Подчеркнем, что числа пересечений таких схем (или структурные параметры сопутствующих им алгебр Гекке) определяют дистанционную регулярность и массивы пересечений графов их некоторых базисных отношений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Muzychuk M., Ponomarenko I.** Association schemes, Schur rings and the isomorphism problem for circulant graphs [e-resource]. Part 1 // Notes of lectures given at the international workshop "Algorithmic problems in group theory and related areas" (Novosibirsk, 2014). P. 1–24. Available at: http://www.math.nsc.ru/conference/isc/2014/lectures/MP1_2014.pdf .
2. **Tsiovkina L.Yu.** Two new infinite families of arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\lambda = \mu$ related to groups $Sz(q)$ and ${}^2G_2(q)$ // J. Algebr. Comb. 2015. Vol. 41, no 4. P. 1079–1087. doi: 10.1007/s10801-014-0566-x .
3. **Aschbacher M.** Finite Group Theory, Second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 305 p.
4. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London, etc: Wiley, 1972. 332 p.

Поступила 5.09.2019
После доработки 23.10.2019
Принята к публикации 28.10.2019

Циовкина Людмила Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: l.tsiovkina@gmail.com

REFERENCES

1. Muzychuk M., Ponomarenko I. *Association schemes, Schur rings and the isomorphism problem for circulant graphs*, Part 1, Notes of lectures given at the international workshop "Algorithmic problems in group theory and related areas", Novosibirsk, 2014, pp. 1–24. Available at: http://www.math.nsc.ru/conference/isc/2014/lectures/MP1_2014.pdf .
2. Tsiovkina L.Yu. Two new infinite families of arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\lambda = \mu$ related to groups $Sz(q)$ and ${}^2G_2(q)$. *J. Algebr. Comb.*, 2015, vol. 41, no. 4, pp. 1079–1087. doi: 10.1007/s10801-014-0566-x .
3. Aschbacher M. *Finite group theory.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 305 p. ISBN: 0-521-78675-4 .
4. Carter R.W. *Simple groups of Lie type.* London: Wiley, 1972, 332 p. ISBN: 0471137359 .

Received September 5, 2019
Revised October 23, 2019
Accepted October 28, 2019

Lyudmila Yuryevna Tsiovkina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: l.tsiovkina@gmail.com .

Cite this article as: L. Yu. Tsiovkina. Some Schurian association schemes related to Suzuki and Ree groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 249–254 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.5

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА — СТЕЧКИНА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ В СМЫСЛЕ ВЕЙЛЯ ФУНКЦИЙ В L_2

М. Ш. Шабозов, А. А. Шабозова

Для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций, принадлежащих пространству L_2, получены точные неравенства типа Джексона — Стечкина для специального модуля непрерывности m-го порядка, порожденного оператором (функцией) Стеклова. Аналогичные характеристики гладкости функций рассматривались ранее в работах В. А. Абилова, Ф. В. Абиловой, В. М. Кокилашвили, С. Б. Вакарчука, В. И. Забутной, К. Тухлиева и других. Для классов функций, определенных при помощи указанных характеристик, решен ряд экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации.

Ключевые слова: наилучшее приближение, периодическая функция, специальный модуль непрерывности, неравенства Джексона — Стечкина, экстремальные задачи.

M. Sh. Shabozov, A. A. Shabozova. Sharp inequalities of Jackson–Stechkin type for periodic functions in L_2 differentiable in the Weyl sense.

For periodic functions differentiable in the sense of Weyl and belonging to the space L_2, sharp inequalities of Jackson–Stechkin type are obtained for a special mth-order modulus of continuity generated by the Steklov operator (function). Similar characteristics of smoothness of functions were considered earlier by V. A. Abilov, F. V. Abilova, V. M. Kokilashvili, S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, K. Tukhliev, etc. For classes of functions defined in terms of these characteristics, we solve a number of extremal problems of polynomial approximation theory.

Keywords: best approximation, periodic function, special modulus of continuity, Jackson–Stechkin inequalities, extremal problems.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-255-264

При решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций в последнее время часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности (см., например, [1–6] и приведенную там литературу). Введение таких модификаций модуля непрерывности позволяет сформулировать естественные аналоги задач теории приближения и получить результаты, раскрывающие их содержательную сущность. В качестве примера укажем на некоторые работы М. К. Потапова и его учеников [7–10], где вместо оператора сдвига $T_h(f) := f(x+h)$, $x, h \in \mathbb{R}$, предложены различные усредняющие операторы и получены конструктивные характеристики исследуемых классов функций в терминах введенных обобщенных модулей непрерывности.

В случае аппроксимации 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами в ряде работ [11–14] вместо оператора сдвига $T_h(f)$ была использована функция Стеклова $S_h(f)$. В этой статье продолжим указанную тематику и обобщим некоторые результаты цитированных выше работ для классов функций, дифференцируемых в смысле Вейля [15].

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство суммируемых с квадратом модуля по Лебегу 2π-периодических функций с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

$\mathcal{F}_{2n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big), \tag{1}$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства $\mathcal{F}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := \inf\{\|f - T_{n-1}\| \colon T_{n-1} \in \mathcal{F}_{2n-1}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\Big)^{1/2}, \tag{2}$$

где $S_{n-1}(f)$ — частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье функции f; $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$, $k, n \in \mathbb{N}$; $a_k(f), b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f. Отметим, что в (1) вместо знака формального соответствия "$\sim$" можно поставить знак равенства "$=$", подразумевая под этим, что ряд в правой части сходится к f по норме пространства L_2, поскольку, как известно, $\|f - S_{n-1}(f)\| \to 0$ при $n \to \infty$. В аналогичных ситуациях ниже именно так и будем поступать, не оговаривая это явно.

Для произвольной функции $f \in L_2$ запишем функцию Стеклова

$$\mathcal{S}_h(f, x) := \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)dt, \quad h > 0,$$

и полагаем $\mathcal{S}_{h,i} = \mathcal{S}_h(\mathcal{S}_{h,i-1}(f))$, $i \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{S}_{h,0}(f) = f$. Обозначим через $\mathbb{I}$ единичный оператор в L_2 и, следуя работам [11; 13; 14], определим конечные разности первого и высших порядков функции f равенствами

$$\Delta_h^1(f, x) := \mathcal{S}_h(f, x) - f(x) = (\mathcal{S}_h - \mathbb{I})(f, x), \tag{3}$$

$$\Delta_h^m(f, x) := \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f, \cdot), x) = (\mathcal{S}_h - \mathbb{I})^m(f, x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \mathcal{S}_{h,k}(f, x), \ \ m = 2, 3, \ldots. \tag{4}$$

Используя эти обозначения, введем следующую характеристику гладкости функции $f \in L_2$ равенством

$$\Omega_m(f, t) := \sup\{\|\Delta_h^m(f, \cdot)\| \colon 0 < h \leq t\}, \tag{5}$$

которое назовем *обобщенным модулем непрерывности m-го порядка*. Излагаемые далее результаты связаны с определением дробной производной в смысле Вейля, а потому приводим необходимые в дальнейшем определения и обозначения, в которых используются эти понятия.

Рассмотрим для функции $f \in L_2$ с рядом Фурье (1) производную вещественного неотрицательного порядка α в смысле Вейля [15], определенную равенством

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \Big(a_k(f)\cos\Big(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\Big) + b_k(f)\sin\Big(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\Big)\Big). \tag{6}$$

Через $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$. Если $S_{n-1}\big(f^{(\alpha)}, x\big)$ — частичная сумма порядка $n-1$ ряда (6), то легко доказать, что наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ элементами $T_{n-1} \in \mathcal{F}_{2n-1}$ вычисляется как

$$E_{n-1}\big(f^{(\alpha)}\big) := \inf\big\{\|f^{(\alpha)} - T_{n-1}\| \colon T_{n-1} \in \mathcal{F}_{2n-1}\big\} = \big\|f^{(\alpha)} - S_{n-1}(f^{(\alpha)})\big\| = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha} \rho_k^2(f)\Big)^{1/2}. \tag{7}$$

Напомним определение синк функции, необходимое для дальнейшего,

$$\operatorname{sinc} t := \left\{\frac{\sin t}{t},\ \text{если}\, t \neq 0;\ 1,\ \text{если}\, t = 0\right\}.$$

Нам также понадобится следующая лемма.

Лемма. *Для произвольной функции* $f \in L_2^{(\alpha)}$ *имеет место равенство*

$$\Omega_m^2\left(f^{(\alpha)}, t\right) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m} \colon |h| \le t\right\}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим ряд Фурье произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ в комплексной форме

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Учитывая определение дробной производной в смысле Вейля, запишем

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^\alpha c_k(f)e^{ikx}. \tag{9}$$

Пользуясь равенством (9) для разностей (3) и (4), находим

$$\Delta_h^1(f^{(\alpha)}, x) := S_h(f^{(\alpha)}, x) - f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^\alpha c_k(f)e^{ikx}\frac{1}{2h}\int_0^h \left(e^{ikt} + e^{-ikt} - 2\right)dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^\alpha c_k(f)e^{ikx}\frac{1}{h}\int_0^h (\cos kt - 1)\, dt = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^\alpha c_k(f)(1-\operatorname{sinc} kh)e^{ikx}.$$

Методом математической индукции для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$\Delta_h^m(f^{(\alpha)}, x) = (-1)^m \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^\alpha c_k(f)(1-\operatorname{sinc} kh)^m e^{ikx}. \tag{10}$$

Применяя равенство Парсеваля к соотношению (10) и учитывая, что $|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2 = \rho_k^2(f)$, $k \in \mathbb{N}$, будем иметь

$$\|\Delta_h^m(f^{(\alpha)}, \cdot)\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2\alpha}|c_k(f)|^2(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m},$$

откуда в силу (5) получаем утверждение леммы.

Теорема 1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $t \in (0, 3\pi/4]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)},\\ f \neq \text{const}}} \frac{n^\alpha E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(\alpha)}, t/n)} = (1-\operatorname{sinc} t)^{-m}. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, учитывая равенство (2) и тот факт, что [16, с. 435]

$$\max\{|\operatorname{sinc} u| \colon u \ge nt\} = \operatorname{sinc} nt,\ 0 < nt \le 3\pi/4,$$
$$\min\{(1-\operatorname{sinc} u)^m \colon u \ge nt\} = \left(1 - \max_{u \ge nt}\operatorname{sinc} u\right)^m = (1-\operatorname{sinc} nt)^m,$$

для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ получаем

$$\Omega_m^2\left(f^{(\alpha)}, t\right) \geq \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)(1-\operatorname{sinc} kt)^{2m}$$

$$\geq n^{2\alpha}(1-\operatorname{sinc} nt)^{2m}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f) = n^{2\alpha}(1-\operatorname{sinc} nt)^{2m}E_{n-1}^2(f). \tag{12}$$

Из неравенства (12) сразу вытекает оценка сверху для величины, расположенной в левой части равенства (11)

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{n^\alpha E_{n-1}(f)}{\Omega_m\left(f^{(\alpha)}, t/n\right)} \leq (1-\operatorname{sinc} t)^{-m}. \tag{13}$$

Для получении аналогичной оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(\alpha)}$, для которой $f_0^{(\alpha)}(x) = n^\alpha \cos\left(nx + \dfrac{\alpha\pi}{2}\right)$ и

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \Omega_m(f_0^{(\alpha)}, t) = n^\alpha(1-\operatorname{sinc} nt)^m. \tag{14}$$

Пользуясь равенствами (14), запишем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{n^\alpha E_{n-1}(f)}{\Omega_m\left(f^{(\alpha)}, t/n\right)} \geq \frac{n^\alpha E_{n-1}(f_0)}{\Omega_m(f_0^{(\alpha)}, t/n)} = \left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{-m}. \tag{15}$$

Требуемое равенство (11) получаем из сопоставления неравенств (13) и (15).

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > \beta$, $t \in (0, 3\pi/4]$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right)}{\Omega_m\left(f^{(\alpha)}, t/n\right)} = (1-\operatorname{sinc} t)^{-m}. \tag{16}$$

В частности, при $t = \pi/2$ из (16) следует равенство $\sup\limits_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \dfrac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right)}{\Omega_m\left(f^{(\alpha)}, \pi/(2n)\right)} = \left(\dfrac{\pi}{\pi-2}\right)^m.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В левой части равенства (16), полагая $f^{(\beta)} = g$, получаем $f^{(\alpha)} = g^{(\alpha-\beta)}$, т. е. из условия $f \in L_2^{(\alpha)}$, $f \neq \mathrm{const}$ вытекает, что $g \in L_2^{(\alpha-\beta)}, g \neq \mathrm{const}$, а потому в силу (11) имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right)}{\Omega_m\left(f^{(\alpha)}, t/n\right)} = \sup_{\substack{g\in L_2^{(\alpha-\beta)}\\ g\neq\mathrm{const}}} \frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(g\right)}{\Omega_m\left(g^{(\alpha-\beta)}, t/n\right)} = (1-\operatorname{sinc} t)^{-m}.$$

Следствие доказано.

Условимся под *весовой функцией на отрезке* $[0, h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию q, не эквивалентную нулю на этом же отрезке. Введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику:

$$\chi_{n,m,\alpha,p}\left(\Omega_m; q, h\right) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\displaystyle\int_0^h \Omega_m^p\left(f^{(\alpha)}, t\right)q(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{17}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$, $0 < nh \leq \pi$, q — весовая на отрезке $[0, h]$ функция.

Отметим, что величина (17) при $\alpha \in \mathbb{N}$ и различных значениях параметров m, p и конкретных весовых функциях q исследована во многих работах (см., например, [13; 14] и приведенную там литературу). Наиболее общий результат получен в [13], где доказано, что если $m, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, q — весовая на $[0, h]$ функция, то имеет место двустороннее неравенство

$$(\mathcal{A}_{n,m,\alpha,p}(q,h))^{-1} \leq \chi_{n,m,\alpha,p}(q,h) \leq \left(\inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,m,r,p}(q,h)\right)^{-1}, \tag{18}$$

где

$$\mathcal{A}_{n,m,\alpha,p}(q,h) = \left(k^{\alpha p} \int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp} q(t) dt\right)^{1/p}.$$

В связи с неравенством (18) возникает естественный вопрос, каковы условия, при выполнении которых в (18) выполняются соотношения

$$\inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,m,\alpha,p}(q,h) = \mathcal{A}_{n,m,\alpha,p}(q,h). \tag{19}$$

Для весовых функций $q(t) \equiv 1$, $q(t) = t$ и $\alpha \in \mathbb{N}$ доказательство (19) имеется в [13]. В общем случае, следуя рассуждениям работы [17], С. Б. Вакарчук и В. И. Забутная в [13] доказали, что если $\alpha \in \mathbb{N}$ и весовая функция $q \in C^{(1)}[0, h]$ при всех $1/\alpha < p \leq 2$, $0 \leq t \leq h$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$(\alpha p - 1) q(t) - t q^{'}(t) \geq 0, \tag{20}$$

то имеет место соотношение (19).

Заметим, что условие (20) весьма ограничительно, поскольку множество весовых функций q, для которых выполняется неравенство (20), весьма узко.

В настоящей работе авторы нашли точное значение величины (17), во-первых, для всех значений $0 < p \leq \infty$ и, во вторых, без дополнительного предположения, что $q \in C^{(1)}[0, h]$ и удовлетворяет условию (20).

Сформулируем основной результат данной статьи.

Теорема 2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$, q — весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\chi_{n,m,\alpha,p}(q,h) = \left(n^{\alpha p} \int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что для параметра p, удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\|\Omega_m\|_p$ в знаменателе дроби в правой части (17) определен соотношением

$$\|\Omega_m\|_p := \begin{cases} \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p \left(f^{(\alpha)}, t\right) q(t) dt\right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{0 < t \leq h} \Omega_m \left(f^{(\alpha)}, t\right), & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

При этом указанный функционал лишь при $1 \leq p < \infty$ является нормой. Переходим к доказательству равенства (21). Возведем обе части неравенства $\Omega_m(f^{(\alpha)}, t) \geq n^\alpha (1 - \operatorname{sinc} nt)^m E_{n-1}(f)$, вытекающего из (12), в степень $p\,(0 < p \leq \infty)$, умножим на весовую функцию q и интегрируем от 0 до h, где $0 < h \leq 3\pi/(4n)$. В итоге получим

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)q(t)dt\right)^{1/p} \geq n^\alpha E_{n-1}(f)\left(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}.$$

Так как полученное неравенство верно для любой функции $f \in L_2^{(\alpha)}$, то из него получаем оценку сверху для величины (17):

$$\chi_{n,m,\alpha,p}(q,h) \leq \left(n^{\alpha p}\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{22}$$

С целью получения оценки снизу той же величины рассмотрим функцию $f_0(x) = \cos nx$ из L_2, которая была введена нами при доказательстве теоремы 1 и для которой имеют место равенства (14). Пользуясь ими получаем

$$\chi_{n,m,\alpha,p}\left(\Omega_m; q, h\right) \geq \frac{E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f_0^{(\alpha)}, t)q(t)dt\right)^{1/p}} = \left(n^{\alpha p}\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{23}$$

Сопоставляя оценку сверху (22) с оценкой снизу (23), получаем требуемое соотношение (21).

Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > \beta$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$, $0 < p \leq \infty$, q — весовая функция на отрезке $[0, h]$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\neq\text{const}}} \frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)q(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторив схему рассуждений при доказательстве следствия 1, получаем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\neq\text{const}}} \frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)q(t)dt\right)^{1/p}} = \sup_{\substack{g\in L_2^{(\alpha-\beta)}\\ g\neq\text{const}}} \frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(g\right)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(g^{(\alpha-\beta)}, t)q(t)dt\right)^{1/p}}$$

$$= \left(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Следствие доказано.

Для заданных $h > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \leq \infty$ и весовой функции на $[0, h]$ q обозначим через $W_{p,m}^{(\alpha)}\left(q, h\right) = W_p^{(\alpha)}\left(\Omega_m; q, h\right)$ класс функций $f \in L_2^{(\alpha)}$, для которых

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(f^{(\alpha)}, t\right) q(t)dt \leq 1.$$

При $\alpha > \beta \geq 0$ требуется найти величину

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\big(W_{p,m}^{(\alpha)}\left(q, h\right)\big) := \sup\left\{E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right) : f \in W_{p,m}^{(\alpha)}(q, h)\right\}. \tag{25}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > \beta \geq 0$, $0 < p \leq \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $h \in (0, 3\pi/(4n)]$, q — *весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда выполняется равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}(W_{p,m}^{(\alpha)}(q,h)) = \left(\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p} \cdot n^{-(\alpha-\beta)}. \tag{26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (24) для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > \beta$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(\beta)}) \leq \frac{1}{n^{\alpha-\beta}} \frac{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)q(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{27}$$

Из (27) для произвольной функции $f \in W_{p,m}^{(\alpha)}(q,h)$ получаем

$$E_{n-1}(f^{(\beta)}) \leq n^{-(\alpha-\beta)} \left(\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p},$$

откуда и следует оценка сверху

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\big(W_{p,m}^{(\alpha)}(q,h)\big) \leq n^{-(\alpha-\beta)} \left(\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{28}$$

Чтобы получить аналогичную оценку снизу величины (25), введем функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{n^\alpha} \left(\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p} \cos nx.$$

Для этой функции в силу равенств (7) и (8) имеем

$$E_{n-1}\left(f_1^{(\beta)}\right) = \frac{1}{n^{\alpha-\beta}} \frac{1}{\left(\int_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{29}$$

$$\Omega_m(f_1^{(\alpha)}, t) = \frac{(1-\operatorname{sinc} nt)^m}{\left(\int_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}},$$

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_1^{(\alpha)}, t)q(t)dt = 1.$$

Последнее равенство означает, что функция $f_1 \in W_{p,m}^{(\alpha)}q,h)$, а потому, учитывая равенство (29), запишем оценку снизу

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}(W_{p,m}^{(\alpha)}(q,h)) \geq E_{n-1}(f_1^{(\beta)}) = n^{-(\alpha-\beta)} \left(\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{30}$$

Требуемое равенство (26) получаем из сравнения оценки сверху (28) с оценкой снизу (30). Теорема доказана.

Из теоремы вытекают очевидные следствия.

Следствие 3. *В условиях теоремы* 3 *при* $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $q(t) \equiv 1$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\left(W_{1/m,m}\,(1,h)\right) = n^{-(\alpha-\beta)}\Big(\frac{n}{nh - \mathrm{Si(nh)}}\Big)^m, \tag{31}$$

где $\mathrm{Si}(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{sinc}\, u\, du$ *— интегральный синус. В частности, при* $h = \pi/(2n)$ *и* $\alpha - \beta > m$ *из равенства* (31) *имеем*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\Big(W_{1/m,m}\Big(1, \frac{\pi}{2n}\Big)\Big) = n^{-(\alpha-\beta)+m}\Big(\frac{2}{\pi - 2\mathrm{Si}(\pi/2)}\Big)^m.$$

Следствие 4. *В условиях теоремы* 3 *при* $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $q(t) \equiv t$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\left(W_{1/m,m}\,(t,h)\right) = n^{-(\alpha-\beta)}\left(2(nh/2)^2 - \sin^2(nh/2)\right)^{-m}, \tag{32}$$

и, в частности, при $h = \pi/(2n)$ *и* $\alpha - \beta > m$ *из* (32) *следует*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\Big(W_{1/m,m}\left(t, \frac{\pi}{2n}\right)\Big) = n^{-(\alpha-\beta)}\Big(\frac{8}{\pi^2 - 4}\Big)^m.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ditzian Z., Totik V.** Moduli of smoothness. N Y: Springer-Verlag, 1987. (Springer Ser. Comput. Math.; vol. 9). doi: 10.1007/978-1-4612-4778-4 . 227 p.
2. **Руновский К.В.** О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Мат. сб. 1994. Т. 185, №8. С. 81–102.
3. **Васильев С.Н.** Точное неравенство Джексона—Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденными произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т. 385, № 1. С. 11–14.
4. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 5. С. 783–788.
5. **Вакарчук С.Б.** Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 5. С. 792–796.
6. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки. 2013. Т. 94, вып. 3. С. 338–348.
7. **Потапов М.К.** О применении одного оператора обобщенного сдвига в теории приближений // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1998. № 3. С. 38–48.
8. **Потапов М.К.** О применении несимметричных операторов обобщенного сдвига в теории приближений // Тр. математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, 2001. Т. 8. С. 185–189.
9. **Потапов М.К.** О свойствах и о применении в теории приближений одного свойства операторов обобщенного сдвига // Мат. заметки. 2001. Т.69, № 3. С. 412–426.
10. **Нападенина А.Ю.** О совпадении классов функций, определяемых операторами обобщенного сдвига или порядком наилучшего приближения // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. № 2. С. 29–33.
11. **Абилов В.А., Абилова Ф.В.** Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 803–811.
12. **Kokilashvili V., Yildirir Y.E.** On the approximation in weighted Lebesgue spaces // Proc. A. Ramzadze Math. Inst. 2007. Vol. 143. P. 103–113.
13. **Вакарчук С.Б., Забутная В.И.** Неравенства типа Джексона—Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497–514.
14. **Шабозов М.Ш., Тухлиев К.** Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 6. С. 908–917.

15. **Weyl H.** Bemerkungen zum Begriff der differential quotienten gebrochener Ordnung, Vierteljahresschr. Natursch. Ges. Zurich. 1917. Vol. 62. P. 296–302.
16. **Тайков Л.В.** Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. 1976. Т 20, № 3. С. 433–438.
17. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764–775.

Поступила 20.08.2019
После доработки 31.10.2019
Принята к публикации 11.11.2019

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Таджикский национальный университет;
Университет Центральной Азии
г. Душанбе
e-mail: shabozov@mail.ru

Шабозова Адолат Азамовна
ассистент кафедры теории функций и математического анализа
Таджикский национальный университет;
Университет Центральной Азии
г. Душанбе
e-mail: shabozova91@mail.ru .

REFERENCES

1. Ditzian Z., Totik V. *Moduli of Smoothness.* Springer Ser. Comput. Math., vol. 9. N Y: Springer-Verlag, 1987. 227 p. ISBN: 978-1-4612-4778-4 .
2. Runovskii K.V. On approximation by families of linear polynomial operators in L_p spaces, $0 < p < 1$. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1995, vol. 82, no. 2, pp. 441–459. doi: 10.1070/SM1995v082n02ABEH003574 .
3. Vasil'ev S. Sharp Jackson–Stechkin inequality in L_2 with the modulus of continuity generated by an arbitrary finite-difference operator with constant coefficients. *Dokl. Math.*, 2002, vol. 66, no. 1, pp. 5-8.
4. Kozko A.I., Rozhdestvenskii A.V. On Jackson's inequality for generalized moduli of continuity. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 5, pp. 736–741. doi: 10.1023/A:1024029208953 .
5. Vakarchuk S.B. Exact Constants in Jackson-type inequalities and exact values of widths. *Math. Notes.*, vol. 78, no. 5-6, pp. 735–739. doi: 10.1007/s11006-005-0176-y .
6. Ivanov A.V., Ivanov V.I. Optimal arguments in Jackson's inequality in the power-weighted space $L_2(\mathbb{R}^d)$. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 3-4, pp. 320–329. doi: 10.1134/S0001434613090034 .
7. Potapov M. On the application of a generalized translation operator in the approximation theory. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 1998, vol. 53, no. 3, pp. 37–47.
8. Potapov M.K. On the application of asymmetric generalized shift operators in the theory of approximations. *Trudy Matem. Tsentra im N.I. Lobachevskogo (Kazan')*, 2001, vol. 78, pp. 185–189 (in Russian).
9. Potapov M.K. Properties of a Family of Operators. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 3, pp. 373–386. doi: 10.1023/A:1010287509486 .
10. Napedenina A. Coincidence of classes of functions determined by a generalized shear operator or the best approximation order. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 2004, vol. 59, no. 2, pp. 32–36.
11. Abilov V.A., Abilova F.V. Problems in the approximation of 2π-periodic functions by Fourier sums in the space $L_2(2\pi)$. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 5-6, pp. 749–757. doi: 10.1023/B:MATN.0000049674.45111.71 .
12. Kokilashvili V., Yildirir Y.E. On the approximation in weighted Lebesgue spaces. *Proc. A.Ramzadze Math. Inst.*, 2007, vol. 143, pp. 103–113.

13. Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Jackson – Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2, *Math. Notes*, 2012, vol. 92, no. 3-4, pp. 458–472. doi: 10.1134/S0001434612090180 .
14. Shabozov M.Sh., Tukhliev K. Best polynomial approximations and the widths of function classes in L_2. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 6, pp. 930–937. doi: 10.1134/S0001434613110291 .
15. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, 1917, vol. 62, no. 1-2, pp. 296–302.
16. Taikov L.V. Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in L_2. *Math. Notes Acad. Sci. of the USSR*, 1976, vol. 20, no. 3, pp. 797–800. doi: 10.1007/BF01097254 .
17. Shabozov M.S., Yusupov G.A. Best polynomial approximations in L_2 of classes of 2π-periodic functions and exact values of their widths. *Math. notes*, 2011, vol. 90, no. 5-6, pp. 748–757. doi: 10.1134/S0001434611110125 .

Received August 20, 2019
Revised October 31, 2019
Accepted November 11, 2019

Mirgand Shabozovich Shabozov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tajik National University, Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan, e-mail: shabozov@mail.ru .

Adolat Azamovna Shabozova, Tajik National University, Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan, e-mail: shabozova91@mail.ru .

Cite this article as: M. Sh. Shabozov, A. A. Shabozova. Sharp inequalities of Jackson–Stechkin type for periodic functions in L_2 differentiable in the Weyl sense, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 255–264 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.863

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИЙ НА НЕСОВЕРШЕННОМ РЫНКЕ КАПИТАЛА[1]

А. А. Шананин

Рассматривается проблема моделирования инвестиций на несовершенном рынке капитала, на котором процент по кредитам существенно превышает процент по депозитам. Для определения дефлятора денежных потоков предлагается использовать модель Кантора — Липмана, в которой инвестиционная среда описывается пулом стационарных тиражируемых проектов. Пул инвестиционных проектов определяет инвестиционную функцию, которая строится как поточечный максимум преобразований Лапласа денежных потоков инвестиционных проектов. Модель Кантора — Липмана инвестиций на несовершенном рынке капитала позволяет построить функцию Беллмана, которую можно использовать для оценки финансового состояния инвестора. Исследуются свойства оператора Беллмана в задаче об оптимальной стратегии инвестирования. Показано, что в качестве дефлятора денежных потоков следует использовать минимальный положительный корень инвестиционной функции. Исследована управляемая динамическая система, описывающая инвестиционный процесс. Построены режимы сбалансированного роста. Определены неймановский темп роста и неймановские состояния равновесия. Доказана теорема о магистрали в слабой форме.

Ключевые слова: инвестиции, модель Кантора — Липмана, математическое моделирование экономики, NPV, IRR, оператор Беллмана, инвестиционный полином, задача линейного программирования.

A. A. Shananin. Mathematical modeling of investments at an imperfect capital market.

We consider the problem of modeling the investments at an imperfect capital market, in which the interest on loans significantly exceeds the interest on deposits. To determine the cash flow deflator, we propose to use the Cantor–Lippman model, in which the investment environment is described by a pool of stationary, replicated projects. The pool of investment projects defines the investment function, which is built as the pointwise maximum of Laplace transforms of the cash flows of investment projects. The Cantor–Lippman model of investment in an imperfect capital market allows us to build a Bellman function, which can be used to assess the financial condition of the investor. We study the properties of the Bellman operator in the problem of an optimal investment strategy. It is shown that the minimum positive root of the investment function should be used as a cash flow deflator. We also study a dynamic control system describing the investment process. Modes of balanced growth are built. The Neumann growth rate and the Neumann equilibrium states are determined. A weak line theorem is proved.

Keywords: investments, Cantor–Lippman model, mathematical modeling of economics, NPV, IRR, Bellman operator, investment polynomial, linear programming.

MSC: 91B64

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-265-274

Введение

Научное обсуждение оценки эффективности инвестиционного проекта восходит к работам И. Фишера (1907, 1930) [1; 2]. Особенностью инвестиционных проектов в реальном секторе экономики является их ограниченная ликвидность. Начатый инвестиционный проект должен быть завершен, иначе он неликвиден. Инвестиционный проект в реальном секторе экономики характеризуется распределенными по времени денежными потоками $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, где a_i — величина денежного потока в i-й период времени от начала реализации проекта, $i = 1, \ldots, n$. Положительные значения a_i соответствуют доходам от реализации проекта, полученным в i-й период времени, а отрицательные значения — вложениям в инвестиционный

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 16-11-10246).

проект. Считая, что время реализации проекта разбито на равные промежутки времени, И. Фишер предложил в качестве критерия оценки инвестиционного проекта показатель приведенной чистой прибыли (NPV)

$$NPV(\vec{a}, r) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{r^j},$$

где в качестве дефлятора r предлагалось использовать доходность альтернативного варианта вложения денег. Поскольку значение дефлятора оказывает существенное влияние на величину и знак NPV, этот показатель подвергался критике. Естественно считать, что значение дефлятора заключено между процентными ставками по кредитам и депозитам. Однако на несовершенном рынке капитала значения этих процентных ставок существенно различаются. В качестве альтернативы NPV предлагался показатель внутренней доходности проекта (IRR), который определялся как значение дефлятора r, при котором $NPV(\vec{a}, r) = 0$. Однако такое значение может быть неединственным, так как инвестиционный полином

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

может иметь до n положительных корней. Возникшая проблема привела к дискуссии об оценке инвестиционных проектов. По-видимому, первая ее математическая постановка содержится в статье Дж. Хиршлейфера (1958) [3] и продолжена в работах Р. М. Солоу (1963) [4], Д. Гейла (1973) [5], Р. Дорфмана (1981) [6]. В работах Д. Кантора и С. Липмана (1983, 1995) [7; 8] была предложена модель инвестиций на несовершенном рынке капитала, в которой удалось определить доходность пула тиражируемых инвестиционных проектов и установить ее связь с уточненным понятием IRR. Исследование модели Кантора — Липмана было продолжено в работах [9–15].

1. Модель Кантора — Липмана инвестиций на несовершенном рынке капитала

Предположим, что для инвестора в любой период времени в любом объеме доступны M типов инвестиционных проектов. В доступном инвестору пуле проектов могут в том числе содержаться проекты депонирования и заимствования. Проект m-го типа задается вектором финансовых потоков $\vec{a}^m = (a_0^m, a_1^m, \ldots, a_n^m)$. Здесь $n+1$ — наибольшая продолжительность среди всех проектов[2], а $m = 1, \ldots, M$. Для того чтобы эти проекты можно было считать общедоступным альтернативным источником вложений, они должны быть стационарными (доступными в неизменном виде в любой момент времени) и тиражируемыми. Проект называется тиражируемым, если он может быть начат в любой период времени с произвольной интенсивностью $u \geqslant 0$ (вектор финансовых потоков такого проекта будет выглядеть как $u\vec{a} = (ua_0, ua_1, \ldots, ua_k)$).

Целью инвестора в модели Кантора — Липмана предполагается максимизация дохода к периоду времени T, в который вся инвестиционная деятельность должна быть завершена. Возможности инвестора в период времени t описываются остатком его расчетного счета $s_0(t)$, который изменяется в процессе реализации инвестиционной стратегии

$$\{u_m(t) | m = 1, \ldots, M; t = 0, \ldots, T-n\}.$$

Здесь $u_m(t)$ — интенсивность проекта m-го типа, начатого в период времени t. Динамика остатков расчетного счета описывается уравнением

$$s_0(t+1) = s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=0}^{n} a_k^m u_m(t-k).$$

[2]Если какой-то проект длится меньше, чем n периодов времени, то дополним соответствующий вектор нулями.

Дополнительных возможностей занимать и вкладывать деньги у инвестора нет. Все его возможности входят в доступный ему пул проектов; иными словами, должно выполняться условие самофинансирования

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0, \quad t = 1, \dots, T.$$

Будем считать заданными в период времени 0 денежные средства инвестора в объеме $\xi_0 > 0$. В модели Кантора—Липмана рассматривается задача об оптимальной стратегии инвестирования

$$s_0(T) \to \max; \tag{1.1}$$

$$s_0(t+1) = s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=0}^{n} a_k^m u_m(t), \quad t = 0, \dots, T-1; \tag{1.2}$$

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0, \quad t = 1, \dots, T; \tag{1.3}$$

$$s_0(0) = \xi_0; \tag{1.4}$$

$$u_m(t) \geqslant 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad t = 0, \dots, T-1; \tag{1.5}$$

$$u_m(t) = 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad t = T-n, \dots, T-1. \tag{1.6}$$

Обозначим через V_T оптимальное значение функционала в задаче (1.1)–(1.6).

Инвестиционная функция пула проектов определяется на промежутке $[0, +\infty)$ по формуле

$$F(r) = \max_{1 \leqslant m \leqslant M} \sum_{j=0}^{n} a_j^m e^{-rj}. \tag{1.7}$$

Теорема 1 (Кантор, Липман, [7;8]). 1. *Если $F(0) \leqslant 0$, то для любого $T \geqslant 0$ $V_T = \xi_0$ (пул инвестиционных проектов убыточен).*

2. *Если $F(r) > 0$ для всех $r \in [0, \infty)$, то существует $T_0 > 0$ такое, что для любого $T \geqslant T_0$ $V_T = +\infty$ (пул инвестиционных проектов допускает арбитраж).*

3. *Если $F(0) > 0$, существует $\tilde{r} > 0$ такое, что $F(\tilde{r}) < 0$, и $\rho > 0$ — наименьший положительный корень уравнения $F(r) = 0$, то ρ является доходностью пула инвестиционных проектов, т. е.*

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{\ln(V_T)}{T} = \rho.$$

4. *Если ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$, причем ρ является простым корнем, т. е. $\left|\left\{m \middle| \sum_{j=0}^{n} a_j^m e^{-pj} = 0\right\}\right| = 1$ и $F'(\rho) \neq 0$, то существуют положительные константы $0 < c < C$ такие, что $c\, e^{\rho T} \leqslant V_T \leqslant C e^{\rho T}$.*

Альтернативной оценкой инвестиционного проекта является его внутренняя норма доходности IRR. Для инвестиционного проекта с денежными потоками $\vec{a} = (a_0, \dots, a_n)$ норма IRR определяется как $1/\hat{z}$, где $\hat{z}$ — положительный корень инвестиционного полинома $\omega(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Теорема Кантора—Липмана уточняет выбор корня для тиражируемого стационарного проекта.

2. Оператор Беллмана и оценка финансового состояния инвестора

Обозначим через $s_k(t)$ финансовое состояние инвестора в период $t + k$ при условии, что, начиная с периода t, используется только проект сохранения денег. Тогда вектор $\vec{S}(t) = \big(s_0(t), \dots, s_{n-1}(t)\big)$ описывает результат финансовой стратегии инвестора. Обозначим через

$u_m(t)$ интенсивность проектов m-го типа, начатых в период времени t. Тогда $\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t)$. Здесь $\vec{u}(t) = \big(u_1(t), \dots, u_m(t)\big)$ — вектор интенсивностей инвестиционных проектов, начатых в период времени t, $D = (d_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$ — матрица $n \times n$, такая что

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ если } j = i+1, \ i = 0, \dots, n-2; \\ 1, \text{ если } i = j = n-1; \\ 0 \quad \text{иначе}, \end{cases}$$

где $B = (b_{im})_{i=1,\dots,n}^{m=1,\dots,M}$ — матрица $n \times M$ такая, что $b_{im} = \sum_{j=0}^{i} a_j^m$.

Цель инвестиционной стратегии — максимизация дохода в период времени не позднее T, т. е. оптимальная стратегия инвестиций определяется из решения задачи

$$e^{-r\tau} h\big(\vec{S}(\tau - n + 1)\big) \to \max_{0 \leqslant \tau \leqslant T, \vec{u}(t) \geqslant 0}; \tag{2.1}$$

$$\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t), \quad t = 0, \dots, \tau - n; \tag{2.2}$$

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0, \quad t = 0, \dots, \tau - n; \tag{2.3}$$

$$\vec{u}(t) \geqslant 0, \quad t = 0, \dots, \tau - n; \tag{2.4}$$

$$\vec{S}(0) = \vec{\xi}, \tag{2.5}$$

где $h\big(\vec{S}\big) = \begin{cases} s_{n-1}, \text{ если } \vec{S} = (s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^n; \\ -\infty \ \text{ иначе}. \end{cases}$

Обозначим через $W_T\big(\vec{\xi}, r\big)$ оптимальное значение функционала в задаче оптимизации (2.1)–(2.5). Функция $W_T\big(\vec{\xi}, r\big)$ оценивает начальное финансовое состояние инвестора при дефляторе r. Отметим, что построить функцию $W_T\big(\vec{\xi}, r\big)$ можно, итерируя оператор Беллмана:

$$W_{T+1}\big(\vec{\xi}, r\big) = \max\Big\{W_T\big(\vec{\xi}, r\big), \ e^{-r} \sup\Big\{W_T\big(D\vec{\xi} + B\vec{u}\big) \,\Big|\, \vec{u} \geqslant 0, \ \xi_0 + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0\Big\}\Big\},$$

$$W_0\big(\vec{\xi}, r\big) = h(\vec{\xi}). \tag{2.6}$$

Множество $L_T = \big\{\vec{\xi} \,|\, W_T\big(\vec{\xi}, r\big) > 0\big\}$ не зависит от значения дефлятора $r > 0$ и является выпуклым конусом. Заметим, что $L_T \subseteq L_{T+1}$ при $T = 0, 1, \dots$. Выпуклый конус $L_\infty = \bigcup_{T=0}^{+\infty} L_T$ будем называть *конусом ликвидных состояний*. Заметим, что конус L_∞ может быть незамкнутым (см. [11, с. 48]).

Функция

$$G_T(\vec{\xi}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \vec{\xi} \in L_T; \\ -\infty \text{ иначе} \end{cases}$$

может быть построена, итерируя оператор Беллмана

$$G_{T+1}(\vec{\xi}) = \sup\Big\{G_T\big(D\vec{\xi} + B\vec{u}\big) \,\Big|\, \vec{u} \geqslant 0, \ \xi_0 + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0\Big\}, \quad \text{где} \quad G_0(\vec{\xi}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \vec{\xi} \in \mathbb{R}_+^n, \\ -\infty \text{ иначе}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$G_\infty(\vec{\xi}) = \sup\Big\{G_\infty\big(D\vec{\xi} + B\vec{u}\big) \,\Big|\, \vec{u} \geqslant 0, \ \xi_0 + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0\Big\}, \quad \text{где} \quad G_\infty(\vec{\xi}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \vec{\xi} \in L_\infty; \\ -\infty \text{ иначе}. \end{cases}$$

Будем предполагать выполненными условия прибыльности $F(0) > 0$ и отсутствия арбитража, т. е. что существует $r > 0$ такое, что $F(r) < 0$, где $F(r)$ определяется формулой (1.7).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$.*

1. *При любых значениях $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n_+$, $r > 0$ существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{T\to+\infty} W_T\big(\vec{\xi}, r\big) = W_\infty\big(\vec{\xi}, r\big).$$

2. *Функция $W_\infty\big(\vec{\xi}, r\big)$ удовлетворяет уравнению*

$$W_\infty\big(\vec{\xi}, r\big) = \max\left\{W_\infty\big(\vec{\xi}, r\big),\ e^{-r}\sup\left\{W_\infty\big(D\vec{\xi} + B\vec{u}\big)\,\Big|\,\vec{u} \geqslant 0,\ \xi_0 + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0\right\}\right\} \tag{2.7}$$

и является положительно однородной первой степени, вогнутой, монотонно неубывающей функцией по переменной $\vec{\xi}$.

3. *Если $r < \rho$, то $W_\infty\big(\vec{\xi}, r\big) = +\infty$ при $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$.*

4. *Если $r > \rho$, то $W_\infty\big(\vec{\xi}, r\big) = 0$ при $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n_+$.*

5. *Если $0 < W_\infty\big(\vec{\xi}, r\big) < +\infty$ при $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$, то $r = \rho$.*

6. *Если $\left|\left\{m\,\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j^m e^{-\rho} = 0\right\}\right| = 1$, $F'(\rho) \neq 0$, то $W_\infty\big(\vec{\xi}, \rho\big) > 0$ при $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$ и $W_\infty\big(\vec{\xi}, \rho\big) = -\infty$ при $\vec{\xi} \notin L_\infty$.*

Доказательство. Заметим, что оператор Беллмана

$$BV\big(\vec{\xi}, r\big) = e^{-r}\sup\left\{V\big(D\vec{\xi} + B\vec{u}, r\big)\,\Big|\,\vec{u} \geqslant 0,\ \xi_0 + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0\right\}$$

является монотонным, т.е. если для любых $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ справедливо $V_1\big(\vec{\xi}, r\big) \geqslant V_2\big(\vec{\xi}, r\big)$, то для любых $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ справедливо $BV_1\big(\vec{\xi}, r\big) \geqslant BV_2\big(\vec{\xi}, r\big)$. В силу (2.6) имеем, что $W_{T+1}\big(\vec{\xi}, r\big) \geqslant W_T\big(\vec{\xi}, r\big)$ для любых $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n, r > 0$. Откуда следует, что для любых $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{T\to+\infty} W_T\big(\vec{\xi}, r\big) = W_\infty\big(\vec{\xi}, r\big).$$

Переходя к пределу в (2.6), получаем (2.7). Остальные утверждения легко следуют из теоремы Кантора—Липмана.

Теорема доказана.

Предложение 1 (см. [10;11]). *Пусть $F(0) > 0$ и ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$. Если $F(\alpha) > 0$, то существует удовлетворяющая балансовым ограничениям инвестиционная стратегия экспоненциального роста с темпом $\alpha > 0$ вида $u_m(t) = \hat{u}_m e^{\alpha t}$, $m = 1, \dots, M$, $t = 0, \dots, T-1$; $\vec{S}(t) = \hat{\vec{S}} e^{\alpha t}$, $t = 1, \dots, T$,* где $\hat{\vec{S}} = (\hat{s}_0, \dots, \hat{s}_{n-1})$, $\hat{s}_0 > 0$. Если $\alpha > \rho$, то $\hat{\vec{S}} \notin L_\infty$, т.е. финансовые состояния $\vec{S}(t) = \hat{\vec{S}} e^{\alpha t}$ являются неликвидными. Если $0 < \alpha < \rho$, то $\hat{\vec{S}} \in L_\infty$. Если $\alpha = \rho$, то $\hat{\vec{S}} \in L_\infty$ тогда и только тогда, когда ρ — корень уравнения $\zeta(r) = 0$, где

$$\zeta(r) = \sum_{j=0}^{n} e^{-rj}\Big(\sum_{m=1}^{M} a_j^m \hat{u}_m\Big), \quad \frac{d\zeta(r)}{dr}\,\Big|_{r=\rho} < 0$$

и для любого корня $r_k > \rho$ уравнения $\zeta(r) = 0$ выполняется неравенство $F\left(r_k\right) > 0$.

Предложение 1 показывает существенность условий (1.6) выхода из инвестиционного процесса. Если $\alpha > \rho$, $F(\alpha) > 0$, то существует инвестиционная стратегия с доходностью α, превышающей ρ, однако из этого инвестиционного процесса нельзя выйти и фиксировать доход, росший с темпом α, т.е. эта стратегия является “финансовой пирамидой”.

3. Магистральные свойства дефляторов

Рассмотрим инвестиционный процесс как управляемую динамическую систему. Переход из финансовой позиции $\vec{S}(t)$ возможен лишь в финансовые позиции

$$\Big\{\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t)\ \Big|\ \vec{u}(t) \geqslant 0,\ s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0\Big\}.$$

Будем задавать динамическую систему с помощью многозначного отображения перехода из состояния $\vec{S}$ в состояние $\hat{\vec{S}} \in \Omega(\vec{S})$, где

$$\Omega(\vec{S}) = \Big\{\hat{\vec{S}} = D\vec{S} + B\vec{u}\ \Big|\ \vec{u} = (u_1,\dots,u_m) \geqslant 0,\ s_0 + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0\Big\}.$$

Рассмотрим вопрос о режимах сбалансированного роста с темпом $\lambda > 0$.

Предложение 2. *Для того чтобы существовал вектор $\vec{\xi} \neq 0$, такой, что $\lambda\vec{\xi} \in \Omega(\vec{\xi})$, $\lambda > 1$, необходимо и достаточно, чтобы λ являлось корнем полинома*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + \lambda a_{n-1} + a_n = 0,$$

где

$$a_k = \sum_{m=1}^{M} a_k^m u_m,\ k = 0,\dots,n,\ \vec{u} = (u_1,\dots,u_m) \geqslant 0, \quad \vec{u} \neq 0, \quad \lambda\vec{\xi} = D\vec{\xi} + B\vec{u}, \quad \xi_0 = -\sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= a_0;\\
\lambda\xi_0 &= \xi_1 + (a_0 + a_1)\,;\\
\lambda\xi_1 &= \xi_2 + (a_0 + a_1 + a_2)\,;\\
&\dots\\
\lambda\xi_{n-2} &= \xi_{n-1} + (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1})\,;\\
\lambda\xi_{n-1} &= \xi_{n-1} + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)
\end{aligned}$$

эквивалентна системе

$$\xi_j = -\sum_{k=0}^{j} a_k\Big(\sum_{i=0}^{j-k}\lambda^i\Big), \quad j = 0,\dots,n-1;$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^{n-k} = 0.$$

Отсюда следует утверждение предложения 2.

Обозначим через $\omega_m(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j^m\lambda^j$ инвестиционный полином m-го проекта. Положим

$$Z(\vec{S},\lambda) = s_0 + (s_1 - s_0)\,\lambda + (s_{n-1} - s_{n-2})\,\lambda^{n-1}, \quad \text{где}\ \ \vec{S} = (s_0,\dots,s_{n-1})\,.$$

Заметим (см. [10]), что если

$$\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}, \quad \vec{u} = (u_1,\dots,u_m) \geqslant 0, \quad s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0,$$

то

$$\lambda Z\big(\vec{S}(t+1),\lambda\big) \leqslant Z\big(\vec{S}(t),\lambda\big) + \sum_{m=1}^{M} u_m\omega_m(\lambda). \tag{3.8}$$

Предложение 3. *Пусть ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$ и $\vec{S}(t+1) \in \Omega\bigl(\vec{S}(t)\bigr)$. Тогда*

$$e^{-\rho} Z\bigl(\vec{S}(t+1), e^{-\rho}\bigr) \leqslant Z\bigl(\vec{S}(t), e^{-\rho}\bigr), \tag{3.9}$$

причем если $e^{-\rho} Z\bigl(\vec{S}(t+1), e^{-\rho}\bigr) = Z\bigl(\vec{S}(t), e^{-\rho}\bigr)$, то

$$\{m \mid u_m(t) > 0\} \subseteq \bigl\{m \bigm| \omega_m\left(e^{-\rho}\right) = 0\bigr\}. \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $F(\rho) = \max\left\{\omega_m\left(e^{-\rho}\right) \mid m = 1, \ldots, M\right\} = 0$, $u_m(t) \geqslant 0$, $m = 1, \ldots, M$, то (3.9) следует из (3.8), и обращение неравенства (3.9) в равенство возможно только при выполнении включения (3.10).

Предложение доказано.

Отметим, что $Z\bigl(\vec{\xi}, e^{-\rho}\bigr)$ равняется значению функционала (2.1) на дефляторах

$$p(t) = e^{-\rho t}, \quad t = 0, \ldots, n-1,$$

и что если финансовое состояние $\vec{\xi}$ является ликвидным ($\vec{\xi} \in L_\infty$), то $Z\bigl(\vec{\xi}, e^{-\rho}\bigr) > 0$. Из остроты многогранного конуса L_T (см. предположение об отсутствии арбитража) и (3.9) следует компактность множества $\Omega\bigl(\vec{S}\bigr) \cap L_T$.

Обозначим

$$\Lambda = \bigl\{m \bigm| \omega_m\left(e^{-\rho}\right) = 0\bigr\}, \quad \widehat{\Lambda} = \Bigl\{m \in \Lambda \Bigm| \frac{d\omega_m(\lambda)}{d\lambda}\Bigr|_{\lambda=\rho} \neq 0\Bigr\}.$$

Из предложения 2 следует, что для любого $m \in \Lambda$ существует режим сбалансированного роста $\vec{\xi}^m$ с темпом e^ρ. Обозначим через $\Gamma = \mathrm{con}\bigl\{\vec{\xi}^m \bigm| m \in \Lambda\bigr\}$ их коническую оболочку.

Следствие. *Пусть ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$. Тогда*

$$e^\rho \geqslant \sup\bigl\{\alpha \bigm| \alpha\vec{\xi} \leqslant \vec{\eta},\ \vec{\eta} \in \Omega(\vec{\xi}),\ \vec{\xi} \in L_\infty\bigr\}. \tag{3.11}$$

Если $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$, то

$$e^\rho = \sup\bigl\{\alpha \bigm| \alpha\vec{\xi} \leqslant \vec{\eta},\ \vec{\eta} \in \Omega(\vec{\xi}),\ \vec{\xi} \in L_\infty\bigr\}. \tag{3.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства $\alpha\vec{\xi} \leqslant \vec{\eta}$ следует, что $\alpha Z\bigl(\vec{\xi}, e^{-\rho}\bigr) \leqslant Z\left(\vec{\eta}, e^{-\rho}\right)$. Поскольку $\vec{\eta} \in \Omega(\vec{\xi})$, имеем, что $e^{-\rho} Z\bigl(\vec{\eta}, e^{-\rho}\bigr) \leqslant Z\bigl(\vec{\xi}, e^{-\rho}\bigr)$. Из $\vec{\xi} \in L_\infty$ следует, что $Z\bigl(\vec{\xi}, e^{-\rho}\bigr) > 0$, откуда получаем неравенство (3.11). Если $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$, то существует режим сбалансированного роста с темпом e^ρ, лежащий в конусе ликвидных состояний L_∞, и, значит, выполнено (3.12).

Отметим, что в случае, когда $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$, e^ρ является неймановским темпом роста. Условие $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$ может выполняться, только если $\widehat{\Lambda} \neq \varnothing$ (см. [11] и предложение 1).

Следствие доказано.

Обозначим через $V_T(\vec{\xi})$ функцию Беллмана для задачи

$$\begin{aligned}
&e^{-rT} h\bigl(\vec{S}(T-n+1)\bigr) \to \max_{\vec{u}(t) \geqslant 0};\\
&\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t),\ t = 0, \ldots, T-n;\\
&s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0, \quad t = 0, \ldots, T-n;\\
&\vec{u}(t) \geqslant 0, \quad t = 0, \ldots, T-n;\\
&\vec{S}(0) = \vec{\xi},
\end{aligned}$$

Функция $V_T(\vec{\xi})$ является вогнутой, положительно однородной функцией, принимающей положительные значения внутри конуса L_T, и удовлетворяет уравнению Беллмана

$$V_{T+1}(\vec{\xi}) = e^{-\rho}\sup\left\{V_T\big(D\vec{\xi}+B\vec{u}\big)\ \middle|\ \vec{u}\geqslant 0,\ \xi_0+\sum_{m=1}^{M}a_0^m u_m\geqslant 0\right\},\quad V_0(\vec{\xi})=h(\vec{\xi}). \tag{3.13}$$

Решая на каждом шаге экстремальную задачу (3.13), можно построить синтез оптимального управления $\vec{u}_T(\vec{\xi})$ и вычислить функцию Беллмана на следующем шаге: $V_{T+1}(\vec{\xi}) = e^{-\rho}V_T\big(D\vec{\xi}+B\vec{u}_T(\vec{\xi})\big)$. Синтез оптимального управления позволяет построить динамическую траекторию финансовых состояний

$$\vec{S}_{t+1} = D\vec{S}_t + B\vec{u}_{T-t}\big(\vec{S}_t\big),\quad \vec{S}_0=\vec{\xi},\quad t=0,\ldots,T-1.$$

Теорема 3 (о магистрали в слабой форме). *Для любых $\varepsilon>0$, $\vec{\xi}\in L_\infty$ существует N (не зависящее от T) такое, что траектория финансовых состояний $\big\{\vec{S}_t \mid \vec{S}_{t+1} = D\vec{S}_t + B\vec{u}_{T-t}\big(\vec{S}_t\big),\ \vec{S}_0=\vec{\xi},\ t=0,\ldots,T-1\big\}$ удовлетворяет неравенству*[3]

$$\left|\left\{t\ \middle|\ \sup_{\vec{y}\in\Gamma\cap L_\infty}\left\|\frac{1}{\|\vec{S}_t\|}\vec{S}_t-\vec{y}\right\|>\varepsilon\right\}\right|\leqslant N.$$

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений, описанной в [16, с. 124]. Прежде всего заметим, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, обладающее свойством, в силу которого соотношения

$$\vec{S}\in L_\infty,\quad \vec{\eta}\in\Omega\big(\vec{S}\big),\quad \sup_{\vec{y}\in\Gamma\cap L_\infty}\left\|\frac{1}{\|\vec{S}_t\|}\vec{S}_t-\vec{y}\right\|>\varepsilon$$

влекут неравенство $e^{-\rho}Z\big(\vec{\eta},e^{-\rho}\big)<(1-\delta)Z\big(\vec{S},e^{-\rho}\big)$. Действительно, в противном случае существуют последовательности $\{\vec{x}_k|k=1,2,\ldots\}$, $\{\vec{y}_k|k=1,2,\ldots\}$ такие, что

$$\vec{x}_k\in L_\infty,\quad \|\vec{x}_k\|=1,\ \sup_{\vec{z}\in\Gamma\cap L_\infty}\|\vec{x}_k-\vec{z}\|\geqslant\varepsilon,\quad \vec{y}_k\in\Omega\left(\vec{x}_k\right),$$

$$e^{-\rho}Z\left(\vec{y}_k,e^{-\rho}\right)\geqslant\Big(1-\frac{1}{k}\Big)Z\left(\vec{x}_k,e^{-\rho}\right),\quad k=1,2,\ldots.$$

Выберем из последовательностей $\{\vec{x}_k|k=1,2,\ldots\}$ и $\{\vec{y}_k|k=1,2,\ldots\}$ подпоследовательности, сходящиеся к $\vec{x}$ и $\vec{y}$ соответственно. Переходя к пределу, получаем

$$\sup_{\vec{w}\in\Gamma\cap L_\infty}\|\vec{x}-\vec{w}\|\geqslant\varepsilon, \tag{3.14}$$

$$\vec{y}\in\Omega(\vec{x}),\quad e^{-\rho}Z\left(\vec{y},e^{-\rho}\right)\geqslant Z\left(\vec{y},e^{-\rho}\right). \tag{3.15}$$

Из (3.15) следует, что $\vec{x}\in\Gamma\cap L_T$. Последнее противоречит (3.14).

Если

$$\left|\left\{t\ \middle|\ \sup_{\vec{y}\in\Gamma\cap L_\infty}\left\|\frac{1}{\|\vec{S}_t\|}\vec{S}_t-\vec{y}\right\|>\varepsilon\right\}\right|=\theta,$$

то $Z\big(\vec{S}_T,e^{-\rho}\big)\leqslant(1-\delta)^\theta e^{\rho T}Z\big(\vec{\xi},e^{-\rho}\big)$. Кроме того, согласно используемым обозначениям $V_T(\vec{\xi})\leqslant e^{\rho n}Z\big(\vec{S}_T,e^{-\rho}\big)$. По теореме Кантора—Липмана справедливо неравенство $V_T(\vec{\xi})\geqslant ce^{\rho T}$, где $c>0$ — не зависящая от T постоянная величина. Следовательно, $c\leqslant e^{\rho n}(1-\delta)^\theta Z\big(\vec{\xi},e^{-\rho}\big)$, откуда получаем не зависящую от T оценку сверху на величину θ.

Теорема доказана.

[3] В данном неравенстве $|A|$ означает число элементов, содержащихся в множестве A.

Условие $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$ может выполняться только, если $\widehat{\Lambda} \neq \varnothing$ (см. [11] и предложение 1). Отметим, что в случае, когда $\Gamma \cap L_\infty \neq \varnothing$, e^ρ является неймановским темпом роста. Если

$$\hat{\vec{\xi}} \in \Gamma \cap L_\infty, \quad \hat{\vec{p}} = \left(1 - e^{-\rho},\, e^{-\rho} - e^{-2\rho},\, \ldots, e^{-\rho(n-2)} - e^{-\rho(n-1)},\, e^{-\rho(n-1)}\right),$$

то тройка $\left(e^\rho, \left(\hat{\vec{\xi}}, e^\rho \hat{\vec{\xi}}\right), \hat{\vec{p}}\right)$ является неймановским состоянием равновесия (см. [16, с. 104]), т. е. $e^\rho \vec{\xi}^m \in \Omega\left(\vec{\xi}^m\right)$ и для любых $\left(\vec{S}, \hat{\vec{S}}\right)$ таких, что $\hat{\vec{S}} \in \Omega\left(\vec{S}\right)$, справедливо $\hat{\vec{p}}\hat{\vec{S}} \leqslant e^\rho \hat{\vec{p}}\vec{S}$.

Это замечание с учетом магистрального свойства может служить оправданием использования $e^{-\rho}$ в качестве дефлятора финансовых потоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fisher I.** The rate of interest. N Y: Macmillan Co., 1907. 442 p.
2. **Fisher I.** The theory of interest. N Y: Macmillan Co., 1930. 566 p.
3. **Hirshleifer J.** On the theory of optimal decision // J. Political Economy. 1958. Vol. 66, no. 4. P. 229–239. doi: 10.1086/258057 .
4. **Solow R.M.** Capital theory and the rate of return. Amsterdam: North Holland Press, 1963. 98 p.
5. **Gale D.** On the theory of interest // The American Math. Monthly. 1983. Vol. 80, no 8. P. 853–868. doi: 10.2307/2319391 .
6. **Dorfman R.** The meaning of internal rates of return // J. Finance. 1981. Vol. 36, no. 5. P. 1011–1021. doi: 10.1111/j.1540-6261.1981.tb01072.x .
7. **Cantor D.G., Lipman S.A.** Investment selection with imperfect capital markets // Econometrica. 1983. Vol. 51, no. 4. P. 1121–1144. doi: 10.2307/1912055 .
8. **Cantor D.G., Lipman S.A.** Optimal investment selection with a multitude of projects // Econometrica. 1995. Vol. 63, no. 5. P. 1231–1240. doi: 10.2307/2171729 .
9. **Adler L., Gale D.** Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy // Mathematical Finance. 1997. Vol. 7, no. 1. P. 73–81. doi: 10.1111/1467-9965.00023 .
10. **Sonin I.M.** Growth rate, internal rates of return and tunpikes in investment model // Econ. Theory. 1995. Vol. 5, no. 3. P. 383–400. doi: 10.1007/BF01212325 .
11. **Presman E.L., Sonin I.M.** Growth rate, internal rates of return and financial bubbles. M.: ЦЭМИ РАН, 2000. 33 p.
12. **Беленький В.З.** Экономическая динамика: анализ инвестиционных проектов в рамках линейной модели Неймана—Гейла. М.: ЦЭМИ РАН, 2002. 78 с.
13. **Ващенко М.П.** Оценка доходности инвестиционных проектов в условиях неопределенности // Мат. моделирование. 2009. Т. 21, № 3. С. 18–30.
14. **Ващенко М.П., Шананин А.А.** Оценка доходности пула инвестиционных проектов в модели оптимального инвестирования в непрерывном времени // Мат. моделирование. 2012. Т. 24, № 3. С. 70–86.
15. **Shananin A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh.** Financial bubbles existence in the Cantor–Lippman model for continuous time // Lobachevskii J. Math. 2018. Vol. 39, no. 7. P. 929–935. doi: 10.1134/S1995080218070181 .
16. **Рубинов А.М.** Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономическим задачам. Л.: Наука, 1980. 166 с.

Поступила 10.10.2019
После доработки 30.10.2019
Принята к публикации 11.11.2019

Шананин Александр Алексеевич
чл.-корр. РАН, профессор, д-р физ.-мат. наук
зав. кафедрой анализа систем и решений
Московский физико-технический институт (научно-исследовательский университет)
г. Москва
e-mail: alexshan@yandex.ru

REFERENCES

1. Fisher I. *The rate of interest.* N Y: Macmillan Co., 1907, 442 p.
2. Fisher I. *The theory of interest.* N Y: Macmillan Co., 1930, 566 p.
3. Hirshleifer J. On the theory of optimal investment decision. *J. Political Economy*, 1958, vol. 66, no. 4, pp. 329–352. doi: 10.1086/258057 .
4. Solow R.M. *Capital theory and the rate of return.* Amsterdam: North Holland Press, 1963, 98 p.
5. Gale D. On the theory of interest. *The American Mathematical Monthly.* 1973, vol. 80, no. 8, pp. 853–868. doi: 10.2307/2319391 .
6. Dorfman R. The meaning of internal rates of return. *J. Finance*, 1981, vol. 36, no. 5, pp. 1011–1021. doi: 10.1111/j.1540-6261.1981.tb01072.x .
7. Cantor D.G., Lipman S.A. Investment selection with imperfect capital markets. *Econometrica*, 1983, vol. 51, no. 4, pp. 1121–1144. doi: 10.2307/1912055 .
8. Cantor D.G., Lipman S.A. Optimal investment selection with a multitude of projects. *Econometrica*, 1995, vol. 63, no. 5, pp. 1231–1240. doi: 10.2307/2171729 .
9. Adler L., Gale D. Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy. *Math. Finance*, 1997, vol. 7, no. 1, pp. 73–81. doi: 10.1111/1467-9965.00023 .
10. Sonin I.M. Growth rate, internal rates of return and turnpikes in an investment model. *Econ. Theory*, 1995, vol. 5, no. 3, pp. 383–400. doi: 10.1007/BF01212325 .
11. Presman E.L., Sonin I.M. *Growth rate, internal rates of return and financial bubbles.* Moscow: TsEMI RAN Publ., 2000, 33 p. ISBN: 5-8211-0122-0 .
12. Belen'kii V.Z. *Ekonomicheskaya dinamika: analiz investitsionnykh proektov v ramkakh lineinoi modeli Neimana–Geila* [Economic dynamics: an analysis of investment projects in the framework of the von Neumann–Gale linear model]. Moscow: TsEMI RAN Publ., 2002, 78 p. ISBN: 5-8211-0212-X .
13. Vashchenko M.P. Investment projects yield estimation under uncertainty. *Math. Models Comput. Simul.*, 2010, vol. 2, no. 1, pp. 33–45. doi: 10.1134/S2070048210010047 .
14. Vashchenko M.P., Shananin A.A. The estimation of the yield of the pool of investment projects in the optimal invetsing problem for continuous time. *Math. Models Comput. Simul.*, 2012, vol. 4, no. 5, pp. 497–508. doi: 10.1134/S2070048212050092 .
15. Shananin A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh. Financial bubbles existence in the Cantor–Lippman model for continuous time. *Lobachevskii J. Math.*, vol. 39, no. 7, pp. 929–935. doi: 10.1134/S1995080218070181 .
16. Rubinov A.M. *Superlineinye mnogoznachnye otobrazheniya i ikh prilozheniya k ekonomicheskim zadacham* [Superlinear many-valued mappings and their application to economical-mathematical problems]. Leningrad: Nauka Publ., 1980, 166 p.

Received October 10, 2019
Revised October 30, 2019
Accepted November 11, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10246).

Aleksandr Alekseevich Shananin, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Moscow, 141701 Russia,
e-mail: alexshan@yandex.ru .

Cite this article as: A. A. Shananin. Mathematical modeling of investments at an imperfect capital market, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 265–274 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.54

О СИЛОВСКИХ 2-ПОДГРУППАХ ГРУПП ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫХ ГРУППАМИ $L_3(2^m)$[1]

А. А. Шлепкин

Группа G насыщена группами из некоторого множества X групп, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из множества X. Если все элементы конечных порядков из группы G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G. Группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. Группа Шункова не обязана обладать периодической частью. В работе установлено строение силовской 2-подгруппы группы Шункова, насыщенной проективными специальными линейными группами степени три над конечными полями четной характеристики в предположении, что группа Шункова не обладает периодической частью.

Ключевые слова: группа, насыщенная заданным множеством групп, группа Шункова, периодическая часть группы.

A. A. Shlepkin. On Sylow 2-subgroups of Shunkov groups saturated with the groups $L_3(2^m)$.

A group G is saturated with groups from a set of groups X if any finite subgroup of G is contained in a subgroup of G isomorphic to some group from X. If all finite-order elements of a group G are contained in a periodic subgroup of G, then this subgroup is called the periodic part of G. A group G is called a Shunkov group if, for any finite subgroup H of G, any two conjugate elements of prime order in the quotient group $N_G(H)/h$ generate a finite group. A Shunkov group may have no periodic part. We establish the structure of a Sylow 2-subgroup of a Shunkov group saturated with projective special linear groups of degree 3 over finite fields of even characteristic in the case when the Shunkov group has no periodic part.

Keywords: group saturated with a given set of groups, Shunkov group, periodic part of a group.

MSC: 20K01

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-275-282

1. Введение

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной группе из $\mathfrak{X}$ [8;9]. Пусть G — группа. Если все элементы конечных порядков из G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G и обозначается через $T(G)$ [2, с. 90]. Группа G называется *группой Шункова* (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [5]. Отметим, что группа Шункова не обязана обладать периодической частью (см. [6]). В работе [4] доказывается, что периодическая группа G, насыщенная группами $L_3(2^n)$, локально конечна и изоморфна $L_3(P)$, где P — подходящее локально конечное поле характеристики 2. Естественно попытаться перенести указанный результат на классы групп, содержащие элементы бесконечного порядка, в частности, на класс групп Шункова.

При изучении группы с условием насыщенности одним из ключевых моментов является нахождение в ней счетной локально конечной подгруппы с достаточно хорошими свойствами.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10007).

В случае, когда насыщающее множество состоит из конечных простых неабелевых групп, в качестве такой подгруппы желательно взять силовскую 2-подгруппу изучаемой группы. Это связано с тем обстоятельством, что в дальнейшем, как правило, удается построить возрастающую цепочку вложенных друг в друга конечных простых неабелевых подгрупп исследуемой группы и в конечном итоге установить структуру изучаемой группы. В данной работе рассматривается группа Шункова, насыщенная проективными специальными линейными группами степени три над конечными полями характеристики два, при дополнительном условии, что группа не обладает периодической частью. Установлена структура нормализатора силовской 2-подгруппы данной группы и доказан а его счетность.

Гипотеза. *Пусть группа Шункова H насыщена группами из множества $\mathfrak{M} = \{L_3(2^n) \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Тогда H обладает периодической частью $T(H)$, которая изоморфна $L_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2.*

В дальнейшем G — контрпример к утверждению гипотезы. В данной работе получены ряд свойств силовской 2-подгруппы группы G. Доказана

Теорема. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда*

(a) *S — бесконечная локально конечная группа периода 4;*

(b) *S двуступенно нильпотентна, $Z(S) = S'$ — группа периода 2;*

(c) $x^2 \in Z(S)$ для любого $x \in S,\ x^2 \in Z(S)$;

(d) *если z — инволюция из G, то $C_G(z)$ обладает единственной силовской 2-подгруппой, которая совпадает с S;*

(e) *силовские 2-подгруппы в группе G сопряжены с S;*

(f) *подгруппа $N = N_G(S)$ обладает счетной периодической частью $T = T(N) = S \leftthreetimes P$, где группа P — локально конечная абелева группа ранга 2 без инволюций;*

(g) *T насыщена группами из множества $\mathfrak{M}_N = \{N_M(S_M) \mid M \in \mathfrak{M}, S_M \in Syl_2 M\}$.*

Пусть H — группа, K — подгруппа H, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Через $\mathfrak{X}_H(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы H, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 — единичная подгруппа группы H, то $\mathfrak{X}_H(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы H, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно, о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_H(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$ и соответственно вместо $\mathfrak{X}_H(1)$ — $\mathfrak{X}(1)$.

2. Доказательство теоремы

При доказательстве теоремы будем следовать схеме доказательства лемм 2.1–2.11 из [4]. Поскольку G — контрпример к утверждению Гипотезы, то согласно [4, теорема] группа G не обладает периодической частью.

Лемма 1. *Группа G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если G содержит лишь конечное множество элементов конечного порядка, то по лемме Дицмана [1] и условию насыщенности G обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна $L_3(2^n)$ для подходящего n. Противоречие с выбором G. Следовательно, G содержит бесконечно много элементов конечного порядка, и по [10, лемма 1] группа G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Группа G содержит инволюцию, и все инволюции группы G сопряжены. Порядок любого 2-элемента из G не превосходит 4, и для любой инволюции $z \in G$ существует элемент $x \in G$ такой, что $x^2 = z$. Любая 2-подгруппа T из G двуступенно нильпотентна, квадрат любого элемента из T лежит в центре T, T' — группа периода 2 и $T' \leq Z(T)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку в группе Шункова, как и в периодической группе, любые две инволюции порождают конечную группу, то доказательство данной леммы аналогично доказательству соответствующих свойств перечисленных в утверждении [4, лемма 2.1].

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть x — элемент порядка 4 из G. Тогда $C_G(x)$ обладает периодической частью $T(C_G(x))$, которая является бесконечной абелевой 2-группой. В частности, любая силовская 2-подгруппа группы G бесконечна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K — произвольная конечная подгруппа из $C_G(x)$. Тогда $\langle K, x\rangle$ — также конечная подгруппа из $C_G(x)$. По условию насыщенности существует группа $L \in \mathfrak{M}(\langle K, x\rangle)$. По [4, § 1, свойства 2, 7] $C_L(x)$ — абелева 2-группа. Так как $\langle K, x\rangle \leq C_L(x)$, то K — абелева группа. По [7, предложение 7] $T(C_G(x))$ существует и является абелевой 2-группой. Покажем, что $T(C_G(x))$ — бесконечная группа. В силу лемм 1 и 2 $C_G(x)$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка. Следовательно, $T(C_G(x)$ — бесконечная группа, а любая силовская 2-подгруппа из G бесконечна.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть z — инволюция из G. Тогда $C_G(z)$ обладает единственной силовской 2-подгруппой S, которая одновременно будет силовской 2-подгруппой в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2 в G найдется элемент x порядка 4 такой, что $x^2 = z$. Отсюда и из леммы 3 следует, что $T(C_G(x)) \leq C_G(z)$. Пусть T — силовская 2-подгруппа из $C_G(z)$, содержащая $T(C_G(x))$. Очевидно, T — бесконечная группа. Пусть T_1 — силовская 2-подгруппа из $C_G(z)$, содержащая x и отличная от T. Очевидно, $Z(T_1) < T$.

Далее разобьем доказательство леммы на несколько пунктов.

1. Пусть I — группа, порожденная всеми инволюциями из $Z(T)$, а I_1 — группа порожденная всеми инволюциями из $Z(T_1)$. Тогда $I = I_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $Z(T_1) < C_{T_1}(x) < T(C_G(x) < T$, то $I_1 \leq I$. Предположим, что $I_1 < I$. Тогда найдется инволюция $a \in I \setminus I_1$. Так как $b^2 \in I_1$ для любого $b \in T_1$, то по [7, предложения 4,5] $\langle a, b, z\rangle$ — конечная подгруппа из $C_G(z)$. По условию насыщенности $\langle a, b, z\rangle \leq L_1 \in \mathfrak{M}(\langle a, b, z\rangle)$. По [4, § 1, п. 7] $\langle a, b, z\rangle$ — конечная 2-группа из $C_{L_1}(z)$. Соответственно $\langle a, b\rangle$ — конечная 2-группа и $[x, y] \in I$ для любого $y \in \langle a, b\rangle$ (см. лемму 2). Следовательно, фактор-группа $\langle x, a, b, I\rangle/I$ является конечной 2-группой, группа $\langle x, a, b, I\rangle$ — локально конечная 2-группа (см. теорему Шмидта [2, теорема 23.1.1]), а $\langle x, a, b\rangle$ — конечная 2-группа. По условию насыщенности $\langle x, a, b\rangle \leq L_2 \in \mathfrak{M}(\langle x, a, b\rangle)$. Возьмем в L_2 силовскую 2-подгруппу S_2, содержащую $\langle x, a, b\rangle$. Поскольку $ax = xa$, то $a \in Z(S_2)$, следовательно, $ab = ba$. В силу произвольности выбора b как элемента группы T_1 $a \in C_G(T_1)$. Поскольку T_1 — силовская 2-подгруппа в G, то $a \in T_1$, $a \in Z(T_1)$ и $a \in I_1$. Противоречие с выбором инволюции a. Следовательно, $I = I_1$. □

Обозначим группу I через Z^*.

2. Фактор-группа $\langle T, T_1\rangle/Z^*$ не содержит элементов порядка 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду п. 1, доказанного выше, и [7, предложения 4, 5] фактор-группа $\langle T, T_1\rangle/Z^*$ — группа Шункова. Пусть $\overline{d}$ — элемент порядка 4 из фактор-группы $\langle T, T_1\rangle/Z^*$, а d — его прообраз в $\langle T, T_1\rangle$. Ввиду леммы 2 $|d| = 4$ для любого $v \in T_1, [v, x] \in Z^*$ и $[w, x] \in Z^*$ для любого $w \in T$. Следовательно, $Z^*\langle x\rangle$ — нормальная подгруппа в $\langle T_1, T\rangle$, $Z^*\langle x\rangle\langle d\rangle$ — локально конечная 2-группа с нормальной подгруппой $Z^*\langle x\rangle$ и $(Z^*\langle x\rangle) \cap \langle d\rangle = 1$. Для любого $u \in Z^*$ $\langle u, x, d\rangle$ — конечная 2-подгруппа из $Z^*\langle x\rangle\langle d\rangle$. По условию насыщенности

$$u \in Z^*, \langle u, x, d\rangle < S_L < L \in \mathfrak{M}(\langle u, x, d\rangle),$$

где S_L — силовская 2-подгруппа из L. По [4, § 1, свойство 3] $d^2 \in Z(S_L)$ и, следовательно, $d^2 \in T(C_G(x)) = T$. Возьмем произвольный элемент $t \in T$. Рассмотрим конечную подгруппу $\langle t, d^2, x\rangle$ группы T. По условию насыщенности

$$\langle t, d^2, x\rangle < S_{L_1} < L_1 \in \mathfrak{M}(\langle t, d^2, x\rangle),$$

где S_{L_1} — силовская 2-подгруппа из L_1. По [4, § 1, свойство 3] $d^2 \in Z(S_{L_1})$, следовательно, $d^2t = td^2$ для любого $t \in T$. Последнее означает, что $d^2 \in Z(T)$, $d^2 \in Z^*$ и $|\overline{d}| = 2$. Противоречие с тем, что $|\overline{d}| = 4$. Таким образом, все неединичные 2-элементы фактор-группы $\langle T, T_1\rangle/Z^*$ являются инволюциями. $\square$

3. Покажем, что произведение любых двух инволюций из фактор-группы $\langle T, T_1\rangle/Z^*$ — снова инволюция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в противном случае в фактор-группе $\langle T, T_1\rangle/Z^*$ найдутся инволюции $\overline{v}, \overline{w}$ такие, что $|\overline{v}\ \overline{w}| > 2$. По п. 2, доказанному выше, фактор-группа $\langle T, T_1\rangle/Z^*$ не может содержать элементов порядка 4. Следовательно, $|\overline{v}\ \overline{w}|$ делится на некоторое нечетное простое число p, в группе $\langle\overline{v}\ \overline{w}\rangle$ найдется подгруппа $\langle\overline{d}\rangle$ простого порядка p, а соответственно в фактор-группе $\langle T, T_1\rangle/Z^*$ найдется группа диэдра $\langle\overline{d}\rangle \leftthreetimes \langle\overline{v}\rangle$ и $\overline{d}^{\overline{v}} = \overline{d}^{-1}$.

Пусть d, v — прообразы элементов d, v в группе $\langle T, T_1\rangle$ такие, что v — 2-элемент, а d — элемент нечетного порядка, делящегося на p. В силу того что $\langle Z^*, x\rangle$ — нормальная подгруппа в $\langle T, T_1\rangle$ (см. доказательство п. 2) $\langle Z^*, x, d, v\rangle$ — локально конечная группа, соответственно $\langle x, d, v\rangle$ —конечная группа из $C_G(z)$. По условию насыщенности

$$\langle x, d, v\rangle < L_2 \in \mathfrak{M}(\langle x, d, v\rangle),$$

и $\langle d, x, v\rangle \le C_{L_2}(z)$. По [4, § 1, свойство 7] $C_{L_2}(z) = S_{L_2} \leftthreetimes D$, где S_{L_2} — силовская 2-подгруппа из L_2, содержащая $\langle x, v\rangle$, а D — циклическая группа нечетного порядка. Без ограничения общности можно считать, что $d \in D$, а $v \in S_{L_2}$ (см. теорему Холла [3, теорема 15.2.4]). Тогда $d^v = sd^{-1}$ для некоторого $s \in Z^*$ (согласно выбору элементов d, v) и $d^v = s_1d$ для некоторого $s_1 \in S_{L_2}$ (согласно структуре $C_{L_2}(z)$). Следовательно, $sd^{-1} = s_1d$ и $d^2 = s_1^{-1}s$ — 2-элемент, что невозможно. $\square$

4. T — единственная силовская 2-подгруппа из $C_G(z)$, содержащая x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказанных выше пп. 1–3 вытекает, что все конечные подгруппы фактор-группы $\langle T, T_1\rangle/Z^*$ являются элементарными абелевыми 2-группами. По [7, предложение 7] фактор-группа $\langle T, T_1\rangle/Z^*$ обладает периодической частью $T(\langle T, T_1\rangle/Z^*)$, которая является абелевой группой периода 2. Очевидно, ее полный прообраз в $\langle T, T_1\rangle$ совпадает с $\langle T, T_1\rangle$ (в силу того что $\langle T, T_1\rangle$ порождается элементами конечного порядка) и является 2-подгруппой в $C_G(z)$. Так как T, T_1 — силовские 2-подгруппы из $C_G(z)$, содержащие x, то $\langle T, T_1\rangle = T = T_1$. $\square$

5. Все инволюции из $C_G(z)$ лежат в T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a — инволюция из $C_G(z) \setminus T$. По [7, предложения 4,5] группа $\langle x, a\rangle$ конечна. По условию насыщенности $\langle x, a\rangle \le L_3 \in \mathfrak{M}(\langle x, a\rangle)$. Следовательно, $\langle x, a\rangle \le C_L(z)$, $\langle x, a\rangle$ — 2-группа [4, § 1, свойство 7]. Пусть T_2 — силовская 2-подгруппа из $C_G(z)$, содержащая $\langle x, a\rangle$. По п. 4, доказанному выше, $T = T_2$. Следовательно, $a \in T$. Противоречие с выбором инволюции a. $\square$

6. Все элементы порядка 4 из $C_G(z)$ лежат в T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть b — элемент порядка 4 из $C_G(z)$. По условию насыщенности $\langle z, b\rangle < L_4 \in \mathfrak{M}(1)$. Пусть S_4 — силовская 2-подгруппа из L_4, содержащая элемент z из $Z(S_4)$. По [4, § 1, свойство 4] b является произведением инволюций из S_4. Поскольку $S_4 < C_G(z)$, то по п. 5, доказанному выше, $b \in T$. $\square$

Завершим доказательство леммы. Так как все неединичные 2-элементы из $C_G(z)$ имеют порядок 2 или 4, то по пп. 5, 6, доказанным выше, T — характеристическая подгруппа в

$C_G(z)$, а поскольку она силовская 2-подгруппа в $C_G(z)$ (см. п. 4, доказанный выше), то она единственная силовская 2-подгруппа в $C_G(z)$. Тогда $S = T$.

Лемма 4 доказана.

Зафиксируем силовскую 2-подгруппу S группы G из утверждения леммы 4 и положим $N = N_G(S)$, $Z = Z(S)$.

Лемма 5. *Имеют место следующие утверждения:*
(a) *силовские 2-подгруппы в группе G сопряжены;*
(b) $Z = S^{'}$.

Доказательство. (a). Пусть S_1 — силовская 2-подгруппа группы G, отличная от S. По лемме 2 S_1, S — нильпотентные группы. Возьмем инволюцию $t \in Z(S_1)$ и инволюцию $r \in Z(S)$. Тогда $t = r^g$ для некоторого $g \in G$ (см. лемму 2), и $S_1 = S^g$ (лемма 4).

(b). Доказательство данного утверждения аналогично доказательству [4, лемма 2.4.].

Лемма доказана.

Лемма 6. *Группа $\overline{N} = N_G(S)/S$ обладает периодической частью $T(\overline{N}) := \overline{P}$, которая является периодической абелевой группой ранга 2 без инволюций.*

Доказательство леммы разобьем на несколько пунктов.

1. Пусть $\overline{K}$ — конечная подгруппа из $\overline{N}$. Тогда $\overline{K}$ — абелева группа.

Действительно, пусть K — некоторый конечный прообраз подгруппы $\overline{K}$ в N. Возьмем в S элемент x порядка 4 и рассмотрим конечную подгруппу $\langle x, K\rangle$ из N. По условию насыщенности $\langle x, K\rangle \leq M \in \mathfrak{M}(\langle x, K\rangle)$. Пусть S_M — силовская 2-подгруппа из M, содержащая x. По [4, § 1, свойство 7] $S_M < C_M(x^2)$. Следовательно, $S_M < S$, $N_G(S_M) < N_G(S)$ и $K < N_M(S_M)$ (см. лемму 4). По [4, § 1, свойство 6] фактор-группа $N_M(S_M)/S_M$ — абелева группа. Следовательно, фактор-группа KS_M/S_M — абелева группа. Так как $S_M < S$, то фактор-группа $\overline{K} = KS/S$ — абелева подгруппа из $\overline{N}$. □

2. $\overline{N}$ — группа Шункова. Утверждение данного пункта вытекает из лемм 2, 3, [7, предложения 4, 5; 3, теорема Холла, 15.2.4] и того факта, что $\pi(S) \cap \pi(\overline{N}) = \varnothing$. □

3. $\overline{P}$ — счетная группа.

По пп. 1, 2, доказанным выше, и [7, предложение 7] $\overline{P}$ существует и является абелевой группой без инволюций. Следовательно,

$$\overline{P} = \overline{P_1} \times \overline{P_2} \times \cdots \times \overline{P_i} \times \cdots$$

— прямое произведение своих силовских p_i-подгрупп $\overline{P_i}$, по всем $p_i \in \pi(\overline{N})$ [2, упражнение 10.1.2.]. Покажем, что $\overline{P_i}$ — абелева p_i-группа p_i-ранга, не превосходящего 2. Предположим противное и возьмем в $\overline{P_i}$ элементарную абелеву подгруппу $\overline{K}$ порядка p_i^3. Пусть K — некоторый конечный прообраз подгруппы $\overline{K}$ в N. Возьмем в S элемент x порядка 4 и рассмотрим конечную подгруппу $\langle x, K\rangle$ из N. По условию насыщенности $\langle x, K\rangle \leq M \in \mathfrak{M}(\langle x, K\rangle)$. Пусть S_M — силовская 2-подгруппа из M, содержащая x. По [4, § 1, свойство 7] $S_M < C_M(x^2)$. Следовательно, $S_M < S$ и $K < N_M(S_M)$ (лемма 4). По [4, § 1, п. 6] фактор-группа $N_M(S_M)/S_M$ — абелева группа p-ранга, не превосходящего 2 по всем $p \in \pi(N_M(S_M)/S_M)$. Следовательно, фактор-группа KS_M/S_M — абелева группа p_i-ранга не более 2. Так как $x \in S_M$, то $N_G(S_M) < N_G(S)$ и фактор-группа $\overline{K} = KS/S$ — абелева подгруппа из $\overline{N}$ p_i-ранга, не превосходящего 2. Противоречие с выбором $\overline{K}$. Поскольку S_M можно выбрать сколь угодно большого порядка, то $|\overline{K}|$ также можно взять сколь угодно большим, и счетность группы $\overline{P}$ в силу [2, теорема 10.1.16] очевидна. □

Лемма доказана.

Лемма 7. *Z — счетная группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем две различные инволюции t, l из Z и элементы a, b порядка 4 из S такие, что $a^2 = t, b^2 = l$. Рассмотрим конечную подгруппу $\langle a, b\rangle$ из N. По условию насыщенности $\langle a, b\rangle \leq K \in \mathfrak{M}(\langle a, b\rangle)$. Пусть S_K — силовская 2-подгруппа из K, содержащая $\langle a, b\rangle$. Тогда $S_K < S$. По [4, § 1, свойство 8] $N_K(S_K) = S_K \leftthreetimes M$, и в M найдется элемент g такой, что $t^g = l$. Следовательно, для любого $s \in S$ имеем $t^{sg} = l, t^s = t, l^s = l$ (инволюции t, l принадлежат $Z(S)$). Ввиду лемм 3 и 4 инволюции t, l лежат в $Z(S) \cap Z(S^h)$ для любого $h \in M$. По лемме 4 имеем $S = S^h$ и $M < N_G(S)$. Так как $\overline{M} = MS/S < \overline{P}$, то $\overline{P}$ действует транзитивно на $Z \setminus \{1\}$ (по правилу $z^{\overline{g}} = z^g$). Так как $\overline{P}$ — счетная группа, то Z — счетная группа.

Лемма доказана.

Лемма 8. *S — счетная группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству [4, лемма 2.7]. □

Лемма 9. *N обладает счетной периодической частью $T = T(N) = S \leftthreetimes P$, где P — периодическая абелева группа ранга 2 без инволюций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и счетность подгруппы $T = T(N)$ вытекает из леммы 6, теоремы Шмидта [2, теорема 23.1.1] и леммы 8. Покажем существование группы P из утверждения леммы. Пусть группа $\overline{P}$ — из утверждения леммы 6, $\overline{K}$ — конечная подгруппа из $\overline{P}$ и K — конечный прообраз подгруппы $\overline{K}$ в T. Тогда $K/K \cap S \simeq \overline{K}$. По теореме Холла [3, теорема 15.2.4] $K = (K \cap S) \leftthreetimes K_1$, где $K_1 \simeq \overline{K}$. Положим $R_1 = K_1$. Ясно, что $S \leftthreetimes R_1 \leq T$ и $\overline{K} = \overline{R_1}$. Так как $\overline{P}$ — счетная группа, то

$$\overline{P} = \{\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, \dots \mid n = 1, 2 \dots\}.$$

Пусть m_1 — минимальное натуральное число, при котором $\overline{k_{m_1}} \notin \overline{R_1}$. Очевидно, $\overline{K}_2 = \langle \overline{k_{m_1}}, \overline{R_1}\rangle$ — конечная подгруппа в $\overline{P}$. Пусть K_2 — конечная подгруппа из T, содержащая R_1 и являющаяся прообразом подгруппы $\overline{K_2}$. По теореме Холла [3, теорема 15.2.4] $K_2 = (K_2 \cap S) \leftthreetimes R_2$, где $R_2 \simeq \overline{K_2}$ и $R_1 < R_2$. Ясно, что $S \leftthreetimes R_2 \leq T$, $\overline{K_2} = \overline{R_2}$ и $\overline{k_{m_1}} \in \overline{R_2}$. Действуя подобным образом, строим бесконечную цепочку подгрупп группы T

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_n < \ldots$$

такую, что

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

— локально конечная абелева группа и $T = S \leftthreetimes P$. По [2, упражнение 10.1.2.] $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_i \times \ldots$ — прямое произведение своих силовских p_i-подгрупп P_i по всем $p_i \in \pi(P)$. То, что P_i — p_i ранга, не превосходящего 2, доказывается точно так же, как в завершении доказательства леммы 6.

Лемма доказана.

Лемма 10. *T насыщена группами из множества*

$$\mathfrak{M}_N = \{N_M(S_M) \mid M \in \mathfrak{M}, S_M \in Syl_2 M\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K — некоторая конечная подгруппа из T. Возьмем в S элемент x порядка 4 и рассмотрим конечную подгруппу $\langle x, K\rangle$ из T. По условию насыщенности $\langle x, K\rangle \leq M \in \mathfrak{M}(\langle x, K\rangle)$. Пусть S_M — силовская 2-подгруппа из M, содержащая x. По предложению [4, § 1, свойство 7] $S_M < C_M(x^2)$. Следовательно, $S_M < S$ и $K < N_M(S_M)$ (см. лемму 4).

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Пункты (a)–(c) доказаны в леммах 2 и 3. Пункт (d) доказан в лемме 4. Пункт (e) доказан в лемме 5. Пункт (f) доказан в лемме 9. Пункт (g) доказан в лемме 10.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дицман А.П.** О центре $p-$групп // Тр. семинара по теории групп. М., 1938. С. 30–34.
2. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
3. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2009. 309 с.
4. **Лыткина Д.В., Мазуров В.Д.** Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 606–626. doi: 10.1007/s10469-007-0033-z .
5. **Сенашов В.И., Шунков В.П.** Группы с условиями конечности. Новосибирск. Изд-во СО РАН, 2001. 201 с.
6. **Череп А.А.** О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 518–521.
7. **Шлепкин А.А.** Группы Шункова, насыщенные линейными и унитарными группами степени 3 над полями нечетных порядков// Сиб. электр. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 341–351. doi: 10.17377/semi.2016.13.029 .
8. **Шлепкин А.К.** Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Третья междунар. конф. по алгебре (23–28 авг. 1993): сб. тез. Красноярск, 1993. С. 363.
9. **Шлепкин А.К.** О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, №2. С. 224–245.
10. **Шлепкин А.К.** О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. С. 226–231.

Поступила 1.03.2019
После доработки 23.10.2019
Принята к публикации 4.11.2019

Шлепкин Алексей Анатольевич
канд. физ.-мат. наук,
доцент
Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: shlyopkin@gmail.com

REFERENCES

1. Ditsman A.P. On the center of p-groups. *Proc. seminar on group theory*. Moscow, 1938. P. 30–34.
2. Kargapolov M.I., Merzliakov Ju.I. *Fundamentals of the theory of groups*. N Y; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1979, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0 . Original Russian text (3rd ed.) published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp*. Moscow: Nauka Publ., 1982, 288 p.
3. Kondrat'ev A.S. *Gruppy i algebry Li* [Lie groups and Lie algebras]. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2009, 309 p. ISBN: 978-5-7691-2111-1 .
4. Lytkina D.V., Mazurov V.D. Periodic groups saturated with $L_3(2^m)$. *Algebra Logic*, 2007, vol. 46, no. 5, pp. 330–340. doi: 10.1007/s10469-007-0033-z .
5. Senashov V.I., Shunkov V.P. *Gruppy s usloviyami konechnosti* [Groups with finiteness conditions]. Novosibirsk: SO RAN Publ., 2001, 336 p. ISBN: 5-7692-0439-7 .
6. Cherep A.A. Set of elements of finite order in a biprimitively finite group. *Algebra Logic*, 1987, vol. 26, no. 4, pp. 311–313. doi 10.1007/BF01980245 .
7. Shlepkin A.A. On Shunkov groups, saturated with linear and unitary groups of dimension 3 over fields of odd orders. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 341–351 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2016.13.029 .
8. Shlepkin A.K. Conjugately biprimitive finite groups containing finite unsolvable subgroups. In: *Abstracts. III Internat. Conf. on Algebra* (Krasnoyarsk, 1993), p. 369 (in Russian).

9. Shlepkin A.K. On conjugately biprimitively finite groups saturated with finite simple subgroups. *Algebra Logic*, 1998, vol. 37, no. 2, pp. 127–138. doi: 10.1007/BF02671597 .
10. Shlepkin A.K. Conjugately biprimitively finite groups with the primary minimal condition. *Algebra Logic*, 1983, vol. 22, no. 2, pp. 165–169. doi: 10.1007/BF01978669 .

Received March 1, 2019
Revised October 23, 2019
Accepted November 4, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-71-10007).

Aleksei Anatolievich Shlepkin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Space and Information Technologies of the Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: shlyopkin@gmail.com .

Cite this article as: A. A. Shlepkin. On Sylow 2-subgroups of Shunkov groups saturated with the groups $L_3(2^m)$, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 275–282.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.17+512.54

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ", ПОСВЯЩЕННАЯ 70-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ А. Х. ЖУРТОВА

И. Н. Белоусов, М. С. Нирова

В этой статье представлен обзор основных событий вышеуказанной конференции.

Ключевые слова: алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем.

I. N. Belousov, M. S. Nirova. International conference "Algebra, Number Theory, and Mathematical Modeling of Dynamic Systems" devoted to the occasion of 70th birthday of A. Kh. Zhurtov.

A survey of principal events at the conference is presented.

Keywords: algebra, number theory, and mathematical modeling of dynamic systems.

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-283-287

Международная алгебраическая конференция "Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем", проходившая в г. Нальчике 29 июня – 3 июля 2019 года, была посвящена 70-летнему юбилею российского математика, профессора, доктора физико-математических наук А. Х. Журтова.

Конференция была организована Кабардино-Балкарским государственным университетом им. Х. М. Бербекова (КБГУ), Институтом прикладной математики и автоматизации (ИПМА КБНЦ РАН) и Институтом математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (ИММ УрО РАН). Работа конференции проходила в Эльбрусском учебно-научном комплексе КБГУ.

Оргкомитет конференции: М. С. Нирова (председатель), У. М. Пачев (зам. председателя), Б. И. Кунижев, В. Н. Лесев, А. А. Алиханов, М. А. Керефов, А. Х Кодзоков., А. Р. Бечелова, Ф. Х. Кудаева, В. А. Водахова, Р. Ш. Жемухов, А. Г. Езаова, А. А. Токбаева, Ж. Ж. Жабоев, М. М. Хамгокова.

Программный комитет конференции: А. А. Махнев (председатель), В. Д. Мазуров (зам. председателя), И. Н. Белоусов (ученый секретарь), А. А. Алиханов, В. А. Артамонов, В. А. Белоногов, А. В. Васильев, А. В. Вдовин, С. В. Востоков, Я. М. Ерусалимский, А. Х. Журтов, Л. С. Казарин, А. И. Кожанов, В. А. Койбаев, А. С. Кондратьев, М. А. Королев, В. М. Левчук, А. И. Лобанов, В. С. Монахов, А. Ю. Ольшанский, У. М. Пачев, А. В. Псху, А. В. Рожков, В. А. Романьков, М. В. Селькин, А. П. Солдатов, В. Н. Чубариков.

В работе конференции приняли участие 143 человек (из них 62 очно) из 18 городов Российской Федерации (Нальчик (47), Новосибирск (20), Екатеринбург (13), Красноярск (13), Москва (11), Челябинск (9), Владикавказ (6), Белгород (6), Санкт-Петербург (3), Махачкала (2), Брянск (2), Краснодар (2), Ярославль (1), Севастополь (1), Белорусия (Гомель (2), Витебск (2)), Азербайджана (Баку (2)), США (Нэшвилл (1)), в том числе 2 член-корреспондента РАН, 41 (очно 16) доктор и 39 (очно 24) кандидатов наук, а также аспирантов 24 (очно 8) и студентов 17 (очно 4).

Города очных участников: Нальчик (37), Новосибирск (12), Екатеринбург (2), Владикавказ (4), Красноярск (2), Баку (2), Челябинск (2), Москва (1).

На конференции обсуждались современные достижения в области теории групп, теории графов, теории чисел и математического моделирования динамических систем. Тематика докладов охватывала широкий спектр исследований по современным направлениям фундаментальной и прикладной математики. В материалах конференции[1] опубликовано 79 работ.

В ходе заседаний были заслушаны 14 пленарных докладов по 45 или 30 минут:

А. А. Махнев. “Современные направления в теории дистанционно регулярных графов”;
М. С. Нирова. “Дистанционно регулярные графы и их группы автоморфизмов”;
А. Ю Ольшанский. "Проблема сопряженности в группах с квадратичной функцией Дэна";
Е. П. Вдовин. “Analogue of Baer-Suzuki theorem for π-subgroups”;
А. Х. Журтов. “О локально конечных π-разделимых группах" ;
А. К. Шлепкин. “О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями элементарных абелевых 2-групп и унитарных групп степени 3”;
В. А. Койбаев. “О разложении элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе”;
Д. О. Ревин. “Подгруппы нечетных индексов в конечных простых группах: некоторые актуальные вопросы”;
В. Д. Мазуров. “Периодические группы, насыщенные конечными простыми ортогональными группами”;
А. С. Кондратьев. “О конечных неразрешимых 4-примарных $3'$-группах”;
А. В. Васильев.“Простые группы и связанные с ними графы”;
Д. В. Лыткина. “Конечные группы, близкие к группам Фробениуса”;
А. А. Алиханов. “Нелокальные краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка”;
А. А. Шлепкин. “Периодические группы, насыщенные группами лиева типа ранга 1 и группами L_3 и L_4”.

На секционных заседаниях было заслушано 28 кратких сообщений. Большой интерес для участников представил “час проблем”, состоявшийся в последний день конференции. Были поставлены следующие задачи.

1. И. Н. Белоусов, А. А. Махнев. Дистанционно регулярные графы и унитали. Униталью называется 2-$(q^3+1, q+1, 1)$ схема. Существуют ли дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{(q-1)q, (q+1)(q-2), q+1; 1, 1, (q-2)q\}$? Является ли для такого графа Γ граф $\bar{\Gamma}_3$ псевдогеометрическим графом двойственной 2-схемы, $pG_{q+1}(q^2-1, q)$, отвечающей унитали?

2. М. П. Голубятников, А. А. Махнев. Классификация графов Кулена. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d с собственными значениями $k=\theta_0>\theta_1>\cdots>\theta_d$. Кулен получил следующую границу: $(\theta_1+1)(\theta_d+1)\le -b_1$, причем равенство достигается только для графов диаметра 2. Графом Кулена назовем граф Γ диаметра $d\ge 3$ с $(\theta_1+1)(\theta_d+1)\le -k$. Обобщенный шестиугольник порядка $(s,1)$ дает пример графа Кулена. Классифицировать графы Кулена.

3. А. А. Махнев. Дистанционно регулярные графы диаметра 3 без треугольников. Имеется немало допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов диаметра 3 без треугольников. Существуют ли дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$, $\{8,7,5;1,1,4\}$, $\{17,16,10;1,2,8\}$?

4. А. А. Махнев, М. С. Нирова. Существование некоторых дистанционно регулярных графов Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3:

(1) Существуют ли графы с массивами пересечений $\{r^2+3r+1, r(r+1), r+2; 1, r+1, r(r+2)\}$, где r нечетно и делится на 3?

(2) Существуют ли графы с массивами пересечений $\{2r^2+5r+2, r(2r+2), 2r+3; 1, 2r+2, r(2r+3)\}$, где r не делится на 3 и $\Gamma\equiv\pm1(\bmod 5)$?

[1] Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем: тезисы международной конференции, посвященной 70-летию А. Х. Журтова. Нальчик: Изд-во КБГУ, 2019. 138 с.


ИПМА
Международная конференция
моделирование динамических систем",
посвященная 70-летию А.Х. Журтова
Нальчик, 29 июня – 3 июля 2019 года

5. А. А. Махнев, Д. В. Падучих. Дистанционно регулярные графы диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3, Γ_3 — псевдогеометрический граф для $GQ(q-1,q+1)$. Существуют ли дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{q^2-1,q^2-2q,q+2;1,q,(q-2)(q+1)\}$, где $q>6$ и q — степень простого числа? Можно ли восстановить $\pi(G)$ для группы автоморфизмов G графа с массивом пересечений $\{q^2-1,q^2-2q,q+2;1,q,(q-2)(q+1)\}$?

6. А. В. Васильев. Существует ли непериодическая простая группа Шункова, обладающая нетривиальным элементом конечного порядка?

7. Д. О. Ревин. Пусть $G=B(2,n)=\langle x,y\rangle$ — свободная бернсайдова группа нечетного периода n с двумя свободными порождающими x и y. Рассмотрим группу A, состоящую из всех автоморфизмов α группы G таких, что $\langle x^\alpha\rangle=\langle x\rangle$ и $y^\alpha=y$. Верно ли, что централизатор $C_G(A)$ конечен?

8. А. В. Васильев, Д. О. Ревин. Пусть N — нормальная подгруппа, а H — максимальная π-подгруппа конечной группы G для некоторого множества π нечетных простых чисел. Всегда ли пересечение $N\cap H$ будет максимальной π-подгруппой в N?

Комментарий к вопросу: Достаточно рассмотреть случай, когда N — неабелева простая группа, а G — ее группа автоморфизмов. Отметим, что в случае, когда $2\in\pi$, ответ на поставленный вопрос отрицательный.

9. А. Х. Журтов, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров. Пусть H — собственная нормальная подгруппа неразрешимой группы $G=H\langle x\rangle$. Возможно ли, что все элементы из смежного класса Hx имеют один и тот же порядок? Наиболее интересен случай, когда $|G:H|=2$.

10. Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров. Пусть G — периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа над полями нечетных характеристик, лиевы ранги которых ограничены в совокупности. Верно ли, что все силовские 2-подгруппы группы G сопряжены?

Программой конференции был предусмотрен свободный день, в течение которого для участников конференции был организован поход на водопад “Терскол”.

Закрытие конференции состоялось 3 июля.

Поступила 06.09.2019

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
зав. отд., старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: i_belousov@mail.ru

Нирова Марина Сефовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик
e-mail: m_nirova@mail.ru

The paper was received by the Editorial Office on September 6, 2019.

Ivan Nikolaevich Belousov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: i_belousov@mail.ru .

Marina Sefovna Nirova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: nirova_m@mail.ru .

Cite this article as: I. N. Belousov, M. S. Nirova. International conference “Algebra, Number Theory, and Mathematical Modeling of Dynamic Systems” devoted to the 70th birthday of A. Kh. Zhurtov, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 283–287 .

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN (print) 0134–4889

ISSN (online) 2658–4786

Редакторы Н. Н. Моргунова, Е. Е. Понизовкина
TEX-редактор Г. Ф. Корнилова

Английский редактор Е. В. Васильева

Отв. за выпуск А. Е. Эльберт

Поддержка электронных версий журнала
С. Е. Желтышева, Н. Н. Моргунова

Выпускающие редакции Л. К. Бабинцева, Р. Х. Комарова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 3.12.19. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 33. Уч.-изд. л. 32,0 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
http://journal.imm.uran.ru

ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226