РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 25, № 3 2019

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 25 № 3 2019

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 25, № 3. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. 292 с.

ISSN (print) 0134–4889
ISSN (online) 2658–4786
DOI журнала: 10.21538/0134-4889

Журнал индексируется *в российских базах*: РИНЦ, MathNet;
в зарубежных базах: MathSciNet,
Emerging Sources Citation Index Web of Science

TRUDY
INSTITUTA
MATEMATIKI I MEKHANIKI
URO RAN

Vol. 25 No. 3 2019

YEKATERINBURG

Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. Vol. 25, no. 3. Yekaterinburg: IMM UrO RAN, 2019. 292 p.

ISSN (print) 0134–4889
ISSN (online) 2658–4786

DOI: 10.21538/0134-4889

Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN is abstracted and/or indexed in Elibrary, MathNet, Mathematical Reviews, Emerging Sources Citation Index WoS

Том 25 № 3 2019

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-7-8

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ КРАСОВСКИЙ

(*К 95-летию со дня рождения*)

Более 7 лет прошло с того дня, когда Николай Николаевич ушел из жизни.

Трудно переоценить его вклад в математическую науку, в такие ее фундаментальные разделы, как качественная теория дифференциальных уравнений, теория оптимального управления, теория устойчивости и стабилизации движения, теория управления в условиях неопределенности и конфликта. Его пионерские работы в этих областях математики и механики стали исходными для многих исследований в стране и за рубежом и определили перспективы их развития на годы вперед.

Николай Николаевич был выдающимся представителем уральской научной школы по теории устойчивости движения. Им создана уральская научная школа по математической теории управления и теории дифференциальных игр, известная в мире своими достижениями. Среди его учеников – инженеры и преподаватели, доктора и кандидаты наук, члены-корреспонденты и академики РАН. Многие научные идеи и концепции, выдвинутые им, были в дальнейшем плодотворно развиты его учениками и коллегами. Научные школы, выросшие из школы Н. Н. Красовского, продолжают проведение эффективных исследований.

Весомый вклад внес Н. Н. Красовский в математическое образование в Уральском регионе и как крупный организатор, и как блестящий лектор. В Уральском политехническом институте им. С. М. Кирова и Уральском государственном университете им. А. М. Горького им было разработано и прочитано большое число спецкурсов, оригинальных по содержанию и включавших новейшие научные достижения, в том числе полученные им самим. В УрГУ он создал под новые специальности и специализации кафедры вычислительной математики и прикладной математики. Весьма остро Николай Николаевич воспринимал проблемы школьного математического образования, в частности в Уральском регионе. Так, большую тревогу у него вызывали проводимые в последние десятилетия реформы школьного образования, и школьного математического образования в особенности. Неоценима роль Николая Николаевича в решении концептуальных, методологических и организационных проблем преподавания по предмету “Основы информатики и вычислительной техники” в школах Свердловской области; более подробно см. статью, посвященную 90-летию Н. Н. Красовского (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, Т. 20, № 3, 2014 г.).

Научные достижения Н. Н. Красовского были высоко оценены государством (Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий, кавалер орденов Советского Союза и России) и научной общественностью (Большая золотая медаль Российской академии наук им. М. В. Ломоносова, Золотая медаль им. А. М. Ляпунова, Демидовская премия в области физико-математических наук, награда Международного общества инженеров-электриков и электронщиков (IEEE)). Николай Николаевич Красовский — доктор Honoris causa Венгерской академии наук, лауреат премии программы Фонда содействия отечественной науке “Выдающиеся ученые”.

Мы помним Николая Николаевича как человека, обладавшего феноменальной работоспособностью, волевым характером. Ему в высшей степени были свойственны доброжелательность в общении, высокая внутренняя культура и организованность. Он был настоящим гражданином, которого глубоко волновала судьба России. Сотрудники Института математики и механики горды тем, что Институт носит имя Николая Николаевича Красовского, выдающегося русского ученого.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.988.68

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НЕГЛАДКИХ ЛИНИЙ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

Рассматриваются некорректно поставленные задачи локализации (определения положения) линий разрыва зашумленной функции двух переменных (изображения). Для равномерной сетки с шагом τ предполагается, что в каждом узле известны средние значения на квадрате со стороной τ от возмущенной функции. Возмущенная функция приближает точную в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, и уровень возмущения δ известен. Ранее авторами был изучен случай кусочно-гладких линий разрыва, которые, как правило, отвечают границам искусственных объектов на изображении. В настоящей статье разрабатывается подход к изучению алгоритмов локализации, позволяющий ослабить условия на гладкость линий разрыва и включить в рассмотрение также негладкие линии разрыва, которые могут описывать границы естественных объектов. Для решения рассматриваемой задачи на основе процедур усреднения конструируются и исследуются глобальные дискретные алгоритмы приближения линий разрыва множеством точек равномерной сетки. Формулируются условия на точную функцию и строится класс корректности, содержащий, в частности, функции с негладкой линией разрыва. Проводится теоретическое изучение построенных алгоритмов на данном классе. Устанавливается, что предложенные алгоритмы позволяют получить точность локализации порядка $O(\delta)$. Также приводятся оценки других важных параметров, характеризующих работу алгоритма локализации.

Ключевые слова: некорректная задача, метод регуляризации, линии разрыва, глобальная локализация, дискретизация, порог разделимости.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. On the localization of nonsmooth discontinuity lines of a function of two variables.

We consider ill-posed problems of localizing (finding the position of) the discontinuity lines of a perturbed function of two variables (an image). For each node of a uniform square grid with step τ, the average values of the function over a square $\tau \times \tau$ are assumed to be known. The perturbed function approximates an exact function in the space $L_2(\mathbb{R}^2)$, and the perturbation level δ is known. Earlier, the authors studied the case of piecewise smooth discontinuity lines, which, as a rule, correspond to the borders of artificial objects in the corresponding image. In the present paper, an approach to the study of localization algorithms is developed, which makes it possible to weaken the conditions on the smoothness of discontinuity lines and consider, in particular, nonsmooth discontinuity lines, which can describe the boundaries of natural objects. To solve the problem under consideration, we construct and analyze global discrete algorithms for the approximation of discontinuity lines by sets of points of a uniform grid on the basis of averaging procedures. Conditions on the exact function are formulated and a correctness class is constructed, which includes functions with nonsmooth discontinuity lines. A theoretical analysis of the constructed algorithms is carried out on this class. It is established that the proposed algorithms make it possible to obtain a localization error of order $O(\delta)$. We also estimate other important parameters, which characterize the operation of the localization algorithm.

Keywords: ill-posed problem, regularization method, discontinuity lines, global localization, discretization, separability threshold.

MSC: 65J20, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-9-23

Введение

Часто на практике необходимо локализовать (определить положение) линий, вне которых измеряемая функция f двух переменных гладкая, а в каждой точке линий терпит разрыв первого рода (линии разрыва). Такого рода проблемы имеют место, например, при обработке изображений, где линии разрыва являются границами объектов на изображении. Границам искусственных объектов, как правило, отвечают кусочно-гладкие линии с небольшим числом кусков. Границы естественных объектов могут быть нерегулярны, и необходимо научиться проводить оценки на классах, содержащих нерегулярные функции.

Рассматривается случай, когда точная функция f неизвестна, а известны дискретизация приближенно заданной функции f^δ: $\|f^\delta - f\|_{L_2} \le \delta$, $L_2 := L_2(\mathbb{R}^2)$ и уровень возмущения δ. В работе выбран следующий подход к дискретизации: для равномерной сетки с шагом τ предполагается, что в каждом узле заданы средние значения на квадрате со стороной τ от возмущенной функции. Нетрудно показать, что линии разрыва функции f^δ могут не аппроксимировать линии разрыва точной функции f. Следовательно, задача локализации линий разрыва в этом случае некорректно поставлена [1–3] и для ее решения необходимо строить регуляризирующие алгоритмы.

Задача локализации в настоящее время вызывает значительный интерес, и существует большое количество прикладных алгоритмов, позволяющих определить положение линии разрыва зашумленной функции двух переменных. Поэтому привести полный набор соответствующих ссылок технически невозможно. Некоторые алгоритмы, их численную реализацию и ссылки на литературу можно найти, например, в [4; 5] (см. также [6, гл.10]). Однако в этих работах полное теоретическое обоснование применяемых на практике алгоритмов отсутствует. Насколько известно авторам, первые строгие теоретические результаты (оценки точности аппроксимации) по этой тематике были получены в [7; 8] (см. также работу [9], где изучались вопросы дискретизации). Но эти оценки носили локальный характер и предполагали локальную гладкость линий разрыва. Глобальный теоретический анализ алгоритмов усреднения для локализации линий разрыва, по-видимому, впервые проведен в работе [10], где линии разрыва являлись замкнутыми ломаными. Этот анализ достаточно просто обобщается на кусочно-гладкие линии разрыва. Однако, например, если линия имеет изломы в каждой точке, то методика [10] не может гарантировать, что множество точек равномерной сетки, которые выдаст метод локализации в качестве множества, аппроксимирующего линии разрыва, будет не пусто. При этом, простейший анализ задач локализации показывает, что ограничиться непрерывностью линии разрыва нельзя и введение дополнительной априорной информации о линии является необходимостью, так как при фиксированном уровне погрешности δ для произвольной линии разрыва Γ нельзя гарантировать работоспособность ни для какого метода. В настоящей работе предлагается подход к изучению методов локализации при более слабой априорной информации, что позволяет наряду с гладкими рассматривать негладкие границы (имеющие изломы во всех точках).

Основная идея заключается во введении последовательности замкнутых ломаных Γ_s, которые аппроксимируют линию Γ с точностью q_s ($q_s \to 0$ при $s \to \infty$). Все требования на точную линию разрыва накладываются посредством ограничений на масштабы q_s и ломаные линии Γ_s (формально это записывается как принадлежность точной функции f классу корректности). Таким образом, все линии классифицируются в зависимости от существования аппроксимирующей последовательности ломаных с заданными свойствами. При улучшении этих свойств улучшается качество приближения линий разрыва методами усреднения.

В настоящей работе рассматривается частный случай: точная функция имеет одну замкнутую линию разрыва и все оценки делаются достаточно грубо. Поэтому необходимо отметить, что полученные результаты могут быть существенно усилены, а априорные требования на линии разрыва еще ослаблены. В конце статьи приведены возможные направления модификации полученных результатов.

После введения класса корректности $\mathfrak{M}$, содержащего, в частности, функции с негладкой линией разрыва, формулируется задача локализации. Для решения рассматриваемой проблемы на основе процедур усреднения конструируются и исследуются глобальные дискретные алгоритмы аппроксимации линии разрыва точной функции множеством точек равномерной сетки. Теоретическое изучение построенных алгоритмов проводится на классе корректности в соответствии с модифицированной схемой работы [10]. Устанавливается, что предложенные алгоритмы позволяют получить точность локализации порядка $O(\delta)$. Также приводятся оценки других важных параметров, характеризующих работу алгоритмов локализации.

Статья построена следующим образом. В разд. 1 определены последовательность замкнутых ломаных Γ_s, которые аппроксимируют линию разрыва Γ, и последовательность масштабов q_s, сформулированы требования к масштабам и ломаным линиям при всех s. Введены классы корректности $\mathfrak{M}$, зависящие от параметров. В разд. 2 получены вспомогательные оценки. Последний раздел посвящен конструированию глобальных дискретных алгоритмов аппроксимации и доказательству основной теоремы с оценками точности. Там же приведены два примера применения теоремы. В заключении кратко сформулированы итоги и рассмотрены возможные направления модификации результатов настоящей статьи.

1. Характеризация негладких линий разрыва и построение классов корректности

Для простоты изложения будем рассматривать множество функций $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$, которые вне квадрата $\mathfrak{D} = \{(x,y)\colon |x| \le d, |y| \le d\}$, $d > 0$, равны нулю и не имеют скачка на границе $\mathfrak{D}$. Также предположим, что множество линий разрыва функции $f(x,y)$ состоит из одной замкнутой линии Γ. Все эти предположения могут быть ослаблены.

Начнем с введения требований на последовательности масштабов q_s и замкнутые ломаные линии Γ_s, $s = 1, 2, \ldots$, которые в определенном смысле аппроксимируют линию разрыва Γ. Множество натуральных чисел $1, 2, \ldots$ будем обозначать через $\mathbb{N}$.

Определение 1. Пусть заданы положительные вещественные числа $\nu < 1$, $\bar{q}$. Назовем последовательность положительных чисел $\boldsymbol{q}[\nu, \bar{q}] = \{q_s\}_{s=1}^{\infty}$ *регулярной последовательностью масштабов*, если $\lim\limits_{s\to\infty} q_s = 0$, $q_1 \ge \bar{q}$ и для всех $s \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $\nu \le q_{s+1}/q_s < 1$.

Введем необходимые обозначения. Пусть Γ_s — замкнутая ломаная без точек самопересечения, $\Gamma_s = \bigcup_{k=1}^{l_s} \Gamma_{sk}$, где Γ_{sk} — отрезки; l_s — натуральное число. Без ограничения общности можно считать, что отрезки Γ_{sk} занумерованы так, что $\Gamma_{sk}, \Gamma_{sk+1}$ являются смежными отрезками (поскольку Γ_s — замкнутая ломаная, то отрезки $\Gamma_{sl_s}, \Gamma_{s1}$ также смежны); через ϑ_{sk} обозначим наименьший угол между смежными отрезками $\Gamma_{sk}, \Gamma_{sk+1}$ (соответственно через ϑ_{sl_s} обозначим наименьший угол между смежными отрезками $\Gamma_{sl_s}, \Gamma_{s1}$). Обозначим через $|\Gamma_{sk}|$ длину отрезка Γ_{sk}, $k = 1, 2, \ldots, l_s$. Введем величину

$$\Theta_{sk} = \begin{cases} (\sin \vartheta_{sk})^{-1}, & 0 < \vartheta_{sk} < \pi/2, \\ 1, & \pi/2 \le \vartheta_{sk} < \pi. \end{cases} \tag{1.1}$$

Можно определить разные эквивалентные понятия окрестности ломаной Γ_s. Мы выберем такое понятие окрестности, которое связано с анализируемыми далее методами усреднения и для которого все дальнейшие вычисления проводятся существенно проще. Будем также далее без специальных оговорок считать, что $\boldsymbol{q}[\nu, \bar{q}] = \{q_s\}_{s=1}^{\infty}$ — регулярная последовательность масштабов.

Определение 2. Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ введем окрестность Q_{sk} каждого из звеньев Γ_{sk} ломаной Γ_s:

— если наименьший угол между осью y и линией, на которой лежит отрезок Γ_{sk}, меньше или равен $\pi/4$, то положим $Q_{sk} = \{(x,y) \in \mathfrak{D}\colon \forall\, (\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_{sk}\ \ |x - \bar{x}| \le q_s, y = \bar{y}\}$;

— если наименьший угол между осью x и линией, на которой лежит отрезок Γ_{sk}, меньше $\pi/4$, то положим $Q_{sk} = \{(x,y) \in \mathfrak{D}\colon \forall\, (\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_{sk}\ \ x = \bar{x}, |y - \bar{y}| \le q_s\}$.

Множество $Q_s = \bigcup_{k=1}^{l_s} Q_{sk}$ назовем *окрестностью* ломаной Γ_s. Если последовательность окрестностей Q_s является вложенной: $Q_s \subseteq Q_{s-1}$, то будем говорить, что последовательность ломаных Γ_s *аппроксимирует* линию $\Gamma = \bigcap_{s=1}^{\infty} Q_s$.

Определение 3. Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ введем подмножество $\bar{\Gamma}_{sk} \subset \Gamma_{sk}$, на котором введем функцию скачка Δ_{sk}:

— если наименьший угол между осью y и линией, на которой лежит отрезок Γ_{sk}, меньше или равен $\pi/4$, то положим $\bar\Gamma_{sk} = \{(\bar x, \bar y) \in \Gamma_{sk} \colon (\bar x \pm q_s, \bar y) \notin Q_{sj},\ j \neq k,\ j = 1, 2, \ldots, l_s\}$; для $(\bar x, \bar y) \in \bar\Gamma_{sk}$ введем функцию $\Delta_{sk}(\bar x, \bar y) = f(\bar x + q_s, \bar y) - f(\bar x - q_s, \bar y)$;

— если наименьший угол между осью x и линией, на которой лежит отрезок Γ_{sk}, меньше $\pi/4$, то положим $\bar\Gamma_{sk} = \{(\bar x, \bar y) \in \Gamma_{sk} \colon (\bar x, \bar y \pm q_s) \notin Q_{sj},\ j \neq k,\ j = 1, 2, \ldots, l_s\}$; для $(\bar x, \bar y) \in \bar\Gamma_{sk}$ введем функцию $\Delta_{sk}(\bar x, \bar y) = f(\bar x, \bar y + q_s) - f(\bar x, \bar y - q_s)$.

Далее без специальных оговорок будем считать, что последовательность замкнутых ломаных без самопересечения $\Gamma_s = \bigcup_{k=1}^{l_s} \Gamma_{sk}$ аппроксимирует линию Γ и для всех $s \in \mathbb{N}$ замкнутая ломаная Γ_s одна. Рассмотрим априорную информацию о гладкости функции f вне линии разрыва в виде принадлежности определенному ниже множеству $MV_q(\mathbb{R}^2)$. Здесь будем использовать то обстоятельство, что для всех s граница множества Q_s, которую обозначим через ∂Q_s, состоит из ломаных. При этом ясно, что $\partial Q_s = \partial^- Q_s \bigcup \partial^+ Q_s$, где $\partial^- Q_s$ — граница между Q_s и частью квадрата $\mathfrak{D}$ вне Q_s, соответственно $\partial^+ Q_s$ — граница между Q_s и частью $\mathfrak{D}$, попавшей внутрь Q_s.

О п р е д е л е н и е 4. Обозначим через $MV_q(\mathbb{R}^2)$ множество функций двух переменных $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ таких, что кроме наложенных выше требований дополнительно выполняются следующие:

— для всех прямоугольников $\mathfrak{D}' = [A, B] \times [C, D]$ со сторонами, параллельными осям координат, если для некоторого $s \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{D}' \cap Q_s = \varnothing$, то для почти всех $\bar y \in [C, D]$ функция одной переменной $f(x, \bar y)$ абсолютно непрерывна для $x \in (A, B)$; для почти всех $\bar x \in [A, B]$ функция одной переменной $f(\bar x, y)$ абсолютно непрерывна для $y \in (C, D)$;

— для любой точки $(\bar x, \bar y) \in \partial^+ Q_s$, $s \in \mathbb{N}$, существуют пределы $f^+(\bar x, \bar y) = \lim\limits_{x \to \bar x} f(x, \bar y) = \lim\limits_{y \to \bar y} f(\bar x, y)$, $f_x'^+(\bar x, \bar y) = \lim\limits_{x \to \bar x} f_x'(x, \bar y)$, $f_y'^+(\bar x, \bar y) = \lim\limits_{y \to \bar y} f_y'(\bar x, y)$ при условии, что при предельном переходе точка остается внутри Q_s;

— для любой точки $(\bar x, \bar y) \in \partial^- Q_s$, $s \in \mathbb{N}$, существуют пределы $f^-(\bar x, \bar y) = \lim\limits_{x \to \bar x} f(x, \bar y) = \lim\limits_{y \to \bar y} f(\bar x, y)$, $f_x'^-(\bar x, \bar y) = \lim\limits_{x \to \bar x} f_x'(x, \bar y)$, $f_y'^-(\bar x, \bar y) = \lim\limits_{y \to \bar y} f_y'(\bar x, y)$ при условии, что при предельном переходе точка остается снаружи Q_s;

— функции $f^\pm(\bar x, \bar y)$, $f_x'^\pm(\bar x, \bar y)$, $f_y'^\pm(\bar x, \bar y)$ непрерывны на $\partial^+ Q_s$ и $\partial^- Q_s$ соответственно для всех $s \in \mathbb{N}$.

Заметим, что введенная выше априорная информация гарантирует непрерывность функций $\Delta_{sk}(x, y)$ для всех $(x, y) \in \bar\Gamma_{sk}$, $s \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, l_s$. В следующем определении введем класс корректности $\mathfrak{M}$, на котором будут изучаться рассматриваемые в работе методы локализации.

О п р е д е л е н и е 5. Класс корректности $\mathfrak{M}$ состоит из функций $f \in MV_q(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющих следующим ограничениям:

(i) задано положительное число r: $|f(x, y)| \leq r$ для всех $(x, y) \in \mathfrak{D}$; $|f_x'(x, y)| \leq r$, $|f_y'(x, y)| \leq r$ для $(x, y) \notin Q_s$ для всех $s \in \mathbb{N}$; $|f_x'^\pm(x, y)| \leq r$, $|f_y'^\pm(x, y)| \leq r$ для $(x, y) \in \partial Q_s$ для всех $s \in \mathbb{N}$ (без ограничения общности можно считать, что $r = 1$);

(ii) задано положительное число Θ такое, что $\max\limits_{s \in \mathbb{N},\, 1 \leq k \leq l_s} \Theta_{sk} \leq \Theta$;

(iii) задано положительное число $\Delta^{\min}$ такое, что $\min\limits_{s \in \mathbb{N},\, 1 \leq k \leq l_s} \{|\Delta_{sk}(x, y)| \colon (x, y) \in \bar\Gamma_{sk}\} \geq \Delta^{\min}$;

(iiii) задано положительное число p такое, что $\max\limits_{s \in \mathbb{N},\, 1 \leq k \leq l_s} \dfrac{\Theta_{sk} q_s}{|\Gamma_{sk}|} \leq p$.

Класс корректности $\mathfrak{M}$ зависит от параметров $\nu, \bar q, r, \Theta, \Delta^{\min}, p$. Поскольку в дальнейшем на параметр p будут накладываться требования, а остальные параметры предполагаются фиксированными, то для компактности обозначений договоримся данный класс обозначать как $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(p)$.

2. Постановка задачи и вспомогательные утверждения

Введем в квадрате $\mathfrak{D}$ равномерную сетку $T = \{(x^n, y^m)\}$ с шагом $\tau = 2d/M$, где M — целое положительное число; $x^n = -d + (n - 1/2)\tau$, $y^m = -d + (m - 1/2)\tau$, где $n = 1, 2, \dots, M$, $m = 1, 2, \dots, M$.

Постановка задачи. Пусть $f \in \mathfrak{M}(p)$; $f^\delta \in L_2(\mathbb{R}^2)\colon \|f - f^\delta\|_{L_2} \le \delta$; задана равномерная сетка $T = \{(x^n, y^m)\}$ с шагом τ, в узлах которой заданы (измерены) следующие величины:

$$f^\delta_{n,m} = \frac{1}{\tau^2} \int\limits_{y^m-\tau/2}^{y^m+\tau/2} \int\limits_{x^n-\tau/2}^{x^n+\tau/2} f^\delta(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{2.1}$$

По значениям $f^\delta_{n,m}$ и уровню погрешности δ требуется аппроксимировать линию разрыва Γ функции f подмножеством точек сетки T с оценкой точности приближения.

Для построения регулярных методов локализации с целью подавления шума используется идея усреднения возмущенных значений $f^\delta_{n,m}$. Для проведения анализа нам понадобятся как непрерывные усредняющие функции, так и их дискретные аналоги. Определим два класса непрерывных усредняющих функций одной переменной. В качестве одного класса выберем множество ΦF, состоящее из финитных функций $\phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

(a) ϕ дважды непрерывно дифференцируема и C_1 — положительная константа такая, что $|\phi''(t)| \le C_1$;

(b) существуют $0 < b < 1$, $0 < a \le 1$ такие, что $a \le \phi(t) \le 1$ для $t \in [-b, b]$;

(c) $\phi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$.

Второе множество усредняющих функций Ψ также состоит из финитных функций $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

(a') ψ непрерывно дифференцируема и C_2 — положительная константа такая, что $|\psi'(t)| \le C_2$;

(b') $\displaystyle\int_{-1}^{1} \psi(t) dt = 1$;

(c') $\psi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$; $\psi(t) \ge 0$ для $t \in [-1, 1]$.

Ясно, что для $\phi \in \Phi F$ имеем $|\phi'(t)| \le C_1$ и $\phi \in W_1^1(\mathbb{R})$ (здесь $W_1^1(\mathbb{R})$ — соболевское пространство функций), а для $\psi \in \Psi$ легко показать, что $\psi(t) \le C_2$. Через $\|\cdot\|_{L_1}$ будем обозначать $\|\cdot\|_{L_1(\mathbb{R})}$. Положим

$$\phi_{\lambda_1}(t) = \phi\Big(\frac{t}{\lambda_1}\Big), \quad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2}\psi\Big(\frac{t}{\lambda_2}\Big), \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Для упрощения записи вместо $(\phi_{\lambda_1}(t))'_t|_{t=u}$ будем писать $\phi'_{\lambda_1}(u)$.

Дискретные значения усредняющей функции для функции двух переменных будем вычислять по формуле $\Lambda^{ij}_{\lambda_1\lambda_2} = \phi'_{\lambda_1}(i\tau)\psi_{\lambda_2}(j\tau)\tau^2$, где $-n_1 \le i \le n_1$, $-n_2 \le j \le n_2$. Параметры n_1, n_2, которые являются натуральными числами, будут определены ниже как функции уровня погрешности δ и шага сетки τ. (Очевидно, параметры должны быть быть определены таким образом, чтобы шаг τ был меньше λ_1 и λ_2.) Вспомогательные дискретные функции G^δ_x, G^δ_y вычисляются в точках (x^n, y^m) сетки T по формулам

$$G^\delta_x(x^n, y^m) = G^{\delta, n_1 n_2}_{x, \lambda_1\lambda_2}(x^n, y^m) = \sum_{j=-n_2}^{n_2} \sum_{i=-n_1}^{n_1} \Lambda^{ij}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n+i, m+j}, \tag{2.2}$$

$$G^\delta_y(x^n, y^m) = G^{\delta, n_1 n_2}_{y, \lambda_1\lambda_2}(x^n, y^m) = \sum_{i=-n_2}^{n_2} \sum_{j=-n_1}^{n_1} \Lambda^{ji}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n+i, m+j}. \tag{2.3}$$

Определим вспомогательные функции непрерывного аргумента при отсутствии возмущений через

$$F_x(x,y) = F_{x,\lambda_1\lambda_2}(x,y) = \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\xi d\eta, \quad (x,y)\in\mathfrak{D}, \tag{2.4}$$

$$F_y(x,y) = F_{y,\lambda_1\lambda_2}(x,y) = \int\limits_{x-\lambda_2}^{x+\lambda_2}\int\limits_{y-\lambda_1}^{y+\lambda_1} f(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(y-\eta)\psi_{\lambda_2}(x-\xi)d\eta d\xi, \quad (x,y)\in\mathfrak{D}. \tag{2.5}$$

Поясним смысл этих функций и используемых обозначений. Функция $F_x(x,y)$ в (2.4) есть усреднение точной функции f по переменной x с помощью $\phi'_{\lambda_1}(x)$ и по переменной y с помощью $\psi_{\lambda_2}(y)$. Дискретизация этой функции, когда вместо точной функции f используется приближенная функция f^δ, обозначается через $G^\delta_x(x^n,y^m)$. Функции $F_y(x,y)$ и $G^\delta_y(x^n,y^m)$ получаются, если переменные x и y поменять местами.

Лемма 1. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi\in\Phi F$, $\psi\in\Psi$ и натуральные числа n_1,n_2. Тогда в условиях рассматриваемой задачи при*

$$\lambda_1 = \frac{2n_1+1}{2}\tau, \quad \lambda_2 = \frac{2n_2+1}{2}\tau$$

для $(x^n,y^m)\in T$ справедливы следующие оценки:

$$\big|G^\delta_x(x^n,y^m) - F_x(x^n,y^m)\big| \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\Big),$$

$$\big|G^\delta_y(x^n,y^m) - F_y(x^n,y^m)\big| \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\Big), \quad A_0 = 4C_1C_2.$$

Доказательство. В работе [9] (см. лемму 1) доказана первая оценка при фиксированном y^m. Вторая оценка получается аналогично. □

Пусть U, V — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Введем метрику в $\mathbb{R}^2$

$$\rho(U;V) = \inf\big\{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\colon (x_1,y_1)\in U,\ (x_2,y_2)\in V\big\}.$$

В следующих леммах в соответствии с основной идеей проведения оценок в настоящей работе будем получать оценки относительно точной функции f с линией разрыва Γ посредством формулировки ограничений на Γ_s при фиксированном s.

Лемма 2. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi\in\Phi F$, $\psi\in\Psi$ и натуральное число s. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для $(x,y)\in\mathfrak{D}$ для любых положительных λ_1,λ_2 при выполнении дополнительного условия $\rho((x,y);\Gamma_s)\ge\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+q_s$ имеют место оценки*

$$|F_x(x,y)|\le A_1\lambda_1, \quad |F_y(x,y)|\le A_1\lambda_1, \quad A_1 = \|\phi\|_{L_1}.$$

Доказательство Поскольку при выполнении условия $\rho((x,y);\Gamma_s)\ge\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+q_s$ в области интегрирования формул (2.4), (2.5) функция f непрерывна, то доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2 [9]. □

Введем параметрическое задание отрезков $\{\Gamma_{sk}\}_1^{l_s}$: $x_{sk}(t) = a^x_{sk}t + b^x_{sk}$, $y_{sk}(t) = a^y_{sk}t + b^y_{sk}$, $0\le t\le|\Gamma_{sk}|$, a^x_{sk}, b^x_{sk}, a^y_{sk}, $b^y_{sk}\in\mathbb{R}$, $k=1,2,\dots,l_s$. Напомним, что функция скачка $\Delta_{sk}(x,y)$ для $(x,y)\in\bar\Gamma_{sk}\subset\Gamma_{sk}$ введена в определении 3. Поскольку $x=x_{sk}(t)$, $y=y_{sk}(t)$, то $\Delta_{sk}(x,y) = \Delta_{sk}(t)$.

Для произвольного $K_s > 0$ положим

$$\varepsilon_{sk} = K_s \Theta_{sk}, \tag{2.6}$$

где Θ_{sk} определено в (1.1). Определим множество:

$$\Gamma^{\varepsilon}_{sk} \quad \text{— часть отрезка } \ \Gamma_{sk}\colon t \in (\varepsilon_{sk-1}, |\Gamma_{sk}| - \varepsilon_{sk}). \tag{2.7}$$

Заметим, что при $K_s = q_s$ имеем $\Gamma^{\varepsilon}_{sk} \subseteq \bar{\Gamma}_{sk}$. Обозначим $\Gamma^{\varepsilon}_{s} = \bigcup_{k=1}^{l_s} \Gamma^{\varepsilon}_{sk}$. Условие непустоты $\Gamma^{\varepsilon}_{sk}$ будет приведено ниже в теореме.

В следующей лемме получены оценки снизу для функций F_x, F_y (см. формулы (2.4), (2.5)) в малой окрестности Γ^{ε}_{s}. Напомним, что величины a, b, C_1 содержатся в условиях (a), (b) на функцию ϕ; величина $\Delta^{\min}$ — в условии (iii) на функцию f; τ — шаг сетки T; $a^x_{sk}, b^x_{sk}, a^y_{sk}, b^y_{sk}$ — коэффициенты в параметрическом задании отрезка Γ_{sk}. Нам также понадобятся константы $A_1 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_2 = 2C_1$, $A_3 = 4C_1$. Отметим, что $C_1 \geq 1$.

Лемма 3. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$ и натуральное число s. Тогда в условиях рассматриваемой задачи при $\tau \leq b\lambda_1$ для любых положительных λ_1, λ_2 и при выполнении дополнительного условия разделимости* $\min\limits_{1\leq k,j\leq l_s,\, k\neq j} \rho(\Gamma^{\varepsilon}_{sk}; \Gamma^{\varepsilon}_{sj}) \geq K_s$, *где в (2.6), (2.7) константа $K_s \geq \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \sqrt{2}\tau + q_s$, для точек $(x, y) \in \mathfrak{D}\colon \rho((x, y); \Gamma^{\varepsilon}_{sk}) \leq \tau$ имеют место оценки*:

(1) *если $|a^x_{sk}/a^y_{sk}| \leq 1$, то*

$$|F_x(x, y)| \geq a\Delta^{\min} - A_1\lambda_1 - A_2\frac{\lambda_2 + \tau}{\lambda_1} - A_3\frac{q_s}{\lambda_1};$$

(2) *если $|a^y_{sk}/a^x_{sk}| < 1$, то*

$$|F_y(x, y)| \geq a\Delta^{\min} - A_1\lambda_1 - A_2\frac{\lambda_2 + \tau}{\lambda_1} - A_3\frac{q_s}{\lambda_1}.$$

Доказательство. Покажем справедливость оценки в п. (1) леммы (оценка в п. (2) доказывается аналогично). Благодаря выбору (2.6), (2.7) имеем $\rho(\Gamma^{\varepsilon}_{sk}; \Gamma^{\varepsilon}_{sj}) \geq K_s$ в случае, когда отрезки Γ_{sk}, Γ_{sj} являются смежными. Поскольку $K_s \geq \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \sqrt{2}\tau + q_s$, то условие разделимости $\min\limits_{k\neq j} \rho(\Gamma^{\varepsilon}_{sk}; \Gamma^{\varepsilon}_{sj}) \geq K_s$ гарантирует, что в окружности с центром в точке (x, y) такой, что $\rho((x, y); \Gamma^{\varepsilon}_{sk}) \leq \tau$, радиусом $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + q_s$ функция f непрерывна вне Q_{sk}. Следовательно, при вычислении функции F_x в пределах интегрирования $\Pi(x, y) = \{(x', y')\colon |x - x'| \leq \lambda_1, |y - y'| \leq \lambda_2\}$ функция f может иметь особенности только на множестве Q_{sk}.

Введем функцию $f_{sk}(x', y')$ для $(x', y') \in \Pi(x, y)$:

$$f_{sk}(x', y') = \begin{cases} f(x', y'), & (x', y') \in \Pi(x, y) \setminus Q_{sk}, \\ f((y' - b^y_{sk})/a^y_{sk} - q_s, y'), & (x', y') \in Q_{sk},\ x' \leq (y' - b^y_{sk})/a^y_{sk}, \\ f((y' - b^y_{sk})/a^y_{sk} + q_s, y'), & (x', y') \in Q_{sk},\ x' > (y' - b^y_{sk})/a^y_{sk}. \end{cases}$$

Поскольку $K_s > q_s$, то функция f_{sk} имеет разрыв на Γ_{sk} с величиной скачка $\Delta_{sk}(t)$ и $|(f_{sk})'_x| \leq 1$. Отметим, что разность $f_{sk} - f$ ограничена и $\sup\limits_{\mathfrak{D}} |f_{sk} - f| \leq 2$. Перейдем от двойного интеграла в правой части (2.4) к повторному и запишем его в виде суммы двух слагаемых:

$$F_x(x, y) = \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2} \Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi, \eta)\phi'_{\lambda_1}(x - \xi)d\xi \Bigg) \psi_{\lambda_2}(y - \eta)d\eta = \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2} \Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f_{sk}(\xi, \eta)\phi'_{\lambda_1}(x - \xi)d\xi \Bigg) \psi_{\lambda_2}(y - \eta)d\eta$$

$$+\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-q_s}^{x+q_s}(f(\xi,\eta)-f_{sk}(\xi,\eta))\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta.$$

Оценим второе слагаемое, используя условия на функции ϕ и ψ:

$$\Bigg|\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-q_s}^{x+q_s}(f(\xi,\eta)-f_{sk}(\xi,\eta))\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\Bigg|\le 4\frac{|\phi'|}{\lambda_1}q_s=A_3\frac{q_s}{\lambda_1}.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Поскольку при выполнении условия $\min\limits_{k\ne j}\rho(\Gamma^\varepsilon_{sk};\Gamma^\varepsilon_{sj})\ge K_s$ в пределах интегрирования находится только Γ_{sk}, то имеет место следующее разложение [8, лемма 1]:

$$\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1}f_{sk}(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi=\Delta_{sk}(t(\eta))\phi_{\lambda_1}(x-x_{sk}(t(\eta)))+\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1}(f_{sk})'_\xi(\xi,\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi,$$

где $t(\eta)=(\eta-b^y_{sk})/a^y_{sk}$. Отсюда

$$\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1}f_{sk}(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta$$

$$=\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_{sk}(t(\eta))\phi_{\lambda_1}(x-x_{sk}(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta+\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1}(f_{sk})'_\xi(\xi,\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta.\quad(2.8)$$

Для второго слагаемого в правой части (2.8) справедлива оценка

$$\Bigg|\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1}(f_{sk})'_\xi(\xi,\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\Bigg|\le A_1\lambda_1.$$

Пусть $(\bar x,\bar y)\in\Gamma^\varepsilon_{sk}$ и $\rho((x,y);(\bar x,\bar y))\le\tau$. Используя формулу Лагранжа, первое слагаемое в правой части (2.8) можно представить в виде

$$\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_{sk}(t(\eta))\phi_{\lambda_1}(x-x_{sk}(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta=\phi_{\lambda_1}(x-\bar x)\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_{sk}(t(\eta))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta$$

$$+\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_{sk}(t(\eta))\phi'_{\lambda_1}(\zeta)\cdot(\bar x-x_{sk}(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta,\quad(2.9)$$

где ζ лежит между точками $x-\bar x$, $x-x_{sk}(t(\eta))$. Для $f\in\mathfrak{M}$ (см. определение 5) функция $\Delta_{sk}(t)$ непрерывна при $t\in(q_s\Theta_{sk-1},|\Gamma_{sk}|-q_s\Theta_{sk})$. Следовательно, функция $\Delta_{sk}(t(\eta))$ сохраняет знак для всех η. Так как $|x-\bar x|\le\tau\le b\lambda_1$, то в силу условия (b) на функцию ϕ и условий (b'), (c') на функцию ψ для первого слагаемого в правой части (2.9) имеем оценку снизу

$$\Bigg|\phi_{\lambda_1}(x-\bar x)\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_{sk}(t(\eta))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\Bigg|\ge a\Delta^{\min}.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.9). Учитывая условие (i) на функцию f, можно считать, что $|\Delta_{sk}(t(\eta))| \le 2$. Поскольку $\bar{x} = x_{sk}(t(\bar{y}))$, где $t(\bar{y}) = (\bar{y} - b^y_{sk})/a^y_{sk}$, то $|\bar{x} - x_{sk}(t(\eta))| \le |(\bar{y} - \eta)a^x_{sk}/a^y_{sk}| \le (\lambda_2 + \tau)|a^x_{sk}/a^y_{sk}|$. Так как $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$, то для второго слагаемого в правой части (2.9) выводим оценку

$$\Big|\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2} \Delta_{sk}(t(\eta))\phi'_{\lambda_1}(\zeta)\cdot(\bar{x} - x_{sk}(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\Big| \le \frac{2C_1(\lambda_2+\tau)}{\lambda_1}.$$

Таким образом, лемма 3 доказана. □

Напомним, что величины a, b, C_1 введены в условиях (a), (b) на функцию ϕ, величина C_2 — в условии (a') на функцию ψ, величина $\Delta^{\min}$ — в условии (iii) на функцию f; $A_0 = 4C_1C_2$, $A_1 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_2 = 2C_1$, $A_3 = 4C_1$. Введем константы

$$P = \frac{a\Delta^{\min}}{2}, \quad D_1 = \frac{4A_0}{P}\Big(\frac{18A_2}{P}\Big)^{1/2}, \quad D_2 = \frac{4A_0}{P}\Big(\frac{P}{18A_2}\Big)^{1/2}, \quad D_3 = \frac{PD_1}{4A_3},$$

$$B_0 = \min\Big\{bD_1,\ D_2,\ \frac{P}{8A_0}\Big(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}\Big)^{-1}\Big\}, \quad \delta_0 = \frac{P}{16A_1D_1}.$$

Напомним, что $\lceil z\rceil = [z] + 1$, где $[z]$ — целая часть числа z. Положим

$$n_1 = n_1(\tau,\delta) = \Big\lceil\frac{D_1\delta}{\tau} - \frac{1}{2}\Big\rceil, \quad n_2 = n_2(\tau,\delta) = \Big\lceil\frac{D_2\delta}{\tau} - \frac{1}{2}\Big\rceil. \tag{2.10}$$

Выберем параметры регуляризации λ_1, λ_2 следующим образом:

$$\lambda_1 = \frac{2n_1+1}{2}\tau, \quad \lambda_2 = \frac{2n_2+1}{2}\tau. \tag{2.11}$$

Ниже нам понадобятся очевидные оценки, которые сформулируем в виде отдельного утверждения.

Утверждение 1. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$. Тогда если шаг τ заданной равномерной сетки T удовлетворяет неравенству $\tau \le \tau_0(\delta) = B_0\delta$, то при связи параметров* (2.10), (2.11) *имеем $\tau \le \min\{b\lambda_1, \lambda_2, D_1\delta/36\}$ и для λ_1, λ_2 выполнены следующие оценки сверху и снизу*:

$$D_1\delta \le \lambda_1 \le D_1\delta + \tau \le D_1\delta(1 + 1/36) < 2D_1\delta,$$

$$D_2\delta \le \lambda_2 \le D_2\delta + \tau \le 2D_2\delta \le D_1\delta/18 < \lambda_1.$$

Если дополнительно $q_s \le D_3\delta$, то $q_s \le D_1\delta/16 < \lambda_1$.

Доказательство. Это утверждение следует из того, что $\Delta^{\min} \le 2$, $C_1 \ge 1$. Тогда $D_2 \le D_1/36$ и $D_3 \le D_1/16$. □

В точках сетки $T = \{(x^n, y^m)\}$ определим функцию

$$H^\delta(x^n, y^m) = \max\{|G^\delta_x(x^n, y^m)|, |G^\delta_y(x^n, y^m)|\}. \tag{2.12}$$

Лемма 4. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$ и натуральное число s. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для δ: $q_s/D_3 \le \delta \le \delta_0$, шага $\tau \le \tau_0(\delta)$, при выборе* (2.6), (2.7) *и связи параметров* (2.10), (2.11), *а также выполнении дополнительного условия разделимости*

$$\min_{1\le k,j\le l_s,\ k\ne j} \rho(\Gamma^\varepsilon_{sk}; \Gamma^\varepsilon_{sj}) \ge K_s,$$

где $K_s \ge \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \sqrt{2}\tau + q_s$, для функции H^δ в точке $(x^n, y^m) \in T$ имеют место оценки:

(1) *если $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s) > \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + q_s$, то $H^\delta(x^n, y^m) < P$;*

(2) *если $\rho((x^n, y^m); \Gamma^\varepsilon_s) \le \tau$, то $H^\delta(x^n, y^m) > P$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем справедливость (1). Для точек сетки (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s) > \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + q_s$, используя оценки лемм 1 и 2, получаем

$$|G_x^\delta(x^n, y^m)| \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\Big) + A_1\lambda_1.$$

При данном выборе параметров, ввиду оценок снизу для λ_1, λ_2 из утверждения 1, справедливо неравенство $A_0\delta/(\lambda_1\lambda_2)^{1/2} \le P/4$; используя дополнительно неравенство $\tau \le \tau_0(\delta)$, получаем $A_0\tau(1/\lambda_1 + 1/\lambda_2) \le P/8$; из неравенства $\delta \le \delta_0$ следует неравенство $A_1\lambda_1 \le P/8$. Тогда

$$|G_x^\delta(x^n, y^m)| \le \frac{1}{2}P < P$$

для (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s) > \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + q_s$. Аналогичная оценка имеет место для функции G_y^δ в точках сетки (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s) > \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + q_s$. Следовательно,

$$H^\delta(x^n, y^m) < P$$

для (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s) > \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + q_s$.

Перейдем к доказательству (2). Пусть $\Gamma_{sk}\colon |a_{sk}^x/a_{sk}^y| \le 1$. Для точек (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s^\varepsilon) \le \tau$, используя оценки лемм 1 и 3, получаем

$$|G_x^\delta(x^n, y^m)| \ge a\Delta^{\min} - \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} - A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\Big) - A_1\lambda_1 - \frac{A_2(\lambda_2 + \tau)}{\lambda_1} - \frac{A_3 q_s}{\lambda_1}.$$

При данном выборе параметров $\lambda_2 + \tau \le 3D_2\delta$ и $A_2(\lambda_2 + \tau)/\lambda_1 \le P/6$. Поскольку $q_s \le D_3\delta$, то $A_3 q_s/\lambda_1 \le P/4$. Следовательно, учитывая оценки из доказательства п. (1), имеем

$$|G_x^\delta(x^n, y^m)| \ge a\Delta^{\min} - \frac{11}{12}P = \frac{13}{12}P > P.$$

Аналогичная оценка справедлива для G_y^δ в точках сетки (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s^\varepsilon) \le \tau$ при $\Gamma_{sk}\colon |a_{sk}^y/a_{sk}^x| \le 1$.

Поскольку для отрезка Γ_{sk} имеем $|a_{sk}^x/a_{sk}^y| \le 1$ и/или $|a_{sk}^y/a_{sk}^x| \le 1$, то $H^\delta(x^n, y^m) > P$ для точек (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s^\varepsilon) \le \tau$. Лемма 4 доказана.

3. Исследование алгоритма локализации линий разрыва

Изложенный ниже алгоритм локализации определяет множество T^δ точек сетки, аппроксимирующих линию разрыва Γ. Обозначим через $N = N(T^\delta)$ количество точек множества T^δ. Договоримся, если $T^\delta = \varnothing$, считать $\rho((x^n, y^m); T^\delta) = \infty$ для любой точки (x^n, y^m) сетки T. Приведенный ниже алгоритм локализации в своей работе использует параметры n_1, n_2 и величину порога $P = a\Delta^{\min}/2$. Напомним, что функция H^δ определена в (2.12).

А л г о р и т м $\Pi D(\delta, f_{n,m}^\delta)$

Подготовка к циклу. Положим $N = 0$; $T^\delta = \varnothing$.

Цикл перебора точек (x^n, y^m) *сетки* T. Если в процессе перебора не рассмотренных точек сетки T не осталось, то конец цикла.

Пусть (x^n, y^m) — текущая точка. Если $H^\delta(x^n, y^m) > P$ и $\rho((x^n, y^m); T^\delta) > 3\sqrt{2}\lambda_1 + 2q_s$, то $N := N + 1$; $T^\delta := T^\delta \bigcup (x^n, y^m)$ и продолжаем цикл;

иначе — продолжаем цикл.

Заметим, что выше сформулирован целый класс алгоритмов. Чтобы получить конкретный метод, нужно зафиксировать функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$ и правило перебора точек. Далее будем считать, что конкретное правило перебора и функции выбраны и зафиксированы.

Пусть U, V — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Выберем меру близости множества U к множеству V:

$$\mu(U;V) = \sup_{(x_1,y_1)\in U} \inf_{(x_2,y_2)\in V} \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Напомним, что

$$n_1 = n_1(\tau,\delta) = \left\lceil \frac{D_1\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \right\rceil, \quad n_2 = n_2(\tau,\delta) = \left\lceil \frac{D_2\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \right\rceil, \quad \lambda_1 = \frac{2n_1+1}{2}\tau, \quad \lambda_2 = \frac{2n_2+1}{2}\tau. \tag{3.1}$$

Введем константы и функцию

$$B = \frac{40\sqrt{2}A_3}{P\nu}, \quad D = \sqrt{2}D_1, \quad \bar{\delta}_0 = \min\{\delta_0,\, \bar{q}/D_3\}, \quad h(\delta) = 5D\delta.$$

Напомним, что константы Θ, p входят в определение класса $\mathfrak{M}$.

Положим

$$\varepsilon_{sk} = h(\delta)\Theta_{sk}, \tag{3.2}$$

где Θ_{sk} определено в (1.1)

Теорема. *Пусть функция $f \in \mathfrak{M}(p)$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для $\delta \le \bar{\delta}_0$, шага $\tau \le \tau_0(\delta)$, при связи параметров* (3.1), *при выполнении соотношения $p < 1/B$ и дополнительного условия разделимости $\min\limits_{s\in\mathbb{N},\, 1\le k,j\le l_s,\, k\ne j} \rho(\Gamma^\varepsilon_{sk};\Gamma^\varepsilon_{sj}) \ge h(\delta)$, где $h(\delta) = 5D\delta$, алгоритм $\Pi D(\delta, f^\delta_{n,m})$ построит множество точек $T^\delta \ne \varnothing$ такое, что*:

(1) $\mu(T^\delta;\Gamma) \le 2D\delta$;

(2) $\mu(\Gamma;T^\delta) \le (4+5\Theta)D\delta$;

(3) *для всех различных точек $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in T^\delta$ справедливо неравенство*

$$\rho((x_1,y_1);(x_2,y_2)) > 3D\delta;$$

(4) *для $s = s(\delta)$: $q_s/D_3 < \delta \le q_{s-1}/D_3$ справедливы оценки*

$$\frac{1}{7D}\frac{|\Gamma_s|}{\delta}(1-pB) \le N(T^\delta) \le \frac{1}{D}\frac{|\Gamma_s|}{\delta}.$$

Доказательство. В соответствии с основной идеей проведения оценок перейдем от точной линии Γ к аппроксимирующей ее последовательности Γ_s. Зафиксируем $s = s(\delta)$: $q_s/D_3 < \delta \le q_{s-1}/D_3$. Ясно, что $s(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$.

Докажем оценку (1). Заметим, что условие разделимости в теореме гарантирует выполнение условия разделимости в леммах, поскольку $h(\delta) > \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + \sqrt{2}\tau + q_s$. Из оценки в п. (1) леммы 4 вытекает, что $\mu(T^\delta;\Gamma_s) \le \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + q_s$. Следовательно, $\mu(T^\delta;\Gamma) \le \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + 2q_s$. Используя оценки из утверждения 1, получаем требуемое неравенство.

Докажем оценку (2). Очевидно, что все Γ^ε_s можно покрыть окружностями с центром в точках из множества T^δ радиусом $3\sqrt{2}\lambda_1 + 2q_s + \sqrt{2}\tau$. Если это не так, то согласно п. (2) леммы 4 обязательно найдется точка сетки T, не принадлежащая множеству T^δ, в которой функция H^δ больше порога P. Этого не может быть, поскольку в ходе работы алгоритма ΠD перебираются все точки сетки T. Следовательно, $\mu(\Gamma^\varepsilon_s;T^\delta) \le 3\sqrt{2}\lambda_1 + 2q_s + \sqrt{2}\tau$. Значит, $\mu(\Gamma_s;T^\delta) \le 3\sqrt{2}\lambda_1 + 2q_s + \sqrt{2}\tau + \varepsilon_{sk}$ и $\mu(\Gamma;T^\delta) \le 3\sqrt{2}\lambda_1 + 3q_s + \sqrt{2}\tau + \varepsilon_{sk}$. С учетом выбора (3.2) и учитывая условия на параметры, получаем требуемую оценку.

Докажем оценку (3). Пусть $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in T^\delta$. По построению множества T^δ алгоритмом ΠD справедливо неравенство $\rho((x_1,y_1);(x_2,y_2)) > 3\sqrt{2}\lambda_1 \ge 3\sqrt{2}D_1\delta$.

Докажем оценку (4). Согласно оценке в п. (1) леммы 4 окружность с центром в точке из множества T^δ радиусом $\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + q_s$ обязательно содержит точку из Γ_s. Пусть $(x^n,y^m) \in T^\delta$, тогда существует $(x,y)\in\Gamma_s$ такая, что $\rho((x^n,y^m);(x,y))\le\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+q_s\le\sqrt{2}\lambda_1+q_s$. Аналогично для $(x^{\bar n},y^{\bar m})\in T^\delta$ найдется $(\bar x,\bar y)\in\Gamma_s$ такая, что $\rho((x^{\bar n},y^{\bar m});(\bar x,\bar y))\le\sqrt{2}\lambda_1+q_s$. Ясно, что $\rho((x,y);(\bar x,\bar y))\ge\rho((x^{\bar n},y^{\bar m});(x^n,y^m))-2(\sqrt{2}\lambda_1+q_s)$. Используя оценку для первого слагаемого из доказательства п. (3) настоящей теоремы, получаем $\rho((x,y);(\bar x,\bar y))\ge\sqrt{2}\lambda_1$. Следовательно, справедлива оценка сверху

$$N(T^\delta)\le\frac{|\Gamma_s|}{\sqrt{2}\lambda_1}\le\frac{|\Gamma_s|}{\sqrt{2}D_1\delta}.$$

Получим оценку снизу. В доказательстве п. (2) установлено, что все Γ_s^ε можно покрыть окружностями с центром в точках из множества T^δ радиусом $3\sqrt{2}\lambda_1+2q_s+\sqrt{2}\tau$. Поскольку $h(\delta)-(3\sqrt{2}\lambda_1+2q_s+\sqrt{2}\tau)\ge D\delta>0$, то количество таких окружностей на Γ_{sk}^ε должно быть не меньше

$$\frac{|\Gamma_{sk}^\varepsilon|}{2(3\sqrt{2}\lambda_1+2q_s+\sqrt{2}\tau)}\ge\frac{|\Gamma_{sk}|-\varepsilon_{sk-1}-\varepsilon_{sk}}{2(3\sqrt{2}\lambda_1+2q_s+\sqrt{2}\tau)}.$$

Ввиду (3.2) и соотношения $h(\delta)=5D\delta\le(5\sqrt{2}D_1/D_3)(q_s/\nu)=20\sqrt{2}A_3q_s/(P\nu)$ получаем

$$\frac{\varepsilon_{sk}}{|\Gamma_{sk}|}\le\frac{20\sqrt{2}A_3}{P\nu}\frac{\Theta_{sk}q_s}{|\Gamma_{sk}|}\le\frac{pB}{2}.$$

Следовательно, $\dfrac{|\Gamma_{sk}^\varepsilon|}{2(3\sqrt{2}\lambda_1+2q_s+\sqrt{2}\tau)}\ge\dfrac{1}{7\sqrt{2}D_1}\dfrac{|\Gamma_{sk}|}{\delta}(1-pB)$. Условие $p<1/B$ обеспечивает непустоту Γ_{sk}^ε. При выбранном алгоритме общее количество точек получается сложением по всем k. Таким образом,

$$N(T^\delta)\ge\frac{1}{7\sqrt{2}D_1}\frac{|\Gamma_s|}{\delta}(1-pB).$$

Теорема доказана. □

Оценки в пп. (1)–(3) теоремы почти такие же (чуть хуже из-за наличия q_s), как соответствующие оценки в [10]. Оценки количества точек в настоящей статье (п. (4) теоремы) в отличие от соответствующей оценки в [10] зависят от переменной величины $|\Gamma_s|$, а значит и от δ. При дополнительных ограничениях на кривую возможно установить порядок поведения $|\Gamma_s|$ как функции от δ и конкретизировать оценку (4) в теореме.

Приведем примеры гладкой линии и линии, не дифференцируемой ни в одной точке. В примерах удобно считать, что нумерация по s (см. определение 1) начинается не с единицы, а с некоторого $\bar s$, т. е. $s=\bar s,\bar s+1,\dots$.

П р и м е р 1. Рассмотрим случай гладкой линии разрыва. Пусть функция $f(x,y)$ равна нулю вне окружности Γ радиусом R и единице внутри этой окружности. Следовательно, $\Delta^{\min}=1$. В качестве Γ_s рассмотрим правильный s-угольник, вписанный в эту окружность. Тогда $q_s\le\sqrt{2}R(1-\cos(\pi/s))$, $\Theta_{sk}=(\sin(\pi(s-2)/(2s)))^{-1}=(\cos(\pi/s))^{-1}$, $|\Gamma_{sk}|=2R\sin(\pi/s)$. Заметим, что

$$\frac{q_{s+1}}{q_s}=\Big(\frac{\sin(\pi/(s+1))}{\sin(\pi/s)}\Big)^2<1\quad\text{и}\quad\frac{q_{s+1}}{q_s}\to1\quad\text{при}\quad s\to\infty.$$

Поскольку q_{s+1}/q_s является монотонно возрастающей функцией, то существует $\bar s$ такое, что для всех $s=\bar s,\bar s+1,\dots$, выполняется неравенство

$$\frac{q_{s+1}}{q_s}=\Big(\frac{\sin(\pi/(s+1))}{\sin(\pi/s)}\Big)^2>\nu=\frac{2}{3}.$$

Тогда $\nu\le q_{s+1}/q_s<1$ для всех $s=\bar s,\bar s+1,\dots$. Положим $\bar q=q_{\bar s}\le\sqrt{2}R(1-\cos(\pi/\bar s))$. При этом $\Theta=\max\limits_{s,k}\Theta_{sk}=2$. Зафиксируем $\phi\in\Phi F$. Заметим, что отношение $\Theta_{sk}q_s/|\Gamma_{sk}|$ не зависит от k и

$$\frac{\Theta_{sk}q_s}{|\Gamma_{sk}|}<\frac{1-\cos(\pi/s)}{\sqrt{2}\cos(\pi/s)\sin(\pi/s)}=\frac{2\sqrt{2}(\sin(\pi/(2s)))^2}{\sin(2\pi/s)}.$$

Эта величина стремится к нулю при $s \to \infty$. Увеличив, если это необходимо, $\bar{s}$, можно считать, что

$$\frac{2\sqrt{2}(\sin(\pi/(2\bar{s})))^2}{\sin(2\pi/\bar{s})} < \frac{1}{B}, \quad \text{где} \quad B = \frac{40\sqrt{2}A_3}{P\nu}.$$

Очевидно, что функция f с разрывом по линии Γ принадлежит описанному в разд. 1 классу $\mathfrak{M}(p)$, где

$$p = \frac{2\sqrt{2}(\sin(\pi/(2\bar{s})))^2}{\sin(2\pi/\bar{s})}.$$

П р и м е р 2. Рассмотрим случай линии разрыва, не дифференцируемой ни в одной точке. Будем строить последовательность ломаных Γ_s и линию Γ итерационным способом. Для определения константы B в теореме зафиксируем $\phi \in \Phi F$, положим $\Delta^{\min} = 1$, $\nu = 1/3$. Выберем $\bar{s}$ такое, что

$$\frac{\sin(\pi/\bar{s})}{3\sqrt{2}\cos^2(\pi/\bar{s})} < \frac{1}{B}.$$

Такое $\bar{s}$ существует, поскольку величина в левой части неравенства стремится к нулю при $\bar{s} \to \infty$. В качестве Γ_1 возьмем правильный $\bar{s}$-угольник со стороной R. Ломаную Γ_2 строим следующим образом: каждую сторону правильного $\bar{s}$-угольника делим на три равные части и среднюю часть заменяем сторонами равнобедренного треугольника, угол при вершине которого равен $\pi(\bar{s}-2)/\bar{s}$. Для построения Γ_3 повторяем эту операцию для каждого отрезка в Γ_2 и т. д. Получающаяся в пределе линия Γ не дифференцируема ни в одной точке (обоснование см. ниже). Пусть функция $f(x,y)$ внутри Γ равна единице, а вне фигуры, ограниченной линией Γ, функция $f(x,y)$ равна нулю.

Поскольку отношение $q_s/|\Gamma_{sk}| \le \operatorname{tg}(\pi/\bar{s})/(3\sqrt{2})$ и $\Theta_{sk} \le (\sin(\pi(\bar{s}-2)/(2\bar{s})))^{-1} = (\cos(\pi/\bar{s}))^{-1}$ для всех $s \ge \bar{s}$, то $\dfrac{\Theta_{sk} q_s}{|\Gamma_{sk}|} \le \dfrac{\sin(\pi/\bar{s})}{3\sqrt{2}\cos^2(\pi/\bar{s})} < \dfrac{1}{B}$. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{s} \ge 3$, и для всех $s \ge \bar{s}$

$$\frac{q_{s+1}}{q_s} \ge \frac{1}{6\cos(\pi/\bar{s})} = \frac{1}{3} = \nu.$$

Очевидно, что функция f с разрывом по линии Γ принадлежит описанному в разд. 1 классу $\mathfrak{M}(p)$, где

$$p = \frac{\sin(\pi/\bar{s})}{3\sqrt{2}\cos^2(\pi/\bar{s})};$$

при этом выполнено условие $p < 1/B$ в теореме.

Обозначим через M_s множество вершин ломаной Γ_s, положим $M = \bigcup_1^\infty M_s$. В следующем утверждении показано, что построенная линия Γ не дифференцируема ни в одной точке.

Утверждение 2. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Последовательность M_s является вложенной*: $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M$.

(2) *Множество $M \subset \Gamma$ и всюду плотно в Γ.*

(3) *Линия Γ не дифференцируема ни в одной точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Последовательность множеств M_s вложена по построению.

(2) Поскольку $|\Gamma_{sk}| \le 2R\sin(\pi/s)/3^s \to 0$ при $s \to \infty$, то множество M всюду плотно в Γ, так как для любой точки $(x,y) \in \Gamma$ для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $(\bar{x},\bar{y}) \in M\colon \rho((x,y);(\bar{x},\bar{y})) < \varepsilon$.

(3) Пусть $(x,y) \in M$. Зафиксируем $\tilde{s}$ такое, что $(x,y) \in M_{\tilde{s}}$. Обозначим через $(x_s^\pm, y_s^\pm)$, $s \ge \tilde{s}$, точки из множества $M_s \subset M$ такие, что смежные отрезки $[(x_s^\pm, y_s^\pm),(x,y)]$ принадлежат ломаной Γ_s. Поэтому для любой точки $(x,y) \in M$ существуют две разные последовательности $(x_s^\pm, y_s^\pm) \in M$, сходящиеся по разным направлениям к (x,y) при $s \to \infty$. Значит, линия Γ не дифференцируема ни в одной точке. Утверждение доказано. $\square$

4. Заключение

Таким образом, в настоящей статье разработана аппроксимационная схема приближения с масштабом q_s последовательностью ломаных Γ_s линии Γ. Ограничения на линию Γ вводятся с помощью требований на ломаные Γ_s и масштабы q_s, $s = 1, 2, \dots$. Определяются классы корректности $\mathfrak{M}$, зависящие от параметров $\nu, \bar{q}, r, \Theta, \Delta^{\min}, p$. Эти параметры используются для получения оценок в теореме (параметры входят в константы D_1, D_2, D_3, а на параметр p накладывается дополнительное требование в формулировке теоремы).

Как уже упоминалось во введении, для простоты в настоящей работе проводятся самые грубые оценки. Далее приведем три модификации предложенного подхода.

1. В [10] предполагается, что линия разрыва состоит из конечного числа отрезков. Для произвольной замкнутой линии также можно рассматривать аналогичный случай. Пусть для каждого s ломаная Γ_s распадается на конечное число L ломаных Γ_s^m, $m = 1, 2, \dots, L$, и все углы между Γ_s^m учитываются отдельно, а в параметры Θ и p (см. определение 5, условия (ii), (iiii)) входят только углы между ломаными Γ_s^m. Конечность числа L, позволяет провести подобную модификацию.

2. Можно ввести $\Gamma_{sk}^{\varepsilon}$ в разд. 2 (перед леммой 3) более аккуратно, чтобы это множество было, в общем случае, ближе к Γ_{sk}. В частности, если углы между звеньями $\Gamma_{sk+1}, \Gamma_{sk-1}$ и звеном Γ_{sk} больше некоторого фиксированного угла, то можно положить $\Gamma_{sk}^{\varepsilon} = \Gamma_{sk}$ (при другом законе выбора параметров регуляризации).

3. Предлагаемая в настоящей работе схема рассчитана на анализ методов усреднения со сдвигом по осям x и y. Анализ проведения оценок показывает, что методы, использующие другие виды усреднения, например усреднение “с поворотом” [7], позволяют обосновать применимость этих методов для более широкого класса функций.

Благодарности. Авторы выражают глубокую признательность В. Г. Пименову и Н. В. Байдаковой за полезные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
2. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. **Vasin V. V., Ageev A. L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 c.
4. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
5. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
6. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений: изд. 3-е испр. и доп. М.: Техносфера, 2012. 1104 с.
7. **Антонова Т.В.** Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.
8. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1(49). С. 3–13.
9. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Дискретный алгоритм локализации линий разрыва функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 4(72). С. 3–12. doi: 10.17377/sibjim.2017.20.401
10. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** К вопросу о глобальной локализации линий разрыва функции двух переменных // Тр. Ин-та математики и механики. 2018. Т. 24, № 2. С. 12–23.

Поступила 11.06.2019
После доработки 22.07.2019
Принята к публикации 29.07.2019

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук, зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Антонова Татьяна Владимировна
д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Solutions of ill-posed problems.* New York etc.: John Wiley & Sons, 1977, 258 p. ISBN: 0-470-99124-0 . Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 223 p.
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002, 281 p. ISBN: 90-6764-367-X/hbk . Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 208 p.
3. Vasin V.V., Ageev A.L. Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995, 255 p.
4. Mallat S. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way.* N Y: Acad. Press, 1999, 620 p. ISBN: 0-12-466606-X . Translated to Russian inder the title Malla S. *Veivlety v obrabotke signalov.* Moscow: Mir Publ., 2005, 671 p.
5. Furman Ya.A. (ed.). *Vvedenie v konturnyi analiz i ego prilozheniya k obrabotke izobrazhenii i signalov* [Introduction to Contour Analysis and its Application to Image and Signal Processing]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2002, 596 p. ISBN: 5-9221-0255-9 .
6. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital image processing (3rd Edition).* N J: Pearson Prentice Hall, 2006, 976 p. ISBN: 978-0131687288 . Translated to Russian inder the title *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii. (Izdanie 3-e ispravlennoe i dopolnennoe).* Moscow: Tekhnosfera, 2012, 1104 p.
7. Antonova T.V. A method for localization of discontinuity lines of an approximately defined function of two variables. *Numerical Anal. Appl.*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 285–296. doi: 10.1134/S1995423912040015 .
8. Ageev A.L., Antonova T.V. Approximation of discontinuity lines of a noisy function of two variables. *J. Appl. Industrial Math.*, 2012, vol. 6, no. 3, pp. 269–279. doi: 10.1134/S1990478912030015 .
9. Ageev A.L., Antonova T.V. A Discrete Algorithm for Localizing the Discontinuity Lines of a Function of Two Variables. *J. Appl. Industrial Math.*, 2017, vol. 11, no. 4, pp. 463–471. doi: 10.1134/S1990478917040019 .
10. Ageev A.L., Antonova T.V. On the problem of global localization of discontinuity lines for a function of two variables. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 12–23 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-12-23 .

Received June 11, 2019
Revised July 22, 2019
Accepted July 29, 2019

Aleksandr Leonidovich Ageev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: ageev@imm.uran.ru .

Tat'yana Vladimirovna Antonova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: tvantonova@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. L. Ageev, T. V. Antonova. On the localization of nonsmooth discontinuity lines of a function of two variables, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 9–23 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977: 534.112

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ НА СКОРОСТИ ТОЧЕК ПРОГИБА В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

В. Р. Барсегян

Рассмотрена задача управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями производной функции прогиба в промежуточные моменты времени. Методом разделения переменных задача сводится к задаче управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Задача решается с использованием методов теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного подхода построено управляющее воздействие для задачи управления колебаниями струны с заданными неразделенными условиями на значения скорости точек струны в двух промежуточных моментах времени.

Ключевые слова: управление колебаниями, колебание струны, промежуточные моменты, неразделенные многоточечные условия.

V. R. Barseghyan. A control problem for string vibrations with nonseparated conditions on the velocities of deflection points at intermediate times.

We consider the problem of control of string vibrations with given nonseparated values of the derivative of the deflection function at intermediate times. By the method of separation of variables, the problem is reduced to a control problem with countably many ordinary differential equations with given initial, terminal, and nonseparated multipoint intermediate conditions. We solve this problem using the methods of the theory of control of finite-dimensional systems with multipoint intermediate conditions. As an application of the proposed approach, we construct a control action for the problem of control of string vibrations with given nonseparated conditions on the values of the velocities of points of the string at two intermediate times.

Keywords: control of vibrations, string vibrations, intermediate times, nonseparated multipoint conditions.

MSC: 70Q05, 93C20, 93C40

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-24-33

Введение

Большой класс физических процессов, связанных с колебательными системами, моделируется волновым уравнением [1–3], при этом на практике часто возникают задачи управления, когда нужно сгенерировать заданные характеристики колебаний, удовлетворяющих промежуточным условиям. Внимание исследователей привлекли многоточечные краевые задачи управления, в которых наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями заданы также неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия [4–15]. С одной стороны, неразделенные многоточечные краевые задачи возникают как математические модели реальных процессов, а с другой стороны, для многих уравнений невозможна корректная постановка локальных краевых задач. Неразделенность многоточечных условий, в частности, обусловлена и невозможностью на практике проводить замеры измеряемых параметров состояния объекта мгновенно или в его отдельно взятых точках. Подобные задачи имеют важное прикладное и теоретическое значение; естественным образом возникает необходимость их исследования в различных постановках.

Задачи управления колебательными процессами как внешними, так и граничными управляющими воздействиями при различных типах граничных условий рассмотрены в [7–14], где предложены различные методы решения задач управления. В работах [7–12] исследуются задачи управления колебаниями струны и мембраны с заданными промежуточными (локальными) состояниями с помощью внешних сил, действующих на системы. В статье [13] анализируется многоточечная краевая задача в полислое и для нее доказывается теорема о существовании корректной краевой задачи. В [14] построены алгоритмы нахождения приближенного решения и установлены условия их сходимости. В работе [15] на основе метода параметризации исследуется линейная многоточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений и предложен алгоритм нахождения решения.

В отличие от других работ в настоящей статье рассматривается задача управления для уравнения колебания струны с заданными начальными, конечными условиями и неразделенными значениями скоростей точек струны в промежуточные моменты времени. Методом разделения переменных задача сводится к задаче управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Для каждой гармоники построено управляющее воздействие с использованием методов теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного конструктивного подхода построено управляющее воздействие для управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями скоростей точек струны в двух промежуточных моментах времени.

1. Постановка задачи

Рассмотрим однородную упругую натянутую струну длиной l, края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью $u(x,t)$, которые являются управляющим воздействием.

Пусть состояния распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания струны), т. е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией $Q(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 < t < T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $0 < t < T$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{1.2}$$

и однородными граничными условиями

$$Q(0,t) = 0, \quad Q(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{1.3}$$

В уравнении (1.1) $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность однородной струны. Функция $Q(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (1.1), дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границы области.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$ на значения производных функции прогиба струны задано неразделенное (нелокальное) условие в виде

$$\sum_{k=1}^{m} e_k \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t_k} = \beta(x), \tag{1.4}$$

где e_k — заданные величины ($k = 1,\ldots,m$), $\beta(x)$ — некоторая известная функция.

Задачу управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями скоростей точек прогиба в промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, \ldots, m)$ можно сформулировать следующим образом: среди возможных управлений $u(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, требуется найти управление, которое переводит колебания струны (1.1) с граничными условиями (1.3) из заданного начального состояния (1.2), обеспечивая удовлетворение неразделенных многоточечных промежуточных условий (1.4), в заданное конечное состояние

$$Q(x,T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{1.5}$$

Здесь $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_T(x)$, $\psi_T(x)$ и $\beta(x)$ — заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования.

Предполагается, что система (1.1) при ограничениях (1.2)–(1.5) на промежутке времени $[0,\, T]$ является вполне управляемой [5; 16].

2. Решение задачи

Для построения решения поставленной задачи решение уравнения (1.1) с граничными условиями (1.3) ищем в виде

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{2.1}$$

Представим функции $u(x,t)$ и $\beta(x)$ в виде рядов Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{2.2}$$

Подставим разложения (2.1), (2.2) в соотношения (1.1)–(1.5). Далее, в силу ортогональности системы собственных функций получим, что коэффициенты Фурье $Q_n(t)$ удовлетворяют счетному числу систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{Q}_n(t) + \lambda_n^2 Q_n(t) = u_n(t), \quad \lambda_n^2 = \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1,\, 2, \ldots, \tag{2.3}$$

и следующим начальным, неразделенным многоточечным промежуточным и конечным условиям:

$$Q_n^{(0)} = \varphi_n^{(0)}, \quad \dot{Q}_n^{(0)} = \psi_n^{(0)}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=1}^{m} e_k \dot{Q}_n(t_k) = \beta_n, \tag{2.5}$$

$$Q_n(T) = \varphi_n^{(T)} = \varphi_n^{(m+1)}, \quad \dot{Q}_n(T) = \psi_n^{(T)} = \psi_n^{(m+1)}, \tag{2.6}$$

где через $Q_n(t)$, $\varphi_n^{(0)}$, $\psi_n^{(0)}$, $\varphi_n^{(m+1)}$, $\psi_n^{(m+1)}$, $u_n(t)$ и β_n обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $Q\,(x,t)$, $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_{m+1}(x)$, $\psi_{m+1}(x)$, $u(x,t)$ и $\beta(x)$.

Общее решение уравнения (2.3) с начальными условиями (2.4) и его производная имеют вид

$$Q_n(t) = \varphi_n^{(0)} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_n^{(0)} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t u_n(\tau) \sin \lambda_n (t-\tau) d\tau,$$

$$\dot{Q}_n(t) = -\lambda_n \varphi_n^{(0)} \sin \lambda_n t + \psi_n^{(0)} \cos \lambda_n t + \int_0^t u_n(\tau) \cos \lambda_n (t-\tau) d\tau. \tag{2.7}$$

Теперь, учитывая промежуточные неразделенные (2.5) и конечные (2.6) условия, из уравнения (2.7) получим, что функции $u_n(\tau)$ для каждого n должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\int_0^T u_n(\tau)\sin\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{1n}(T), \quad \int_0^T u_n(\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{2n}(T),$$

$$\sum_{k=1}^m e_k \int_0^{t_k} u_n(\tau)\cos\lambda_n(t_k-\tau)d\tau = C_{2n}^{(m)}(t_1, \ldots, t_m), \tag{2.8}$$

где

$$C_{1n}(T) = \lambda_n\varphi_n^{(m+1)} - \lambda_n\varphi_n^{(0)}\cos\lambda_n T - \psi_n^{(0)}\sin\lambda_n T,$$
$$C_{2n}(T) = \psi_n^{(m+1)} + \lambda_n\varphi_n^{(0)}\sin\lambda_n T - \psi_n^{(0)}\cos\lambda_n T,$$
$$C_{2n}^{(m)}(t_1, \ldots, t_m) = \beta_n - \sum_{k=1}^m e_k\big(-\lambda_n\varphi_n^{(0)}\sin\lambda_n t_k + \psi_n^{(0)}\cos\lambda_n t_k\big). \tag{2.9}$$

Введем функции

$$h_{1n}(\tau) = \sin\lambda_n(T-\tau), \quad h_{2n}(\tau) = \cos\lambda_n(T-\tau), \quad 0 \le \tau \le T,$$

$$h_{2n}^{(m)}(\tau) = \sum_{k=1}^m e_k h_{2n}^{(k)}(\tau), \quad h_{2n}^{(k)}(\tau) = \begin{cases} \cos\lambda_n(t_k-\tau), \ 0 \le \tau \le t_k, \\ 0, \ t_k < \tau \le t_{m+1} = T. \end{cases} \tag{2.10}$$

Тогда интегральные соотношения (2.8) при помощи функции (2.10) выразим следующим образом:

$$\int_0^T u_n(\tau)h_{1n}(\tau)d\tau = C_{1n}(T),$$

$$\int_0^T u_n(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau = C_{2n}(T), \tag{2.11}$$

$$\int_0^T u_n(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{2n}^{(m)}(t_1, \ldots, t_m), \quad n = 1,\ 2, \ldots .$$

Следовательно, для нахождения функции $u_n(\tau)$, $\tau \in [t_0,\, T]$, получим бесконечное семейство интегральных соотношений (2.11).

Введя обозначения

$$H_n(\tau) = \begin{pmatrix} h_{1n}(\tau) \\ h_{2n}(\tau) \\ h_{2n}^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_{1n}(T) \\ C_{2n}(T) \\ C_{2n}^{(m)}(t_1, \ldots, t_m) \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

запишем интегральные соотношения (2.11) так:

$$\int_0^T H_n(t)u_n(t)dt = \eta_n. \tag{2.13}$$

Из соотношения (2.13) (или (2.11)) следует, что для каждой гармоники движение, описываемое уравнением (2.3) с условиями (2.4)–(2.6), вполне управляемо тогда и только тогда, когда для любого заданного вектора η_n (2.12) можно найти управление $u_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (2.13) (или (2.11)).

Примем

$$S_n = \int\limits_0^T H_n(t)\,(H_n(t))^T\,dt = \begin{pmatrix} s_{11}^{(n)} & s_{12}^{(n)} & s_{13}^{(n)} \\ s_{21}^{(n)} & s_{22}^{(n)} & s_{23}^{(n)} \\ s_{31}^{(n)} & s_{32}^{(n)} & s_{33}^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Здесь $H_n(t)\,(H_n(t))^T$ — внешнее произведение векторов (здесь и далее буква “T” в верхнем индексе означает операцию транспонирования). Предполагается, что $\det S_n \neq 0$. Тогда, следуя [5; 17], для каждого $n = 1,\ 2, \ldots$ функцию $u_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющую интегральному соотношению (2.13), запишем в виде

$$u_n(t) = (H_n(t))^T\,S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t), \tag{2.15}$$

где $\nu_n(t)$ — некоторая вектор-функция, такая что

$$\int\limits_0^T H_n(t)\nu_n(t)dt = 0.$$

Отметим, что управление $u_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (2.13) (или (2.11)), существует также тогда, когда ранг матрицы S_n совпадает с рангом расширенной матрицы $\{S_n,\ \eta_n\}$.

Элементы матрицы S_n согласно (2.14) и обозначениям (2.10) имеют следующий вид:

$$s_{11}^{(n)} = \int\limits_0^T (h_{1n}(\tau))^2\,d\tau = \int\limits_0^T (\sin\lambda_n(T-\tau))^2\,d\tau;$$

$$s_{12}^{(n)} = s_{21}^{(n)} = \int\limits_0^T h_{1n}(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau = \int\limits_0^T \sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau;$$

$$s_{13}^{(n)} = s_{31}^{(n)} = \int\limits_0^T h_{1n}(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau = \int\limits_0^T \sin\lambda_n(T-\tau)\Big(\sum_{k=1}^m e_k h_{2n}^{(k)}(\tau)\Big)d\tau$$

$$= \sum_{k=1}^m e_k \int\limits_0^T \sin\lambda_n(T-\tau)h_{2n}^{(k)}(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^m e_k \int\limits_0^{t_k} \sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_k-\tau)d\tau; \tag{2.16}$$

$$s_{23}^{(n)} = s_{32}^{(n)} = \int\limits_0^T h_{2n}(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau = \int\limits_0^T \cos\lambda_n(T-\tau)\Big(\sum_{k=1}^m e_k h_{2n}^{(k)}(\tau)\Big)d\tau$$

$$= \sum_{k=1}^m e_k \int\limits_0^T \cos\lambda_n(T-\tau)h_{2n}^{(k)}(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^m e_k \int\limits_0^{t_k} \cos\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_k-\tau)d\tau;$$

$$s_{22}^{(n)} = \int\limits_0^T (h_{2n}(\tau))^2\,d\tau = \int\limits_0^T (\cos\lambda_n(T-\tau))^2\,d\tau,\, s_{33}^{(n)} = \int\limits_0^T \Big(h_{2n}^{(m)}(\tau)\Big)^2\,d\tau = \int\limits_0^T \Big(\sum_{k=1}^m e_k h_{2n}^{(k)}(\tau)\Big)^2 d\tau.$$

Отметим, что в соответствии с обозначениями (2.12) получим

$$h_{2n}^{(m)}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} e_k \cos \lambda_n (t_k - t), \ 0 \le t \le t_1, \\ \sum\limits_{k=2}^{m} e_k \cos \lambda_n (t_k - t), \ t_1 < t \le t_2, \\ \dots \\ \sum\limits_{k=m-1}^{m} e_k \cos \lambda_n (t_k - t), \ , t_{m-2} < t \le t_{m-1}, \\ e_m \cos \lambda_n (t_m - t), \ t_{m-1} < t \le t_m, \\ 0, \ t_m < t \le t_{m+1} = T. \end{cases}$$

Следовательно, учитывая обозначения (2.10), (2.12), управляющее воздействие $u_n(t)$, $t \in [0,\, T]$, согласно (2.15) представим как

$$u_n(t) = \begin{cases} \Big(\sin \lambda_n (T-t) \quad \cos \lambda_n (T-t) \quad \sum\limits_{k=1}^{m} e_k \cos \lambda_n (t_k - t) \Big) S_n^{-1} \eta_n + \nu_n(t), \ 0 \le t \le t_1, \\ \Big(\sin \lambda_n (T-t) \quad \cos \lambda_n (T-t) \quad \sum\limits_{k=2}^{m} e_k \cos \lambda_n (t_k - t) \Big) S_n^{-1} \eta_n + \nu_n(t), \ t_1 < t \le t_2, \\ \dots \\ \big(\sin \lambda_n (T-t) \quad \cos \lambda_n (T-t) \quad e_m \cos \lambda_n (t_m - t) \big) \, S_n^{-1} \eta_n + \nu_n(t), \ t_{m-1} < t \le t_m, \\ \big(\sin \lambda_n (T-t) \quad \cos \lambda_n (T-t) \quad 0 \big) \, S_n^{-1} \eta_n + \nu_n(t), \ t_m < t \le t_{m+1} = T. \end{cases} \tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) в (2.7), получим $Q_n(t)$ на промежутке времени $t \in [0,\, T]$, а из формулы (2.1) и (2.2) выводим функцию $Q\,(x,t)$ прогиба и $u(x,t)$ управления. Таким образом, будем иметь

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big[\Big(\sin \lambda_n (T-t) \quad \cos \lambda_n (T-t) \quad \sum\limits_{k=1}^{m} e_k \sin \lambda_n (t_k - t) \Big) S_n^{-1} \eta_n + \nu_n(t) \Big] \sin \dfrac{\pi n}{l} x, \\ \qquad\qquad 0 \le t \le t_1, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big[\Big(\sin \lambda_n (T-t) \quad \cos \lambda_n (T-t) \quad \sum\limits_{k=2}^{m} e_k \sin \lambda_n (t_k - t) \Big) S_n^{-1} \eta_n + \nu_n(t) \Big] \sin \dfrac{\pi n}{l} x, \\ \qquad\qquad t_1 < t \le t_2, \\ \dots \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \big[\big(\sin \lambda_n (T-t) \quad \cos \lambda_n (T-t) \quad e_m \sin \lambda_n (t_m - t) \ V \big) \, S_n^{-1} \eta_n + \nu_n(t) \big] \sin \dfrac{\pi n}{l} x, \\ \qquad\qquad t_{m-1} < t \le t_m, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \big[\big(\sin \lambda_n (T-t) \quad \cos \lambda_n (T-t) \quad 0 \big) \, S_n^{-1} \eta_n + \nu_n(t) \big] \sin \dfrac{\pi n}{l} x, \ t_m < t \le t_{m+1} = T. \end{cases} \tag{2.18}$$

Из этого выражения видно, что управляющее воздействие, решающее поставленную задачу, является кусочно-непрерывной функцией.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *При согласовании исходных данных задачи и выполнении условия управляемости системой* (1.1)*, указанных в разд.* 1*, задача управления* (1.1)–(1.5) *имеет кусочно-непрерывное решение, определяемое формулами* (2.18).

3. Пример

Предположим, что $m = 2$ (т. е. $0 < t_1 < t_2 < t_3 = T$), тогда при $\nu_n(t) = 0$ из формулы (2.17) получаем

$$u_n(t)=\begin{cases} \begin{pmatrix} \sin\lambda_n(T-t) & \cos\lambda_n(T-t) & e_1\cos\lambda_n(t_1-t)+e_2\cos\lambda_n(t_2-t) \end{pmatrix} S_n^{-1}\eta_n, \ 0 \le t \le t_1, \\ \begin{pmatrix} \sin\lambda_n(T-t) & \cos\lambda_n(T-t) & e_2\cos\lambda_n(t_2-t) \end{pmatrix} S_n^{-1}\eta_n, \ t_1 < t \le t_2, \\ \begin{pmatrix} \sin\lambda_n(T-t) & \cos\lambda_n(T-t) & 0 \end{pmatrix} S_n^{-1}\eta_n, \ t_2 < t \le t_3 = T. \end{cases} \tag{3.1}$$

Согласно формуле (2.16)

$$s_{11}^{(n)} = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n T, \quad s_{12}^{(n)} = s_{21}^{(n)} = \frac{\sin^2\lambda_n T}{2\lambda_n}, \quad s_{22}^{(n)} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n T,$$

$$s_{13}^{(n)} = s_{31}^{(n)} = e_1\int\limits_0^{t_1}\sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + e_2\int\limits_0^{t_2}\sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[e_1 t_1\sin\lambda_n(T-t_1) + e_2 t_2\sin\lambda_n(T-t_2)\right] + \frac{\sin\lambda_n T}{2\lambda_n}\left(e_1\sin\lambda_n t_1 + e_2\sin\lambda_n t_2\right),$$

$$s_{23}^{(n)} = s_{32}^{(n)} = e_1\int\limits_0^{t_1}\cos\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + e_2\int\limits_0^{t_2}\cos\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n}\left\{\lambda_n\left[e_1 t_1\cos\lambda_n(T-t_1) + e_2 t_2\cos\lambda_n(T-t_2)\right] + \cos\lambda_n T\left(e_1\sin\lambda_n t_1 + e_2\sin\lambda_n t_2\right)\right\},$$

$$s_{33}^{(n)} = e_1^2\int\limits_0^{t_1}\left(\cos\lambda_n(t_1-\tau)\right)^2 d\tau + 2e_1e_2\int\limits_0^{t_1}\cos\lambda_n(t_1-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau$$

$$+ e_2^2\int\limits_0^{t_2}\left(\cos\lambda_n(t_2-\tau)\right)^2 d\tau = \frac{1}{4\lambda_n}\left[2\lambda_n\left(e_1^2 t_1 + e_2^2 t_2\right) + 4e_1e_2t_1\lambda_n\cos\lambda_n(t_1-t_2)\right.$$

$$\left. + 4e_1e_2t_2\cos\lambda_n t_2\sin\lambda_n t_1 + e_1^2\sin 2\lambda_n t_1 + e_2^2\sin 2\lambda_n t_2\right].$$

Теперь, предполагая $t_1 = l/a$, $t_2 = 2l/a$, $T = 4l/a$, получим $t_1\lambda_n = \pi n$, $t_2\lambda_n = 2\pi n$, $T\lambda_n = 4\pi n$, следовательно, из вышеприведенных выражений вытекает

$$s_{11}^{(n)} = s_{22}^{(n)} = \frac{2l}{a}, \quad s_{12}^{(n)} = s_{21}^{(n)} = s_{13}^{(n)} = s_{31}^{(n)} = 0,$$

$$s_{23}^{(n)} = s_{32}^{(n)} = \frac{l}{2a}\left[(-1)^n e_1 + 2e_2\right], \quad s_{33}^{(n)} = \frac{l}{2a}\left[e_1^2 + 2e_2^2 + 2(-1)^n e_1e_2\right]$$

или

$$S_n = \begin{pmatrix} \frac{2l}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2l}{a} & \frac{l}{2a}\left[(-1)^n e_1 + 2e_2\right] \\ 0 & \frac{l}{2a}\left[(-1)^n e_1 + 2e_2\right] & \frac{l}{2a}\left[e_1^2 + 2e_2^2 + 2(-1)^n e_1e_2\right] \end{pmatrix}.$$

Отсюда будем иметь $\det S_n = 1/2\,(l/a)^3\left[2e_1^2 + ((-1)^n e_1 + 2e_2)^2\right]$. Ясно, что при $e_1 \neq 0$ и $e_2 \neq 0$ $\det S_n \neq 0$. Следовательно, для обратной матрицы получим

$$S_n^{-1} = \begin{pmatrix} s_{11}^{-(n)} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^{-(n)} & s_{23}^{-(n)} \\ 0 & s_{32}^{-(n)} & s_{33}^{-(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2a}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{e_1^2 + 2(-1)^n e_1 e_2 + 2e_2^2}{2e_1^2 + [(-1)^n e_1 + 2e_2]^2}\dfrac{2a}{l} & \dfrac{-[(-1)^n e_1 + 2e_2]}{2e_1^2 + [(-1)^n e_1 + 2e_2]^2}\dfrac{2a}{l} \\ 0 & \dfrac{-[(-1)^n e_1 + 2e_2]}{2e_1^2 + [(-1)^n e_1 + 2e_2]^2}\dfrac{2a}{l} & \dfrac{1}{2e_1^2 + [(-1)^n e_1 + 2e_2]^2}\dfrac{8a}{l} \end{pmatrix}.$$

Из (2.12) согласно (2.9) имеем

$$\eta_n = \begin{pmatrix} \eta_1^{(n)} \\ \eta_2^{(n)} \\ \eta_3^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_n\left(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}\right) \\ \psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)} \\ \beta_n - \psi_n^{(0)}\left[(-1)^n e_1 + e_2\right] \end{pmatrix}, \quad S_n^{-1}\eta_n = \begin{pmatrix} s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)} \\ s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{23}^{-(n)}\eta_3^{(n)} \\ s_{32}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{33}^{-(n)}\eta_3^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Подставляя значение вектора $S_n^{-1}\eta_n$ в (3.1), а полученное выражение — в (2.2), выводим следующие явные выражения для функции управления $u(x,t)$:

при $0 \leq t \leq l/a$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)}\sin\lambda_n(T-t) + \left(s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{23}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)\cos\lambda_n(T-t)$$
$$+ \left(s_{32}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{33}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)\left[e_1\cos\lambda_n(t_1-t) + e_2\cos\lambda_n(t_2-t)\right]\Big]\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

при $l/a < t \leq 2l/a$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)}\sin\lambda_n(T-t) + \left(s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{23}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)\cos\lambda_n(T-t)$$
$$+ \left(s_{32}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{33}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)e_2\cos\lambda_n(t_2-t)\Big]\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

при $2l/a < t \leq 4l/a$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)}\sin\lambda_n(T-t) + \left(s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{23}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)\cos\lambda_n(T-t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Таким образом, имея полученные явные выражения функций управления, с помощью вышеприведенных формул можем найти также функцию прогиба струны.

Заключение

Задача управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями производных функций прогиба в промежуточные моменты времени методом разделения переменных сводится к задаче управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Задача решается с использованием методов теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного подхода построено управляющее воздействие для колебания струны с заданными неразделенными значениями производной функции прогиба точек струны в двух промежуточных моментах времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутковский А.Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. **Сиразетдинов Т.К.** Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
3. **Знаменская Л.Н.** Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с.
4. **Ащепков Л.Т.** Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, вып. 2. С. 215–222.
5. **Барсегян В.Р.** Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
6. **Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.** Об одном подходе к решению задач управления динамическими системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 3–15.
7. **Барсегян В.Р., Саакян М.А.** Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // Известия НАН РА. Механика. 2008. Т. 61, № 2. С. 52–60.
8. **Барсегян В.Р.** Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях // Уч. записки ЕГУ. 1998. №1 (188). С. 24–29.
9. **Барсегян В.Р.** О задаче граничного управления колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // XI Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20–24 августа 2015 г.): тез. докл. 2015. С. 354–356.
10. **Барсегян В.Р.** Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени // XI Междунар. Четаевская конф. “Аналитическая механика, устойчивость и управление” (Казань, 13–17 июня 2017 г.): труды. 2017. Т. 3. Ч. I. С. 119–125.
11. **Корзюк В.И., Козловская И.С.** Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18, № 2. С. 22–35.
12. **Корзюк В.И., Козловская И.С.** Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 1. С. 62–70.
13. **Макаров А.А., Левкин Д.А.** Многоточечная краевая задача для псевдодифференциальных уравнений в полислое // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В. Н. Каразiна. Серiя : Математика, прикладна математика i механiка. 2014. № 1120, вып. 69. С. 64–74.
14. **Асанова А.Т., Иманчиев А.Е.** О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями // Вестн. Караганд. ун-та. Серия Математика. 2016. № 1 (81). С. 15–20.
15. **Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М.** О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2016. № 5. С. 168–175.
16. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением, М.: Наука, 1968. 476 с.
17. **Зубов В.И.** Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

Поступила 5.07.2019
После доработки 18.07.2019
Принята к публикации 21.07.2019

Барсегян Ваня Рафаелович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий научный сотрудник
Институт механики НАН Армении;
профессор факультета математики и механики
Ереванский государственный университет,
г. Ереван
e-mail: barseghyan@sci.am

REFERENCES

1. Butkovskii A.G. *Metody upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Control methods for systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka Publ., 1975, 568 p.
2. Sirazetdinov T.K. *Optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami* [Optimization of systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 480 p.
3. Znamenskaya L.N. *Upravlenie uprugimi kolebaniyami* [Control of elastic vibrations]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2004, 176 p.
4. Aschepkov L.T. Optimal control of the system with intermediate conditions. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1981, vol. 45, no. 2, pp. 215–222 (in Russian).
5. Barseghyan V.R. *Upravlenie sostavnykh dinamicheskikh sistem i sistem s mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami* [Control of composite dynamic systems and systems with multipoint intermediate conditions]. Moscow: Nauka Publ., 2016, 230 p. ISBN: 978-5-02-039961-7/hbk .
6. Barseghyan V.R., Barseghyan T.V. On an approach to the problems of control of dynamic system with nonseparated multipoint intermediate conditions. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 4, pp. 549–559. doi: 10.1134/S0005117915040013 .
7. Barseghyan V.R., Saakyan, M.A. The optimal control of wire vibration in the states of the given intermediate periods of time. *Proc. of NAS RA: Mechanics*, 2008, vol. 61, no. 2, pp. 52–60 (in Russian).
8. Barseghyan V.R. Optimal control of a membrane vibration with fixed intermediate states. *Proc. of Yerevan State University*, 1998, vol. 188, no. 1, pp. 24–29 (in Russian).
9. Barseghyan V.R. On the problem of boundary control of string oscillations with given states at intermediate moments of time. *Proc. XIth All-Russian Congress on Basic Problems of Theoretical and Applied Mechanics* (Kazan, August 20–24), 2015, vol. 1, pp. 354–356 (in Russian).
10. Barseghyan V.R. On one problem of optimal boundaery control of string vibrations with restrictions in the intermediate moment of time. *Proc. 11th Internat. Chetaev Conf. "Analytical mechanics, stability and control"*(Kazan, June 14–18), 2017, vol. 3, part 1, pp. 119–125 (in Russian).
11. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Two-point boundary problem for string oscillation equation with given velocity in arbitrary point of time. I. *Tr. Inst. Mat. NAS of Belarus*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 22–35 (in Russian).
12. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Two-point boundary problem for string oscillation equation with given velocity in arbitrary point of time. II. *Tr. Inst. Mat. NAS of Belarus*, 2011, vol. 19, no. 1, pp. 62–70 (in Russian).
13. Makarov A.A., Levkin D.A. Multipoint boundary value problem for pseudo-differential equations in multilayer. *Vistnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 69, no. 1120, pp. 64–74 (in Ukrainian).
14. Assanova A.T., Imanchiev A.E On the solvability of a nonlocal boundary value problem for a loaded hyperbolic equations with multi-point conditions. *Bulletin of the Karaganda University. Ser.: Mathematics*, 2016, no. 1 (81), pp. 15–25 (in Russian).
15. Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of linear multipoint boundary value problem for the loaded differential equations. *Izvestiya NAS RK. Ser. Fiz.-Mat.*, 2016, vol. 5, no. 309, pp. 168–175 (in Russian).
16. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
17. Zubov V.I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on Control Theory]. Moscow: Nauka Publ., 1975, 496 p.

Received July 5, 2019
Revised July 18, 2019
Accepted July 21, 2019

Vanya Rafaelovich Barseghyan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Leading Scientific Researcher of Institute of Mechanics of NAS of RA; Prof. of Mathematics and Mechanics Department of Yerevan State University, Yerevan, 0025 Armenia; Yerevan, 0019 Armenia, e-mail: barseghyan@sci.am .

Cite this article as: V. R. Barseghyan. A control problem for string vibrations with nonseparated conditions on the velocities of deflection points at intermediate times, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 24–33 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.988.68

АНАЛИЗ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО РАЗРЫВНУЮ КОМПОНЕНТУ РЕШЕНИЯ

В. В. Васин, В. В. Беляев

Исследуется линейное операторное уравнение, не удовлетворяющее условиям корректности Адамара. Предполагается, что решение уравнения содержит различные свойства гладкости на различных участках области определения. А именно, решение представимо в виде суммы гладкой и разрывной компонент. Для построения устойчивого приближенного решения применяется метод регуляризации Тихонова. В этом методе стабилизатор есть сумма лебеговой нормы и сглаженной BV-нормы. Каждый из входящих в стабилизатор функциоалов зависит только от одной компоненты и учитывает ее свойства. Доказываются теоремы сходимости регуляризованных решений и их дискретных аппроксимаций. Устанавливается, что для нахождения дискретных регуляризованных решений могут быть применены метод Ньютона и нелинейные аналоги α-процессов.

Ключевые слова: некорректная задача, метод регуляризации, разрывное решение, обобщенная вариация, дискретная аппроксимация.

V. V. Vasin, V. V. Belyaev. Analysis of a regularization algorithm for a linear operator equation containing a discontinuous component of the solution.

We study a linear operator equation that does not satisfy the Hadamard well-posedness conditions. It is assumed that the solution of the equation has different smoothness properties on different segments of its domain. More exactly, the solution is representable as the sum of a smooth and discontinuous components. The Tikhonov regularization method is applied for the construction of a stable approximate solution. In this method, the stabilizer is the sum of the Lebesgue norm and the smoothed BV-norm. Each of the functionals in the stabilizer depends only on one component and takes into account its properties. Convergence theorems are proved for the regularized solutions and their discrete approximations. It is shown that discrete regularized solutions can be found with the use of the Newton method and nonlinear analogs of α-processes.

Keywords: ill-posed problem, regularization method, discontinuous solution, total variation, discrete approximation.

MSC: 65J15, 65J20, 45L05

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-34-44

1. Введение

Пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий на паре банаховых пространств U, F и имеющий разрывный обратный A^{-1}, что влечет некорректность в смысле Адамара уравнения

$$Au = f \tag{1.1}$$

в условиях приближенного задания правой части f^δ, такой что $\|f - f^\delta\| \leqslant \delta$. Предполагаем, что решение задачи (1.1) наряду с гладким фоном содержит участки с разрывами. Хорошо известно, что в традиционном (однокомпонентном) подходе наличие в решении участков с различными свойствами гладкости затрудняет выбор стабилизирующего функционала, при котором решение восстанавливалось бы с требуемой точностью на всех участках с сохранением структуры (разрывы, изломы). Один из возможных подходов к решению этой проблемы основан на идее представления решения в виде суммы двух компонент и выборе стабилизатора также в форме суммы функционалов, каждый из которых зависит только от одной компоненты и учитывает свойство гладкости, характерное именно для этой компоненты. Данный прием хорошо зарекомендовал себя в прикладных исследованиях при обработке зашумленных сигналов и изображений методом регуляризации Тихонова при восстановлении непрерывной и разрывной компонент решения [1; 2]. Теоретическое обоснование сходимости такого двух- и трехкомпонентного подхода содержится в работах [3; 4], в которых для аппроксимации разрывной компоненты наряду с обобщенной вариацией использовалась также норма пространства Липшица. В этом случае функционал Тихонова является недифференцируемым, что приводит к необходимости решать задачу негладкой минимизации и применять субградиентные методы, эффективность которых невысока.

В данной работе исследуется двухкомпонентный вариант метода регуляризации Тихонова, в котором негладкая BV-норма [5; 6], представимая в виде суммы L_1-нормы и обобщенной вариации, аппроксимируется параметрическим семейством дифференцируемых функционалов. Теоремы сходимости регуляризованных решений и их конечно-разностных аппроксимаций с изложением краткой схемы доказательства были анонсированы в работе авторов [7]. Настоящая статья содержит развернутое доказательство этих теорем. Кроме того, устанавливается применимость к дискретизованным задачам минимизации тихоновского функционала итерационного метода Ньютона и нелинейных аналогов α-процессов.

В разд. 2 доказываются существование нормального решения относительно выпуклого стабилизирующего функционала и сходимость регуляризованных решений для каждой компоненты. В разд. 3 формулируется и доказывается теорема сходимости дискретных аппроксимаций, образованных экстремальными элементами конечно-разностных задач минимизации с дифференцируемыми выпуклыми целевыми функциями, к регуляризованным решениям, построенным с использованием классической обобщенной вариации (без сглаживания). В разд. 4 дается обоснование применимости æ-процессов и метода Ньютона для решения конечномерных регуляризованных задач.

2. Метод Тихонова с гладким стабилизатором

При условии представимости решения в виде суммы двух компонент $u = u_1 + u_2$ рассмотрим метод Тихонова, в котором L_1-норма и обобщенная вариация, отвечающие за негладкую компоненту u_2, заменены их сглаженными аналогами:

$$\min\left\{\|A(u_1+u_2)-f^\delta\|^2_{L_2(S)} + \alpha[\|u_1\|^2_{L_q(D)} + \Omega^\beta(u_2)] : u_1 \in L_q,\ u_2 \in BV(D)\right\} = \Phi^*. \tag{2.1}$$

Здесь f^δ такая, что $\|f - f^\delta\| \leqslant \delta$, $L_q = L_q(D)$, область $D \subset \mathbb{R}^d$, $1 < q < \infty$, $d = 1, 2, 3$; стабилизирующий функционал для второй компоненты u_2 определяется формулами

$$\Omega^\beta(u) = l^\beta(u) + J^\beta(u), \quad \beta > 0, \quad l^\beta(u) = \int\limits_D \sqrt{|u(x)|^2 + \beta}\, dx, \tag{2.2}$$

$$J^\beta(u) = \sup\left\{ \int\limits_D (-u \operatorname{div} v + \sqrt{\beta(1-|v|^2)})\colon v \in V \right\}, \tag{2.3}$$

где $V = \{v\colon v \in C_0^1(D, \mathbb{R}^d),\ |v(x)| \leqslant 1\}$. Очевидно, что функционал $l^\beta(u)$ является гладкой аппроксимацией L_1-нормы, а функционал $J^\beta(u)$, который при $u \in W_1^1(D)$ определяется формулой

$$J^\beta(u) = \int\limits_D \sqrt{|\nabla u(x)|^2 + \beta}\, dx, \tag{2.4}$$

можно рассматривать как гладкую аппроксимизацию обобщенной вариации

$$J(u) = \sup\left\{ \int\limits_D -u \operatorname{div} v\, dx\colon v \in V \right\}, \tag{2.5}$$

Она для $u \in W_1^1(D)$ принимает вид $J(u) = \int_D |\nabla u(x)|\,dx$. Выпуклый функционал $J^\beta(u)$ был введен в работе [6] и применялся в качестве стабилизатора в однокомпонентной версии метода Тихонова ($u_1 = 0$, $l^\beta(u_2) = 0$). Упомянутая выше $BV(D)$-норма определяется формулой

$$\|u\|_{BV(D)} = \|u\|_{L_1(D)} + J(u). \tag{2.6}$$

Пространство $BV(D)$, снабженное нормой (2.6), называемое *BV-пространством*, является банаховым [5]. В дальнейшем в тех случаях, когда это не вызывает сомнения, будем опускать нижние знаки при нормах.

Установим существование нормального решения уравнения (1.1), т. е. пары $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$, минимизирующей стабилизирующий функционал

$$\Omega(u_1, u_2) = \|u_1\|^2 + \Omega^\beta(u_2), \tag{2.7}$$

где $\Omega^\beta(u_2)$ определяется формулой (2.2), при этом $\hat{u}_1 + \hat{u}_2 = A^{-1}f$.

Теорема 1. *Пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства $L_p(D)$ в $L_2(S)$, где области D, $S \in \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, $1 \leqslant p < d/(d-1)$, $p \leqslant q$, область D обладает свойством конуса и уравнение* (1.1) *имеет единственное решение $\hat{u} = A^{-1}f$.*

Тогда существует, возможно, неединственное решение $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ задачи

$$\min\{\Omega(u_1, u_2)\colon A(u_1 + u_2) = f,\ u_1 \in L_q,\ u_2 \in L_1\} = \Psi^*, \tag{2.8}$$

где функционал $\Omega(u_1, u_2)$ определен соотношением (2.7), *причем для любой такой пары $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ справедливо $\hat{u}_1 + \hat{u}_2 = \hat{u} = A^{-1}f$.*

Доказательство опубликовано в работе [7].

Необходимо отметить, что решение задачи (2.8) в общем случае может быть неединственным, однако сумма составляющих его компонент $\hat{u}_1 + \hat{u}_2 = \hat{u}$ определяет один и тот же элемент — единственное решение уравнения (1.1).

Исследуем регуляризующие свойства метода (2.1).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любого $\alpha > 0$ существует решение (u_1^α, u_2^α) задачи* (2.1), *для которого при связи параметра регуляризации с погрешностью δ*

$$\alpha(\delta) \to 0, \quad \delta^2/\alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0 \tag{2.9}$$

справедливы следующие свойства:

1) $\{u_1^{\alpha(\delta)}\}$ *— относительно компактно в пространстве L_q;*

2) $\{u_2^{\alpha(\delta)}\}$ *— относительно компактно при $1 \leqslant p < d/(d-1)$ и относительно слабо компактно при $p = d/(d-1)$, $d \geqslant 2$, в пространстве L_p;*

3) *какова бы ни была пара (u_1^α, u_2^α), являющаяся решением задачи* (2.1), *она определяет единственный элемент $u^\alpha = u_1^\alpha + u_2^\alpha$;*

4) *если $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ — предельные точки последовательностей, соответственно $\{u_1^{\alpha(\delta_k)}\}$, $\{u_2^{\alpha(\delta_k)}\}$ при $\delta_k \to 0$, то пара $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ — решение задачи* (2.8) *и, следовательно, $\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2$ — решение уравнения* (1.1);

5) *для стабилизирующего функционала* (2.7) *справедливо соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} \Omega(u_1^{\alpha(\delta_k)}, u_2^{\alpha(\delta_k)}) = \Omega(\hat{u}_1, \hat{u}_2). \tag{2.10}$$

Доказательство. Сначала убедимся в существовании решения задачи (2.1). Обозначим через $\Phi(u_1, u_2)$ целевой функционал в задаче (2.1) и зададим минимизирующую последовательность (u_1^k, u_2^k), для которой

$$\Phi(u_1^k, u_2^k) \to \Phi^* \ \text{при} \ k \to \infty. \tag{2.11}$$

Тогда при $\alpha > 0$ в силу [6, теорема 2.2] для некоторых c_i будут выполнены неравенства

$$\|u_1^k\| \leqslant c_1, \quad \|u_2^k\| \leqslant l^\beta(u_2^k) \leqslant c_2, \quad J(u_2^k) \leqslant J^\beta(u_2^k) \leqslant c_3, \tag{2.12}$$

что влечет в равномерно выпуклом пространстве существование слабо сходящейся подпоследовательности

$$u_1^{k_i} \to \bar{u}_1 \text{ (слабо) в } L_q. \tag{2.13}$$

На основании соотношений (2.12) и теоремы о компактном вложении пространства BV в L_p из [6, теорема 2.5] можно полагать, что

$$u_2^{k_i} \to \bar{u}_2 \text{ (сильно) в } L_p, \quad 1 \leqslant p < d/(d-1). \tag{2.14}$$

Поскольку для $\{u_2^{k_i}\}$ выполнены свойства (2.12), (2.14), то исходя из известных теорем функционального анализа, не ограничивая общность, можно считать, что

$$u_2^{k_i} \to \bar{u}_2 \text{ (почти всюду)}, \quad \lim_{i\to\infty} \int\limits_D \sqrt{|u_2^{k_i}(x)|^2 + \beta}\, dx = \bar{c}, \tag{2.15}$$

откуда в силу теоремы Фату следует

$$\int\limits_D \sqrt{|\bar{u}_2(x)|^2 + \beta}\, dx \leqslant \lim_{i\to\infty} \int\limits_D \sqrt{|u_2^{k_i}(x)|^2 + \beta}\, dx = \bar{c}. \tag{2.16}$$

Объединяя свойство (слабой) непрерывности оператора A, свойство полунепрерывности снизу функционала J^β [6, теорема 2.3] и соотношения (2.11)–(2.16), получаем цепочку неравенств

$$\Phi^* \leqslant \Phi(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \leqslant \liminf_{i\to\infty} \Phi(u_1^{k_i}, u_2^{k_i}) = \Phi^*,$$

подтверждающую, что $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ — решение задачи (2.1).

Переобозначим пару $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ через (u_1^α, u_2^α). Так как $\Omega(u_1, u_2)$ — функционал выпуклый, а из обратимости оператора A следует, что функционал $\phi(u) = \|Au - f_\delta\|_{L_2}^2$ — строго выпуклый, поэтому, какова бы ни была пара $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, реализующая минимум в задаче (2.1), сумма компонент определяет один и тот же элемент $u^\alpha = u_1^\alpha + u_2^\alpha$, что означает справедливость п. 3.

Пара (u_1^α, u_2^α) реализует минимум в задаче (2.1), следовательно, выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(u_1^\alpha, u_2^\alpha) &= \|A(u_1^\alpha + u_2^\alpha) - f_\delta\|^2 + \alpha[\|u_1^\alpha\|^2 + \Omega^\beta(u_2^\alpha)] \\ &\leqslant \|A(\hat{u}_1 + \hat{u}_2) - f_\delta\|^2 + \alpha[\|\hat{u}_1\|^2 + l^\beta(\hat{u}_2) + J^\beta(\hat{u}_2)], \end{aligned} \tag{2.17}$$

где $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ — решение задачи (2.8). Из (2.17) получаем оценку

$$\|u_1^\alpha\|^2 + l^\beta(u_2^\alpha) + J^\beta(u_2^\alpha) \leqslant \frac{\delta^2}{\alpha} + \|\hat{u}_1\|^2 + l^\beta(\hat{u}_2) + J^\beta(\hat{u}_2). \tag{2.18}$$

При выборе $\alpha(\delta_k)$ согласно (2.9) из (2.18) для $(u_1^{\alpha(\delta_k)}, u_2^{\alpha(\delta_k)})$ следует выполнимость аналогов неравенств (2.12) с некоторыми $\widetilde{c}_i$ и соотношений (2.13)–(2.16) с заменой $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ на $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$. Это означает существование подпоследовательности $(u_1^{\alpha(\delta_k)}, u_2^{\alpha(\delta_k)})$, для которой

$$u_1^{\alpha(\delta_k)} \to \widetilde{u}_1 \text{ (слабо) в } L_q,\ u_2^{\alpha(\delta_k)} \to \widetilde{u}_2 \text{ (сильно) в } L_p\,(1 \leqslant p < d/(d-1)), \tag{2.19}$$

что влечет

$$\|A(\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2) - f\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|A(u_1^{\alpha(\delta_k)} + u_2^{\alpha(\delta_k)}) - f\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} [\Phi(u_1^{\alpha(\delta_k)}, u_2^{\alpha(\delta_k)})]^{1/2}$$

$$\leqslant \limsup_{k\to\infty}[\Phi(\hat u_1,\hat u_2)]^{1/2} \leqslant \limsup_{k\to\infty}[\delta_k^2+\alpha(\delta_k)(\|\hat u_1\|^2+l^\beta(\hat u_2)+J^\beta(\hat u_2))]^{1/2}=0,$$

т. е. $\widetilde u=\widetilde u_1+\widetilde u_2$ — решение задачи (1.1). Из неравенства (2.18) приходим к соотношению

$$\|\widetilde u_1\|^2+\Omega^\beta(\widetilde u_2)\leqslant \liminf_{k\to\infty}[\|u_1^{\alpha(\delta_k)}\|^2+\Omega^\beta(u_2^{\alpha(\delta_k)})]$$

$$\leqslant \limsup_{k\to\infty}[\|u_1^{\alpha(\delta_k)}\|^2+\Omega^\beta(u_2^{\alpha(\delta_k)})]\leqslant \|\hat u_1\|^2+\Omega^\beta(\hat u_2), \tag{2.20}$$

т. е. $(\widetilde u_1,\widetilde u_2)$ — решение задачи (2.8), что доказывает п. 4. В силу полунепрерывности снизу входящих в стабилизатор функционалов из (2.20) следует сходимость норм $\lim\limits_{k\to\infty}\|u_1^{\alpha(\delta_k)}\|=\|\widetilde u_1\|$, что вместе с (2.19) влечет сильную сходимость $\lim\limits_{k\to\infty}\|u_1^{\alpha(\delta_k)}-\widetilde u_1\|=0$. Одновременно справедливость (2.20) означает сходимость (2.10), что завершает доказательство теоремы в целом. □

З а м е ч а н и е 1. Теоремы 1, 2 остаются справедливыми при замене в задаче (2.1) функционала $l^\beta(u_2)$ на $\|u_2\|_{L_r(D)}$, $1<r<\infty$. В этом случае дополнительно гарантируется единственность решения $(\hat u_1,\hat u_2)$ задачи (2.8) и решения (u_1^α,u_2^α) задачи (2.1).

3. Дискретная аппроксимация метода регуляризации

Модифицируем стабилизатор $\Omega^\beta(u)$ в задаче (2.1), заменив в нем $l^\beta(u)$ на $\|u\|_{L_r}^2$, а $J^\beta(u)$ на негладкую обобщенную вариацию $J(u)$, т. е. вместо $\Omega^\beta(u)$ теперь будет использоваться

$$\bar\Omega(u_2)=\|u_2\|_{L_r}^2+J(u_2),\quad 1<r<\infty. \tag{3.1}$$

При построении численных методов требуется этап дискретной аппроксимации исходной задачи (2.1) последовательностью конечномерных задач. В одномерном случае ($d=1$) в работе [8] была предложена и обоснована схема полудискретизации, основанная на кусочно-линейной аппроксимации только в пространстве решений. В этом разделе исследуется общая схема дискретной (конечно-разностной) аппроксимации задачи (2.1) (после замены $\Omega^\beta(u_2)$ на $\bar\Omega(u_2)$) с негладким стабилизирующим функционалом последовательностью конечномерных задач минимизации с выпуклыми дифференцируемыми целевыми функциями.

Рассмотрим в качестве D d-мерную область прямоугольных очертаний, например единичный куб. Построим сеточный аналог

$$\mathbb R_n^d=\{x\in\mathbb R^d\colon x=(j_1h,j_2h,\dots,j_dh),\ j_1,\dots,j_d=0;\pm1;\pm2;\dots\}$$

пространства $\mathbb R^d$ и введем сеточные функции $u_n:\mathbb R^d\to\mathbb R$, где $\mathbb R_n^d$ — n^d-мерное пространство векторов; индекс n означает, что $u_n(x)$ задана на сетке с шагом $h=1/n$ по каждой переменной. Определим семейство связывающих операторов

$$P=\Big\{p_n\colon p_n(u)=h^{-d}\int\limits_{\omega_d(x)}u(y)\,dy\Big\},$$

где $\omega_d(x)$ — элементарная ячейка h^d с узлом $x=(x_1,x_2,\dots,x_d)$, $\omega_d(x)=\{y\in\mathbb R^d: x_j-h<y_j\leqslant x_j,\ j=1,2,\dots,d\}$. Известно, что семейство операторов P образует дискретную аппроксимацию пространства $L_p(D)\,(1<p<\infty)$ последовательностью пространств l_p^n с нормой

$$\|u_n\|_{l_p^n}=\Big(\sum_{x\in D_n}h^d\,|u_n(x)|^p\Big)^{1/p},\quad D_n=D\cap\mathbb R^d,$$

и порождает дискретную и дискретную слабую сходимость элементов и операторов. Основные факты, касающиеся свойств дискретной сходимости, которые будут использоваться при обосновании общей схемы дискретной аппроксимации задачи (2.1), содержатся в [9–11].

Задаче (2.1), после замены $\Omega^\beta(u)$ на функционал $\bar{\Omega}(u)$, определяемый формулой (3.1), поставим в соответствие последовательность конечномерных задач:

$$\min\Big\{\|A_n(u_{1n}+u_{2n})-f_n\|^2_{l_2^n}+\alpha[\|u_{1n}\|^2_{l_q^n}+\|u_{2n}\|^2_{l_r^n}+J_n^{\beta_n}(u_{2n})]\colon u_{1n}\in l_q^n,\ u_{2n}\in l_r^n\Big\}=\Phi_n^*. \quad (3.2)$$

Здесь

$$J_n^{\beta_n}(u_{2n})=\sup\Big\{\sum_{x\in D_n}h^d\Big(-u_{2n}(x)\sum_{j=1}^d\partial_jv_n(x)+\sqrt{\beta_n(1-|v_n(x)|^2)}\Big)\colon |v_n(x)|\leqslant 1,$$
$$v_n\in C_0^1(D_n;\mathbb{R}_n^d)\Big\},$$

где

$$\partial_jv_n(x)=\frac{v_n(x)-v_n(x-h_je_j)}{h},\quad e_j=(0,\dots,\underbrace{1}_{j},0,\dots,0).$$

Введем обозначения “$-\to$” и “$-\to$ (слабо)” для дискретной и дискретной слабой сходимости, соответственно. Сохраним обозначения (u_1^α,u_2^α) для решения задачи (2.1) при $\beta=0$ и замене $l^\beta(u)$ на $\|u\|_{L_r}$ и обозначим через $(\bar{u}_{1n},\bar{u}_{2n})$ решение задачи (3.2).

Теорема 3. *Пусть для задач* (2.1) *и* (3.2) *выполнены условия дискретной аппроксимации*

$$A_n-\to A,\quad A_n-\to A\,(\textit{слабо}),\quad f_n-\to f^\delta, \quad (3.3)$$

где A, A_n — непрерывные операторы из L_r в L_2 и из l_r^n в l_2^n соответственно, и $\beta_n>0$, $\beta_n\to 0$. Тогда существует единственное решение $(\bar{u}_{1n},\bar{u}_{2n})$ задачи (3.2) *и имеет место дискретная сходимость*

$$\bar{u}_{1n}-\to u_1^\alpha,\quad \bar{u}_{2n}-\to u_2^\alpha, \quad (3.4)$$

а также сходимость обобщенных вариаций и оптимальных значений

$$\lim_{n\to\infty}J_n^{\beta_n}(\bar{u}_{2n})=J(u_2^\alpha),\quad \lim_{n\to\infty}\Phi_n^*=\Phi^*. \quad (3.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся в разрешимости задачи минимизации (3.2). Обозначим через $\Phi_n(u_{1n},u_{2n})$ ее целевую функцию. Пусть (u_{1n}^k,u_{2n}^k) — минимизирующая последовательность в задаче (3.2), т. е. $\Phi_n(u_{1n}^k,u_{2n}^k)\to\Phi_n^*$ при $k\to\infty$. Так как все слагаемые, входящие в $\Phi_n(u_{1n}^k,u_{2n}^k)$, положительны (см. [7, лемма 1] относительно положительности J_n^β), то найдутся сходящиеся подпоследовательности

$$\lim_{i\to\infty}\|u_{1n}^{k_i}-\bar{u}_{1n}\|_{l_r^n}=0,\quad \lim_{i\to\infty}\|u_{2n}^{k_i}-\bar{u}_{2n}\|_{l_q^n}=0. \quad (3.6)$$

Для любого вектора $v_n\in C_0^1(D_n,\mathbb{R}_n^d)$ имеем соотношения

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in D_n}h^d\Big(-\bar{u}_{2n}(x)\sum_{j=1}^d\partial_jv_n(x)+\sqrt{\beta_n(1-|v_n(x)|^2)}\Big)\\
&=\lim_{i\to\infty}\sum_{x\in D_n}h^d\Big(-u_{2n}^{k_i}(x)\sum_{j=1}^d\partial_jv_n(x)+\sqrt{\beta_n(1-|v_n(x)|^2)}\Big)\\
&\leqslant\liminf_{i\to\infty}\ \sup\Big\{\sum_{x\in D_n}h^d\Big(-u_{2n}^{k_i}(x)\sum_{j=1}^d\partial_jv_n(x)+\sqrt{\beta_n(1-|v_n(x)|^2)}\Big)\,:\,|v_n(x)|\leqslant 1\Big\}\\
&=\liminf_{i\to\infty}J_n^{\beta_n}(u_{2n}^{k_i}).
\end{aligned} \quad (3.7)$$

Переходя в левой части соотношений (3.7) к верхней грани по $v_n \in C_0^1(D_n, \mathbb{R}_n^d)$, получаем следующее свойство для $J_n^{\beta_n}(u_{2n})$:

$$J_n^{\beta_n}(\bar{u}_{2n}) \leqslant \liminf_{i\to\infty} J_n^{\beta_n}(u_{2n}^{k_i}). \tag{3.8}$$

Принимая во внимание непрерывность оператора A_n и установленные свойства (3.6), (3.8), приходим к неравенствам

$$\Phi_n^* \leqslant \Phi_n(\bar{u}_{1n}, \bar{u}_{2n}) \leqslant \liminf_{i\to\infty} \Phi_n(u_{1n}^{k_i}, u_{2n}^{k_i}) \leqslant \Phi_n^*;$$

это означает, что $(\bar{u}_{1n}, \bar{u}_{2n})$ — решение задачи (3.2). Единственность решения следует из выпуклости первого и четвертого слагаемого и строгой выпуклости второго и третьего.

Из леммы 2.1 [6] для любого $\varepsilon > 0$ найдутся функции $u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon} \in C^\infty(D)$ такие, что

$$\Phi^* = \Phi(u_1^\alpha, u_2^\alpha) \leqslant \Phi(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \leqslant \Phi^* + \varepsilon. \tag{3.9}$$

Покажем, что

$$\Phi(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(\bar{p}_n u_{1\varepsilon}, \bar{p}_n u_{2\varepsilon}), \tag{3.10}$$

где $\{\bar{p}_n\}$ — семейство операторов сноса на сетку, эквивалентное семейству $\{p_n\}$.

Введем обозначение $J_n = J_n^{\beta_n}$ при $\beta_n = 0$. Учитывая условия теоремы и свойства дискретной сходимости, достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} J_n^{\beta_n}(\bar{p}_n u_{2\varepsilon}) = J(u_{2\varepsilon}). \tag{3.11}$$

При доказательстве теоремы 4.1 из [12] было установлено, что

$$\lim_{n\to\infty} J_n(\bar{p}_n u_{2\varepsilon}) = J(u_{2\varepsilon}). \tag{3.12}$$

Объединяя следствие 1 к лемме 1 из [7] с (3.12), получаем (3.11) и, следовательно, (3.10).

На основании (3.9), (3.10) переходим к неравенствам

$$\limsup_{n\to\infty} \Phi_n^* = \limsup_{n\to\infty} \Phi_n(\bar{u}_{1n}, \bar{u}_{2n}) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \Phi_n(\bar{p}_n u_{1\varepsilon}, \bar{p}_n u_{2\varepsilon}) = \Phi(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \leqslant \Phi^* + \varepsilon,$$

что ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ влечет оценку

$$\limsup_{n\to\infty} \Phi_n^* \leqslant \Phi^*. \tag{3.13}$$

Из (3.13) вытекает ограниченность последовательностей $\{\bar{u}_{1n}\}$, $\{\bar{u}_{2n}\}$, значит, для некоторой подпоследовательности номеров $\{n'\} \subseteq \{n\}$

$$\bar{u}_{1n'} -\to \tilde{u}_1 \,(\text{слабо в})\; L_q, \quad \bar{u}_{2n'} -\to \tilde{u}_2 \,(\text{слабо в})\; L_r. \tag{3.14}$$

Из леммы 2 работы [7], (3.13), а также свойства дискретной сходимости, в том числе из

$$u_n -\to u \,(\text{слабо}) \Rightarrow \|u\|_U \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{U_n},$$

вытекает справедливость неравенств

$$\Phi^* \leqslant \Phi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \leqslant \liminf_{n'\to\infty} \Phi_{n'}(\bar{u}_{1n'}, \bar{u}_{2n'}) \leqslant \limsup_{n'\to\infty} \Phi_{n'}(\bar{u}_{1n'}, \bar{u}_{2n'}) \leqslant \limsup_{n'\to\infty} \Phi_{n'}^* \leqslant \Phi^*, \tag{3.15}$$

откуда следует вывод, что $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ — решение задачи (2.1), т. е. $\tilde{u}_1 = u_1^\alpha$, $\tilde{u}_2 = u_2^\alpha$.

Кроме того, неравенства (3.15) влекут соотношения (3.5), а также

$$\lim_{n'\to\infty} \|\hat{u}_{1n'}\|_{l_n^q}^2 = \|u_1^\alpha\|_{L_q}^2, \quad \lim_{n'\to\infty} \|\hat{u}_{2n'}\|_{l_n^r}^2 = \|u_2^\alpha\|_{L_r}^2,$$

что вместе с (3.14) ввиду дискретного свойства Ефимова — Стечкина [13, лемма 5.2] для равномерно выпуклых пространств означает дискретную сходимость конечно-разностных аппроксимаций $\hat{u}_{1n'} -\to u_1^\alpha$, $\hat{u}_{2n'} -\to u_2^\alpha$. В силу замечания 1 решение (u_1^α, u_2^α) задачи (2.1) определяется однозначно; справедливы и соотношения (3.4). □

4. Обоснование сходимости методов Ньютона и æ-процесса

Рассмотрим в одномерном случае конечномерную задачу (3.2), для определенности положив $q = r = 2$. Заметим, что целевая функция Φ_n является выпуклой и дифференцируемой. Используя необходимое условие экстремума, сводим задачу (3.2) к эквивалентной системе нелинейных уравнений

$$\nabla\Phi_n(u) = 0,$$

где $u = (u^1, u^2)^T$. Введем обозначение $B(u) = \nabla\Phi_n(u)$. Поскольку Φ_n — выпуклая функция, то согласно [14, лемма 4.10, гл. 3] оператор B — монотонный. В работе [15] для уравнения с монотонным оператором исследована сходимость регуляризованных методов Ньютона

$$u^{k+1} = u^k - \gamma[B'(u^k) + \varepsilon I]^{-1}(B(u^k) - \varepsilon(u^k - u^0))$$

и его модифицированного аналога, а также æ-процесса

$$u^{k+1} = u^k - \gamma\frac{\langle(B'(u^0) + \varepsilon I)^{æ}B_\varepsilon(u^k), B_\varepsilon(u^k)\rangle}{\langle(B'(u^0) + \varepsilon I)^{æ+1}B_\varepsilon(u^k), B_\varepsilon(u^k)\rangle}B_\varepsilon(u^k), \quad 1 \leqslant æ < \infty,$$

где $B_\varepsilon(u) = B(u) + \varepsilon(u - u^0)$, $B'(u^0)$ — самосопряженный неотрицательно определенный оператор.

Достаточным условием сходимости итераций к регуляризованному решению является условие Липшица для производной оператора исходной задачи в некотором шаре $S_r(u^0)$.

Теорема 4. *Для оператора $B(u) = \nabla\Phi_n(u)$ справедлива оценка*

$$\|B'(u) - B'(\bar{u})\| \leqslant N\|u - \bar{u}\|. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку первые три слагаемые в целевой функции задачи (3.2) являются квадратичными, то для обоснования сходимости итераций достаточно установить, что условие (4.1) выполняется для $B_1(u) = \nabla J_n^\beta(u)$, где $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)$. Оператор $B_1(u)$ имеет представление

$$B_1(u) = \left(-\frac{1}{h}\frac{u_1 - u_0}{\sqrt{(\frac{u_1-u_0}{h})^2 + \beta}}, \frac{1}{h}\Bigl(\frac{u_1 - u_0}{\sqrt{(\frac{u_1-u_0}{h})^2 + \beta}} - \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{(\frac{u_2-u_1}{h})^2 + \beta}}\Bigr), \dots, \frac{1}{h}\frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{(\frac{u_n-u_{n-1}}{h})^2 + \beta}}\right),$$

а его производная $B_1'(u)$ — симметричная трехдиагональная матрица, i-я строка которой имеет вид

$$\Biggl(0, \dots, -\frac{\beta}{h((\frac{u_i-u_{i-1}}{h})^2 + \beta)^{3/2}}, \underbrace{\frac{1}{h}\Bigl(\frac{\beta}{((\frac{u_i-u_{i-1}}{h})^2 + \beta)^{3/2}} + \frac{\beta}{h((\frac{u_{i+1}-u_i}{h})^2 + \beta)^{3/2}}\Bigr)}_{i},$$
$$-\frac{\beta}{h((\frac{u_{i+1}-u_i}{h})^2 + \beta)^{3/2}}, \cdots, 0\Biggr).$$

Чтобы убедиться в справедливости (4.1) для $B_1(u)$, достаточно получить оценку для модулей каждого из трех ненулевых элементов i-й строки матрицы $B_1'(u)$. Поясним получение оценки на примере первого ненулевого элемента i-й строки матрицы $B_1'(u) - B_1'(\bar{u})$. Для этого элемента воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях:

$$\left|\frac{\beta}{h((\frac{u_i-u_{i-1}}{h})^2 + \beta)^{3/2}} - \frac{\beta}{h((\frac{\bar{u}_i-\bar{u}_{i-1}}{h})^2 + \beta)^{3/2}}\right| = \left|\frac{\beta}{h}\,\frac{3\xi}{(\xi^2 + \beta)^{5/2}}\,\frac{u_i - u_{i-1} - \bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{h}\right|$$
$$\leqslant \frac{\beta}{h^2}\left|\frac{3\xi}{(\xi^2 + \beta)^{5/2}}\right|(|u_{i-1} - \bar{u}_{i-1}| + |u_i - \bar{u}_i|).$$

Далее, вычисляя максимум по ξ, получаем, что он достигается при $\xi = \pm\sqrt{\beta}/2$. Подставляя это значение ξ, приходим к оценке сверху

$$\frac{\beta}{h^2}\left|\frac{3\xi}{(\xi^2+\beta)^{5/2}}\right|(|u_{i-1}-\bar u_{i-1}|+|u_i-\bar u_i|) \leqslant \frac{48}{5^{5/2}\beta h^2}(|u_{i-1}-\bar u_{i-1}|+|u_i-\bar u_i|).$$

Применяя аналогичные неравенства к остальным элементам i-й строки, убеждаемся в справедливости следующей оценки

$$\|B_1'(u)-B_1'(\bar u)\| \leqslant \frac{192}{5^{5/2}\beta h^2}\|u-\bar u\|.$$

Кроме того, выполнено условие самосопряженности оператора (симметричности матрицы) и неотрицательной определенности $B_1'(u^0)$.

З а м е ч а н и е 2. Если вместо (3.2) используется дискретный вариант задачи (2.1), то потребуется аналогичная оценка для функции $l_n^\beta(u) = \sum_{i=0}^n h\sqrt{u_i^2+\beta}$. В этом случае $B_2(u) = \nabla l_n^\beta(u)$ — вектор с компонентами $hu_i/\sqrt{u_i^2+\beta}$, а $B_2'(u)$ — диагональная матрица с компонентами $h\beta/(u_i^2+\beta)^{3/2}$, для которой, применяя оценки, аналогичные оценкам в предыдущей теореме, получаем

$$\|B_2'(u)-B_2'(\bar u)\| \leqslant \frac{48h}{5^{5/2}\beta}\|u-\bar u\|.$$

Таким образом, для решения задач (2.1), (3.2) применимы сходящиеся итерационные методы Ньютона и нелинейные аналоги α-процессов (æ-процессы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gholami A., Hosseini S.M.** A balanced combination of Tikhonov and total variation regularization for reconstruction of piecewise-smooth signal // Signal Processing. 2013. Vol. 93, no. 7. P. 1945–1960. doi: 10.1016/j.sigpro.2012.12.008 .
2. **Gandes E.J., Romberg J., Tao T.** Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurments // Pure Appl. Math. 2006. Vol. 59, no. 8. P. 1207–1223. doi: 10.1002/cpa.20124 .
3. **Васин В.В.** Восстановление гладкой и разрывной компонент решения линейных некорректных задач // Докл. АН. 2013. Т. 448, № 2. С 127–130. doi: 10.7868/S0869565213020096 .
4. **Vasin V.V.** Regularization of ill-posed problems by using stabilizers in the form of the total variation of a function and its derivatives // J. Inverse Ill-Posed Problem. 2016. Vol. 24, no. 2. P. 149–158. doi: 10.1515/jiip-2015-0050 .
5. **Giusti E.** Minimal surfaces functions of bounded variation. Basel: Birkhäuser, 1984. (Ser. Monographs in Mathematics; vol. 80). doi: 10.1007/978-1-4684-9486-0 .
6. **Acar R., Vogel C.R.** Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems // Inverse Problems. 1994. Vol. 10, no. 6. P. 1217–1229. doi: 10.1088/0266-5611/10/6/003 .
7. **Васин В.В., Беляев В.В.** Аппроксимация компонент решения некорректных задач методом Тихонова с обобщенной вариацией // Докл. АН. 2018. Т. 480, № 6. С. 639–643. doi: 10.1134/S1064562418030250 .
8. **Vasin V.V., Belyaev V.V.** Modification of the Tikhonov method under separate reconstruction of components of solution with various properties // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2017. Vol. 5, iss. 2. P. 66–79.
9. **Vainikko G.** Functionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. Leipzig: Teugner Verlag, 1976. 136 S. doi: 10.1002/zamm.19780580410 .
10. **Grigorieff R.D.** Zur Theorie Approximations regularer Operatoren. I; II // Mathematische Nachrichten. 1973. Bd. 55, Nr. 3. S. 233–249; S. 251–263. doi: 10.1002/mana.19730550113 .
11. **Stummel F.** Diskrete Konvergentz linearer Operatoren. I // I Mathematische Annalen. 1970. Bd. 190, Nr. 1. S. 45–92. doi: 10.1007/BF01349967 ; Diskrete Konvergentz linearer Operatoren. II // Mathematische Zeitschrift. 1971. Bd. 120, Nr. 3. S. 231–264.

12. **Vasin V.V.** Regularization and iterative approximation for linear ill-posed problems in the space of functions of bounded variation // Proc. Steklov Inst. Math. 2002. Suppl. 1. P. 225–239.
13. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht, The Netherlsnds: VSP, 1995. 255 p.
14. **Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М. Мир, 1978. 336 с.
15. **Vasin V.V., Skurydina A.F.** Two-stage method of construction of regularizing algorithms for nonlinear ill-posed problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2018. Vol. 301, Suppl. 1. P. 173–190. doi: 10.1134/S0081543818050152 .

Поступила 18.04.2019
После доработки 8.07.2019
Принята к публикации 15.07.2019

Васин Владимир Васильевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Беляев Владимир Васильевич
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
ассистент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: beliaev_vv@mail.ru

REFERENCES

1. Gholami A., Hosseini S.M. A balanced combination of Tikhonov and total variation regularization for reconstruction of piecewise-smooth signal. *Signal Processing*, 2013, vol. 93, no. 7, pp. 1945–1960. doi: 10.1016/j.sigpro.2012.12.008 .
2. Gandes E.J., Romberg J., Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurments. *Pure Appl. Math.*, 2006, vol. 59, no. 8, pp. 1207–1223. doi: 10.1002/cpa.20124 .
3. Vasin V.V. Reconstruction of smooth and discontinuous components of solutions to linear ill-posed problems. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 87, no. 1, pp. 23–25. doi: 10.1134/S1064562413010146 .
4. Vasin V.V. Regularization of ill-posed problems by using stabilizers in the form of the total variation of a function and its derivatives. *J. Inverse Ill-Posed Problem*, 2016, vol. 24, no. 2, pp. 149–158. doi: 10.1515/jiip-2015-0050 .
5. Giusti E. *Minimal surfaces functions of bounded variation.* Basel, Birkhäuser, 1984, Ser. Monographs in Mathematics, vol. 80. doi: 10.1007/978-1-4684-9486-0 .
6. Acar R., Vogel C.R. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, 1994, vol. 10, no. 6, pp. 1217–1229. doi: 10.1088/0266-5611/10/6/003 .
7. Vasin V.V., Belyaev V.V. Approximation of solution components for ill-posed problems by the Tikhonov method with total variation. *Dokl. Math.*, 2018, vol. 97, no. 3, pp. 266–270. doi: 10.1134/S1064562418030250 .
8. Vasin V.V., Belyaev V.V. Modification of the Tikhonov method under separate reconstruction of components of solution with various properties. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2017, vol. 5, iss. 2, pp. 66–79.

9. Vainikko G. *Functionalanalysis der Diskretisierungsmethoden.* Leipzig: Teugner Verlag, 1976, 136 S. doi: 10.1002/zamm.19780580410 .
10. Grigorieff R.D. Zur Theorie Approximations regularer Operatoren. I; II. *Mathematische Nachrichten*, 1973, Bd. 55, Nr. 3, S. 233–249; S. 251–263. doi: 10.1002/mana.19730550113 .
11. Stummel F. Diskrete Konvergentz linearer Operatoren. I *Mathematische Annalen.* 1970. Bd. 190, Nr. 1. S. 45–92. doi: 10.1007/BF01349967 ; Diskrete Konvergentz linearer Operatoren. II *Mathematische Zeitschrift*, 1971, Bd. 120, Nr. 3, S. 231–264.
12. Vasin V.V. Regularization and iterative approximation for linear ill-posed problems in the space of functions of bounded variation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2002, Suppl. 1, pp. 225–239.
13. Vasin V.V., Ageev A.L. *Ill-posed problems with a priori information*, Utrecht, The Netherlsnds, VSP, 1995. 255 p.
14. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferential-gleichungen,* Berlin, Akademie-Verlag, 1974. 336 s. Translated to Russian under the title Gaevsky H., Gröger K., Zakharias K, Nonlinear operator equations and operator differential equations, Moscow: Mir Publ., 1978. 336 p.
15. Vasin V.V., Skurydina A.F. Two-stage method of construction of regularizing algorithms for nonlinear ill-posed problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 301, suppl. 1, pp. 173–190. doi: 10.1134/S0081543818050152 .

Received April 18, 2019
Revised July 8, 2019
Accepted July 15, 2019

Vladimir Vasil'evich Vasin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, email: vasin@imm.uran.ru .

Vladimir Vasil'evich Belyaev, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, email: beliaev_vv@mail.ru .

Cite this article as: V. V. Vasin, V. V. Belyaev. Analysis of a regularization algorithm for a linear operator equation containing a discontinuous component of the solution, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 34–44 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Л. А. Власенко, А. Г. Руткас, А. А. Чикрий

Изучается игровая задача сближения для системы, динамика которой описывается стохастическим дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве. Основное ограничение на уравнение состоит в том, что оператор при состоянии системы является генератором сильно непрерывной полугруппы (полугруппы класса C_0). Решения уравнения представляются с помощью стохастической формулы вариации постоянных. С использованием ограничений на опорные функционалы множеств, которые определяются поведением преследователя и убегающего, получены условия приведения состояния системы на цилиндрическое терминальное множество. Результаты иллюстрируются на модельном примере простого движения в гильбертовом пространстве при случайных возмущениях. Рассматриваются приложения к распределенным системам, описываемым стохастическими уравнениями в частных производных. С учетом случайного внешнего воздействия исследуется процесс распространения тепла с управляемыми распределенными тепловыми источниками и утечками.

Ключевые слова: дифференциальная игра, стохастическое дифференциальное уравнение, винеровский процесс, производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, многозначное отображение, опорный функционал, разрешающий функционал, стохастическое уравнение в частных производных.

L. A. Vlasenko, A. G. Rutkas, A. A. Chikrii. On a differential game in a stochastic system.

We study the game problem of approach for a system whose dynamics is described by a stochastic differential equation in a Hilbert space. The main assumption on the equation is that the operator multiplying the system state is the generator of a strongly continuous semigroup (a semigroup of class C_0). Solutions of the equation are represented by a stochastic formula of variation of constants. Using constraints on the support functionals of sets defined by the behavior of the pursuer and the evader, we obtain conditions for the approach of the system state to a cylindrical terminal set. The results are illustrated with a model example of a simple motion in a Hilbert space with random perturbations. Applications to distributed systems described by stochastic partial differential equations are considered. By taking into account a random external influence, we consider the heat propagation process with controlled distributed heat sources and leaks.

Keywords: differential game, stochastic differential equation, Wiener process, generator of a strongly continuous semigroup, set-valued mapping, support functional, resolving functional, stochastic partial differential equation.

MSC: 49N70, 47D03, 65C30

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-45-61

Введение

Уральская научная школа в области математической теории управления и теории динамических игр, основанная Николаем Николаевичем Красовским, является крупнейшим научным центром, хорошо известным среди специалистов. Исследования Н. Н. Красовского [1–5], созданные им фундаментальные методы стали основой для дальнейшего продвижения в этой области, осуществляемого его учениками и последователями (см., например, [6–8]). Ряд математических понятий, введенных в научный оборот уральскими учеными, стали ключевыми для многих научных работ. Такие термины, как позиционные дифференциальные игры, стабильные мосты, седловая точка в маленькой игре, правило экстремального прицеливания, экстремальный сдвиг, альтернатива, программные итерации, управление с поводырем активно используются специалистами. Одним из важнейших направлений исследований екатеринбургской научной школы являются стохастические дифференциальные игры. Подчас конфликт между противоборствующими сторонами осложняется влиянием различного рода случайных помех, что обуславливает рассмотрение конфликтно-управляемых случайных процессов. Изучению подобного рода проблем посвящен цикл работ Н. Н. Красовского, В. Е. Третьякова и их учеников [9–13].

Обзор по теории стохастических дифференциальных игр можно найти в книге [14]. Эти игры относятся к сосредоточенным системам, состояния которых описываются стохастическими дифференциальными уравнениями в конечномерных пространствах. Однако в ряде областей физики и техники динамика изучаемых процессов описывается стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных, как, например, при исследовании дифференциальных игр в [15]. В настоящей работе рассматриваются дифференциальные игры в распределенных системах, описываемые стохастическими дифференциально-операторными уравнениями, а также стохастическими уравнениями в частных производных, которые трактуются как стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых или банаховых пространствах. В статьях [16; 17] мы показали, как метод разрешающих функций [18; 19] распространяется на детерминированные распределенные системы. Это распространение получило название “метод разрешающих функционалов”. Для применения метода принципиальным является представление решения уравнения, допускающее аддитивное вхождение члена с начальными данными и блока управления. При определенных ограничениях на операторные коэффициенты уравнения такое представление дает стохастическая формула вариации постоянных.

Будем использовать следующие обозначения.

Y, U, V, H — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства;

$\|\cdot\|_Y$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ — соответственно норма и скалярное произведение в пространстве Y;

$\mathcal{L}(H, Y)$ — пространство ограниченных линейных операторов из H в Y, $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(Y, Y)$;

E — единичный оператор;

$L_2 = L_2(0, T; Y)$ — пространство интегрируемых по Бохнеру с квадратом нормы на $[0, T]$ Y-значных функций;

$W_2^k(0, T; Y)$ — пространство функций из $L_2(0, T; Y)$, у которых обобщенные производные до порядка k включительно принадлежат пространству $L_2(0, T; Y)$;

K^* — сопряженный оператор к оператору K.

В силу теоремы Петтиса [20] в сепарабельных пространствах понятия сильной и слабой измеримости эквивалентны. Поэтому в дальнейшем будем употреблять термин “измеримость”.

Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ — полное вероятностное пространство с неубывающим семейством σ-алгебр (потоком или фильтрацией) $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $0 \le s \le t \le T$. Через $\boldsymbol{M}$ обозначаем математическое ожидание относительно вероятностной меры P. Рассматриваем H-значный винеровский процесс $w(t) = w(t, \omega)$ на $[0, T]$, выходящий из нуля и согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}$, с ядерным симметричным положительным ковариационным оператором W, как в [21]. Через $\mathrm{tr}W$ обозначаем след оператора W. Имеем $\boldsymbol{M}w(t) = 0$ и $\boldsymbol{M}\|w(t)\|_H^2 = \mathrm{tr}W \cdot t$. Заметим, что в [22] рассматривался винеровский процесс с единичным ковариационным оператором, т. е. цилиндрическим винеровским процессом [23]. Обозначим через $L_2(0, T; \Omega; Y) = L_{2,\Omega}$ гильбертово пространство Y-значных измеримых случайных процессов $y(t, \omega)$, $0 \le t \le T$, $\omega \in \Omega$, удовлетворяющих условию $\displaystyle\int_0^T \boldsymbol{M}\|y(t, \omega)\|_Y^2 dt < \infty$, со скалярным произведением $\displaystyle\langle y_1, y_2\rangle_{L_{2,\Omega}} = \int_0^T \boldsymbol{M}\langle y_1(t), y_2(t)\rangle_Y dt$. Подпространство пространства $L_{2,\Omega}$, состоящее из $\mathcal{F}_t$-согласованных случайных процессов, обозначим через $L_2(0, T; \Omega; Y; \mathcal{F}_t)$.

Пусть $\mathcal{H}_2(\Omega; Y) = \mathcal{H}_2$ — гильбертово пространство Y-значных случайных величин $\xi = \xi(\omega)$, которые имеют конечный абсолютный момент второго порядка $\boldsymbol{M}\|\xi\|_Y^2 < \infty$, со скалярным произведением $\langle\xi_1, \xi_2\rangle_{\mathcal{H}_2} = \boldsymbol{M}\langle\xi_1, \xi_2\rangle_Y$. Если $\mathcal{F}_0$ — σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{F}$, то $\mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$ обозначает подпространство пространства $\mathcal{H}_2$, состоящее из $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин.

1. Постановка задачи и вспомогательные сведения

Динамика системы описывается стохастическим дифференциально-операторным уравнением в смысле Ито:

$$dy(t) = Ay(t)dt + [K_1u(t) - K_2v(t)]dt + \Lambda dw(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{1.1}$$

Относительно уравнения (1.1) предполагаем: замкнутый линейный оператор $A : D_A \subset Y \to Y$ порождает сильно непрерывную полугруппу $S(t)$ в Y (полугруппу класса C_0), область определения D_A оператора A плотна в Y; $K_1 \in \mathcal{L}(U, Y)$, $K_2 \in \mathcal{L}(V, Y)$, $\Lambda \in \mathcal{L}(H, Y)$; управления преследователя $u(t)$ и убегающего $v(t)$ суть случайные процессы $u(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; U; \mathcal{F}_t)$ и $v(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; V; \mathcal{F}_t)$. Стохастическое уравнение (1.1) также формально записывается в виде

$$y'(t) = Ay(t) + K_1u(t) - K_2v(t) + \Lambda w'(t),$$

где $w'(t)$ — обобщенная производная H-значного винеровского процесса, т. е. белый шум. Для уравнения (1.1) рассматриваем начальное условие

$$y(0) = \xi, \tag{1.2}$$

где $\xi = \xi(\omega) \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$. Если в (1.1) оператор Λ нулевой ($\Lambda = 0$), а $u(t)$ и $v(t)$ — неслучайные управления, то мы получаем уравнение

$$y'(t) = Ay(t) + K_1u(t) - K_2v(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

которое описывает детерминированную конфликтно-управляемую систему, как, например, в [16;17;24]. Его решения могут быть случайными процессами только за счет выбора случайного вектора $\xi = \xi(\omega)$ в начальном условии (1.2).

Решением начальной задачи (1.1), (1.2) назовем случайный процесс $y(t) \in L_2(0, T; \Omega; Y; \mathcal{F}_t)$ такой, что $Ay(t) \in L_2(0, T; \Omega; Y; \mathcal{F}_t)$ и выполняется равенство

$$y(t) - \xi = \int_0^t Ay(\tau)d\tau + \int_0^t [K_1u(\tau) - K_2v(\tau)]d\tau + \Lambda w(t), \quad \text{п.в.} \;\; t \in [0, T], \quad \omega \in \Omega.$$

Единственность решения начальной задачи (1.1), (1.2) будем понимать в смысле стохастической эквивалентности. Из определения следует, что случайный процесс $y(t, \omega)$ имеет непрерывную модификацию с вероятностью единица. Мы будем рассматривать непрерывную модификацию этого процесса. Нам понадобится вспомогательный результат о разрешимости стохастической начальной задачи (1.1), (1.2). Утверждение следующей леммы является стохастическим аналогом детерминированной формулы вариации постоянных из монографии [25, гл. 4, теорема 2.9].

Лемма 1. *Пусть оператор A является генератором C_0-полугруппы, значения случайной величины $\xi(\omega) \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$ принадлежат D_A, $\mathrm{Im}K_1 \subset D_A$, $\mathrm{Im}K_2 \subset D_A$, $\mathrm{Im}\Lambda \subset D_A$, $u(t) \in L_2(0, T; \Omega; U; \mathcal{F}_t)$, $v(t) \in L_2(0, T; \Omega; V; \mathcal{F}_t)$. Тогда с точностью до стохастической эквивалентности существует единственное решение $y(t)$ задачи* (1.1), (1.2), *которое задается стохастической формулой вариации постоянных с помощью полугруппы $S(t)$*:

$$y(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-\tau)[K_1u(\tau) - K_2v(\tau)]d\tau + \int_0^t S(t-\tau)\Lambda dw(\tau), \quad \textit{п.в.} \;\; t \in [0, T], \quad \omega \in \Omega. \tag{1.4}$$

Результаты, подобные лемме 1, можно найти в [21; 22]. При их доказательстве используются свойства стохастического интеграла (третьего слагаемого) в правой части формулы (1.4). Этот интеграл называют стохастической конволюцией [23]. В случае аналитической полугруппы $S(t)$ утверждение леммы применялось при исследовании стохастического оптимального управления в [26; 27]. Если рассматривать винеровский процесс с единичным ковариационным оператором, то дополнительно нужно потребовать, чтобы операторы Λ и $A\Lambda$ являлись операторами Гильберта — Шмидта (ср. с [22, гл. VII, теорема 2.2]).

Управлениям $u(t)$ и $v(t)$ отвечает решение $y(t) = y(t; u, v)$ начальной задачи (1.1), (1.2), существование и единственность которого гарантируют условия леммы 1. Всюду в дальнейшем будем предполагать выполнение этих условий. Подобно детерминистической ситуации в работах [16–18; 24], определим цель игры в стохастической системе (1.1), (1.2). *Допустимыми управлениями преследователя* $u(t)$ *и убегающего* $v(t)$ являются случайные процессы $u(t) \in L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t)$ и $v(t) \in L_2(0, T; \Omega; V, \mathcal{F}_t)$, принимающие значения из областей управления U_0 и V_0, которые предполагаются замкнутыми выпуклыми ограниченными множествами в пространствах случайных величин $\mathcal{H}_2(\Omega; U)$ и $\mathcal{H}_2(\Omega; V)$. Множества допустимых управлений преследователя и убегающего обозначим соответственно через U_1 и V_1. Понятно, что U_1 и V_1 — выпуклые замкнутые ограниченные множества в $L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t)$ и $L_2(0, T; \Omega; V, \mathcal{F}_t)$. Под целью игры в детерминированной системе (1.3), (1.2) понимают приведение состояния $y(t)$ на некоторое цилиндрическое терминальное множество $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \oplus \mathfrak{M}_1$ за конечное время в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего. Здесь $\mathfrak{M}_0$ — замкнутое линейное подпространство в Y, $\mathfrak{M}_1$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество из ортогонального дополнения $\mathfrak{M}_0^{\perp}$ к $\mathfrak{M}_0$ в Y. В дальнейшем будем пользоваться тем фактом, что выпуклое замкнутое ограниченное множество в гильбертовом пространстве является слабо компактным [20, разд. 2.9, 2.10]. Принимая во внимание, что решение стохастической системы есть случайный процесс, терминальное множество определим в пространстве Y-значных случайных величин:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{B}_d, \tag{1.5}$$

где $\mathfrak{H}_0$ — замкнутое линейное подпространство в $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$; $\mathfrak{B}_d$ — замкнутый шар из ортогонального дополнения $\mathfrak{H}_0^{\perp}$ к $\mathfrak{H}_0$ в $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ с центром в нуле и радиуса d. Если $d = 0$, то $\mathfrak{B}_d = \{0\}$. Обозначим через $\Pi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2(\Omega; Y))$ ортопроектор в $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ на $\mathfrak{H}_0^{\perp}$. Теперь следует дать определение того, что состояние $y(t)$ стохастической системы (1.1), (1.2) может быть переведено на стохастическое терминальное множество $\mathfrak{H}$ (1.5) в момент времени T_0, не превосходящий T. *Игру в системе* (1.1), (1.2) *можно завершить за время* T_0, если для любого допустимого управления убегающего $v(t) \in V_1$ найдется допустимое управление преследователя $u(t) \in U_1$, для которого $\|\Pi y(T_0; u, v)\|_{\mathcal{H}_2} \le d$.

2. Условия разрешимости стохастической дифференциальной игры

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняются условия леммы 1, гарантирующие существование и единственность решения стохастической задачи (1.1), (1.2). Нетрудно видеть, что игру в системе (1.1), (1.2) можно завершить за время T_0 тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\sup_{v \in V_1} \inf_{u \in U_1} \|\Pi y(T_0; u, v)\|_{\mathcal{H}_2} \le d.$$

Подразумевается, что время T является достаточно большим, так что $T \ge T_0$. Для доказательства достаточности этого неравенства воспользуемся тем, что непрерывный выпуклый функционал $f(u) = \|\Pi y(T_0; u, v)\|_{\mathcal{H}_2}$, определенный на гильбертовом пространстве $L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t)$, достигает своего минимума на выпуклом замкнутом ограниченном множестве U_1.

2.1. Схема метода разрешающих функционалов для дифференциальной игры в стохастической системе

Способность вычислять разрешающие функции или функционалы позволяет строить управления преследователя, обеспечивающие приведение состояния системы на терминальное множество. Покажем, как выглядит схема метода разрешающих функционалов для завершения игры в стохастической системе (1.1), (1.2). Будем пользоваться определениями и понятиями из теории многозначных отображений [28].

Рассмотрим многозначное отображение

$$Q(t,\tau,v)=\Pi S(t-\tau)[K_1U_0-K_2v],\quad Q\colon \Delta\times V_0\rightsquigarrow \mathcal{H}_2(\Omega;Y),\quad \Delta=\{(t,\tau)\colon 0\le\tau\le t<\infty\}. \tag{2.1}$$

Очевидно, что это отображение имеет ограниченные и выпуклые образы в $\mathcal{H}_2(\Omega;Y)$. Замкнутость образов следует из слабой компактности в гильбертовом $\mathcal{H}_2(\Omega;U)$ выпуклого замкнутого ограниченного множества U_0. Предположим, что $0\in Q(t,\tau,v)$ для $(t,\tau,v)\in\Delta\times V_0$. Этот случай имеет место в рассматриваемых нами приложениях. Введем в рассмотрение случайный процесс

$$\zeta(t)=\zeta(t,\omega)=\Pi S(t)\xi+\Pi\int_0^t S(t-\tau)\Lambda dw(\tau). \tag{2.2}$$

Понятно, что $\zeta(t)\in L_2(0,T;\Omega;Y;\mathcal{F}_t)$.

Чтобы определить *разрешающий функционал*, рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{L}(t,\tau,v)=\{\widetilde{\alpha}\ge 0\colon Q(t,\tau,v)\cap\widetilde{\alpha}[\mathfrak{B}_d-\zeta(t)]\ne\varnothing\},\quad \mathfrak{L}:\Delta\times V_0\rightsquigarrow\mathbb{R}^1. \tag{2.3}$$

Это отображение имеет непустые образы. Замкнутость образов следует из слабой компактности множеств $\mathfrak{B}_d$ и Q. Если $\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}\le d$, то $\mathfrak{L}(t,\tau,v)=[0,\infty)$; в противном случае многозначное отображение $\mathfrak{L}$ имеет ограниченные и выпуклые образы. Разрешающий функционал есть опорный функционал многозначного отображения (2.3) в направлении $+1$:

$$\alpha(t,\tau,v)=\sup\{\widetilde{\alpha}\ge 0\colon Q(t,\tau,v)\cap\widetilde{\alpha}[\mathfrak{B}_d-\zeta(t)]\ne\varnothing\},\quad \alpha:\Delta\times V_0\to\mathbb{R}^1. \tag{2.4}$$

Если $\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}\le d$, то $\alpha(t,\tau,v)=\infty$; если $\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}>d$, то в силу компактности образов $\mathfrak{L}(t,\tau,v)$ (2.3) точная верхняя грань в (2.4) достигается.

Если $\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}>d$, то мы предполагаем, что для $v(\tau)\in V_1$ функция $\alpha(t,\tau,v(\tau))$ является измеримой по $\tau\in[0,t]$. Определим следующее множество моментов времени:

$$\Upsilon=\{t\in[0,T]\colon \|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}\le d\}\cup\left\{t\in[0,T]\colon \|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}>d\wedge \inf_{v\in V_1}\int_0^t\alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau\ge 1\right\}. \tag{2.5}$$

Пусть множество Υ (2.5) не является пустым и $T_0\in\Upsilon$. Рассмотрим многозначные отображения из $[0,T_0]\times V_0$ в $\mathcal{H}_2(\Omega;Y)$:

$$G_1(\tau,v)=\{u\in U_0\colon \Pi S(T_0-\tau)[K_1u-K_2v]=0\}, \tag{2.6}$$

$$G_2(\tau,v)=\{u\in U_0\colon \Pi S(T_0-\tau)[K_1u-K_2v]\in\alpha(T_0,\tau,v)[\mathfrak{B}_d-\zeta(T_0)]\}. \tag{2.7}$$

Предположим, что $\|\zeta(T_0)\|_{\mathcal{H}_2}\le d$, т. е. $\zeta(T_0)\in\mathfrak{B}_d$. Тогда на промежутке $[0,T_0]$ при допустимом управлении убегающего $v(\tau)$ управление преследователя $u(\tau)$ положим равным селектору $g_1(\tau)\in L_2(0,T;\Omega;U;\mathcal{F}_t)$ многозначного отображения $G_1(\tau,v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя $\Pi y(T_0)=\zeta(T_0)\in\mathfrak{B}_d$ и, следовательно, игра в системе (1.1), (1.2) будет завершена в момент T_0.

Пусть$\|\zeta(T_0)\|_{\mathcal{H}_2} > d$ и $v(\tau)$ — допустимое управление убегающего на промежутке $[0,T_0]$. Ищем момент времени $t_* \in (0,T_0]$ такой, что

$$\int\limits_0^{t_*} \alpha(T_0,\tau,v(\tau))d\tau = 1. \tag{2.8}$$

В качестве управления преследователя $u(\tau)$ на промежутке $[0,t_*)$ возьмем селектор $g_2(\tau) \in L_2(0,T;\Omega;U,\mathcal{F}_t)$ многозначного отображения $G_2(\tau,v(\tau))$, а на промежутке $[t_*,T_0]$ — селектор $g_1(\tau) \in L_2(0,T;\Omega;U,\mathcal{F}_t)$ многозначного отображения $G_1(\tau,v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя справедливы соотношения

$$\Pi y(T_0) = \zeta(T_0) + \int\limits_0^{t_*} \Pi S(T_0-\tau)[K_1 g_2(\tau) - K_2 v(\tau)]d\tau + \int\limits_{t_*}^{T_0} \Pi S(T_0-\tau)[K_1 g_1(\tau) - K_2 v(\tau)]d\tau$$

$$= \zeta(T_0) + \int\limits_0^{t_*} \Pi S(T_0-\tau)[K_1 g_2(\tau) - K_2 v(\tau)]d\tau \in \zeta(T_0) + \int\limits_0^{t_*} \alpha(T_0,\tau,v(\tau))[\mathfrak{B}_d - \zeta(T_0)]d\tau$$

$$= \int\limits_0^{t_*} \alpha(T_0,\tau,v(\tau))\mathfrak{B}_d d\tau \subset \mathfrak{B}_d,$$

где интеграл от многозначного отображения понимается в смысле Ауманна, т. е. как множество интегралов от интегрируемых селекторов. Следовательно, состояние $y(t)$ системы (1.1), (1.2) будет приведено на терминальное множество $\mathfrak{H}$ (1.5) в момент времени T_0.

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 1. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (1.1), (1.2) *с терминальным множеством* $\mathfrak{H}$ (1.5) *выполняются следующие предположения: оператор A является генератором C_0-полугруппы; случайная величина $\xi(\omega) \in \mathcal{H}_2(\Omega;Y;\mathcal{F}_0)$ принимает значения в D_A;* $\mathrm{Im}K_1 \subset D_A$, $\mathrm{Im}K_2 \subset D_A$, $\mathrm{Im}\Lambda \subset D_A$; $0 \in Q(t,\tau,v)$ (2.1) *для всех* $(t,\tau,v) \in \Delta \times V_0$; *если $\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2} > d$, то для $v(\tau) \in V_1$ функция $\alpha(t,\tau,v(\tau))$ является измеримой по $\tau \in [0,t]$; множество моментов времени* Υ (2.5) *не является пустым; для $v(\tau) \in V_1$ многозначные отображения $G_1(\tau,v(\tau))$, $G_2(\tau,v(\tau))$, где G_1, G_2 определены в* (2.6), (2.7), *имеют селекторы $g_1(\tau) \in L_2(0,T;\Omega;U;\mathcal{F}_t)$ и $g_2(\tau) \in L_2(0,T;\Omega;U,\mathcal{F}_t)$.*

Тогда состояние $y(t)$ системы (1.1), (1.2) *может быть приведено на терминальное множество* $\mathfrak{H}$ (1.5) *в момент $T_0 \in \Upsilon$.*

2.2. Время завершения игры в стохастической системе

Из схемы метода разрешающих функционалов видно, что для определения времени окончания игры и построения управления преследователя необходимо вычислить разрешающий функционал (2.4). Нижеследующие условия позволяют до вычисления разрешающего функционала установить существование моментов окончания игры.

Для фиксированного $T_0 \in [0,T]$ определим операторы $M_1 \in \mathcal{L}(L_2(0,T;\Omega;U,\mathcal{F}_t),\mathcal{H}_2(\Omega;Y))$ и $M_2 \in \mathcal{L}(L_2(0,T;\Omega;V,\mathcal{F}_t),\mathcal{H}_2(\Omega;Y))$ равенствами

$$M_1 u = \Pi \int\limits_0^{T_0} S(T_0-\tau)K_1 u(\tau)d\tau, \quad M_2 v = -\Pi \int\limits_0^{T_0} S(T_0-\tau)K_2 v(\tau)d\tau. \tag{2.9}$$

Рассмотрим выпуклые замкнутые ограниченные множества

$$\Omega_u = M_1 U_1 \subset \mathcal{H}_2(\Omega;Y), \quad \Omega_v = M_2 V_1 \subset \mathcal{H}_2(\Omega;Y), \tag{2.10}$$

и их опорные функционалы

$$\varphi_u(h) = \sup_{z\in\Omega_u} \langle h, z\rangle_{\mathcal{H}_2}, \quad \varphi_v(h) = \sup_{z\in\Omega_v} \langle h, z\rangle_{\mathcal{H}_2}. \tag{2.11}$$

Укажем условия завершения игры в системе (1.1), (1.2) с терминальным множеством $\mathfrak{H}$ (1.5) за время T_0.

Теорема 2. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (1.1), (1.2) *с терминальным множеством* $\mathfrak{H}$ (1.5) *выполняются следующие предположения: оператор A является генератором C_0-полугруппы; случайная величина $\xi(\omega) \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$ принимает значения в D_A;* $\mathrm{Im}K_1 \subset D_A$, $\mathrm{Im}K_2 \subset D_A$, $\mathrm{Im}\Lambda \subset D_A$.

Для того чтобы игру в системе (1.1), (1.2) *можно было завершить к моменту времени T_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\varphi_v(h) - \varphi_u(-h) \le d - \langle h, \zeta(T_0)\rangle_{\mathcal{H}_2} \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y) \colon \|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1, \tag{2.12}$$

где φ_u, φ_v — опорные функционалы (2.11) *множеств Ω_u, Ω_v* (2.10)*; случайный процесс $\zeta(t)$ определен в* (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем неравенство (2.12) в эквивалентной форме. В силу леммы 1 для любых управлений $u \in U_1$, $v \in V_1$ существует единственное решение $y(t; u, v)$ (1.4) задачи (1.1), (1.2), причем

$$\Pi y(T_0; u, v) = M_1 u + M_2 v + \zeta(T_0), \tag{2.13}$$

где операторы $M_1 \in \mathcal{L}(L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t), \mathcal{H}_2(\Omega; Y))$, $M_2 \in \mathcal{L}(L_2(0, T; \Omega; V, \mathcal{F}_t), \mathcal{H}_2(\Omega; Y))$ определены в (2.9), а случайный процесс $\zeta(t)$ — в (2.2). Для любого $h \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ справедливо равенство

$$\langle h, \Pi y(T_0; u, v)\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle h, M_1 u\rangle_{\mathcal{H}_2} + \langle h, M_2 v\rangle_{\mathcal{H}_2} + \langle h, \zeta(T_0)\rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Обозначим

$$p(h) = \sup_{v\in V_1} \inf_{u\in U_1} \langle h, \Pi y(T_0; u, v)\rangle_{\mathcal{H}_2} = \inf_{u\in U_1} \sup_{v\in V_1} \langle h, \Pi y(T_0; u, v)\rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Справедливо соотношение

$$p(h) = \varphi_v(h) - \varphi_u(-h) + \langle h, \zeta(T_0)\rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Следовательно, неравенство (2.12) эквивалентно неравенству

$$p(h) \le d \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y) \colon \|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1. \tag{2.14}$$

Докажем *необходимость*. Покажем, что если игру можно завершить за время T_0, то выполняется неравенство (2.12). Предположим противное, т. е. существует $h \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ с $\|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ такой, что выполняется неравенство

$$\langle h, \zeta(T_0)\rangle_{\mathcal{H}_2} + \varphi_v(h) - \varphi_u(-h) > d. \tag{2.15}$$

Так как множество V_1 слабо компактно, то точная верхняя грань в определении опорного функционала $\varphi_v(h)$ (2.11) достигается: $\varphi_v(h) = \langle h, M_2 v_0\rangle_{\mathcal{H}_2}$, $v_0 \in V_1$. Это позволяет неравенство (2.15) переписать в виде

$$\langle h, \Pi y(T_0; u, v_0)\rangle_{\mathcal{H}_2} > d \quad \forall u \in U_1.$$

Тогда имеем управление убегающего $v_0 \in V_1$ такое, что при любом выборе управления преследователя $u \in U_1$ выполняется неравенство

$$\|\Pi y(T_0; u, v_0)\|_{\mathcal{H}_2} > d, \tag{2.16}$$

что противоречит возможности завершения игры за время T_0. Таком образом, необходимость неравенства (2.12) доказана.

Теперь докажем *достаточность*. Покажем, что если выполняется неравенство (2.12), то игру можно завершить за время T_0. Предположим противное, т. е. найдется управление убегающего $v_0 \in V_1$ такое, что при любом выборе управления преследователя $u \in U_1$ выполняется неравенство (2.16). Непрерывный выпуклый функционал $f(u) = \|\Pi y(T_0; u, v_0)\|_{\mathcal{H}_2}$, определенный на гильбертовом пространстве $L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t)$, достигает своего минимума на выпуклом замкнутом ограниченном множестве U_1. Следовательно, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что удовлетворяется неравенство $\min\limits_{u \in U_1} f(u) > d + \varepsilon$. В силу представления (2.13) для $v = v_0$ получаем, что в пространстве $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ выпуклое множество $M_1 U_1 + M_2 v_0 + \zeta(T_0)$ и замкнутый шар $\mathfrak{B}_{d+\varepsilon}$ с центром в нуле и радиуса $d + \varepsilon$ не пересекаются. Из теоремы отделимости [20, разд. 2.6] заключаем, что найдется единичный вектор $h \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ такой, что

$$\inf_{u \in U_0} \langle h, \Pi y(T_0; u, v_0) \rangle_{\mathcal{H}_2} \geq \sup_{z \in B_{d+\varepsilon}} \langle h, z \rangle_{\mathcal{H}_2} \geq d + \varepsilon > d.$$

Отсюда следует, что неравенство (2.14) не выполняется, а это противоречит предположению. На этом доказательство теоремы завершается.

3. Приложения

Ряд фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных можно получить, исходя из общих положений теории дифференциально-операторных уравнений в абстрактных банаховых или гильбертовых пространствах. Рассмотрим приложения полученных результатов к двум моделям.

3.1. Модель простого движения в гильбертовом пространстве при случайных возмущениях

Процесс простого движения преследователя и убегающего после замены переменных записывается в виде $y'(t) = u(t) - v(t)$ [18]. Мы будем рассматривать этот процесс в сепарабельном гильбертовом пространстве, а также предполагать наличие случайного возмущения в виде аддитивного белого шума. Таким образом, динамика системы описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве Y с H-значным винеровским процессом $w(t)$:

$$dy(t) = [u(t) - v(t)]dt + \Lambda dw(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.1}$$

Начальное состояние системы определяем с помощью (1.2), где $\xi \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$; $\Lambda \in \mathcal{L}(H, Y)$. Случайные процессы из множеств U_1 и V_1 допустимых управлений преследователя $u(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; Y, \mathcal{F}_t)$ и убегающего $v(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; Y, \mathcal{F}_t)$ для почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют ограничениям $\boldsymbol{M}\|u(t, \omega)\|_Y^2 \leq \varrho_1^2$ и $\boldsymbol{M}\|v(t, \omega)\|_Y^2 \leq \varrho_2^2$, $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 > 0$. *Игру в системе* (3.1), (1.2) *можно завершить за время* T_0, если для любого допустимого управления убегающего $v \in V_1$ существует допустимое управление преследователя $u \in U_1$, для которого состояние системы $y(t, \omega)$ в момент времени T_0 будет переведено в ноль.

Здесь $Y = U = V$, A — нулевой оператор, $K_1 = K_2 = E$, $S(t) = E$. Терминальное множество (1.5) состоит из нулевого вектора $\mathfrak{H} = \{0\}$, $\mathfrak{H}_0 = \{0\}$, $\mathfrak{B}_d = \{0\}$, $d = 0$, $\Pi = E$ — единичный оператор. Множества U_0 и V_0 суть замкнутые шары в пространстве случайных величин $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ с центрами в нуле и радиусами ϱ_1 и ϱ_2. Исключим тривиальный случай и предположим, что начальное состояние ξ отлично от нуля.

Множество всех моментов времени, за которые можно завершить игру, определим с помощью теоремы 2. Случайный процесс $\zeta(t)$ (2.2) есть

$$\zeta(t) = \xi + \Lambda w(t).$$

Винеровский процесс $w(t)$ $(t > 0)$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_0$, относительно которой измеримо начальное состояние ξ. Имеем

$$\|\zeta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2} = \|\xi(\omega) + \Lambda w(t,\omega)\|^2_{\mathcal{H}_2} = \boldsymbol{M}\|\xi\|^2_Y + \boldsymbol{M}\|\Lambda w(t)\|^2_Y \le \boldsymbol{M}\|\xi\|^2_Y + t\|\Lambda\|^2 \mathrm{tr} W. \qquad (3.2)$$

Точная верхняя грань в определении опорных функционалов $\varphi_u(h), \varphi_v(h)$ (2.11) достигается, и мы имеем представления

$$\varphi_u(h) = \varrho_1 T_0 \|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \varphi_v(h) = \varrho_2 T_0 \|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Действительно, если $h \ne 0$, то

$$\begin{aligned}
\varphi_u(h) = &\sup_{u \in U_1} \langle h(\omega), \int_0^{T_0} u(\tau,\omega)d\tau\rangle_{\mathcal{H}_2} = \int_0^{T_0} \langle h(\omega), u_0(\tau,\omega)\rangle_{\mathcal{H}_2} d\tau \\
= &\varrho_1 \int_0^{T_0} \|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2} d\tau = \varrho_1 T_0 \|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2}, \quad u_0(\tau,\omega) = \frac{\varrho_1 h(\omega)}{\|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2}}; \\
\varphi_v(h) = &\sup_{v \in V_1} \langle -h(\omega), \int_0^{T_0} v(\tau,\omega)d\tau\rangle_{\mathcal{H}_2} = \varrho_2 T_0 \|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}$$

Необходимое и достаточное условие (2.12) завершения игры в системе (3.1), (1.2) в момент времени T_0 принимает вид

$$(\varrho_1 - \varrho_2) T_0 \ge \langle h(\omega), \zeta(T_0,\omega)\rangle_{\mathcal{H}_2} \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y)\colon \|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1.$$

Тогда множество всех моментов времени T_0, за которые можно завершить игру, удовлетворяет неравенству

$$(\varrho_1 - \varrho_2) T_0 \ge \|\zeta(T_0,\omega)\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Если $\varrho_1 < \varrho_2$, то игру невозможно завершить. Пусть $\varrho_1 > \varrho_2$. С помощью (3.2) получаем, что игру в системе (3.1), (1.2) можно завершить в момент времени T_0 тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$(\varrho_1 - \varrho_2) T_0 \ge \sqrt{\boldsymbol{M}\|\xi\|^2_Y + \boldsymbol{M}\|\Lambda w(T_0)\|^2_Y}. \qquad (3.3)$$

С учетом (3.2), (3.3) заключаем, что для завершения игры в системе (3.1), (1.2) достаточно выбрать моменты времени T_0, удовлетворяющие неравенству

$$T_0 \ge \frac{\|\Lambda\|^2 \mathrm{tr} W + \sqrt{\|\Lambda\|^4 \mathrm{tr}^2 W + 4(\varrho_1 - \varrho_2)^2 \boldsymbol{M}\|\xi\|^2_Y}}{2(\varrho_1 - \varrho_2)^2} \doteq T^*. \qquad (3.4)$$

Например, если $\Lambda = \lambda E$, где λ — константа, то $\|\Lambda\| = |\lambda|$ и неравенство (3.4) является необходимым и достаточным для завершения игры в момент времени T_0. Отрезок времени $[0, T]$, на котором изучается игра, предполагается достаточно большим, так что $T \ge T^*$.

Теперь покажем, как выбрать допустимое управление преследователя при любом допустимом управлении убегающего, чтобы завершить игру в системе (3.1), (1.2). Здесь $Q(t,\tau,v)$ (2.1) есть замкнутый шар в $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ с центром $-v$ и радиуса ϱ_1, причем $0 \in Q(t,\tau,v)$. Разрешающий функционал (2.4) имеет вид

$$\alpha(t,\tau,v) = \frac{\langle \zeta(t), v\rangle_{\mathcal{H}_2} + \sqrt{\langle \zeta(t), v\rangle^2_{\mathcal{H}_2} + \|\zeta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2}(\varrho_1^2 - \|v\|^2_{\mathcal{H}_2})}}{\|\zeta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2}}. \qquad (3.5)$$

Уточним вид множества Υ (2.5):

$$\Upsilon = \Big\{ t \in [0, T] \colon \inf_{v \in V_1} \int_0^t \alpha(t, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1 \Big\}.$$

Тогда множество Υ есть

$$\Upsilon = \Big\{ t \in [0, T] \colon t \geq \frac{\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}}{\varrho_1 - \varrho_2} \Big\}.$$

За счет выбора достаточно большого $T \geq T^*$ это множество не является пустым. Например, $T_0 \in \Upsilon$ можно выбрать с помощью неравенства (3.4).

Отображения (2.6), (2.7) принимают вид

$$G_1(\tau, v) = v, \quad G_2(\tau, v) = v - \alpha(T_0, \tau, v)\zeta(T_0).$$

Для допустимого управления убегающего $v(\tau) \in V_1$ ищем момент времени $t_* \in (0, T_0]$ такой, что выполняется соотношение (2.8). В качестве управления преследователя на промежутке $[0, t_*)$ возьмем $u(\tau) = v(\tau) - \alpha(T_0, \tau, v(\tau))\zeta(T_0)$, а на промежутке $[t_*, T_0]$ возьмем $u(\tau) = v(\tau)$.

Доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (3.1), (1.2) *выполняются следующие предположения: области управления* U_0 *и* V_0 *суть замкнутые шары в пространстве случайных величин* $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ *с центрами в нуле и радиусами* ϱ_1 *и* ϱ_2, $\varrho_1 > \varrho_2$; *момент времени* T *является достаточно большим* $T \geq T^*$ (3.4); $\xi \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$, $\boldsymbol{M}\|\xi\|_Y^2 \neq 0$; $\Lambda \in \mathcal{L}(H, Y)$.

Тогда при любом допустимом управлении $v(t, \omega) = v(t) \in V_1$ *траектория системы* (3.1), (1.2) *может быть приведена в ноль за время* T_0, *удовлетворяющее* (3.3), *с помощью допустимого управления* $u(t, \omega) = u(t) \in U_1$ *вида*

$$u(t) = \begin{cases} v(t) - \alpha(T_0, t, v(t))\zeta(T_0), & t \in [0, t_*), \\ v(t), & t \in [t_*, T_0], \end{cases}$$

где момент t_* *переключения управления удовлетворяет соотношению* (2.8) *с разрешающим функционалом* $\alpha(t, \tau, v)$ (3.5).

3.2. Стохастический конфликтно-управляемый процесс теплопроводности

В [17] исследовалась детерминированная дифференциальная игра для процесса распространения тепла в стационарной однородной среде с управляемыми распределенными тепловыми источниками и утечками. Здесь мы изучаем процесс теплопроводности со случайными источником (управление преследователя) и утечкой (управление убегающего). В области $[0, T] \times [0, \pi]$ рассматриваем смешанную задачу

$$dy(t, x, \omega) = \Big[\frac{\partial^2 y(t, x.\omega)}{\partial x^2} + K(u(t, x, \omega) - v(t, x, \omega)) \Big] dt + \Lambda dw(t, x, \omega), \tag{3.6}$$

$$y(t, 0, \omega) = y(t, \pi, \omega) = 0, \quad y(0, x, \omega) = \xi(x, \omega). \tag{3.7}$$

В (3.6), (3.7) предполагаем: $w(t, x, \omega)$ — винеровский процесс со значениями в пространстве $L_2(0, \pi)$, согласованный с потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$, вложенных в $\mathcal{F}$, где $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ — вероятностное пространство (см. введение); функция $\xi(x, \omega)$ измерима относительно произведения борелевской σ-алгебры подмножеств из $[0,\pi]$ на $\mathcal{F}_0$; управляющие воздействия преследователя и убегающего $u(t,x,\omega)$ и $v(t,x,\omega)$ измеримы и при фиксированном $t \in [0,T]$ измеримы по (x,ω) относительно произведения борелевской σ-алгебры подмножеств из $[0,\pi]$ на $\mathcal{F}_t$;

$$\int\limits_0^\pi \boldsymbol{M}|\xi(x,\omega)|^2 dx < \infty, \quad K \in \mathcal{L}(L_2(0,\pi)),$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^\pi \boldsymbol{M}|u(t,x,\omega)|^2 dxdt < \infty, \quad \int\limits_0^T \int\limits_0^\pi \boldsymbol{M}|v(t,x,\omega)|^2 dxdt < \infty.$$

Допустимые управления преследователя (источника) U_1 и убегающего (утечки) V_1 удовлетворяют ограничениям

$$\int\limits_0^\pi \boldsymbol{M}\ |u(t,x,\omega)|^2 dx \le \varrho_1^2, \quad \int\limits_0^\pi \boldsymbol{M}|v(t,x,\omega)|^2 dx \le \varrho_2^2.$$

Следовательно, области управления U_0, V_0 суть замкнутые шары в $\mathcal{H}_2(\Omega, L_2(0,\pi))$ с центрами в нуле и радиусами ϱ_1, ϱ_2 соответственно. Модели белого шума для стохастического уравнения теплопроводности предлагались в [29; 30], где в качестве $w(t)$ рассматривались либо стандартный скалярный винеровский процесс, либо винеровский процесс со значениями в пространстве L_2. *Цель игры в системе* (3.6), (3.7) состоит в приведении состояния $y(t,x,\omega)$ на некоторое терминальное множество за конечное время, не превосходящее T, в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего.

В вещественном пространстве $Y = U = V = H = L_2(0,\pi)$ смешанная задача (3.6), (3.7) трактуется как задача Коши (1.1), (1.2) для стохастического уравнения в смысле Ито с оператором

$$Aq = \frac{d^2q(x)}{dx^2}, \quad D_A = \{q(x) \in W_2^2(0,\pi),\ q(0) = q(\pi) = 0\},$$

и операторами $K_1 = K_2 = K \in \mathcal{L}(L_2(0,\pi))$. Решение смешанной задачи (3.6), (3.7) будем понимать в смысле решения соответствующей абстрактной задачи (1.1), (1.2). Спектр оператора A состоит из простых собственных чисел $\lambda_k = -k^2$, которым отвечает полная ортонормированная система собственных функций $e_k(x) = \sqrt{2/\pi}\sin kx$. Через q_k мы обозначаем коэффициенты Фурье в разложении функции $q(x) \in L_2(0,\pi)$ по функциям базиса:

$$q(x) = \sum_{k=1}^\infty q_k e_k(x), \quad q_k = \int\limits_0^\pi q(x)e_k(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Оператор A есть генератор полугруппы класса C_0:

$$S(t)q = \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2 t} q_k e_k(x). \tag{3.8}$$

Пусть также выполняются ограничения: $\xi(x,\omega) \in D_A$ для почти всех $\omega \in \Omega$, $\mathrm{Im}K, \mathrm{Im}\Lambda \subset D_A$. Сделанные предположения гарантируют выполнение условий леммы 1. Поэтому существует единственное решение $y(t,x,\omega)$ (1.4) смешанной задачи (3.6), (3.7).

В качестве терминального множества $\mathfrak{H}$ (1.5) рассматриваем

$$\mathfrak{H} = (E - \Pi)\mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi)) \oplus \mathfrak{B}_d,$$

где Π — оператор ортогонального проектирования в $\mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi))$; $\mathfrak{B}_d$ — d-окрестность нуля в подпространстве $\Pi\mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi))$. С помощью опорных функционалов (2.11) определим множество моментов времени, за которые можно завершить игру. Находим

$$\varphi_u(h) = \varrho_1 \int\limits_0^{T_0} \|K^* S(T_0-\tau)\Pi h(x,\omega)\|_{\mathcal{H}_2} d\tau, \quad \varphi_v(h) = \varrho_2 \int\limits_0^{T_0} \|K^* S(T_0-\tau)\Pi h(x,\omega)\|_{\mathcal{H}_2} d\tau.$$

В силу теоремы 2 множество моментов времени T_0, за которые можно завершить игру, удовлетворяют неравенству

$$(\varrho_2-\varrho_1)\int\limits_0^{T_0} \|K^* S(T_0-\tau)\Pi h(x,\omega)\|_{\mathcal{H}_2} d\tau + \langle h, \zeta(T_0)\rangle_{\mathcal{H}_2} \le d \;\; \forall\, h \in \mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi))\colon \|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1, \tag{3.9}$$

где случайный процесс $\zeta(t)$ со значениями в $L_2(0,\pi)$ определен в (2.2) с помощью полугруппы $S(t)$ (3.8).

Если терминальное множество $\mathcal{H}$ (1.5) состоит из нуля $\mathcal{H} = \{0\}$, то $d = 0$, $\Pi = E$ и неравенство (3.9) принимает вид

$$(\varrho_1-\varrho_2)\int\limits_0^{T_0} \|K^* S(T_0-\tau) h(x,\omega)\|_{\mathcal{H}_2} d\tau \ge \left\langle h, S(T_0)\xi + \int\limits_0^{T_0} S(T_0-\tau)\Lambda dw(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_2}. \tag{3.10}$$

В качестве ковариационного оператора W винеровского процесса $w(t)$ выберем $W = -A^{-1}$. Тогда

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) e_k(x),$$

где $w_k(t)$ — независимые скалярные винеровские процессы с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\dfrac{1}{k^2}t$. Пусть Π_k есть оператор ортогонального проектирования в пространстве $L_2(0,\pi)$ на линейную оболочку функции $\sin kx$. Ортопроектор Π_k естественным образом индуцирует ортопроектор в пространстве случайных величин $\mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi))$. Для индуцированного оператора сохраним прежнее обозначение. Положим $K = \Lambda = \Pi_k$ и $\xi = \Pi_k\xi = \xi_k(\omega)e_k(x)$. Имеем следующее представление для случайного процесса $\zeta(t)$ (2.2):

$$\zeta(t) = e^{-k^2 t}\eta(t)e_k(x) \in L_2(0,T;\Omega;L_2(0,\pi);\mathcal{F}_t), \quad \eta(t) = \left[\xi_k + \int\limits_0^t e^{k^2\tau} dw_k(\tau)\right] \in L_2(0,T;\Omega;\mathbb{R}^1;\mathcal{F}_t).$$

Неравенство (3.10) принимает вид

$$(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{\boldsymbol{M} h_k^2}\,\frac{1-e^{-k^2 T_0}}{k^2} \ge e^{-k^2 T_0}\boldsymbol{M}[h_k \eta(T_0)].$$

Отсюда получаем, что множество всех моментов времени T_0, за которые можно завершить игру, удовлетворяют неравенству

$$(\varrho_1-\varrho_2)\frac{1-e^{-k^2 T_0}}{k^2} \ge e^{-k^2 T_0}\boldsymbol{M}[h\eta(T_0)] \;\; \forall\, h \in \mathcal{H}_2(\Omega;\mathbb{R}^1)\colon \|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1.$$

Поэтому для завершения игры в момент времени T_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(\varrho_1-\varrho_2)\frac{e^{k^2 T_0}-1}{k^2} \ge \|\eta(T_0)\|_{\mathcal{H}_2},$$

где

$$\|\eta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2} = \boldsymbol{M}\xi_k^2 + \frac{e^{2k^2t}-1}{2k^4}.$$

Исключим тривиальный случай окончания игры в начальный момент времени ($\xi_k \neq 0$). Если $\varrho_1 \le \varrho_2$, то игру невозможно завершить. Пусть $\varrho_1 > \varrho_2$. Для завершения игры в момент T_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sqrt{2}(\varrho_1 - \varrho_2)(e^{k^2T_0} - 1) \ge \sqrt{2k^4\boldsymbol{M}\xi_k^2 + e^{2k^2T_0} - 1}. \tag{3.11}$$

В частности, если $\varrho_1 - \varrho_2 > 1/\sqrt{2}$, то неравенство (3.11) удовлетворяется при

$$T_0 \ge \frac{1}{k^2}\ln\frac{2(\varrho_1-\varrho_2)^2 + \sqrt{2k^4[2(\varrho_1-\varrho_2)^2-1]\boldsymbol{M}\xi_k^2+1}}{2(\varrho_1-\varrho_2)^2-1} \doteq T^*. \tag{3.12}$$

Применим схему метода разрешающих функционалов. Уточним вид многозначного отображения (2.1)

$$Q(t,\tau,v) = \{e^{-k^2(t-\tau)}(u_k - v_k)e_k(x)\colon u_k \in \mathcal{H}_2(\Omega;\mathbb{R}^1),\ \boldsymbol{M}u_k^2 \le \varrho_1^2\}$$

и определим разрешающий функционал (2.4)

$$\alpha(t,\tau,v) = \sup\bigl\{\widetilde{\alpha} \ge 0\colon \boldsymbol{M}[v_k - \widetilde{\alpha}e^{-k^2\tau}\eta(t)]^2 \le \varrho_1^2\bigr\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\alpha(t,\tau,v) = \frac{\langle\eta(t),v_k\rangle_{\mathcal{H}_2} + \sqrt{\langle\eta(t),v_k\rangle^2_{\mathcal{H}_2} + \|\eta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2}(\varrho_1^2 - \|v_k\|^2_{\mathcal{H}_2})}}{e^{-k^2\tau}\|\eta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2}}. \tag{3.13}$$

Множество Υ (2.5) состоит из тех моментов времени $T_0 \in [0,T]$, которые удовлетворяют (3.11). При определенных соотношениях на ϱ_1, ϱ_2 и за счет выбора достаточно большого T это множество не является пустым, например, $\varrho_1 > \varrho_2 + 1/\sqrt{2}$ и $T \ge T^*$ (3.12).

Отображения (2.6), (2.7) представляют собой следующие выражения:

$$G_1(\tau,v) = \{u(x,\omega) \in U_0\colon u_k(\omega) = v_k(\omega)\},$$

$$G_2(\tau,v) = \{u(x,\omega) \in U_0\colon u_k(\omega) = v_k(\omega) - e^{-k^2\tau}\alpha(T_0,\tau,v)\eta(T_0,\omega)\}.$$

Рассмотрим селекторы этих отображений

$$g_1(\tau,v) = v_k(\omega)e_k(x) \in G_1(\tau,v), \quad g_2(\tau,v) = [v_k(\omega) - e^{-k^2\tau}\alpha(T_0,\tau,v)\eta(T_0,\omega))]e_k(x) \in G_2(\tau,v).$$

Для любого допустимого управления $v(\tau,x,\omega) = v(\tau) \in V_1$ строим управление

$$u(\tau) = u(\tau,x,\omega) = \begin{cases} [v_k(\tau,\omega) - e^{-k^2\tau}\alpha(T_0,\tau,v(\tau))\eta(T_0,\omega)]e_k(x), & \tau \in [0,t_*), \\ v_k(\tau,\omega)e_k(x), & \tau \in [t_*,T_0], \end{cases} \tag{3.14}$$

где t_* есть момент переключения с управления $u(\tau,x,\omega) = g_2(\tau,v(\tau))$ на управление $u(\tau,x,\omega) = g_1(\tau,v(\tau))$, который определяется с помощью соотношения (2.8).

Таким образом, мы получили следующий результат.

Утверждение 2. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (3.6), (3.7) *выполняются следующие предположения: области управления* U_0 *и* V_0 *суть замкнутые шары в* $\mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi))$ *с центрами в нуле и радиусами* ϱ_1 *и* ϱ_2, $\varrho_1 - \varrho_2 > 1/\sqrt{2}$; *момент времени* T *является достаточно большим* $T \geq T^*$ (3.12); $K = \Lambda = \Pi_k$ *— оператор ортогонального проектирования в пространстве* $L_2(0,\pi)$ *на линейную оболочку функции* $e_k(x) = \sqrt{2/\pi}\sin kx$; $\xi(x,\omega) \in \mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi); \mathcal{F}_0)$, $\xi = \Pi_k\xi = \xi_k(x,\omega)e_k(x)$, $\boldsymbol{M}\xi_k^2 \neq 0$.

Тогда при любом допустимом управлении $v(t,x,\omega)$ *траектория системы* (3.6), (3.7) *может быть приведена в ноль за время* T_0, *удовлетворяющее* (3.12), *с помощью допустимого управления* $u(t,x,\omega)$ *вида* (3.14), *где момент* t_* *переключения управления удовлетворяет соотношению* (2.8) *с разрешающим функционалом* $\alpha(t,\tau,v)$ (3.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. Москва: Наука, 1968. 476 с.
2. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. Москва: Наука, 1970. 420 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 456 с.
4. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. Москва: Наука, 1985. 516 с.
5. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Boston: Birkhauser, 1995. 322 p.
6. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
7. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. Москва: Наука, 1977. 456 с.
8. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
9. **Красовский Н.Н.** Игра сближения-уклонения со стохастическим поводырем // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 5. С. 1020—1023.
10. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** Седловая точка стохастической дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 1. С. 24–27.
11. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 3. С. 534–539.
12. **Красовский Н.Н.** Детерминированная стратегия и стохастические программы // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, № 2. С. 179–198.
13. **Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.** Стохастический поводырь для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН // 2011. Т. 17, № 2. С. 97–104.
14. **Ramachandran K.M., Tsokos C.P.** Stochastic differential games. Paris; Amsterdam; Beijing: Atlantis Press, 2012. 248 p.
15. **Fleming W.H., Nisio M.** Differential games for stochastic partial differential equations // Nagoya Math. J. 1993. Vol. 131. P. 75–107. doi: 10.1017/S0027763000004554 .
16. **Vlasenko L.A., Chikrii A.A.** The method of resolving functionals for a dynamic game in a Sobolev system // J. Automat. Inform. Sci. 2014. Vol. 46,№ 7. P. 1–11. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v46.i7.10 .
17. **Власенко Л.А., Руткас А.Г., Чикрий А.А.** О дифференциальной игре в абстрактной параболической системе // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 26–40.
18. **Chikrii A.A.** Conflict-controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 1997. 424 p.
19. **Чикрий А.А.** Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 76–92.
20. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностранная литература, 1962. 830 с.
21. **Curtain R.F., Falb P.L.** Stochastic differential equations in Hilbert space // J. Diff. Eq. 1971. Vol. 10, iss. 3. P. 412–430. doi: 10.1016/0022-0396(71)90004-0 .

22. **Далецкий Ю.Л., Фомин С.В.** Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. Москва: Наука. 1983. 383 с.
23. **Da Prato G., Zabchyk J.** Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1992. 454 p. doi: 10.1017/CBO9780511666223 .
24. **Власенко Л.А., Руткас А.Г.** О дифференциальной игре в системе, описываемой неявным дифференциально-операторным уравнением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 785–795.
25. **Pazy A.** Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. N Y; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verlag, 1983. 279 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5561-1 .
26. **Власенко Л.А., Руткас А.Г.** Стохастическое импульсное управление параболическими системами типа Соболева // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1482–1491.
27. **Vlasenko L.A., Rutkas A.G.** Optimal control of a class of random distributed Sobolev type systems with aftereffect // J. Automat. Inform. Sci. 2013. Vol. 45, № 9. P. 66–76. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v45.i9.60 .
28. **Aubin J.P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
29. **Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г.** Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части // Укр. мат. журн. 1985. Т. 37, № 1. С. 13–20.
30. **Вейтс Е.** Стохастическое уравнение теплопроводности для стационарного магистрального транспортного потока // Теория вероятностей и ее применения. 1992. Т. 37, вып. 1. С. 153–156.

Поступила 5.04.2019
После доработки 15.05.2019
Принята к публикации 20.05.2019

Власенко Лариса Андреевна
д-р тех. наук, профессор,
профессор
Харьковский нац. университет радиоэлектроники
г. Харьков
e-mail: lara@rutrus.com

Руткас Анатолий Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор,
профессор
Харьковский нац. университет радиоэлектроники
г. Харьков
e-mail: anatoly@rutrus.com

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик НАН Украины,
зав. отделом
Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАНУ
г. Киев
e-mail: chik@insyg.kiev.ua

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* [Theory of motion control. Linear systems]. Moscow: Nauka Publ, 1968, 476 p.
2. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 420 p.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.

4. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 520 p.
5. Krasovskii N.N., Krasovskii A.N. *Control under lack of information.* Berlin etc.: Birkhäuser, 1995, 322 p. ISBN: 0-8176-3698-6 .
6. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* Basel: Gordon and Breach, 1995, 625 p.
7. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
8. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 288 p.
9. Krasovskii N.N. A convergence-evasion game with stochastic guide. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1977, vol. 237, no. 5, pp. 1020–1023. (in Russian)
10. Krasovskii N.N., Tret'yakov V.E. Saddle point of a stochastic differential game. *Soviet Math. Dokl.*, 1981, vol. 22, no. 2, pp. 393–398.
11. Krasovskii N.N., Tret'yakov V.E. Stochastic program synthesis for a positional differential game. *Soviet Math. Dokl.*, 1981, vol. 24, no. 1, pp. 17–20.
12. Krasovskii N.N. Deterministic strategy and stochastic programs. *J. Appl. Math. Mech.*, 1985, vol. 49, no. 2, pp. 135–143. doi: 10.1016/0021-8928(85)90092-9 .
13. Krasovskii N.N., Kotel'nikova A.N. Stochastic guide for a time-delay object in a positional differential game. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, suppl. 1, pp. 145–151. doi: 10.1134/S0081543812050148 .
14. Ramachandran K.M., Tsokos C.P. *Stochastic differential games.* Paris; Amsterdam; Beijing: Atlantis Press, 2012, 248 p. ISBN: 978-94-91216-47-3 .
15. Fleming W.H., Nisio M. Differential games for stochastic partial differential equations. *Nagoya Math. J.*, 1993, vol. 131, pp. 75–107. doi: 10.1017/S0027763000004554 .
16. Vlasenko L.A., Chikrii A.A. The method of resolving functionals for a dynamic game in a Sobolev system. *J. Automat. Inform. Sci.*, 2014, vol. 46, no. 7, pp. 1–11. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v46.i7.10 .
17. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 254–269. doi: 10.1134/S0081543816050229 .
18. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes.* Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, 424 p. ISBN: 0-79234522-3 .
19. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 271, pp. 69–85. doi: 10.1134/S0081543810040073 .
20. Hille E., Phillips R.S. *Functional analysis and semigroups.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 31, Providence, RI: AMS, 1957, 808 p. ISBN: 978-0-8218-3395-7 . Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz i polugruppy*, Moscow: Inostrannaya Literatura Publ., 1962, 830 p.
21. Curtain R.F., Falb P.L. Stochastic differential equations in Hilbert space. *J. Diff. Eq.*, 1971, vol. 10, no. 3, pp. 412–430. doi: 10.1016/0022-0396(71)90004-0 .
22. Dalecky Yu.L., Fomin S.V. *Measures and differential equations in infinite-dimensional space.* Dordrecht: Kluwer, 1991, 337 p. ISBN: 978-94-010-5148-4 . Original Russian text published in Daletskii Yu.L., Fomin S.V. *Mery i differentsial'nye uravneniya v beskonechnomernykh prostranstvakh.* Moscow: Nauka Publ., 1983, 383 p.
23. Da Prato G., Zabchyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge: Cambridge University Press, 1992, 454 p. doi: 10.1017/CBO9780511666223 .
24. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. On a differential game in a system described by an implicit differential-operator equation. *Diff. Eq.*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 798–807. doi: 10.1134/S0012266115060117 .
25. Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* N Y; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verlag, 1983, 279 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5561-1 .
26. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Stochastic impulse control of parabolic systems of Sobolev type. *Diff. Eq.*, 2011, vol. 47, no. 10, pp. 1498–1507. doi: 10.1134/S0012266111100132 .
27. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Optimal control of a class of random distributed Sobolev type systems with aftereffect. *J. Automat. Inform. Sci.*, 2013, vol. 45, no. 9, pp. 66–76. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v45.i9.60 .
28. Aubin J.P., Frankowska H. *Set-valued analysis.* Boston: Birkhäuser, 1990, 461 p. ISBN: 0-8176-3478-9 .

29. Dorogovtsev A.Ya., IvasishenS.D., Kukush A.G. Asymptotic behavior of solutions of the heat-conduction equation with white noise in the right side. *Ukrain. Math. J.*, 1985, vol. 37, no. 1, pp. 10–15. doi: 10.1007/BF01056844 .
30. Weits E. A Stochastic heat equation for stationary freeway traffic flow. *Theory Probab. Appl.*, 1993, vol. 37, no. 1, pp. 185–188. doi: 10.1137/1137049 .

Received April 5, 2019
Revised May 15, 2019
Accepted May 20, 2019

Larisa Andreevna Vlasenko, Dr. Tech. Sci., Prof., Kharkov National University of Radio Electronics, Kharkov, 61166 Ukraine, e-mail: lara@rutrus.com .

Anatolii Georgievich Rutkas, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Kharkov National University of Radio Electronics, Kharkov, 61166 Ukraine, e-mail: anatoly@rutrus.com .

Arkadii Alekseevich Chikrii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ukranian NAS Academician, Glushkov Institute of Cybernetics, Kiev, 03187 Ukraine, e-mail: chik@insyg.kiev.ua .

Cite this article as: L. A. Vlasenko, A. G. Rutkas, A. A. Chikrii. On a differential game in a stochastic system, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 45–61 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

К АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ ОПТИМИЗАЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Р. Габасов, А. И. Калинин, Ф. М. Кириллова, Л. И. Лавринович

Динамические системы, которые в своих математических моделях содержат малые параметры при нелинейностях, принято называть квазилинейными. Статья представляет обзор результатов, полученных для задач оптимизации квазилинейных динамических систем в Минской школе по оптимальному управлению. Рассмотрены задачи оптимального быстродействия, терминального управления с подвижным правым концом траекторий, управления минимальной силой и задачи минимизации интегральных квадратичных функционалов. В основе подхода к исследованию лежит идея специальной конечномерной параметризации оптимальных управлений. Вычисления при построении асимптотических приближений к оптимальным управлениям в рассмотренных квазилинейных задачах сводятся к решению базовых задач, которые, в отличие от исходных, являются задачами оптимизации линейных систем, интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем.

Ключевые слова: квазилинейные системы, малый параметр, асимптотические приближения, конечномерная параметризация, оптимальное управление, обратная связь.

R. Gabasov, A. I. Kalinin, F. M. Kirillova, L. I. Lavrinovich. On asymptotic optimization methods for quasilinear control systems.

Mathematical models of dynamical systems containing small parameters in nonlinearities are usually called quasilinear systems. We present a survey of results obtained for problems of optimization of quasilinear dynamical systems in the Minsk scientific school on optimal control. We consider time-optimal control problems, terminal control problems with variable right ends of trajectories, minimum force control problems, and problems of minimization of integral quadratic functionals. The research is based on the idea of a special finite-dimensional parameterization of optimal controls. The computation of asymptotic approximations to optimal controls in the quasilinear problems under consideration is reduced to solving some basic problems, which, unlike the original problems for quasilinear systems, are optimization problems for linear systems, to the integration of linear differential equations, and to finding roots of nonsingular linear algebraic systems.

Keywords: quasilinear systems, small parameter, asymptotic approximation, finite-dimensional parameterization, optimal control, feedback control.

MSC: 4902

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-62-72

Введение

Многие прикладные задачи оптимального управления в своих математических моделях содержат малые параметры, причем зачастую модели существенно упрощаются (понижается порядок дифференциальных уравнений, исчезают сложные члены и т. п.), если эти параметры положить равными нулю. В таких случаях целесообразно использовать асимптотические методы, основное достоинство которых состоит в том, что при их применении исходные задачи, которые принято называть возмущенными, сводятся к коррекции решений более простых задач оптимального управления.

Наиболее эффективны асимптотические методы при оптимизации квазилинейных динамических систем. Квазилинейными называют системы управления, содержащие малые параметры при нелинейностях. Выигрыш от применения асимптотических методов к задачам оптимального управления такими системами состоит, прежде всего, в том, что вместо исходных, по существу нелинейных, задач решаются задачи оптимизации линейных динамических

[1]Работа выполнена при поддержке ГПНИ “Конвергенция-2020”, Беларусь.

систем. Среди первых работ, в которых исследовались задачи оптимального управления квазилинейными системами, отметим [1; 24–26; 28; 30; 32; 33].

Настоящая статья является обзорной. В ней представлены результаты, полученные для задач оптимизации квазилинейных динамических систем в Минской школе по оптимальному управлению. В первом разделе вводятся понятия, которые позволяют уточнить, что понимается под асимптотическими приближениями к решению возмущенных задач оптимального управления. Во втором разделе излагается методика исследования, с помощью которой построены асимптотические приближения к решениям широкого класса регулярно и сингулярно возмущенных задач, в том числе и квазилинейных. В разд. 3, 4 приведены результаты качественного анализа рассмотренных задач оптимизации квазилинейных систем и алгоритмы построения асимптотических приближений к их решениям.

1. Возмущенные задачи оптимального управления

Под возмущенной задачей оптимального управления типа Больца понимается семейство задач вида

$$\dot{x} = f(x, u, t, \mu), \quad x(t_*) = x_*, \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_*, t^*], \tag{1.1}$$

$$\varphi_i(x(t^*), \mu) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{1.2}$$

$$J(u) = \varphi_0(x(t^*), \mu) + \int\limits_{t_*}^{t^*} f_0(x, u, t, \mu) dt \to \max, \tag{1.3}$$

где μ — малый положительный параметр ($0 < \mu < \mu_0$); u — r-вектор управления; x — n-вектор фазовых переменных; t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$).

О п р е д е л е н и е 1. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами и значениями из множества U назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка ($N = 0, 1, 2 \dots$), если оно отклоняется по критерию качества (1.3) от оптимального управления на величину $O(\mu^{N+1})$, а порожденная им траектория $x(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, системы (1.1) удовлетворяет терминальным ограничениям (1.2) с точностью того же порядка малости.

О п р е д е л е н и е 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(x, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (x_*, t_*) $(t_* < t^*)$ имеет место $u^{(N)}(x_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, — асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1.1)–(1.3).

Возмущенной задачей оптимального быстродействия назовем семейство задач вида

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u, t, \mu), \quad x(t_*) = x_*, \quad x(t^*) = 0, \\ &u(t) \in U, \quad t \in [t_*, t^*], \quad J(u) = t^* \to \min, \end{aligned} \tag{1.4}$$

в котором μ — малый положительный параметр.

О п р е д е л е н и е 3. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*(\mu)]$, с кусочно-непрерывными компонентами и значениями из множества U, назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в задаче (1.4), если оно переводит динамическую систему в фазовое состояние $O(\mu^{N+1})$, а конечный момент времени $t^*(\mu)$ отличается от момента оптимального быстродействия на величину того же порядка малости.

Асимптотически субоптимальные обратные связи в данном случае определяются так же, как и в задаче (1.1)–(1.3).

В исследовании задач оптимального управления с малыми параметрами, как и в асимптотической теории дифференциальных уравнений, можно выделить два направления. К первому относятся работы по оптимизации систем с регулярными возмущениями, в том числе и квазилинейными. Второе направление включает в себя исследование сингулярно возмущенных задач. Деление задач с малыми параметрами на регулярно и сингулярно возмущенные является условным. Назовем задачу оптимального управления *регулярно возмущенной*, если формирующие ее функции такие, что их можно непрерывно доопределить при $\mu = 0$ для любых возможных значений остальных аргументов. В противном случае будем считать, что задача является *сингулярно возмущенной*.

2. Методика исследования

В работах [5; 13] предложен подход к исследованию возмущенных задач оптимизации динамических систем, в основе которого лежит специальная конечномерная параметризация оптимальных управлений. С его помощью разработаны алгоритмы построения асимптотических приближений произвольного порядка к решениям широкого класса регулярно и сингулярно возмущенных задач [14]. Суть этого подхода состоит в следующем. Для многих задач оптимального управления можно указать конечномерные элементы (назовем их определяющими), по которым легко восстанавливается решение задачи, причем в возмущенных задачах, что очень существенно, они, как правило, гладким образом зависят от малого параметра. К определяющим элементам, в частности, относятся точки переключения релейных управлений, начальные и конечные моменты особых и квазиособых режимов [6], множители Лагранжа, длительность процесса (в том случае, когда она не задана). С помощью принципа максимума [29] и условий допустимости управлений для определяющих элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можно составить систему конечных уравнений

$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \tag{2.1}$$

где μ — малый параметр. Назовем эти уравнения, как и их корни, *определяющими*. Формируются уравнения (2.1) путем интегрирования прямой и сопряженной динамических систем, которые являются возмущенными. Применяя соответствующие асимптотические методы (в регулярно возмущенных задачах — классическую технику Пуанкаре, а в сингулярно возмущенных — метод пограничных функций [4]), можно разложить функции $F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu)$ по степеням малого параметра

$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu) \sim F_{i0}(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \mu F_{i1}(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \ldots, \quad i = \overline{1, k},$$

а затем в условиях применимости теоремы о неявной функции методом неопределенных коэффициентов найти асимптотику решения системы (2.1), т. е асимптотику определяющих элементов. Для построения асимптотически субоптимальных управлений заданного порядка достаточно заменить неизвестные определяющие элементы $a_1(\mu), a_2(\mu), \ldots, a_k(\mu)$ их асимптотическими приближениями соответствующего порядка. Основная трудность при реализации указанной схемы состоит в нахождении старших коэффициентов разложения определяющих элементов, т. е. корней системы нулевого приближения

$$F_{i0}(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu) = 0, \quad i = \overline{1, k}. \tag{2.2}$$

В случае регулярных возмущений корнями этой системы будут определяющие элементы в невозмущенной задаче, которая формально получается из исходной при $\mu = 0$. Такую задачу в дальнейшем будем называть базовой. Если же исходная задача оптимального управления является сингулярно возмущенной, то корнями системы (2.2), как правило, будут определяющие элементы двух задач меньшей размерности. Одна из них — вырожденная задача, а вторая подбирается в результате анализа системы (2.2), что представляет собой неформальный этап исследования.

Отметим, что построенные с помощью изложенного подхода асимптотические приближения определяющих элементов можно использовать для нахождения оптимального управления в возмущенной задаче с заданным значением μ. Для этого нужно применить процедуру доводки [7], которая состоит в решении системы уравнений (2.1) методом Ньютона.

Описанный подход удобен для численной реализации, поскольку при его применении дело сводится к разложению конечномерных элементов. Заметим, что идея использования конечномерной параметризации решения в асимптотическом анализе восходит к Ван-дер-Полю (см. [3]), который применял ее при исследовании колебательных режимов.

3. Квазилинейные задачи оптимального управления

Результаты асимптотического анализа решений квазилинейных задач оптимального управления справедливы и для отрицательных значений μ, если они достаточно малы по модулю. Поэтому в дальнейшем будем считать областью применения малого параметра некоторую окрестность нуля $|\mu| < \mu_0$.

Рассмотрим квазилинейную задачу терминального управления вида

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + b(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in [t_*, t^*], \\ Hx(t^*) + \mu h(x(t^*)) = g, \quad J(u) = c^T x(t^*) + \mu d(x(t^*)) \to \max, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где μ — малый (по модулю) параметр; u — скаляр; x — n-вектор; g — m-вектор ($m < n$). Предполагается, что $A(t)$, $b(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $\partial h(x)/\partial x$, $\partial d(x)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, принадлежат классу C^p, $p \ge 1$.

Асимптотический анализ [15] показывает, что при нестеснительных предположениях относительно решения базовой задачи (см. разд. 2), которая формально получается из исходной при $\mu = 0$ и в отличие от нее является линейной, оптимальное управление в задаче (3.1) с достаточно малым по модулю μ имеет релейный характер и сохраняет при этом структуру решения базовой задачи. На основании этого факта с помощью изложенной ранее методики разработан и обоснован алгоритм, позволяющий для заданного натурального числа N ($N < p$) построить релейное асимптотически субоптимальное управление N-го порядка (см. определение 1). Точки переключения такого асимптотического приближения представляют собой полиномы Тейлора N-й степени точек переключения оптимального управления, которые являются функциями малого параметра, причем функциями из класса C^p. Попутно строится асимптотика множителей Лагранжа, которые вместе с точками переключения являются в данном случае определяющими элементами. При сделанных предположениях решение базовой задачи будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в задаче (3.1).

При построении асимптотически субоптимальных управлений более высокого порядка помимо решения базовой задачи вычисления сводятся к решению начальных задач для систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем. На основе разработанного алгоритма в [15] предложена итерационная процедура решения существенно нелинейных задач, где в качестве малого параметра выступает шаг итерации.

В [8] описан алгоритм работы регулятора, который строит в режиме реального времени позиционные асимптотически субоптимальные управления первого порядка в задаче терминального управления квазилинейной системой, подверженной действию неизвестных помех. При разработке регулятора использовались изложенный в [15] алгоритм и метод синтеза оптимальных управлений типа обратной связи для линейных систем [9].

В классе скалярных управляющих воздействий рассмотрим задачу оптимального быстродействия для квазилинейной системы

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + b(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \\ x(t^*) = 0, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in [t_*, t^*], \quad J(u) = t^* \to \min, \\ |\mu| \ll 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{3.2}$$

в предположении, что $A(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $b(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t^*$, принадлежат классу C^p, $p \geq 1$. В работах [16; 17] показано, что при нестеснительных предположениях относительно решения базовой задачи оптимальное управление в задаче (3.2) с достаточно малым по модулю μ является релейным, сохраняя при этом структуру решения базовой задачи. С помощью изложенной в разд. 2 методики разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа N $(N < p)$ построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка (см. определение 3). Определяющими элементами в данном случае являются точки переключения оптимального управления, момент оптимального быстродействия и начальные значения (в момент t_*) сопряженных переменных, соответствующих в силу принципа максимума [29] оптимальному управлению. Эти величины как функции малого параметра принадлежат классу C^p. Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений сводятся к решению базовой задачи, которая является линейной, интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем. Разработанный алгоритм обобщает результаты работы [25], которая в принятой терминологии посвящена построению асимптотически субоптимального управления первого порядка в задаче (3.2). Обобщение связано не столько с порядком асимптотики, сколько с обоснованием алгоритма.

Алгоритмы асимптотического решения квазилинейных задач со скалярными управлениями легко переносятся на системы с многомерными управлениями $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$, если на значения последних наложены ограничения вида $a_i \leq u_i(t) \leq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. При этом принципиальные схемы алгоритмов не претерпевают существенных изменений. Основное достоинство алгоритмов состоит в том, что они опираются на решения базовых задач, которые в отличие от исходных являются линейными. Однако в случае многомерных управляющих воздействий выигрыш может заключаться не только в этом. В данном случае базовая задача может распадаться на задачи меньшей размерности (см. [14]), тогда алгоритм целесообразно использовать даже для линейных возмущений, особенно если исходная задача имеет большую размерность.

Во многих прикладных задачах с многомерными управлениями ограничения на их значения имеют вид $\|u(t)\| \leq a$, где $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_r^2}$ — евклидова норма вектора u. В первую очередь это относится к задачам управления механическими системами. В работе [11] рассмотрена следующая задача терминального управления квазилинейной системой с подвижным правым концом траекторий:

$$
\begin{gathered}
\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \\
\|u(t)\| \leq 1, \quad t \in [t_*, t^*], \quad Hx(t^*) = g, \quad J(u) = c^T x(t^*) \to \max,
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

где μ — малый (по модулю) параметр; t_*, t^* — заданные моменты времени $(t_* < t^*)$; u — r-вектор; x — n-вектор; g — m-вектор $(m < n)$. Остальные элементы имеют соответствующие размерности. Предполагается, что матричные функции $A(t)$, $B(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, принадлежат классу C^p, $p \geq 1$. Доказана теорема о существовании непрерывного оптимального управления в задаче (3.3) и его асимптотических свойствах при предположениях, сделанных относительно решения линейной базовой задачи. Результаты качественного анализа положены в основу алгоритма, с помощью которого для заданного числа N $(N < p)$ можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассмотренной задаче (см. определение 1). Этот алгоритм представляет собой очередную реализацию методики, изложенной в разд. 2. Его суть состоит в разложении по целым степеням μ множителей Лагранжа, которые в данном случае являются определяющими элементами и как функции малого параметра принадлежат классу C^p. Вычислительная процедура алгоритма включает в себя нахождение множителей Лагранжа в базовой задаче, решение начальных задач для систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Как и в предыдущих задачах, решение базовой задачи будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в задаче (3.3).

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия для квазилинейной системы при ограничении управления гиперсферой, которая имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + b(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \\ x(t^*) = 0, \|u(t)\| \le 1, t \in [t_*, t^*], \quad J(u) = t^* \to \min, \\ |\mu| \ll 1, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Предполагается, что элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, принадлежат классу C^p, $p \ge 1$. В [12] показано, что при выполнении некоторых предположений относительно решения базовой задачи в задаче (3.4) существует единственное оптимальное управление, компоненты которого являются непрерывными функциями времени. С помощью изложенной в разд. 2 методики разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа N ($N < p$) построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассмотренной задаче (см. определение 3). Его суть, как и в предыдущих квазилинейных задачах, состоит в разложении по целым степеням малого параметра определяющих элементов, в качестве которых в данном случае выступают момент оптимального быстродействия и начальные значения (в момент t_*) сопряженных переменных. Эти величины как функции малого параметра принадлежат классу C^p. Асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка является решением базовой задачи. При построении асимптотических приближений более высокого порядка вычисления помимо решения базовой задачи сводятся к интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем.

Рассмотрим задачу оптимизации переходного процесса в квазилинейной системе

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \\ x(t^*) = 0, \quad J(u) = \sup_{t \in [t_*, t^*]} \|u(t)\| \to \min, \\ |\mu| \ll 1, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n,\end{gathered} \tag{3.5}$$

которая состоит в нахождении многомерных управлений с минимальной интенсивностью. Под интенсивностью в данном случае понимается максимальное значение евклидовой нормы управляющих воздействий. В прикладных задачах управление зачастую имеет смысл обобщенной силы; интенсивность оценивает тогда наибольшее значение этой силы. Поэтому задачу (3.5) называют задачей об управлении минимальной силой. Подобные задачи занимают особое место среди типичных задач оптимального управления вследствие негладкости функционала качества. Они возникают в приложениях, когда большие значения управляющих воздействий в переходных процессах либо технически нереализуемы, либо нежелательны из-за чрезмерных перегрузок, вызванных ускорениями. Предполагается, что динамическая система в задаче (3.5) такова, что элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, принадлежат классу C^p. В [18] показано, что при выполнении нестеснительных предположений относительно решения базовой задачи в исходной квазилинейной задаче с достаточно малым по модулю μ существует единственное оптимальное управление, компоненты которого непрерывны. С помощью изложенной в разд. 2 методики разработан и обоснован алгоритм, позволяющий для заданного числа N ($N < p$) построить асимптотически субоптимальное управление в задаче (3.5), которое переводит динамическую систему в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отличается по критерию качества от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Суть алгоритма состоит в построении асимптотики определяющих элементов, которыми в данном случае являются оптимальная интенсивность и начальные значения сопряженных переменных (в момент t_*), соответствующих в силу принципа максимума [26] оптимальному управлению. Эти величины как функции малого параметра принадлежат классу C^p. Как и в предыдущих квазилинейных задачах, вычислительная процедура алгоритма включает в себя решение базовой задачи, интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем.

4. Задачи минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях квазилинейных систем

Линейно-квадратичные задачи оптимального управления относятся к числу немногих задач оптимизации динамических систем, для которых решена проблема синтеза оптимальных управлений типа обратной связи (см. например, [19; 22; 23; 27; 31]). Сложнее поддаются исследованию задачи минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях нелинейных динамических систем, к которым принадлежат и квазилинейные системы.

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \\ x(t^*) = 0, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_*}^{t^*}(x^T Q(t)x + u^T P(t)u)dt \to \min,\end{gathered} \tag{4.1}$$

где μ — малый по модулю параметр; t_*, t^* — заданные моменты времени; x — n-вектор фазового состояния системы; $f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, — нелинейная вектор-функция; $Q(t)$ — неотрицательно-определенная симметрическая матрица; $P(t)$ — положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \in [t_*, t^*]$. Предполагается, что элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, принадлежат классу C^p, $p \geq 1$.

В данном случае базовая задача является линейно-квадратичной. В [20] показано что если динамическая система в базовой задаче вполне управляема [26], то в задаче (4.1) с достаточно малым по модулю μ существует единственное оптимальное управление, которое принадлежит классу C^p. С помощью изложенной в разд. 2 методики разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа N ($N < p$) построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (4.1) в смысле определения 1. В качестве определяющих элементов в данном случае берутся начальные значения (в момент t_*) сопряженных переменных, которые как функции малого параметра принадлежат классу C^p. При построении асимптотически субоптимальных управлений помимо решения линейно-квадратичной базовой задачи интегрируются системы линейных дифференциальных уравнений и находятся корни невырожденных линейных алгебраических систем. В [20] получены также формулы для асимптотически субоптимальных обратных связей нулевого и первого порядков (см. определение 2). Заметим, что асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка есть оптимальное управление типа обратной связи в базовой задаче [2].

Рассмотрим задачу с подвижным правым концом траекторий, которая является обобщением задачи (4.1):

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, x(t_*) = x_*, \quad Hx(t^*) = g, \\ J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_*}^{t^*}(x^T Q(t)x + u^T P(t)u)dt \to \min.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Здесь μ — малый по модулю параметр; t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$); u — r-вектор; x — n-вектор; g — m-вектор ($m \leq n$). Остальные элементы задачи имеют соответствующие размерности, при этом среди терминальных ограничений нет "лишних", т. е. $rankH = m$. В критерии качества $Q(t)$ — неотрицательно-определенная, а $P(t)$ — положительно-определенная симметрические матрицы для всех $t \in [t_*, t^*]$. Предполагается, что функции, формирующие задачу, обладают той же гладкостью, что и в задаче (4.1). Как и прежде, базовая задача является линейно-квадратичной. В [21] установлено, что если динамическая система в этой задаче управляема относительно подпространства $Hx = 0$ (см. [10]), то в задаче (4.2) с достаточно малым по модулю μ существует единственное оптимальное управление, принадлежащие классу C^p, которое является нормальной экстремалью. Разработан и обоснован алгоритм, с помощью которого для заданного числа N ($N < p$) можно построить асимптотически субоптимальное управление в задаче (4.2) (см. определение 1). Этот алгоритм является очередной реализацией методики, изложенной в разд. 2. Его суть состоит в построении асимптотики множителей Лагранжа, соответствующих в силу принципа максимума оптимальному управлению. Определяющие элементы как функции малого параметра при сделанных предположениях принадлежат классу C^p. При построении асимптотических приближений к оптимальному управлению в задаче (4.2) решается линейно-квадратичная базовая задача, интегрируются системы линейных дифференциальных уравнений и находятся корни невырожденных линейных алгебраических систем. Кроме того, в [21] получены формулы для асимптотически субоптимальных обратных связей нулевого и первого порядка в смысле определения 2. Асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка есть оптимальное управление типа обратной связи в базовой задаче [19].

Все перечисленные алгоритмы апробированы на конкретных задачах управления движением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Альбрехт Э.Г.** Метод Ляпунова-Пуанкаре в задачах оптимального управления: автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Свердловск, 1986. 280 с.
2. **Атанс М., Фалб П.** Оптимальное управление. Москва: Машиностроение, 1968. 764 с.
3. **Ван-дер-Поль Б.** Нелинейная теория электрических колебаний. Москва, 1935. 42 с.
4. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. Москва: Наука, 1973. 272 с.
5. **Габасов Р., Калинин А.И., Кириллова Ф.М.** Алгоритм оптимизации квазилинейной системы управления // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293, № 1. С. 22–26.
6. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Особые оптимальные управления. Москва: URSS, 2018. 256 с.
7. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2: Задачи управления. Минск: Университетское, 1984. 1973. 207 с.
8. **Габасов Р., Калинин А.И., Кириллова Ф.М., Наумович Г.Н.** Асимптотически оптимальный регулятор для квазилинейной системы // Докл. РАН. 1993. Т. 332, № 2. С. 138–141.
9. **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.** Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 6. С. 1294–1299.
10. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Качественная теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1971. 508 с.
11. **Грудо Я.О., Калинин А.И.** Асимптотический метод оптимизации квазилинейной системы с многомерными управлениями // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 12. С. 1604–1611.
12. **Грудо Я.О., Калинин А.И.** Асимптотическое решение задачи оптимального быстродействия для квазилинейной системы при евклидовом ограничении на управление // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 106–115.
13. **Калинин А.И.** Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной линейной задачи оптимального быстродействия // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, вып. 6. С. 880–889.
14. **Калинин А.И.** Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: Экоперспектива, 2000. 183 с.
15. **Калинин А.И.** Оптимизация квазилинейных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 3. С. 325–334.
16. **Калинин А.И.** Алгоритм асимптотического решения квазилинейной задачи оптимального быстродействия // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 3. С. 197–200.
17. **Калинин А.И.** Метод возмущений для асимптотического решения квазилинейной задачи оптимального быстродействия // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 585–594.
18. **Калинин А.И.** Асимптотический метод решения квазилинейной задачи об управлении минимальной силой // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 414–424.

19. **Калинин А.И.** О проблеме синтеза оптимальных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 3. С. 397–402.
20. **Калинин А.И., Лавринович Л.И.** Применение метода возмущений к задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 3–12.
21. **Калинин А.И., Лавринович Л.И.** Асимптотический метод минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях линейной динамической системы // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62, № 5. С. 519–524.
22. **Калман Р.** Об общей теории систем управления. // Тр. I Конгресса ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 521–547.
23. **Квакернаак К.Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. Москва: Мир, 1977. 656 с.
24. **Кириллова Ф.М.** О непрерывной зависимости решений одной задачи оптимального регулирования от начальных данных и параметров // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, вып. 4. С. 141 — 146.
25. **Киселев Ю.Н.** Асимптотика решения задачи оптимального быстродействия для систем управления близким к линейным // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182, № 1. С. 31–34.
26. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Москва: Наука, 1968. 476 с.
27. **Летов А.М.** Математическая теория процессов управления. Москва: Наука, 1981. 256 с.
28. **Моисеев Н.Н.** Элементы теории оптимальных систем. Москва: Наука, 1975. 528 с.
29. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 396 с.
30. **Субботин А.И.** Об управлении движением квазилинейной системы // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 7. С. 1113–1126.
31. **Фельдбаум А.А.** Основы теории автоматических систем. Москва: Наука, 1966. 624 с.
32. **Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.** Управление колебаниями. Москва: Наука, 1980. 384 с.
33. **Falb P.L., Jong J.L.** Some successive approximation methods on control and oscillation theory. N Y; London: Acad. Press, 1969. 240 p.

Поступила 18.04.2019
После доработки 6.05.2019
Принята к публикации 13.05.2019

Габасов Рафаил
д-р физ.-мат. наук, профессор
Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь
e-mail: kirillova.f@yandex.by

Калинин Анатолий Иосифович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры методов оптимального управления
Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь
e-mail: kalininai@bsu.by

Кириллова Фаина Михайловна
д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь
e-mail: kirillova.f@yandex.by

Лавринович Леонид Иванович
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры методов оптимального управления
Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь
e-mail: lavrinovich@bsu.by

REFERENCES

1. Albrecht E.G. *Lyapunov-Poincare method in optimal control problems.* Dis.. . . Dr. Phys.-Mat. Sciences. Sverdlovsk, 1986. 280 p. (in Russian).
2. Atans M., Falb P. *Optimal control.* N Y: McGraw-Hill, 1966, 881 p. ISBN: 0-486-45328-6 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie.* Moscow: Mashinostroenie Publ., 1968, 764 p.
3. Van der Pol B. The nonlinear theory of electric oscillations. *Proc. IRE*, 1934, vol. 22, no. 9, pp. 1051–1086. doi: 10.1109/JRPROC.1934.226781 .
4. Vasil'eva A.B. and Butuzov V.F. *Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii* [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 272 p. (in Russian).
5. Gabasov R., Kalinin A.I., Kirillova F.M. An Algorithm for Optimizing a Quasilinear Control system. *Soviet Math. Dokl.*, 1987, vol. 35, no. 2, pp. 250–254.
6. Gabasov R., Kirillova F.M. *Osobye optimal'nye upravleniya* [Singular Optimal Control]. Moscow: Librokom Publ., 2013, 256 p. ISBN: 978-5-397-05730-1 .
7. Gabasov R., Kirillova F.M. *Konstruktivnye metody optimizatsii. Ch. 2. Zadachi upravleniya* [Constructive methods of optimization. Part 2: Control problems]. Minsk: University Press, 1973, 207 p.
8. Gabasov R., Kalinin A.I., Kirillova F.M., Naumovich G.H. An asymptotically optimal regulator for a quasilinear system. *Russian Acad Sci. Dokl.*, 1994, vol. 48, no. 2, pp. 263–267.
9. Gabasov R., Kirillova F.M., Kostyukova O.I. Construction of optimal controls of feedback type in a linear problem. *Sov. Math., Dokl.*, 1992, vol. 44, no. 2, pp. 608–613.
10. Gabasov R., Kirillova F.M. *The Oualitative theory of optimal processes.* N Y; Basel: Marsel Dekker INC., 1976, 640 p. ISBN: 9780824765453 . Original Russian text published in Gabasov R., Kirillova F.M. *Kachestvennaya teoriya optimal'nykh protsessov.* Moscow: Nauka Publ., 1971. 508 p.
11. Grudo Y.O., Kalinin A.I. Asymptotic optimization method for a quasilinear system with multidimensional controls. *Diff. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 12, pp. 1674–1681. doi: 10.1134/S0012266106120020 .
12. Grudo Y.O., Kalinin A.I. Asymptotic solution of the optimal speed problem for the quasilinear system under Euclidean constraint on control. *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 8, pp. 1391–1400. doi: 10.1134/S0005117907080103 .
13. Kalinin A.I. An algorithm for the asymptotic solution of a singularly perturbed linear time-optimal control problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 1989, vol. 53, no. 6, pp. 695–703. doi: 10.1016/0021-8928(89)90072-5 .
14. Kalinin A.I. *Asimptoticheskie metody optimizatsii vozmushchennykh dinamicheskikh sistem* [Asymptotic optimization methods for perturbed dynamical systems]. Minsk: Ecoperspectiva Publ., 2000, 183 p. ISBN: 9856598400 .
15. Kalinin A.I. Optimization of quasilinear control systems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1988, vol. 28, no. 2, pp. 12–19. doi: 10.1016/0041-5553(88)90138-3 .
16. Kalinin A.I. Algorithm for the asymptotic solution of a quasilinear time-optimality problem. *Dokl. AN BSSR*, 1988, vol. 32, no. 3, pp. 197–200 (in Russian).
17. Kalinin A.I. A perturbation method for the asymptotic solution of a quasilinear time-optimal problem. *Differ. Eq.*, 1990, vol. 26, no. 4, pp. 424–431.
18. Kalinin A. I. Asymptotic solution method for a quasilinear minimum force control problem. *Differ. Equations*, 2012, vol. 48, no. 3, pp. 419–429. doi: 10.1134/S0012266112030135 .
19. Kalinin A.I. To the synthesis of optimal control systems. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 3, pp. 378–383. doi: 10.1134/S0965542518030065 .
20. Kalinin A.I., Lavrinovich L.I. Application of the perturbation method for the minimization of an integral quadratic functional on the trajectories of a quasilinear system. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 2, pp. 149–158. doi: 10.1134/S1064230714020117 .
21. Kalinin A.I., Lavrinovich L.I. Asymptotic minimization method of the integral quadratic functional on the trajectories of a quasilinear dynamical system. *Dokl. NAN Belarusi*, 2018, vol. 62, no. 5, pp. 519–524. doi: 10.29235/1561-8323-2018-62-5-519-524 .
22. Kalman R.E. On the general theory of control systems. *Proc. of the first IFAC Congress, Moscow, 1960, vol. 1.* London: Butterworths, 1961, 481–492.
23. Kwakernaak H., Sivan R. *Linear optimal control systems.* N Y etc.: Wiley-Interscience, 1972, 575 p. ISBN: 0-471-51110-2 . Translated to Russian under the title *Lineinye optimal'nye sistemy upravleniya.* Moscow: Mir Publ., 1977, 653 p.

24. Kirillova F.M. On the continuous dependence on the initial data and parameters of the solution of an optimal control problem. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1962, vol. 17, no. 4(106), pp. 141–146 (in Russian).
25. Kiselev Yu.N. An asymptotic solution of the problem of time-optimal control systmes which are close to linear ones. *Soviet Math. Dokl.*, 1968, vol. 9, no. 5, pp. 1093–1097.
26. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p.
27. Letov A.M. *Matematicheskaya teoriya protsessov upravleniya* [Mathematical theory of control processes]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 256 p.
28. Moiseev N.N. *Elementy teorii optimal'nykh sistem* [Elements of the theory of optimal systems]. Moscow: Nauka Publ., 1975. 528 p.
29. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes.* N Y; London: Interscience Publishers John Wiley & Sons, 1962, 360 p. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov.* Moscow: Nauka Publ., 1983. 396 p.
30. Subbotin A.I. Control of motion of a quasilinear system. *Differ. Uravn.*, 1967, vol. 3, no. 7, pp. 1113–1118 (in Russian).
31. Fel'dbaum A.A. *Optimal control systems.* N Y: Acad. Press, 1965, 452 p. Original Russian text (2nd ed.) published in Fel'dbaum A.A. *Osnovy teorii optimal'nykh avtomaticheskikh sistem.* Moscow: Nauka Publ., 1966, 623 p..
32. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. *Upravlenie kolebaniyami* [Control of oscillations]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 384 p.
33. Falb P.L., Jong J.L. *Some successive approximation methods on control and oscillation theory.* N Y; London: Acad. Press, 1969, 240 p. ISBN: 978-0-12-247950-2 .

Received April 18, 2019
Revised May 6, 2019
Accepted May 13, 2019

Funding Agency: This work was supported by the National Program for Scientific Research of the Republic of Belarus “Convergence 2020.”

Rafail Gabasov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail:kirillova.f@yandex.by .

Anatoly Iosifovich Kalinin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: kalininai@bsu.by .

Faina Mikhaylovna Kirillova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member of the Belarus National Academy of Sciences, Institute of Mathematics of Belarus National Academy of Sciences, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: kirillova.f@yandex.by .

Leonid Ivanovich Lavrinovich, Cand. Phys.-Mat. Sci.,Assoc. Prof., Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: lavrinovich@bsu.by .

Cite this article as: R. Gabasov, A. I. Kalinin, F. M. Kirillova, L. I. Lavrinovich. On asymptotic optimization methods for quasilinear control systems., *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 62–72 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.27

АБСТРАКТНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО МНОЖЕСТВА ЛИПШИЦЕВЫХ (ВОГНУТЫХ) ФУНКЦИЙ[1]

В. В. Гороховик, А. С. Тыкун

Настоящая работа посвящена абстрактной $\mathcal{H}$-выпуклости функций ($\mathcal{H}$ — заданное множество элементарных функций) и ее реализации в случае, когда в качестве $\mathcal{H}$ рассматриваются пространство липшицевых функций и множество вогнутых липшицевых функций. В работе вводится новое понятие регулярно $\mathcal{H}$-выпуклых функций. Так названы функции, которые являются верхними огибающими множества максимальных (в смысле поточечного упорядочения) $\mathcal{H}$-минорант. Как обобщение понятия глобального субдифференциала выпуклой функции вводятся множество максимальных опорных $\mathcal{H}$-минорант к функции в заданной точке и множество нижних $\mathcal{H}$-опорных точек функции, в терминах которых затем устанавливаются достаточные, а также необходимые условия глобального минимума функции. Во второй части работы абстрактные понятия $\mathcal{H}$-выпуклости реализуются в конкретных случаях, когда функции определены на метрическом или нормированном пространстве X, а в качестве множества элементарных функций $\mathcal{H}$ рассматривается множество $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ липшицевых или множество $\mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})$ вогнутых липшицевых функций. Важным результатом данной части статьи является доказательство того, что для полунепрерывной снизу функции, которая, кроме того, ограничена снизу липшицевой функцией, множество нижних $\mathcal{L}$-опорных точек и множество нижних $\mathcal{L}\widehat{C}$-опорных точек совпадают и являются плотными в ее эффективной области. Данные результаты распространяют на более широкий класс полунепрерывных снизу функций известную теорему Брондстеда — Рокафеллара о существовании субдифференциала для выпуклых полунепрерывных снизу функций и восходят к одному из важнейших результатов классического выпуклого анализа — теореме Бишопа — Фелпса о плотности опорных точек в границе замкнутого выпуклого множества.

Ключевые слова: абстрактная выпуклость, опорные миноранты, опорные точки, глобальный минимум, полунепрерывные фунции, липшицевы функции, вогнутые липшицевы функции, плотность опорных точек.

V. V. Gorokhovik, A. S. Tykoun. Abstract convexity of functions with respect to the set of Lipschitz (concave) functions.

The paper is devoted to the abstract $\mathcal{H}$-convexity of functions (where $\mathcal{H}$ is a given set of elementary functions) and its realization in the cases when $\mathcal{H}$ is the space of Lipschitz functions or the set of Lipschitz concave functions. We introduce the notion of regular $\mathcal{H}$-convex functions. These are functions representable as the upper envelopes of the set of their maximal (with respect to the pointwise ordering) $\mathcal{H}$-minorants. As a generalization of the global subdifferential of a convex function, we introduce the set of maximal support $\mathcal{H}$-minorants at a point and the set of lower $\mathcal{H}$-support points. Using these tools, we formulate necessary as well as sufficient conditions for global minima of nonsmooth functions. In the second part of the paper, the abstract notions of $\mathcal{H}$-convexity are realized in the specific cases when functions are defined on a metric or normed space X and the set of elementary functions is the space $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ of Lipschitz functions or the set $\mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})$ of Lipschitz concave functions, respectively. An important result of this part of the paper is the proof of the fact that, for a lower semicontinuous function bounded from below by a Lipschitz function, the set of its lower $\mathcal{L}$-support points and the set of lower $\mathcal{L}\widehat{C}$-support points coincide and are dense in the effective domain of the function. These results extend the known Brøndsted–Rockafellar theorem on the existence of a subdifferential of convex lower semicontinuous functions to the wider class of lower semicontinuous functions and go back to the Bishop–Felps theorem on the density of support points in the boundary of a closed convex set, which is one of most important results of classical convex analysis.

Keywords: abstract convexity, support minorants, support points, global minimum, semicontinuous functions, Lipschitz functions, concave Lipschitz functions, density of support points.

MSC: 52A01,49J52; 49K27; 26B40

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-73-85

[1]Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2016– 2020 годы “Конвергенция-2020” (проект 1.4.01).

Введение

Понятие выпуклости функций и множеств играет ключевую роль во многих классических разделах математики, в частности в геометрии, функциональном анализе и др. Особое значение выпуклые функции и множества приобрели в последние пятьдесят лет в связи с интенсивным развитием в это время теории оптимизации, а также негладкого и многозначного анализа. Выполнение условий выпуклости позволяет получить наиболее исчерпывающие результаты как для самих выпуклых функций и множеств, так и для задач, данные которых являются выпуклыми. В частности, для выпуклых задач оптимизации удается получить не только необходимые или только достаточные условия оптимальности, как это имеет место в общем невыпуклом случае, но и критерии оптимальности, т. е. такие условия оптимальности, которые являются одновременно как необходимыми, так и достаточными. В значительной мере это обусловлено тем, что выпуклым функциям и множествам соответствуют в сопряженном пространстве двойственные им выпуклые объекты, использование которых позволяет получить исчерпывающие характеристики исходных выпуклых функций и множеств. Естественно поэтому стремление обобщить понятия и методы выпуклого анализа и распространить их на более широкие классы функций и множеств. Достаточно полный обзор различных обобщений понятия выпуклости содержится во вводной главе монографии [1] (см. также [2]).

Настоящее исследование примыкает к одному из направлений в обобщенной выпуклости, начало которому было положено в 70-е годы прошлого века в работах С. С. Кутателадзе и А. М. Рубинова [3; 4]. Дальнейшее развитие их идеи нашли в монографиях [1; 5; 6]. Отправной точкой в данном подходе стал следующий результат классического выпуклого анализа: каждая полунепрерывная снизу выпуклая функция является верхней огибающей ее непрерывных аффинных минорант (см., например, [7, предложение 3.1]). В данном случае непрерывные аффинные функции выступают в качестве элементарных функций, из семейств которых посредством операции поточечного супремума (операции верхней огибающей) конструируются выпуклые функции. Если в качестве элементарных функций мы выбираем какое-либо другое множество функций, скажем множество $\mathcal{H}$, отличающееся от множества аффинных функций, и применим к подмножествам из $\mathcal{H}$ операцию поточечного супремума, то в результате получим класс таких функций, которые, не являясь, вообще говоря, классически выпуклыми, сохраняют целый ряд важных их свойств. В силу этого такие функции были названы [4–6] *$\mathcal{H}$-выпуклыми*; в [6] используется наряду с этим термин *абстрактно выпуклые функции.*

В развитие указанного подхода в настоящей работе вводится понятие *регулярно $\mathcal{H}$-выпуклых функций.* Так названы функции, которые являются верхними огибающими множества максимальных (в смысле поточечного упорядочения) $\mathcal{H}$-минорант. Кроме того, обобщая понятие субдифференциала выпуклой функции, в данной работе мы вводим множества (максимальных) опорных $\mathcal{H}$-минорант к функции в заданной точке и нижних $\mathcal{H}$-опорных точек функции, в терминах которых затем устанавливаем достаточные, а также необходимые условия глобального минимума функции. Во втором и третьем разделах абстрактные понятия $\mathcal{H}$-выпуклости реализуются в конкретном случае, когда функции определены на метрическом или нормированном пространстве X, а в качестве множества элементарных функций $\mathcal{H}$ рассматриваются пространство $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ липшицевых или множество $\mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})$ липшицевых вогнутых функций. Важным результатом разд. 3 и статьи в целом является доказательство того, что для полунепрерывных снизу функций, которые, кроме того, ограничены снизу липшицевой функцией, множество нижних $\mathcal{L}$-опорных точек и множество нижних $\mathcal{L}\widehat{C}$-опорных точек совпадают и являются плотными в эффективной области функции. Данный результат распространяет на более широкий класс полунепрерывных снизу функций теорему Брондстеда — Рокафеллара [8] (см. также [9, теорема 2.10.2]) о существовании субдифференциала для выпуклых полунепрерывных снизу функций. Отметим, что указанные результаты восходят к одному из важнейших результатов классического выпуклого анализа — теореме Бишопа — Фелпса [10] о плотности опорных точек в границе замкнутого выпуклого множества.

Представленные здесь результаты продолжают исследования, начатые первым автором в работах [11–13].

Всюду далее $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ — расширенное множество вещественных чисел. Символом Z^X обозначается, как это принято, совокупность всех функций $f : X \mapsto Z$, определенных на множестве X и принимающих значения в множестве Z; ниже, как правило, рассматриваются случаи, когда Z равно либо $\mathbb{R}$, либо $\overline{\mathbb{R}}$. Совокупности функций $\mathbb{R}^X$ и $\overline{\mathbb{R}}^X$ предполагаются упорядоченными отношением поточечного сравнения $f \le g \Leftrightarrow f(x) \le g(x) \ \forall\, x \in X$. *Эффективным множеством* функции $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ называется множество $\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid |f(x)| < +\infty\}$. Функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ называется *l-собственной* или просто *собственной*, если $f(x) > -\infty$ для всех $x \in X$ и $\operatorname{dom} f \ne \varnothing$, и *$u$-собственной*, если функция $-f$ является l-собственной, т. е. если $f(x) < +\infty$ для всех $x \in X$ и $\operatorname{dom} f \ne \varnothing$.

1. Абстрактно $\mathcal{H}$-выпуклые функции

В данном разделе, следуя в основном монографиям [5;6], приведем необходимые для дальнейшего изложения понятия и положения абстрактной теории $\mathcal{H}$-выпуклых функций. Наряду с известными здесь же будут введены и некоторые новые понятия этой теории.

Пусть X — заданное абстрактное множество, элементы которого ниже будем называть точками. В данном разделе никакие топологические, алгебраические или иные структуры не предполагаются заданными на X.

Пусть, кроме того, задано некоторое множество $\mathcal{H} := \mathcal{H}(X, \mathbb{R})$ определенных на X вещественнозначных функций, которые далее будут рассматриваться как элементарные. Подчеркнем, что $\operatorname{dom} h = X$ для любой функции $h \in \mathcal{H}$.

Для произвольной функции $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ множество $S^-(\mathcal{H}, f) := \{h \in \mathcal{H} \mid h \le f\}$ называется *нижней $\mathcal{H}$-опорой функции* f, а функции h из $S^-(\mathcal{H}, f)$ — *$\mathcal{H}$-минорантами функции* f. Непосредственно из определения следует, что если $S^-(\mathcal{H}, f) \ne \varnothing$, то функция f является l-собственной и при этом

$$f(x) \ge \sup\{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{H}), f)\} \text{ для всех } x \in X.$$

Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ называется *абстрактно $\mathcal{H}$-выпуклой* (далее просто *$\mathcal{H}$-выпуклой*), если

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{H}, f)\} \text{ для всех } x \in X \tag{1.1}$$

или, эквивалентно, если в $\mathcal{H}$ существует такое подмножество $\mathcal{H}'$, что

$$f(x) = \sup_{h \in \mathcal{H}'} h(x) \text{ для всех } x \in X. \tag{1.2}$$

Нетрудно убедиться, что если для подмножества $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ выполняется равенство (1.2), то $\mathcal{H}' \subset S^-(\mathcal{H}, f)$.

Функция $f^{\mathcal{H}} : x \mapsto f^{\mathcal{H}}(x)$ такая, что

$$f^{\mathcal{H}}(x) = \sup\{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{H}, f)\} \text{ для всех } x \in X, \tag{1.3}$$

называется *$\mathcal{H}$-выпуклой оболочкой функции* f.

Непосредственно из определения функции $f^{\mathcal{H}}$ получаем равенство

$$S^-(\mathcal{H}, f) = S^-(\mathcal{H}, f^{\mathcal{H}}), \tag{1.4}$$

из которого следует, что функция $f^{\mathcal{H}}$ есть наибольшая $\mathcal{H}$-выпуклая миноранта функции f.

Будем говорить, что $\mathcal{H}$-миноранта $h \in S^-(\mathcal{H}, f)$ функции f является *опорной в точке* $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, если $h(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Множество всех $\mathcal{H}$-минорант функции f, опорных в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, будем обозначать символом $S^-(\mathcal{H}, f, \bar{x})$.

Множество $S^-(\mathcal{H}, f, \bar{x})$ не пусто тогда и только тогда, когда

$$f(\bar{x}) = \max\{h(\bar{x}) \mid h \in S^-(\mathcal{H}, f)\}, \tag{1.5}$$

при этом максимум в последнем равенстве достигается именно на тех функциях h из $S^-(\mathcal{H}, f)$, которые принадлежат $S^-(\mathcal{H}, f, \bar{x})$.

Если $S^-(\mathcal{H}, f, \bar{x}) \neq \varnothing$, то точку $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ будем называть *нижней $\mathcal{H}$-опорной точкой функции f*. Множество всех нижних $\mathcal{H}$-опорных точек функции f будем обозначать символом $Q^-(\mathcal{H}, f)$.

Из равенств (1.4) и (1.5) легко сделать вывод, что множество нижних $\mathcal{H}$-опорных точек функции f содержится в множестве нижних $\mathcal{H}$-опорных точек ее $\mathcal{H}$-выпуклой оболочки $f^{\mathcal{H}}$. Обратное включение, вообще говоря, не имеет места.

Если $h \in S^-(\mathcal{H}, f)$, то любая функция $\tilde{h} \in \mathcal{H}$, такая что $\tilde{h} \leq h$, тоже принадлежит $S^-(\mathcal{H}, f)$ и при этом

$$\sup_{h \in S^-(\mathcal{H}, f)} h(x) = \sup_{h \in S^-(\mathcal{H}, f) \setminus \{\tilde{h}\}} h(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Таким образом, такая функция $\tilde{h}$ фактически не участвует в построении $\mathcal{H}$-выпуклой оболочки функции f и, следовательно, может быть удалена из $S^-(\mathcal{H}, f)$, причем равенство (1.3) при этом сохранится. Если функция $\bar{h} \in S^-(\mathcal{H}, f)$ такова, что в $S^-(\mathcal{H}, f)$ не существует функции h, удовлетворяющей условиям $\bar{h} \leq h$, $\bar{h} \neq h$, то в некоторых случаях $\bar{h}$ можно удалить из $S^-(\mathcal{H}, f)$ без нарушения равенства (1.3), а в других нельзя. Это наблюдение показывает, что для характеристики $\mathcal{H}$-выпуклой оболочки функции f можно воспользоваться следующим подмножеством из $S^-(\mathcal{H}, f)$, которое может быть существенно меньшим, чем $S^-(\mathcal{H}, f)$.

Символом $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)$ обозначим множество максимальных (относительно поточечного упорядочения) $\mathcal{H}$-минорант функции f, т. е. множество таких функций $\bar{h} \in S^-(\mathcal{H}, f)$, которые удовлетворяют следующему условию: если $h \in S^-(\mathcal{H}, f)$ и $\bar{h} \leq h$, то $h = \bar{h}$.

Пример, приведенный ниже, показывает, что, вообще говоря, для некоторых функций f и множеств элементарных функций $\mathcal{H}$ множество соответствующих им максимальных $\mathcal{H}$-минорант $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)$ может быть пустым, хотя множество всех $\mathcal{H}$-минорант $S^-(\mathcal{H}, f)$ непусто и функция f является $\mathcal{H}$-выпуклой.

Функцию $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ назовем *регулярно $\mathcal{H}$-выпуклой*, если $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f) \neq \varnothing$ и

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)\} \text{ для всех } x \in X.$$

Из (1.1) выводим: для того чтобы $\mathcal{H}$-выпуклая функция f была регулярно $\mathcal{H}$-выпуклой, достаточно, чтобы $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f) \neq \varnothing$ и для любой функции $h \in S^-(\mathcal{H}, f)$ существовала $\bar{h} \in S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)$, такая что $h \leq \bar{h}$.

Следующий простой пример показывает, что $\mathcal{H}$-выпуклая функция может не быть регулярно $\mathcal{H}$-выпуклой. Пусть $X = \mathbb{R}$ и пусть $\mathcal{H}$ — множество линейных функций с рациональным угловым коэффициентом, т. е. $\mathcal{H} = \{x \mapsto qx \mid q \in \mathbb{Q}\}$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ такую, что $f(x) = \sqrt{2}|x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда $S^-(\mathcal{H}, f) = \{x \mapsto qx \mid q \in \mathbb{Q}, -\sqrt{2} < q < \sqrt{2}\}$. Так как для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f(x) = \sup\{qx \mid q \in \mathbb{Q}, -\sqrt{2} < q < \sqrt{2}\}$, то функция f является $\mathcal{H}$-выпуклой. Вместе с тем $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f) = \varnothing$ и, следовательно, функция f не является регулярно $\mathcal{H}$-выпуклой.

Множество максимальных $\mathcal{H}$-минорант функции f, опорных к f в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, будем обозначать символом $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})$. Таким образом, в соответствии с определением

$$S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x}) := S^-_{\max}(\mathcal{H}, f) \bigcap S^-(\mathcal{H}, f, \bar{x}).$$

Множество $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})$ непусто тогда и только тогда, когда

$$f(\bar{x}) = \max\{h(\bar{x}) \mid h \in S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)\},$$

при этом максимум в последнем равенстве достигается именно на тех функциях h из $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)\}$, которые принадлежат $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})\}$.

Симметричным образом может быть введено понятие абстрактно вогнутой функции, относительно заданного множества элементарных функций. Коротко приведем основные определения для этого случая.

Пусть задано множество функций $\mathcal{G} := \mathcal{G}(X, \mathbb{R})$. Множество $S^+(\mathcal{G}, f) := \{g \in \mathcal{G} \mid g \geq f\}$ называется *верхней $\mathcal{G}$-опорой функции* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, при этом функции g из $S^+(\mathcal{G}, f)$ называются *$\mathcal{G}$-мажорантами функции* f. Если $S^+(\mathcal{G}, f) \neq \varnothing$, то f является u-собственной.

Вогнутой $\mathcal{G}$-оболочкой функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ называется функция $f_{\mathcal{G}} : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством

$$f_{\mathcal{G}}(x) = \inf\{g(x) \mid g \in S^+(\mathcal{G}, f)\} \text{ для всех } x \in X. \tag{1.6}$$

Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ называется *абстрактно $\mathcal{G}$-вогнутой*, если $f = f_{\mathcal{G}}$.

Будем говорить, что $\mathcal{G}$-мажоранта $g \in S^+(\mathcal{G}, f)$ функции f является *опорной в точке* $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, если $g(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Множество всех $\mathcal{G}$-мажорант функции f, опорных в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, будем обозначать символом $S^+(\mathcal{G}, f, \bar{x})$.

Множество $S^+(\mathcal{G}, f, \bar{x}) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда

$$f(\bar{x}) = \min\{g(\bar{x}) \mid g \in S^+(\mathcal{G}, f)\},$$

при этом минимум в последнем равенстве достигается именно на тех функциях g из $S^+(\mathcal{G}, f)$, которые принадлежат $S^+(\mathcal{G}, f, \bar{x})$.

Если $S^+(\mathcal{G}, f, \bar{x}) \neq \varnothing$, то точку $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ будем называть *верхней $\mathcal{G}$-опорной точкой функции* f. Множество всех верхних $\mathcal{G}$-опорных точек функции f будем обозначать символом $Q^+(\mathcal{G}, f)$.

Символом $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f)$ обозначим множество минимальных (относительно поточечного упорядочения) $\mathcal{G}$-мажорант функции f, т.е. множество таких функций $\bar{g} \in S^+(\mathcal{G}, f)$, которые удовлетворяют следующему условию: если $g \in S^+(\mathcal{G}, f)$ и $\bar{g} \geq g$, то $g = \bar{g}$.

Функцию $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ назовем *регулярно $\mathcal{G}$-вогнутой*, если $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f) \neq \varnothing$ и

$$f(x) = \inf\{g(x) \mid g \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f)\} \text{ для всех } x \in X.$$

Из (1.6) выводим: для того чтобы $\mathcal{G}$-вогнутая функция f была регулярно $\mathcal{G}$-вогнутой, достаточно, чтобы $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f) \neq \varnothing$ и для любой функции $g \in S^+(\mathcal{G}, f)$ существовала $\bar{g} \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f)$ такая, что $g \geq \bar{g}$.

Множество минимальных $\mathcal{G}$-мажорант функции f, опорных к f в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, будем обозначать символом $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$. Таким образом, в соответствии с определением

$$S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x}) := S^+_{\min}(\mathcal{G}, f) \bigcap S^+(\mathcal{G}, f, \bar{x}).$$

Множество $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$ непусто тогда и только тогда, когда

$$f(\bar{x}) = \min\{g(\bar{x}) \mid g \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f)\},$$

при этом минимум в последнем равенстве достигается именно на тех функциях из $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f)$, которые принадлежат $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$.

Представляет интерес изучение функций, которые являются одновременно (регулярно) $\mathcal{H}$-выпуклыми и (регулярно) $\mathcal{G}$-вогнутыми и при этом $\mathcal{G} = -\mathcal{H}$, например когда $\mathcal{H}$ — конус в $\mathbb{R}^X$. В этом случае функция f является $\mathcal{G}$-вогнутой тогда и только тогда, когда $-f$ есть $\mathcal{H}$-выпуклая функция. Если, более того, $\mathcal{H} = -\mathcal{H}$, в частности если $\mathcal{H}$ — векторное подпространство в $\mathbb{R}^X$, то функция f является $\mathcal{H}$-вогнутой тогда и только тогда, когда $-f$ $\mathcal{H}$-выпукла.

Рассмотрим, как понятия абстрактной $\mathcal{H}$-выпуклости соотносятся с понятиями классической выпуклости функций.

Пусть X — вещественное локально выпуклое линейное топологическое пространство, а $\mathcal{H} = \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ — векторное пространство непрерывных аффинных функций. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ является классически выпуклой (вогнутой) и полунепрерывной снизу (сверху);

(2) функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ является $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-выпуклой ($\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-вогнутой);

(3) функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ является регулярно $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-выпуклой (регулярно $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-вогнутой).

Для любой функции $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ ее $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-опора $S^-(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), f)$ состоит из всех непрерывных аффинных минорант функции f, и если она непуста, то содержит большое число функций и в силу этого является неудобной для конструктивной работы с ней. Поэтому вместо $S^-(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), f)$ в классическом выпуклом анализе используется фактически множество $S^-_{\max}(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), f)$ максимальных $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-минорант функции f, которое задается при помощи сопряженной функции. Продемонстрируем это.

Любая аффинная непрерывная функция $a \in \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ может быть представлена в виде $a(x) = x^*(x) - c \ \forall\, x \in X$, где $x^* \in X^*$ (X^* — пространство линейных непрерывных функций, определенных на X), $c \in \mathbb{R}$. С учетом этого представления для любой функции $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ множество $S^-_{\max}(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), f)$ ее максимальных $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-минорант может быть задано равенством $S^-_{\max}(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), f) = \{x \mapsto x^*(x) - f^*(x^*) \mid x^* \in X^*\}$, где $f^*(x^*) := \sup_{x \in X}(x^*(x) - f(x)) \ \forall\, x^* \in X^*$ — функция, сопряженная f. Вторая сопряженная f^{**} функции f, определяемая равенством $f^{**}(x) := \sup_{x^* \in X^*}(x^*(x) - f^*(x^*)) \ \forall\, x \in X$, является при этом не чем иным, как $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-выпуклой оболочкой функции f.

Максимальная $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-миноранта $x \mapsto x^*(x) - f^*(x^*)$, $x \in X$, функции f является опорной в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ в том и только том случае, когда $x^*(\bar{x}) - f^*(x^*) = f(\bar{x})$, что эквивалентно условию $x^* \in \partial f(\bar{x})$, где $\partial f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid x^*(x - \bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x}) \ \forall\, x \in X\}$ — классический субдифференциал Моро — Рокафеллара функции f в точке $\bar{x}$ [8] (см. также [9, определение 1.16.1]).

Таким образом, в теории абстрактной $\mathcal{H}$-выпуклости множество максимальных $\mathcal{H}$-минорант, опорных к функции f в точке $\bar{x}$, призвано играть ту же роль, какую в классическом выпуклом анализе играет субдифференциал функции в точке. В частности, используя множество $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})$ максимальных $\mathcal{H}$-минорант, опорных к функции f в точке $\bar{x}$, мы можем получить условия для точек глобального минимума (максимума) функции f.

Теорема 1 (достаточное условие глобального минимума). *Пусть заданы функция $f\colon X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, множество элементарных функций $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X, \mathbb{R})$ и точка $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ такие, что $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x}) \neq \varnothing$. Тогда, если существует $h \in S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})$, для которой $\bar{x}$ — точка глобального минимума на подмножестве $\Omega \subseteq X$, то и для функции f точка $\bar{x}$ является точкой глобального минимума на подмножестве Ω.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если для некоторой функции $h \in S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})$ точка $\bar{x}$ является точкой глобального минимума на множестве $\Omega \subseteq X$, то $f(\bar{x}) = h(\bar{x}) \leq h(x) \leq f(x) \ \forall\, x \in \Omega$. Откуда заключаем, что $\bar{x}$ является точкой глобального минимума функции f на подмножестве Ω. □

Теорема 2 (необходимое условие глобального минимума). *Пусть для функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, множества элементарных функций $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X, \mathbb{R})$ и точки $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ множество минимальных опорных $\mathcal{G}$-мажорант к функции f в точке $\bar{x}$ непусто, т. е. $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x}) \neq \varnothing$. Если $\bar{x}$ — точка глобального минимума на подмножестве $\Omega \subseteq X$ для функции f, то тогда для* *любой функции* $g \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$ *точка* $\bar{x}$ *также является точкой глобального минимума на подмножестве* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f(\bar{x}) \le f(x)\ \forall\ x \in \Omega$, то для любой функции $g \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$ имеем $g(\bar{x}) = f(\bar{x}) \le f(x) \le g(x)\ \forall\ x \in \Omega$. Следовательно, для любой функции $g \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$ точка $\bar{x}$ является точкой глобального минимума на подмножестве Ω. □

2. Выпуклость функций относительно множества липшицевых функций

Пусть X — метрическое пространство, $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ — функция расстояния на X, $\varphi : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ — расширенно-вещественнозначная функция, определенная на X.

Говорят (см., например, [5, с. 59]), что функция φ *удовлетворяет на* X *условию Липшица* с константой Липшица $k > 0$ или что φ является k*-липшицевой на* X, если $\operatorname{dom} \varphi = X$ и

$$|\varphi(x') - \varphi(x)| \le kd(x, x')\ \forall\ x, x' \in X.$$

Функция φ называется *липшицевой на* X (*удовлетворяет условию Липшица на* X), если она является k-липшицевой при некотором $k > 0$.

Множество всех функций $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}^X$, удовлетворяющих на X условию Липшица с константой $k > 0$, будем обозначать символом $\mathcal{L}_k := \mathcal{L}_k(X, \mathbb{R})$, а множество всех липшицевых на X функций — символом $\mathcal{L} := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Непосредственно из определений следует, что $\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_k(X, \mathbb{R})$.

Ниже, если это не может вызвать недопонимание, вместо "функция φ является k-липшицевой на X или липшицевой на X" будем говорить просто, что "φ является k-липшицевой или липшицевой".

Рассмотрим в качестве множества элементарных функций пространство $\mathcal{L} := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ всех липшицевых вещественнозначных функций, определенных на метрическом пространстве X. Предположим, что для функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ множество $\mathcal{L}$-минорант $S^-(\mathcal{L}, f)$ непусто. Это предположение эквивалентно тому, что функция f ограничена снизу некоторой липшицевой функцией. Как следует из [12, Proposition 4.2], если функция f такова, что $S^-(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$, то f является L-выпуклой в том и только том случае, когда она является полунепрерывной снизу на X. Вместе с тем, несмотря на то что для некоторой функции f выполняется условие $S^-(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$, множество $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f)$ максимальных $\mathcal{L}$-минорант функции f может быть пустым. Например, для функции $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, определенной равенством $f(x) = -\sqrt{|x|}$ для всех $x \in \mathbb{R}$, множество $S^-(\mathcal{L}, f)$ непусто, поскольку f ограничена снизу липшицевой функцией $g(x) = -1 - |x|, x \in \mathbb{R}$. В то же время, поскольку f не является липшицевой, $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) = \varnothing$. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функция* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ *такова, что* $S^-(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$. *Тогда* $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* f *является липшицевой на* X, *при этом* $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) = \{f\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Предположим, что функция f липшицева. Тогда, как это нетрудно видеть, $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) = \{f\} \ne \varnothing$.

Необходимость. В силу условия $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$ из [12, Proposition 4.2] следует, что существует $\bar{k} > 0$ такое, что функция $f^{(k)}$, определенная равенством

$$f^{(k)}(x) := \inf_{y \in X} \{f(y) + kd(x, y)\}\ \forall\ x \in X, \tag{2.1}$$

является k-липшицевой для любого $k \ge \bar{k}$, причем $f^{(k)} \le f$ для всех $k \ge \bar{k}$, что влечет $f^{(k)} \in S^-(\mathcal{L}, f)$. Более того, для каждого $k \ge \bar{k}$ функция $f^{(k)}$ является наибольшей k-липшицевой минорантой функции f. Наконец, $f^{(k_1)} \le f^{(k_2)}$ для любых $\bar{k} \le k_1 \le k_2$, при этом возможны два случая:

1) существует k_0 такое, что $f^{(k_1)} = f^{(k_2)}$ для всех $k_0 \le k_1 \le k_2$;

2) $f^{(k_1)} < f^{(k_2)}$ для любых $\bar{k} \le k_1 < k_2$.

Покажем, что случай 2) невозможен. Рассмотрим произвольную $\mathcal{L}$-миноранту $h \in S^-(\mathcal{L}, f)$. Если соответствующая ей константа Липшица равна k_1, то $h < f^{(k_2)}$, где $k_2 > k_1$, и, следовательно, h не может быть максимальной. В силу произвольного выбора h заключаем, что в случае 2) в $S^-(\mathcal{L}, f)$ не существует максимальных элементов, но это противоречит предположению $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$. Значит, имеет место случай 1) и, следовательно, $f = f^{(k)}$ для любого $k \ge k_0$. Отсюда вытекает, что функция f липшицева. □

Теорема 4. *Пусть функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ ограничена снизу $\bar{k}$-липшицевой функцией. Тогда $\mathcal{L}$-выпуклая оболочка f совпадает с наибольшей полунепрерывной снизу минорантой функции f и удовлетворяет равенству*

$$f^{\mathcal{L}}(x) = \sup_{k \ge \bar{k}} f^{(k)}(x) \text{ для всех } x \in X,$$

где $f^{(k)}$ — наибольшая k-липшицева миноранта функции f, определяемая равенством (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения следует из [12, Proposition 4.2]. □

Следствие 1. *Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}^X$ является $\mathcal{L}$-выпуклой тогда и только тогда, когда она полунепрерывна снизу и ограничена снизу некоторой $\bar{k}$-липшицевой функцией, при этом*

$$f(x) = \sup_{k \ge \bar{k}} f^{(k)}(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Теорема 5. *Пусть $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ — расширенно-вещественнозначная функция, определенная на метрическом пространстве X, и пусть $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Тогда $S^-(\mathcal{L}, f, \bar{x}) \ne \varnothing$ тогда и только тогда, когда существует вещественное число $k > 0$ такое, что*

$$f(x) \ge f(\bar{x}) - kd(x, \bar{x}) \ \forall \ x \in X. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S^-(\mathcal{L}, f, \bar{x})$ непусто, и пусть $h \in S^-(\mathcal{L}, f, \bar{x})$. Так как h является липшицевой, то существует $k > 0$ такое, что $|h(x) - h(y)| \le kd(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Полагая $y = \bar{x}$ и учитывая, что $h \le f$ и $h(\bar{x}) = f(\bar{x})$, приходим из последнего неравенства к (2.2).

Предположим теперь, что при некотором $k > 0$ имеет место неравенство (2.2). Заметим, что функция $\tilde{h} : x \mapsto f(\bar{x}) - kd(x, \bar{x})$ является липшицевой на X и $\tilde{h}(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Следовательно, $\tilde{h} \in S^-(\mathcal{L}, f, \bar{x})$ и, значит, $S^-(\mathcal{L}, f, \bar{x}) \ne \varnothing$. □

Теорема 6. *Пусть функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ такова, что $S^-(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$. Множество нижних $\mathcal{L}$-опорных точек функции f совпадает с множеством всех таких точек $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, для которых существует $k > 0$ такое, что $f(\bar{x}) = f^{(k)}(\bar{x})$, т. е.*

$$Q^-(\mathcal{L}, f) = \{\bar{x} \in \operatorname{dom} f \mid \exists k > 0 \text{ такое, что } f(\bar{x}) = f^{(k)}(\bar{x})\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $S^-(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$, то существует число $\bar{k} > 0$ такое, что $f^{(k)} \in S^-(\mathcal{L}, f)$ для всех $k \ge \bar{k}$. Из этого факта и определения $\mathcal{L}$-опорных точек функции f следует, что $\{\bar{x} \in X \mid \exists k > 0 \text{ такое, что } f(\bar{x}) = f^{(k)}(\bar{x})\} \subseteq Q^-(\mathcal{L}, f)$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $\bar{x} \in Q^-(\mathcal{L}, f)$. Из определения множества $Q^-(\mathcal{L}, f)$ следует, что существует $\mathcal{L}$-миноранта h функции f такая, что $f(\bar{x}) = h(\bar{x})$. Если $k > 0$ — константа Липшица функции h, то $h \le f^{(k)} \le f$ и, следовательно, $h(\bar{x}) \le f^{(k)}(\bar{x}) \le f(\bar{x})$. Так как $f(\bar{x}) = h(\bar{x})$, то и $f^{(k)}(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Значит, $Q^-(\mathcal{L}, f) \subseteq \{\bar{x} \in X \mid \exists k > 0 \text{ такое, что } f(\bar{x}) = f^{(k)}(\bar{x})\}$. □

З а м е ч а н и е. Если для точки $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ при некотором $k > 0$ выполняется равенство $f(\bar{x}) = f^{(k)}(\bar{x})$, то $f(\bar{x}) = f^{(s)}(\bar{x})$ при любом $s \ge k$.

Теорема 7. *Пусть X — полное метрическое пространство, и пусть функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ полунепрерывна снизу и, кроме того, ограничена снизу на X некоторой липшицевой функцией. Тогда множество $Q^-(\mathcal{L}, f)$ нижних $\mathcal{L}$-опорных точек функции f плотно в* $\operatorname{dom} f$.

Доказательство. В силу следствия 1 существует вещественное число $\bar{k} > 0$ такое, что

$$f(x) = \sup_{k \geq \bar{k}} f^{(k)}(x) \text{ для всех } x \in X, \tag{2.3}$$

где $f^{(k)}$ — наибольшая k-липшицева миноранта функции f, определяемая равенством (2.1).

Рассмотрим произвольную точку $a \in \operatorname{dom} f$. Из равенства (2.3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $k_\varepsilon \geq \bar{k}$ такое, что $f(a) - \varepsilon < f^{(k_\varepsilon)}(a)$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и соответствующее ему k_ε. Тогда функция $g : x \mapsto f(x) - f^{(k_\varepsilon)}(x)$ является полунепрерывной снизу на X и $\inf\limits_{x \in X} g(x) \geq 0$. Более того, $g(a) < \inf\limits_{x \in X} g(x) + \varepsilon$. Таким образом, для функции g, точки a и числа $\varepsilon > 0$ выполнены все предположения вариационного принципа Экланда [7; 9; 14], из которого следует, что для любого $\delta > 0$ найдется точка $x_\delta \in X$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $g(x_\delta) + \dfrac{\varepsilon}{\delta} d(x_\delta, a) \leq g(a)$;

(ii) $d(x_\delta, a) \leq \delta$;

(iii) $g(x_\delta) < g(x) + \dfrac{\varepsilon}{\delta} d(x, x_\delta)$ для всех $x \in X, x \neq x_\delta$.

Функция $h\colon x \mapsto f^{(k_\varepsilon)}(x) - \dfrac{\varepsilon}{\delta} d(x, x_\delta) + (f(x_\delta) - f^{(k_\varepsilon)}(x_\delta))$ является липшицевой с константой Липшица $L \geq \max\left\{k_\varepsilon, \dfrac{\varepsilon}{\delta}\right\}$ и, кроме того, $h(x_\delta) = f(x_\delta)$. Из условия (iii) следует, что функция h является опорной $\mathcal{L}$-минорантой функции f в точке x_δ, причем в силу условий (i) и (ii) точка x_δ принадлежит $(\operatorname{dom} f) \cap B_\delta(a)$, где $B_\delta(a) := \{x \in X \mid d(x_\delta, a) \leq \delta\}$. Так как точка $a \in \operatorname{dom} f$ и число $\delta > 0$ были выбраны произвольными, то заключаем, что любая окрестность каждой точки из $\operatorname{dom} f$ содержит нижнюю $\mathcal{L}$-опорную точку функции f. $\square$

Из теорем 6 и 7 и замечания получаем

Следствие 2. *Пусть X — полное метрическое пространство, и пусть функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ — полунепрерывна снизу и, кроме того, ограничена снизу на X некоторой липшицевой функцией. Тогда для любой точки $a \in \operatorname{dom} f$ и любого числа $\delta > 0$ существуют точка $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ и число $k > 0$ такие, что $d(\bar{x}, a) \leq \delta$ и $f(\bar{x}) = f^{(s)}(\bar{x})$ для всех $s \geq k$.*

3. Выпуклость функций относительно множества липшицевых вогнутых функций

В этом разделе будем предполагать, что X является вещественным нормированным пространством. В качестве множества элементарных функций будем рассматривать множество $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}} := \mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}(X, \mathbb{R})$, состоящее из липшицевых (на X) вогнутых функций.

Напомним, что функция $\varphi : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ называется *вогнутой*, если ее подграфик

$$\operatorname{hypo} \varphi := \{(x, \gamma) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \geq \gamma\}$$

является выпуклым подмножеством в $X \times \mathbb{R}$.

Из результатов работы [12, Proposition 4.2 и Theorem 4.8] следует

Теорема 8. *Любая липшицева функция $f : X \mapsto \mathbb{R}$, определенная на нормированном пространстве X является регулярно $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-выпуклой, причем*

$$f(x) = \max_{h \in S^-_{max}(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f)} h(x) \text{ для всех } x \in X$$

и, следовательно, любая точка $x \in X$ является нижней $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-опорной точкой липшицевой функции f.

Как показывают представленные ниже теоремы 9 и 10, класс регулярно $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-выпуклых функций существенно шире пространства липшицевых функций, однако при этом не всякая точка эффективной области функции является $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-опорной точкой.

Теорема 9. *Для любой функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ следующие три утверждения эквивалентны:*
(i) *функция f является регулярно $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-выпуклой;*
(ii) *функция f является $\mathcal{L}$-выпуклой;*
(iii) *функция f полунепрерывна снизу на X и ограничена снизу некоторой функцией, удовлетворяющей условию Липшица на всем X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из включения $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}(X,\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$; эквивалентности (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) и (iii) $\Leftrightarrow$ (i) фактически доказаны соответственно в Proposition 4.2 и Theorem 4.8 из [12]. $\square$

Теорема 10. *Пусть X — полное нормированное пространство и пусть функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ — полунепрерывна снизу и, кроме того, ограничена снизу на X некоторой липшицевой функцией. Тогда множество $Q^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f)$ нижних $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-опорных точек функции f совпадает с множеством $Q^-(\mathcal{L}, f)$ нижних $\mathcal{L}$-опорных точек функции f и является плотным в* $\operatorname{dom} f$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}(X,\overline{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{L}(X,\overline{\mathbb{R}})$, то $S^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f) \subset S^-(\mathcal{L}, f)$ и, следовательно, $Q^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f) \subset Q^-(\mathcal{L}, f)$. Докажем обратное включение. Пусть $\bar{x} \in Q^-(\mathcal{L}, f)$. В силу теоремы 6 существует $k > 0$ такое, что $f^{(k)}(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Поскольку $f^{(k)}$ является липшицевой, то по теореме 8 любая точка $x \in X$, а значит и точка $\bar{x}$, является $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-опорной для функции $f^{(k)}$. Следовательно, существует $\bar{h} \in S^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f^{(k)})$ такая, что $f^{(k)}(\bar{x}) = \bar{h}(\bar{x})$. Поскольку $f^{(k)} \le f$, то $S^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f^{(k)}) \subset S^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f)$. Учитывая это включение и равенство $f^{(k)}(\bar{x}) = f(\bar{x})$, заключаем, что $\bar{h} \in S^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f)$ и $f(\bar{x}) = \bar{h}(\bar{x})$, т. е. что $\bar{h}$ является опорной $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-минорантой функции f в точке $\bar{x}$. Это доказывает, что $\bar{x} \in Q^-(\mathcal{L}, f)$. Таким образом, $Q^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f) = Q^-(\mathcal{L}, f)$. Поскольку в силу теоремы 7 $Q^-(\mathcal{L}, f)$ плотно в $\operatorname{dom} f$, то $Q^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f)$ также плотно в $\operatorname{dom} f$. $\square$

Теорема 11 (критерий глобального минимума функции). *Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ достигает глобального минимума в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ в том и только том случае, когда $c_{f(\bar{x})} \in S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \bar{x})$, где $c_{f(\bar{x})} : X \ni x \mapsto f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ — константная функция, равная $f(\bar{x})$ для всех $x \in X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость данного критерия следует непосредственно из определений глобального минимума функции f и множества $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \bar{x})$, а также из того, что любая константная, более того, аффинная функция является вогнутой. $\square$

Теорема 12 (необходимое условие глобального максимума). *Пусть для функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ и точки $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ множество $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \bar{x})$ максимальных опорных $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорант функции f в точке $\bar{x}$ непусто. Тогда если $\bar{x}$ является точкой глобального максимума функции f, то $0_X \in \partial^+ g(\bar{x})$ для любой функции $g \in S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \bar{x})$.*

Здесь $\partial^+ g(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid x^*(x - \bar{x}) \ge g(x) - g(\bar{x}) \ \forall\, x \in X\}$ — классический супердифференциал Моро — Рокафеллара вогнутой функции g в точке $\bar{x}$, а 0_X — нулевой линейный функционал, определенный на X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точка $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ является точкой глобального максимума функции f, то для любой функции $g \in S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \bar{x})$ точка $\bar{x}$ также является точкой глобального максимума, а поскольку функции g вогнуты, то это равносильно условию $0_X \in \partial^+ g(\bar{x})$. $\square$

Заключение

Как следует из теорем 9 и 10, каждая полунепрерывная снизу функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, которая, кроме того, ограничена снизу некоторой липшицевой функцией, в любой точке $\bar{x}$ плотного подмножества ее эффективной области $\operatorname{dom} f$ имеет непустое множество $S^{-}_{\max}(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f, \bar{x})$ максимальных опорных $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-минорант функции f. Нетрудно убедиться в том, что если функция f полунепрерывна снизу и выпукла, то каждая максимальная опорная $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-миноранта функции f является непрерывной аффинной функцией (это следует из теорем об отделимости выпуклых множеств [9, с. 79] или, более конкретно, из теоремы о сэндвиче [15, Corollary 1.76]), при этом элементы множества $S^{-}_{\max}(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f, \bar{x})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с субградиентами классического субдифференциала Моро — Рокафеллара [9, определение 1.16.1] $\partial f(\bar{x})$ функции f в точке $\bar{x}$. Таким образом, множество $S^{-}_{\max}(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f, \bar{x})$ максимальных опорных $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-минорант функции в точке распространяет фактически понятие классического субдифференциала Моро — Рокафеллара для полунепрерывных снизу выпуклых функций на существенно более широкий класс полунепрерывных функций. Как известно, для классически выпуклых функций существуют два эквивалентных определения субдифференциала: глобальное [8; 9, определение 1.16.1] и локальное [16, с. 44]. Введенное в данной статье множество $S^{-}_{\max}(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f, \bar{x})$ максимальных опорных $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-минорант функции распространяет глобальное определение классического субдифференциала. В то же время исчерпывающий субдифференциал Демьянова — Рубинова, введенный ранее в [12; 13], является $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-распространением локального определения классического субдифференциала. В плане дальнейших исследований представляется перспективной разработка методов анализа негладких функций на основе этих двух конструкций, а также изучение связи между ними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Singer I.** Abstract Convex Analysis. N Y: Wiley-Interscience Publ., 1997. 491 p. ISBN: 978-0471160151 .
2. **Солтан В.П.** Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев: Штиинца, 1984. 223 с.
3. **Кутателадзе С.С., Рубинов А.М.** Двойственность Минковского и ее приложения // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, вып. 3(165). С. 127–176.
4. **Кутателадзе С.С., Рубинов А.М.** Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1976. 254 с.
5. **Pallaschke D., Rolewicz S.** Foundations of mathematical optimization (Convex analysis without linearity). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 596 p. doi: 10.1007/978-94-017-1588-1 .
6. **Rubinov A.M.** Abstract convexity and global optimization. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 490 p. ISBN 978-1-4757-3200-9 .
7. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
8. **Brøndsted A., Rockafellar R.T.** On the subdifferentiability of convex functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 16, no. 4. P. 605–611. doi: 10.2307/2033889 .
9. **Половинкин Е.С., Балашов М.В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 416 с.
10. **Bishop E., Phelps R.R.** The support functionals of convex sets // Convexity / ed. V. Klee: Proc. of Symposia in Pure Mathematics. Vol. VII. Providence, Rhode Island: American Math. Soc., 1963. P. 27–35. doi: 10.1090/pspum/007/0154092 .
11. **Гороховик В.В.** О представлении полунепрерывных сверху функций, определенных на бесконечномерных нормированных пространствах, в виде нижних огибающих семейств выпуклых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 88–102. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-88-102 .
12. **Gorokhovik V.V.** Minimal convex majorants of functions and Demyanov–Rubinov exhaustive super(sub)differentials // Optimization. J. Math. Programming and Operations Research. Published online: 09 Sep 2018. doi: 10.1080/02331934.2018.1518446 .
13. **Gorokhovik V.V.** Demyanov–Rubinov subdifferentials of real-valued functions // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA) / ed. Polyakova: Proc. Conf. Piscataway, New Jersey: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2017. P. 122–125. doi: 10.1109/cnsa.2017.7973962;

14. **Ekeland I.** Nonconvex minimization problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 1, no. 3. P. 432–467.
15. **Penot J.P.** Calculus without derivatives. N Y: Springer, 2013. 524 p. doi: 10.1007/978-1-4614-4538-8 .
16. **Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** Выпуклый анализ и его приложения. М.: Едиториал УРСС, 2003. 176 с. SBN-13: 978-0821835258 .

Поступила 20.04.2019
После доработки 15.05.2019
Принята к публикации 20.05.2019

Гороховик Валентин Викентьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. НАН Беларуси
зав. отделом
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск
e-mail: gorokh@im.bas-net.by

Тыкун Александр Станиславович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Белорусский государственный университет
механико-математический факультет
г. Минск
e-mail: tykoun@bsu.by

REFERENCES

1. Singer I. *Abstract convex analysis.* N Y: Wiley-Interscience Publ., 1997, 491 p. ISBN: 978-0471160151 .
2. Soltan V.P. *Vvedenie v aksiomaticheskuyu teoriyu vypuklosti* [Introduction to axiomatic convexity theory]. Kishinev: Shtiintsa Publ., 1984, 223 p.
3. Kutateladze S.S., Rubinov A.M. Minkowski duality and its applications. *Russian Math Surveys*, 1972, vol. 27, no. 3, pp. 137–191. doi: 10.1070/RM1972v027n03ABEH001380 .
4. Kutateladze S.S., Rubinov A.M. *Dvoistvennost' Minkovskogo i ee prilozheniya* [Minkowski Duality and Its Applications]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1976, 254 p.
5. Pallaschke D., Rolewicz S. *Foundations of mathematical optimization* [Convex analysis without linearity]. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, 596 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1588-1 .
6. Rubinov A.M. *Abstract convexity and global optimization.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000, 490 p. ISBN: 978-1-4757-3200-9 .
7. Ekeland I, Temam R. *Convex analysis and variational problems.* Amsterdam: North-Holland, 1976, 402 p. Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz i variatsionnye problemy.* Moscow: Mir Publ., 1979, 399 p.
8. Brøndsted A., Rockafellar R.T. On the subdifferentiability of convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1965, vol. 16, no. 4, pp. 605–611. doi: 10.2307/2033889 .
9. Polovinkin E.S., Balashov M.V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of convex and strongly convex analysis]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2004, 416 p. ISBN: 5-9221-0499-3 .
10. Bishop E., Phelps .R. The support functionals of convex sets. In: V. Klee (ed.), *Convexity: Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, vol. VII. Providence, RI: American Math. Soc., 1963, pp. 27–35. doi: 10.1090/pspum/007/0154092 .
11. Gorokhovik V.V. On the representation of upper semicontinuous functions defined on infinite-dimensional normed spaces as lower envelopes of families of convex functions. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 88–102 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-88-102 .
12. Gorokhovik V.V. Minimal convex majorants of functions and Demyanov–Rubinov exhaustive super(sub)differentials. *Optimization. J. Math. Programming and Operations Research.* Published online: 09 Sep 2018. doi: 10.1080/02331934.2018.1518446 .

13. Gorokhovik V.V. Demyanov–Rubinov subdifferentials of real-valued functions. In: Polyakova L.N. (ed). *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics* (Dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), Proc. Conf., New Jersey: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2017, pp. 122–125. doi: 10.1109/cnsa.2017.7973962 .
14. Ekeland I. Nonconvex minimization problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1979, vol. 1, no. 3, pp. 443–474.
15. Penot J.P. *Calculus without Derivatives.* N Y: Springer, 2013, 524 p. doi: 10.1007/978-1-4614-4538-8 .
16. Magaril-Ilyaev G.G., Tikhomirov V.M. *Convex analysis: Theory and applications.* N Y: American Math. Soc., 2003, 183 p. ISBN: 978-0821835258 . Original Russian text published in Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M. *Vypuklyi analiz i ego prilozheniya.* Moscow: Editorial URSS, 2003, 176 p.

Received April 20, 2019
Revised May 15, 2019
Accepted May 20, 2019

Funding Agency: This work was supported by the National Program for Scientific Research of the Republic of Belarus for 2016–2020 "Convergence 2020" (project no. 1.4.01).

Valentin Vikent'evich Gorokhovik, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of NAS of Belarus, Prof., Institute of Mathematics, The National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072 Belarus, e-mail: gorokh@im.bas-net.by .

Alexander Stanislavovich Tykoun, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: tykoun@bsu.by .

Cite this article as: V. V. Gorokhovik, A. S. Tykoun. Abstract convexity of functions with respect to the set of Lipschitz (concave) functions, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 73–85 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977.1

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НА МАЛЫХ ВРЕМЕННЫХ ПРОМЕЖУТКАХ

М. И. Гусев, И. О. Осипов

Геометрическая структура множеств достижимости на малых временных промежутках играет важную роль в теории управления, в частности при решении задач локального синтеза. В данной работе рассматривается задача приближенного описания множеств достижимости на малых временах для аффинных по управлению систем с интегральными квадратичными ограничениями на управление. Используя замену времени, авторы вместо исходного множества рассматривают множество достижимости для управляемой системы на единичном интервале, содержащей малый параметр (длину временного интервала для исходной системы). При этом ограничения на управление заданы шаром малого радиуса в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2$. При определенных условиях, накладываемых на грамиан управляемости линеаризованной системы, такое множество достижимости оказывается выпуклым при достаточно малом значении параметра. В работе показано, что в этом случае множество достижимости асимптотически близко по форме к эллипсоиду в пространстве состояний. Доказательство данного факта базируется на представлении множества достижимости в виде образа гильбертова шара малого радиуса в $\mathbb{L}_2$ при нелинейном отображении его в $\mathbb{R}^n$. В частности, данное асимптотическое представление имеет место для достаточно широкого класса нелинейных управляемых систем второго порядка с интегральными ограничениями. В статье приведены три примера систем, множества достижимости которых демонстрируют как наличие указанного асимптотического поведения, так и отсутствие последнего при невыполнении нужных условий.

Ключевые слова: управляемая система, интегральные ограничения, множество достижимости, выпуклость, асимптотика.

M. I. Gusev, I. O. Osipov. Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals.

The geometric structure of small-time reachable sets plays an important role in control theory, in particular, in solving problems of local synthesis. In this paper, we consider the problem of approximate description of reachable sets on small time intervals for control-affine systems with integral quadratic constraints on the control. Using a time substitution, we replace such a set by the reachable set on a unit interval of a control system with a small parameter, which is the length of the time interval for the original system. The constraints on the control are given by a ball of small radius in the Hilbert space $\mathbb{L}_2$. Under certain conditions imposed on the controllability Gramian of the linearized system, this reachable set turns out to be convex for sufficiently small values of the parameter. We show that in this case the shape of the reachable set in the state space is asymptotically close to an ellipsoid. The proof of this fact is based on the representation of the reachable set as the image of a Hilbert ball of small radius in $\mathbb{L}_2$ under a nonlinear mapping to $\mathbb{R}^n$. In particular, this asymptotic representation holds for a fairly wide class of second-order nonlinear control systems with integral constraints. We give three examples of systems whose reachable sets demonstrate both the presence of the indicated asymptotic behavior and the absence of the latter if the necessary conditions are not satisfied.

Keywords: control system, integral constraints, reachable set, convexity, asymptotics.

MSC: 93B03

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-86-99

Введение

В работе рассматриваются асимптотические свойства множеств достижимости нелинейных управляемых систем с интегральными квадратичными ограничениями на управляющие параметры. Хорошо известно (см. [1; 2]), что в случае линейных управляемых систем такие множества выпуклы. Более того, эти множества являются эллипсоидами в конечномерном пространстве состояний системы, параметры данных эллипсоидов допускают конструктивное описание. В общем случае нелинейных систем с интегральными ограничениями свойство выпуклости множеств достижимости теряется и для их построения приходится использовать достаточно трудоемкие приближенные алгоритмы [3–5]. Однако, если временной промежуток имеет достаточно малую длину, множества достижимости могут оказаться выпуклыми.

Геометрическая структура множеств достижимости на малых временных промежутках играет важную роль в теории управления, в частности при решении задач локального синтеза. Множества достижимости на малых интервалах времени при геометрических ограничениях на управление изучались рядом авторов (см., например, [6; 7]). Выпуклость множеств достижимости нелинейных систем исследована в [8; 9]. Асимптотическому поведению множеств достижимости линейных управляемых систем с интегральными ограничениями на управление на малых промежутках времени посвящена работа [10]. В данной статье рассматривается задача описания множеств достижимости на малых промежутках времени для аффинных по управлению систем с интегральными квадратичными ограничениями на управление. Используя замену времени, мы подменяем исходное множество достижимости множеством достижимости для управляемой системы на единичном интервале, содержащей малый параметр (длину временного интервала для исходной системы) [11]. При этом ограничения на управление оказываются заданы шаром малого радиуса в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2$, а множество достижимости имеет вид образа шара при нелинейном отображении его в $\mathbb{R}^n$. Из работы [12] при условиях регулярности, накладываемых на производную отображения, следует выпуклость образа при достаточно малом радиусе шара и, соответственно, множества достижимости. Эти условия, применительно к рассмотренной в работе системе, принимают вид ограничений снизу на минимальное собственное число грамиана управляемости линеаризованной системы при малых значениях параметра [11].

В настоящей статье показано, что в этом случае множество достижимости не только выпукло, но и асимптотически близко по форме к эллипсоиду в пространстве состояний. В частности, указанное асимптотическое представление имеет место для достаточно широкого класса нелинейных управляемых систем второго порядка с интегральными ограничениями. В статье приведены три примера систем, множества достижимости которых иллюстрируют данный факт. В первых двух примерах двумерных нелинейных систем справедливо указанное асимптотическое поведение множеств достижимости. В третьем примере, описывающем поведение нелинейной управляемой системы с одним входом (уницикл), показано, что множества достижимости не являются выпуклыми даже при малых временах.

1. Постановка задачи и вспомогательные результаты

Пусть X, Y — банаховы пространства, обозначим через $B_X(a, \mu_0) \subset X$ шар радиуса μ_0 с центром в точке a. Рассмотрим отображение шара $F_\varepsilon : B_X(a, \mu_0) \to Y$, зависящее от параметра ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. В дальнейшем этот параметр будем считать малым.

Предположение 1. *Отображение $F_\varepsilon(x)$ имеет производную Фреше по x, которая удовлетворяет условию Липшица на $B_X(a, \mu_0)$*

$$\|F_\varepsilon^{'}(x_1) - F_\varepsilon^{'}(x_2)\| \le L(\varepsilon)\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in B_X(a, \mu_0), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{1.1}$$

где $L(\varepsilon)$ — ограниченная на $(0, \varepsilon_0]$ функция.

Пусть функция $\mu(\varepsilon)$ отображает полуинтервал $(0, \varepsilon_0]$ в $(0, \mu_0]$. Далее полагаем, что $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Функцию $s(\varepsilon) : [0, \varepsilon_0] \to (0, \infty)$ назовем масштабирующим множителем, если $s(\varepsilon) \to \infty$, $s(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon)L(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через G_ε образ шара $B_X(a, \mu(\varepsilon))$

$$G_\varepsilon = \{F_\varepsilon(x) : x \in B_X(a, \mu(\varepsilon))\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1.1) *и* $\mu(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Пусть* $s(\varepsilon)$ *— масштабирующий множитель. Тогда*

$$h(s(\varepsilon)(\mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)), \mu(\varepsilon)s(\varepsilon)F_\varepsilon'(a)B_X(0,1)) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где h *— хаусдорфово расстояние между множествами, символом* "co" *обозначена выпуклая оболочка множества.*

Доказательство. Для произвольного элемента $x \in B_X(a, \mu(\varepsilon))$, используя теорему о среднем, запишем равенство

$$F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a) = F_\varepsilon'(\bar{x}(\varepsilon))(x-a) = F_\varepsilon'(a)(x-a) + (F_\varepsilon'(\bar{x}(\varepsilon)) - F_\varepsilon'(a))(x-a) = F_\varepsilon'(a)(x-a) + r(\varepsilon, x).$$

Здесь $\bar{x}(\varepsilon)$ — точка отрезка, соединяющего x и a. Из условия (1.1) вытекает следующее неравенство:

$$\|r(\varepsilon, x)\| \le L(\varepsilon)\|\bar{x}(\varepsilon) - a\| \cdot \|x - a\| \le L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon).$$

Вычисляя супремум от обеих частей равенства

$$(y^*, F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a)) = (y^*, F_\varepsilon'(a))(x-a) + r(\varepsilon, x)),$$

на шаре $B_X(a, \mu(\varepsilon))$ получим

$$\sup_{\|x-a\| \le \mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a)) \le \sup_{\|x-a\| \le \mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon'(a)(x-a)) + \sup_{\|x-a\| \le \mu(\varepsilon)} (y^*, r(\varepsilon, x)).$$

Здесь y^* — произвольный элемент из сопряженного к Y пространства Y^*, $(\cdot,\cdot)$ — билинейная форма, приводящая Y и Y^* в двойственность. Применяя подобную операцию к равенству $F_\varepsilon'(a)(x-a) = F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a) - r(\varepsilon, x)$, будем иметь

$$\sup_{\|x-a\| \le \mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon'(a)(x-a)) \le \sup_{\|x-a\| \le \mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a)) + \sup_{\|x-a\| \le \mu(\varepsilon)} (-y^*, r(\varepsilon, x)).$$

Из доказанных неравенств, учитывая оценку для $r(\varepsilon, x)$, получим

$$\Big| \sup_{\|x-a\| \le \mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a)) - \sup_{\|x-a\| \le \mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon'(a)(x-a)) \Big| \le L(\varepsilon)\|y^*\|\mu^2(\varepsilon). \tag{1.2}$$

Очевидно, что

$$\sup_{\|x-a\| \le \mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a)) = \delta(y^* | G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)) = \delta(y^* | \mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)),$$

$$\sup_{\|x-a\| \le \mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon'(a)(x-a)) = \mu(\varepsilon)\|F_\varepsilon'(a)^* y^*\| = \mu(\varepsilon)\delta(y^* | F_\varepsilon'(a)B_X(0,1)),$$

где через $\delta(y^*|A)$ обозначена опорная функция множества $A \subset X$, T^* — стандартное обозначение для оператора, сопряженного к линейному ограниченному оператору T. Неравенство (1.2) можно в таком случае записать в следующем эквивалентном виде:

$$\sup_{\|y^*\|=1} |\delta(y^* | \mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)) - \mu(\varepsilon)\delta(y^* | F_\varepsilon'(a)B_X(0,1))| \le L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon).$$

Левая часть последнего неравенства представляет собой формулу для хаусдорфова расстояния между ограниченными выпуклыми множествами $\mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)$ и $\mu(\varepsilon)F_\varepsilon'(a)B_X(0,1))$, следовательно,

$$h(\mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a), \mu(\varepsilon)F_\varepsilon'(a)B_X(0,1)) \le L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon). \tag{1.3}$$

Умножив обе части неравенства (1.3) на $s(\varepsilon)$ и принимая во внимание равенство $h(\lambda A, \lambda B) = \lambda h(A, B)$, $\lambda > 0$, справедливое для хаусдорфова расстояния между множествами A, B, приходим к утверждению теоремы. □

Поясним смысл введения масштабирующего множителя $s(\varepsilon)$. Если не умножать обе части неравенства (1.3) на $s(\varepsilon)$, то мы получим, разумеется, что

$$h(\mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a), \mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)) \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

учитывая, что константа Липшица $L(\varepsilon)$ ограничена в окрестности нуля. Данное соотношение не очень содержательно, так как понятно, что каждое из этих двух множеств стягивается к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Во-первых, выбором $s(\varepsilon)$ надо добиться, чтобы множество $s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1))$ не стягивалось к нулю. Множитель $s(\varepsilon)$ должен стремиться к бесконечности при $\varepsilon \to 0$, его можно интерпретировать как увеличение “микроскопа”, с помощью которого изучается асимптотическое поведение указанных множеств (см. [10]). Можно предложить следующий способ выбора $s(\varepsilon)$. Множество $\mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1))$ — центрально-симметричное выпуклое множество с центром в нуле. Введем две величины, определяющие максимальный и минимальный “размеры” центрально-симметричного множества $A \subset X$

$$\lambda_{\max}(A) = \sup_{\|y^*\|=1}\delta(y^*|A), \quad \lambda_{\min}(A) = \inf_{\|y^*\|=1}\delta(y^*|A).$$

Если A имеет непустую внутренность, то обе эти величины положительны. Предположим, что множества $F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1))$ имеют непустую внутренность при достаточно малых ε. Функцию $s(\varepsilon)$ выберем таким образом

$$s(\varepsilon) = 1/\mu(\varepsilon)\lambda_{\max}(F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)),$$

это исключает стягивание $s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)$ к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Во-вторых, надо добиться, чтобы хаусдорфово расстояние между множествами $s(\varepsilon)(\mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a))$ и $s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)$ стремилось к нулю быстрее, чем $\lambda_{\min}(s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1))$ — минимальный из размеров второго множества. Только в этом случае можно говорить, что форма этих множеств близка между собой. Умножив обе части неравенства (1.3) на $s(\varepsilon)$, получим, что данное условие будет выполнено, если

$$\mu(\varepsilon)L(\varepsilon)/\lambda_{\max}(F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)) = o(\lambda_{\min}(F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1))),$$

т. е. данное условие не зависит от выбора масштабирующего множителя.

Пусть X, Y — действительные гильбертовы пространства. Предположим, что отображение $F : B_X(a, \mu_0) \to Y$ дифференцируемо и его производная Фреше $F^{'}$ удовлетворяет условию Липшица с константой L. Пусть отображение F регулярно в точке a, т. е. оператор $F'(a) : X \to Y$ является сюрьективным (отображением на). Из последнего свойства следует существование положительного числа γ, такого что $\|F'(a)^*y\| \geq \gamma\|y\|$ для всех $y \in Y$, что эквивалентно неравенству

$$(F'(a)F'(a)^*y, y) \geq \gamma^2\|y\|^2$$

для всех $y \in Y$. В качестве γ^2 можно взять, например, минимальное собственное число самосопряженного оператора $F'(a)F'(a)^*$.

В работе [12] показано, что если выполняется неравенство $\mu \leq \min\left\{\mu_0, \dfrac{\gamma}{2L}\right\}$ то образ шара $B(a, \mu)$ — множество $G = \{F(x) : x \in B(a, \mu)\}$ — является выпуклым.

Рассмотрим семейство операторов F_ε, считая далее, что X — гильбертово пространство, $Y = \mathbb{R}^n$ — конечномерное евклидово пространство. Пусть отображения F_ε регулярны в точке a. Обозначим через $\gamma^2(\varepsilon)$ и $\eta^2(\varepsilon)$ ($\gamma(\varepsilon) > 0$, $\eta(\varepsilon) > 0$) соответственно минимальное и максимальное собственные числа оператора (матрицы) $W_\varepsilon := F_\varepsilon'(a)F_\varepsilon'(a)^*$. Заметим, что множество

$E_\varepsilon := F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)$ в данном случае — конечномерный эллипсоид, определяемый соотношением $E_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top W_\varepsilon^{-1} x \le 1\}$, а $\eta(\varepsilon)$ и $\gamma(\varepsilon)$ — соответственно величины максимальной и минимальной полуосей эллипсоида.

Найдем $\lambda_{\min}(E_\varepsilon)$, $\lambda_{\max}(E_\varepsilon)$. Вычисляя значение опорной функции, получим

$$\delta(y^*|F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)) = \sup_{(u,u)\le 1}(y^*, F_\varepsilon^{'}(a)u) = \sup_{(u,u)\le 1}(F_\varepsilon^{'}(a)^*y^*, u) = \|F_\varepsilon^{'}(a)^*y^*\| = \sqrt{(y^*, W_\varepsilon y^*)}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{\min}(F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)) = \lambda_{\min}(E_\varepsilon) = \min_{\|y^*\|=1}\sqrt{(y^*, W_\varepsilon y^*)} = \sqrt{\gamma^2(\varepsilon)} = \gamma(\varepsilon),$$

$$\lambda_{\max}(F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)) = \lambda_{\max}(E_\varepsilon) = \max_{\|y^*\|=1}\sqrt{(y^*, W_\varepsilon y^*)} = \sqrt{\eta^2(\varepsilon)} = \eta(\varepsilon).$$

Следствие 1.1. *Пусть $\mu(\varepsilon) \to 0$, $\eta(\varepsilon)$ ограничена в нуле и $\mu(\varepsilon)L(\varepsilon)/\eta(\varepsilon) = o(\gamma(\varepsilon))$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть $s(\varepsilon)$ — масштабирующий множитель, определенный равенством $s(\varepsilon) = 1/\mu(\varepsilon)\eta(\varepsilon)$. Тогда G_ε выпукло для достаточно малых ε и*

$$h(s(\varepsilon)(G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)), \mu(\varepsilon)s(\varepsilon)E_\varepsilon) \le o(\gamma(\varepsilon)) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Пусть $\gamma(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$. Поскольку $\mu(\varepsilon)L(\varepsilon)/\eta(\varepsilon) = o(\gamma(\varepsilon))$, то при достаточно малых ε выполняется неравенство $2\mu(\varepsilon)L(\varepsilon) \le \gamma(\varepsilon)$, которое гарантирует, что $\mathrm{co}G_\varepsilon = G_\varepsilon$. Следовательно, из теоремы 1 получаем утверждение следствия. При $\gamma(\varepsilon) \ge \alpha > 0$ неравенство $2\mu(\varepsilon)L(\varepsilon) \le \gamma(\varepsilon)$, очевидно, выполнено при малых ε. В этом случае $o(\gamma(\varepsilon))$ означает величину стремящуюся к нулю. □

Таким образом, в условиях следствия образы шаров малого радиуса при нелинейном отображении $F_\varepsilon(x)$ по форме близки к эллипсоидам.

2. Асимптотика множеств достижимости

Рассмотрим управляемую систему, аффинную по управлению

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{2.1}$$

где $t_0 \le t \le t_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, функции $f_1 : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times r}$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x. Обозначим через $\mathbb{L}_2$ гильбертово пространство интегрируемых с квадратом вектор-функций, скалярное произведение, в котором определено равенством

$$(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} u^\top(t)v(t)dt.$$

Ограничения на $u(\cdot)$ заданы в виде шара $B(0,\mu) = \{u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : (u(\cdot), u(\cdot)) \le \mu^2\}$ радиуса $\mu > 0$.

Будем далее предполагать, что для любого $u(\cdot) \in B(0,\mu_0)$ существует и единственно решение $x(t)$ системы (2.1), это решение определено на промежутке $[t_0, t_1]$ и все траектории системы (2.1), отвечающие управлениям из $B(0,\mu)$, принадлежат $D \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим $G(t_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : (u(\cdot), u(\cdot)) \le \mu^2,\ x = x(t_1, u(\cdot))\}$, $G(t_1)$ — множество достижимости (2.1) в заданный момент t_1.

Предположение 2. *Функции $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ имеют непрерывные производные по x, которые удовлетворяют условию Липшица: для всех $t \in [t_0, t_1]$, $x_1, x_2 \in D$*

$$\Big\|\frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x_2)\Big\| \le L_3\|x_1 - x_2\|, \ \Big\|\frac{\partial f_2}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(t, x_2)\Big\| \le L_4\|x_1 - x_2\|,$$

где $L_i \ge 0$ для $i = 3, 4$.

Далее мы исследуем поведение множеств достижимости $G(t_1)$ при фиксированном μ в предположении, что интервал $[t_0, t_1]$ является малым. Используя предложенную в [11] замену времени, мы сводим задачу описания множества достижимости на малом интервале к аналогичной задаче на фиксированном интервале для системы, уравнения которой и интегральные ограничения на управление зависят от малого параметра.

Далее мы предполагаем, что уравнения системы (2.1) определены на отрезке $[t_0, \bar{t}_1]$, что все траектории системы (2.1), отвечающие управлениям $u(\cdot) \in B(0, \mu)$, $t \in [t_0, \bar{t}_1]$, принадлежат компакту D и предположение 2 выполняется на $[t_0, \bar{t}_1]$. Рассмотрим $t_0 < t_1 \leq \bar{t}_1$ и обозначим $t_1 - t_0 = \varepsilon$. Произведя замену времени $t = \varepsilon\tau + t_0$ и положив $y(\tau) = x(\varepsilon\tau + t_0)$, $v(\tau) = \varepsilon u(\varepsilon\tau + t_0)$, мы получим

$$\dot{y}(\tau) = \tilde{f}_1(\tau, y(\tau)) + \tilde{f}_2(\tau, y)v(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad y(0) = x^0, \tag{2.2}$$

где $\tilde{f}_1(\tau, y) = \varepsilon f_1(\varepsilon\tau + t_0, y)$, $\tilde{f}_2(\tau, y) = f_2(\varepsilon\tau + t_0, y)$ при ограничении на управление $v(\cdot)$, заданном неравенством

$$\int_0^1 v^\top(t)v(t)dt \leq (\mu\sqrt{\varepsilon})^2. \tag{2.3}$$

Заметим, что траектории системы (2.2), (2.3), как и ранее, принадлежат D при $\varepsilon \leq \bar{t}_1 - t_0$ и $y(\tau, 0) = x(\varepsilon\tau + t_0, 0)$.

Определим семейство отображений $F_\varepsilon : \mathbb{L}_2[0, 1] \to \mathbb{R}^n$ равенством $F_\varepsilon(v(\cdot)) = y_\varepsilon(1, v(\cdot))$, где $y_\varepsilon(t, v(\cdot))$ — соответствующее управлению $v(\cdot)$ решение системы (2.2). Тогда, в силу того что $y(1, v(\cdot)) = x(t_1, u(\cdot))$, имеет место равенство

$$\tilde{G}(1) = G(t_1) = G_\varepsilon := \{F_\varepsilon(x) : x \in B(0, \mu(\varepsilon))\}.$$

Здесь $\tilde{G}(1)$ — множество достижимости системы (2.2) при ограничении (2.3), $\mu(\varepsilon) = \mu\sqrt{\varepsilon}$. Отметим, что $\tilde{G}(1)$ и $G(t_1)$ зависят от малого параметра ε, хотя это явным образом и не отражено в используемых обозначениях.

Производная отображения $F_\varepsilon(v(\cdot))$ определяется равенством $F'_\varepsilon(v(\cdot))\Delta v(\cdot) = \Delta y(1)$, где $\Delta y(t)$ — решение линеаризованной вдоль пары $y(t, v(\cdot)), v(\cdot)$ системы

$$\dot{\Delta y}(t) = \varepsilon A_\varepsilon(t)\Delta y(t) + B_\varepsilon(t)v(t), \quad t \in [0, 1], \quad \Delta y(0) = 0.$$

При выполнении условий предположения 2 отображение $F'_\varepsilon(v(\cdot))$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L(\varepsilon) = L_0 + L_1\varepsilon$ $(L_0, L_1 \geq 0)$ [13]. Причем если коэффициенты матрицы f_2 в уравнении системы не зависят от состояния $(f_2(t, x) = f_2(t))$, то $L_0 = 0$. Ограничения на управление заданы шаром $B_{\mathbb{L}_2}(0, 1)$ с центром в нуле. Самосопряженный оператор $F'_\varepsilon(0)F'_\varepsilon(0)^*$ имеет вид

$$F'_\varepsilon(0)F'_\varepsilon(0)^* = W_\varepsilon(1),$$

где симметричная неотрицательно определенная матрица $W_\varepsilon(t)$ — грамиан управляемости линеаризованной в окрестности нулевого управления системы (2.2). Грамиан определяется равенством

$$W_\varepsilon(t) = \int_0^t X_\varepsilon(t, \tau)B_\varepsilon(t)B_\varepsilon^\top(t)X_\varepsilon^\top(t, \tau)d\tau.$$

Здесь $X_\varepsilon(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы $(\dot{X}_\varepsilon(t, \tau) = \varepsilon A_\varepsilon(t)X_\varepsilon(t, \tau),\ X(\tau, \tau) = I)$. Регулярность отображения $F'_\varepsilon(0)$ эквивалентна невырожденности грамиана, которая, в свою очередь, имеет место тогда и только тогда, когда линеаризованная система вполне управляема. В данном случае $F'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2}(0, 1)$ — множество достижимости в момент $t = 1$ системы, линеаризованной вдоль траектории, отвечающей нулевому управлению.

Известно (см., например, [2]), что это множество является эллипсоидом в $\mathbb{R}^n$, который можно представить в следующем виде:

$$F'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top W_\varepsilon^{-1}(1)x \leq 1\}.$$

Далее для краткости используем обозначение $W_\varepsilon = W_\varepsilon(1)$. Сделаем невырожденную замену переменных $z = W_\varepsilon^{-1/2}x$, для произвольного вектора x из множества достижимости будем иметь неравенство $(z, z) \leq 1$, т. е. $z \in B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$. Отсюда получаем

$$F'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2}(0,1) = W_\varepsilon^{1/2}B_{\mathbb{R}^n}(0,1).$$

Пусть, как и ранее, $\gamma^2(\varepsilon)$, $\eta^2(\varepsilon)$ минимальное и максимальное собственные числа W_ε. Так как $\mu(\varepsilon) = \mu\sqrt{\varepsilon}$ то условие $\mu(\varepsilon)L(\varepsilon)/\eta(\varepsilon) = o(\gamma(\varepsilon))$ принимает вид

$$\sqrt{\varepsilon}L(\varepsilon)/\eta(\varepsilon) = o(\gamma(\varepsilon)). \tag{2.4}$$

В итоге мы приходим к следующему утверждению.

Утверждение. *Пусть при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение* (2.4). *Тогда множество достижимости $G(t_1)$ выпукло при достаточно малых t_1 и*

$$h\Big(s(\varepsilon)(G(t_1) - x(t_1, 0)), \mu(\varepsilon)s(\varepsilon)W_\varepsilon^{1/2}B_{\mathbb{R}^n}(0,1)\Big) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.5}$$

Здесь $t_1 = t_0 + \varepsilon$, $x(t, 0)$ — решение системы, отвечающее нулевому управлению, $s(\varepsilon) = 1/(\mu\,\eta(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon})$ — масштабирующий множитель.

В общем случае проверка выполнения условия (2.4) представляет достаточно трудную задачу, так как требует исследования асимптотики грамиана управляемости для нестационарной линейной системы, зависящей от малого параметра. Для отдельных случаев стационарных управляемых систем в [13] получены оценки минимального собственного числа грамиана управляемости линеаризованной системы.

Пусть исходная система имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t), \quad x(0) = x^0, \quad 0 \leq t \leq t_1, \tag{2.6}$$

$0 \leq t \leq t_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, B — матрица размеров $n \times 1$ с интегральными квадратичными ограничениями на управление $u(\cdot) \in B(0, \mu)$. Считаем, что существует компактное множество $D \subset \mathbb{R}^n$, содержащее все траектории системы (2.6) и градиент $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на D.

Пусть $A(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t, 0))$, где $x(t, 0)$ — траектория, порожденная нулевым управлением. Предположим, что $f(x^0) = 0$, тогда $x(t, 0) \equiv x^0$, следовательно,

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, 0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0) = A$$

— постоянная матрица. Линеаризованная система в этом случае имеет вид

$$\dot{\Delta y}(t) = \varepsilon A\Delta y(t) + Bv(t), \quad t \in [0, 1], \quad \Delta y(0) = 0.$$

Пусть $\gamma^2(\varepsilon)$ — минимальное собственное число W_ε. В [13] показано, что если пара (A, B) управляема, то $\gamma^2(\varepsilon) \geq \alpha\varepsilon^2$ при $n = 2$ и $\gamma^2(\varepsilon) \leq \beta\varepsilon^4$ при $n \geq 3$ для некоторых $\alpha, \beta > 0$. Так как для системы (2.6) $L(\varepsilon) = L_1\varepsilon$ и $\eta(\varepsilon) = a + O(\varepsilon)$, $a > 0$, то

$$\sqrt{\varepsilon}L(\varepsilon)/\eta(\varepsilon) = L_1\varepsilon^{3/2}/(a + O(\varepsilon)) = o(\varepsilon) = o(\gamma(\varepsilon)).$$

Это влечет выполнение условия (2.4) и, следовательно, соотношения (2.5) при $n = 2$. Для систем порядка $n \geq 3$ с одним входом выполнение соотношения не гарантируется.

В следующем разделе мы иллюстрируем применение полученных результатов к исследованию асимптотики множеств достижимости для нескольких нелинейных систем 2-го и 3-го порядков.

3. Примеры

3.1. Осциллятор Дуффинга

Рассмотрим в качестве примера осциллятор Дуффинга, описываемый уравнением

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 10x_1^3 + u, \quad 0 \le t \le \varepsilon \tag{3.1}$$

при интегральных ограничениях на управление

$$\int\limits_0^\varepsilon u^2(t)dt \le \mu^2,$$

при нулевых начальных условиях $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0$. Дифференцируя функцию Ляпунова

$$V(x) = V(x_1, x_2) = \frac{5}{2}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

вдоль траектории системы (3.1) и применяя аналог леммы Грануолла, можно доказать, что все траектории системы (3.1) с нулевым начальным состоянием принадлежат компактному множеству $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \le \mu^2\varepsilon\}$ [14].

Линеаризованная вдоль траектории $x(t) \equiv 0$, отвечающей нулевому управлению, система имеет матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, является вполне управляемой. Грамиан управляемости W_ε представим в виде [13] $W_\varepsilon = S^2(\varepsilon) + \varepsilon^3 R(\varepsilon)$, где

$$S^2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\varepsilon) & \varphi_2(\varepsilon) \\ \varphi_2(\varepsilon) & \varphi_3(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$R(\varepsilon)$ — ограниченная матричная функция, $\varphi_1(\varepsilon) = \dfrac{1}{3}\varepsilon^2$, $\varphi_2(\varepsilon) = \dfrac{1}{2}\varepsilon$, $\varphi_3(\varepsilon) = -\dfrac{1}{3}\varepsilon^2 + 1$. Собственные значения матрицы W_ε имеют вид

$$\lambda_{\min}(W_\varepsilon) = \nu(W_\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{12} + o(\varepsilon^2), \quad \lambda_{\max}(W_\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{12} + o(\varepsilon^2).$$

Используя спектральное разложение матрицы $W_\varepsilon = U_\varepsilon D_\varepsilon U_\varepsilon^\top$, получим $W_\varepsilon^{1/2} = U_\varepsilon D_\varepsilon^{1/2} U_\varepsilon^\top$. Здесь $D_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon^2/12 + o(\varepsilon^2), 1 - \varepsilon^2/12 + o(\varepsilon^2))$, $D_\varepsilon^{1/2} = \mathrm{diag}(\varepsilon/\sqrt{12} + o(\varepsilon), 1 + o(\varepsilon))$, U_ε — ортогональная матрица.

При выборе $s(\varepsilon) = 1/\mu\sqrt{\varepsilon}$ мы имеем, учитывая, что $U_\varepsilon B(0,1) = B(0,1)$ в силу ортогональности U_ε, следующее равенство

$$s(\varepsilon)G(\varepsilon) = U_\varepsilon \mathrm{diag}(\varepsilon/\sqrt{12}, 1) B_{\mathbb{R}^2}(0,1) + r_\varepsilon,$$

где множество r_ε таково, что $h(r_\varepsilon, \{0\}) = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, множество достижимости $G(\varepsilon)$ при малых ε близко по форме к эллипсоиду с полуосями, пропорциональными $\varepsilon/\sqrt{12}$ и 1. Иллюстрацией к данному заключению могут служить результаты численного моделирования в работе [13], демонстрирующие поведение множеств достижимости осциллятора Дуффинга при разных значениях длины временного интервала.

3.2. Билинейная система 2-го порядка с двумя входами

Рассмотрим билинейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 u_1 - x_1 u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 u_1 - x_2 u_2, \end{cases}$$

начальное состояние которой задано равенствами $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$. При ограничениях на управление вида $|u_1(t)| \le 1,\ |u_2(t)| \le 1,\ 0 \le t \le \varepsilon$, множество достижимости $G(\varepsilon)$ не выпукло при любом $\varepsilon > 0$ [15, с. 282]. Действительно, если записать систему в полярных координатах

$$\begin{cases} \dot{r} = -r u_2, \\ \dot{\varphi} = -u_1, \end{cases}$$

то понятно, что множество достижимости представляет собой часть кругового кольца на плоскости: $G(\varepsilon) = \{(r, \varphi) : \exp(-\varepsilon) \le r \le \exp(\varepsilon), -\varepsilon \le \varphi \le \varepsilon\}$. Если заменить поточечные ограничения на управление на интегральные ограничения следующего вида

$$\int_0^{\varepsilon} u_1^2(t)dt \le 1, \quad \int_0^{\varepsilon} u_2^2(t)dt \le 1,$$

то $G(\varepsilon)$ будет по-прежнему частью кругового кольца $G(\varepsilon) = \big\{(r, \varphi) : \exp(-\sqrt{\varepsilon}) \le r \le \exp(\sqrt{\varepsilon}), -\sqrt{\varepsilon} \le \varphi \le \sqrt{\varepsilon}\big\}$, т. е. не выпуклой. Заметим, что раздельные интегральные ограничения нельзя представить как ограничение на норму в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2$.

Рассмотрим далее совместные интегральные ограничения на управление

$$\int_0^{t_1} \left(u_1^2 + a^2 u_2^2\right) dt \le 1,$$

где $a > 0$ — заданный параметр. Все траектории системы лежат внутри компактного множества на плоскости. Это легко доказать, используя переход к полярным координатам.

Сделав замену управления $\tilde{u}_2 = a u_2$ и сохранив прежние обозначения для управления, придем к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 u_1 - \dfrac{1}{a} x_1 u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 u_1 - \dfrac{1}{a} x_2 u_2 \end{cases}$$

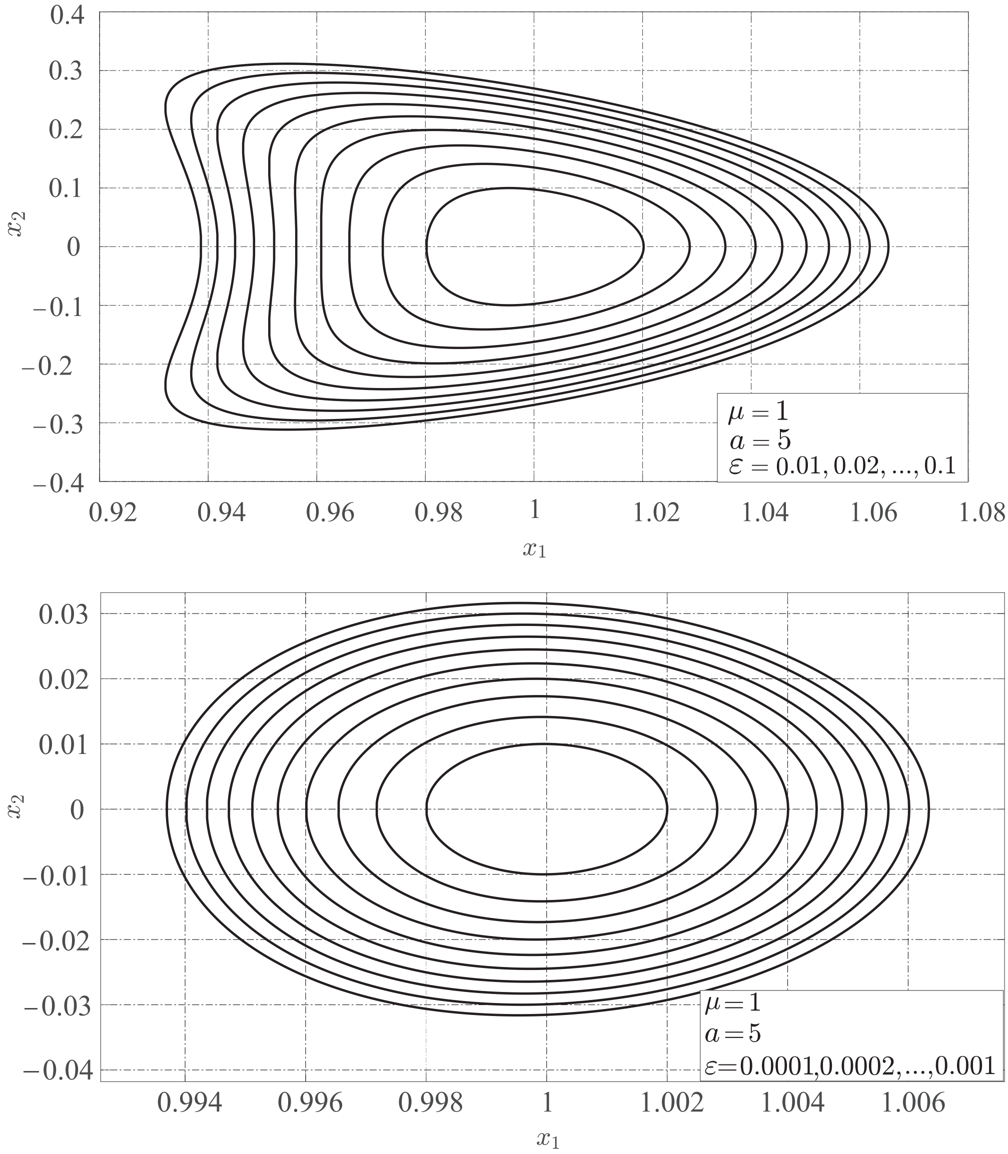
с ограничениями на норму управления в $\mathbb{L}_2$ $\displaystyle\int_0^{t_1} \left(u_1^2 + u_2^2\right) dt \le 1$. Матрицы A, B линеаризованной вдоль траектории $x(t) \equiv (1, 0)$, отвечающей нулевому управлению, системы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1/a \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

система, следовательно, является вполне управляемой. Грамиан управляемости W_ε здесь не зависит от ε :

$$W_\varepsilon = BB^\top = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\nu(W_\varepsilon)$ и константа Липшица L не зависят от ε, то условие $\mu(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \le \nu/2L$, очевидно, выполнено для достаточно малых ε. Таким образом, множество достижимости $G(\varepsilon)$ является выпуклым. Если взять в качестве масштабирующего множителя $s(\varepsilon) = 1/\sqrt{\varepsilon}$, то при малых ε множество $s(\varepsilon)G(\varepsilon)$ близко к эллипсоиду $E = \{(x_1, x_2) : a^2 x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$.



Множества достижимости для билинейной системы

На рисунке приведены результаты численного моделирования для данного примера при $a = 5$. В верхней его части изображены границы множеств достижимости для значений ε от 0.1 до 0.01 с шагом 0.01. Из рисунка видно, что невыпуклые при ε, близких к 0.1, множества достижимости становятся выпуклыми по мере убывания длины промежутка времени. Нижняя часть рисунка соответствует значениям ε от 0.001 до 0.0001. Здесь уже все множества выпуклы и по форме близки к эллипсоидам, полуоси которых относятся как 1 к 5.

3.3. Уницикл

Данный пример демонстрирует невыпуклость множеств достижимости с интегральными ограничениями на управление даже при малых длинах временного промежутка.

Рассмотрим систему 3-го порядка (уницикл)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos x_3, \\ \dot{x}_2 = \sin x_3, \qquad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, \\ \dot{x}_3 = u \end{cases}$$

на отрезке $[0, \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. При геометрических ограничениях на управление множества достижимости для данной системы на плоскости (x_1, x_2) исследованы в [16] (см., также [17, с. 114–121]), общий трехмерный случай изучен в работе [18]. Множества достижимости в данной системе не являются выпуклыми.

Мы здесь рассматриваем интегральные ограничения на $u\,(t)$, заданные неравенством

$$\int\limits_0^\varepsilon u^2(\tau)d\tau \leqslant \mu^2.$$

Покажем, что множество достижимости системы $G(\varepsilon)$ в данном случае также не является выпуклым при любом $\varepsilon > 0$. Рассмотрим задачу оптимального управления с линейным терминальным критерием

$$x_1(\varepsilon) \to \min, \quad x(\varepsilon) \in G(\varepsilon). \tag{3.2}$$

Так как множество достижимости замкнуто [5], то решение задачи существует. Выберем какую-либо оптимальную траекторию и обозначим эту траекторию и порождающее ее управление через $x^0(t)$ и $u^0(t)$, соответственно. Решение задачи не единственно, так как понятно, что для управления $\overline{u}(t) = -u^0(t)$ мы будем иметь $\overline{x}_3(t) = -x_3^0(t)$, $\overline{x}_1(t) = x_1^0(t)$, $\overline{x}_2(t) = -x_2^0(t)$. То есть $\overline{u}(t)$ — также оптимальное управление.

Введя дополнительную переменную x_4 равенством $\dot{x}_4(t) = u^2(t)$, задачу (3.2) представим в виде $x_1(\varepsilon) \to \min$ при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos x_3, \\ \dot{x}_2 = \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = u, \\ \dot{x}_4 = u^2, \end{cases} \quad x_i\,(0) = 0, \ i = 1, \ldots, 4,$$

$$x_4\,(\varepsilon) \le \mu^2.$$

Выпишем принцип максимума Понтрягина для данной задачи. Рассмотрим функцию Понтрягина $H(p, x, u) = p_1 \cos x_3 + p_2 \sin x_3 + p_3 u + p_4 u^2$ и функцию $l(\lambda_0, \lambda_1, x) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1(x_4 - \mu^2)$. Оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет условию: существуют множители Лагранжа $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_1 \ge 0$, $(\lambda_0, \lambda_1) \ne 0$, такие что

$$H(p(t), x^0(t), u^0(t)) = \max_u H(p(t), x^0(t), u), \quad 0 \le t \le \varepsilon,$$

где $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t))$ – решение сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -H_{x_1} = 0, \\ \dot{p}_2 = -H_{x_2} = 0, \\ \dot{p}_3 = -H_{x_3} = p_1 \sin x_3^0(t) - p_2 \cos x_3^0(t), \\ \dot{p}_4 = -H_{x_4} = 0; \end{cases}$$

выполнены также условие трансверсальности $p(\varepsilon) = -l_x(\lambda_0, \lambda_1, x^0(\varepsilon)) = -(\lambda_0, 0, 0, \lambda_1)$ и условие дополняющей нежесткости $\lambda_1(x_4^0(\varepsilon) - \mu^2) = 0$.

Из принципа максимума следует, что $H_u(p(t), x^0(t), u^0(t)) = 0$, и значит $2u^0(t)p_4(t) = -p_3(t)$. В итоге получаем

$$\begin{cases} p_1 = -\lambda_0, \\ p_2 = 0, \\ \dot{p}_3 = -\lambda_0 \sin x_3^0(t), \\ p_4 = -\lambda_1. \end{cases}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то максимум H по u не достигается, что противоречит принципу максимума. Отсюда $\lambda_1 \ne 0$ и, следовательно, $p_4 = -\lambda_1 \ne 0$. Если $\lambda_0 = 0$, то $p_3(t) \equiv 0$, и значит $u^0(t) \equiv 0$.

Но при нулевом управлении $x_3(t) \equiv 0$, $\cos x_3 \equiv 1$, что соответствует максимальному, а не минимальному значению $x_1(\varepsilon)$.

Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$, $u^0(t) = \dfrac{1}{2}\lambda_1^{-1}p_3$, и пара (x_3^0, p_3) есть решение краевой задачи.

$$\begin{cases} \dot{p}_3 = -\lambda_0 \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{2}\lambda_1^{-1}p_3, \\ p_3(\varepsilon) = 0, \\ x_3(0) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Из второго уравнения системы (3.3) получаем $\displaystyle\int_0^\varepsilon \sin x_3^0(\tau)d\tau = 0.$

Интегрируя первое из уравнений системы (3.3), с учетом равенства $p_3(\varepsilon) = 0$ будем иметь $p_3(0) = 0$. Таким образом, $p_3(t), x_3^0(t)$ — решение системы (3.3) с нулевыми начальными условиями, и в силу теоремы единственности решения дифференциального уравнения имеем $p_3(t) \equiv 0$, $x_3^0(t) \equiv 0$. Но $x_3^0(t) \equiv 0$ соответствует решению задачи на максимум, а не минимум $x_1(\varepsilon)$.

Условие $x_2^0(\varepsilon) \neq 0$ справедливо для любой оптимальной траектории в задаче (3.2). Выбрав $\bar{u}(t) = -u^0(t)$, получим другую оптимальную траекторию $\bar{x}(t)$, для которой $\bar{x}_2(t) = -x_2^0(t)$, $\bar{x}_1(t) = x_1^0(t)$. Рассмотрим точку $\hat{x} = \dfrac{1}{2}x^0(\varepsilon) + \dfrac{1}{2}\bar{x}(\varepsilon)$, у которой $\hat{x}_1 = x_1^0(\varepsilon)$, $\hat{x}_2 = 0$. Покажем, что $\hat{x} \notin G(\varepsilon)$. Действительно, если $\hat{x} \in G(\varepsilon)$, то найдется допустимая траектория $\hat{x}(t)$, такая что $\hat{x}(\varepsilon) = \hat{x}$. Так как $\hat{x}_1 = \hat{x}_1(\varepsilon)$, то $\hat{x}(t)$ — оптимальная траектория. Но при этом $\hat{x}_2(\varepsilon) = 0$, что противоречит доказанному выше утверждению. Таким образом, полусумма точек $x^0(\varepsilon)$, $\bar{x}(\varepsilon) \in G(\varepsilon)$ не принадлежит $G(\varepsilon)$, т. е. $G(\varepsilon)$ невыпукла при любом $\varepsilon > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. **Guseinov Kh.G., Nazlipinar A.S.** Attainable sets of the control system with limited resources // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 261–268
4. **Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N.** The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Diff. Eq. Appl. 2007. Vol. 14, no. 1-2. P. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
5. **Gusev M.I., Zykov I.V.** On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control // IFAC PapersOnline. 2017. Vol. 50, iss. 1. P. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792 .
6. **Krener A., Schättler H.** The structure of small-time reachable sets in low dimensions // SIAM J. Control Optim. 1989. Vol. 27, no. 1. P. 120–147. doi: 10.1137/0327008 .
7. **Schättler, H.** Small-time reachable sets and time-optimal feedback control // Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control / eds. B.S. Mordukhovich, H.J. Sussmann. N Y: Springer, 1996. Vol. 78. P. 203–225. (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications.) https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8489-2_9 .
8. **Polyak B.T.** Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Math. Anal. 2004. Vol. 11. P. 255–267.
9. **Райсиг Г.** Выпуклость множеств достижимости систем управления // Автоматика и телемеханика. 2007. № 9. С. 64–78.
10. **Goncharova E., Ovseevich A.** Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set // J. Optim. Theory Appl. 2016. Vol. 168 (2). P. 615–624. doi: 10.1007/s10957-015-0754-4 .
11. **Gusev M.I.** On convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 207–212. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.382 .

12. **Поляк Б.Т.** Локальное программирование // Журн. вычисл. математки и мат. физики. 2001. Т. 41, № 9. С. 1324–1331.
13. **Gusev M.I.** Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. 2019. Vol. 11548. P. 461–473. (Lecture Notes in Computer Science.) doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_32 .
14. **Зыков И.В.** О внешних оценках множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2019. Т. 53. С. 61–72. doi: 10.20537/2226-3594-2019-53-06 .
15. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
16. **Cockayne E.J., Hall G.W.C.** Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 197–220. doi: 10.1137/0313012 .
17. **Бердышев Ю.И.** Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. 193 с.
18. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.

Поступила 7.07.2019
После доработки 12.07.2019
Принята к публикации 5.08.2019

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
ведущий науч. сотрудник
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: gmi@imm.uran.ru

Осипов Иван Олегович
аспирант
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: 79193053374@yandex.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
2. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and Observation Under the Conditions of Uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
3. Guseinov Kh.G., Nazlipinar A.S. Attainable sets of the control system with limited resources. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 261–268.
4. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Diff. Eq. Appl.*, 2007, vol. 14, no. 1-2, pp. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
5. Gusev M.I., Zykov I.V. On Extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792 .
6. Krener A., Schättler H. The structure of small-time reachable sets in low dimensions. *SIAM J. Control Optim.*, 1989, vol. 27, no. 1, pp. 120–147. doi: 10.1137/0327008 .
7. Schättler, H. Small-time reachable sets and time-optimal feedback control. In: Mordukhovich B.S., Sussmann H.J. (eds.) *Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control*, The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, N Y: Springer, 1996, vol. 78, pp. 203–225. doi: 10.1007/978-1-4613-8489-2_9 .
8. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 2004, vol. 11, no. 2-3, pp. 255–267.

9. Reißig G. Convexity of reachable sets of nonlinear ordinary differential equations. *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 9, pp. 1527–1543. doi: 10.1134/S000511790709007X .
10. Goncharova E., Ovseevich A. Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set. *J. Optim. Theory. Appl.*, 2016, vol. 168, no. 2, pp. 615–624. doi: 10.1007/s10957-015-0754-4 .
11. Gusev M.I. On convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 207–212. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.382 .
12. Polyak B.T. Local programming. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2001, vol. 41, no. 9, pp. 1259–1266.
13. Gusev M.I. Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter. In: Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds) *Mathematical Optimization Theory and Operations Research* (MOTOR 2019), Ser. Lecture Notes in Computer Science, 2019, vol. 11548, pp. 461–473. doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_32 .
14. Zykov I.V. On external estimates of the reachable sets for control systems with integral constraints. *Izv. IMI UdGU*, 2019, vol. 53, pp. 61–72 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2019-53-06 .
15. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* N Y; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
16. Cockayne E.J., Hall G.W.C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints. *SIAM J. Control*, 1975, vol. 13, no. 1, pp. 197–220. doi: 10.1137/0313012 .
17. Berdyshev Yu.I. *Nelineynye zadachi posledovatelnogo upravleniya i ih prilozhenie* [Nonlinear sequential control problems and their application]. Yekaterinburg, IMM UrO RAN, 2015. 193 c. ISBN: 978-5-8295-0381-9 .
18. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.

Received July 7, 2019
Revised July 12, 2019
Accepted August 5, 2019

Mikhail Ivanovich Gusev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: gmi@imm.uran.ru .

Ivan Olegovich Osipov, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: 79193053374@yandex.ru .

Cite this article as: M. I. Gusev, I. O. Osipov. Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 86–99 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 523.46/.481

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ СФЕР И КОНУСОВ[1]

М. И. Зеликин, Ю. С. Осипов

В работе изучаются пересечения конусов нулевого индекса со сферами. Найдены поля соответствующих минимальных многообразий. В частности, рассмотрим конус $\mathbb{K} = \{x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$. Его пересечение со сферой $\mathbb{S}^3 = \sum_{i=0}^{3} x_i^2$ часто называют клиффордовым тором $\mathbb{T}$, потому что Клиффорд первым заметил, что метрика этого тора как подмногообразия $\mathbb{S}^3$ с индуцированной из $\mathbb{S}^3$ метрикой является евклидовой. Помимо этого тор $\mathbb{T}$, рассматриваемый как подмногообразие $\mathbb{S}^3$, является минимальной поверхностью. Аналогично можно рассмотреть конус $\mathcal{K} = \{\sum_{i=0}^{3} x_i^2 = \sum_{i=4}^{7} x_i^2\}$, который часто называют конусом Саймонса, потому что он доказал, что $\mathcal{K}$ задает однозначную, негладкую, глобально определенную минимальную поверхность в $\mathbb{R}^8$, не являющуюся плоскостью. Оказывается, что пересечение $\mathcal{K}$ с семимерной сферой $\mathbb{S}^7$ также является, подобно тору Клиффорда, минимальной поверхностью в $\mathbb{S}^7$. Эти факты доказываются в статье с помощью техники кватернионов и алгебры Кэли.

Ключевые слова: минимальная поверхность, гауссова кривизна, кватернионы, октонионы (числа Кэли), поле экстремалей, функция Вейерштрасса.

M. I. Zelikin, Yu. S. Osipov. Minimal submanifolds of spheres and cones.

Intersections of cones of index zero with spheres are investigated. Fields of the corresponding minimal manifolds are found. In particular, we consider the cone $\mathbb{K} = \{x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$. Its intersection with the sphere $\mathbb{S}^3 = \sum_{i=0}^{3} x_i^2$ is often called the Clifford torus $\mathbb{T}$, because Clifford was the first to notice that the metric of this torus as a submanifold of $\mathbb{S}^3$ with the metric induced from $\mathbb{S}^3$ is Euclidian. In addition, the torus $\mathbb{T}$ considered as a submanifold of $\mathbb{S}^3$ is a minimal surface. Similarly, it is possible to consider the cone $\mathcal{K} = \{\sum_{i=0}^{3} x_i^2 = \sum_{i=4}^{7} x_i^2\}$, often called the Simons cone because he proved that $\mathcal{K}$ specifies a single-valued nonsmooth globally defined minimal surface in $\mathbb{R}^8$ which is not a plane. It appears that the intersection of $\mathcal{K}$ with the sphere $\mathbb{S}^7$, like the Clifford torus, is a minimal submanifold of $\mathbb{S}^7$. These facts are proved by using the technique of quaternions and the Cayley algebra.

Keywords: minimal surface, gaussian curvature, quaternions, octonions (Cayley numbers), field of extremals, Weierstrass function.

MSC: 49Q05, 11R52

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-100-107

1. Случай Клиффорда

В пространстве $\mathbb{R}^4$ рассмотрим конус $\mathbb{K} = \{x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$ нулевого индекса. Покажем, что пересечение $\mathbb{K}$ со стандартной единичной сферой $\mathbb{S}^3$ является тором $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Действительно, введем координаты на торе $\mathbb{T}$, рассматривая его пересечения с плоскостями $A_1 = \{x_0 = x_1 = 0\}$ и $A_2 = \{x_2 = x_3 = 0\}$. Пересечение $\mathbb{T}$ с плоскостью A_2 есть окружность $\{x_0^2 + x_1^2 = 1/2\}$, параметризованная координатой α; пересечение $\mathbb{T}$ с плоскостью A_1 есть окружность $\{x_2^2 + x_3^2 = 1/2\}$, параметризованная координатой β:

$$\begin{cases} x_0 &= (1/\sqrt{2})\cos\alpha, \\ x_1 &= (1/\sqrt{2})\sin\alpha, \\ x_2 &= (1/\sqrt{2})\cos\beta, \\ x_3 &= (1/\sqrt{2})\sin\beta. \end{cases} \tag{1.1}$$

Прямое произведение этих двух окружностей и есть тор $\mathbb{T}$. Первая квадратичная форма на торе определяется по формуле $\mathbb{T}\ ds^2 = (d\alpha)^2 + (d\beta)^2$, следовательно, как и было показано

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00805).

Клиффордом [2], метрика на торе $\mathbb{T}$, унаследованная от сферической метрики $\mathbb{S}^3$, является евклидовой. Следующий факт достаточно простой, но мы не встречали упоминаний о нем в литературе.

Теорема 1. *Тор $\mathbb{T}$, рассматриваемый как многообразие, вложенное в сферу $\mathbb{S}^3$, является минимальной поверхностью.*

Доказательство. Для того чтобы найти вторую квадратичную форму, надо спроектировать вторые производные радиус-вектора поверхности $r = \{\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta\}$ по параметрам на нормаль $N = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}$. Именно из-за расположения внешней нормали вторая квадратичная форма существенно зависит от того многообразия, в которое погружена поверхность. Для ортогональности к вектору $r_\alpha = \{-\sin\alpha, \cos\alpha, 0, 0\}$ необходимо, чтобы $y_1/y_0 = \tan\alpha$. Для ортогональности к вектору $r_\beta = \{0, 0, -\sin\beta, \cos\beta\}$ необходимо, чтобы $y_3/y_2 = \tan\beta$. Значит нормаль должна иметь вид $\{C_1\cos\alpha, C_1\sin\alpha, C_2\cos\beta, C_2\sin\beta\}$. Но если считать объемлющим многообразием сферу, то нормаль должна лежать в касательной плоскости, т. е. быть ортогональной к радиус-вектору сферы $\mathbb{S}^3$. Следовательно, $C_1 = -C_2$. Вторая квадратичная форма имеет вид $(d\alpha)^2 - (d\beta)^2$. Ее след равен нулю. Следовательно, тор $\mathbb{T}$, вложенный в сферу, является минимальной поверхностью. Это означает, что его площадь есть критическое значение функционала площади относительно вариаций поверхности $\mathbb{T}$, лежащих внутри сферы. □

Для доказательства достаточных условий минимума следует построить поле экстремалей, содержащее данную поверхность. Первый вариант теории поля для задачи минимизации кратных интегралов был разработан Каратеодори [1] в конце двадцатых годов. Второй (относительно более простой) вариант, основанный на более жестких требованиях к минимизируемому функционалу, был построен Вейлем в середине тридцатых годов [6]. В многомерном вариационном исчислении должно быть столько же функций, какова размерность пространства независимых переменных, что ведет к рассмотрению инвариантных интегралов для якобианов соответствующих отображений. В основу конструкции Вейля положен инвариантный интеграл типа следа. Конструкция Каратеодори основана на инвариантном интеграле типа детерминанта. Впоследствии были предложены многочисленные, но неэффективные конструкции полей для произвольных самых общих инвариантных интегралов. Эффективные для вычислений поля с инвариантными интегралами, имеющими вид следов всех внешних степеней матрицы якобианов, были изучены в работе [7].

Уравнение пересечения конуса $\mathbb{K}$ со сферой $\mathbb{S}^3$ можно записать в виде $x_0^2+x_1^2 = 1/2$, потому что второе уравнение $x_2^2 + x_3^2 = 1/2$ является следствием первого. Включим тор $\mathbb{T}$ в семейство равных торов. Для этого рассмотрим пространство $\mathbb{R}^4$ как пространство кватернионов:

$$x_0 \mapsto \mathbf{1}a_0, \quad x_1 \mapsto \mathbf{i}a_1, \quad x_2 \mapsto \mathbf{j}a_2, \quad x_3 \mapsto \mathbf{k}a_3.$$

Умножение справа и умножение слева на кватернион, равный единице по модулю, определяют разные ортогональные преобразования пространства $\mathbb{R}^4$ [4]. Рассмотрим преобразование J_γ, которое индуцировано умножением справа на кватернион $\mathbf{z}_\gamma = \mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{j}\sin\gamma$. Легко видеть, что плоскости $\{x_0, x_2\}$ и $\{x_1, x_3\}$ инвариантны относительно J_γ. В обеих плоскостях преобразование J_γ индуцирует одновременный поворот на угол γ. Умножение на единичный кватернион определяет в $\mathbb{S}^3$ клиффордов сдвиг. Это означает, что, подобно евклидову сдвигу, каждая точка проходит один и тот же путь (в нашем случае угол γ) и расстояния между любыми двумя точками сохраняют постоянное значение.

Найдем образ конуса $\mathbb{K}$ при преобразовании J_γ. Умножение справа на кватернион $\mathbf{z}_\gamma = \mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{j}\sin\gamma$ действует как умножение на матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma & 0 \\ 0 & -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

Применяя эту матрицу к (1.1), получаем отображение

$$\begin{cases} x_0 &= (1/\sqrt{2})(\cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma), \\ x_1 &= (1/\sqrt{2})(\sin\alpha\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma), \\ x_2 &= (1/\sqrt{2})(\cos\alpha\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma), \\ x_3 &= (1/\sqrt{2})(-\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\cos\gamma). \end{cases} \tag{1.2}$$

Пересечение точек (1.2) с исходным конусом $\mathbb{K}$ осуществляется при значениях γ, которые удовлетворяют уравнению $x_0^2 + x_1^2 = 1/2(2 - \sin 2\gamma\cos(\alpha+\beta)) = 1/2$. Или

$$\sin 2\gamma = \frac{1}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Это уравнение не имеет решений при $|\cos(\alpha+\beta)| < 1$. Следовательно, $\gamma = \pm\pi/4$. Значит образы конуса $\mathbb{K}$ в области $0 \le \gamma < \pi/4$ пересекаются только в начале координат. Следовательно, при этих значениях γ образы торов $\mathbb{T}$ взаимно не пересекаются. Размерность сферы $\mathbb{S}^3$ превосходит размерность торов на единицу. Следовательно, образы торов $\mathbb{T}$ заполняют в пространстве $\mathbb{S}^3$ открытую область. Через каждую точку этой области проходит один и только один тор. Для того чтобы доказать, что многообразия $J_\gamma(\mathbb{T})$ образуют поле экстремалей, можно использовать формулу (17) работы [7], которая определяет функцию Вейерштрасса. Дифференцирования уравнения (1.2) по α и β дают

$$x_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\alpha\cos\gamma,\ \cos\alpha\cos\gamma,\ \sin\alpha\sin\gamma,\ -\cos\alpha\sin\gamma)$$

и

$$x_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\beta\sin\gamma,\ \cos\beta\sin\gamma,\ -\sin\beta\cos\gamma,\ \cos\beta\cos\gamma).$$

Имеем $E = x_\alpha^2 = 1/2$, $F =< x_\alpha, x_\beta >= 0$, $G = x_\beta^2 = 1/2$. Первая квадратичная форма определяется как $EG - F^2 \equiv 1/4$. Под интегралом в функционале площади стоит $f = 1/4$. Момент $p \equiv 0$. Функция Вейерштрасса $W \equiv 1/4$. Положительность функции Вейерштрасса гарантирует минимум функционала площади.

Умножение на кватернионы $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{k}\sin\gamma$ дает другое семейство непересекающихся торов, которое также заполняет открытую область фазового пространства. На первый взгляд получается другое поле минимальных поверхностей. Но это иллюзия. Поля переходят одно в другое при отражении $\mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{k}$. В то же время умножение на кватернионы $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{i}\sin\gamma$ дает лишь вращение конуса $\mathbb{K}$ вокруг своей оси. Приведем слегка видоизмененную конструкцию доказательства знаменитой теоремы Клиффорда, которая будет использована в дальнейшем.

Теорема 2 (Клиффорд). *Гауссова кривизна тора $\mathbb{T}$ с унаследованной сферической метрикой равна нулю.*

Доказательство. Отображения J_γ определяют в инвариантных плоскостях поток окружностей. Поскольку при $\gamma = \pi$ эти окружности проходят через диаметрально противоположную (по отношению к исходному положению) точку, они являются геодезическими сферами. (В доказательстве Клиффорда проективное отображение переводит их в клиффордовы параллельные прямые линии, которые являются прямолинейными образующими однополостного гиперболоида — другой интерпретации тора $\mathbb{T}$.) Другое семейство геодезических сферы получается в результате аналогичного левого умножения. Каждое из семейств (левое и правое) определяет клиффордовы сдвиги сферы: каждая точка проходит один и тот же путь (в нашем случае угол γ) и расстояния между любыми двумя точками остаются постоянными. Траектории обоих сдвигов пересекают друг друга под прямым углом, поскольку нормаль переходит в нормаль. Для данной начальной точки q пройдем сначала по правому семейству, а потом по левому на один и тот же угол. Если повторить для той же начальной точки q обе эти операции в обратном порядке, то мы попадем в ту же самую конечную точку. В результате получится пространственный клиффордов параллелограмм A в многообразии $\mathbb{T} \subset \mathbb{S}^3$. Сумма его углов равна 4π. Следовательно, гауссова кривизна криволинейного параллелограмма A равна нулю. Поскольку точку q можно выбирать произвольно, геометрия $\mathbb{T}$ евклидова. □

Чтобы изучить образ начального тора $\mathbb{T}$ при отображении (1.2), положим

$$\begin{cases} x_0 &= \rho\cos\eta, \\ x_1 &= \rho\sin\eta, \\ x_2 &= R\cos\xi, \\ x_3 &= R\sin\xi, \end{cases}$$

где $R^2+\rho^2 = 1$. Для данных значений $R,\ \rho,\ \eta,\ \xi$ найдем $\alpha,\ \beta$ и γ. Помножим первое уравнение в (1.2) на $\sin\eta$, второе уравнение на $\cos\eta$ и вычтем второе из первого. Получится

$$\sin\eta\cos\alpha\cos\gamma - \cos\eta\sin\alpha\cos\gamma - \sin\eta\cos\beta\sin\gamma - \cos\eta\sin\beta\sin\gamma = 0$$

или

$$\tan\gamma = \frac{\sin(\eta-\alpha)}{\sin(\eta+\beta)}. \tag{1.3}$$

Далее помножим третье уравнение в (1.2) на $\sin\xi$, четвертое на $\cos\xi$ и вычтем второе из первого. Получится $\sin\xi\cos\alpha\sin\gamma + \sin\xi\cos\beta\cos\gamma + \cos\xi\sin\alpha\sin\gamma - \cos\xi\sin\beta\cos\gamma = 0$ или

$$\tan\gamma = \frac{\sin(\beta-\xi)}{\sin(\alpha+\xi)}. \tag{1.4}$$

Комбинация $x_0^2+x_1^2$ из уравнений (1.2) дает $1-\sin 2\gamma\cos(\alpha+\beta) = 2\rho^2$. Комбинация $x_2^2+x_3^2$ из уравнений (1.2) дает

$$1+\sin 2\gamma\cos(\alpha+\beta) = 2R^2.$$

При вычитании получится

$$R^2-\rho^2 = \sin 2\gamma\cos(\alpha+\beta). \tag{1.5}$$

Мы имеем три независимых уравнения для трех неизвестных величин α,β,γ. Примем α и β за независимые переменные, определяемые уравнениями (1.3) и (1.4). Уравнение (1.5) дает соответствующее значение функции $\gamma(\alpha,\beta)$.

Найдем особенности отображения $\{R,\rho,\xi,\eta\} \mapsto \{\alpha,\beta,\gamma\}$. Приравнивая правые части (1.3) и (1.4), получаем $\sin(\eta-\alpha)\sin(\xi+\alpha) = \sin(\beta-\xi)\sin(\beta+\eta)$. Дифференцирование (1.3) по η дает $-\cos(\alpha-\eta)+\tan\gamma\cos(\beta+\eta) = 0$. Таким образом, мы имеем

$$\tan\gamma = \frac{\cos(\alpha-\eta)}{\cos\beta+\eta} = \frac{\sin(\eta-\alpha)}{\sin(\beta+\eta)}.$$

Отсюда следует, что $\sin(\alpha+\beta) = 0$ и $\beta = -\alpha$. Имеем $\tan\gamma = 1$. Следовательно, особенности должны лежать на окружностях $\rho = 0$ и $R = 0$. Интересующее нас множество $\{\rho = R\}$ свободно от сингулярностей. Мы получили дополнительное подтверждение того, что образы тора $\mathbb{T}$ в области $0 \le \gamma < \pi/4$ не пересекают друг друга.

Было бы очень интересно посмотреть, как выглядит тор $\mathbb{T}$, будучи включенным в трехмерное (а не четырехмерное) пространство. Результаты статьи [3] дают такую возможность. В этой статье была определена операция развертки риманова многообразия, включенного в другое риманово многообразие $N \subset M$. При этом геодезические многообразия N продолжаются геодезическими M. Основная идея статьи [3] заключается в следующем. Следует продолжать не все геодезические N, а только те из них, которые принадлежат некоторому полю $\mathfrak{P}$ геодезических линий N. Различные поля геодезических определяют разные развертки. Было доказано, что листы развертки дают симплектоморфизм N. Это означает, что все инвариантные интегралы N остаются инвариантными в листе.

Для развертки мы будем использовать центральное поле геодезических сферы $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ с центром в точке $Q = (1,0,0,0)$ (северный полюс). При длине геодезических равной π лист развертки становится единичным шаром B трехмерного касательного пространства к сфере в точке $x_0 = -1$. Границей этого шара является сфера радиуса π. Эта граница есть образ раздутия точки $Q \in \mathbb{S}^3$.

Запишем уравнения геодезических поля, используя сферические координаты трехмерного пространства $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 &=& -1, \\ x_1 &=& \sin\psi, \\ x_2 &=& \cos\psi\cos\phi, \\ x_3 &=& \cos\psi\sin\phi. \end{array}\right. \tag{1.6}$$

Вектор скорости для начального положения получается дифференцированием (1.6) по ψ: $v = \{0, \cos\psi, -\sin\psi\cos\phi, -\sin\psi\sin\phi\}$. Уравнения геодезических поля получаются умножением координат начального положения $Q = (1,0,0,0)$ на $\cos t$ и прибавлением вектора скорости v, умноженного на $\sin t$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 &=& \cos t, \\ x_1 &=& \cos\psi\sin t, \\ x_2 &=& -\sin\psi\cos\phi\sin t, \\ x_3 &=& -\sin\psi\sin\phi\sin t. \end{array}\right. \tag{1.7}$$

Лист $t = \pi$ является плоским трехмерным пространством. Найдем образ тора в нем. Пересечение геодезических с тором удовлетворяет уравнению $x_2^2 + x_3^2 = 1/2$. Следовательно, $\sin^2\psi\sin^2 t = 1/2$ или

$$\sin^2 t = \frac{1}{2\sin^2\psi}. \tag{1.8}$$

Область определения для переменной ψ есть $\pi/4 \le \psi \le 3\pi/4$. Подставляя (1.8) в два последних уравнения (1.7), получаем

$$x_2 = \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}}, \qquad x_3 = \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}}.$$

Имеем уравнения первого из кругов тора $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Второе уравнение (1.7) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cot\psi$ дает сложенный вдвое отрезок $-1/\sqrt{2} \le x_2 \le 1/\sqrt{2}$, который является вырожденным образом второй окружности тора $\mathbb{T}$. Переменная ϕ принимает произвольные значения. На листе $t = \pi$ мы получили плоский цилиндр. Образ тора $\mathbb{T}$ при сканировании центральным полем геодезических оказывается вырожденным. Образ сохраняет свойство быть евклидовым, но перестает быть минимальной поверхностью. Клиффорд реализовал свой тор в виде однополостного гиперболоида трехмерного проективного пространства. Этот образ есть тор с точки зрения проективной геометрии. Наша реализация в ограниченной части пространства приводит к вырожденному плоскому тору, имеющему форму цилиндра.

2. Случай Саймонса

Похожий трюк может быть реализован для конуса Саймонса $\mathcal{K} = \{\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \sum_{i=5}^8 x_i^2\}$, играющего роль тора многообразия $\mathcal{T} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^7$. Вместо кватернионов следует использовать октонионы. Мы называем $\mathcal{K}$ *конусом Саймонса*, потому что он доказал, что этот конус дает глобально определенную негладкую минимальную поверхность, отличную от плоскости в $\mathbb{R}^8$ [5], поставив точку в решении проблемы Бернштейна. Подобно случаю конуса Клиффорда, мы имеем следующую теорему.

Теорема 3. *Включение $\mathcal{T} \subset \mathbb{S}^7$ определяет минимальную поверхность.*

Доказательство. Используем аргументацию теоремы 1. Вновь нормаль к первому сомножителю $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ есть $(\mu(q_1), *)$, где q_1 — радиус-вектор первой сферы $\mathbb{S}^3$. Нормаль ко второму сомножителю есть $(*, \nu(q_2))$. Нормаль к многообразию $\mathcal{T} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ в точке $(q_1, q_2) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, лежащей в сфере $\mathbb{S}^7$, есть $(1/\sqrt{2})(q_1, -q_2)$. Обозначим через $(ds)^2(q)$ значение второй квадратичной формы первого сомножителя $\mathbb{S}^3$ в точке q; а через $(d\tilde{s})^2(q)$ значение второй квадратичной формы второго сомножителя $\mathbb{S}^3$ в точке q. Тогда вторая квадратичная форма многообразия $\mathcal{T} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ равна $(ds)^2 - (d\tilde{s})^2$. След этой формы равен нулю. □

Будем, как это принято, обозначать базис алгебры Кэли через $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$. Вновь включаем многообразие $\mathcal{T} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ в семейство равных многообразий. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^8$ как пространство октонионов:

$$x_0 \mapsto \mathbf{1}a_0; \quad x_1 \mapsto \mathbf{i}a_1; \quad x_2 \mapsto \mathbf{j}a_2; \quad x_3 \mapsto \mathbf{k}a_3; \quad x_4 \mapsto \mathbf{e}a_4; \quad x_5 \mapsto \mathbf{f}a_5; \quad x_6 \mapsto \mathbf{g}a_6; \quad x_7 \mapsto \mathbf{h}a_7.$$

Умножение (скажем, справа) на октонион, равный единице по абсолютной величине, определяет ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^8$. Рассмотрим преобразования I_γ, которые индуцированы правым умножением на октонионы $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{j}\sin\gamma$. Легко видеть, что двумерные плоскости $\{x_0, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_4, x_6\}$ и $\{x_5, x_7\}$ являются инвариантными плоскостями преобразований I_γ. Во всех этих плоскостях преобразование I_γ индуцирует одновременный поворот на угол γ. Как и прежде, образы многообразия $\mathcal{T}$ не пересекаются. Через каждую точку открытого множества сферы $\mathbb{S}^7$ проходит один и только один образ многообразия $\mathcal{T}$. Следовательно, получается поле минимальных многообразий.

Вместо I_γ можно использовать умножение на другие октонионы. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{i}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_1\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_4, x_5\}$ и $\{x_6, x_7\}$. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{k}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_3\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_4, x_7\}$ и $\{x_5, x_6\}$. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{e}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_4\}$, $\{x_1, x_5\}$, $\{x_2, x_6\}$ и $\{x_3, x_7\}$. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{f}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_5\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_7\}$ и $\{x_3, x_6\}$. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{g}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_6\}$, $\{x_1, x_7\}$, $\{x_2, x_4\}$ и $\{x_3, x_5\}$. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{h}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_7\}$, $\{x_1, x_6\}$, $\{x_2, x_5\}$ и $\{x_3, x_4\}$.

Нетрудно построить много полей оптимальных траекторий, рассматривая ограничения этих вращений на различные сечения сферы $\mathbb{S}^3$. Для таких сечений получаются результаты, вполне аналогичные теоремам 1–3.

Например, вернемся к правому и левому умножению октонионов сечения $\Xi = \bigcap_{i=4}^{7}\{x_i = 0\}$ на $I_\gamma = \mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{j}\sin\gamma$. Подобно многообразию $\mathbb{T}$ на сомножителях типа $\mathbb{S}^3$ можно построить минимальные поверхности, которые в свою очередь можно вложить в поля минимальных поверхностей. Рассмотрим Ξ_1 — пересечение сферы Ξ с конусом $\{x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$.

Теорема 4. *Вложение $\Xi_1 \subset \mathbb{S}^3$, рассматриваемое как подмножество сферы S^3, является минимальной поверхностью.*

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 1. □

Само многообразие $\mathcal{T}$ не может быть евклидовым, так как оно содержит сферы $\mathbb{S}^3$, но его сечения оказываются евклидовыми.

Теорема 5. *Гауссова кривизна сечения Ξ_1, рассматриваемого как подмножество $\mathcal{T}$, равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение J_γ определяет окружности в инвариантных плоскостях $\{x_0, x_2\}$ и $\{x_1, x_3\}$. Эти окружности при $\gamma = \pi$ проходят через точку, диаметрально противоположную начальной точке, поэтому они являются геодезическими сферы $\mathbb{S}^3$. Второе семейство окружностей получается в результате умножения слева. Как и в случае кватернионов, каждое из семейств определяет клиффордовы сдвиги: каждая точка проходит один и тот же путь (угол γ) и расстояния между точками сохраняются. Траектории пересекаются под прямым углом, так как нормали переходят в нормали. Как и прежде, зафиксируем начальную точку q и пройдем сначала по правому семейству, а потом по левому на один и тот же угол γ. Потом мы повторим это, начиная опять с точки q, в обратном порядке (сначала по левому, а потом по правому семейству). Попадание в ту же самую конечную точку на этот раз проблематично, потому что алгебра Кэли неассоциативна. Однако положение спасает так называемое тождество элластичности: если умножить октонион $\mathbf{z}$ одновременно как справа, так и слева, на один и тот же октонион $\mathbf{a}$, то результат не зависит от порядка операций: $\mathbf{aza} = (\mathbf{az})\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{za})$ [4, с. 323]. Следовательно, мы попадаем в одну и ту же точку и получаем пространственный параллелограмм из геодезических линий многообразия Ξ_1. Сумма его углов равна 4π. Поскольку точка q произвольна, гауссова кривизна Ξ_1 равна нулю, и геометрия Ξ_1 евклидова. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Caratheodory C.** Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen // Acta Szeged. 1929. Vol. 4. P. 193–216.
2. **Clifford W.K.** On a surface of zero curvature and finite extent // Proc. London Math. Soc. 1873. Vol. 4. P. 381–395.
3. **Osipov Yu.S., Zelikin M.I.** Multidimensional generalization of Jacobi envelope theorem // Russian J. Math. Phys. 2012. Vol. 19, no. 1. P. 101–106. doi: 10.1134/S1061920812010086 .
4. **Постников М.М.**, Группы и алгебры Ли. Лекции по геометрии. Семестр V. Москва: Наука, 1982. 447 с.
5. **Simons J.** Minimal varieties in Riemannian manifold // Ann. Math. 1969. Vol. 88. P. 62–105.
6. **Weyl H.** Geodesic fields in the calculus of variations for multiple integrals // Ann. Math. 1935. Vol. 36. P. 607–629.
7. **Zelikin M.I.** Theory of fields for multiple integrals // Russian Math. Surveys. 2011. Vol. 66, no. 4. P. 103–136. doi: 10.1070/RM2011v066n04ABEH004754 .

Поступила 11.02.2019
После доработки 11.03.2019
Принята к публикации 18.03.2019

Зеликин Михаил Ильич
чл.-корр. РАН, профессор
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: mzelikin@mtu-net.ru

Осипов Юрий Сергеевич
академик РАН, заведующий кафедрой
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: fff@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Caratheodory C. Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen. *Acta Szeged.* 1929, vol. 4, pp. 193–216.
2. Clifford W.K. On a surface of zero curvature and finite extent. *Proc. London Math. Soc.*, 1873, vol. 4, pp. 381–395.

3. Osipov Yu.S., Zelikin M.I. Multidimensional generalization of Jacobi envelope theorem. *Russian J. Math. Phys.*, 2012, vol. 19, no. 1, pp. 101–106. doi: 10.1134/S1061920812010086 .
4. Postnikov M.M. *Lectures in geometry: Lie groups and Lie algebras. Semester V.* Moscow: Mir Publ., 1986, 437 p. ISBN (2nd ed.): 978-5-88417-024-6 . Original Russian text published in Postnikov M.M. *Gruppy i algebry Li. Lektsii po geometrii, Semestr V.* Moscow: Nauka Publ., 1982, 447 p.
5. Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifold. *Ann. of Math.*, 1969, vol. 88, pp. 62–105. doi: 10.2307/1970556 .
6. Weyl H. Geodesic fields in the calculus of variations for multiple integrals. *Ann. Math.*, 1935, vol. 36, pp. 607–629. doi: 10.2307/1968645 .
7. Zelikin M.I. Theory of fields of extremals for multiple integrals. *Russian Math. Surveys*, 2011, vol. 66, no. 4, pp. 733–765. doi: 10.1070/RM2011v066n04ABEH004754 .

Received February 11, 2019
Revised March 11, 2019
Accepted March 18, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00805).

Yury Sergeyevich Osipov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., RAS Academician, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia, e-mail: yriyosipov@hotmail.com .

Mikhail Ilyich Zelikin, Dr. Phys.-Math. Sci, Prof., RAS Corresponding Member, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia, e-mail: mzelikin@mtu-net.ru .

Cite this article as: M. I. Zelikin, Yu. S. Osipov. Minimal submanifolds of spheres and cones, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 100–107 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

АЛЬТРУИСТИЧЕСКИЙ И АГРЕССИВНЫЙ ТИПЫ ПОВЕДЕНИЯ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ТРЕХ ЛИЦ

А. Ф. Клейменов

В настоящей работе результаты предыдущих работ автора, касающихся неантагонистической позиционной дифференциальной игры двух лиц с различными типами поведения игроков, обобщаются на игру трех лиц. Для простоты парадоксальный тип поведения игроками не используется. Дается обобщение понятий альтруистического и агрессивного типов поведения игроков. Как и в игре двух лиц, предполагается, что каждый игрок наряду с выбором позиционной стратегии выбирает также индикаторную функцию-программу. Уточняются правила формирования управлений для каждой тройки типов поведения, а также определение BT-решения. Рассматривается пример игры с динамикой простого движения на плоскости и фазовым ограничением. Допускается, что игроки могут проявлять альтруизм и агрессию по отношению к своим партнерам, причем не исключается случай одновременной агрессии со стороны всех игроков. Дается описание BT-решений игры.

Ключевые слова: позиционная дифференциальная игра трех лиц, терминальные показатели выигрыша, альтруистический и агрессивный типы поведения игроков, решения нэшевского типа.

A. F. Kleimenov. Altruistic and aggressive types of behavior in a nonantagonistic positional differential game of three persons.

In this paper, the results of the author's previous work concerning a nonantagonistic positional differential game of two persons with different types of the players' behavior are generalized to a game of three persons. For simplicity, the paradoxical type of behavior is not used by the players. The notions of altruistic and aggressive behavior types are generalized. As in the two-person game, it is assumed that each player chooses not only a positional strategy but also an indicator program function. The rules for forming controls for each triple of behavior types and the definition of a BT-solution are clarified. An example of a game with the dynamics of simple motion on a plane and a phase constraint is considered. It is assumed that the players can show altruism and aggression towards their partners, and the case of simultaneous aggression from all the players is not excluded. A description of BT-solutions of the game is given.

Keywords: nonantagonistic positional differential game, terminal payoff functionals, altruistic and aggressive behavior types, Nash equilibrium.

MSC: 20D10, 20D25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-108-117

Введение

Настоящая работа посвящена развитию теории позиционных дифференциальных игр [1; 2] на отдельные классы неантагонистических игр (см., например, [3]).

Ранее в работах автора [4–6] была предложена формализация неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц с различными типами поведения игроков. Предполагалось, каждый из двух игроков помимо обычного, *нормального* (nor), типа поведения, ориентированного на максимизацию собственного функционала выигрыша, может использовать другие типы поведения, введенные в работах [7; 8], а именно *альтруистический* (alt) и *агрессивный* (agg) по отношению к другому игроку типы, а также *парадоксальный* (par) тип. Допускалось, что по ходу игры игроки могли осуществлять переключения своего поведения с одного типа на другой. Предполагалось, что в игре каждый игрок одновременно с выбором позиционной стратегии выбирал также индикаторную функцию, определенную на всем отрезке игры и принимающую значения в множестве $\{nor, alt, agg, par\}$. Индикаторная функция игрока показывала динамику изменения типа поведения, которой придерживается этот игрок. Для каждой пары типов поведения игроков были введены правила формирования управлений. При этом формализация позиционных стратегий в игре основывалась на формализации и результатах общей теории позиционных дифференциальных игр [1; 2; 9]. Было предложено понятие BT-решения. На простых примерах была проиллюстрирована процедура построения BT-решений.

В настоящей работе результаты работ [4–6] обобщаются на неантагонистическую позиционную дифференциальную игру трех лиц. Для простоты парадоксальный тип поведения игроками не используется. Для игры трех лиц дается обобщение понятий альтруистического и агрессивного типов поведения игроков. Как и в игре двух лиц, предполагается, что каждый игрок наряду с выбором позиционной стратегии выбирает также индикаторную функцию-программу. Уточняются правила формирования управлений для каждой тройки типов поведения, а также определение BT-решения. Предложен пример игры с динамикой простого движения на плоскости и фазовым ограничением. Допускается, что первый, второй и третий игроки могут проявлять альтруизм, а также агрессию по отношению к некоторым из своих партнеров в течение некоторых промежутков времени, причем не исключается случай одновременной агрессии со стороны всех игроков. Дается описание BT-решений игры.

1. Неантагонистическая позиционная дифференциальная игра трех лиц. NE - и $P(NE)$-решения

Динамика игры описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v, w), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $u \in Q^u \in comp(\mathbb{R}^p)$; $v \in Q^v \in comp(\mathbb{R}^q)$; $w \in Q^w \in comp(\mathbb{R}^s)$; ϑ — заданный момент окончания игры.

Предполагается, что функция f непрерывна, липшицева по x, удовлетворяет условию подлинейного роста по x, а также условию седловой точки в маленькой игре [1].

Игрок 1, игрок 2 и игрок 3 распоряжаются выбором управлений u, v и w соответственно.

Всем игрокам доступна информация о текущей позиции игры $\{t, x(t)\}$. Используемая здесь формализация позиционных стратегий и порождаемых ими движений аналогична формализации, введенной в [1; 2], за исключением технических деталей [9].

Стратегия игрока 1 отождествляется с парой $U = \{u(t, x, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\}$, где $u(\cdot)$ — произвольная функция позиции (t, x) и положительного параметра точности ε, принимающая значения в множестве Q^u. Функция $\beta_1 : (0, \infty) \to (0, \infty)$ непрерывная монотонная и удовлетворяет условию $\beta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для фиксированного ε величина $\beta_1(\varepsilon)$ является верхней границей шага разбиения отрезка $[t_0, \vartheta]$, которое игрок 1 применяет при формировании пошаговых движений. Аналогично стратегия игрока 2 определяется как $V = \{v(t, x, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\}$, а стратегия игрока 3 — как $W = \{w(t, x, \varepsilon), \beta_3(\varepsilon)\}$.

Движения, порожденные тройкой (U, V, W) из начальной позиции (t_0, x_0), рассматриваются двух типов: аппроксимационные (пошаговые) движения и идеальные (предельные) движения.

Аппроксимационное движение $x^{\varepsilon}_{\Delta}[t] = x\,[t, t_0, x_0, U, \varepsilon_1, \Delta_1, V, \varepsilon_2, \Delta_2, W, \varepsilon_3, \Delta_3]$ определяется для фиксированных значений параметров точности ε_1, ε_2 и ε_3, для фиксированных разбиений отрезка $[t_0, \vartheta]$: $\Delta_1 = \{t^{(1)}_i\}$, $\Delta_2 = \{t^{(2)}_k\}$ и $\Delta_3 = \{t^{(3)}_l\}$, выбранных игроками и удовлетворяющих условиям $\delta(\Delta_i) \le \beta_i(\varepsilon_i),\ i = 1, 2, 3,$ где $\delta(\Delta_i) = \max\limits_j (t^{(i)}_{j+1} - t^{(i)}_j)$.

Идеальное (предельное) движение $x(t) = x(t, t_0, x_0, U, V, W)$ есть равномерный предел последовательности аппроксимационных движений

$$\{x^{\varepsilon^s}_{\Delta^s}\,[t, t^s_0, x^s_0, U, \varepsilon^s_1, \Delta^s_1, V, \varepsilon^s_2, \Delta^s_2, W, \varepsilon^s_3, \Delta^s_3]\},$$

где $s \to \infty,\ \varepsilon_i^s \to 0,\ t_0^s \to t_0,\ x_0^s \to x_0,\ \delta(\Delta_i^s) \le \beta_i(\varepsilon_i^s),\ i = 1,2,3.$

Законы управления $(U, \varepsilon_1, \Delta_1)$, $(V, \varepsilon_2, \Delta_2)$ и $(W, \varepsilon_3, \Delta_3)$ назовем *согласованными по параметру точности*, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Согласованные законы управления порождают согласованные аппроксимационные движения, последовательности которых порождают согласованные предельные движения. Множество предельных движений $X(t_0, x_0, U, V, W)$ есть компакт в пространстве $C[t_0, \vartheta]$.

Функционал выигрыша игрока i , берется в виде

$$I_i = \sigma_i(x(\vartheta)), \quad i = 1,2,3, \tag{1.2}$$

где σ_i — непрерывная функция.

Таким образом, определена классическая неантагонистическая позиционная дифференциальная игра (НПДИ) [3; 9]. Кроме того допускаем наличие в игре фазовых ограничений.

О п р е д е л е н и е 1. Тройка стратегий (U^N, V^N, W^N) образует нэшевское решение (NE-решение) игры НПДИ, если для любого движения $\overline{x}(\cdot) \in X(t_0, x_0, U^N, V^N, W^N)$, любого $\tau \in [t_0, \vartheta]$, любых стратегий U, V и W выполнены следующие неравенства:

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_1(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U, V^N, W^N)) \le \min_{x(\cdot)} \sigma_1(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W^N)),$$

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_2(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V, W^N)) \le \min_{x(\cdot)} \sigma_2(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W^N)),$$

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_3(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W)) \le \min_{x(\cdot)} \sigma_3(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W^N)),$$

причем операции min производятся на множествах согласованных движений, а операции max — на соответствующих множествах всех движений.

О п р е д е л е н и е 2. NE-решение (U^P, V^P, W^P), неулучшаемое по Парето относительно величин I_1, I_2, I_3 (1.2), называется $P(NE)$-решением НПДИ.

Введем вспомогательные антагонистические позиционные дифференциальные игры Γ_1, Γ_2 и Γ_3. Динамика каждой игры описывается уравнением (1.1). В игре Γ_i, $i = 1,2,3$, игрок i максимизирует свой функционал I_i (1.2) , а два других игрока совместно противодействуют ему. В [1; 2] показано, что игры Γ_1, Γ_2 и Γ_3 имеют универсальные седловые точки

$$u^{(i)}(t, x, \varepsilon),\ v^{(i)}(t, x, \varepsilon),\ w^{(i)}(t, x, \varepsilon) \tag{1.3}$$

и непрерывные функции цены $\gamma_i(t, x)$, $i = 1,2,3$.

Свойство универсальности стратегий (1.3) означает, что они являются оптимальными не только для фиксированной начальной позиции (t_0, x_0), но и для любой позиции (t_*, x_*), рассматриваемой в качестве начальной. Нетрудно видеть, что величина $\gamma_i(t, x)$ представляет собою гарантированный выигрыш игрока i в позиции (t, x) игры.

Для каждой NE- и $P(NE)$- траектории $x^*(t)$ имеет место следующее свойство [9].

С в о й с т в о A. Точка $t = \vartheta$ является точкой максимума функции гарантированного выигрыша игрока i, вычисленной вдоль этой траектории, т. е.

$$max_{t \in [t_0, \vartheta]} \gamma_i(t, x^*(t)) = \gamma_i(\vartheta, x^*(\vartheta)), \quad i = 1,2,3. \tag{1.4}$$

2. Типы поведения

В работах [4–6] для игры двух лиц дополнительно предполагалось, что помимо обычного, *нормального* (nor), типа поведения, ориентированного на максимизацию собственных функционалов выигрыша, игроки могут использовать другие типы поведения, а именно *альтруистический* и *агрессивный* [7; 8].

Эти два типа поведения для игры трех лиц формализуем следующим образом.

О п р е д е л е н и е 3. Скажем, что игрок i, $i \in \{1,2,3\}$, придерживается на отрезке $[t_*, t^*]$ альтруистического типа поведения по отношению к игроку j, $j \in \{1,2,3\}, j \neq i$ (далее обозначаем этот тип через $alt(j)$), если на этом отрезке действия игрока i направлены на максимизацию функционала I_j (1.2) игрока j.

О п р е д е л е н и е 4. Скажем, что игрок $i, i \in \{1,2,3\}$, придерживается на отрезке $[t_*, t^*]$ агрессивного типа поведения по отношению к игроку j, $j \in \{1,2,3\}, j \neq i$ (далее обозначаем этот тип через $agg(j)$), если на этом отрезке действия игрока i направлены на минимизацию функционала I_j (1.2) игрока j.

Таким образом, игрок i в каждой позиции игры делает выбор из 5 возможных типов поведения: nor, $alt(j_1)$, $alt(j_2)$, $agg(j_1)$, $agg(j_2)$, где $j_1 \neq i, j_2 \neq i$.

Заметим, что агрессивный тип поведения игроков фактически используется в НПДИ как двух, так и трех лиц в форме стратегий наказания, содержащихся в структуре решений игры (см., например, [9]).

Приведенные определения характеризуют экстремальные типы поведения игроков. В действительности же реальные индивидуумы ведут себя, как правило, частично нормально, частично альтруистично и частично агрессивно. Другими словами, смешанные типы поведения, по-видимому, больше согласуются с реальностью.

Если каждого игрока ограничить "чистыми" типами поведения, то в рассматриваемой игре трех лиц с динамикой (1.1) и с функционалами I_1, I_2 и I_3 (1.2) существует 125 возможных троек типов поведения. При этом в некоторых тройках интересы игроков совпадают и игроки решают командные задачи управления. В некоторых тройках игроки (коалиции игроков) имеют противоположные интересы и, следовательно, разыгрываются антагонистические дифференциальные игры. Оставшиеся тройки определяют неантагонистические дифференциальные игры двух игроков (коалиций игроков) и трех игроков.

Идея использования игроками возможности переключения по ходу игры своего поведения с одного типа на другой была применена для игры с кооперативной динамикой в работе [8] и для повторяющейся биматричной 2×2 игры в работе [10], что позволило получить новые решения в этих играх.

Распространение указанного подхода на неантагонистические позиционные дифференциальные игры трех лиц приводит к новым постановкам задач. В частности, представляет интерес, как трансформируются выигрыши игроков, получаемые на нэшевских решениях. Актуальной становится задача минимизации времени "ненормального" поведения при условии достижения результата, более хорошего, чем при нормальном поведении игроков.

3. Формализация игры НПДИсТП. BT-решение игры

Итак, игроки могут по ходу игры переключаться с одного типа поведения на другой. Такую игру будем называть *неантагонистической позиционной дифференциальной игрой с типами поведения игроков* (НПДИсТП).

Далее будем полагать, что одновременно с выбором позиционной стратегии игрок i, $i = 1,2,3$, выбирает также индикаторную функцию, определенную на отрезке $[t_0, \vartheta]$ и принимающую значение в множестве $\Omega(i) = \{nor, alt(j_1), alt(j_2), agg(j_1), agg(j_2)\}$, где $j_1 \neq i, j_2 \neq i$. Обозначим индикаторную функцию игрока i символом $\alpha_i : [t_0, \vartheta] \to \Omega(i)$, $i = 1,2,3$. Если индикаторная функция какого-то игрока принимает значение, скажем, $alt(j_1)$ на некотором отрезке времени, то этот игрок действует на этом отрезке как альтруист по отношению к игроку j_1. Заметим также, что если индикаторные функции всех трех игроков тождественно равны значению nor на всем промежутке игры, то имеем классическую НПДИ.

Таким образом, в рассматриваемой игре с различными типами поведения игроков игрок 1 управляет выбором пары *действий* {позиционная стратегия, индикаторная функция}:

$(U,\ \alpha_1(\cdot))$, игрок 2 управляет выбором пары действий $(V,\ \alpha_2(\cdot))$, а игрок 3 управляет выбором пары действий $(W,\ \alpha_3(\cdot))$.

Как упоминалось выше, при выборе игроками различных типов поведения могут сложиться четыре вида задач принятия решений: задача командного управления, антагонистическая игра, неантагонистическая игра двух или трех лиц. Будем считать, что игроки в каждой из четырех указанных ситуаций руководствуются следующим правилом.

П р а в и л о 1. Если на промежутке $(\tau_1, \tau_2) \subset [t_0, \vartheta]$ индикаторные функции игроков сгенерировали неантагонистическую игру двух или трех лиц, то на этом промежутке игроки выбирают одно из $P(NE)$- решений сложившейся игры. Если сложилась антагонистическая игра, то в качестве решения игроки реализуют седловую точку игры. Наконец, если сложилась задача командного управления, то игроки выбирают одну из троек управлений, обеспечивающих неубывание вдоль траектории функции цены γ_i, где i — номер игрока, функционал которого максимизируется.

Вообще говоря, одна и та же часть траектории может быть отслежена несколькими тройками типов поведения игроков, причем эти тройки могут отличаться друг от друга суммарным временем использования *ненормальных* типов. Естественно ввести следующее правило.

П р а в и л о 2. При наличии нескольких троек типов поведения, отслеживающих некоторую часть траектории, игроки выбирают ту из них, которая минимизирует суммарное время использования ненормальных типов поведения.

Введем теперь определение понятия решения игры НПДИсТП. Отметим, что множество движений, порожденных тройкой действий $\{(U, \alpha_1(\cdot)), (V, \alpha_2(\cdot)), (W,\ \alpha_3(\cdot))\}$, совпадает с множеством движений, порожденных тройкой (U, V, W) в соответствующей НПДИ.

О п р е д е л е н и е 5. Тройка действий $\{(U^0, \alpha_1^0(\cdot)), (V^0, \alpha_2^0(\cdot)), (W^0,\ \alpha_3^0(\cdot))\}$, согласованная с правилом 1, образует BT-решение игры НПДИсТП, если найдется порожденная тройкой траектория $x^{BT}(\cdot)$ и найдется $P(NE)$-решение в соответствующей игре НПДИ, порождающее траекторию $x^P(\cdot)$, такие, что выполнены неравенства

$$\sigma_i(x^{BT}(\vartheta)) \geq \sigma_i(x^P(\vartheta)), \quad i = 1, 2, 3,$$

причем по крайней мере одно из неравенств строгое.

О п р е д е л е н и е 6. BT-решение $\{(U^P, \alpha_1^P(\cdot)), (V^P, \alpha_2^P(\cdot)), (W^P,\ \alpha_3^P(\cdot))\}$, неулучшаемое по Парето относительно величин I_1, I_2, I_3 (1.2), назовем $P(BT)$-решением игры НПДИсТП.

З а д а ч а 1. Найти множество BT-решений.

З а д а ч а 2. Найти множество $P(BT)$-решений.

В общем случае задачи 1 и 2 решений не имеют. Однако вполне ожидаемо, что использование игроками в игре НПДИсТП типов поведения, отличных от нормального, может в ряде случаев привести к исходам, более предпочтительным для них, чем в соответствующей игре НПДИ только с нормальным типом поведения.

Учитывая определения 5 и 6, а также свойство A (1.4) $P(NE)$-траекторий, приходим к следующему алгоритму.

А л г о р и т м построения BT-решений игры НПДИсТП.

Ш а г 1. Найти множество $P(NE)$-траекторий игры НПДИ.

Ш а г 2. В множестве достижимости системы (1.1), построенном для момента ϑ, найти все точки z, для которых выполнены неравенства

$$\sigma_i(z) \geq \sigma_i(a), \quad i = 1, 2, 3, \quad \sigma_1(z) + \sigma_2(z) + \sigma_3(z) > \sigma_1(a) + \sigma_2(a) + \sigma_3(a), \tag{3.1}$$

где $a = x^*(\vartheta)$, $x^*(\cdot)$ — $P(NE)$-траектория.

Ш а г 3. Для определенной на шаге 2 точки z (если таковая найдется) построить индикаторные функции-программы игроков, обеспечивающие движение по траектории L, переводящей систему (1.1) из точки x_0 в точку z.

Ш а г 4. Найти тройку стратегий игроков, порождающую предельное движение L и согласованную с построенными индикаторными функциями.

Алгоритм иллюстрируется на примере в следующем разделе.

4. Пример

Пусть динамика (1.1) имеет вид

$$\dot{x} = u + v + w, \quad x, u, v, w \in \mathbb{R}^2, \quad \|u\| \le 2\mu, \quad \|v\| \le \mu, \quad \|w\| \le \mu, \quad t_0 \le t \le \vartheta, \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.1}$$

а функционалы выигрыша (1.2) суть

$$I_i = \sigma_i(x(\vartheta)) = M - \|x(\vartheta) - a^{(i)}\|, \quad i = 1, 2, 3,$$

т. е. игрок i стремится привести точку $x(\vartheta)$ как можно ближе к целевой точке $a^{(i)}$.

Зададим следующие начальные условия и значения параметров: $t_0 = 0$, $x_0 = (0, 0)$, $\vartheta = 3.0$, $\mu = 0.5$, $a^{(1)} = (10, 0)$, $a^{(2)} = (-8, 6)$, $a^{(3)} = (-2, 10)$, $M = 20$ (рисунок).

Опишем фазовые ограничения. Траекториям системы (4.1) запрещается заходить во внутренность множества S, которое получается удалением из пятиугольника $abcde$ отрезка ag. Множество S состоит из двух частей S_1 и S_2, т. е. $S = S_1 \cup S_2$. Координаты точек, задающих фазовые ограничения, следующие: $a = (0, 0)$, $b = (-2, 1.5)$, $c = (-2, 3.5)$, $d = (0, 5)$, $e = (4, 0)$, $g = (2, 2.5)$. Можно проверить, что точка b лежит на отрезке $a^{(2)}a$, а точка g — на отрезке ed.

Множество достижимости системы (4.1), построенное для момента $\vartheta = 3.0$, содержит точки, ограниченные двухзвенником bae и дугой окружности радиуса 6, а также дугами, соединяющими эту окружность со сторонами cd и de пятиугольника (см. рисунок). Первая (составная) дуга состоит из дуги окружности с центром в точке b и радиусом $r_1 = 6 - |ab|$ и дуги окружности с центром в точке c и радиусом $r_2 = 6 - |ab| - |bc|$. Вторая (также составная) дуга состоит из дуги окружности с центром в точке g и радиусом $r_3 = 6 - |ag|$ и дуги окружности с центром в точке e и радиусом $r_4 = 6 - |ae|$. Кроме того, в множество достижимости входят точки отрезка ag.

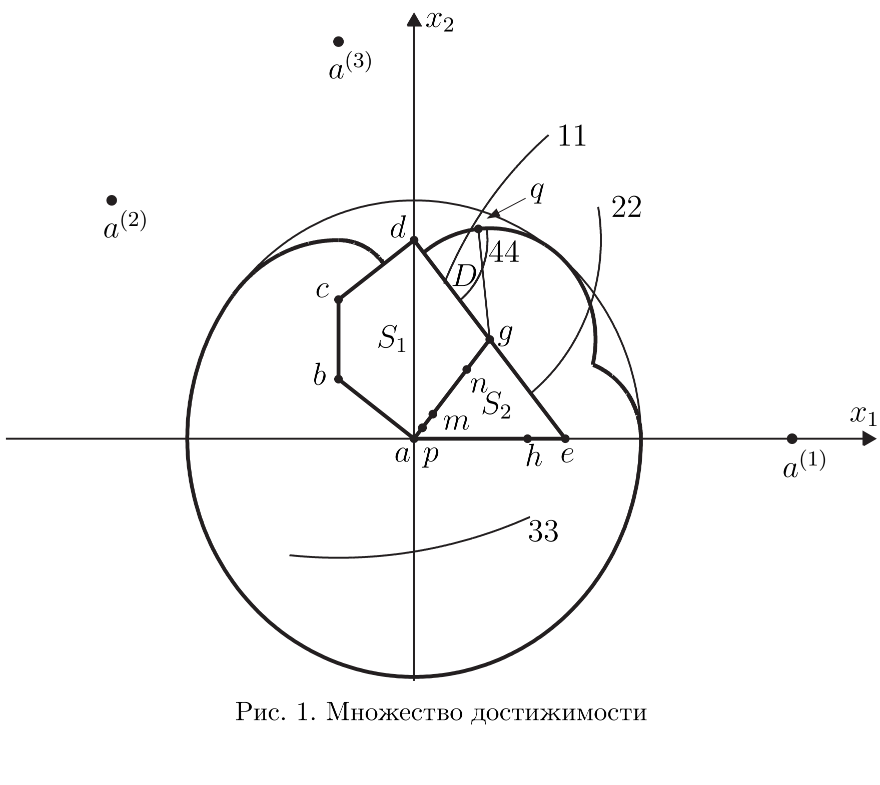


Рис. 1. Множество достижимости

Функции цены $\gamma_1(t,x)$, $\gamma_2(t,x)$ и $\gamma_3(t,x)$, $0 \le t \le \vartheta$, $x \in \mathbb{R}^2 \backslash S$ (1.3), вспомогательных антагонистических игр Γ_1, Γ_2 и Γ_3 в данном примере будут определяться как

$$\gamma_1(t,x) = \begin{cases} 20 - \|x - a^{(1)}\|, & \text{если } xa^{(1)} \bigcap intS = \varnothing, \\ 20 - \rho_S\left(x, a^{(1)}\right) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(здесь через $\rho_S\left(x, a^{(1)}\right)$ обозначено наименьшее из двух расстояний от точки x до точки $a^{(1)}$, одно из которых вычисляется при обходе множества S по часовой стрелке, а другое — при обходе S против часовой стрелки) и как

$$\gamma_i(t,x) = \begin{cases} 20 - \|x - a^{(i)}\| - (\vartheta - t), & \text{если } xa^{(i)} \bigcap intS = \varnothing, \\ 20 - \rho_S\left(x, a^{(i)}\right) - (\vartheta - t) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(здесь $i = 2, 3$, а через $\rho_S\left(x, a^{(i)}\right)$ обозначено наименьшее из двух расстояний от точки x до точки $a^{(i)}$, одно из которых вычисляется при обходе множества S по часовой стрелке, а другое — при обходе S против часовой стрелки).

Перейдем теперь к построению BT-решений игры НПДИсТП в соответствии с алгоритмом из предыдущего раздела.

На шаге 1 можно проверить, что в игре НПДИ все точки отрезка ah, где $h = (3, 0)$, и только они, являются концами траекторий, порожденных $P(NE)$-решениями. При этом в точке h заканчивается $P(NE)$-траектория, наилучшая для игрока 1, а в точке a — $P(NE)$-траектория, наилучшая для игроков 2 и 3 одновременно.

Далее ограничиваемся построением BT-решений, отвечающих только $P(NE)$-решению, приводящему в точку a (см. определение 5). Соответствующая $P(NE)$-траектория имеет вид $x(t) \equiv 0$, $t \in [0, 3]$ (стационарная точка a). Выигрыши игроков на ней следующие: $I_1 = 10.0; I_2 = 10.0; I_3 = 11.0$.

На шаге 2 в множестве достижимости найдем все точки z, для которых выполнены неравенства (3.1). Такие точки составят множество D (см. рисунок). С “севера” оно ограничено границей множества достижимости, с “востока” составной дугой 44 окружности с центром в точке d и радиусом $10 - |a^{(2)}d|$ и окружности с центром в точке $a^{(2)}$ и радиусом 10. С “юга” множество D ограничено частью отрезка ed, а с “запада“ дугой 11 окружности с центром в точке $a^{(1)}$ и радиусом 10. При этом на дуге 11 нестрогое неравенство (3.1) при $i = 1$ превращается в равенство, а на дуге 44 превращается в равенство нестрогое неравенство (3.1) при $i = 2$. В остальных точках множества D нестрогие неравенства (3.1) при $i \in \{1, 2, 3\}$ будут строгими.

Шаг 3 опишем только для BT-решения, приводящего в точку $q \in D$, лежащую на границе множества достижимости. Рассмотрим траекторию agq. Выигрыши игроков на ней составляют $I_1 = 10.236$, $I_2 = 10.175$, $I_2 = 13.956$, т. е. каждый игрок выигрывает больше, чем на $P(NE)$-траектории, приводящей в точку a. Требуется построить индикаторные функции-программы игроков, обеспечивающие движение по этой траектории.

На отрезке ag найдем точку m, равноудаленную от точки $a^{(1)}$ как при обходе множества S_2 по часовой стрелке, так и при обходе S_2 против часовой стрелки. Найдем также точку n, равноудаленную от точки $a^{(2)}$ как при обходе множества S_1 по часовой стрелке, так и при обходе S_1 против часовой стрелки. Наконец, найдем также точку p, равноудаленную от точки $a^{(3)}$ как при обходе множества S_1 по часовой стрелке, так и при обходе S_1 против часовой стрелки. Результаты вычислений: $m = (0.494, 0.618)$, $n = (1.395, 1.744)$, $p = (0.219, 0.273)$.

Отметим, что при движении по траектории agq с максимальной скоростью при $t \in [0, 3]$ момент попадания в точку p будет определяться как $t = 0.175$, в точку m — как $t = 0.396$, в точку n — как $t = 1.116$, в точку g — как $t = 1.601$, а в точку q — как $t = 3.0$.

Нетрудно проверить, что при таком движении по траектории agq на промежутке $t \in [0, 0.175]$ все три функции, $\gamma_1(t,x)$, $\gamma_2(t,x)$ и $\gamma_3(t,x)$, монотонно убывают; при движении на промежутке $t \in [0.175, 0.396]$ функции $\gamma_1(t,x)$ и $\gamma_2(t,x)$ продолжают убывать, а функция $\gamma_3(t,x)$

возрастает; при движении на промежутке $t \in [0.396, 1.116]$ функция $\gamma_2(t,x)$ продолжает убывать, а функции $\gamma_1(t,x)$ и $\gamma_3(t,x)$ возрастают; при движении на промежутке $t \in [1.116, 1.601]$ все три функции возрастают; наконец, на оставшемся промежутке $t \in [1.601, 3]$ функция $\gamma_1(t,x)$ убывает, а функции $\gamma_2(t,x)$ и $\gamma_3(t,x)$ возрастают.

Получаем, что на участке ap траектории тройка типов поведения $(agg(2), agg(3), agg(1))$ является одной из троек, определяющих командную задачу управления, в которой движение представляет максимальный сдвиг в направлении точки p. На следующем участке pm тройка $(alt(3), alt(3), nor)$ (с минимальным суммарным временем использования ненормальных типов поведения) также определяет командную задачу управления, в которой движение представляет максимальный сдвиг в направлении точки m. На участке mn тройка $(nor, alt(3), nor)$, минимизирующая суммарное время использования ненормальных типов поведения, снова определяет командную задачу управления, в которой движение представляет максимальный сдвиг в направлении точки n. На следующем участке ng тройка (nor, nor, nor) обеспечивает максимальный сдвиг в направлении точки g. Наконец, на участке gq тройка $(alt(2), nor, nor)$ порождает неантагонистическую игру двух лиц.

Таким образом, построены индикаторные функции-программы игроков

$$\alpha_1^\circ(t) = \{agg(2), t \in [0, 0.175);\ alt(3), t \in [0.175, 0.396)\}, \tag{4.2}$$

$$\alpha_1^\circ(t) = \{nor, t \in [0.396, 1.601);\ alt(2), t \in [1.601, 3]\},$$

$$\alpha_2^\circ(t) = \{agg(3), t \in [0, 0.175);\ alt(3), t \in [0.175, 1.116);\ nor, t \in [1.116, 3]\}. \tag{4.3}$$

$$\alpha_3^\circ(t) = \{agg(1), t \in [0, 0.175);\ nor, t \in [0.175, 3]\}. \tag{4.4}$$

На шаге 4 через $(U^\circ, V^\circ, W^\circ))$ обозначим тройку стратегий игроков, порождающую предельное движение agq при $t \in [0, 3]$ и согласованную с построенными индикаторными функциями.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Тройка действий* $\{(U^\circ, \alpha_1^\circ(\cdot)), (V^\circ, \alpha_2^\circ(\cdot)), (W^\circ, \alpha_3^\circ(\cdot))\}$ (4.2)–(4.4) *доставляет* $P(BT)$*-решение.*

Следуя схеме доказательства утверждения 1, приходим к следующему утверждению.

Утверждение 2. *Множество* D *состоит из точек, которые являются концами траекторий, порожденных* BT*-решениями игры.*

Заключение

В статье мы используем сложное переключение, а именно с одного типа поведения на другой, меняя природу проблемы оптимизации — с неантагонистических игр двух или трех лиц к играм с нулевой суммой или задачам командного управления и наоборот. И эти переключения выполняются в соответствии с предварительно выбранными индикаторными функциональными программами. Каждый игрок контролирует выбор пары действий {позиционная стратегия, индикаторная функция}. Таким образом, возможности каждого игрока в общем случае расширились, и можно ввести новую концепцию игрового решения ($P(BT)$-решения), в которой все три игрока увеличивают свои выигрыши по сравнению с выигрышами в равновесии по Нэшу в игре без переключения типов поведения. Для игроков выгодно реализовать $P(BT)$-траекторию, поэтому они будут следовать заявленным индикаторным функциям-программам (4.2)–(4.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. . М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. **Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.** Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
4. **Клейменов А.Ф.** Альтруистическое поведение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7, вып. 4. С. 40–55.
5. **Клейменов А.Ф.** Агрессивное поведение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8, вып. 4. С. 63–78.
6. **Kleimenov, A.F.** Altruistic and aggressive types of behavior in a non-antagonistic positional differential two-person game // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss 32. P. 219–224.
7. **Клейменов А.Ф.** О решениях в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 739–746.
8. **Kleimenov, A.F., Kryazhimskii A.V.** Normal behavior, altruism and aggression in cooperative game dynamics. Interim Report IR-98-076. Laxenburg: IIASA, 1998. 47 p.
9. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 185 с.
10. **Kleimenov, A.F.** An approach to building dynamics for repeated bimatrix 2×2 games involving various behavior types // Dynamic and Control / ed. G. Leitman. London: Gordon and Breach, 1998. P. 195–204.

Поступила 16.05.2019
После доработки 5.07.2019
Принята к публикации 15.07.2019

Клейменов Анатолий Федорович
д-р физ.-мат.наук, профессор,
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 520 p.
3. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Shevkoplyas E.V. *Teoriya igr* [Game theory]. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg Publ., 2012, 432 p. ISBN: 978-5-9775-0484-3 .
4. Kleimenov A.F. Altruistic behavior in a nonantagonistic positional differential game. *Autom. Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 4, pp. 762–769. doi: 10.1134/S0005117917040178 .
5. Kleimenov A.F. Aggressive behavior in a non-antagonistic positional differential game. *Autom. Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 1, pp. 171–179. doi: 10.1134/S0005117919010156 .
6. Kleimenov A.F. Altruistic and aggressive types of behavior in a non-antagonistic positional differential two-person game // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss 32. P. 219–224.
7. Kleimenov A.F. On solutions in a nonantagonistic positional differential game. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 717–723. doi: 10.1016/S0021-8928(97)00094-4 .
8. Kleimenov, A.F., Kryazhimskii A.V. *Normal Behavior, Altruism and Aggression in Cooperative Game Dynamics.* Interim Report IR-98-076, Laxenburg: IIASA, 1998, 47 p.
9. Kleimenov, A.F. *Nonantagonistic positional differential games* (Neantagonisticheskie pozitsionnye differentsial'nye igry). Ekaterinburg: Nauka Publ., 1993, 185 p. ISBN: 5-7691-0353-1 .

10. Kleimenov, A.F. An Approach to Building Dynamics for Repeated Bimatrix 2×2 Games Involving Various Behavior Types. In: *Dynamics and Control*, Leitman G. etc (eds), London: Gordon and Breach, 1998, ISBN: 90-5699-172-8 , pp. 195–204.

Received May 16, 2019
Revised July 5, 2019
Accepted July 15, 2019

Anatolii Fedorovich Kleimenov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: kleimenov@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. F. Kleimenov. Altruistic and aggressive types of behavior in a nonantagonistic positional differential game of three persons, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 108–117 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

К ТЕОРИИ ПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА[1]

Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

Для динамической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла, рассматривается дифференциальная игра на минимакс-максимин показателя качества, который оценивает историю движения, реализующуюся к терминальному моменту времени. Управляющие воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями. Игра формализуется в классах чистых позиционных стратегий с памятью истории движения. Доказывается, что у такой игры существует цена и седловая точка. Доказательство основано на выборе подходящего функционала Ляпунова — Красовского при построении стратегий управления по методу экстремального сдвига на сопутствующие точки.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, теория управления, дифференциальные игры.

N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. To the theory of positional differential games for neutral-type systems.

For a dynamic system whose motion is described by neutral-type differential equations in Hale's form, we consider a minimax–maximin differential game with a quality index evaluating the motion history realized up to the terminal time. The control actions of the players are subject to geometric constraints. The game is formalized in classes of pure positional strategies with a memory of the motion history. It is proved that the game has a value and a saddle point. The proof is based on the choice of an appropriate Lyapunov–Krasovskii functional in the construction of control strategies by the method of an extremal shift to accompanying points.

Keywords: neutral-type systems, control theory, differential games.

MSC: 49N70, 49N35, 34K40

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-118-128

Введение

Работа посвящена развитию теории позиционных дифференциальных игр [1–3] для систем нейтрального типа. Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра, в которой движение динамической системы описывается дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла [4]. Управляющие воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями. Показатель качества процесса управления оценивает историю движения системы, сложившуюся к терминальному моменту времени. Игра формализуется в классах чистых позиционных стратегий в рамках подхода [1–3]. Результатом работы является теорема о существовании цены и седловой точки в рассматриваемой дифференциальной игре.

Вопросы существования цены и оптимальных стратегий в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа изучались ранее в [5–8]. При этом в [8] исследовались линейные системы нейтрального типа. В [5; 7] рассматривались дифференциальные игры для нелинейных систем, но формализованные в классах стратегий управления с поводырем. Наиболее близкий к настоящей статье результат был получен в [6], где рассматривалась дифференциальная игра в классах чистых позиционных стратегий для нелинейных систем нейтрального типа достаточно общего вида. Однако в силу особой техники доказательства, основанной на конструкциях двух поводырей [9; 10], в [6] на игру накладывались дополнительные, вообще

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3566.2019.1.

говоря обременительные, ограничения: требовалось, чтобы функционал, определяющий показатель качества, и функционал, стоящий под знаком производной в левой части уравнений движения, удовлетворяли условию Липшица, причем последний — с константой меньшей единицы. В настоящей статье эти ограничения сняты. При этом система имеет по сравнению с [5–7] несколько менее общий, но тем не менее достаточно типичный вид. Получить данный результат удалось при помощи классической схемы рассуждений из [3], подобрав подходящий функционал Ляпунова — Красовского [11; 12].

1. Дифференциальная игра

Рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру, в которой движение системы описывается дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла [4]

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t)-g(t,x(t-h))\Big)=f(t,x(t),x(t-h),u(t),v(t)),\\ t\in[t_0,\vartheta],\quad x(t)\in\mathbb{R}^n,\quad u(t)\in\mathbb{U},\quad v(t)\in\mathbb{V},\end{gathered}\tag{1.1}$$

а показатель качества имеет вид

$$\gamma=\sigma(x_\vartheta(\cdot)).\tag{1.2}$$

Здесь t — время; $x(t)$ — вектор состояния в момент времени t; t_0 и ϑ — фиксированные начальный и терминальный моменты; $h>0$ — константа запаздывания; $x_\vartheta(\cdot)$ — история движения на промежутке $[\vartheta-h,\vartheta]$: $x_\vartheta(\xi)=x(\vartheta+\xi)$, $\xi\in[-h,0]$; $u(t)$ и $v(t)$ — текущие управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно; $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^l$ — компакты.

Первый игрок нацелен минимизировать показатель (1.2), второй — максимизировать.

Всюду ниже угловыми скобками $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначаем скалярное произведение векторов, двойными скобками $\|\cdot\|$ — евклидовоу норму; $\mathrm{Lip}([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство липшицевых функций из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$, снабженное равномерной нормой; $\mathrm{Lip}=\mathrm{Lip}([-h,0],\mathbb{R}^n)$. Равномерную норму в Lip обозначаем как $\|\cdot\|_\infty$. Также для $\alpha>0$ принимаем $B(\alpha)=\{x\in\mathbb{R}^n\colon\|x\|\le\alpha\}$.

Полагаем, что для функций $g\colon[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$, $f\colon[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{U}\times\mathbb{V}\mapsto\mathbb{R}^n$ и функционала $\sigma\colon\mathrm{Lip}\mapsto\mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

(g) Для любого $\alpha>0$ найдется такое $\lambda_g=\lambda_g(\alpha)>0$, что имеет место оценка

$$\big\|g(t,x)-g(t',x')\big\|\le\lambda_g\big(|t-t'|+\|x-x'\|\big),\quad t,t'\in[t_0,\vartheta],\quad x,x'\in B(\alpha).$$

(f_1) Функция f непрерывна.

(f_2) Существует такая константа $c_f>0$, что имеет место оценка

$$\big\|f(t,x,y,u,v)\big\|\le c_f\big(1+\|x\|+\|y\|\big),\quad (t,x,y,u,v)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{U}\times\mathbb{V}.$$

(f_3) Для любого $\alpha>0$ существует такое $\lambda_f=\lambda_f(\alpha)>0$, что справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\big\|f(t,x,y,u,v)-f\big(t,x',y',u,v)\big\|\le\lambda_f\big(\|x-x'\|+\|y-y'\|\big),\\ t\in[t_0,\vartheta],\quad x,y,x',y'\in B(\alpha),\quad u\in\mathbb{U},\quad v\in\mathbb{V}.\end{gathered}$$

(f_4) Для любых $t\in[t_0,\vartheta]$ и $x,y,s\in\mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}}\langle f(t,x,y,u,v),s\rangle=\max_{v\in\mathbb{V}}\min_{u\in\mathbb{U}}\langle f(t,x,y,u,v),s\rangle.$$

(σ) Функционал σ непрерывен.

Зафиксируем некоторые числа $\alpha_0, \lambda_0 > 0$. Определим множество начальных позиций

$$G_0 = \{t_0\} \times \{w(\cdot) \in \mathrm{Lip}\colon \|w(\xi)\| \le \alpha_0,\ \|x(\xi) - x(\xi')\| \le \lambda_0 |\xi - \xi'|,\ \xi, \xi' \in [-h, 0]\}.$$

Взяв число c_f из условия (f_2), определим множество допустимых позиций

$$G = \Big\{(t, x_t(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times \mathrm{Lip}\colon x(\cdot) \in \mathrm{Lip}([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n),\ (t_0, x_{t_0}(\cdot)) \in G_0,$$

$$\Big\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t) - g(t, x(t-h))\Big)\Big\| \le c_f\big(1 + \|x(t)\| + \|x(t-h)\|\big) \text{ при п.в. } t \in [t_0, \vartheta]\Big\}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее $x_t(\cdot)\colon x_t(\xi) = x(t + \xi)$, $\xi \in [-h, 0]$.

Пусть выбрана позиция $(\tau, w(\cdot)) \in G$, $\tau < \vartheta$. Допустимыми реализациями управляющих воздействий $u(t)$ и $v(t)$ на промежутке $[\tau, \vartheta]$ будем называть измеримые функции $u(\cdot) : [\tau, \vartheta) \mapsto \mathbb{U}$ и $v(\cdot)\colon [\tau, \vartheta) \mapsto \mathbb{V}$. Действуя, например, по схеме из [13] (см. также [14, P1]), можно показать, что при условиях (g), (f_1)–(f_3) любая пара допустимых реализаций $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ единственным образом порождает из позиции $(\tau, w(\cdot))$ движение $x(\cdot)$ системы (1.1) — функцию из $\mathrm{Lip}([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет начальному условию $x(\tau + \xi) = w(\xi)$, $\xi \in [-h, 0]$ и вместе с $u(t)$ и $v(t)$ почти всюду на $[\tau, \vartheta]$ удовлетворяет уравнению (1.1). Кроме того, в силу определения (1.3) множества G для движения $x(\cdot)$ будет справедливо включение

$$(t, x_t(\cdot)) \in G, \quad \tau \in [t, \vartheta]. \tag{1.4}$$

Формализацию дифференциальной игры (1.1), (1.2) будем проводить в классах позиционных стратегий управления игроков, следуя подходу [1–3]. При этом в силу условия (f_4) можно ограничиться классом чистых позиционных стратегий [3, § 8].

Под стратегией управления первого игрока понимаем отображение

$$U = U(t, w(\cdot), \varepsilon) \in \mathbb{U}, \quad (t, w(\cdot)) \in G, \quad \varepsilon > 0,$$

где ε — параметр точности [3, с. 68].

Пусть зафиксированы позиция $(\tau, w(\cdot)) \in G$, число $\varepsilon > 0$ и разбиение отрезка $[\tau, \vartheta]$:

$$\Delta_\delta = \big\{t_j : 0 < t_{j+1} - t_j \le \delta,\ j \in \overline{1, J-1},\ t_1 = \tau,\ t_J = \vartheta\big\}. \tag{1.5}$$

Тройка $\{U, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ определяет закон управления первого игрока, который в цепи обратной связи формирует кусочно-постоянную (а стало быть, допустимую) реализацию $u(\cdot)$ по правилу

$$u(t) = U(t_j, x_{t_j}(\cdot), \varepsilon), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j \in \overline{1, J-1}. \tag{1.6}$$

Из позиции $(\tau, w(\cdot))$ такой закон в паре с допустимой реализацией управления второго игрока $v(\cdot)$ однозначно порождает движение $x(\cdot)$ системы (1.1). Соответствующее этому движению значение показателя качества (1.2) обозначим через $\gamma(\tau, w(\cdot); U, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot))$.

Определим величину гарантированного результата стратегии U

$$\rho_u(\tau, w(\cdot), U) = \varlimsup_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v(\cdot)} \gamma(\tau, w(\cdot); U, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot)). \tag{1.7}$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом первого игрока будет величина

$$\rho_u^\circ(\tau, w(\cdot)) = \inf_U \rho_u(\tau, w(\cdot), U). \tag{1.8}$$

Стратегию U° называем оптимальной, если справедливо равенство

$$\rho_u(\tau, w(\cdot), U^\circ) = \rho_u^\circ(\tau, w(\cdot)), \quad (\tau, w(\cdot)) \in G.$$

Аналогично, с понятными изменениями, для второго игрока рассматриваем стратегию управления $V = V(t, w(\cdot), \varepsilon) \in \mathbb{V}$, $(t, w(\cdot)) \in G$, $\varepsilon > 0$, закон управления $\{V, \varepsilon, \Delta_\delta\}$, определяющий кусочно-постоянную реализацию $v(\cdot)$ по правилу

$$v(t) = V(t_j, x_{t_j}(\cdot), \varepsilon), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j \in \overline{1, J-1},$$

величину гарантированного результата стратегии V

$$\rho_v(\tau, w(\cdot), V) = \varliminf_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u(\cdot)} \gamma(\tau, w(\cdot); u(\cdot); V, \varepsilon, \Delta_\delta) \tag{1.9}$$

и величину оптимального гарантированного результата второго игрока

$$\rho_v^\circ(\tau, w(\cdot)) = \sup_V \rho_v(\tau, w(\cdot), V). \tag{1.10}$$

Стратегия управления второго игрока V° оптимальна, если

$$\rho_v(\tau, w(\cdot), V^\circ) = \rho_v^\circ(\tau, w(\cdot)), \quad (\tau, w(\cdot)) \in G.$$

Из соотношений (1.8) и (1.10) вытекает неравенство

$$\rho_u^\circ(\tau, w(\cdot)) \geq \rho_v^\circ(\tau, w(\cdot)), \quad (\tau, w(\cdot)) \in G. \tag{1.11}$$

В случае, когда справедливо равенство

$$\rho_u^\circ(\tau, w(\cdot)) = \rho_v^\circ(\tau, w(\cdot)), \quad (\tau, w(\cdot)) \in G,$$

говорят, что дифференциальная игра (1.1), (1.2) имеет *цену*, а пару оптимальных стратегий $\{U^\circ, V^\circ\}$ называют *седловой точкой игры*.

Теорема. *Дифференциальная игра* (1.1), (1.2) *имеет цену и седловую точку* $\{U^\circ, V^\circ\}$.

Ключевую роль в доказательстве этой теоремы будет играть следующий вспомогательный функционал Ляпунова — Красовского [11; 12].

2. Функционал Ляпунова — Красовского

Опираясь на соотношение (1.3), можно показать существование таких $\alpha_G, \lambda_G > 0$, что

$$\|w(\xi)\| \leq \alpha_G, \quad \|w(\xi) - w(\xi')\| \leq \lambda_G |\xi - \xi'|, \quad \xi, \xi' \in [-h, 0], \quad (t, w(\cdot)) \in G. \tag{2.1}$$

Тогда в силу условий (g) и (f_3) для $\lambda_g = \lambda_g(\alpha_G)$ и $\lambda_f = \lambda_f(\alpha_G)$ имеем

$$\begin{gathered} \|g(t, w(-h)) - g(t', w'(-h))\| \leq \lambda_g\big(|t - t'| + \|w(-h) - w'(-h)\|\big), \\ \|f(t, w(0), w(-h), u, v) - f(t, w'(0), w'(-h), u, v)\| \leq \lambda_f\big(\|w(0) - w'(0)\| + \|w(-h) - w'(-h)\|\big), \\ (t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot)) \in G, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Определим функционал

$$V_\varepsilon(t, p, w(\cdot)) = \kappa_\varepsilon(t, p, w(\cdot)) e^{-2(\lambda_f + \lambda_g/h)(t - t_0)}, \quad (t, p, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{Lip}, \tag{2.3}$$

где

$$\kappa_\varepsilon(t, p, w(\cdot)) = \sqrt{\varepsilon^2 + \|p\|^2} + \lambda_f \int\limits_{-h}^{0} \Big(1 - \frac{2\lambda_g \xi}{h}\Big) \|w(\xi)\| \mathrm{d}\xi, \quad \varepsilon > 0. \tag{2.4}$$

Лемма 1. *Пусть* $\tau \in [t_0, \vartheta]$ *и* $\varepsilon > 0$. *Пусть функции* $s(\cdot) \in \mathrm{Lip}([\tau, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ *и* $z(\cdot) \in \mathrm{Lip}([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ *удовлетворяют оценкам*

$$\begin{gathered} \|s(t) - z(t)\| \leq \lambda_g \|z(t-h)\|, \quad t \in [\tau, \vartheta], \\ \Big\langle \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}, s(t) \Big\rangle \leq \lambda_f \big(\|z(t)\| + \|z(t-h)\| \big) \|s(t)\| + \varepsilon^2 \text{ при п.в. } t \in [\tau, \vartheta]. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Тогда будет справедливо неравенство

$$V_\varepsilon(t, s(t), z_t(\cdot)) \leq V_\varepsilon(\tau, s(\tau), z_\tau(\cdot)) + (t - \tau)\varepsilon, \quad t \in [\tau, \vartheta]. \tag{2.6}$$

Доказательство. Опираясь на соотношения (2.3) и (2.4), с учетом липшицевости функций $s(\cdot)$ и $z(\cdot)$ можно показать липшицевость функций $\omega_1(t) = \kappa_\varepsilon(t, s(t), z_t(\cdot))$ и $\omega_2(t) = V_\varepsilon(t, s(t), z_t(\cdot))$, $t \in [\tau, \vartheta]$. Тогда, пользуясь оценками (2.5), при почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$ имеем

$$\frac{\mathrm{d}\omega_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\langle \mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t, s(t) \rangle}{\sqrt{\varepsilon^2 + \|s(t)\|^2}} + \lambda_f \|z(t)\| - \lambda_f (1 + 2\lambda_g) \|z(t-h)\| + \frac{2\lambda_f \lambda_g}{h} \int\limits_{t-h}^{t} \|z(\xi)\| \mathrm{d}\xi$$

$$\leq \varepsilon + 2\lambda_f \|z(t)\| - 2\lambda_f \lambda_g \|z(t-h)\| + \frac{2\lambda_f \lambda_g}{h} \int\limits_{t-h}^{t} \|z(\xi)\| \mathrm{d}\xi \leq \varepsilon + 2\lambda_f \|s(t)\| + \frac{2\lambda_f \lambda_g}{h} \int\limits_{t-h}^{t} \|z(\xi)\| \mathrm{d}\xi.$$

Отсюда выводим оценку

$$\frac{\mathrm{d}\omega_2(t)}{\mathrm{d}t} = \bigg(\varepsilon - 2(\lambda_g/h) \|s(t)\| - 2\lambda_f^2 \int\limits_{t-h}^{t} \|z(\xi)\| \mathrm{d}\xi \bigg) e^{-2(\lambda_f + \lambda_g/h)(t - t_0)} \leq \varepsilon,$$

из которой вытекает неравенство (2.6).

Лемма 2. *Существует такое число* $\lambda_V > 0$, *что для всех* $\varepsilon > 0$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, $p \in \mathbb{R}^n$ *и* $w(\cdot) \in \mathrm{Lip}$ *при условии*

$$\|w(\xi)\| \leq 2\alpha_G, \quad \|w(\xi) - w(\xi')\| \leq 2\lambda_G |\xi - \xi'|, \quad \xi, \xi' \in [-h, 0], \tag{2.7}$$

справедливо неравенство

$$\|w(\cdot)\|_\infty^2 \leq \lambda_V V_\varepsilon(t, p, w(\cdot)). \tag{2.8}$$

Доказательство. При условии (2.7) существует $\lambda_* > 0$ такое, что

$$\|w(\cdot)\|_\infty^2 \leq \lambda_* \int\limits_{-h}^{0} \|w(\xi)\| \mathrm{d}\xi.$$

Отсюда и из (2.3), полагая $\lambda_V = e^{2(\lambda_f + \lambda_g/h)(\vartheta - t_0)} \lambda_* / \lambda_f$, получаем неравенство (2.8).

3. Доказательство теоремы

По правой части системы (1.1) определим гамильтониан

$$H(t, x, y, s) = \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, x, y, u, v), s \rangle, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x, y, s \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

и многозначные отображения

$$\begin{aligned} F_+(t, x, y, v) &= \mathrm{co}\big\{ f(t, x, y, u, v) \,|\, u \in \mathbb{U} \big\} \subset \mathbb{R}^n, \\ F_-(t, x, y, u) &= \mathrm{co}\big\{ f(t, x, y, u, v) \,|\, v \in \mathbb{V} \big\} \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}, \tag{3.2}$$

где символ co означает выпуклую оболочку в $\mathbb{R}^n$. В силу условий (f_1)–(f_4) имеем

(H) Для числа $\lambda_f > 0$ из (2.2) и любых $(t, w(\cdot)), (t, w'(\cdot)) \in G$ и $s \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка
$$|H(t, w(0), w(-h), s) - H(t, w'(0), w'(-h), s)| \leq \lambda_f \big(\|w(0) - w'(0)\| + \|w(-h) - w'(-h)\|\big)\|s\|.$$

(F_1) Многозначные отображения F_+ и F_- выпукло компактнозначны и непрерывны в метрике Хаусдорфа.

(F_2) Для числа $c_f > 0$ из условия (f_2) при любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ и $l \in F_+(t, x, y, v) \cup F_-(t, x, y, u)$ справедливо неравенство
$$\|l\| \leq c_f\big(1 + \|x\| + \|y\|\big).$$

(F_3) Для любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, y, s \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства
$$\max_{v\in\mathbb{V}} \min_{l\in F_+(t,x,y,v)} \langle l, s\rangle = H(t, x, y, s) = \min_{u\in\mathbb{U}} \max_{l\in F_-(t,x,y,u)} \langle l, s\rangle.$$

Для $(\tau, w(\cdot)) \in G$ и $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ через $X_+(\tau, w(\cdot), v)$ и $X_-(\tau, w(\cdot), u)$ обозначим множество функций $x(\cdot) \in \mathrm{Lip}([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию $x(\tau + \xi) = w(\xi)$ при $\xi \in [-h, 0]$ и, соответственно, следующим дифференциальным включениям при почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t) - g(t, x(t-h))\Big) \in F_+(t, x(t), x(t-h), v), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t) - g(t, x(t-h))\Big) \in F_-(t, x(t), x(t-h), u).$$
Действуя по схеме из [14, P2], можно показать, что множества $X_+(\tau, w(\cdot), v)$ и $X_-(\tau, w(\cdot), u)$ компактны в $\mathrm{Lip}([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, причем в силу (1.3) имеет место включение
$$(t, x_t(\cdot)) \in G, \quad t \in [\tau, \vartheta], \quad x(\cdot) \in X_+(\tau, w(\cdot), v) \cup X_-(\tau, w(\cdot), u). \tag{3.3}$$

Из результатов [7] вытекает следующее утверждение.

Утверждение. *Существует такой непрерывный функционал $\varphi\colon G \mapsto \mathbb{R}$, что*
$$\varphi(\vartheta, w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad (\vartheta, w(\cdot)) \in G; \tag{3.4}$$
$$\begin{aligned} \varphi(\tau, w(\cdot)) &\geq \min_{x(\cdot)\in X_+(\tau,w(\cdot),v)} \varphi(t, x_t(\cdot)), \\ \varphi(\tau, w(\cdot)) &\leq \max_{x(\cdot)\in X_-(\tau,w(\cdot),u)} \varphi(t, x_t(\cdot)), \end{aligned} (\tau, w(\cdot)) \in G, \quad t \in [\tau, \vartheta], \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \tag{3.5}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $(t, w(\cdot)) \in G$ и функционалом V_ε определен согласно (2.3). Через $O_\varepsilon(t, w(\cdot))$ обозначим множество позиций $(t, r(\cdot)) \in G$, удовлетворяющих неравенству
$$V_\varepsilon(t, w(0) - g(t, w(-h)) - r(0) + g(t, r(-h)), w(\cdot) - r(\cdot)) \leq \varepsilon(1 + t - t_0). \tag{3.6}$$
С учетом определения (1.3) множества G можно показать, что $O_\varepsilon(t, w(\cdot))$ — компакт в $\{t\}\times\mathrm{Lip}$.

Пусть φ — функционал из утверждения. Положим
$$U^*(t, w(\cdot), \varepsilon) \in \operatorname*{argmin}_{u\in\mathbb{U}} \max_{v\in\mathbb{V}} \langle f(t, w(0), w(-h), u, v), w(0) - g(t, w(-h)) - r_*(0) + g(t, r_*(-h))\rangle, \tag{3.7}$$
где
$$(t, r_*(\cdot)) \in \operatorname*{argmin}_{(t,r(\cdot))\in O_\varepsilon(t,w(\cdot))} \varphi(t, r(\cdot)).$$

Лемма 3. *Справедливо неравенство $\rho_u(\tau, w(\cdot), U^*) \leq \varphi(\tau, w(\cdot))$, $(\tau, w(\cdot)) \in G$, где ρ_u — величина, определенная согласно* (1.7).

Доказательство. По определению (1.7) величины $\rho_u(\tau, w(\cdot), U^*)$ для доказательства леммы достаточно показать, что для любого числа $\zeta > 0$ найдутся такие число $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\zeta) > 0$ и функция $\delta_*(\varepsilon) = \delta_*(\zeta, \varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, что, каковы бы ни были позиция $(\tau, w(\cdot)) \in G$, числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ и $\delta \in (0, \delta_*(\varepsilon))$, разбиение Δ_δ (1.5) и допустимая реализация $v(\cdot)$, для движения $x(\cdot)$ системы (1.1), порожденного из позиции $(\tau, w(\cdot))$ законом управления $\{U^*, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ и реализацией $v(\cdot)$, будет справедливо неравенство

$$\gamma(\tau, w(\cdot); U^*, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot)) = \sigma(x_\vartheta(\cdot)) \leq \varphi(\tau, w(\cdot)) + \zeta. \tag{3.8}$$

В силу условий (f_1), (F_1) и оценок (2.1) найдется такая функция $\delta_f(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, +\infty)$, что для любых $\varepsilon > 0$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ и $(t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot)) \in G$ при условии

$$|t - t'| \leq \delta_f(\varepsilon), \quad \|w(0) - w'(0)\| \leq \delta_f(\varepsilon), \quad \|w(-h) - w'(-h)\| \leq \delta_f(\varepsilon),$$

имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|f(t, w(0), w(-h), u, v) - f(t', w'(0), w'(-h), u, v)\| &\leq \varepsilon, \\ \max_{l \in F_+(t, w(0), w(-h), v)} \min_{l' \in F_+(t', w'(0), w'(-h), v)} \|l - l'\| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Пусть выбрано $\zeta > 0$. В силу условия (σ) и оценок (2.1) найдется такое число $\varepsilon_\sigma > 0$, что для любых $(\vartheta, w(\cdot)), (\vartheta, w'(\cdot)) \in G$ при условии $\|w(\cdot) - w'(\cdot)\|_\infty \leq \varepsilon_\sigma$ имеет место неравенство

$$|\sigma(w(\cdot)) - \sigma(w'(\cdot))| \leq \zeta. \tag{3.10}$$

Взяв числа α_G и λ_G из (2.1) и числа λ_g и λ_f из (2.2), обозначим

$$\alpha_s = 2(1 + \lambda_g)\alpha_G, \quad \lambda_s = 2\lambda_g(1 + \lambda_G), \quad c_* = c_f(1 + 2\alpha_G). \tag{3.11}$$

Возьмем число $\lambda_V > 0$ из леммы 2 и положим

$$\varepsilon_* = \frac{\varepsilon_\sigma^2}{\lambda_V^2(1 + \vartheta - t_0)}, \quad \delta_*(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\delta_f(\varepsilon^2/(8\alpha_s))}{1 + \lambda_G}, \frac{\varepsilon^2}{8c_*\lambda_s}, \frac{\varepsilon^2}{16\alpha_s\lambda_f\lambda_G}, \frac{\varepsilon^2}{16\alpha_G\lambda_f\lambda_s}\right\}. \tag{3.12}$$

Пусть зафиксированы позиция $(\tau, w(\cdot)) \in G$, числа

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_*), \quad \delta \in (0, \delta_*(\varepsilon)), \tag{3.13}$$

разбиение Δ_δ (1.5) и допустимая реализация $v(\cdot)$. Рассмотрим движение $x(\cdot)$ системы (1.1), порожденное законом управления $\{U^*, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ и реализацией $v(\cdot)$. По индукции докажем оценку

$$\varphi(t_j, r^j(\cdot)) \leq \varphi(\tau, w(\cdot)), \quad j \in \overline{1, J}, \tag{3.14}$$

где

$$(t_j, r^j(\cdot)) \in \underset{(t_j, r(\cdot)) \in O_\varepsilon(t_j, x_{t_j}(\cdot))}{\operatorname{argmin}} \varphi(t_j, r(\cdot)). \tag{3.15}$$

Для $j = 1$ оценка выполняется в силу выбора (3.15) позиции $(\tau, r^1(\cdot))$. Предположим теперь, что оценка (3.14) выполняется для $j = k$, и докажем ее для $j = k + 1$. Определим значение

$$v^k \in \underset{v \in \mathbb{V}}{\operatorname{argmax}} \min_{l \in F_+(t_k, r^k(\cdot), v)} \langle l, x(t_k) - g(t_k, x(t_k - h)) - r^k(0) + g(t_k, r^k(-h))\rangle. \tag{3.16}$$

Согласно неравенствам (3.5) найдется такая функция $y^k(\cdot) \in X_+(t_k, r^k(\cdot), v^k)$, что

$$\varphi(t_{k+1}, y^k_{t_{k+1}}(\cdot)) \leq \varphi(t_k, r^k(\cdot)). \tag{3.17}$$

Определим функции

$$z^k(t) = x(t) - y^k(t), \quad s^k(t) = z^k(t) - g(t, x(t-h)) + g(t, y^k(t-h)), \quad t \in [t_k, \vartheta]. \tag{3.18}$$

Тогда, учитывая выбор (3.12), (3.13) числа δ, обозначения (3.11) и включения (1.4), (3.3), из оценок (2.1), (2.2) и условий (f_2), (F_2) для любых $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$ выводим

$$\begin{gathered}
\max\left\{|t - t_k|, \|x_t(\cdot) - x_{t_k}(\cdot)\|_\infty, \|y^k_t(\cdot) - y^k_{t_k}(\cdot)\|_\infty\right\} \le \delta_f(\varepsilon^2/(8\alpha_s)),\\
\|z^k_t(\cdot)\|_\infty \le 2\alpha_G, \quad \|z^k_t(\cdot) - z^k_{t_k}(\cdot)\|_\infty \le \varepsilon^2/(8\lambda_f\alpha_s), \quad \|s^k(t) - z^k(t)\| \le \lambda_g\|z^k(t-h)\|\\
\|s^k(t)\| \le \alpha_s, \quad \|s^k(t) - s^k(t_k)\| \le \lambda_s|t - t_k| \le \min\{\varepsilon^2/(8c_*), \varepsilon^2/(16\alpha_G\lambda_f)\},\\
\|f(t, x(t), x(t-h), u, v)\| \le c_*, \quad \sup\{\|l\|\colon l \in F_+(t, y^k(t), y^k(t-h), v)\} \le c_*.
\end{gathered} \tag{3.19}$$

В силу уравнения (1.1) и включения $y^k(\cdot) \in X_+(t_k, r^k(\cdot), v^k)$ при почти всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$ имеем

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}s^k(t)}{\mathrm{d}t}, s^k(t)\right\rangle = \langle f(t, x(t), x(t-h), u(t), v(t)) - l^k(t), s^k(t)\rangle, \quad l^k(t) \in F(t, y^k(t), y^k(t-h), v_k).$$

Отсюда, пользуясь (3.9) и (3.19), выводим

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\mathrm{d}s^k(t)}{\mathrm{d}t}, s^k(t)\right\rangle &\le \langle f(t_k, x(t_k), x(t_k - h), u(t), v(t)) - l^k_*(t), s^k(t)\rangle + \varepsilon^2/4,\\
&\le \langle f(t_k, x(t_k), x(t_k - h), u(t), v(t)) - l^k_*(t), s^k(t_k)\rangle + \varepsilon^2/2,
\end{aligned}$$

где $l^k_*(t) \in F_+(t_k, r^k(0), r^k(-h), v^k)$. Далее, учитывая определение (3.7) стратегии U^* и правило (1.6) формирования реализации $u(\cdot)$, соответствующей этой стратегии, выбор (3.16) значения v^k, свойства (H) и (F_3), а также определение (3.18) функции $z^k(\cdot)$ и оценки (3.19), получаем

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\mathrm{d}s^k(t)}{\mathrm{d}t}, s^k(t)\right\rangle &\le \max_{v\in\mathbb{V}}\langle f(t_k, x(t_k), x(t_k - h), u(t), v), s^k(t_k)\rangle - \min_{l\in F(t_k, r^k(0), r^k(-h), v^k)}\langle l, s^k(t_k)\rangle + \varepsilon^2/2\\
&= H(t_k, x(t_k), x(t_k - h), s^k(t_k)) - H(t_k, y^k(t_k), y^k(t_k - h), s^k(t_k)) + \varepsilon^2/2\\
&\le \lambda_f\big(\|z^k(t_k)\| + \|z^k(t_k - h)\|\big)\|s^k(t_k)\| + \varepsilon^2/2 \le \lambda_f\big(\|z^k(t)\| + \|z^k(t-h)\|\big)\|s^k(t)\| + \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая четвертое неравенство в (3.19), заключаем, что для $z(\cdot) = z^k(\cdot)$ и $s(\cdot) = s^k(\cdot)$ выполнены все условия леммы 1. Поэтому справедливо неравенство

$$V_\varepsilon(t_{k+1}, s^k(t_{k+1}), z^k_{t_{k+1}}(\cdot)) \le V_\varepsilon(t_k, s^k(t_k), z^k_{t_k}(\cdot)) + (t_{k+1} - t_k)\varepsilon,$$

которое в силу включения $r^k(\cdot) \in O_\varepsilon(t_k, x_{t_k}(\cdot))$ и неравенства (3.6) означает, что имеет место включение $y^k_{t_{k+1}}(\cdot) \in O_\varepsilon(t_{k+1}, x_{t_{k+1}}(\cdot))$. Таким образом, в согласии с соотношениями (3.15), (3.17) и предположением индукции, выводим

$$\varphi(t_{k+1}, r^{k+1}_{t_{k+1}}(\cdot)) \le \varphi(t_{k+1}, y^k_{t_{k+1}}(\cdot)) \le \varphi(t_k, r^k(\cdot)) \le \varphi(\tau, w(\cdot)).$$

Итак, неравенство (3.14) доказано для всех $j \in \overline{1, J}$.

По лемме 2, учитывая сначала включение $(\vartheta, r^J(\cdot)) \in O_\varepsilon(\vartheta, x_\vartheta(\cdot))$ вместе с неравенством (3.6), а затем соотношения (3.12), (3.13), получаем

$$\begin{aligned}
\|x_\vartheta(\cdot) - r^J(\cdot)\|^2_\infty &\le \lambda_V V_\varepsilon(\vartheta, x(\vartheta) - g(\vartheta, x(\vartheta - h)) - r^J(0) + g(\vartheta, r^J(-h)), x_\vartheta(\cdot) - r^j(\cdot))\\
&\le \lambda_V(1 + \vartheta - t_0)\varepsilon \le \lambda_V(1 + \vartheta - t_0)\varepsilon_* = \varepsilon^2_\sigma.
\end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь неравенствами (3.10) и (3.14), с учетом равенства (3.4) заключаем

$$\sigma(x_\vartheta(\cdot)) \le \sigma(r^J(\cdot)) + \zeta = \varphi(\vartheta, r^J(\cdot)) + \zeta \le \varphi(t, w(\cdot)) + \zeta.$$

Лемма доказана.

Аналогично для второго игрока, полагая

$$V^*(t, w(\cdot), \varepsilon) \in \operatorname*{argmax}_{v\in\mathbb{V}} \min_{u\in\mathbb{U}} \big\langle f(t, w(0), w(-h), u, v), r_*(0) - g(t, r_*(-h)) - w(0) + g(t, w(-h))\big\rangle,$$

где

$$(t, r_*(\cdot)) \in \operatorname*{argmax}_{(t,r(\cdot))\in O_\varepsilon(t,w(\cdot))} \varphi(t, r(\cdot)),$$

можно доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Справедливо неравенство* $\rho_v(\tau, w(\cdot), V^*) \ge \varphi(\tau, w(\cdot))$, $(\tau, w(\cdot)) \in G$, *где* ρ_v *— величина, определенная согласно* (1.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Из лемм 3, 4 и соотношений (1.8), (1.10) и (1.11) получаем равенство

$$\rho_u^\circ(\tau, w(\cdot)) = \rho_u(\tau, w(\cdot), U^*) = \rho_v(\tau, w(\cdot), V^*) = \rho_v^\circ(\tau, w(\cdot)),$$

которое показывает, что дифференциальная игра (1.1), (1.2) имеет цену, а пара стратегий $\{U^*, V^*\}$ составляют седловую точку игры. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр систем с последействием // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, Вып. 2. С. 300–311.
3. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
4. **Hale J.** Theory of functional differential Equations. N Y: Springer-Verlag, 1977.
5. **Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.** Дифференциальные игры для систем нейтрального типа: аппроксимирующая модель // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 202–214.
6. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.** Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2016. Т. 22, № 2. С. 101–112. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112 .
7. **Гомоюнов М.И., Плаксин А.Р.** Об основном уравнении дифференциальных игр для систем нейтрального типа // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82, вып. 6. С. 675–689. doi: 10.31857/S003282350002733-6 .
8. **Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu.** On the numerical solution of differential games for neutral-type linear systems // Proc. Steklov Inst. Math. 2018. Vol. 301, suppl. 1. P. 44–56. doi: 10.1134/S0081543818050048 .
9. **Кряжимский А.В.** Об устойчивом позиционном управлении в дифференциальных играх // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, Вып. 6. С. 963–968.
10. **Максимов В.И.** Дифференциальная игра наведения для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Задачи динамического управления: сб. ст. / УНЦ АН СССР, 1981. С. 33–45.
11. **Красовский Н.Н.** О применении второго метода А. М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 3. С. 315–327.
12. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

13. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
14. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во Урал. федерал. ун-та, 2011. 243 с.

Поступила 16.04.2019
После доработки 14.05.2019
Принята к публикации 20.05.2019

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН,
директор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: nyul@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer. 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Osipov Yu.S. On the theory of differential games of systems with aftereffect. *J. Appl. Math. Mech.*, 1971, vol. 35, no. 2, pp. 262–272. doi: 10.1016/0021-8928(71)90032-3 .
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
4. Hale J. *Theory of Functional Differential Equations.* N Y: Springer-Verlag, 1977, 365 p. ISBN: 978-1-4612-9892-2 .
5. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Differential games for neutral-type systems: An approximation model. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 190–202. doi: 10.1134/S0081543815080155 .
6. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Existence of a value and a saddle point in positional differential games for neutral-type systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. 37–48. doi: 10.1134/S0081543817090061 .
7. Gomoyunov M.I., Plaksin A.I. On the basic equation of differential games for neutral-type systems. *Prikl. Mat. Mekh.*, 2018, vol. 82, no. 6, pp. 675–689 (in Russian). doi: 10.31857/S003282350002733-6 .
8. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. On the numerical solution of differential games for neutral-type linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 301, suppl. 1, pp. 44–56. doi: 10.1134/S0081543818050048 .
9. Kriazhimskii A.V. On stable position control in differential games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1980, vol. 42, no. 6, pp. 1055–1060. doi: 10.1016/0021-8928(78)90054-0 .
10. Maksimov V.I. A differential guidance game for a system of neutral type with a deviating argument. *Problems of dynamic control, Collect. Artic.*, Sverdlovsk: UNTs AN SSSR, 1981, pp. 33–45 (in Russian).
11. Krasovskii N.N. On the application of the second method of Lyapunov for equations with time delays. *Prikl. Mat. Meh.*, 1956, vol. 20, pp. 315–327 (in Russian).
12. Krasovsky N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* (Some problems of the theory of stability of motion). Moscow: Fizmatgiz Publ., 1959, 211 p.
13. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous right-hand sides.* Mathematics and Its Applications: Soviet Series, vol. 18. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Pub., 1988, 304 p. doi: 10.1007/978-94-015-7793-9 . Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu.* Moscow: Nauka Publ., 1985, 225 p.

14. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona–Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoi informatsiei* [Functional Hamilton–Jacobi equations and control problems with hereditary information]. Ekaterinburg: Ural Federal University Publ., 2011, 243 p.

Received April 16, 2019
Revised May 14, 2019
Accepted May 20, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian President's Grant for Young Russian Scientists no. MK-3566.2019.1.

Nikolai Yur'evich Lukoyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: nyul@imm.uran.ru .

Anton Romanovich Plaksin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: a.r.plaksin@gmail.com .

Cite this article as: N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. To the theory of positional differential games for neutral-type systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 118–128 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977.1+517.926

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ[1]

Е. К. Макаров, С. Н. Попова

Классические определения равномерной полной управляемости и равномерной полной наблюдаемости сформулированы Р. Калманом для систем с коэффициентами из класса $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Альтернативные им двойственные определения предложены Е. Л. Тонковым для систем с ограниченными измеримыми коэффициентами. Для теории управления асимптотическими инвариантами дифференциальных систем интерес представляют свойства равномерной полной управляемости и наблюдаемости для систем с произвольными коэффициентами. В статье предложено определение равномерной полной наблюдаемости на произвольно заданном семействе отрезков вещественной оси в предположении, что на каждом таком отрезке определены некоторые пространства управлений и измеряемых выходов системы. При этом на систему не накладываются никакие ограничения, кроме требования существования решений, их единственности и продолжимости на всю вещественную ось. Указаны простейшие свойства введенных понятий. Установлено, что в общем случае равномерная полная управляемость и равномерная полная наблюдаемость не являются двойственными свойствами линейных систем. Получены достаточные условия наличия такой двойственности. Аналогичные результаты сформулированы для пары “идентифицируемость — достижимость”.

Ключевые слова: линейные системы, равномерная полная наблюдаемость, равномерная полная управляемость.

E. K. Makarov, S. N. Popova. On the definition of uniform complete observability.

The classical definitions of uniform complete controllability and uniform complete observability were formulated by R. Kalman for systems with coefficients from the class $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. E. L. Tonkov proposed alternative dual definitions for systems with bounded measurable coefficients. For the theory of control of asymptotic invariants of differential systems, it is useful to study the properties of uniform complete controllability and observability for systems with arbitrary coefficients. We propose a definition of uniform complete observability on an arbitrarily given family of closed intervals of the real axis under the assumption that some spaces of controls and measured outputs of the system are defined on each of the intervals. Here we do not impose any constraints on the system apart from the requirement of the existence of solutions, their uniqueness, and extendability to the whole real axis. Some basic properties of the introduced notions are given. It is established that, in the general case, uniform complete controllability and uniform complete observability are not dual properties for linear systems. Sufficient conditions for the presence of such a duality are obtained. Similar results are formulated for the pair “identifiability — reachability.”

Keywords: linear systems, uniform complete observability, uniform complete controllability.

MSC: 93B05, 93C05

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-129-140

1. Классические определения полной наблюдаемости по выходу

Рассмотрим нестационарную линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

с наблюдателем

$$y = C(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^m. \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что система (1.1) имеет матрицу Коши $X(t,s)$, определенную при всех $t, s \in \mathbb{R}$. Другие требования к системе (1.1) и наблюдателю (1.2) будем формулировать по мере необходимости.

[1]Исследования второго автора выполнены при финансовой поддержке РФФИ (грант 18–51–41005).

Пусть задан некоторый отрезок $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Каждому элементу $x_0 \in \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие решение $x(t; t_0, x_0) = X(t, t_0)x_0$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$, и, затем, функцию выхода $y_I(t, x_0) = C(t)x(t; t_0, x_0)$, которую будем считать заданной лишь на отрезке I. Множество всех таких функций обозначим через Y_I.

Согласно общепринятому определению (см. [1, с. 68; 2, с. 188] и др.) система (1.1) является *полностью наблюдаемой по выходу* (1.2) *на отрезке* I, если определенное выше соответствие "состояние – выход" между $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и функциями из Y_I является биекцией.

Иными словами, для вполне наблюдаемой на отрезке I системы возможно восстановление каждого начального состояния по порождаемому им выходу, если он измерен без ошибок.

Если матрица наблюдателя C интегрируема с квадратом на отрезке I, т. е. принадлежит соответствующему пространству L_2, то условие полной наблюдаемости может быть выражено с помощью матрицы наблюдаемости Калмана

$$\widehat{M}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} X^T(s, t_0)C^T(s)C(s)X(s, t_0)\, ds \tag{1.3}$$

следующим образом [2, с. 188]: *система* (1.1) *является полностью наблюдаемой по выходу* (1.2) *на отрезке* I *тогда и только тогда, когда матрица* $\widehat{M}(t_0, t_1)$ *невырождена.* Условие (1.3) позволяет также выписать в явном виде операцию восстановления начального состояния x_0 по измеренному выходу y:

$$\widehat{\mathfrak{R}}(t_0, t_1)y := \widehat{M}^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} X^T(s, t_0)C^T(s)y(s)\, ds. \tag{1.4}$$

Нетрудно проверить, что для измеренного без ошибок выхода $y(t) = y_I(t, x_0)$, порожденного начальным состоянием x_0, результат действия операции (1.4) совпадает с истинным значением начального состояния: $x_0 = \widehat{\mathfrak{R}}(t_0, t_1)y$.

Изначально восстанавливающее отображение $y \mapsto x_0$ определено лишь на конечномерном пространстве функций Y_I. Однако измеряемый выход из-за наличия ошибок измерения не обязательно принадлежит этому пространству. Поэтому восстанавливающее отображение должно быть продолжено на некоторое более широкое пространство достаточно общего вида, которое, как предполагается, должно содержать все возможные измеряемые выходы. В конструкции Калмана таким объемлющим пространством является пространство $L_2(I, \mathbb{R}^n)$. Действительно, легко видеть, что правая часть равенства (1.4) задает непрерывный линейный оператор, определенный на всем пространстве интегрируемых с квадратом на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций размерности m и принимающий значения в $\mathbb{R}^n$. Его норма не превосходит величины $\|\widehat{M}^{-1}(t_0, t_1)\|^{1/2}$ и достигается на подпространстве выходов Y_I, т. е. является наименьшей среди всех возможных продолжений отображения $y \mapsto x_0$ на все $L_2(I, \mathbb{R}^n)$. Это свойство означает, что восстанавливающая операция $\widehat{\mathfrak{R}}(t_0, t_1)$ минимизирует ошибку восстановления начального состояния при заданной среднеквадратичной ошибке измерения выхода.

З а м е ч а н и е 1. Пусть выходу системы поставлено в соответствие не начальное, а конечное состояние $x_1 = x(t_1; t_0, x_0) = X(t_1, t_0)x_0$. Если это соответствие биективно, то система (1.1) называется *полностью идентифицируемой по выходу* (1.2) *на отрезке* I. Условие полной идентифицируемости эквивалентно невырожденности матрицы идентифицируемости Калмана

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} X^T(s, t_1)C^T(s)C(s)X(s, t_1)\, ds, \tag{1.5}$$

с помощью которой операция восстановления финального состояния записывается в виде

$$\mathfrak{R}(t_0,t_1)y := M^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} X^T(s,t_1)C^T(s)y(s)\,ds, \tag{1.6}$$

так что $x_1 = \mathfrak{R}(t_0,t_1)y$ при $y(t) = y_I(t,x_0)$. Нетрудно заметить, что справедливо равенство $\widehat{M}(t_0,t_1) = X^T(t_1,t_0)M(t_0,t_1)X(t_1,t_0)$, и поэтому матрицы $M(t_0,t_1)$ и $\widehat{M}(t_0,t_1)$ являются вырожденными или невырожденными одновременно, т. е. для линейных систем полная наблюдаемость и полная идентифицируемость на отрезке эквивалентны [1, с. 67]. Отсюда также следует, что операции $\mathfrak{R}(t_0,t_1)$ и $\widehat{\mathfrak{R}}(t_0,t_1)$ связаны необходимым равенством $\mathfrak{R}(t_0,t_1) = X(t_1,t_0)\widehat{\mathfrak{R}}(t_0,t_1)$.

Свойства нестационарной системы с течением времени могут изменяться, поэтому, даже если система (1.1) вполне наблюдаема по выходу (1.2) на любом отрезке вещественной оси, характеристики ее наблюдаемости на разных отрезках могут сильно отличаться. Это обстоятельство приводит к необходимости рассматривать различные виды наблюдаемости, к числу которых относится определенная Калманом в [3] равномерная полная наблюдаемость. Согласно [3] система (1.1) с выходом (1.2) называется *равномерно вполне наблюдаемой*, если сопряженная система

$$\dot{x} = -A^T(t)x + C^T(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

равномерно вполне управляема.

Определение равномерной полной управляемости для систем с коэффициентами из пространства L_2 также дано в [3]. Вопрос об определении понятия равномерной полной управляемости в общем случае рассмотрен в [4]. Мотивировкой для подходов, развитых там, послужили потребности теории управления асимптотическими инвариантами нестационарных линейных систем [5, с. 346].

Цель настоящей работы — рассмотрение вопроса об определении понятия равномерной полной наблюдаемости в наиболее общем виде, необходимом для решения задач управления асимптотическими инвариантами систем с наблюдением.

2. Взаимосвязь равномерной полной наблюдаемости и равномерной полной управляемости по Калману

Вектор-столбцы, элементы пространства $\mathbb{R}^n$, и вектор-строки, элементы сопряженного пространства $\mathbb{R}^{n\prime}$, будем интерпретировать как матрицы размеров $n \times 1$ и $1 \times n$ соответственно, записывая скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ в виде $x^T y$. Векторы канонического ортонормированного базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$ обозначаются через e_k, $k = 1, \ldots, n$, единичная матрица — через $E := [e_1, \ldots, e_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Норма в $\mathbb{R}^n$ всюду далее предполагается евклидовой, а в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных $n \times n$-матриц используется спектральная норма, т. е. матричная норма, подчиненная евклидовой векторной норме. Пространство, топологически сопряженное к какому-либо заданному нормированному пространству F, будем обозначать через F^*.

Согласно [3] нестационарная линейная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие положительные числа ϑ и α_i, $i = 1, \ldots, 4$, что при всех $\tau \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$\alpha_1 E \leqslant W(\tau, \tau+\vartheta) \leqslant \alpha_2 E, \tag{2.9}$$

$$\alpha_3 E \leqslant \widehat{W}(\tau, \tau+\vartheta) \leqslant \alpha_4 E, \tag{2.10}$$

где матрица управляемости (матрица Калмана) W определяется равенством

$$W(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_0, s) B(s) B^T(s) X^T(t_0, s)\, ds \tag{2.11}$$

и $\widehat{W}(\tau, \tau + \vartheta) = X(\tau + \vartheta, \tau) W(\tau, \tau + \vartheta) X^T(\tau + \vartheta, \tau)$.

Если условия определения равномерной полной управляемости выполнены для некоторого заранее выбранного значения $\vartheta > 0$, то система (2.8) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой* [6].

З а м е ч а н и е 2. Неравенства между матрицами в (2.9) и (2.10) представляют собой условную запись неравенств между соответствующими квадратичными формами и означают выполнение при всех $h \in \mathbb{R}^n$ обычных неравенств

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|h\|^2 \leqslant h^T W(\tau, \tau + \vartheta) h = \int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} \|h^T X(\tau, s) B(s)\|^2 ds \leqslant \alpha_2 \|h\|^2, \\ \alpha_3 \|h\|^2 \leqslant h^T \widehat{W}(\tau, \tau + \vartheta) h = \int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} \|h^T X(\tau + \vartheta, s) B(s)\|^2 ds \leqslant \alpha_4 \|h\|^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

З а м е ч а н и е 3. Если система (2.8) ϑ-равномерно вполне управляема по Калману, то для любых $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ на каждом отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ определены *калмановские управления*

$$u_1(t) = -B^T(t) X^T(\tau, t) W^{-1}(\tau, \tau + \vartheta) x_0, \quad u_2(t) = B^T(t) X^T(\tau + \vartheta, t) \widehat{W}^{-1}(\tau, \tau + \vartheta) x_1, \tag{2.13}$$

первое из которых переводит систему (2.8) из состояния $x(\tau) = x_0$ в состояние $x(\tau + \vartheta) = 0$, а второе — из состояния $x(\tau) = 0$ в состояние $x(\tau + \vartheta) = x_1$. Это означает, что управление u_1 решает задачу управляемости, а управление u_2 — задачу достижимости [1, с. 42–43]. Таким образом, определение равномерной полной управляемости, данное в [3], является одновременно и определением равномерной полной достижимости, что приводит к доказанному в [3] и, в более сильной форме, в [7] и [4], ограничению на рост матрицы Коши свободной системы (системы с нулевым управлением). Для систем с ограниченными коэффициентами такая ситуация вполне естественна. Если же рассматриваются системы с неограниченными коэффициентами, то представляется целесообразным условия равномерной полной управляемости и равномерной полной достижимости разделить.

Применяя определение матриц Калмана $W(t_0, t_1)$ и $\widehat{W}(t_0, t_1)$ к системе (1.7), получим равенства

$$\begin{aligned} W(t_0, t_1) &= \int\limits_{t_0}^{t_1} X^T(s, t_0) C^T(s) C(s) X(s, t_0)\, ds = \widehat{M}(t_0, t_1), \\ \widehat{W}(t_0, t_1) &= \int\limits_{t_0}^{t_1} X^T(s, t_1) C^T(s) C(s) X(s, t_1)\, ds = M(t_0, t_1), \end{aligned}$$

где матрицы $M(t_0, t_1)$ и $\widehat{M}(t_0, t_1)$ отвечают системе (1.1), (1.2). Соответственно условия (2.9) и (2.10) приобретают вид неравенств

$$\alpha_1 E \leqslant \widehat{M}(\tau, \tau + \vartheta) \leqslant \alpha_2 E, \tag{2.14}$$

$$\alpha_3 E \leqslant M(\tau, \tau + \vartheta) \leqslant \alpha_4 E, \tag{2.15}$$

первое из которых гарантирует наблюдаемость системы (1.1), (1.2) на каждом отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$, а второе — ее идентифицируемость там. С учетом замечаний 1 и 3 в дальнейшем будем рассматривать эти условия по отдельности.

Используя представление (2.12) и определение выхода системы (1.1) на отрезке $I = [t_0, t_1]$, условия (2.14) и (2.15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1\|x_0\|^2 \leqslant \|y_I(t, x_0)\|^2 = \int\limits_{t_0}^{t_1} \|C(s)X(s, t_0)x_0\|^2 ds \leqslant \alpha_2\|x_0\|^2, \\ \alpha_3\|x_1\|^2 \leqslant \|y_I(t, x_0)\|^2 = \int\limits_{t_0}^{t_1} \|C(s)X(s, t_1)x_1\|^2 ds \leqslant \alpha_4\|x_1\|^2, \end{aligned} \tag{2.16}$$

наиболее удобном для переноса на общий случай. Заметим, что в каждом из этих условий первое неравенство гарантирует возможность отыскания начального (или, соответственно, конечного) состояния по выходу y_I, а правое ограничивает величину возможной ошибки под влиянием ошибки измерений выхода.

3. Взаимосвязь равномерной полной наблюдаемости и равномерной полной управляемости в общем случае

Для исследования вопроса о взаимосвязи равномерной полной наблюдаемости системы (1.1), (1.2) и равномерной полной управляемости системы (1.7) нам понадобится альтернативное — двойственное — определение равномерной полной управляемости. Как известно, альтернативу определению равномерной полной управляемости по Калману дает определение равномерной полной управляемости по Тонкову [8] (см. также [5, с. 95] и [4]). Согласно этому определению (в формулировке, соответствующей рассматриваемой ситуации) система (2.8) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой*, если существуют такие числа $L \geqslant l > 0$, что для любого состояния x_0 и любого $\tau \in \mathbb{R}$ найдется управление u, обеспечивающее перевод системы (2.8) из состояния x_0 в состояние 0 на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ и удовлетворяющее оценке $\|u\| \leqslant L\|x_0\|$, где норма $\|u\|$ управления u берется в пространстве $L_2([\tau, \tau+\vartheta], \mathbb{R}^n)$, и при этом любое управление, обеспечивающее такой переход, удовлетворяет оценке $\|u\| \geqslant l\|x_0\|$.

Применяя определение равномерной полной управляемости по Тонкову к сопряженной системе (1.7) и учитывая двойственность равномерной полной управляемости и равномерной полной наблюдаемости, а также то, что управления, обеспечивающие перевод системы (2.8) из состояния x_0 в состояние 0 на отрезке $[t_0, t_1]$, и только они, удовлетворяют равенству

$$x_0 = -\int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_0, s)B(s)u(s)ds,$$

будем иметь следующее утверждение: система (1.1), (1.2) является *ϑ-равномерно вполне наблюдаемой*, если существуют такие числа $L \geqslant l > 0$, что для любого вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\tau \in \mathbb{R}$ найдется функция $v_0 \in L_2([\tau, \tau + \vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая равенству

$$x_0 = -\int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} X^T(s, \tau)C^T(s)v_0(s)ds \tag{3.1}$$

и оценке $\|v_0\| \leqslant L\|x_0\|$, и при этом для любой функции $v \in L_2([\tau, \tau+\vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей равенству $x_0 = -\int_{\tau}^{\tau+\vartheta} X^T(s, \tau)C^T(s)v(s)ds$, выполнено неравенство $\|v\| \geqslant l\|x_0\|$.

Заметим, что здесь вектор x_0 не является состоянием системы (1.1), а функция v — ее выходом. В действительности x_0 является состоянием сопряженной системы (1.7), а v — управлением в ней, и поэтому они принадлежат сопряженным пространствам: $\mathbb{R}^{n*}$ — к пространству состояний и $L_2([\tau,\tau+\vartheta],\mathbb{R}^n)^*$ — к пространству выходов соответственно, а возможность их представления в виде элементов исходных пространств обусловлена наличием естественного отождествления $\mathbb{R}^{n*}=\mathbb{R}^n$ и $L_2([\tau,\tau+\vartheta],\mathbb{R}^n)^*=L_2([\tau,\tau+\vartheta],\mathbb{R}^n)$, имеющего место как для конечномерных евклидовых, так и для общих гильбертовых пространств.

Используя элементарные свойства скалярного произведения в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $L_2([\tau,\tau+\vartheta],\mathbb{R}^n)$, можно показать, что сформулированный вариант определения равномерной полной наблюдаемости эквивалентен калмановскому определению. Но мы не будем это делать здесь, отложив доказательство до рассмотрения более общей ситуации.

Поскольку согласно [3] (см. также [7]) необходимым условием равномерной полной управляемости по Калману системы (2.8) (а значит и системы (1.7)) является принадлежность элементов матрицы B (для системы (1.7) — матрицы C^T) пространству $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ матричных функций, интегрируемых с квадратом на любом отрезке вещественной оси, для рассмотрения общего случая произвольных коэффициентов следует обратиться к аналогам конструкций, предложенных в [4], модифицировав их надлежащим образом.

Пусть задано некоторое семейство Δ отрезков вещественной прямой $\mathbb{R}$. На каждом отрезке $I\in\Delta$ зададим некоторое нормированное пространство Z_I — пространство измеряемых выходов, состоящее из определенных на I вещественных вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что $Z_I\supset Y_I$ для любого $I\in\Delta$. Норму элемента $z\in Z_I$ будем обозначать через $\|z\|_Z$. В этом обозначении мы не будем указывать принадлежность отрезку I, поскольку нам не потребуется непосредственно сравнивать между собой нормы элементов, заданных на разных отрезках.

Определение 1. Систему (1.1) с наблюдателем (1.2) будем называть Δ-*равномерно вполне наблюдаемой*, если существуют числа $\beta_1,\beta_2>0$ такие, что на каждом отрезке $I\in\Delta$ для любого начального состояния x_0 выход $y_I(t,x_0)=C(t)X(t,t_0)x_0$ удовлетворяет неравенству

$$\beta_1\|x_0\|\leqslant\|y_I\|_Z\leqslant\beta_2\|x_0\|.$$

Определение 2. Систему (1.1) с наблюдателем (1.2) будем называть Δ-*равномерно вполне идентифицируемой*, если существуют числа $\beta_3,\beta_4>0$ такие, что на каждом отрезке $I\in\Delta$ для любого финального состояния x_1 выход $y_I(t,x_0)=C(t)X(t,t_1)x_1$ удовлетворяет неравенству

$$\beta_1\|x_1\|\leqslant\|y_I\|_Z\leqslant\beta_2\|x_1\|.$$

Утверждение 1. *Если система* (1.1) *с выходом* (1.2) *является Δ-равномерно вполне наблюдаемой (идентифицируемой), то она вполне наблюдаема (идентифицируема) на любом отрезке $I\in\Delta$.*

Доказательство. Из неравенства $\|y_I\|_Z\geqslant\beta_1\|x_0\|$ вытекает, что нулевой выход может отвечать лишь нулевому начальному состоянию. В силу конечномерности области определения отображения “состояние — выход” отсюда следует его биективность. Для идентифицируемости доказательство аналогично. □

Укажем другие очевидные свойства введенных понятий.

Утверждение 2. *Если система* (1.1) *с выходом* (1.2) *одновременно является Δ-равномерно вполне наблюдаемой и Δ-равномерно вполне идентифицируемой, то ее матрица Коши вполне ограничена на семействе Δ, т. е. существует такое число $M>0$, что на любом отрезке $I=[t_0,t_1]\in\Delta$ выполнены неравенства $\|X(t_1,t_0)\|\leqslant M$ и $\|X(t_0,t_1)\|\leqslant M$.*

Если матрица Коши системы (1.1) *вполне ограничена на семействе Δ, то система* (1.1) *с выходом* (1.2) *может быть Δ-равномерно вполне наблюдаемой и Δ-равномерно вполне идентифицируемой только одновременно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любое $I = [t_0, t_1] \in \Delta$ и произвольное начальное состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$. По ним построим финальное состояние $x_1 \in \mathbb{R}^n$ и выход $y_I(t, x_0) = C(t)X(t, t_0)x_0$. По определению имеем неравенства $\beta_1\|x_0\| \leqslant \|y_I\|_Z \leqslant \beta_4\|x_1\| = \beta_4\|X(t_1, t_0)x_0\|$ и $\beta_2\|x_0\| \geqslant \|y_I\|_Z \geqslant \beta_3\|x_1\| = \beta_3\|X(t_1, t_0)x_0\|$, из которых в силу произвольности x_0 выводим оценки $\beta_4/\beta_1 \leqslant \|X(t_1, t_0)\| \leqslant \beta_2/\beta_3$ и, следовательно, $\beta_3/\beta_2 \leqslant \|X(t_0, t_1)\| \leqslant \beta_1/\beta_4$. Полагая $M = \max\{\beta_2/\beta_3, \beta_1/\beta_4\}$, имеем требуемую полную ограниченность. □

Справедливость второй части утверждения вытекает непосредственно из определений.

З а м е ч а н и е 4. Определение равномерной полной наблюдаемости в форме, близкой к определению 1, впервые было дано в [9] (см. также [10, с. 76]) для систем с ограниченными коэффициентами. В этом случае при использовании чебышевской нормы в пространстве Z оценка $\|y_I\|_Z \leqslant \beta_2\|x_0\|$ выполняется автоматически, поэтому определение, приведенное в [9], содержало лишь оценку снизу для нормы выхода системы.

Снова рассмотрим сопряженную систему (1.7), но уже применительно к общей ситуации. Здесь сама система по-прежнему определяется однозначно, но выбор пространства допустимых управлений может быть сделан различным образом. При строго формальном подходе множество допустимых управлений должно совпадать с пространством Z_I^*, топологически сопряженным к пространству измеряемых выходов Z_I. Однако пространство Z_I^* в его канонической реализации может состоять из элементов, отличных от функций, определенных на отрезке I и принимающих значения в $\mathbb{R}^m$. В связи с этим могут возникнуть проблемы с их подстановкой в систему (1.7) (см. пример 2 ниже). Точно такая же проблема может возникнуть и при попытке формального построения сопряженной пары систем в обратном направлении, т. е. при выборе в качестве пространства измеримых выходов Z_I пространства, сопряженного к некоторому заранее заданному пространству управлений.

Поэтому мы будем придерживаться более свободного подхода, который одновременно является и более общим, считая, что на каждом отрезке $I \in \Delta$ задано некоторое нормированное пространство V_I, состоящее из определенных на I вещественных вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^m$. Подмножество пространства V_I, состоящее из всех тех $u \in V_I$, для которых существует интеграл

$$\int_I X^T(s, t_0)C^T(s)u(s)ds,$$

понимаемый как интеграл Лебега от вектор-функции, обозначим через U_I и будем считать множеством допустимых управлений. Норму элемента $v \in V_I$ будем обозначать через $\|v\|_V$.

Используя результаты работы [4] и учитывая замечание 3, будем говорить, что система (1.7) Δ-*равномерно вполне управляема*, если существуют такие числа $L \geqslant l > 0$, что для любого начального состояния x_0 и любого отрезка $I \in \Delta$ найдется управление u, обеспечивающее перевод системы (1.7) из состояния x_0 в состояние 0 на отрезке I и удовлетворяющее оценке $\|u\|_V \leqslant L\|x_0\|$, причем любое управление, обеспечивающее такой переход, удовлетворяет оценке $\|u\|_V \geqslant l\|x_0\|$.

Будем также говорить, что система (1.7) Δ-*равномерно вполне достижима*, если существуют такие числа $L \geqslant l > 0$, что для любого финального состояния x_1 и любого отрезка $I \in \Delta$ найдется управление u, обеспечивающее перевод системы (1.7) из состояния 0 в состояние x_1 на отрезке I и удовлетворяющее оценке $\|u\|_V \leqslant L\|x_1\|$, причем любое управление, обеспечивающее такой переход, удовлетворяет оценке $\|u\|_V \geqslant l\|x_1\|$.

Нетрудно видеть, что из Δ-равномерной полной управляемости системы (1.7) вытекает ее полная управляемость на любом отрезке $I \in \Delta$.

Введем в рассмотрение билинейную форму F_I, задаваемую на каждой паре пространств Z_I и V_I равенством

$$F_I(y, u) = \int_I u^T(s)y(s)\,ds \in \mathbb{R}, \quad y \in Z_I, \quad u \in V_I. \tag{3.2}$$

Интеграл (3.2) гарантированно существует при $y \in Y_I$, $u \in U_I$. Его существование при $y \notin Y_I$, $u \notin U_I$ возможно, но не обязательно.

З а м е ч а н и е 5. Выбор способа задания формы F_I определяется формулой Коши (формулой вариации произвольных постоянных) для линейных систем дифференциальных уравнений и не может быть изменен, несмотря на отличие используемых пространств измеряемых выходов и допустимых управлений от пространства функций, интегрируемых с квадратом. Именно отличие свойств формы F_I от свойств скалярного произведения приводит к введению дополнительных условий для сохранения двойственности между свойствами управляемости и наблюдаемости исходной и сопряженной систем.

Будем говорить, что форма F_I *равномерно ограничена на семействе* Δ, если при некотором $\alpha > 0$ на каждом $I \in \Delta$ для любых $y \in Y_I, u \in U_I$ выполнено неравенство $|F_I(y,u)| \leqslant \alpha\|y\|_Z\|u\|_V$.

Будем говорить, что форма F_I *равномерно невырождена по* y *на семействе* Δ, если при некотором $\gamma > 0$ на каждом $I \in \Delta$ для любого $y \in Y_I$ найдется $u \in U_I$ такое, что $|F_I(y,u)| \geqslant \gamma\|y\|_Z\|u\|_V$.

Нетрудно видеть, что если выполнено равенство $V_I = Z_I$ и форма F_I является скалярным произведением на этих пространствах, то $\alpha = \gamma = 1$, при этом и свойство равномерной ограниченности, и свойство равномерной невырожденности следуют из определения нормы в евклидовом пространстве, т. е. из равенства $\|y\|^2 = F(y,y)$.

З а м е ч а н и е 6. Аналогичным образом определяемая равномерная невырожденность формы F_I по u не представляет интереса, поскольку даже в классическом случае она не имеет места для равномерно вполне управляемых систем, для которых всегда есть ненулевые управления, переводящие нулевое состояние в нулевое.

Теорема 1. *Пусть форма* F_I *равномерно ограничена и равномерно невырождена по* y *на семействе* Δ. *Тогда* Δ*-равномерная полная управляемость системы* (1.7) *эквивалентна* Δ*-равномерной полной наблюдаемости системы* (1.1) *с выходом* (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (1.7) Δ-равномерно вполне управляема. Возьмем любой отрезок $I = [t_0, t_1] \in \Delta$ и произвольное состояние x_0 системы (1.7). По ним найдем управление u_0, переводящее это состояние в нуль на отрезке I и удовлетворяющее оценке $\|u_0\|_V \leqslant L\|x_0\|$. Тогда

$$x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} X^T(s,t_0)C^T(s)u_0(s)\,ds,$$

и поэтому имеют место соотношения

$$0 \leqslant \|x_0\|^2 = x_0^T x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} x_0^T(s)X^T(s,t_0)C^T(s)u_0(s)\,ds = -\int_{t_0}^{t_1} u_0^T(s)C(s)X(s,t_0)x_0\,ds$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} u_0^T(s)y_I(s,x_0)\,ds = -F_I(y_I,u_0) \leqslant \alpha\|u_0\|_V\|y_I\|_Z \leqslant \alpha L\|x_0\|\|y_I\|_Z,$$

из которых вытекает оценка $\|y_I\|_Z \geqslant (\alpha L)^{-1}\|x_0\|$.

Возьмем теперь произвольное $u \in U_I$ и найдем

$$x_u = -\int_{t_0}^{t_1} X^T(s,t_0)C^T(s)u(s)\,ds.$$

Тогда $\|u\|_V \geqslant l\|x_u\|$ и для произвольного $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем соотношения

$$l^{-1}\|\xi\|\|u\|_V \geqslant |\xi^T x_u| = \left|\int\limits_{t_0}^{t_1} \xi^T(s)X^T(s,t_0)C^T(s)u(s)\,ds\right| = \left|\int\limits_{t_0}^{t_1} u^T(s)y_I(s,\xi)\,ds\right|. \tag{3.3}$$

Поскольку форма F_I равномерно невырождена по y на семействе Δ, для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ найдется такое $u_\xi \in U_I$, что выполнено неравенство $|F_I(y_I,u)| \geqslant \gamma\|y_I\|_Z\|u_\xi\|_V$. Отсюда и из (3.3) вытекают оценки $l^{-1}\|\xi\|\|u_\xi\|_V \geqslant |F_I(y_I,u_\xi)| \geqslant \gamma\|y_I\|_Z\|u_\xi\|_V$, означающие, что $\|y_I\|_Z \leqslant (l\gamma)^{-1}\|x_0\|$. Таким образом, для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства $(l\gamma)^{-1}\|x_0\| \leqslant \|y_I\|_Z \leqslant (\alpha L)^{-1}\|x_0\|$ и поэтому система (1.1) с выходом (1.2) Δ-равномерно вполне наблюдаема.

Пусть теперь система (1.1) с выходом (1.2) Δ-равномерно вполне наблюдаема. Возьмем любой отрезок $I = [t_0,t_1] \in \Delta$ и произвольное состояние x_0 системы (1.7). Если существует какое-либо управление u, переводящее это состояние в нуль на отрезке I, то для него имеет место соотношение

$$0 \leqslant \|x_0\|^2 = -\int\limits_{t_0}^{t_1} u^T(s)y_I(s,x_0)\,ds \leqslant \alpha\|y_I\|_Z\|u\|_V \leqslant \alpha\beta_2\|x_0\|\|u\|_V,$$

означающее, что выполняется неравенство $\|u\|_V \geqslant (\alpha\beta_2)^{-1}\|x_0\|$.

Покажем, что такие управления существуют и, более того, среди них найдется управление u_0, удовлетворяющее оценке $\|u_0\|_Z \leqslant L\|x_0\|$. Это управление строится точно так же, как аналогичное управление в доказательстве теоремы 2 в [4].

Для всякого $u \in U_I$ обозначим

$$\mathcal{B}_I u = -\int\limits_{t_0}^{t_1} X^T(s,t_0)C^T(s)u(s)\,ds.$$

Из Δ-равномерной полной наблюдаемости системы (1.1) с выходом (1.2) и равномерной невырожденности формы F_I по y на семействе Δ следует, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, найдется такое $u(\xi) \in U_I$, $\|u(\xi)\| = 1$, что выполнены неравенства $|F_I(y_I,u)| \geqslant \gamma\|y_I\|_Z\|u(\xi)\|_V \geqslant \gamma\beta_1\|\xi\| = \gamma\beta_1$, где $y_I(s) = y_I(s,\xi)$. Поскольку $|F_I(y_I,u)| = \xi^T\mathcal{B}_I u$, имеем $|\xi^T\mathcal{B}_I u(\xi)| \geqslant \gamma\beta_1$.

Проведем следующие пошаговые построения. На первом шаге возьмем любое $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию $\|\xi_1\| = 1$, найдем $u_1 = u(\xi_1)$ и положим $x_1 = \mathcal{B}_I u_1$.

На втором шаге выберем произвольное $\xi_2 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям $\|\xi_2\| = 1$ и $\xi_2 \perp x_1$, найдем $u_2 = u(\xi_2)$ и положим $x_2 = \mathcal{B}_I u_2$.

На k-м шаге по построенным ранее векторам $x_1,\ldots,x_{k-1}$ образуем пространство W_k как линейную оболочку этих векторов, выберем любое $\xi_k \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям $\|\xi_k\| = 1$ и $\xi_k \perp W_{k-1}$, найдем $u_k = u(\xi_k)$ и положим $x_k = \mathcal{B}_I u_k$. Эти построения выполнимы без всяких дополнительных условий и ограничений до тех пор, пока $W_{k-1} \neq \mathbb{R}^n$.

Пусть Ω_k – k-мерный объем системы векторов $x_1,\ldots,x_k$, тогда при каждом $k > 1$ справедливо равенство $\Omega_k = \Omega_{k-1}z_k$, где $z_k = |\xi_k^T x_k|$ – длина проекции вектора x_k на нормаль к подпространству W_{k-1}. При этом $\Omega_1 = \|x_1\| \geqslant z_1$ и $z_k \geqslant \gamma\beta_1$ по построению. Отсюда имеем неравенства

$$\Omega_n = \|x_1\|\prod_{i=2}^{n} z_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} z_i \geqslant (\gamma\beta_1)^n.$$

Но $\Omega_n = |\det\Xi|$, где Ξ – матрица, составленная из столбцов $x_1,\ldots,x_n$. Таким образом, матрица Ξ невырождена и поэтому векторы $x_1,\ldots,x_n$ составляют базис пространства $\mathbb{R}^n$. Это означает, что $W_n = \mathbb{R}^n$ и проводимый нами процесс построений завершится на шаге с номером n.

Поскольку $\Xi\eta = \eta_1 x_1 + \ldots + \eta_n x_n$, где $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^T \in \mathbb{R}^n$, имеем оценки

$$\|\Xi\| = \sup_{\eta\neq 0} \frac{\|\Xi\eta\|}{\|\eta\|} \leqslant \sup_{\eta\neq 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\|x_i\||\eta_i|}{\|\eta\|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leqslant n\alpha\beta_2.$$

Кроме того, согласно [5, с. 94] справедливо неравенство

$$\|\Xi^{-1}\| \leqslant \|\Xi\|^{n-1} |\det \Xi|^{-1} \leqslant (n\alpha\beta_2)^{n-1}(\gamma\beta_1)^{-n}.$$

Возьмем любое $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и разложим его по базису $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $x_0 = q_1x_1 + \ldots + q_nx_n$, т. е. $x_0 = \Xi q$, где $q = (q_1, \ldots, q_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Тогда $q = \Xi^{-1}x_0$ и $\|q\| \leqslant \|\Xi^{-1}\|\|x_0\|$. Для управления $u_0 = q_1u_1 + \ldots + q_nu_n$ имеем равенство $\mathcal{B}_I u_0 = -x_0$ и оценку $\|u_0\| \leqslant |q_1|\|u_1\| + \ldots + |q_n|\|u_n\| \leqslant n\|q\|$, т. е. управление u_0 переводит состояние x_0 в нуль и удовлетворяет неравенству $\|u_0\| \leqslant \delta\|x_0\|$, где $\delta = n\|\Xi^{-1}\| \leqslant n^n(\alpha\beta_2)^{n-1}(\gamma\beta_1)^{-n}$. □

Аналогичные условия двойственности могут быть сформулированы для пары “достижимость — идентифицируемость”.

Теорема 2. *Пусть форма F_I равномерно ограничена и равномерно невырождена по y на семействе Δ. Тогда Δ-равномерная полная достижимость системы* (1.7) *эквивалентна Δ-равномерной полной идентифицируемости системы* (1.1) *с выходом* (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 почти дословно повторяет доказательства теоремы 1.

4. Примеры

П р и м е р 1. Пусть семейство Δ состоит из всех отрезков длины ϑ, $Z_I = V_I = L_2(I, \mathbb{R}^n)$ для $I \in \Delta$ и $C \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Нетрудно проверить, что в этом случае выполнены все условия теорем 1 и 2, и поэтому Δ-равномерная полная наблюдаемость (соответственно, идентифицируемость) системы (1.1) с наблюдателем (1.2) будет эквивалентна Δ-равномерной полной управляемости (соответственно, достижимости) системы (1.7). Кроме того, при сделанных предположениях условия равномерной полной наблюдаемости по Калману и по Тонкову оказываются эквивалентными.

П р и м е р 2. Пусть семейство Δ снова состоит из всех отрезков длины ϑ, $Z_I = V_I = C(I, \mathbb{R}^n)$ для $I \in \Delta$ и $C \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Как известно, пространство Z_I^* в его канонической реализации является пространством регулярных борелевских мер (или, в другой терминологии, зарядов). Соответственно, в таком виде его элементы в систему (1.7) подставлены быть не могут. В другой общепринятой реализации элементами пространства Z_I^* являются функции ограниченной вариации, но в этом случае в систему (1.7) должны подставляться их производные, являющиеся обобщенными функциями, что переводит рассматриваемую систему из класса обыкновенных дифференциальных систем в класс систем с обощенными функциями в правой части и, более того, таких, у которых должна осуществляться некорректная операция умножения функции на обобщенную функцию.

Один из возможных способов выхода из этой ситуации состоит в выборе $V_I = C(I, \mathbb{R}^n)$. Поскольку любую регулярную борелевскую меру можно сколь угодно точно аппроксимировать мерой с непрерывной плотностью, условия теорем 1 и 2 оказываются в этом случае выполненными, что гарантирует эквивалентность Δ-равномерной полной наблюдаемости системы (1.1) с наблюдателем (1.2) и Δ-равномерной полной управляемости системы (1.7).

П р и м е р 3. Пусть семейство Δ произвольно, $V_I = L_\infty(I, \mathbb{R}^n)$ и $C \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Здесь выбор Z_I в виде $V_I^* = L_\infty^*(I, \mathbb{R}^n)$ вообще проблематичен, так как $L_\infty^*(I, \mathbb{R}^n)$ является достаточно экзотическим пространством. В то же время можно положить $Z_I = L_1(I, \mathbb{R}^n)$, и тогда $V_I = Z_I^* = L_\infty(I, \mathbb{R}^n)$, что вполне приемлемо.

5. Заключение

В работе предложено определение Δ-равномерной полной наблюдаемости, которое, в отличие от классического определения полной наблюдаемости Р. Калмана и двойственного ему определения Е. Л. Тонкова, не накладывает ограничений на коэффициенты системы и длины отрезков управления. Исследованы простейшие свойства введенного понятия. В теореме 1 установлены достаточные условия двойственности Δ-равномерной полной наблюдаемости и Δ-равномерной полной управляемости, а в теореме 2 — достаточные условия двойственности Δ-равномерной полной достижимости и Δ-равномерной полной идентифицируемости.

Наиболее интересная возможность, открываемая новым определением, состоит в рассмотрении семейств отрезков, длины которых неограниченно растут при удалении в бесконечность. Введенное понятие будет использовано при формулировке условий разрешимости задачи назначения спектра показателей Ляпунова нестационарной вполне управляемой системы, заданной на положительной полуоси и не являющейся равномерно вполне управляемой в обычном смысле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
2. **Гайшун И.В.** Введение в теорию линейных нестационарных систем / Институт математики НАН Беларуси. Минск, 1999. 409 с.
3. **Kalman R.E.** Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5, no. 1. P. 102–119.
4. **Макаров Е.К., Попова С.Н.** Об определении равномерной полной управляемости // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, вып. 3. С. 326–343. doi: 10.20537/vm170304.
5. **Макаров Е.К., Попова С.Н.** Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012. 407 с.
6. **Попова С.Н.** Задачи управления показателями Ляпунова: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Ижевск, 1992. 103 с.
7. **Зайцев В.А.** Критерии равномерной полной управляемости линейной системы // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, вып. 2. С. 157–179. doi: 10.20537/vm150202.
8. **Тонков Е.Л.** Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1804–1813.
9. **Васильев В.В., Тонков Е.Л.** Критерий равномерной полной наблюдаемости линейной предельно рекуррентной системы // Проблемы современной теории периодических движений. Ижевск, 1980. № 4. С. 39–42.
10. **Тонков Е.Л.** К теории линейных управляемых систем. Ижевск: Изд-во УдГУ, 2018. 228 с.

Поступила 11.07.2019
После доработки 25.07.2019
Принята к публикации 29.07.2019

Макаров Евгений Константинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом дифференциальных уравнений
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск
e-mail: jcm@im.bas-net.by

Попова Светлана Николаевна
д-р физ.-мат. наук
зав. кафедрой дифференциальных уравнений
Удмуртский государственный университет,

г. Ижевск
e-mail: udsu.popova.sn@gmail.com

REFERENCES

1. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. *Topics in mathematical system theory.* International Series in Pure and Applied Mathematics, N Y etc.: McGraw-Hill Book Company, 1969, 358 p. ISBN: 0754321069 . Translated to Russian under the title *Ocherki po matematicheskoi teorii sistem.* Moscow: Mir Publ., 1971, 400 p.
2. Gaishun I.V. *Vvedenie v teoriyu lineinykh nestatsionarnykh sistem* [Introduction to the theory of linear nonstationary systems]. Minsk: Natsional'naya Akademiya Nauk Belarusi, Institut Matematiki, 1999, 409 p. ISBN: 985-6499-10-0 .
3. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
4. Makarov E.K., Popova S.N. On the definition of uniform complete controllability. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 326–343 (in Russian). doi: 10.20537/vm170304 .
5. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* [Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems]. Minsk: Belarus. Navuka Publ., 2012, 407 p. ISBN: 978-985-08-1393-0 .
6. Popova S.N. *Zadachi upravleniya pokazatelyami Lyapunova* [Problems of controllability of Lyapunov exponents]. Candidate Sci. (Phys.-Math.) Dissertation (01.01.02). Izhevsk, 1992, 103 p.
7. Zaitsev V.A. Criteria for uniform complete controllability of a linear system. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 2, pp. 157–179 (in Russian). doi: 10.20537/vm150202 .
8. Tonkov E.L. A criterion of uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system. *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian).
9. Vasil'ev V.V., Tonkov E.L. Criterion of uniform full observability of a linear extremely recurrent system. In: *Problems of the modern theory of periodic motions.* Izhevsk, 1980, no. 4, pp. 39–42 (in Russian).
10. Tonkov E.L. *K teorii lineinykh upravlyaemykh sistem* [On the theory of linear control systems]. Izhevsk: UdGU Publ., 2018, 228 p.

Received July 11, 2019
Revised July 25, 2019
Accepted July 29, 2019

Funding Agency: The work of the second author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–51–41005).

Evgenii Konstantinovich Makarov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072 Belarus, e-mail: jcm@im.bas-net.by .

Svetlana Nikolaevna Popova, Dr. Phys.-Math. Sci., Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: udsu.popova.sn@gmail.com .

Cite this article as: E. K. Makarov, S. N. Popova. On the definition of uniform complete observability, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 129–140 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ СДВИГ В ЗАДАЧЕ ОТСЛЕЖИВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В. И. Максимов

В статье рассматривается задача управления операторным дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве. Суть задачи состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы отслеживание решением заданного уравнения решение другого уравнения, подверженного влиянию неизвестного возмущения. В настоящей работе мы исследуем задачу, в которой предполагается, что оба уравнения задаются на бесконечном промежутке времени. Кроме того мы полагаем, что неизвестное возмущение является элементом пространства функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы, т.е может быть неограниченным. Для решения задачи, мы конструируем два устойчивых к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритма, основанных на сочетании элементов теории некорректных задач с известным в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига. Первый алгоритм ориентирован на случай непрерывного измерения решений, а второй- дискретного.

Ключевые слова: управление, задача слежения, распределенные уравнения.

V. I. Maksimov. Extremal shift in a problem of tracking a solution of an operator differential equation.

A control problem for an operator differential equation in a Hilbert space is considered. The problem consists in constructing an algorithm generating a feedback control and guaranteeing that the solution of the equation follows a solution of another equation, which is subject to an unknown disturbance. We assume that both equations are given on an infinite time interval and the unknown disturbance is an element of a space of functions integrable with the square of their Euclidean norm; i.e., the perturbation may be unbounded. We construct two algorithms based on elements of the theory of ill-posed problems and the extremal shift method known in the theory of positional differential games. The algorithms are stable with respect to information noise and calculation errors. The first and second algorithms can be used in the cases of continuous and discrete measurement of solutions, respectively.

Keywords: control, tracking problem, distributed equations.

MSC: 93C20, 35K90

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-141-152

1. Введение. Постановка задачи

Метод экстремального сдвига — один из эффективнейших методов исследования задач управления по принципу обратной связи — был предложен Н. Н. Красовским. В дальнейшем он широко применялся при решении как собственно задач управления (в том числе игрового), так и задач идентификации, обращения и т.д. В настоящей работе предлагается модификация этого метода для операторного дифференциального уравнения второго порядка. При этом исследуется задача отслеживания решением одного уравнения решения другого, подверженного влиянию неконтролируемого воздействия. Задача слежения решается на бесконечном промежутке времени. Рассматриваются два случая: случаи непрерывного и дискретного измерения решений.

Пусть V и H — действительные гильбертовы пространства. Пространство V вложено в пространство H плотно и непрерывно: $V \subset H = H^* \subset V^*$. Символы $|\cdot|_V$ и $|\cdot|_H$ означают соответственно нормы в V и H, а символы $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в H и двойственность между V и V^*.

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Ax(t) = Bu(t) + f(t), \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1.1}$$

$$x(0) = x_{10} \in V, \quad \dot{x}(0) = x_0 \in H.$$

Здесь $A : V \to V^*$ — линейный, непрерывный и симметричный оператор, удовлетворяющий (для некоторого $\omega > 0$) условию коэрцитивности

$$\langle Ay, y\rangle \geq \omega |y|^2_V \quad \forall y \in V, \tag{1.2}$$

$C : V \to V^*$ — линейный непрерывный оператор со свойством

$$\langle Cx - Cy, x - y\rangle + \omega_2 |x - y|^2_H \geq \omega_1 |x - y|^2_V \quad \forall x, y \in V, \tag{1.3}$$

где $\omega_1 > 0$ и ω_2 — некоторые константы; $f(\cdot) \in L_2(T; H)$ — заданная функция; $u(\cdot)$ — управление; производная $\dot{x}(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений; B — линейный непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства U с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_U$ (пространство возмущений) в пространство V ($B \in L(U; V)$). Символом c_* ниже обозначим норму линейного оператора C, т. е.

$$c_* = |C|_{L(V;V^*)}. \tag{1.4}$$

Всякую функцию $x(\cdot) \in C(T_\vartheta; V)$, такую что $\dot{x}(\cdot) \in W(T_\vartheta; V) = \{y(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; V) : \dot{y}(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; V^*)\}$, и удовлетворяющую соотношению

$$\langle \ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Ax(t), z\rangle = (Bu(t) + f(t), z) \quad \forall z \in V \quad \text{при п.в.} \quad t \in T_\vartheta,$$

будем называть решением уравнения (1.1) на промежутке $T_\vartheta = [0, \vartheta]$, $\vartheta \in (0, +\infty)$, и обозначать символом $x(\cdot) = x(\cdot; x_{10}, x_0, u(\cdot))$. Как известно [1, теорема 1.1, с. 283], при любых $\vartheta \in (0, +\infty)$ и $u(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; U)$ уравнение (1.1) имеет единственное решение с указанным выше свойством. В дальнейшем функцию $x(t)$, $t \in T$, назовем решением уравнения (1.1) на промежутке T, если $x(\cdot)$ есть решение (1.1) на всяком промежутке T_ϑ, $\vartheta > 0$.

Рассматриваемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. Наряду с уравнением (1.1) имеется еще одно уравнение того же вида

$$\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ay(t) = Bv(t) + f(t), \quad t \in T, \tag{1.5}$$

с начальным состоянием $y(0) = y_{10}$, $\dot{y}(0) = y_0$. Будем предполагать, что элементы $y_{10} \in V$ и $y \in H$ удовлетворяют неравенствам

$$|y_{10} - x_{10}|_V \leq h, \quad |y_0 - x_0|_H \leq h. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.5) (назовем его *эталонным*) подвержено воздействию неизвестного, изменяющегося во времени возмущения (в дальнейшем назовем его *эталонным управлением*) $v = v_*(\cdot) \in P(\cdot)$, где $P(\cdot)$ есть множество измеримых (по Лебегу) функций $v(\cdot) : [0, +\infty) \to U$, называемое *множеством допустимых управлений*. В моменты времени $\tau_i \in T$ ($i = 1, 2\ldots$) измеряются с ошибкой решение $x(\tau_i)$ уравнения (1.1) и его производная, а также решение уравнения (1.5) и его производная. Результаты измерения — элементы $\{\xi^h_{1i}, \xi^h_i\} \in V^* \times V^*$ и $\{\psi^h_{1i}, \psi^h_i\} \in V^* \times V^*$ таковы, что справедливы неравенства

$$|\xi^h_{1i} - x(\tau_i)|_{V^*} \leq h, \quad |\xi^h_i - \dot{x}(\tau_i)|_{V^*} \leq h, \tag{1.7}$$

$$|\psi^h_{1i} - y(\tau_i)|_{V^*} \leq h, \quad |\psi^h_i - \dot{y}(\tau_i)|_{V^*} \leq h, \tag{1.8}$$

где $h \in (0,1)$ — величина ошибки измерения. При $i = 0$ полагаем $\xi^h_{10} = x_{10}$, $\xi^h_0 = x_0$, $\psi^h_{10} = y_{10}$, $\psi^h_0 = y_0$. Следовательно, мы полагаем, что на помехи накладываются ограничения "малости" их значений в каждый момент времени. Требуется указать алгоритм формирования управления $u = u^h(\cdot)$ в уравнении (1.1), позволяющий осуществлять отслеживание решением $x^h(\cdot) = x(\cdot; x_{10}, x_0, u^h(\cdot))$ этого уравнения решение $y(\cdot)$ уравнения (1.5). Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $\{y(\tau_i), \dot{y}(\tau_i)\}$ и $\{x(\tau_i), \dot{x}(\tau_i)\}$ формирует по принципу обратной связи управление $u = u^h(\cdot)$ в правой части уравнения (1.1) такое, что "отклонение" $x^h(\cdot) = x(\cdot; x_{10}, x_0, u^h(\cdot))$ от $y(\cdot) = y(\cdot; y_{10}, y_0, v_*(\cdot))$ мало при достаточной малости измерительной погрешности h.

Наряду с измерениями решений уравнений (и их производных) в дискретные моменты времени мы также рассмотрим случай непрерывного измерения, т.е. случай, когда в каждый момент $t \in T$ становятся известными приближения $\xi^h(\cdot) \in L_\infty(T; V)$, $\psi^h(\cdot) \in L_\infty(T; V)$ величин $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, а также приближения $\xi^h_1(\cdot) \in L_\infty(T; H)$, $\psi^h_1(\cdot) \in L_\infty(T; H)$ величин $\dot{x}(\cdot)$ и $\dot{y}(\cdot)$ со свойствами

$$|\xi^h_1(t) - x(t)|_V \le h, \quad |\xi^h(t) - \dot{x}(t)|_H \le h, \tag{1.9}$$

$$|\psi^h_1(t) - y(t)|_V \le h, \quad |\psi^h(t) - \dot{y}(t)|_H \le h. \tag{1.10}$$

При непрерывном измерении решений мы будем полагать $P(\cdot) = L_2(T; U)$; в случае дискретного измерения $P(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T; U) : v(t) \in P \quad \text{при п.в.} \quad \text{t} \in T\}$, где $P \subset U$ — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество.

Задача слежения — одна из классических задач теории управления. Она исследовалась многими авторами (см., например, [2–4]). Решение соответствующей задачи слежения, основанное на методе экстремального сдвига, лежит в основе хорошо известного в теории позиционных дифференциальных игр метода стабильных дорожек [5–7]. Алгоритмы отслеживания решений уравнений с распределенными параметрами, основанные на идеологии экстремального сдвига, приведены, например, в работах [8–14]. При этом в [8; 9; 11] рассмотрен случай конечного промежутка времени, а в [10; 12–14] — бесконечного. В работах [9; 12; 13] использовалось полугрупповое представление решений, а в работах [8; 10; 11; 14] — функционально-аналитическое.

В работе рассматривается уравнение (1.1) с операторами, удовлетворяющими условиям (1.2) и (1.3). Естественно возникает вопрос в необходимости этих условий. Отвечая на этот вопрос можно выделить три фактора. Во-первых, как отмечено выше, при выполнении этих условий в силу известной теоремы существует единственное решение уравнения с подходящий гладкостью. Во-вторых, только при выполнении этих условий удается доказать лемму 1 (см. неравенства (2.10) и (2.11)), лежащую в основе всех результатов работы. И в-третьих, опять же эти условия являются принципиальными при доказательстве теоремы 1 (оценка (2.20)) и леммы 2 (оценка (3.5)).

2. Алгоритм решения. Случай непрерывного измерения решений

В дальнейшем полагаем выполненным следующее условие.

У с л о в и е 1. $\omega_1 > c_0^2 \omega_2$.

Обратимся к случаю, когда измерения решений уравнений (1.1), (1.5) происходят непрерывно, т.е. выполняются неравенства (1.9), (1.10). Фиксируем функцию $\alpha = \alpha(h) : R^+ \to R^+ = \{r \in R : r > 0\}$, а также число $\varepsilon \in (0,1)$. Положим

$$u^h(t) = u^h(\xi^h(t), \xi^h_1(t), \psi^h(t), \psi^h_1(t)) = -\alpha^{-1}(h) B^* \{\xi^h(t) - \psi^h(t) + \varepsilon(\xi^h_1(t) - \psi^h_1(t))\}. \tag{2.1}$$

Здесь символ B^* означает оператор, сопряженный к оператору B. Таким образом, уравнение (1.1) примет вид

$$\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Ax(t) = -\alpha^{-1}(h) BB^* \{\xi^h(t) - \psi^h(t) + \varepsilon(\xi^h_1(t) - \psi^h_1(t))\} + f(t). \tag{2.2}$$

Обозначим решение этого уравнения символом $x^h(\cdot)$. Заметим, что в силу непрерывности вложения пространства V в пространство H справедливы неравенства

$$|x|_H \le c_0|x|_V \quad \forall x \in V, \tag{2.3}$$

$$|x|_{V^*} \le c_1|x|_H \ \forall x \in H, \tag{2.4}$$

где $c_0 \in (0,+\infty)$ и $c_1 \in (0,+\infty)$ — некоторые константы. Пусть

$$\kappa_1 = \min\Big\{1, \{\omega_1 - c_0^2\omega_2\}\Big\{\frac{|C_1|^2_{L(V;V^*)}}{\omega} + c_0^2\Big(\frac{3}{2} + \frac{c_0^2}{\omega}\Big)\Big\}^{-1}, \frac{\omega\omega_1}{|C_1|^2_{L(V;V^*)}}\Big\}.$$

Здесь $|C_1|_{L(V;V^*)}$ — норма линейного непрерывного оператора $C_1 : V \to V^*$, $C_1x = Cx - x$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \in (0, \min\{\kappa_1, (0,5\omega)^{1/2}c_0^{-1}\})$, $v(\cdot) \in L_4(T;U)$. Тогда можно указать числа $h_0 \in (0,1)$ и $d_0 > 0$ такие, что при $h \in (0,h_0)$ справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in T}\{|y(t) - x^h(t)|^2_V + |\dot y(t) - \dot x^h(t)|^2_H\} \le d_0\{\alpha(h) + h + h^2\alpha^{-2}(h) + h^2\alpha^{-1}(h)\}.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем одно вспомогательное утверждение. Введем функционал

$$\lambda(t) = \lambda(z(t), \dot z(t)) = \frac{1}{2}\{\langle Az(t), z(t)\rangle + |\dot z(t)|^2_H\} + \varepsilon(z(t), \dot z(t)). \tag{2.5}$$

Здесь и всюду ниже $z(t) = x^h(t) - y(t)$. Учитывая (1.5) и (2.2), заключаем, что $z(\cdot)$ является решением уравнения

$$\ddot z(t) + C\dot z(t) + Az(t) = B(u^h(t) - v(t)) \text{ при п.в. } t \in T, \tag{2.6}$$

где $z(0) = x_{10} - y_{10}$, $\dot z(0) = x_0 - y_0$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при п.в. $t \in T$ справедливо неравенство*

$$\dot\lambda(t) \le -\varepsilon\lambda(t) + \varepsilon(z(t), B(u^h(t) - v(t))) + (\dot z(t), B(u^h(t) - v(t))). \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что соотношение (2.6) переписывается в виде

$$\ddot z(t) + C_1\dot z(t) + \dot z(t) + Az(t) = B(u^h(t) - v(t)). \tag{2.8}$$

Далее имеем (см. (1.4), (2.3), (2.4)) $|C_1|_{L(V;V^*)} \le c_* + c_0c_1$. Кроме того, верно неравенство

$$-\varepsilon\langle C_1\dot z(t), z(t)\rangle \le \frac{\omega}{4}\varepsilon|z(t)|^2_V + \frac{\varepsilon|C_1|^2_{L(V;V^*)}|\dot z(t)|^2_V}{\omega}. \tag{2.9}$$

Ввиду свойства коэрцитивности оператора C (см. (1.3)), получаем $\langle C_1\dot z(t), \dot z(t)\rangle \ge \omega_1|\dot z(t)|^2_V - \tilde\omega|\dot z(t)|^2_H$, где $\tilde\omega = 1 + \omega_2$. Таким образом

$$-\langle C_1\dot z(t), \dot z(t)\rangle \le -\omega_1|\dot z(t)|^2_V + \tilde\omega|\dot z(t)|^2_H. \tag{2.10}$$

В силу (1.2) верно неравенство

$$-\frac{\varepsilon}{2}\langle Az(t), z(t)\rangle \le -\frac{\varepsilon}{2}\omega|\dot z(t)|^2_V. \tag{2.11}$$

Воспользовавшись (2.3), имеем при любых $\varepsilon \in (0,1)$

$$-(\varepsilon-\varepsilon^2)(z(t),\dot z(t)) \le \varepsilon(1-\varepsilon)|z(t)|_H|\dot z(t)|_H \le \varepsilon|z(t)|_H|\dot z(t)|_H$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4}\omega c_0^{-2}|z(t)|_H^2 + \varepsilon\frac{c_0^2}{\omega}|\dot z(t)|_H^2 \le \frac{\varepsilon}{4}\omega|z(t)|_V^2 + \varepsilon\frac{c_0^2}{\omega}|\dot z(t)|_H^2. \tag{2.12}$$

Далее, в силу (2.10), (2.11) справедливо соотношение

$$\frac{3}{2}\varepsilon|\dot z(t)|_H^2 - |\dot z(t)|_H^2 - \frac{\varepsilon}{2}\langle Az(t), z(t)\rangle - \langle C_1\dot z(t), \dot z(t)\rangle$$

$$\le \Big(\frac{3}{2}\varepsilon - 1\Big)|\dot z(t)|_H^2 - \frac{\varepsilon}{2}\omega|z(t)|_V^2 - \omega_1|\dot z(t)|_V^2 + \tilde\omega|\dot z(t)|_H^2. \tag{2.13}$$

Учитывая (2.9), (2.12), (2.13), получаем при $\varepsilon|C_1|^2_{L(V;V^*)} \le \omega\omega_1$

$$\Big(\frac{3}{2}\varepsilon - 1\Big)|\dot z(t)|_H^2 - \frac{\varepsilon}{2}\langle Az(t), z(t)\rangle - \langle C_1\dot z(t), \dot z(t)\rangle - \varepsilon(1-\varepsilon)(z(t),\dot z(t)) - \varepsilon\langle C_1\dot z(t), z(t)\rangle$$

$$\le \Big\{\tilde\omega + \frac{3}{2}\varepsilon - 1 - (\omega_1 - \frac{\varepsilon|C_1|^2_{L(V;V^*)}}{\omega})c_0^{-2} + \varepsilon\frac{c_0^2}{\omega}\Big\}|\dot z(t)|_H^2. \tag{2.14}$$

Правая часть неравенства (2.14) будет неположительна, если

$$c_0^2\Big\{\omega_2 + \varepsilon\Big(\frac{3}{2} + \frac{c_0^2}{\omega}\Big)\Big\} \le \omega_1 - \frac{\varepsilon|C_1|^2_{L(V;V^*)}}{\omega}. \tag{2.15}$$

В свою очередь, неравенство (2.15) можно переписать в виде

$$c_0^2\omega_2 + \varepsilon\Big\{\frac{|C_1|^2_{L(V;V^*)}}{\omega} + c_0^2(\frac{3}{2} + \frac{c_0^2}{\omega})\Big\} \le \omega_1. \tag{2.16}$$

В силу неравенства $0 < \varepsilon < \kappa_1$ выполняется (2.16). Поэтому

$$\varepsilon|\dot z(t)|_H^2 - \langle C_1\dot z(t), \dot z(t)\rangle - |\dot z(t)|_H^2 - \varepsilon\langle C_1\dot z(t), z(t)\rangle - \varepsilon(z(t),\dot z(t)) - \varepsilon\langle Az(t), z(t)\rangle$$

$$\le -\frac{\varepsilon}{2}\{|\dot z(t)|_H^2 + \langle Az(t), z(t)\rangle + 2\varepsilon(z(t),\dot z(t))\}. \tag{2.17}$$

Продифференцировав $\lambda(t)$ по t и воспользовавшись (2.8), получим

$$\dot\lambda(t) = \varepsilon|\dot z(t)|_H^2 - \langle C_1\dot z(t), \dot z(t)\rangle - \varepsilon(z(t),\dot z(t)) - |\dot z(t)|_H^2 \tag{2.18}$$

$$-\varepsilon\langle C_1\dot z(t), z(t)\rangle - \varepsilon\langle Az(t), z(t)\rangle + \varepsilon(z(t), B(u^h(t) - v(t))) + (\dot z(t), B(u^h(t) - v(t))).$$

Из (2.17) и (2.18) следует неравенство (2.7). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Воспользовавшись неравенствами $\omega > 0$ и (2.3), устанавливаем соотношение

$$|\varepsilon(z(t),\dot z(t))| \le \varepsilon|\dot z(t)|_H c_0|z(t)|_V \le \frac{\omega}{4}|z(t)|_V^2 + \frac{\varepsilon^2c_0^2}{\omega}|\dot z(t)|_H^2. \tag{2.19}$$

В свою очередь, учитывая (1.2), (2.5) и (2.19), получим

$$\frac{\omega}{4}|z(t)|_V^2 + \Big(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2c_0^2}{\omega}\Big)|\dot z(t)|_H^2 \le \lambda(t). \tag{2.20}$$

Пусть

$$\varepsilon_h(t) = \lambda(t) + 0.5\alpha\int\limits_0^t\{|u^h(\tau)|_U^2 - |v(\tau)|_U^2\}\,d\tau, \quad \alpha = \alpha(h). \tag{2.21}$$

Тогда ввиду (1.9), (1.10), учитывая структуру $\varepsilon_h(t)$ (см. (2.21)), будем иметь

$$\dot{\varepsilon}_h(t) \le -\varepsilon\lambda(t) + (\xi^h(t) - \psi^h(t) + \varepsilon(\xi_1^h(t) - \psi_1^h(t)), B(u^h(t) - v(t))) + 0.5\alpha\{|u^h(t)|_U^2 - |v(t)|_U^2\} + b_0 h\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\}. \quad (2.22)$$

Здесь и всюду ниже $b_j, d_j, j = 0, 1, \ldots$, означают постоянные, которые не зависят от h, α, δ и могут быть выписаны в явном виде. Заметим, что ввиду (2.20) при $\varepsilon \in (0, (0.5\omega)^{1/2} c_0^{-1})$

$$\lambda(t) \ge b_1\{|z(t)|_V^2 + |\dot{z}(t)|_H^2\}, \quad t \in T,$$

где $b_1 = \min\{\omega/4, 1/2 - (\varepsilon c_0)^2\omega^{-1}\}$. Далее, из (2.1) (см. (1.9), (1.10)) получаем справедливую при п.в. $t \in T$ оценку

$$|u^h(t)|_U \le b_2(\varepsilon|z(t)|_V + |\dot{z}(t)|_H + h)\alpha^{-1}.$$

Следовательно, при п.в. $t \in T$ верно неравенство

$$h|u^h(t)|_U \le b_3(h\lambda(t)^{1/2} + h^2)\alpha^{-1} \le 0.5\varepsilon\lambda(t) + b_3 h^2\alpha^{-1} + b_4\varepsilon^{-1}h^2\alpha^{-2}. \quad (2.23)$$

Пусть $h \in (0, 0.5\varepsilon)$. Тогда в силу (2.1), (2.23) из (2.22) выводим соотношение

$$\dot{\lambda}(t) + 0.5\alpha\{|u^h(t)|_U^2 - |v(t)|_U^2\} \le -0.5\varepsilon\lambda(t) + b_5\varepsilon^{-1}h^2\alpha^{-2} + b_0 h|v(t)|_U + b_6 h^2\alpha^{-1},$$

справедливое при п.в. $t \in T$. Таким образом,

$$\dot{\lambda}(t) = -0.5\varepsilon\lambda(t) + 0.5\alpha|v(t)|_U^2 + b_5\varepsilon^{-1}h^2\alpha^{-2} + b_0 h|v(t)|_U + b_6 h^2\alpha^{-1} + \phi(t) \quad \text{пр п.в.} \quad \mathrm{t} \in T,$$

где $\phi(t) \le 0$ при п.в. $t \in T$. Следовательно,

$$\lambda(t) \le \lambda(0)\exp^{-0.5\varepsilon t} + (b_5\varepsilon^{-1}h^2\alpha^{-2} + b_6 h^2\alpha^{-1})\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)}\,ds$$
$$+\ 0.5\alpha\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)}|v(s)|_U^2 ds + b_0 h\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)}|v(s)|_U ds. \quad (2.24)$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)}\,ds \le 2\varepsilon^{-1}, \quad t \in [0, +\infty). \quad (2.25)$$

Учитывая (2.25), а также включение $v(\cdot) \in L_4(T; U)$, заключаем, что верны неравенства

$$\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)}|v(s)|_U^2 ds \le \Big(\int_0^t \exp^{-\varepsilon(t-s)}\,ds\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t |v(s)|_U^4\,ds\Big)^{1/2} \le b_7\varepsilon^{-1/2},$$

$$\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)}|v(s)|_U^2 ds \le b_8\varepsilon^{-1/2}.$$

Воспользовавшись двумя последними неравенствами, из (2.24) получаем

$$\lambda(t) \le b_9(\lambda(0) + h^2\alpha^{-2}\varepsilon^{-2} + h\varepsilon^{-1/2} + h^2\alpha^{-1}\varepsilon^{-1} + \alpha\varepsilon^{-1/2}).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть также* $\alpha(h) \to 0$, $h\alpha^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда для любого* $\beta > 0$ *можно указать такое* $h_* = h_*(\beta) \in (0, 1)$, *что при всех* $h \in (0, h_*)$ *верно неравенство*

$$\sup_{t \in T}\{|y(t) - x^h(t)|_V^2 + |\dot{y}(t) - \dot{x}^h(t)|_H^2\} \le \beta.$$

3. Алгоритм решения. Случай дискретного измерения решений

Опишем алгоритм решения задачи в случае дискретных измерений. Возьмем семейство разбиений $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{\infty}, \tau_{h.0} = 0$ промежутка T такое, что

$$\delta(h) = \tau_{h,i+1} - \tau_{h,i} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

До начала работы алгоритма фиксируем величины $h \in (0,1)$ и $\varepsilon \in (0,\kappa)$, где

$$\kappa = \min\{\kappa_1, \kappa_2\}, \quad \kappa_2 = \min\{0.5, 0.5\omega c_0^{-2}, (0.5\omega)^{1/2} c_0^{-1}\},$$

а также разбиение Δ_h. Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. В момент τ_i, вычисляется элемент

$$u_i^h = u_i^h(\Xi_i^h, \Psi_i^h) = \arg\min\{2(B^*[(\xi_i^h - \psi_i^h) + \varepsilon(\xi_{1i}^h - \psi_{1i}^h)], v)_U : v \in P\}, \tag{3.1}$$

где $\Xi_i^h = \{\xi_{1i}^h, \xi_i^h\}$, $\Psi_i^h = \{\psi_{1i}^h, \psi_i^h\}$. После этого на вход уравнения (1.1) при всех $t \in \delta_i$ подается управление $u^h(t) = u_i^h$. Таким образом, уравнение (1.1) принимает вид

$$\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Ax(t) = Bu_i^h + f(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

Обозначим его решение символом $x^h(\cdot)$. Под действием этого управления в момент τ_{i+1} вместо состояния $\{x^h(\tau_i), \dot{x}^h(\tau_i)\}$ реализуется состояние $\{x^h(\tau_{i+1}), \dot{x}^h(\tau_{i+1})\}$. При этом в результате воздействия на уравнение (1.5) некоторого неизвестного возмущения $v(t)$, $t \in \delta_i$ в момент τ_{i+1} вместо состояния $\{y(\tau_i), \dot{y}(\tau_i)\}$ реализуется состояние $\{y(\tau_{i+1}), \dot{y}(\tau_{i+1})\}$. На следующем, $(i+1)$-м, шаге аналогичные действия повторяются.

Имеет место

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in T}\{|y^h(t) - x(t)|_V^2 + |\dot{y}^h(t) - \dot{x}(t)|_H^2\} \le d_0 h^2 e^{-\varepsilon t} + \frac{d_1}{\varepsilon}(h + \delta^{1/2}(h)). \tag{3.2}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем два вспомогательных утверждения.

Лемма 2. *При п.в.* $t \in T$ *справедливы неравенства*

$$|z(t)|_V^2 \le 4d_*(\omega)^{-1}, \tag{3.3}$$

$$|\dot{z}(t)|_H^2 \le d_*(0.5 - \varepsilon^2 c_0^2 \omega^{-1})^{-1}, \tag{3.4}$$

где $a_0 = 0.5\{1 + |A|_{L(V;V^*)} + \kappa_2 c_0\}$, $d(P) = \sup\{|u|_U : u \in P\}$, $a_1 = 2d(P)|B|_{L(U;V^*)}$, $a_2 = 2d(P)|B|_{L(U;H)}$, $d_* = a_0 + 4\Big(\dfrac{2a_1^2}{\omega} + \dfrac{a_2^2}{\varepsilon^2}\Big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $|B(u^h(t) - v(t))|_{V^*} \le a_1$. Кроме того, в силу (1.2)

$$\frac{\varepsilon}{4}\langle Az, z\rangle \ge \frac{\varepsilon\omega|z|_V^2}{4} \quad \forall z \in V.$$

Значит,

$$-\frac{\varepsilon}{4}\langle Az, z\rangle \le -\frac{\varepsilon\omega|z|_V^2}{4} \quad \forall z \in V. \tag{3.5}$$

Далее имеем

$$\varepsilon(z(t), B(u^h(t) - v(t))) \le d_1\varepsilon|z(t)|_V \le \frac{\varepsilon\omega|z(t)|_V^2}{8} + \frac{2\varepsilon a_1^2}{\omega}, \tag{3.6}$$

$$(\dot z(t), B(u^h(t) - v(t))) \le \frac{\varepsilon|\dot z(t)|_H^2}{8} + \frac{2a_2^2}{\varepsilon}. \tag{3.7}$$

Заметим, что если $\varepsilon < 0.5$, $\varepsilon < 0.5\omega c_0^{-2}$, то верна цепочка неравенств

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}(z(t), \dot z(t)) \le \frac{\varepsilon^2|z(t)|_H^2}{4} + \frac{\varepsilon^2|\dot z(t)|_H^2}{4} \le \frac{\varepsilon^2 c_0^2|z(t)|_V^2}{4} + \frac{\varepsilon^2|\dot z(t)|_H^2}{4} \le \frac{\varepsilon\omega|z(t)|_V^2}{8} + \frac{\varepsilon|\dot z(t)|_H^2}{8}.$$

В таком случае, учитывая последние неравенства, а также (3.5), получаем

$$-\frac{\varepsilon}{2}\lambda(t) = -\frac{\varepsilon}{4}\{\langle Az(t), z(t)\rangle + |\dot z(t)|_H^2\} - \frac{\varepsilon^2}{2}(z(t), \dot z(t)) \le -\frac{\varepsilon\omega|z(t)|_V^2}{8} - \frac{\varepsilon|\dot z(t)|_H^2}{8}.$$

Отсюда и из (2.7), (3.6), (3.7) выводим

$$\dot\lambda(t) \le -\frac{\varepsilon}{2}\lambda(t) + \varrho_\varepsilon. \tag{3.8}$$

Здесь

$$\varrho_\varepsilon = 2\Big(\frac{\varepsilon a_1^2}{\omega} + \frac{a_2^2}{\varepsilon}\Big).$$

Из (3.8) следует равенство

$$\dot\lambda(t) = -\frac{\varepsilon}{2}\lambda(t) + \varrho_\varepsilon + \psi(t),$$

где $\psi(t) \le 0$ при $t \in T$. Заметим, что в силу (1.6), (2.3)

$$\lambda(0) \le 0.5\big\{h^2|A|_{L(V;V^*)} + h^2\big\} + \varepsilon c_0 h^2 \le a_0 h^2. \tag{3.9}$$

Следовательно,

$$\lambda(t) = e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\lambda(0) + \int\limits_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-\tau)}\{\varrho_\varepsilon + \psi(t)\}d\tau \le e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\lambda(0) + \varrho_\varepsilon\int\limits_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-\tau)}\,d\tau \le \lambda(0) + \frac{2\varrho_\varepsilon}{\varepsilon} \le d_*.$$

Ввиду неравенства $0 < \varepsilon < \kappa_2$ имеем

$$\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2 c_0^2}{\omega} > 0.$$

Кроме того, справедливо неравенство (2.20), из которого следуют неравенства (3.3), (3.4). Лемма доказана.

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$|\dot z(t + \Delta t) - \dot z(t)|_{V^*} \le d_2(\Delta t)^{1/2}, \tag{3.10}$$

$$|z(t + \Delta t) - z(t)|_H \le d_3\Delta t, \quad t, t + \Delta t \in T, \quad \Delta t > 0. \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножив на $\dot z(t)$ правую и левую части равенства (2.6), будем иметь

$$\langle \ddot z(t) + C\dot z(t) + Az(t), \dot z(t)\rangle = (B(u^h(t) - v(t)), \dot z(t)). \tag{3.12}$$

Воспользовавшись (3.3), устанавливаем оценку

$$\int\limits_t^{t+\Delta t}\langle Az(\tau), \dot z(\tau)\rangle\,d\tau \le d_4\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(\tau)|_V\,d\tau \le \frac{\omega_1}{2}\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(\tau)|_V^2\,d\tau + \frac{d_4^2}{2\omega_1}\Delta t.$$

После интегрирования из (3.12) получим, учитывая (1.3),

$$|\dot z(t+\Delta t)|_H^2+1.5\omega_1\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(\tau)|_V^2\,d\tau\le 4\int\limits_t^{t+\Delta t}a_1|\dot z(\tau)|_V\,d\tau+|\dot z(t)|_H^2+2|\omega_2|\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(\tau)|_H^2\,d\tau+d_4^2\Delta\omega_1^{-1}.$$

Далее имеем

$$a_1\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(s)|_V ds\le a_1(\Delta t)^{1/2}\Big(\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(s)|_V^2 ds\Big)^{1/2}\le 0.5\omega_1\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(s)|_V^2 ds+d_5\Delta t.$$

Таким образом,

$$|\dot z(t+\Delta t)|_H^2+\omega_1\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(\tau)|_V^2\,d\tau\le|\dot z(t)|_H^2+d_6\Delta t+2|\omega_2|\int\limits_t^{t+\Delta}|\dot z(s)|_H^2 ds. \tag{3.13}$$

Из (3.13) в силу леммы 2 (см. (3.4)) следует оценка

$$\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(\tau)|_V^2\,d\tau\le d_7+d_8\Delta t\quad\forall t\in T,\ t+\Delta t\in T,\quad\Delta t>0. \tag{3.14}$$

Возьмем произвольный элемент $v\in V$. Тогда из (2.6) получим

$$\langle\ddot z(t)+C\dot z(t)+Az(t),v\rangle=(B(u^h(t)-v(t)),v)\quad\text{при п.в. } t\in T.$$

Значит, $\forall v\in V$, t, $t+\Delta t\in T$, $\Delta t\in(0,1)$

$$\langle\dot z(t+\Delta t)-\dot z(t),v\rangle\le\int\limits_t^{t+\Delta t}\big\{c_*|\dot z(\tau)|_V+|A|_{L(V;V^*)}|z(\tau)|_V+2|B|_{L(U;V^*)}d(P)\big\}d\tau\,|v|_V. \tag{3.15}$$

Из (3.15) в силу (3.3), (3.14) следует (3.10). В свою очередь (3.11) является следствием (3.4). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим изменение величины $\lambda(t)$ на промежутке T. Здесь $\lambda(t)$ определено в (2.5). После дифференцирования, учитывая лемму 1, будем иметь

$$\begin{gathered}\dot\lambda(t)\le-\varepsilon\lambda(t)+(\dot z(t)-\dot z(\tau_i)+\varepsilon(z(t)-z(\tau_i)),B(u^h(t)-v(t)))+\chi_i^t(u^h,v)+\mu_i^t(u^h,v)\\+(\dot x(\tau_i)-\xi_i^h,B(u^h(t)-v(t)))-(\dot y^h(\tau_i)-\psi_i^h,B(u^h(t)-v(t)))\\+\varepsilon(x(\tau_i)-\xi_{1i}^h,B(u^h(t)-v(t)))-\varepsilon(y^h(\tau_i)-\psi_{1i}^h,B(u^h(t)-v(t)))\quad\text{при п.в. } t\in\delta_i,\end{gathered} \tag{3.16}$$

где

$$\chi_i^t(u^h,v)=(u^h(t),B^*(\xi_i^h-\psi_i^h))_U-(v(t),B^*(\xi_i^h-\psi_i^h))_U,$$

$$\mu_i^t(u^h,v)=\varepsilon(u^h(t),B^*(\xi_{1i}^h-\psi_{1i}^h))_U-\varepsilon(v(t),B^*(\xi_{1i}^h-\psi_{1i}^h))_U.$$

Из (3.1) вытекает неравенство $\chi_i^t(u^h,v)+\mu_i^t(u^h,v)\le 0$. В таком случае, в силу (3.16) при п.в. $t\in\delta_i$ получаем

$$\dot\lambda(t) \le -\varepsilon\lambda(t) + (\dot z(t) - \dot z(\tau_i) + \varepsilon(z(t) - z(\tau_i)), B(u^h(t) - v(t)))$$
$$+ \ (\dot x(\tau_i) - \xi_i^h, B(u^h(t) - v(t))) - (\dot y^h(\tau_i) - \psi_i^h, B(u^h(t) - v(t)))$$
$$+ \ \varepsilon(x(\tau_i) - \xi_{1i}^h, B(u^h(t) - v(t))) - \varepsilon(y^h(\tau_i) - \psi_{1i}^h, B(u^h(t) - v(t))). \qquad (3.17)$$

Учитывая (3.10), имеем

$$(\dot z(t) - \dot z(\tau_i), B(u^h(t) - v(t))) \le d_9\delta^{1/2}(h)\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\}. \qquad (3.18)$$

Кроме того, в силу (1.7), (1.8) получаем

$$\begin{aligned} (\dot x(\tau_i) - \xi_i^h, B(u^h(t) - v(t))) &\le d_8 h\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\}, \\ (\psi_i^h - \dot y^h(\tau_i), B(u^h(t) - v(t))) &\le d_8 h\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\}, \\ (x(\tau_i) - \xi_{1i}^h, B(u^h(t) - v(t))) &\le d_8 h\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\}, \\ (\psi_{1i}^h - y^h(\tau_i)), B(u^h(t) - v(t))) &\le d_8 h\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\}. \end{aligned} \qquad (3.19)$$

В свою очередь, воспользовавшись (3.11), устанавливаем оценку

$$(z(t) - z(\tau_i), B(u^h(t) - v(t))) \le d_9\delta(h)\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\}. \qquad (3.20)$$

Объединив (3.17)–(3.20), выводим справедливое при п.в. $t \in \delta_i$ неравенство

$$\dot\lambda(t) \le d_{10}(h + \delta^{1/2}(h))\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\} - \varepsilon\lambda(t). \qquad (3.21)$$

Заметим, что при $0 < \varepsilon < 0.5$, $0 < \varepsilon < 0.5\omega c_0^{-2}$ в силу (2.20) $\lambda(t) \ge 0$ при$t \ge 0$. Кроме того, в силу ограниченности множества P из (3.21) следует равенство $\dot\lambda(t) = -\varepsilon\lambda(t) + d_{11}(h + \delta^{1/2}(h)) + \psi_0(t)$, где $\psi_0(t) \le 0$, $t \in T$. В таком случае

$$\lambda(t) \le \lambda(0)e^{-\varepsilon t} + d_{11}\int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}(h + \delta^{1/2}(h))\,d\tau. \qquad (3.22)$$

Из (3.22), учитывая (3.9), получаем

$$\lambda(t) \le a_0 h^2 e^{-\varepsilon t} + \frac{d_{11}}{\varepsilon}(h + \delta^{1/2}(h)). \qquad (3.23)$$

Из (3.23), (2.20) следует (3.2). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. **Айзерман М.А.** Лекции по теории автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1958. 286 с.
3. **Егоров А.И.** Основы теории управления. М. : Физматлит, 2004. 502 с.
4. **Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.** Методы управление нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 326 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры М.: Наука, 1974. 458 с.
6. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления М.: Наука, 1981. 288 с.
7. **Ушаков В.Н.** К построению стабильных мостов в дифференциальной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
8. **Осипов Ю.С.** Позиционное управление в параболических системах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, №. 2. С. 195–201.

9. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Метод экстремального сдвига Н.Н. Красовского и задачи граничного управления // Автоматика и телемеханика. 2009. №. 4. С. 18–30.
10. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме отслеживания решения параболического уравнения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 366–375.
11. **Максимов В.И.** Об отслеживании решения параболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 1. С. 40–48.
12. **Blizorukova M.S., Maksimov V.I.** On an algorithm for the problem of tracking a trajectory of a parabolic equation // Int. Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2017. Vol. 27, № 3. P. 457–466.
13. **Максимов В.И., Осипов Ю.С.** О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 1. С. 14–26.
14. **Осипов Ю.С., Максимов В.И.** Отслеживание решения нелинейного распределенного дифференциального уравнения законами обратной связи // Сиб. журн. вычисл. математики. 2018. Т. 21, № 2. С. 201–214.

Поступила 2.04.2019
После доработки 28.06.2019
Принята к публикации 8.07.2019

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator differentialgleichungen.* Berlin: Akademie-Verlag, 1974, 281 p. Translated to Russian under the title *Nelineinye operatornye uravneniya i operatornye differentsial'nye uravneniya.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 336 p.
2. Aizerman M.A. *Theory of automatic control.* Oxford; London; N Y; Paris: Pergamon Press, 1963, 519 p. ISBN: 9781483155753 . Original Russian text published in Aizerman M.A. *Lektsii po teorii avtomaticheskogo regulirovaniya.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1958, 286 p.
3. Egorov A.I. *Osnovy teorii upravleniya* [Foundations of control theory]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2004, 502 p. ISBN: 978-5-9221-0543-9/hbk .
4. Chernous'ko F.L., Anan'evskii I.M., Reshmin S.A. *Metody upravleniya nelineinymi mekhanicheskimi sistemami* [Control methods for nonlinear mechanical systems]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2006, 326 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer. 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
6. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
7. Ushakov V.N. On the problem of constructing stable bridges in a differential game of approach and avoidance. *Eng. Cybern.*, 1980, vol. 18, no. 4, pp. 16–23.
8. Osipov Yu.S. Position control in parabolic systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 187–193. doi: 10.1016/0021-8928(77)90001-6 .
9. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. N.N. Krasovskii's extremal shift method and problems of boundary control. *Autom. Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 4, pp. 577–588. doi: 10.1134/S0005117909040043 .
10. Maksimov V.I. Algorithm for shadowing the solution of a parabolic equation on an infinite time interval. *Differ. Equ.*, 2014, vol. 50, no. 3,pp. 362–371. doi: 10.1134/S0012266114030100 .
11. Maksimov V.I. On tracking solutions of parabolic equations. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 1, pp. 35–42. doi: 10.3103/S1066369X12010057 .

12. Blizorukova M.S., Maksimov V.I. On an algorithm for the problem of tracking a trajectory of a parabolic equation. *Int. J. Appl. Math. Comp. Sci.*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 457–466. doi: 10.1515/amcs-2017-0031 .
13. Maksimov V.I., Osipov Yu.S. Infinite-horizon boundary control of distributed systems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 1, pp. 14–25. doi: 10.1134/S0965542516010139 .
14. Osipov Yu.S., Maksimov V.I. Tracking the solution to a nonlinear distributed differential equation by feedback laws. *Num. Anal. Appl.*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 158–169. doi: 10.1134/S1995423918020064 .

Received April 2, 2019
Revised June 28, 2019
Accepted July 8, 2019

Vyacheslav Ivanovich Maksimov Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. I. Maksimov. Extremal shift in a problem of tracking a solution of an operator differential equation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 141–152 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.929

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ И ОЦЕНКАХ МАТРИЦЫ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

В. П. Максимов

Рассматривается линейная функционально-дифференциальная система с последействием общего вида. Приводятся основные соотношения, определяющие матрицу Коши — ядро интегрального представления решения задачи Коши. Отмечается роль матрицы Коши в исследовании широкого круга задач теории функционально-дифференциальных систем, в том числе задач управления относительно заданной системы целевых функционалов и краевых задач с общими краевыми условиями. Эффективность решения этих задач существенно зависит от возможности построения достаточно точного приближения матрицы Коши исследуемой системы. Предлагается подход к приближенному построению матрицы Коши, сочетающий итерационные процедуры и алгоритмы построения достаточно точного начального приближения, основанные на специальной аппроксимации параметров исходной системы. Установлены оценки точности получаемых приближений.

Ключевые слова: линейные системы с последействием, представление решений, матрица Коши.

V. P. Maksimov. On the construction and estimates of the Cauchy matrix for systems with aftereffect.

A linear functional differential system with aftereffect of general form is considered. Basic relations that define the Cauchy matrix — the kernel of integral representation to solutions of the Cauchy problem — are presented. The role of the Cauchy matrix in the study of a wide range of problems in the theory of functional differential systems, including control problems with respect to a given system of objective functionals and boundary value problems with general boundary conditions, is indicated. The efficiency of solving these problems depends essentially on the possibility of constructing a sufficiently exact approximation to the Cauchy matrix of the system. We propose an approach to the approximate construction of the Cauchy matrix that combines iterative procedures and algorithms for the construction of a rather accurate initial approximation based on a special approximation of parameters of the system. Error estimates are established for the resulting approximations.

Keywords: linear systems with aftereffect, representation of solutions, Cauchy matrix.

MSC: 34K10, 34K34, 34K35

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-153-162

Введение

Матрица Коши $C(t,s)$ линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) - P(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0,T],$$

дает представление ее общего решения

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t C(t,s)f(s)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

и выражается через фундаментальную матрицу однородной системы: $C(t,s) = X(t)X^{-1}(s)$. В исследовании задач управления [1] и краевых задач [2] для линейных систем с последействием матрица Коши, как и ее аналоги, играет существенную роль, она входит в конструкцию

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00332).

программных и позиционных управлений и в конструкцию матриц Грина линейных краевых задач. Аналог приведенной формулы имеет место для широкого класса функционально-дифференциальных систем [2, с. 84; 3, с. 68; 4; 5, с. 67], включая системы с импульсным воздействием и непрерывно-дискретные (гибридные) системы [6], однако матрица Коши в общем случае имеет более сложную структуру. В частности, она теряет так называемое полугрупповое свойство $C(t,s) = C(t,\tau)C(\tau,s)$. В [5] показано, что в классе линейных систем требование наличия полугруппового свойства с распределенным запаздыванием сужает этот класс до обыкновенной системы. Отметим, что одна из модификаций полугруппового свойства для систем с запаздыванием предложена в [7].

В задачах управления, в том числе в случае, когда цель управления задается конечной системой целевых функционалов [8], матрица Коши позволяет дать полное описание реакции системы на всевозможные управляющие воздействия, что придает естественный характер ее использованию при поиске управлений, позволяющих достичь цели управления. При этом эффективность применения матрицы Коши существенно зависит от возможности построения ее достаточно точного приближения. Один из подходов к приближенному построению матрицы Коши с гарантированной оценкой точности представлен в [9]. Этот подход основан на кусочно-постоянной аппроксимации параметров исследуемой системы, позволяющей точно строить матрицу Коши для аппроксимирующей системы. В настоящей работе предлагается существенное расширение класса аппроксимирующих систем и обсуждаются детали подхода, сочетающего итерационные процедуры построения приближения для матрицы Коши с построением достаточно точного начального приближения.

1. Предварительные сведения

Приведем здесь необходимые для дальнейшего сведения из [2; 3]. Обозначим через $L^n = L^n[0,\,T]$ пространство суммируемых по Лебегу функций $v : [0,\,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|v\|_{L^n} = \int\limits_0^T |v(s)|_n\,ds,$$

где $|\cdot|_n$ — норма в $\mathbb{R}^n$. Далее, если размерность пространства очевидна, индекс у нормы будем опускать; для любого элемента $a \in \mathbb{R}^n$ (n-вектор-столбца) запись $(a)_i$ означает его i-й элемент. Пусть $D^n = D^n[0,\,T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,\,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{D^n} = |x(0)|_n + \|\dot{x}\|_{L^n}$. Через V обозначим оператор интегрирования: $(Vv)(t) = \int_0^t v(s)\,ds$, I — тождественный оператор.

Рассмотрим в пространстве D^n уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) - \int\limits_0^t K(t,s)\dot{x}(s)\,ds + A(t)x(0) = f(t), \quad t \in [0,\,T]. \tag{1.1}$$

Здесь ядро $K(t,s)$ интегрального оператора $K : L^n \to L^n$ удовлетворяет *условию* $(\mathcal{K})$:

$(\mathcal{K})$ элементы $k^{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ и имеют общую суммируемую на $[0,\,T]$ мажоранту $\kappa(t)$:

$$\left|k^{ij}(t,s)\right| \leqslant \kappa(t), \quad i,j = 1,\ldots,n, \quad t \in [0,T],$$

а $(n \times n)$-матрица A имеет суммируемые на $[0,\,T]$ элементы.

Уравнение (1.1) охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра. В частности, для оператора

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - \int\limits_0^t d_s\mathcal{R}(t,s)x(s)$$

с распределенным запаздыванием, где без ограничения общности можно считать $R(t,t) = 0$, имеем $K(t,s) = -\mathcal{R}(t,s),\ A(t) = \mathcal{R}(t,0)$.

Оператор $Q = \mathcal{L}V : L^n \to L^n$ называют главной частью оператора $\mathcal{L}$, в уравнении (1.1) оператор $Q = I - K$ является вольтерровым:

$$(Qv)(t) = v(t) - \int\limits_0^t K(t,\, s)\, v(s)\, ds,$$

и обратимым. Условимся ниже обозначать интегральный оператор той же буквой, что и ядро. Обратный оператор Q^{-1} имеет представление

$$(Q^{-1}f)(t) = f(t) + \int\limits_0^t R(t,\, s)\, f(s)\, ds,$$

где $R(t,\, s)$ — резольвентное ядро, соответствующее ядру $K(t,\, s)$.

Приведем представление решения уравнения (1.1). Для этого определим столбцы $y_i(t)$ $(n \times n)$-матрицы $Y(t)$ как абсолютно непрерывные решения задачи Коши

$$\dot{y}(t) = \int\limits_0^t K(t,s)\, \dot{y}(s)\, ds - a_i(t), \quad y(0) = 0, \quad t \in [0,\, T],$$

где $a_i(t)$ — i-й столбец матрицы A.

Матрица $X(t) = E_n + Y(t)$, где E_n — единичная $(n\times n)$-матрица, является фундаментальной матрицей однородного уравнения (1.1) $(f(t) = 0,\ t \in [0,\, T])$.

Общее решение (1.1) имеет представление

$$x(t) = X(t)\,\alpha + \int\limits_0^t C(t,\, s) f(s)\, ds,$$

где $\alpha \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, $C(t,\, s)$ — матрица Коши [4; 5, с. 52–58]. Эта матрица является решением матричного уравнения

$$C'_t(t,\, s) = \int\limits_s^t K(t,\, \tau)\, C'_\tau(\tau,\, s)\, d\tau + K(t,\, s), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

с условием $C(s,\, s) = E_n$ $\big($здесь и всюду ниже $C'_\tau(\tau,\, s) = \dfrac{\partial}{\partial\tau} C(\tau,\, s)\big)$ и уравнения

$$C(t,\, s) = E_n + \int\limits_s^t C(t,\, \tau) K(\tau,\, s)\, d\tau, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Матрица $C(t,\, s)$ выражается через резольвентное ядро $R(t,\, s)$: $C(t,\, s) = E_n + \displaystyle\int_s^t R(\tau,\, s)\, d\tau$.

2. Один класс аппроксимаций вольтеррова оператора с сохранением вольтерровости

Здесь дается описание класса ядер $\widetilde{K}(t,\,s)$, для которого система (1.1) с оператором $\widetilde{Q} = I - \widetilde{K}$ допускает точное построение матрицы Коши. Разобьем отрезок $[0,\,T]$ на N равных частей точками t_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1\,:\, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$. Обозначим через $\eta_i(t)$, $i = 1, \ldots, N-1$, характеристическую функцию промежутка $[t_{i-1}, t_i)$, через $\eta_N(t)$ — характеристическую функцию отрезка $[t_{N-1}, t_N]$. Определим ядро $\widetilde{K}(t,\,s)$ равенством

$$\widetilde{K}(t,\,s) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} \eta_i(t)\, P_i(t)\, Q_{ij}(s)\, \eta_j(s). \tag{2.1}$$

Здесь матрица $P_1(t) = 0$, матрицы P_i, $i = 2, \ldots, N$, с суммируемыми элементами и матрицы Q_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N$ ($Q_{ij} = 0$, $j \geqslant i$), с измеримыми и ограниченными элементами используются для локальной аппроксимации матричного ядра $K(t, s)$.

Для формулировки утверждения о резольвентном ядре $\widetilde{R}(t,\,s)$ ядра $\widetilde{K}(t,\,s)$ введем следующие обозначения:

$$U_i(t) = \eta_i(t)\, P_i(t); \quad V_i(s) = \sum_{j=1}^{i} Q_{ij}(s)\, \eta_j(s); \quad B_{ki} = \int_0^T V_k(t)\, U_i(t)\, dt. \tag{2.2}$$

Заметим, что из определения матриц B_{ki} следует, что $B_{ki} = 0$ при $i \geqslant k$. Блочная $(Nn \times Nn)$-матрица $\Gamma = \{\Gamma_{ki}\}_{k,i=1,\ldots,N}$, $\Gamma_{kk} = E_n, k = 1, \ldots, N$; $\Gamma_{ki} = -B_{ki}$, $k = 1, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, N$, является нижнетреугольной и имеет на главной диагонали единичные матрицы E_n.

Обозначим через $H = \{H_{ki}\}_{k,i=1,\ldots,N}$ $(Nn \times Nn)$-матрицу обратную к матрице Γ с $(n \times n)$-блоками H_{ki}, $k, i = 1, \ldots, N$:

$$\Gamma^{-1} = H = \{H_{ki}\}_{k,i=1,\ldots,N}. \tag{2.3}$$

Теорема 1. *Пусть ядро $\widetilde{K}(t,\,s)$ интегрального оператора Вольтерра определено равенством* (2.1)*, а матрицы $U_i(t)$, $V_k(s)$, B_{ki}, H_{ki} — равенствами* (2.2), (2.3)*. Тогда резольвентное ядро $\widetilde{R}(t,\,s)$ имеет представление*

$$\widetilde{R}(t,\,s) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{i} U_i(t)\, H_{ik}\, V_k(s). \tag{2.4}$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$z(t) = \int_0^t \widetilde{K}(t,\,s)\, z(s) \,+\, f(t), \quad t \in [0,\,T]. \tag{2.5}$$

Доказательство теоремы сводится к получению представления решения этого уравнения для любого $f \in L^n$. Используя представление ядра $\widetilde{K}(t,\,s)$, с учетом обозначений (2.2) запишем уравнение (2.5) в виде

$$z(t) = \sum_{i=1}^{N} U_i(t) \int_0^T V_i(s)\, z(s)\, ds \,+\, f(t). \tag{2.6}$$

Умножая обе части этого уравнения слева на матрицу $V_k(t)$ и интегрируя по t от 0 до T, получаем

$$\int_0^T V_k(t) z(t)\, dt \,= \sum_{i=1}^{N} \int_0^T V_k(t)\, U_i(t)\, dt\, \gamma_i, + \int_0^T V_k(t)\, f(t)\, dt,$$

где $\gamma_i = \int_0^T V_i(s)\, z(s)\, ds$. Вводя обозначение $b_k = \int_0^T V_k(t)\, f(t)\, dt$, получаем для $\gamma_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, N$, линейную алгебраическую систему

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{N} B_{ki}\, \gamma_i \ + \ b_k, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{2.7}$$

Записывая компоненты решения этой системы с использованием матрицы H: $\gamma_i = \sum_{k=1}^{N} H_{ik}\, b_k$ и подставляя это решение в равенство

$$z(t) = \sum_{i=1}^{N} U_i(t)\, \gamma_i \ + \ f(t)$$

(см. (2.6)), получаем представление решения уравнения (2.5) в виде

$$z(t) = \int_0^T \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} U_i(t)\, H_{ik}\, V_k(s)\ f(s)\, ds + \ f(t) \ = \int_0^t \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{i} U_i(t)\, H_{ik}\, V_k(s)\ f(s)\, ds \ + \ f(t),$$

что завершает доказательство теоремы. □

З а м е ч а н и е 1. Структура матрицы Γ, используемой в доказательстве теоремы, позволяет фактически обходиться без ее обращения: алгебраическая система (2.7) является рекуррентной.

З а м е ч а н и е 2. Матрица H, описываемая равенством (2.3), позволяет выразить резольвентное ядро $\widetilde{R}(t,s)$ через матрицы $P_i(t)$ и $Q_{ij}(s)$, определяющие ядро $\widetilde{K}(t,s)$. При этом равенство (2.4) принимает вид

$$\widetilde{R}(t,\, s) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{k} \eta_i(t)\, P_i(t)\, H_{ik}\, Q_{kj}(s)\, \eta_j(s). \tag{2.8}$$

З а м е ч а н и е 3. При использовании кусочно-полиномиальных приближений $P_i(t)$ и $Q_{ij}(s)$ с рациональными коэффициентами и рациональных значений t_i элементы резольвентного ядра (2.8) строятся точно.

З а м е ч а н и е 4. Функционально-дифференциальные системы с ядром интегрального оператора вида (2.1) включают неавтономные системы с кусочно-постоянным запаздыванием, которые находят широкое применение при моделировании процессов экономической динамики в макро- и микроэкономике, где случай запаздывания $h(t) = [t]$ ($[t]$ — целая часть числа t) является естественным и весьма распространенным. Обзор таких моделей с их подробным описанием и ссылками на первоисточники представлен в [10].

Используя ядро $\widetilde{K}(t,s)$ в качестве аппроксимации ядра $K(t,s)$ в исходном уравнении, мы получаем соответствующую аппроксимацию матрицы Коши:

$$\widetilde{C}'_t(t,\, s) = \widetilde{R}(t,\, s); \quad \widetilde{C}(t,\, s) = E_n + \int_s^t \widetilde{R}(\tau,\, s)\, d\tau.$$

Оценка точности полученного приближения $\widetilde{R}(t,s)$ может быть получена стандартным образом в условиях теоремы об обратном операторе [11, с. 99]. В операторной форме такая оценка имеет следующий вид:

если $\|(I \,+\, \widetilde{R})\,(\widetilde{K} - K)\|_{L^n \to L^n} \ \leqslant q \ < \ 1$, то $\|(\widetilde{R} - R)\,\|_{L^n \to L^n} \ \leqslant \dfrac{q}{1-q}\, \|I \,+\, \widetilde{R}\|_{L^n \to L^n}$.

Для записи такого рода оценок в терминах элементов ядер интегральных операторов условимся эти элементы обозначать соответствующими строчными буквами с верхними индексами. Так, например, $\widetilde{k}^{ij}$ — элементы матричного ядра $\widetilde{K}(t,s)$.

Если точность аппроксимации $\widetilde{K}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ определяется неравенством

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,T]}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^T\left[|k^{ij}(t,s)-\widetilde{k}^{ij}(t,s)|+\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_0^T|k^{i\nu}(t,\tau)-\widetilde{k}^{i\nu}(t,\tau)|\cdot|\widetilde{r}^{\nu j}(\tau,s)|d\tau\right]dt\right)\leqslant\delta<1,$$

то имеет место оценка

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,T]}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^T|r^{ij}(t,s)-\widetilde{r}^{ij}(t,s)|\,dt\ \leqslant\ \frac{\delta}{1-\delta}\left(1+\max_{1\leqslant j\leqslant n}\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,T]}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^T|\widetilde{r}^{ij}(t,s)|\,dt\right).$$

3. Итерационное уточнение начальной аппросимации

Напомним одну известную (см, например, [12, с. 25]) оценку точности k-го приближения решения операторного уравнения $x = Ax + f$ с линейным оператором A, действующим в банаховом пространстве X с постоянной сжатия $q < 1$. При использовании стандартных приближений $x_k = Ax_{k-1}+f$ с произвольным начальным приближением x_0 имеет место оценка

$$\|x_k - x\|\ \leqslant\ \frac{q^k}{1-q}\,\|\,x_0 - Ax_0 - f\,\|.$$

Заметим, что такой оценкой можно воспользоваться в более общей ситуации, когда сжимающим оператором является некоторая степень оператора A. Действительно, пусть q — постоянная сжатия оператора A^m. Уравнение $x = Ax + f$ эквивалентно уравнению

$$x = A^m\,x + \Big(\sum_{i=0}^{m-1}A^i\,f\Big).$$

В таком случае упомянутая оценка принимает вид

$$\|x_k - x\|\ \leqslant\ \frac{q^k}{1-q}\left\|x_0 - A^m\,x_0 - \Big(\sum_{i=0}^{m-1}A^i\,f\Big)\right\|. \tag{3.1}$$

Уточнение полученного приближения $\widetilde{R}(t,s)$ резольвентного ядра $R(t,s)$ может быть получено с помощью итераций

$$R_k(t,\,s) = \int\limits_s^t K(t,\,\tau)\,R_{k-1}(\tau,\,s)\,d\tau + K(t,\,s),\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\quad k=1,2,\ldots . \tag{3.2}$$

Для формулировки теоремы об оценке точности приближения резольвентного ядра и, таким образом, приближения для производной матрицы Коши $C_t'(t,\,s)$ определим норму оператора $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ равенством $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Big\{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\Big\}$. Обозначим $d=\int_0^T\kappa(t)\,dt$ (см. *условие* $\mathcal{K}$).

Теорема 2. *Пусть m выбрано так, что*

$$\frac{(n\cdot d)^m}{(m-1)!}\ <\ 1.$$

Тогда для k-го приближения $R_k(t,s)$ интегрального вольтеррова оператора с ядром $R(t,s)$, получаемого по правилу (3.2) *с* $R_0(t,s) = \widetilde{R}(t,s)$, *имеет место неравенство*

$$\|R - R_k\|_{L^n\to L^n} \leqslant \frac{q^k}{(1-q)} \| \Delta_{\widetilde{R}}\|_{L^n\to L^n},$$

где

$$\Delta_{\widetilde{R}} = \widetilde{R} - K^m \widetilde{R} - \Big(\sum_{i=1}^{m} K^i\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Получим сначала оценку нормы m-й степени оператора $K: L^n \to L^n$ — с ядром $K(t,s)$, удовлетворяющим *условию* $\mathcal{K}$. Как известно, K^m — интегральный оператор Вольтерра с ядром $K_m(t,s)$, которое определяется рекуррентным соотношением

$$K_i(t,s) = \int\limits_s^t K(t,\tau)\, K_{i-1}(\tau,s)\, d\tau,\ i = 2,\dots,m,$$

где $K_1(t,s) \equiv K(t,s)$. Из *условия* $\mathcal{K}$ следует оценка

$$\|K_2(t,s)\| \leqslant \int\limits_s^t \|K(t,\tau)\|\, \|K(\tau,s)\|\, d\tau \leqslant u(t) \int\limits_s^t u(\tau)\, d\tau,$$

где $u(t) = n\cdot\kappa(t)$. По индукции получаем

$$\|K_m(t,s)\| \leqslant u(t)\, \frac{\Big[\int_s^t u(\tau)\, d\tau\Big]^{m-1}}{(m-1)!},$$

откуда следует оценка

$$\| K^m \|_{L^n\to L^n} \leqslant \frac{(n\cdot d)^m}{(m-1)!}.$$

Для завершения доказательства остается сослаться на оценку (3.1). □

Приведем иллюстрирующий пример.

П р и м е р. Рассмотрим задачу Коши $\dot x(t) = p(t)x[h(t)] + 1,\ t\in[0,1],\ \ x(0) = 0$.

Здесь $p(t) = \sin(t)$, $h(t) = t^2\chi_{[0,\,0.6]}(t) + 0.4\,\chi_{(0.6,\,0.8]}(t) + t^2\chi_{(0.8,\,1]}(t), \chi_S(t)$ — характеристическая функция множества $S\subset R$. Запишем уравнение в форме (1.1):

$$\dot x(t) - \int\limits_0^t p(t)\chi^h(t,s)\,\dot x(s)\, ds + \chi(t,0)x(0) = 1, \quad t\in[0,\,1],$$

где $\chi^h(t,s)$ — характеристическая функция множества $\{(t,s)\in[0,1]\times[0,\,1]: 0\leqslant s\leqslant h(t)\leqslant 1\}$. Разбивая отрезок $[0,\,1]$ на 10 равных частей и аппроксимируя функцию $h(t)$ кусочно-постоянной функцией

$$\widetilde{h}(t) = 0\cdot\eta_1(t) + 0\cdot\eta_2(t) + 0\cdot\eta_3(t) + 0.1\cdot\eta_4(t) + 0.2\cdot\eta_5(t) + 0.3\cdot\eta_6(t)$$

$$+\, 0.4\cdot\eta_7(t) + 0.4\cdot\eta_8(t) + 0.7\cdot\eta_9(t) + 0.9\cdot\eta_{10}(t),$$

получаем для ядра $\widetilde{K}(t,s) = p(t)\chi^{\widetilde{h}}(t,s)$ представление (2.1). Далее описанным способом находится резольвентное ядро (2.8). При этом матрица H, определяющая конструкцию резольвентного ядра по элементам исходного ядра (2.1), имеет вид

$$\begin{pmatrix}
1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.\\
0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.\\
0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.\\
.004996 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.\\
.004996 & .014938 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.\\
.004996 & .014938 & .024730 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0.\\
.005167 & .014938 & .024730 & .034275 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0.\\
.005167 & .014937 & .024730 & .034275 & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & 0.\\
.005958 & .017271 & .027518 & .036349 & .043478 & .052247 & .060493 & 0. & 1. & 0.\\
.006757 & .019586 & .0312697 & .041414 & .046743 & .056170 & .065036 & .068135 & .075097 & 1.
\end{pmatrix}.$$

Численные значения приведены с точностью до 10^{-6}. Используя это ядро, находим приближение производной решения рассматриваемой задачи. Для характеристики точности этого приближения приведем оценку невязки, возникающей при подстановке приближения в уравнение, по норме пространства L^1: она не превосходит значения 0.03447. Следующее приближение получаем, используя итерационную процедуру. Для него та же характеристика не превосходит значения 0.00163. Для сравнения заметим, что стандартное начальное приближение (свободный член уравнения) дает невязку с оценкой по норме пространства L^1 со значением 0.19444, а для следующего приближения такая оценка составляет 0.02192.

В заключение отметим, что полученные соотношения для приближенного построения матрицы Коши могут быть использованы для описанного в [13] класса функционально-дифференциальных систем с непрерывным и дискретным временем (гибридных систем). Предложенный в этой работе способ сведения гибридной системы к системе с непрерывным временем позволяет получать представление решений гибридной системы с использованием матрицы Коши функционально-дифференциальной системы вида (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М: Наука, 1985. 520 с.
2. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
3. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Москва: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2002. 384 с.
4. **Максимов В.П.** О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 4. С. 601–606.
5. **Максимов В.П.** Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Пермь: ПГУ, ПСИ, ПССГК, 2003. 306 с.
6. **Chadov A.L., Maksimov V.P.** Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Functional Differential Equations. 2012. Vol. 19, no. 1-2. P. 49–62.
7. **Тышкевич В.А.** Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1981. 80 с.
8. **Maksimov V.P.** On the property of controllability with respect to a family of linear functionals // Functional Differential Equations. 2009. Vol. 16, no. 3. P. 517–527.
9. **Maksimov V.P., Munembe J.S.P.** On the question of enclosing solutions of linear functional differential systems // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1997. Vol. 12. P. 149–156.

10. **Симонов П.М.** Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики // Вестн. Перм. ун-та. Сер. Экономика. 2014. № 1. С. 14–27.
11. **Хатсон В., Пим Дж.** Приложения функционального анализа и теории операторов. М: Мир, 1983. 432 с.
12. **Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.** Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
13. **Maksimov V.P.** On a class of optimal control problems for functional differential systems // Proc. Steklov Inst. Math. 2019. Vol. 305, suppl. 1. P. 114–124. doi: 10.1134/S0081543819040126 .

Поступила 23.04.2019

После доработки 4.06.2019

Принята к публикации 10.06.2019

Максимов Владимир Петрович

д-р физ.-мат. наук, профессор

Пермский государственный национальный исследовательский университет

г. Пермь

e-mail: maksimov@econ.psu.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 520 p.
2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of linear functional differential equations.* Advanced Ser. in Mathematical Science and Engineering, 3. Atlanta: World Federation Publ., 1995, 172 p. ISBN: 1-885978-02-2 . Original Russian text published in Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii.* Moscow: Nauka Publ., 1991, 280 p.
3. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoi teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. Metody i prilozheniya.* [Elements of the contemporary theory of functional differential equations. Methods and applications]. Moscow: Institute of Computer Science, 2002, 384 p. ISBN: 5-93972-112-5 .
4. Maksimov V.P. The Cauchy formula for a functional–differential equation. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 405–409.
5. Maksimov V.P. *Voprosy obshchei teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* [Questions of the general theory of functional differential equations]. Perm: Perm State University, 2003, 306 p.
6. Chadov A.L., Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times. *Functional Differential Equations*, 2012, vol. 19, no. 1-2, pp. 49–62.
7. Tyshkevich V.A. *Nekotorye voprosy teorii ustoichivosti funktsional'no–differentsial'nykh uravnenii.* [Some questions of the theory of stability of functional–differential equations]. Kiev: Naukova Dumka, 1981, 80 p.
8. Maksimov V.P. On the property of controllability with respect to a family of linear functionals. *Functional Differential Equations*, 2009, vol. 16, no. 3, pp. 517–527.
9. Maksimov V.P., Munembe J.S.P. On the question of enclosing solutions of linear functional differential systems. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 1997, vol. 12, pp. 149–156.
10. Simonov P.M. On a research method of dynamic models of macroeconomics. *Vestnik Permskogo Universiteta. Ser. Ekonomika.*, 2014, no. 1, pp. 14–27 (in Russian).
11. Hutson V., Pym J.S. *Applications of functional analysis and operator theory.* Mathematics in Science and Engineering, vol. 146. London etc.: Academic Press, 1980, 389 p. ISBN: 978-0-12-363260-9 . Translated to Russian under the title *Prilozheniya funktsional'nogo analiza i teorii operatorov.* Moscow: Mir Publ., 1983, 432 p.
12. Krasnosel'skii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitskii Ya.B., Stetsenko V.Ya. *Approximate solution of operator equations.* Dordrecht: Springer, 1972, 484 p. doi: 10.1007/978-94-010-2715-1 . Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitskii Ya.B., Stetsenko V.Ya. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii.* Moscow: Nauka Publ., 1969, 456 p.

13. Maksimov V.P. On a class of optimal control problems for functional differential systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, vol. 305, suppl. 1, pp. 114–124. doi: 10.1134/S0081543819040126 .

Received April 23, 2019
Revised June 4, 2019
Accepted June 10, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00332).

Vladimir Petrovich Maksimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Perm State University, Perm, 614990 Russia, e-mail: maksimov@econ.psu.ru .

Cite this article as: V. P. Maksimov. On the construction and estimates of the Cauchy matrix for systems with aftereffect, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 153–162 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

ОЦЕНИВАНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ СВЕРХУ ПО ВКЛЮЧЕНИЮ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

М. С. Никольский

В теории оптимального управления важным объектом исследования является множество достижимости управляемого объекта $D(T)$. Это множество в грубой форме отражает динамические возможности управляемого объекта, что важно для теории и приложений. Многие оптимизационные задачи для управляемых объектов в своей постановке используют множество $D(T)$. Одним из ключевых аспектов изучения свойств управляемых объектов является получение конструктивных оценок сверху по включению для $D(T)$. В частности, такие оценки полезны при приближенных вычислениях $D(T)$ пиксельным методом. Основным объектом изучения в настоящей статье являются две нелинейные модели прямого регулирования, известные в литературе по теории абсолютной устойчивости, с добавкой управляющего члена в правую часть соответствующей системы дифференциальных уравнений. Для получения искомых оценок сверху по включению в статье используются известные в теории абсолютной устойчивости функции Ляпунова. Отметим, что оценки сверху для $D(T)$ получены в виде некоторых шаров в фазовом пространстве с центром в 0.

Ключевые слова: множество достижимости, функция Ляпунова, абсолютная устойчивость, прямое регулирование.

M. S. Nikolskii. Estimation of reachable sets from above with respect to inclusion for some nonlinear control systems.

The study of reachable sets of controlled objects is an important research area in optimal control theory. Such sets describe in a rough form the dynamical possibilities of the objects, which is important for theory and applications. Many optimization problems for controlled objects use the reachable set $D(T)$ in their statements. In the study of properties of controlled objects, it is useful to have some constructive estimates of $D(T)$ from above with respect to inclusion. In particular, such estimates are helpful for the approximate calculation of $D(T)$ by the pixel method. In this paper we consider two nonlinear models of direct regulation known in the theory of absolute stability with a control term added to the right-hand side of the corresponding system of differential equations. To obtain the required upper estimates with respect to inclusion, we use Lyapunov functions from the theory of absolute stability. Note that the upper estimates for $D(T)$ are obtained in the form of balls in the phase space centered at the origin.

Keywords: reachable set, Lyapunov function, absolute stability, direct regulation.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-163-170

Введение

Проблема оценивания множеств достижимости $D(T)$ управляемых объектов сверху по включению представляет определенный интерес для математической теории управления и ее приложений. Такого рода оценки полезны при изучении динамических возможностей управляемых объектов и при приближенных вычислениях $D(T)$ пиксельным методом.

В настоящей работе мы рассмотрим две нелинейные управляемые системы общего вида, которые связаны с классическими моделями теории абсолютной устойчивости прямого регулирования (см. [1; 2]).

В первой системе (см. п. **1**) присутствует одна нелинейность, а во второй системе (см. п. **2**) имеется m нелинейностей, где $m \geqslant 2$. Для оценивания сверху по включению множества достижимости $D(T)$ (см., например, [3; 4]) мы используем аппарат функций Ляпунова, появившихся первоначально в теории устойчивости движения (см., например, [2; 5; 6] и многие другие работы). Отметим, что и в более ранних работах (см., например, [6]) аппарат теории функций Ляпунова использовался не только для традиционных задач теории устойчивости движения, но и для других качественных задач теории дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим нелинейную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma(x)) + Mu, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, вектор $b \in \mathbb{R}^n$; A, M — матрицы размерности $n \times n$, $n \times r$ $(r \geqslant 1)$ соответственно, $\varphi(\sigma)$ — непрерывно дифференцируемая скалярная функция переменной $\sigma \in \mathbb{R}^1$,

$$\sigma(x) = \langle c, x \rangle. \tag{2}$$

Здесь вектор $c \in \mathbb{R}^n$; управляющий вектор $u \in U$, где U — компакт из $\mathbb{R}^r$. Условимся символом $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 1)$ обозначать арифметическое евклидово пространство, элементами которого являются упорядоченные столбцы из k чисел и стандартным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ векторов. Для $y \in \mathbb{R}^k$ символом $|y|$ будем обозначать стандартную длину вектора y.

Отметим, что, положив в (1) $u = 0$, мы получим известную модель прямого регулирования, которая давно изучается в теории абсолютной устойчивости движения (см. [1; 2]). Таким образом, управляемый объект (1) можно рассматривать как управляемый вариант известной неуправляемой системы прямого регулирования.

Фиксируем для управляемой системы (1) начальный вектор

$$x(0) = x_0. \tag{3}$$

При $t \geqslant 0$ рассмотрим множество $\mathcal{U}$ всевозможных измеримых по Лебегу функций $u(t)$, удовлетворяющих условию

$$u(t) \in U, \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Фиксируем управление $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$, подставим его в систему дифференциальных уравнений (1) и решим ее при начальном условии (3) при $t \geqslant 0$ в классе локально абсолютно непрерывных функций. Согласно [7, с. 66, 67] соответствующее единственное локально абсолютно непрерывное решение $\tilde{x}(t) = x(t, \tilde{u}(\cdot))$ будет определено на некотором максимальном по включению полуинтервале $[0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$, где $\tau(\tilde{u}(\cdot))$ — конечное положительное число либо $\tau(\tilde{u}(\cdot)) = +\infty$. Фиксируем $T > 0$. Если $\tau(\tilde{u}(\cdot)) > T$, то вектор $x(T, \tilde{u}(\cdot))$ определен. Если $\tau(\tilde{u}(\cdot)) \leqslant T$, то вектор $x(T, \tilde{u}(\cdot))$ не определен, поскольку в этом случае существует (доказывается от противного) последовательность чисел $t_i \in (0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$, $i = 1, 2, \ldots$, такая, что $t_i \to \tau(\tilde{u}(\cdot))$, $|x(t_i, \tilde{u}(\cdot))| \to +\infty$ при $i \to +\infty$. Множество достижимости $D(T)$ для управляемого объекта (1)–(4) при $T > 0$ мы определим формулой

$$D(T) = \{x(T, \tilde{u}(\cdot))\}, \tag{5}$$

где объединение берется только по тем $\tilde{u}(\cdot)$, для которых $\tau(\tilde{u}(\cdot)) > T$. Отметим, что в общем случае множество $D(T)$ может оказаться пустым при данном $T > 0$.

Нашей задачей является получение оценок сверху по включению множества $D(T)$ для управляемого объекта (1)–(4). Среди такого рода прежних результатов мы отметим результаты работ [3; 4]. Заметим, что в этой тематике оказались полезными функции типа Ляпунова $v(x)$. Основным требованием к скалярным функциям $v(x)$ у нас является их непрерывная дифференцируемость на $\mathbb{R}^n$. Их приходится дифференцировать в силу управляемой системы. Поэтому мы называем эти функции функциями Ляпунова безотносительно к выполнению других свойств функций Ляпунова из теории устойчивости движения (см., например, [2; 5; 6] и др.)

Рассмотрим полезную для дальнейшего функцию (см. (1), (2))

$$v(x) = \frac{|x|^2}{2} + \int\limits_0^{\sigma(x)} \varphi(r)\, dr. \tag{6}$$

Подобного рода функции используются в теории абсолютной устойчивости (см., например, [1; 2]). В дальнейшем мы будем требовать выполнения следующего неравенства:

$$\varphi(r)r \geqslant 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^1. \tag{7}$$

Из этого неравенства вытекает, что интегральный член в (6) является неотрицательной функцией при $x \in \mathbb{R}^n$ и, следовательно, (см. (6)) функция $v(x) > 0$ при $x \neq 0$, причем $v(0) = 0$.

Фиксируем управления $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$. На $[0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$ рассмотрим функции (см. (6))

$$\tilde{x}(t) = x(t, \tilde{u}(\cdot)), \quad \tilde{v}(t) = v(\tilde{x}(t)). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что функция $\tilde{x}(t)$ локально липшицева на $[0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$ и поэтому функция $\tilde{v}(t)$ там почти всюду дифференцируема. Для производной $\dot{\tilde{v}}(t)$ почти всюду при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$ справедлива формула (см. (1), (2), (6))

$$\dot{\tilde{v}}(t) = \langle \operatorname{grad} v(\tilde{x}(t)), A\tilde{x}(t) + b\varphi(\sigma(\tilde{x}(t))) + M\tilde{u}(t)\rangle, \tag{9}$$

где $\operatorname{grad} v(x)$ означает градиент функции $v(x)$, причем

$$\operatorname{grad} v(x) = x + c\varphi(\sigma(x)). \tag{10}$$

В связи с формулами (9), (10) полезно рассмотреть функцию

$$f(x, \sigma, u) = \langle x + c\varphi(\sigma), Ax + b\varphi(\sigma) + Mu\rangle, \tag{11}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^r$. Эту формулу можно переписать в виде

$$f(x, \sigma, u) = g_1(x, u) + \langle c, b\rangle\varphi^2(\sigma) + g_2(x, u)\varphi(\sigma), \tag{12}$$

где

$$g_1(x, u) = \langle x, Ax + Mu\rangle, \tag{13}$$
$$g_2(x, u) = \langle c, Ax + Mu\rangle + \langle x, b\rangle. \tag{14}$$

В дальнейшем будем считать выполненным неравенство

$$\langle c, b\rangle < 0. \tag{15}$$

Выделяя в формуле (12) полный квадрат по величине $\varphi(\sigma)$, с помощью условия (15) получаем неравенство

$$f(x, \sigma, u) \leqslant g_1(x, u) + \frac{1}{|\langle c, b\rangle|}\Big(\frac{g_2(x, u)}{2}\Big)^2 \tag{16}$$

при $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$. Обратим внимание на то, что функция $\varphi(\sigma)$ не входит в правую часть неравенства (16). Используя неравенство Коши — Буняковского и ограниченность множества U, с помощью формул (12)–(14), (16) нетрудно при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, $u \in U$ получить неравенство

$$f(x, \sigma, u) \leqslant d_1|x|^2 + d_2|x| + d_3, \tag{17}$$

где d_1, d_2, d_3 — некоторые конструктивно вычислимые неотрицательные константы. Используя неравенство $|x| \leqslant (|x|^2 + 1)/2$, с помощью неравенства (17) приходим при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, $u \in U$ к неравенству (см. (6), (7))

$$f(x, \sigma, u) \leqslant \alpha v(x) + \beta, \tag{18}$$

где α, β — неотрицательные конструктивно вычислимые константы. Суммируя сказанное, на основании формул (8)–(13), (16)–(18) получим, что почти всюду при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$

$$\dot{\tilde{v}}(t) \leqslant \alpha\tilde{v}(t) + \beta, \tag{19}$$

где $\tilde{v}(t) = v(\tilde{x}(t))$. Используя известные теоремы о дифференциальных неравенствах (см., например, [8]), можно обосновать при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$ неравенство

$$\tilde{v}(t) \leqslant y(t), \tag{20}$$

где $y(t)$ — решение уравнения сравнения

$$\dot{y} = \alpha y + \beta \tag{21}$$

с начальным условием

$$y(0) = v(x_0). \tag{22}$$

Отметим, что в силу формул (6), (7), (20)–(22) при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$

$$|\tilde{x}(t)|^2 \leqslant 2y(t), \tag{23}$$

где

$$y(t) = e^{\alpha t} v(x_0) + \int\limits_0^t e^{\alpha r}\, dr \cdot \beta. \tag{24}$$

Допустим, что величина $\tau(\tilde{u}(\cdot))$ является конечным числом. В этой ситуации конечное число $\tau(\tilde{u}(\cdot))$ больше нуля. Тогда, как уже говорилось выше, существует такая последовательность чисел $t_i \in (0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$, $i = 1, 2, \ldots$, что $t_i \to \tau(\tilde{u}(\cdot))$, $|\tilde{x}(t_i)| \to +\infty$ при $i \to +\infty$. Однако это невозможно в силу соотношений (23), (24). Таким образом, при сделанных предположениях (см. (7), (15)) величина $\tau(\tilde{u}(\cdot)) = +\infty$. Отметим, что управление $\tilde{u}(\cdot)$ было произвольным допустимым управлением из $\mathcal{U}$ и, следовательно, при произвольном $T > 0$ и произвольных $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ справедливо неравенство

$$|x(T, u(\cdot))| \leqslant \sqrt{2y(T)}, \tag{25}$$

где функция $y(t)$ определяется формулой (24). Получаем теорему.

Теорема 1. *Для управляемого объекта* (1)–(4) *при условиях* (7), (15) *при произвольном* $T > 0$ *и произвольных* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ *справедливо неравенство вида* (25), *где функция* $y(t)$ *определяется формулой* (24) *при соответствующим образом подобранных неотрицательных константах* α, β, *а величина* $v(x_0)$ *вычисляется по формуле* (6).

Замечание. Если в уравнении (1) заменить линейную векторную функцию Ax на нелинейную непрерывно дифференцируемую на $\mathbb{R}^n$ функцию $g(x)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ и с выполнением на $\mathbb{R}^n$ неравенства

$$|g(x)| \leqslant \mu|x| + \nu,$$

где μ, ν — неотрицательные константы, то можно, используя функцию Ляпунова (6), провести аналогичные вышеприведенным рассуждения и получить и для этого, более общего, случая оценку сверху вида (25) для векторов $x(T, u(\cdot))$ при произвольных $T > 0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

2. В этом пункте мы рассмотрим управляемую систему (см. [7; 9]) вида

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m b_i \varphi_i(\sigma_i(x)) + Mu, \tag{26}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$), векторы b_i ($i = 1, \ldots, m$, $m \geqslant 2$) принадлежат $\mathbb{R}^n$; A, M — матрицы размерности $n \times n$, $n \times r$ ($r \geqslant 1$) соответственно, $\varphi_i(\sigma_i)$ ($i = 1, \ldots, m$) — непрерывно дифференцируемая скалярная функция переменной $\sigma_i \in \mathbb{R}^1$,

$$\sigma_i(x) = \langle c_i, x \rangle. \tag{27}$$

Здесь c_i $(i = 1, \ldots, m)$ — вектор из $\mathbb{R}^n$. Такого рода системы при $u = 0$ рассматривают в теории абсолютной устойчивости (см., например, [2; 10]). На вектор $u \in \mathbb{R}^r$ наложим геометрическое ограничение

$$u \in U, \tag{28}$$

где U — компакт из $\mathbb{R}^r$. Фиксируем начальное условие

$$x(0) = x_0. \tag{29}$$

Подставим измеримое управление $\tilde{u}(t) \in U$, $t \geqslant 0$, в (26) и будем решать для него при $t \geqslant 0$ задачу Коши при начальном условии (29) в классе локально абсолютно непрерывных функций. Согласно результатам из [7, с. 66, 67] соответствующее единственное решение $x(t, \tilde{u}(\cdot))$ будет определено на максимальном по включению полуинтервале $[0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$, где $\tau(\tilde{u}(\cdot))$ — конечное положительное число либо $\tau(\tilde{u}(\cdot)) = +\infty$. Как и в п. **1**, определим множество достижимости $D(T)$ формулой (5). Отметим, что в общем случае множество $D(T)$ может оказаться пустым при данном $T > 0$. Для получения оценки сверху по включению множества $D(T)$ мы будем использовать аналог функции (6) (см. [10]) вида (см. (27))

$$v(x) = \frac{|x|^2}{2} + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^{\sigma_i(x)} \varphi_i(r)\, dr. \tag{30}$$

В дальнейшем для каждой функции $\varphi_i(r)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, мы будем считать выполненными неравенства

$$\varphi_i(r) r \geqslant 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^1. \tag{31}$$

Эти неравенства обеспечивают неотрицательность каждого интегрального члена при $x \in \mathbb{R}^n$ в формуле (30). Обозначим $\tilde{x}(t) = x(t, \tilde{u}(\cdot))$, $\tilde{v}(t) = v(\tilde{x}(t))$ при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$. Нетрудно видеть, что функция $\tilde{v}(t)$ локально липшицева и, следовательно, дифференцируема почти всюду при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$, причем для производной $\dot{\tilde{v}}(t)$ почти всюду на $[0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$ справедлива формула

$$\dot{\tilde{v}}(t) = \Big\langle \operatorname{grad} v(\tilde{x}(t)), A\tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i \varphi_i(\sigma_i(\tilde{x}(t))) + M\tilde{u}(t) \Big\rangle, \tag{32}$$

где

$$\operatorname{grad} v(x) = x + \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(\sigma_i(x)). \tag{33}$$

По аналогии с п. **1** рассмотрим функцию (ср. с (11))

$$f(x, \sigma, u) = \Big\langle x + \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(\sigma_i), Ax + \sum_{i=1}^{m} b_i \varphi_i(\sigma_i) + Mu \Big\rangle, \tag{34}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; вектор $\sigma \in \mathbb{R}^m$, причем его компонентами являются величины $\sigma_i \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^r$. Эту формулу можно переписать в виде

$$f(x, \sigma, u) = g_1(x, u) + \sum_{i,j=1}^{m} \langle c_i, b_j \rangle \varphi_i(\sigma_i) \varphi_j(\sigma_j) + \sum_{i=1}^{m} h_i(x, u) \varphi_i(\sigma_i), \tag{35}$$

где

$$g_1(x, u) = \langle x, Ax + Mu \rangle, \tag{36}$$

$$h_i(x, u) = \langle c_i, Ax + Mu \rangle + \langle x, b_i \rangle \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{37}$$

В связи с формулой (35) рассмотрим квадратичную форму

$$W(\xi) = \langle C\xi, \xi \rangle,$$

где $\xi \in \mathbb{R}^m$, симметричная матрица C порядка m строится по матрице F порядка m с элементами $F_{ij} = \langle c_i, b_j \rangle$ по формуле

$$C = \frac{1}{2}\,(F + F^*). \tag{38}$$

Здесь $*$ означает транспонирование матрицы.

В дальнейшем предполагается выполненным

У с л о в и е А. Симметричная матрица C является отрицательно определенной, т. е. матрица $(-1)C$ является положительно определенной.

Известно (см. [11, с. 210, 211]), что для положительно определенной матрицы $(-1)C$ существует такая положительная константа γ, что $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$\langle (-1)C\xi, \xi \rangle \geqslant \gamma |\xi|^2, \tag{39}$$

т. е. $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$

$$\langle C\xi, \xi \rangle \leqslant -\gamma |\xi|^2. \tag{40}$$

Отметим, что наибольшая константа $\gamma > 0$ в (39) конструктивно вычислима. На основании сказанного из формул (34)–(38), (40) получаем при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$ неравенство вида

$$f(x, \sigma, u) \leqslant |g_1(x, u)| - \gamma |\varphi(\sigma)|^2 + \sum_{i=1}^{m} |h_i(x, u)| \cdot |\varphi_i(\sigma_i)|, \tag{41}$$

где вектор $\varphi(\sigma)$ с компонентами $\varphi_i(\sigma_i)$, $i = 1, \ldots, m$, принадлежит R^m.

Обозначим через $l(x, u, \sigma)$ сумму по i от 1 до m в правой части неравенства (41). Из определения функции $l(x, u, \sigma)$, формул (36), (37) и неравенства Коши — Буняковского, нетрудно при $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$ (U — компакт в $\mathbb{R}^r$), $\sigma \in \mathbb{R}^m$ получить оценку вида

$$|g_1(x, u)| + l(x, u, \sigma) \leqslant d_1 |x|^2 + d_2 |x| + (d_3 |x| + d_4) \cdot |\varphi(\sigma)|, \tag{42}$$

где d_i — неотрицательные конструктивно вычислимые константы. В связи с неравенствами (41), (42) полезно рассмотреть функцию

$$\xi(x, \sigma) = -\gamma |\varphi(\sigma)|^2 + (d_3 |x| + d_4) \cdot |\varphi(\sigma)|.$$

Выделяя в этой формуле полный квадрат относительно величины $|\varphi(\sigma)|$, получаем при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$ неравенство вида

$$\xi(x, \sigma) \leqslant \frac{1}{\gamma} \Big(\frac{d_3 |x| + d_4}{2} \Big)^2.$$

В силу сказанного для функции $f(x, \sigma, u)$ (см. (35)) при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $u \in U$ получаем неравенство вида

$$f(x, \sigma, u) \leqslant d_5 |x|^2 + d_6 |x| + d_7, \tag{43}$$

где d_5, d_6, d_7 — конструктивно вычислимые неотрицательные константы. Отметим, что правая часть неравенства (43) не зависит от σ. Используя неравенство $|x| \leqslant (|x|^2 + 1)/2$, с помощью неравенства (43) приходим для функции $f(x, \sigma, u)$ (см. (35)) при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $u \in U$ к неравенству вида (18). Дальнейшие рассуждения проходят по схеме п. **1** (см. формулы (19)–(24)), и при произвольных $T > 0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ обосновываем неравенство

$$|x(T, u(\cdot))| \leqslant \sqrt{2y(T)}, \tag{44}$$

где функция $y(t)$ определяется формулой вида (24). Получаем теорему.

Теорема 2. *Для управляемого объекта* (26)–(29) *при условиях* (31) *и условии отрицательной определенности матрицы* C *(см.* (38)) *при произвольном* $T > 0$ *и произвольных* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ *справедливо неравенство вида* (44)*, где функция* $y(t)$ *определяется формулой* (24) *при соответствующим образом подобранных неотрицательных константах* α*,* β*, а величина* $v(x_0)$ *вычисляется по формуле* (30).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.** Абсолютная устойчивость регулируемых систем. Москва: Изд-во АН СССР, 1963. 140 с.
2. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. Москва: Наука, 1970. 240 с.
3. **Гусев М.И.** О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых объектов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2011. Т. 17, № 1. С. 60–69.
4. **Никольский М.С.** Об оценивании множества достижимости для некоторых управляемых объектов // Междунар. конф., посвящ. 110-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина: сб. тр. Москва, 2018. С. 194–196.
5. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. Москва: ГИФМЛ, 1959. 212 с.
6. **Ла-Салль Ж., Лефшец С.** Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. Москва: Мир, 1964. 168 с.
7. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. Москва: Наука, 1972. 576 с.
8. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Мир, 1970. 720 с.
9. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1969. 384 с.
10. **Рапопорт Л.Б.** О задаче абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными стационарными элементами // Автоматика и телемеханика. 1987. Вып. 5. С. 66–74.
11. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 332 с.

Поступила 4.04.2019

После доработки 16.04.2019

Принята к публикации 29.04.2019

Никольский Михаил Сергеевич

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

г. Москва

e-mail: mni@mi-ras.ru

REFERENCES

1. Aizerman M.A., Gantmakher F.R. *Absolute stability of regulator systems.* San Francisco: Holden-Day, 1964, 182 p. ISBN: 978-0816201433. Original Russian text published in Aizerman M.A., Gantmakher F.R. *Absolyutnaya ustoichivost' reguliruemykh sistem.* Moscow: Publ. House Soviet Acad. Sci., 1963, 140 p.
2. Barbashin E.A. *Funktsii Lyapunova* [Lyapunov functions]. Moscow: Nauka Publ., 1970, 240 p.
3. Gusev M.I. On external estimates for reachable sets of nonlinear control systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. S57–S67. doi 10.1134/S0081543811090057.
4. Nikolskii M.S. On estimating of the attainable set for some control objects. In: Besov K.A. (ed.), *"Optimal control and differential games". Materials of international conference dedicated to 110 anniversary of L.S. Pontrjagin, December 12–14, 2018*, Moscow: MAKS Press, 2018, pp. 194–196 (in Russian). ISBN: 978-5-317-05994-1.
5. Krasovskii N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* [Some problems of the theory of motion stability]. Moscow: Publ. GIFML, 1959, 212 p.
6. La Salle J., Lefshetz S. *Stability by Liapunov's direct method.* Burlington, MA: Elsevier, 1961, 142 p. ISBN: 9780080955124. Translated to Russian under the title *Issledovanie ustoichivosti pryamym metodom Lyapunova.* Moscow: Mir Publ., 1964, 168 p.

7. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* N Y; London; Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1967, 576 p. ISBN: 0471522635 . Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p.
8. Hartman Ph. *Ordinary differential equations.* Ser. Classics Appl. Math. (Book 38), N Y, London, Sydney: SIAM, 1987, 632 p. ISBN: 978-0521682947 . Translated to Russian under the title *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya.* Moscow: Publ. Mir, 1970, 720 p.
9. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes.* Ed. L.W. Neustadt, N Y, London, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text (2nd ed.) published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1969, 384 p.
10. Rapoport L.B. *On absolute stability of control systems incorporating several nonlinear stationary elements. Avtomat. i Telemekh.*, 1987, no. 5, pp. 66–74 (in Russian).
11. Pontryagin L.S. *Ordinary differential equations.* Elsevier, 2014, 304 p. ISBN: 9781483156491 . Original Russian text published in Pontryagin L.S. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya.* Moscow: Nauka Publ., 1965, 332 p.

Received April 4, 2019
Revised April 16, 2019
Accepted April 29, 2019

Mikhail Sergeevich Nikolskii, Dr. Phys.-Math. Sci, Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Science, Moscow, 119991 Russia, e-mail: mni@mi-ras.ru .

Cite this article as: M. S. Nikolskii. Estimation of reachable sets from above with respect to inclusion for some nonlinear control systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 163–170 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА СО СТРОГО ОДНОСТОРОННИМ ПОВОРОТОМ

В. С. Пацко, А. А. Федотов

Исследуется структура трехмерного множества достижимости *в момент* для нелинейной управляемой системы, которую часто называют *машина Дубинса*. Управляемый объект движется на плоскости с постоянной по величине линейной скоростью и ограниченным радиусом поворота. Изучается случай, когда поворот возможен только в одну сторону, причем движение по прямой исключено в силу заданных ограничений на управление. С использованием принципа максимума Понтрягина получены варианты управлений, ведущих на границу множества достижимости. Рассматриваются сечения трехмерного множества достижимости по угловой координате. Дано аналитическое описание границ таких сечений в виде набора гладких дуг. Перечисляются все возможные варианты структуры сечений. Каждая дуга определяется некоторым типом кусочно-постоянного управления, удовлетворяющего принципу максимума. Доказывается строгая выпуклость сечений по угловой координате. Проведен анализ гладкости границы таких сечений.

Ключевые слова: машина Дубинса, строго односторонний поворот, структура трехмерного множества достижимости, принцип максимума Понтрягина, кусочно-постоянные управления, строгая выпуклость сечений множества достижимости по угловой координате.

V. S. Patsko, A. A. Fedotov. The structure of the reachable set for the Dubins car with a strictly one-sided turn.

We study the structure of a three-dimensional reachable set “at instant” of the nonlinear control system often called the “Dubins car.” A controlled vehicle moves in the plane with constant speed and bounded turning radius. We consider the case where the object can turn to one side only and the rectilinear motion is forbidden by given control constraints. Based on the Pontryagin maximum principle, we obtain variants of controls leading to the boundary of the reachable set. Sections of the three-dimensional reachable set along the angular coordinate are considered. The boundaries of such sections are described analytically in the form of sets of smooth arcs. The paper lists all possible options for the structure of the sections. Each arc is defined by a certain type of piecewise constant control satisfying the maximum principle. The strict convexity of the sections along the angular coordinate is proved, and the smoothness of the boundary of the sections is analyzed.

Keywords: Dubins car, strictly one-sided turn, structure of a three-dimensional reachable set, Pontryagin maximum principle, piecewise constant control, strict convexity of sections of a reachable set along the angular coordinate.

MSC: 93C15, 93B03, 49J15

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-171-187

1. Введение и постановка задачи

Статья посвящена исследованию множества достижимости *в момент* для модели управляемого движения, называемой *машина Дубинса* [1; 2]. Движение на плоскости осуществляется с постоянной по величине линейной скоростью. Скалярное управление определяет текущую угловую скорость вращения вектора линейной скорости или, что эквивалентно, мгновенный радиус поворота. Допустимые значения управляющего воздействия принадлежат замкнутому отрезку.

Для машины Дубинса *множеством достижимости* $G(t_f)$ *в момент* t_f назовем совокупность всех точек *трехмерного* фазового пространства, в каждую из которых можно попасть в момент t_f из заданного начального фазового состояния при помощи допустимого управления.

Некоторые факты, связанные с построением множества достижимости $G(t_f)$ в момент t_f для случая, когда возможны как левый, так и правый повороты, изложены в статьях [3; 4].

Структура множеств достижимости $G(t_f)$ для случая, когда поворот возможен только в одну сторону, но при этом допускается движение по прямой, описана в [5].

В данной статье мы изучаем множества $G(t_f)$ для случая, когда поворот возможен только в одну сторону *с запретом движения по прямой.* А именно предполагаем, что скалярное управление u принадлежит отрезку $[u_1, u_2]$, где $0 < u_1 < u_2$. Содержательные задачи с динамикой машины Дубинса для случая строго одностороннего поворота исследованы в работе [6].

Главная цель статьи — показать, что в рассматриваемом случае сечения множества достижимости по угловой координате являются *строго выпуклыми.* Дается детальное описание структуры границы таких сечений. Используется принцип максимума Понтрягина [7].

Статья представляет собой существенное расширение работы [9]. Уточнено описание границы сечений множеств достижимости по угловой координате, улучшено формальное обоснование строгой выпуклости невырожденных сечений.

Динамика управляемого объекта (машина Дубинса) на плоскости x, y описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos\varphi, \\ \dot{y} &= \sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \qquad u \in [u_1, u_2], \quad 0 < u_1 < u_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения на плоскости; φ — угол направления вектора скорости, отсчитываемый от оси x против часовой стрелки; u — скалярное управление. Величина линейной скорости постоянна и равна единице. Далее предполагаем, что $u_2 = 1$. Значение u_1 является параметром задачи.

К представлению (1.1) с $u_2 = 1$ может быть приведена произвольная управляемая система третьего порядка, описывающая движение с постоянной по величине линейной скоростью и заданным диапазоном угловой скорости поворота. Для этого требуется масштабирование по геометрическим координатам и по времени. Без ограничения общности в начальный момент времени $t_0 = 0$ полагаем начальное фазовое состояние нулевым: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.

В качестве допустимых управлений $u(\cdot)$ рассматриваются измеримые функции времени со значениями $u(t)$ из отрезка $[u_1, u_2]$. Предполагаем, что угловая координата φ принимает значения в полуинтервале $[0, \infty)$.

2. Принцип максимума Понтрягина и типы экстремальных управлений

Известно [8], что управления, которые приводят систему на границу множества достижимости $G(t_f)$ в момент t_f, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина (ПМП). Обозначим переменные сопряженной системы через ψ_1, ψ_2, ψ_3. Учитывая динамику системы (1.1), получаем [3],что вдоль движения в силу управления $u^*(\cdot)$, ведущего на границу, соответствующие функции $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ являются константами, а условие максимума записывается в виде

$$\psi_3^*(t)u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \psi_3^*(t)u \quad \text{п.в. } t \in [t_0, t_f].$$

Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(t) = \text{const} \neq 0$ на всем промежутке $[t_0, t_f]$. В этом случае управление $u^*(\cdot)$ является постоянным и принимает значение u_1, либо u_2.

Пусть по крайней мере одно из чисел ψ_1^*, ψ_2^* не равно нулю. Тогда справедливо следующее выражение для $\psi_3^*(t)$:

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C, \quad C = \text{const}.$$

Получаем, что соотношение $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0$ определяет прямую переключения, на которой происходит смена управления $u^*(t)$ с одного крайнего значения на другое.

Таким образом, в случае строго одностороннего поворота движения, удовлетворяющие ПМП, в проекции на плоскость x, y формируются из движений по дугам окружностей радиусом $1/u_1$ и $1/u_2$ в силу управлений u_1 и u_2. На каждом таком участке управление можно считать постоянным. Поэтому при анализе управлений, удовлетворяющих ПМП, можем ограничиться кусочно-постоянными управлениями (предполагаем непрерывность справа в точках разрыва).

На рис. 1 приведен вариант движения на плоскости x, y в силу управления, удовлетворяющего ПМП, а также показана соответствующая ему прямая переключения. С ростом t движение по дугам окружностей осуществляется против часовой стрелки.

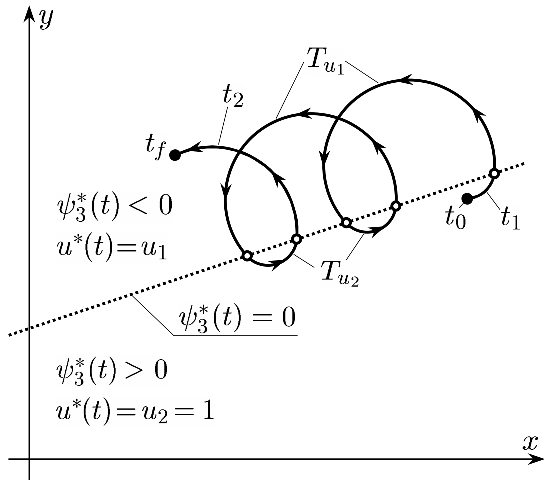


Рис. 1. Траектория, удовлетворяющая ПМП, и соответствующая ей прямая переключения

Участки движения, которые *начинаются* и *заканчиваются* на прямой переключения и проходят в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C \le 0$, имеют одинаковую продолжительность. Обозначим ее через T_{u_1}. Одинаковую продолжительность имеют также промежуточные участки, проходящие в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C \ge 0$. Обозначим такую продолжительность через T_{u_2}. Подчеркнем, что прямая переключения, а стало быть, и промежуточные участки продолжительностью T_{u_1} и T_{u_2} связаны с конкретным движением. Для другого движения, удовлетворяющего ПМП, они будут другими. Промежуточные участки с управлениями u_1 и u_2 чередуются и стыкуются друг с другом на прямой переключения (рис. 1). Движение по любым двум таким *соседним* дугам дает приращение угловой координаты φ, равное 2π, т. е. $T_{u_1} \cdot u_1 + T_{u_2} \cdot u_2 = 2\pi$. По постановке задачи $u_2 = 1$. Поэтому

$$T_{u_1} \cdot u_1 + T_{u_2} = 2\pi. \tag{2.1}$$

Поскольку $u_1 < 1$, то время $T_{u_1} + T_{u_2}$, необходимое для выполнения одной “петли”, превышает 2π. Следовательно, на промежутке $[t_0, t_f]$ любое управление, ведущее на границу множества достижимости, либо не имеет переключений, либо число переключений конечно.

Рассмотрим движение системы (1.1) на участке времени $[t_0, t_f]$ ($t_0 = 0$, $t_f > 0$) с нулевым начальным фазовым состоянием. Возможные значения $\varphi(t_f)$ координаты φ в момент t_f находятся в промежутке $[t_f \cdot u_1, t_f]$. Наименьшее и наибольшее значения φ реализуются на управлениях $u(t) \equiv u_1$ и $u(t) \equiv u_2 = 1$, не имеющих переключений. Соответствующие φ-сечения множества $G(t_f)$ представляют собой точки на плоскости x, y:

$$\left(\frac{\sin(t_f \cdot u_i)}{u_i}, \frac{-\cos(t_f \cdot u_i)}{u_i} \right)^{\mathsf{T}}, \quad i = 1, 2.$$

В дальнейшем считаем, что $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f)$. Движения, приходящие на границу такого φ-сечения, удовлетворяют ПМП и должны иметь не менее одного переключения (не менее двух участков с постоянным управлением). Используем это для классификации управлений и соответствующих точек на границе сечения. В итоге установим структуру φ-сечений.

Введем обозначения. Символом t_1 (соответственно, t_2) обозначим продолжительность первого (последнего) примыкающего к моменту t_0 (t_f) участка с постоянным управлением (рис. 1).

Движения с управлениями, удовлетворяющими ПМП, со значением u_1 на первом участке (движение на плоскости x, y по дуге большой окружности) и со значением u_2 на последнем участке (движение по дуге малой окружности) отнесем к семейству “BS”. Аналогично определим типы управлений SB, BB, SS с парами управлений (u_2, u_1), (u_1, u_1), (u_2, u_2) на первом и последнем участках постоянства управления. Любое управление, удовлетворяющее ПМП, принадлежит одному и только одному из четырех оговоренных типов. Траектория, приведенная в качестве примера на рис. 1, порождена управлением типа SB.

3. Граница φ-сечений в случае $\varphi < 2\pi$

Данный случай охватывает вариант из статьи авторов “Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота” (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2018, Т. 24, №1, С. 143–155), где были исследованы φ-сечения для случая $t_f < 2\pi$. Диапазон возможных значений параметра u_1 в постановке задачи данной статьи задан в виде $0 < u_1 < u_2 = 1$. Из условия $t_f < 2\pi$ следует выполнение неравенства $\varphi < 2\pi$. Обратное, очевидно, не всегда выполнено. Покажем, что полученные в указанной статье результаты справедливы и для случая $\varphi < 2\pi$. Кратко об этом говорилось в [9].

В первую очередь отметим, что при $\varphi < 2\pi$ управления, удовлетворяющие ПМП, имеют не более двух переключений. Иначе в силу соотношения (2.1) получили бы $\varphi > 2\pi$.

1) Рассмотрим движение с одним переключением управления u. Пусть на первом участке управление равно $u_2 = 1$, а на втором совпадает с u_1 (тип SB). Справедливы соотношения

$$\varphi = t_1 + t_2{\cdot}u_1, \quad t_f = t_1 + t_2.$$

Отсюда получаем, что при фиксированных значениях u_1, t_f, φ величины t_1, t_2, а стало быть и момент переключения, определяются однозначно. Таким образом, в любом φ-сечении множества $G(t_f)$ рассматриваемому порядку управлений u_2, u_1 соответствует одна точка.

Аналогично для последовательности управлений u_1, u_2 (тип BS) получаем координаты точки в исследуемом φ-сечении множества $G(t_f)$.

2) Рассмотрим вариант с двумя переключениями и последовательностью управлений u_2, u_1, u_2 (тип SS). Продолжительности соответствующих участков постоянства управления есть t_1, T_{u_1}, t_2. Имеем

$$\varphi = t_1 + T_{u_1}{\cdot}u_1 + t_2, \quad t_f = t_1 + T_{u_1} + t_2.$$

Отсюда вытекает $T_{u_1} = \dfrac{t_f - \varphi}{1-u_1}$, $\quad t_1 + t_2 = \dfrac{\varphi - t_f{\cdot}u_1}{1-u_1}$. Следовательно, длительность среднего участка и суммарная длительность первого и последнего участков в рассматриваемом случае — постоянные величины. Полученное семейство допустимых управлений является однопараметрическим. В качестве параметра возьмем величину t_1 с интервалом возможных значений $t_1 \in (0, \mathcal{T}_{\rm S})$, где $\mathcal{T}_{\rm S} = (\varphi - t_f{\cdot}u_1)\,/(1-u_1)$.

Соответствующие точки $(x_{\rm SS}[t_1], y_{\rm SS}[t_1])^{\mathsf T}$ φ-сечения множества $G(t_f)$ в результате интегрирования уравнений (1.1) (при оговоренных промежутках постоянства управления) и тригонометрических преобразований имеют вид

$$\begin{pmatrix} x_{\rm SS}[t_1] \\ y_{\rm SS}[t_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t_1 \\ 1-\cos t_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1}\begin{pmatrix} \sin(t_1 + T_{u_1}{\cdot}u_1) - \sin t_1 \\ \cos t_1 - \cos(t_1 + T_{u1}{\cdot}u_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin\varphi - \sin(t_1 + T_{u_1}{\cdot}u_1) \\ \cos(t_1 + T_{u_1}{\cdot}u_1) - \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1-\cos\varphi \end{pmatrix} \ + \ 2\Big(\frac{1}{u_1} - 1\Big)\sin\Big(\frac{T_{u_1}{\cdot}u_1}{2}\Big)\begin{pmatrix} \cos\Big(t_1 + \dfrac{T_{u_1}{\cdot}u_1}{2}\Big) \\ \sin\Big(t_1 + \dfrac{T_{u_1}{\cdot}u_1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \quad t_1 \in (0,\, \mathcal{T}_{\rm S}). \tag{3.1}$$

Такие точки образуют дугу окружности на плоскости x, y с центром в точке

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1-\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

и радиусом

$$2\Big(\frac{1}{u_1}-1\Big)\Big(\frac{T_{u_1}\cdot u_1}{2}\Big). \tag{3.3}$$

Угол раствора дуги (3.1) определяется диапазоном изменения величины t_1 и равен $\mathcal{T}_{\mathrm{S}}$.

3) Рассмотрим второй вариант с двумя переключениями и последовательностью управлений u_1, u_2, u_1 (тип BB). Продолжительность соответствующих участков постоянства управления есть t_1, T_{u_2}, t_2. По аналогии с предыдущим вариантом имеем

$$\varphi = t_1\cdot u_1 + T_{u_2} + t_2\cdot u_1, \quad t_f = t_1 + T_{u_2} + t_2.$$

Отсюда вытекает $T_{u_2} = \dfrac{\varphi - t_f\cdot u_1}{1-u_1}, \quad t_1+t_2 = \dfrac{t_f-\varphi}{1-u_1}.$

Соответствующие точки $(x_{\mathrm{BB}}[t_1], y_{\mathrm{BB}}[t_1])^{\mathsf{T}}$ φ-сечения множества $G(t_f)$ в результате интегрирования уравнений (1.1) (при оговоренных промежутках постоянства управления) и тригонометрических преобразований имеют вид

$$\begin{pmatrix} x_{\mathrm{BB}}[t_1] \\ y_{\mathrm{BB}}[t_1] \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1}\begin{pmatrix} \sin(t_1\cdot u_1) \\ 1-\cos(t_1\cdot u_1) \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \sin(t_1\cdot u_1 + T_{u_2}) - \sin(t_1\cdot u_1) \\ \cos(t_1\cdot u_1) - \cos(t_1\cdot u_1 + T_{u_2}) \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1}\begin{pmatrix} \sin\varphi - \sin(t_1\cdot u_1 + T_{u_2}) \\ \cos(t_1\cdot u_1 + T_{u_2}) - \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{u_1}\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1-\cos\varphi \end{pmatrix} - 2\Big(\frac{1}{u_1}-1\Big)\sin\Big(\frac{T_{u_2}}{2}\Big)\begin{pmatrix} \cos\Big(t_1\cdot u_1 + \dfrac{T_{u_2}}{2}\Big) \\ \sin\Big(t_1\cdot u_1 + \dfrac{T_{u_2}}{2}\Big) \end{pmatrix}, \quad t_1 \in (0,\, \mathcal{T}_{\mathrm{B}}), \tag{3.4}$$

где $\mathcal{T}_{\mathrm{B}} = (t_f - \varphi)/(1-u_1)$. Это тоже дуга окружности с центром в точке

$$\frac{1}{u_1}\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1-\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

и радиусом

$$2\Big(\frac{1}{u_1}-1\Big)\sin\Big(\frac{T_{u_2}}{2}\Big). \tag{3.6}$$

Угол раствора дуги (3.4) равен $\mathcal{T}_{\mathrm{B}}\cdot u_1$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi < 2\pi$. Тогда φ-сечение множества достижимости $G(t_f)$ представляет собой строго выпуклое множество на плоскости x, y. Его граница составлена из двух дуг окружностей с центрами в точках* (3.2), (3.5) *и радиусами* (3.3), (3.6) *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно установить, что дуги (3.1) и (3.4) совпадают в предельных точках. А именно

$$\begin{pmatrix} x_{\mathrm{SS}}[0] \\ y_{\mathrm{SS}}[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{BB}}[\mathcal{T}_{\mathrm{B}}] \\ y_{\mathrm{BB}}[\mathcal{T}_{\mathrm{B}}] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{\mathrm{SS}}[\mathcal{T}_{\mathrm{S}}] \\ y_{\mathrm{SS}}[\mathcal{T}_{\mathrm{S}}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{BB}}[0] \\ y_{\mathrm{BB}}[0] \end{pmatrix}.$$

Предельные точки соответствуют рассмотренному в п. 1) этого раздела управлению с одним переключением.

Анализируя возможные варианты движения системы (1.1), удовлетворяющие ПМП, получаем совокупность положений на плоскости x, y в виде замкнутой кривой, образуемой двумя дугами окружностей, состыкованными в предельных точках.

Рассмотрим перемещение по дуге (3.1), определяемое параметром t_1. При увеличении параметра от 0 до $\mathcal{T}_{\mathrm{S}}$ перемещение сопровождается поворотом касательного вектора против часовой стрелки. Перемещение по дуге (3.4) при увеличении параметра t_1 от 0 до $\mathcal{T}_{\text{в}}$ также дает поворот против часовой стрелки. Сумма углов раствора дуг (3.1) и (3.4) определяется следующим образом:

$$\frac{u_1(t_f-\varphi)}{1-u_1}+\frac{(\varphi-t_f{\cdot}u_1)}{1-u_1} \;=\; \varphi.$$

Множество, ограниченное дугами (3.1) и (3.4), представляет собой пересечение двух кругов. Поскольку по предположению $\varphi<2\pi$, оно является строго выпуклым. □

4. Экстремальные управления в случае $\varphi \geq 2\pi$

4.1. Свойства управлений типа SB и BS

Управления типа SB и BS имеют схожее (в прямом времени t для SB и обратном времени t_f-t для BS) представление с четным числом (одинаковым для SB и BS) промежуточных участков постоянного управления.

А. Рассмотрим управления типа SB (рис. 1).

1) В этом случае продолжительности участков постоянного управления удовлетворяют соотношениям

$$0<t_1\leq T_{u_2}<2\pi, \quad 0<t_2\leq T_{u_1}<\frac{2\pi}{u_1}. \tag{4.1}$$

При зафиксированных значениях u_1, t_f, φ имеем

$$\varphi=t_1+n(T_{u_1}{\cdot}u_1+T_{u_2})+t_2{\cdot}u_1, \tag{4.2}$$

$$t_f\;=t_1+n(T_{u_1}+T_{u_2})+t_2. \tag{4.3}$$

Здесь $n=\text{const}\geq 0$ — количество петель для управления типа SB на промежутке $[0,t_f]$ при оговоренном значении φ в момент t_f. Число n определяется *однозначно* по формуле

$$n=\begin{cases}\dfrac{\varphi}{2\pi}-1, & \text{если } \varphi \text{ кратно } 2\pi,\\[2mm] \left[\dfrac{\varphi}{2\pi}\right], & \text{если } \varphi \text{ не кратно } 2\pi.\end{cases} \tag{4.4}$$

Квадратные скобки означают целую часть.

Из соотношений (2.1), (4.2) получаем линейную зависимость между параметрами t_1 и t_2 для управлений типа SB:

$$t_1+t_2{\cdot}u_1=\varphi-2\pi n. \tag{4.5}$$

В силу (4.1) имеем

$$0<t_1\leq\frac{t_1+nT_{u_2}}{n+1}\leq T_{u_2}, \quad 0<t_2\leq\frac{t_2+nT_{u_1}}{n+1}\leq T_{u_1}. \tag{4.6}$$

Из (4.2), (4.3) находим

$$\frac{t_1+nT_{u_2}}{n+1}=\frac{\varphi-t_f{\cdot}u_1}{(n+1)(1-u_1)}, \quad \frac{t_2+nT_{u_1}}{n+1}=\frac{t_f-\varphi}{(n+1)(1-u_1)}. \tag{4.7}$$

Обозначим

$$t_1^*=\frac{\varphi-t_f{\cdot}u_1}{(n+1)(1-u_1)}, \quad t_2^*=\frac{t_f-\varphi}{(n+1)(1-u_1)}. \tag{4.8}$$

Неравенства (4.6) с учетом (4.7), (4.8) влекут

$$0<t_1\leq t_1^*\leq T_{u_2}, \quad 0<t_2\leq t_2^*\leq T_{u_1}. \tag{4.9}$$

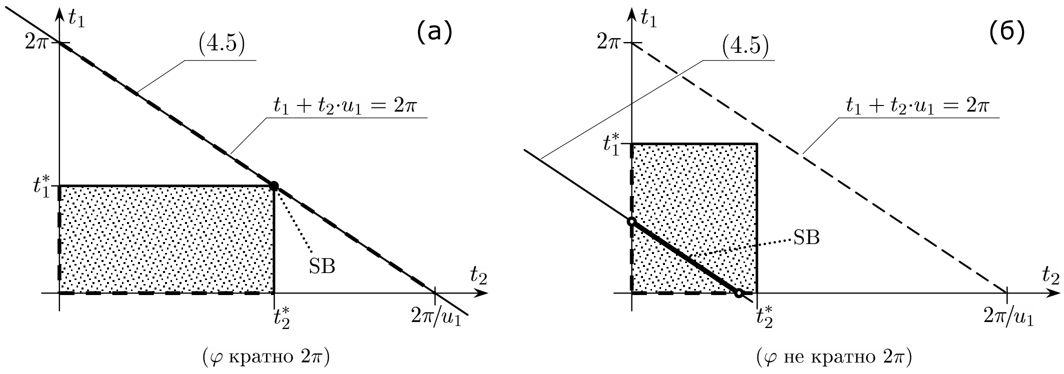


Рис. 2. Допустимые параметры управлений типа SB

Данные неравенства определяют семейство управлений типа SB в виде отрезка прямой (4.5), пересекающей прямоугольник $(0, t_1^*] \times (0, t_2^*]$ на плоскости t_1, t_2 (рис. 2).

2) Рассмотрим случай, когда φ кратно 2π, т. е. $\varphi = 2\pi k$, где k — такое натуральное число, что $t_f{\cdot}u_1 < 2\pi k < t_f$. Имеем $n = k - 1$. Из (4.5) тогда следует $t_1 + t_2{\cdot}u_1 = 2\pi$. Кроме того, из (4.8) вытекает $t_1^* + t_2^*{\cdot}u_1 = 2\pi$. С учетом (4.9) получаем $t_1 = t_1^*$, $t_2 = t_2^*$, что означает единственность управления типа SB. В этом случае прямая (4.5) на плоскости t_1, t_2 проходит через точку (t_1^*, t_2^*) и совпадает с прямой $t_1 + t_2{\cdot}u_1 = 2\pi$, как показано на рис. 2а (вырожденное пересечение с прямоугольником $(0, t_1^*] \times (0, t_2^*]$).

Управление типа BS также задается единственным образом при $t_1 = t_2^*$, $t_2 = t_1^*$.

3) Пусть теперь $\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π. В силу (4.4) имеем $n > 0$ (n однозначно определяется по φ). Взяв соотношения (4.8), получим $0 < t_1^* + t_2^*{\cdot}u_1 < 2\pi$. Это означает, что прямоугольник $(0, t_1^*] \times (0, t_2^*]$ на плоскости t_1, t_2 находится в открытой полосе $0 < t_1 + t_2{\cdot}u_1 < 2\pi$ (рис. 2б).

Предположим, что возможен случай, когда $t_1 + t_2{\cdot}u_1 = t_1^* + t_2^*{\cdot}u_1$. Из (4.2) получаем, что φ кратно 2π. Это противоречит сделанному предположению о выборе φ. С учетом (4.9) имеем $0 < t_1 + t_2{\cdot}u_1 < t_1^* + t_2^*{\cdot}u_1$.

Таким образом, при заданных условиях ($\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π) существует семейство управлений типа SB, каждое из которых задается при помощи параметра t_1, принимающего значения в невырожденном (с ненулевой длиной) отрезке.

На основе равенств (4.7) и обозначений (4.8) запишем соотношения, определяющие значения величин T_{u_2} и T_{u_1} для управлений типа SB через t_1 и t_2 соответственно:

$$T_{u_2} = \frac{t_1^*(n+1) - t_1}{n}, \quad T_{u_1} = \frac{t_2^*(n+1) - t_2}{n}.$$

Интегрируя систему (1.1), найдем геометрическое положение на плоскости x, y в момент t_f:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{SB}}[t_1] \\ y_{\text{SB}}[t_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t_1 \\ 1 - \cos t_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin\varphi - \sin t_1 \\ \cos t_1 - \cos\varphi \end{pmatrix} + n\Big(\frac{1}{u_1} - 1\Big) \begin{pmatrix} \sin(t_1 - T_{u_2}) - \sin t_1 \\ \cos t_1 - \cos(t_1 - T_{u_2}) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Возможные значения параметра t_1 определяются пересечением прямой (4.5) с прямоугольником $(0, t_1^*] \times (0, t_2^*]$. Соответствующую кривую на плоскости x, y назовем дугой SB. На рис. 2б показан один из вариантов пересечения. Для него обе предельные точки не входят в дугу SB.

Рассмотрим касательный вектор к дуге SB в виде производной по t_1:

$$(n+1)\Big(\frac{1}{u_1} - 1\Big) \begin{pmatrix} \cos(t_1 - T_{u_2}) - \cos t_1 \\ \sin(t_1 - T_{u_2}) - \sin t_1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Последний сомножитель можно представить в виде

$$2\,\sin\Big(\frac{T_{u_2}}{2}\Big)\begin{pmatrix}\sin\Big(t_1\dfrac{2n+1}{2n}-t_1^*\dfrac{n+1}{2n}\Big)\\ \cos\Big(t_1\dfrac{2n+1}{2n}-t_1^*\dfrac{n+1}{2n}\Big)\end{pmatrix}.$$

Получаем, что перемещение по дуге SB с ростом параметра t_1 осуществляется с постоянной угловой скоростью $(2n+1)\,/(2n)$ против часовой стрелки.

Б. Для дуг BS справедливы аналогичные формулы. В частности, перемещение на плоскости x, y по дуге BS при увеличении параметра t_1 осуществляется с постоянной угловой скоростью $u_1(2n+1)\,/(2n)$ против часовой стрелки. При этом диапазон возможных значений t_1 больше в $1/u_1$ раз. Таким образом, угол поворота касательного вектора на дугах SB и BS является одинаковым.

4.2. Свойства управлений типа SS и BB

Для управлений типа SS (BB) между первым и последним участками имеется нечетное число промежуточных участков с постоянным управлением. Описываем их как целый набор петель и один примыкающий промежуточный участок с управлением u_1 (u_2) продолжительностью T_{u_1} (T_{u_2}).

А. Рассмотрим управления типа SS.

1) В этом случае продолжительности участков постоянного управления удовлетворяют соотношениям

$$0 < t_1 \le T_{u_2} < 2\pi, \quad 0 < t_2 \le T_{u_2} < 2\pi, \quad 0 < T_{u_1} < \frac{2\pi}{u_1}. \tag{4.12}$$

При зафиксированных значениях $u_1,\, t_f,\, \varphi,\, n$ имеем

$$\varphi = t_1 + n(T_{u_1}{\cdot}u_1 + T_{u_2}) + T_{u_1}{\cdot}u_1 + t_2, \quad t_f = t_1 + n(T_{u_1} + T_{u_2}) + T_{u_1} + t_2.$$

Отсюда с учетом (2.1) делаем вывод, что величины T_{u_1}, T_{u_2} и t_1+t_2 являются *константами* для управлений типа SS, а именно

$$T_{u_1} = \frac{t_f-\varphi}{(n+1)(1-u_1)}, \quad T_{u_2} = 2\pi - \frac{(t_f-\varphi){\cdot}u_1}{(n+1)(1-u_1)}, \tag{4.13}$$

$$t_1 + t_2 = \varphi + T_{u_2} - 2\pi(n+1). \tag{4.14}$$

Соотношения (4.13), (4.14) и неравенства (4.12) определяют совокупность всех управлений типа SS с оговоренным числом петель, равным n.

Предположим, что такая совокупность существует. Определяемые управлениями типа SS точки $(\,x_{\rm SS}[n,t_1],\, y_{\rm SS}[n,t_1]\,)^{\mathsf T}$ в φ-сечении множества $G(t_f)$ находим, интегрируя систему (1.1):

$$\begin{pmatrix}x_{\rm SS}[n,t_1]\\ y_{\rm SS}[n,t_1]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\varphi\\ 1-\cos\varphi\end{pmatrix} + \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1}\begin{pmatrix}\sin(t_1+T_{u_1}{\cdot}u_1)-\sin t_1\\ \cos t_1-\cos(t_1+T_{u_1}{\cdot}u_1)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\sin\varphi\\ 1-\cos\varphi\end{pmatrix} + 2\,\frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1}\sin\Big(\frac{T_{u_1}{\cdot}u_1}{2}\Big)\begin{pmatrix}\cos\Big(t_1+\dfrac{T_{u_1}{\cdot}u_1}{2}\Big)\\ \sin\Big(t_1+\dfrac{T_{u_1}{\cdot}u_1}{2}\Big)\end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Для получаемой на плоскости x, y однопараметрической кривой возможные значения параметра t_1 определяются пересечением прямой (4.14) с квадратом $(0, T_{u_2}] \times (0, T_{u_2}]$ на плоскости t_1, t_2 (рис. 3).

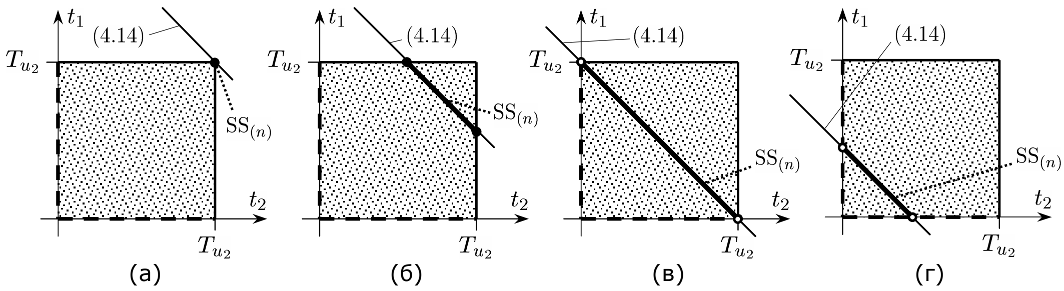


Рис. 3. Допустимые параметры управлений типа SS

2) В вырожденном случае, когда $t_1 = t_2 = T_{u_2}$ (рис. 3а), кривая (4.15) на плоскости x, y состоит из одной точки.

3) В невырожденном случае (рис. 3б,в,г) кривая (4.15) на плоскости x, y есть дуга окружности, обозначим ее через $\mathrm{SS}_{(n)}$. Центр окружности расположен в точке $\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1-\cos\varphi \end{pmatrix}$, а радиус равен

$$2\,\frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1}\,\sin\Big(\frac{T_{u_1}\cdot u_1}{2}\Big).$$

Перемещение по дуге $\mathrm{SS}_{(n)}$ идет равномерно по t_1 с поворотом касательного вектора против часовой стрелки на угол, равный приращению параметра t_1. Если $0 < \varphi - 2\pi(n+1) < T_{u_2}$ (рис. 3б), то дуга $\mathrm{SS}_{(n)}$ включает в себя обе крайние точки. Если же $\varphi = 2\pi(n+1)$ (рис. 3в) или $-T_{u_2} < \varphi - 2\pi(n+1) < 0$ (рис. 3г), то предельные точки дуги $\mathrm{SS}_{(n)}$, соответствующие значениям $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$, не принадлежат дуге.

Таким образом, любая *невырожденная* дуга $\mathrm{SS}_{(n)}$ либо имеет две предельные точки, ей принадлежащие, либо обе предельные точки не принадлежат данной дуге. В первом случае дуга $\mathrm{SS}_{(n)}$ задается отрезком $[\varphi - 2\pi(n+1),\, T_{u_2}]$ по параметру t_1. Во втором случае дуга $\mathrm{SS}_{(n)}$ задается интервалом $(0,\, \varphi + T_{u_2} - 2\pi n)$ по параметру t_1.

4) Возможно, что при некоторых u_1, t_f и $\varphi \in (t_f\cdot u_1,\, t_f)$ не существует чисел $n = 0, 1, 2, \ldots$, для которых выполнены равенства (4.13), (4.14). Установим, что если для фиксированной тройки u_1, t_f, φ хотя бы одно n существует (будем называть его *допустимым*), то количество таких значений n не превышает двух. При этом если есть два значения, n_1 и n_2, то они отличаются не более чем на единицу.

Для доказательства перепишем выражение (4.14):

$$\varphi = (t_1 + t_2 - T_{u_2}) + 2\pi(n+1). \tag{4.16}$$

Видно, что диапазон, где могут лежать допустимые значения n, задается интервалом значений первого слагаемого. Учитывая соотношения (4.12), получим

$$-2\pi < -T_{u_2} < t_1 + t_2 - T_{u_2} = \varphi - 2\pi(n+1) \le T_{u_2} < 2\pi. \tag{4.17}$$

Поскольку величина $t_1 + t_2 - T_{u_2} = \varphi - 2\pi(n+1)$ изменяется по n с шагом 2π, а диапазон ее значений принадлежит интервалу $(-2\pi, 2\pi)$, то из (4.17) следует сформулированное выше свойство допустимых значений n для управлений типа SS.

Из (4.12) имеем $\varphi - 2\pi(n+1) \in (-T_{u_2}, T_{u_2}]$, $T_{u_2} > 0$. График функции $n \longrightarrow T_{u_2}$ при непрерывной зависимости от n показан на рис. 4а. Частично графики функций

$$n \longrightarrow \varphi - 2\pi(n+1), \quad n \longrightarrow T_{u_2}, \quad n \longrightarrow -T_{u_2}$$

совместно изображены на остальных фрагментах рис. 4. Видно, что либо искомое число n не существует, т. е. нет допустимых управлений типа SS (рис. 4г), либо есть одно допустимое

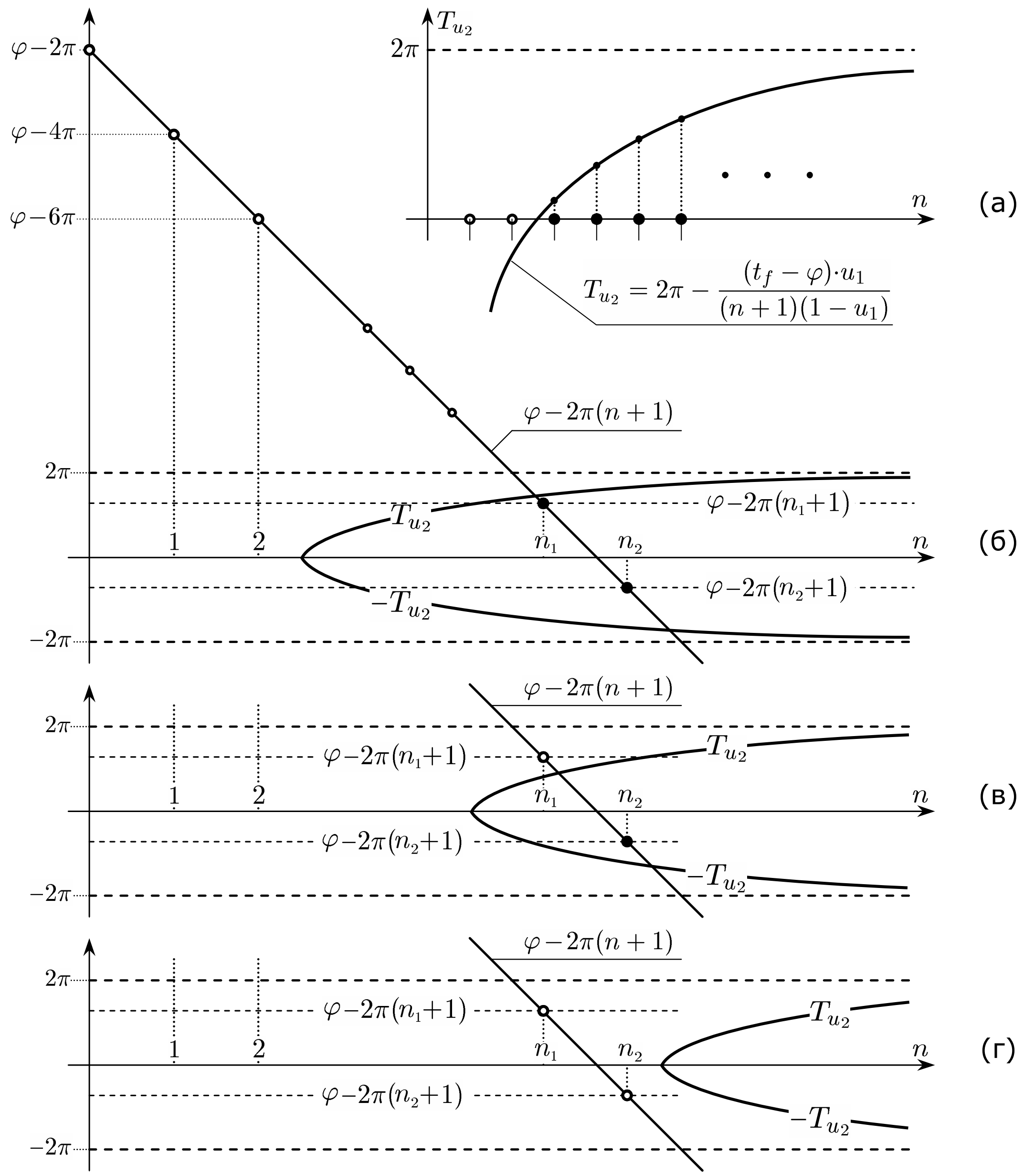


Рис. 4. Допустимые значения n для управлений типа SS

значение n (рис. 4в), либо существуют два допустимых значения n_1 и n_2 (рис. 4б). В последнем случае $|n_1 - n_2| = 1$.

Каждому допустимому значению n соответствует в силу (4.15) на плоскости x, y дуга $\mathrm{SS}_{(n)}$ (возможно, вырождающаяся в точку). Из условия $\varphi - 2\pi(n+1) = T_{u_2}$ вырожденного случая (рис. 3а) следует, что только одна из двух дуг типа SS может вырождаться в точку. Если φ не кратно 2π, то число n может принимать лишь следующие два значения (рис. 4):

$$n_1 = \left[\frac{\varphi}{2\pi}\right] - 1, \quad n_2 = \left[\frac{\varphi}{2\pi}\right].$$

Б. Аналогичные свойства справедливы и для управлений типа BB. Величины T_{u_1}, T_{u_2}, $t_1 + t_2$ определяются формулами

$$T_{u_1} = \frac{1}{u_1}\Big(2\pi - \frac{\varphi - t_f\cdot u_1}{(n+1)(1-u_1)}\Big), \quad T_{u_2} = \frac{\varphi - t_f\cdot u_1}{(n+1)(1-u_1)}, \tag{4.18}$$

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{u_1}\,(\varphi - 2\pi(n+1)) + T_{u_1}. \tag{4.19}$$

Данные соотношения с учетом неравенств

$$0 < t_1 \le T_{u_1} < \frac{2\pi}{u_1}, \quad 0 < t_2 \le T_{u_1} < \frac{2\pi}{u_1}, \quad 0 < T_{u_2} < 2\pi$$

задают совокупность управлений, формирующих дугу $\mathrm{BB}_{(n)}$ на плоскости x, y. В невырожденном случае точки $(\, x_{\text{BB}}[n,t_1],\, y_{\text{BB}}[n,t_1]\,)^{\mathsf{T}}$ этой дуги рассчитываются по формуле

$$\begin{pmatrix} x_{\text{BB}}[n,t_1] \\ y_{\text{BB}}[n,t_1] \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1}\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1-\cos\varphi \end{pmatrix} + \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1}\begin{pmatrix} \sin(t_1{\cdot}u_1) - \sin(t_1{\cdot}u_1 + T_{u_2}) \\ \cos(t_1{\cdot}u_1 + T_{u_2}) - \cos(t_1{\cdot}u_1) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{u_1}\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1-\cos\varphi \end{pmatrix} - 2\frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1}\sin\Bigl(\frac{T_{u_2}}{2}\Bigr)\begin{pmatrix} \cos\Bigl(t_1{\cdot}u_1 + \dfrac{T_{u_2}}{2}\Bigr) \\ \sin\Bigl(t_1{\cdot}u_1 + \dfrac{T_{u_2}}{2}\Bigr) \end{pmatrix}.$$

Возможные значения параметра t_1 определяются пересечением прямой (4.19) с квадратом $(0, T_{u_1}] \times (0, T_{u_1}]$ на плоскости t_1, t_2. Получаемая кривая также представляет собой дугу окружности. Центр окружности расположен в точке $\dfrac{1}{u_1}\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1-\cos\varphi \end{pmatrix}$, а радиус равен

$$2\,\frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1}\,\sin\Bigl(\frac{T_{u_2}}{2}\Bigr).$$

5. Граница φ-сечений в случае, когда φ кратно 2π

В случае $\varphi < 2\pi$ (см. разд. 3) каждое φ-сечение является выпуклым и его граница складывается из двух дуг окружностей. При стремящемся снизу к 2π значении φ центры окружностей переходят в начало координат, а их радиусы стремятся к одному и тому же числу

$$2\Bigl(\frac{1-u_1}{u_1}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{2\pi - t_f{\cdot}u_1}{2\,(1-u_1)}\Bigr).$$

Таким образом, если $\varphi = 2\pi$, то φ-сечение есть круг указанного радиуса. Данное свойство обобщается на случай, когда φ кратно 2π.

Если φ кратно 2π (т. е. $\varphi = 2\pi k$ при некотором натуральном k), число петель n для управлений типа SS определяется однозначно в силу соотношений (4.16), (4.17) и равно $k-1$. Аналогично для управлений типа BB получаем $n = k-1$. Граница φ-сечения определяется дугами $\mathrm{SS}_{(n)}$ и $\mathrm{BB}_{(n)}$. Предельные точки соответствуют управлениям типа SB и BS. Дуги $\mathrm{SS}_{(n)}$ и $\mathrm{BB}_{(n)}$ лежат на одной и той же окружности с центром в начале координат и радиусом

$$2\Bigl(\frac{k(1-u_1)}{u_1}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\varphi - t_f{\cdot}u_1}{2k(1-u_1)}\Bigr). \tag{5.1}$$

Дуги стыкуются на краях и имеют суммарный угол раствора, равный 2π.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть φ кратно 2π. Тогда φ-сечение множества достижимости $G(t_f)$ представляет собой круг на плоскости x, y с центром в начале координат и радиусом* (5.1).

6. Граница φ-сечений в случае, когда $\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π

Теорема 3. *Пусть $\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π. Тогда φ-сечение множества достижимости $G(t_f)$ является строго выпуклым множеством с гладкой границей на плоскости x, y. Возможные варианты дуг, составляющих границу, указаны на рис.* 5 *под номерами* 1–9.

Д о к а з а т е л ь с т в о. А. Опишем возможные варианты структуры φ-сечений. Воспользуемся установленными свойствами движений, удовлетворяющих ПМП. В подразд. 4.1 для случая $\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π было показано, что при любых фиксированных t_f и φ управления типа SB порождают невырожденную гладкую однопараметрическую дугу (4.10). Аналогичное свойство справедливо и для управлений типа BS.

Возьмем за основу дугу SB. Задаем ее при помощи однопараметрического набора точек $\{(t_1, t_2)\}$, определяемых пересечением прямой (4.5) с прямоугольником (4.9). Невырожденность пересечения (а, стало быть, и невырожденность дуги SB) определяется условием $0 < \varphi - 2\pi n < t_1^* + t_2^*{\cdot}u_1$. Будем различать девять возможных вариантов невырожденного пересечения:

$$
\begin{array}{llll}
1.\ \varphi - 2\pi n < t_1^*, & \varphi - 2\pi n < t_2^*{\cdot}u_1; & 2.\ \varphi - 2\pi n > t_1^*, & \varphi - 2\pi n > t_2^*{\cdot}u_1;\\
3.\ \varphi - 2\pi n < t_1^*, & \varphi - 2\pi n > t_2^*{\cdot}u_1; & 4.\ \varphi - 2\pi n > t_1^*, & \varphi - 2\pi n < t_2^*{\cdot}u_1;\\
5.\ \varphi - 2\pi n = t_1^*, & \varphi - 2\pi n > t_2^*{\cdot}u_1; & 6.\ \varphi - 2\pi n = t_1^*, & \varphi - 2\pi n < t_2^*{\cdot}u_1;\\
7.\ \varphi - 2\pi n < t_1^*, & \varphi - 2\pi n = t_2^*{\cdot}u_1; & 8.\ \varphi - 2\pi n > t_1^*, & \varphi - 2\pi n = t_2^*{\cdot}u_1;\\
9.\ \varphi - 2\pi n = t_1^*, & \varphi - 2\pi n = t_2^*{\cdot}u_1. & &
\end{array}
\tag{6.1}
$$

Число n в записи вариантов рассчитывается по формуле (4.4) (выписанной для дуг SB).

1) Рассмотрим вариант 1. Предположим, что существуют значения t_f и φ ($\varphi > 2\pi$, φ не кратно 2π), соответствующие этому варианту. Дуга SB задается диапазоном значений параметра t_1 от 0 до $\varphi - 2\pi n$ (рис. 2б). Предельными точками дуги при $t_1 \to 0$ и $t_1 \to \varphi - 2\pi n$ являются точки, порожденные управлениями типа BB и SS соответственно. Данные точки являются крайними для невырожденных дуг $\mathrm{BB}_{(n)}$ и $\mathrm{SS}_{(n)}$ (вариант 1 на рис. 5):

$$
\begin{pmatrix} x_{\mathrm{SB}}[0] \\ y_{\mathrm{SB}}[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{BB}}[n,\, T_{u_1}] \\ y_{\mathrm{BB}}[n,\, T_{u_1}] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{\mathrm{SB}}[\varphi - 2\pi n] \\ y_{\mathrm{SB}}[\varphi - 2\pi n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{SS}}[n,\, \varphi - 2\pi n] \\ y_{\mathrm{SS}}[n,\, \varphi - 2\pi n] \end{pmatrix}.
$$

Здесь значение T_{u_1} для дуги $\mathrm{BB}_{(n)}$ рассчитывается по формуле (4.18).

Дуга BS также существует и обладает аналогичными свойствами.

Заключаем, что полученная совокупность дуг SB, $\mathrm{SS}_{(n)}$, BS, $\mathrm{BB}_{(n)}$ образует замкнутую кривую. При обходе ее против часовой стрелки параметр t_1 возрастает на каждом из рассмотренных участков. Стыковка дуг в сопредельных точках является гладкой. Возьмем для примера пару дуг SB и $\mathrm{SS}_{(n)}$. В сопредельной для них точке на плоскости x, y имеем

$$
\begin{pmatrix} x_{\mathrm{SS}}[n, 0] \\ y_{\mathrm{SS}}[n, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{pmatrix} + \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1} \begin{pmatrix} -\sin T_{u_2} \\ 1 - \cos T_{u_2} \end{pmatrix}.
$$

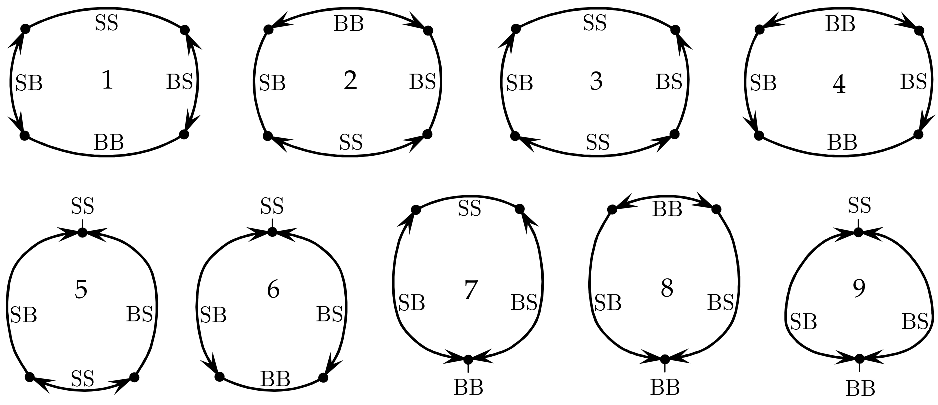


Рис. 5. Варианты φ-сечений множества достижимости в случае, когда $\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π

Здесь значение T_{u_2} для дуги $\mathrm{SS}_{(n)}$ рассчитывается по формуле (4.18). С использованием (4.15), (4.10) получаем одинаковое значение касательного вектора в такой точке, равное

$$\frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1}\begin{pmatrix}\cos T_{u_2}-1\\ -\sin T_{u_2}\end{pmatrix}.$$

Покажем, что построенная кривая на плоскости x, y является границей φ-сечения множества $G(t_f)$. Для этого убедимся, что кроме рассмотренных, нет других движений, удовлетворяющих ПМП. Как нами установлено в подразд. 4.1, все управления типа SB (BS) были использованы при построении дуг SB (BS). Остается рассмотреть лишь дуги $\mathrm{SS}_{(n)}$ и $\mathrm{BB}_{(n)}$, для которых имеет место неоднозначность с выбором числа n (для исключения наличия двух дуг одного типа с разными n). В подразд. 4.2 было показано, что для любой невырожденной дуги SS или BB предельные точки совпадают с предельными точками дуг SB и BS. Поэтому заключаем, что общее количество дуг типа SS и BB не может быть больше двух. Стало быть, граница φ-сечения множества $G(t_f)$ содержится в построенной кривой.

Обход участков построенной кривой с ростом параметра t_1 сопровождается (как было отмечено ранее) монотонным увеличением угла направления касательного вектора с поворотом против часовой стрелки. Гладкость стыковки дуг позволяет рассчитать суммарный угол поворота через сумму интегралов от угловой скорости поворота касательного вектора на составляющих дугах SB, $\mathrm{SS}_{(n)}$, BS, $\mathrm{BB}_{(n)}$.

Для касательного вектора дуги SB (приведен в подразд. 4.1) угол поворота равен

$$(\varphi-2\pi n)\Big(1+\frac{1}{2n}\Big).$$

Такой же угол поворота реализуется для дуги BS. С использованием материала подразд. 4.2 могут быть получены углы поворота касательного вектора на дугах $\mathrm{SS}_{(n)}$ и $\mathrm{BB}_{(n)}$. Расчет осуществляется по формуле $\dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{\varphi-t_f\cdot u_1}{1-u_1}-(\varphi-2\pi n)\Big)-(\varphi-2\pi n)$ для дуги $\mathrm{SS}_{(n)}$ и по формуле $\Big(2\pi-\dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{\varphi-t_f\cdot u_1}{1-u_1}\Big)\Big)-(\varphi-2\pi n)$ для дуги $\mathrm{BB}_{(n)}$. Складывая указанные углы, убеждаемся, что суммарный угол поворота касательного вектора при обходе границы сечения равен 2π.

Отсюда делаем вывод, что построенная кривая не имеет самопересечений и однозначно задает границу φ-сечения, которое является строго выпуклым множеством.

Таким образом, установлена гладкость границы и строгая выпуклость φ-сечений для варианта 1.

2) Другие варианты 2–9 в предположении о существовании t_f и φ, их реализующих, рассматриваются аналогично. Сохраняются свойства строгой выпуклости и однозначности управления, ведущего в точку на границе φ-сечения. Исходя из непрерывности касательной к дуге SB (BS) при изменении параметра t_1 (см. (4.11)), получаем гладкость стыковки дуг SB и BS при вырождении дуг SS и/или BB (рис. 5). В целом имеем гладкость границы получаемых φ-сечений. Дуга $\mathrm{SS}_{(n)}$ вырождается в точку при условии $t_1^*=\varphi-2\pi n$, а дуга $\mathrm{BB}_{(n)}$ вырождается в точку при условии $t_2^*\cdot u_1=\varphi-2\pi n$.

Варианты 2–4 имеют границу φ-сечения, складывающуюся из четырех невырожденных дуг, отличающихся от варианта 1 составом и последовательностью дуг. Для вариантов 5–8 одна из дуг (типа SS или BB) вырождается в точку. Для варианта 9 вырождаются две дуги типа SS и BB.

Формально варианты 1–9 списка (6.1) логически полностью охватывают случай, когда $\varphi>2\pi$ и φ не кратно 2π. Однако в силу сложности записи вариантов (6.1) неочевидным является вопрос их реализуемости при каких-либо значениях t_f и φ. Число вариантов в списке (6.1) и на рис. 5 совпадает. Каждому варианту списка (6.1) (при условии его реализуемости) поставлен в соответствие вариант на рис. 5, при этом задействованы все варианты рис. 5.

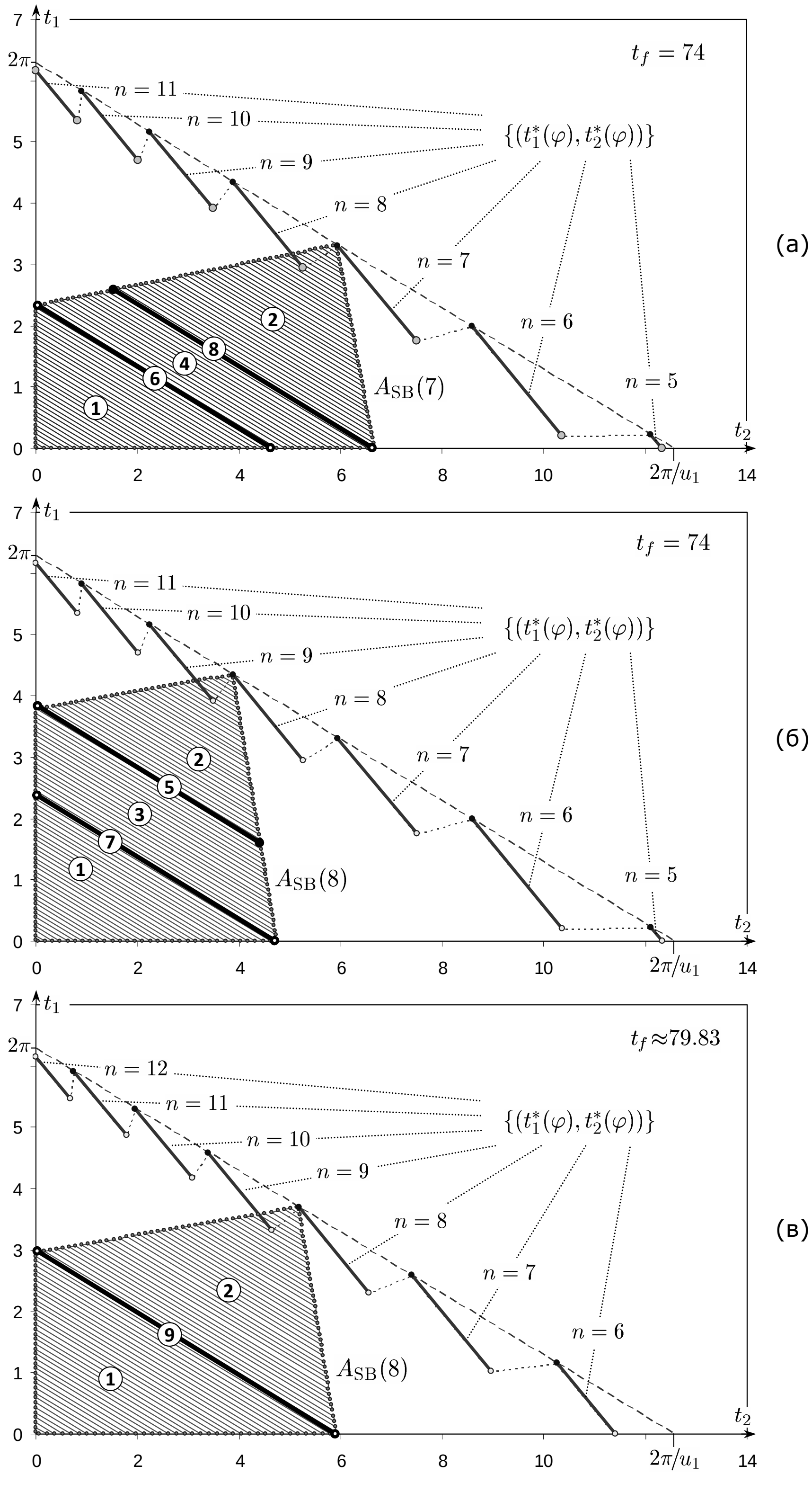


Рис. 6. Четырехугольник $A_{\mathrm{SB}}(n)$ — совокупность параметров t_1, t_2 для управлений, ведущих на дугу SB в момент t_f

Очевидно, что если для некоторых t_f и φ реализуется какой-то вариант на рис. 5, то он является единственным. В итоге заключаем, что из реализуемости вариантов 1 – 9 на рис. 5 вытекает реализуемость соответствующих вариантов списка (6.1).

Б. Покажем, что для любого из вариантов 1 – 9 на рис. 5 можно указать значения $t_f > 2\pi$,

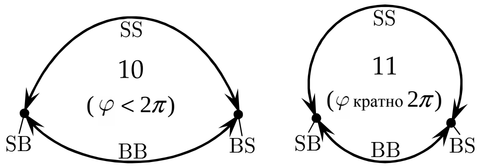


Рис. 7. Варианты φ-сечений множества достижимости в случаях, когда $\varphi < 2\pi$ и φ кратно 2π

$\varphi > 2\pi$ (не кратное 2π) и n (рассчитываемое по формуле (4.4)), для которых реализуется такой вариант φ-сечения.

На рис. 6 приведены типичные графики значений $t_1^*(\varphi)$ и $t_2^*(\varphi)$, заданных параметрически по φ посредством соотношений (4.8) для допустимых значений $\varphi \in [t_f{\cdot}u_1, t_f]$. Получаемая совокупность пар $\{(t_1^*(\varphi), t_2^*(\varphi))\}$ представляет собой набор отрезков на плоскости t_1, t_2. Каждый отрезок соответствует одному из допустимых значений n, определяемому по формуле (4.4). Отрезки примыкают к прямой $t_1 + t_2{\cdot}u_1 = 2\pi$ (отмечена пунктирной линией), за исключением последнего отрезка, отвечающего наибольшему значению n.

Зафиксируем значение n и выделим отрезок точек $\{(t_1^*(\varphi), t_2^*(\varphi))\}$, ему соответствующий. С произвольной точкой на нем связан прямоугольник (4.9), показанный на рис. 2. Пересечение прямоугольника с прямой (4.5) дает отрезок (точку для случая, когда φ кратно 2π, см. рис. 2а). Меняя точку $(t_1^*(\varphi), t_2^*(\varphi))$ при данном значении n, получаем совокупность отрезков, параллельных прямой $t_1 + t_2{\cdot}u_1 = 2\pi$. Эта совокупность дает заштрихованный четырехугольник $A_{\mathrm{SB}}(n)$ на плоскости t_1, t_2. Цифрами показаны варианты пересечения прямоугольника (4.9) с прямой (4.5), соответствующие девяти вариантам на рис. 5.

Построения на рис. 6а,б сделаны для одного и того же момента времени $t_f = 74$. Отличие между рисунками состоит в том, что на рис. 6а четырехугольник $A_{\mathrm{SB}}(n)$ построен для $n = 7$, а на рис. 6б — для $n = 8$. На рис. 6в построения сделаны для $t_f \approx 79.83$, а четырехугольник $A_{\mathrm{SB}}(n)$ отвечает $n = 8$. Видно, что в каждом из трех четырехугольников $A_{\mathrm{SB}}(n)$ есть зоны, соответствующие φ-сечениям вариантов 1 и 2. Случай с набором зон для вариантов $1, 9, 2$ приведен на рис. 6в. Он определяется условием $t_f = 2\pi\Big(\dfrac{1+u_1}{u_1}\Big)\Big(\dfrac{n^2+n}{2n+1}\Big)$. При замене знака “$=$” в этой формуле на “$<$” получим набор зон для вариантов $1, 6, 4, 8, 2$ (см. пример на рис. 6а). Аналогично при замене знака “$=$” на “$>$” получим набор зон для вариантов $1, 7, 3, 5, 2$, как показано на рис. 6б.

Таким образом, каждый вариант на рис. 5 (стало быть, и каждый вариант списка (6.1)) реализуется при некотором выборе значений t_f и φ. $\square$

З а м е ч а н и е 1. На рис. 7 показан вид φ-сечений для случая, когда $\varphi < 2\pi$ (вариант 10) и для случая, когда φ кратно 2π (вариант 11). В этих случаях вырожденными являются дуги SB и BS. Реализуемость вариантов 10, 11 была установлена в разд. 3 и 5.

З а м е ч а н и е 2. В задаче со строго односторонним поворотом ПМП является не только необходимым, но и достаточным условием перевода системы (1.1) на границу множества достижимости $G(t_f)$ в классе кусочно-постоянных управлений. Для каждой точки на границе соответствующее управление единственно.

Заключение

Исследовано множество достижимости *в момент* для машины Дубинса со строго одностороним поворотом и одноточечным начальным фазовым состоянием. Строго односторонний поворот означает, что промежуток допустимых угловых скоростей представляет собой отрезок $[u_1, u_2]$ с $u_1 > 0$. Множество достижимости рассматривается в трехмерном фазовом пространстве x, y, φ, где x, y — координаты геометрического положения, а φ — угол направления вектора скорости, принимающий значения в полуинтервале $[\,0, \infty)$.

В целом трехмерное множество достижимости выпуклым не является. Доказано, однако, что его двумерные φ-сечения суть строго выпуклые множества на плоскости x, y. Описана структура границы φ-сечений.

В исследуемой задаче принцип максимума Понтрягина является достаточным условием перевода на границу множества достижимости. Более того, в каждую точку на границе ведет единственное кусочно-постоянное управление, удовлетворяющее принципу максимума.

Авторы благодарят Л.В. Камневу и рецензента за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dubins L.E.** On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // American J. Math. 1957. Vol. 79, no. 3. P. 497–516. doi: 10.2307/2372560 .
2. **Laumond J.-P. (ed.)** Robot motion planning and control. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 354 p. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 229). ISBN: 978-3-540-76219-5 .
3. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
4. **Fedotov A., Patsko V., Turova V.** Reachable sets for simple models of car motion // Recent Advances in Mobile Robotics / ed. A. V. Topalov. Rijeka, Croatia: InTech, 2011. P. 147–172. doi: 10.5772/26278 .
5. **Patsko V.S., Fedotov A.A.** Investigation of reachable set at instant for the Dubins' car // Proc. 58th Israel Annual Conf. Aerospace Sci. (Tel-Aviv & Haifa, 2018). Haifa, 2018. P. 1655–1669. ISBN: 9781510851399.
6. **Choi H.** Time-optimal paths for a Dubins car and Dubins airplane with a unidirectional turning constraint: Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy / University of Michigan. Michigan, 2014. 134 p.
7. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
8. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
9. **Patsko V.S., Fedotov A.A.** Attainability set at instant for one-side turning Dubins car // Proc. 17th IFAC Workshop Control Appl. Optim. Yekaterinburg, 2018. P. 201–206. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.381 .

Поступила 8.05.2019
После доработки 22.07.2019
Принята к публикации 5.08.2019

Пацко Валерий Семенович
канд. физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: patsko@imm.uran.ru

Федотов Андрей Анатольевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: andreyfedotov@mail.ru

REFERENCES

1. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American J. Math.*, 1957, vol. 79, no. 3, pp. 497–516. doi: 10.2307/2372560 .
2. Laumond J.-P. (ed.) *Robot Motion Planning and Control.* Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 229. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, 354 p. ISBN: 978-3-540-76219-5 .

3. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
4. Fedotov A., Patsko V., Turova V. Reachable sets for simple models of car motion. In: A.V. Topalov (ed.) *Recent Advances in Mobile Robotics*, Rijeka, Croatia: InTech, 2011, pp 147–172. doi: 10.5772/26278 .
5. Patsko V.S., Fedotov A.A. Investigation of reachable set at instant for the Dubins' car. *Proc. 58th Israel Annual Conf. Aerospace Sci., Tel-Aviv & Haifa*, Haifa, 2018, pp. 1655–1669. ISBN: 9781510851399.
6. Choi H. *Time-optimal paths for a Dubins car and Dubins airplane with a unidirectional turning constraint*, Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy, University of Michigan, Michigan, 2014, 134 p.
7. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes.* N Y; London: John Wiley & Sons, 1962, 360 p. ISBN: 2-88124-077-1 . Original Russian text (2nd ed.) published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Nauka Publ., 1969, 384 p.
8. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* N Y; London; Sydney: John Wiley & Sons, 1967, 576 p. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya.* Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
9. Patsko V.S., Fedotov A.A. Attainability set at instant for one-side turning Dubins car. *Proc. 17th IFAC Workshop Control Appl. Optim.*, Yekaterinburg, 2018. P. 201–206. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.381 .

Received May 8, 2019
Revised July 22, 2019
Accepted August 5, 2019

Valerii Semenovich Patsko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: patsko@imm.uran.ru .

Andrei Anatol'evich Fedotov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: andreyfedotov@mail.ru .

Cite this article as: V. S. Patsko, A. A. Fedotov. The structure of the reachable set for the Dubins car with a strictly one-sided turn, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 171–187 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА ЗАДАННОГО ЧИСЛА УБЕГАЮЩИХ В ЗАДАЧЕ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ПРОСТОЙ МАТРИЦЕЙ[1]

Н. Н. Петров, А. Я. Нарманов

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих с равными возможностями всех участников, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)}z_{ij} = az_{ij} + u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V,$$

где $D^{(\alpha)}f$ — производная по Капуто порядка α функции f. Множество допустимых управлений V — строго выпуклый компакт, a — вещественное число. Целью группы преследователей является поимка не менее q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем r различных преследователей, при этом моменты поимки могут не совпадать. Терминальные множества — начало координат. В предположении, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего, в терминах начальных позиций получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения с одним убегающим за некоторое гарантированное время. Для доказательства основного результата используется теорема Холла о системе различных представителей.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, многократная поимка, преследователь, убегающий, дробная производная.

N. N. Petrov, A. Ya. Narmanov. Multiple capture of a given number of evaders in a problem with fractional derivatives and a simple matrix.

A problem of pursuing a group of evaders by a group of pursuers with equal capabilities of all the participants is considered in a finite-dimensional Euclidean space. The system is described by the equation

$$D^{(\alpha)}z_{ij} = az_{ij} + u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V,$$

where $D^{(\alpha)}f$ is the Caputo fractional derivative of order α of the function f, the set of admissible controls V is strictly convex and compact, and a is a real number. The aim of the group of pursuers is to capture at least q evaders; each evader must be captured by at least r different pursuers, and the capture moments may be different. The terminal sets are the origin. Assuming that the evaders use program strategies and each pursuer captures at most one evader, we obtain sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem in terms of the initial positions. Using the method of resolving functions as a basic research tool, we derive sufficient conditions for the solvability of the approach problem with one evader in some guaranteed time. Hall's theorem on a system of distinct representatives is used in the proof of the main theorem.

Keywords: differential game, group pursuit, multiple capture, pursuer, evader, fractional derivative.

MSC: 49N79, 49N70, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-188-199

Введение

Важное направление развития современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием нескольких объектов [1–4], причем кроме углубления классических методов решения, ведется активный

[1]Работа первого автора поддержана РФФИ (проект 18-51-41005), второго автора — грантом MRU-10/17.

поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работах [5; 6] рассматривались задачи преследования двух лиц, описываемые уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки. В недавней статье М. И. Гомоюнова "Экстремальный сдвиг на сопутствующие точки в позиционной дифференциальной игре с дробными производными" (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 11–34) было доказано существование цены игры в нелинейной дифференциальной игре с дробными производными.

Рассматривается линейная задача преследования группой преследователей группы убегающих при условии, что все участники обладают равными возможностями. Задача простого преследования группой преследователей одного убегающего рассматривалась Б. Н. Пшеничным [7], который получил необходимые и достаточные условия поимки. Многократная поимка убегающего в задаче простого группового преследования исследовалась в работе Н. Л. Григоренко [8]. Задача о поимке заданного числа убегающих в задаче простого преследования при условиях, что множество допустимых управлений — шар единичного радиуса с центром в нуле, терминальные множества — начала координат, убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего, представлена в [9], где были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования. Общий случай задачи о поимке заданного числа убегающих в случае простого преследования рассматривался в [10]. Задача о многократной поимке убегающего в примере Л. С. Понтрягина представлена в работах [11–13]. Многократная поимка в линейных дифференциальных играх изучена в [14]. Задача о многократной поимке убегающего в дифференциальной игре с дробными производными исследовалась в [15] (здесь также см. более подробный список литературы по представленным задачам). Достаточные условия поимки заданного числа убегающих в стационарном примере Л. С. Понтрягина и линейных рекуррентных дифференциальных играх получены в [16; 17].

В данной работе рассматриваемые ранее отдельно задачи о многократной поимке и поимке заданного числа убегающих объединены в одну задачу. Цель группы преследователей — поимка не менее q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей. В предположении, что убегающие используют программные стратегии, а каждый из преследователей ловит не более одного убегающего, получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Отметим, что в случае простого движения задача в такой постановке изучена в статье [18].

1. Постановка задачи

Определение 1 [19]. Пусть p — натуральное число, $\alpha \in (p-1,p)$, $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^k$ — функция такая, что $f^{(p)}$ — абсолютно непрерывна на $[0,\infty)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$\left(D^{(\alpha)}f\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(p-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{f^{(p)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-p}}\,ds,\quad \text{где}\quad \Gamma(\beta)=\int\limits_0^\infty e^{-s}s^{\beta-1}\,ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k\geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра $G(n,m)$ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1,\ldots,P_n$ и m убегающих $E_1,\ldots,E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)}x_i=ax_i+u_i,\quad x_i(0)=x_i^0,\ldots,x_i^{(p-1)}(0)=x_i^{p-1},\quad u_i\in V. \tag{1.1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$D^{(\alpha)}y_j=ay_j+v_j,\quad y_j(0)=y_j^0,\ldots,y_j^{(p-1)}(0)=y_j^{p-1},\quad v\in V. \tag{1.2}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, V — строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^1$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1 \ldots, m\}$. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$D^{(\alpha)} z_{ij} = a z_{ij} + u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V, \tag{1.3}$$

с начальными условиями

$$z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \; \ldots, z_{ij}^{(p-1)}(0) = z_{ij}^{p-1} = x_i^{p-1} - y_j^{p-1}, \tag{1.4}$$

Здесь решение системы (1.3), (1.4) понимается стандартно (см., например, [20, п. 3]).

Цель группы преследователей — осуществить поимку не менее чем q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей ($r \geqslant 1, 1 \leqslant q \leqslant m$) при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0, \infty)$, а затем преследователи на основе информации о выборе убегающих выбирают свои управления; кроме того, каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Считаем, что $n \geqslant rq, m \geqslant q$.

Обозначим $z^0 = \{z_{ij}^0, \ldots, z_{ij}^{p-1}, i \in I, j \in J\}$ — вектор начальных позиций. Полагаем, что $z_{ij}^{p-1} \neq 0$ для всех i, j.

Измеримая функция $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \geqslant 0$.

О п р е д е л е н и е 2. В игре $G(n, m)$ *происходит r-кратная поимка* (*при $r = 1$ поимка*) убегающего E_β, если существует момент $T > 0$, при котором для любого допустимого управления $v_\beta(t), t \in [0, \infty)$, убегающего E_β найдутся допустимые управления $u_i(t)$, $i \in I$, преследователей P_i, $i \in I$, моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_r \in [0, T]$, попарно различные натуральные числа $i_1, \ldots, i_r \in I$, такие что $z_{i_s \beta}(\tau_s) = 0$ для всех $s = 1, \ldots, r$, где $z_{i_s \beta}(t)$ — решения системы (1.3), (1.4).

О п р е д е л е н и е 3. В игре $G(n, m)$ *происходит r-кратная поимка* (*при $r = 1$ поимка*) *не менее q убегающих,* если существует $T > 0$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t), t \in [0, \infty), j \in J$, убегающих E_j, $j \in J$, найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in [0, \infty), j \in J)$, $i \in I$, преследователей P_i, $i \in I$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset J, \;\; |M| = q, \;\; \{N_l, l \in M\}, \;\; N_l \subset I, \;\; |N_l| = r \text{ для всех } l \in M, \;\; N_l \cap N_s = \varnothing \text{ для всех } l \neq s,$$

такие что группа преследователей $\{P_l, l \in N_\beta\}$ не позднее момента T осуществляет r-кратную поимку убегающего E_β, причем если преследователь P_l ловит убегающего E_β, то остальные убегающие считаются им не пойманными.

Введем следующие обозначения. Пусть K — некоторое конечное подмножество множества натуральных чисел.

$$\Omega_K(s) = \{(i_1, \ldots, i_s) \mid i_1, \ldots, i_s \in K \text{ и попарно различны}\}, \quad D_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{R}^k \mid \|z - a\| < \varepsilon\},$$

$$\lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda h \in V - v\}, \quad \xi_{ij}(t) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{z_{ij}^l}{\Gamma(l+1)} t^l, \quad \xi_{ij}^1(t) = t^{1-p} \xi_{ij}(t).$$

2. Многократная поимка одного убегающего при $a = 0$

В данном разделе считаем, что $m = 1$. Поэтому второй индекс опускаем.

Лемма 1. *Пусть V — строго выпуклый компакт, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^k, b_i \neq 0$, для всех $i \in I$ и*

$$\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(b_i, v) > 0.$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^k$, таких что $z_i \in D_\varepsilon(b_i)$, $i \in I$, справедливо неравенство $\min\limits_{v \in V} \max\limits_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min\limits_{i \in \Lambda} \lambda(z_i, v) > 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1.3.13 [2] следует, что функция $\lambda(b,v)$ непрерывна на множестве $B\times V$, где B — произвольный компакт $\mathbb{R}^k$, не содержащий нуля. Поэтому непрерывными будут функции

$$g_\Lambda(z_1,\ldots,z_n,v)=\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda(z_\alpha,v),\;\; g(z_1,\ldots,z_n,v)=\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}g_\Lambda(z_1,\ldots,z_n,v),$$
$$f(z_1,\ldots,z_n)=\min_{v\in V}g(z_1,\ldots,z_n,v).$$

Из непрерывности функции f следует справедливость утверждения леммы. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $\{z_l^{p-1}\colon l\in I\}$ таковы, что

$$\delta_0=\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda}\lambda\big(z_l^{p-1}/\Gamma(p),v\big)>0. \tag{2.1}$$

Тогда существует $T_0>0$ *такой, что для всех* $t>T_0$ *справедливо неравенство*

$$\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda}\lambda\big(\xi_l^1(t),v\big)\geqslant 0.5\delta_0. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость данного неравенства следует из леммы 1 и условия $\lim\limits_{t\to+\infty}\xi_i^1(t)=z_i^{p-1}/\Gamma(p)$.

Лемма 2. *Пусть* $a=0$, $\delta_0>0$, *где* δ_0 *введено в* (2.1). *Тогда существует* $T_1>0$ *такой, что для любой измеримой функции* $v(\cdot)$, $v(t)\in V$, *найдется множество* $\Lambda\in\Omega_I(r)$ *такое, что для всех* $l\in\Lambda$ *справедливо неравенство*

$$T_1^{1-p}\int_0^{T_1}\frac{(T_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_l^1(T_1),v(s))ds\geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из следствия вытекает, что существует $T_0>0$ такой, что для всех $t>T_0$ справедливо неравенство (2.2). Пусть $T>T_0$. Рассмотрим функции ($t\in[0,T]$)

$$h_l(t,T,v(\cdot))=t^{1-p}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_l^1(T),v(s))\,ds.$$

Тогда

$$\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda}h_l(t,T,v(\cdot))\geqslant\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}t^{1-p}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\min_{l\in\Lambda}\lambda(\xi_l^1(T),v(s))ds. \tag{2.3}$$

Так как для любых неотрицательных чисел $\{a_\Lambda\}_{\Lambda\in\Omega_I(r)}$ справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}a_\Lambda\geqslant\frac{1}{C_n^r}\sum_{\Lambda\in\Omega_I(r)}a_\Lambda,$$

то из (2.3) следует неравенство $\big(t\in[0,T]\big)$

$$\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda}h_l(t,T,v(\cdot))\geqslant\frac{t^{1-p}}{C_n^r}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda}\lambda(\xi_l^1(T),v(s))\,ds$$
$$\geqslant\frac{t^{1-p}}{C_n^r}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda}\lambda(\xi_l^1(T),v(s))\,ds\geqslant\frac{t^{1-p}\delta_0}{2C_n^r\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\,ds=\frac{t^{\alpha-p+1}\delta_0}{2\alpha C_n^r\Gamma(\alpha)}.$$

Следовательно,

$$\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda} h_l(T,T,v(\cdot)) \geqslant \frac{T^{\alpha-p+1}\delta_0}{2\alpha C_n^r\Gamma(\alpha)}.$$

Так как $\alpha-p+1>0$, то получаем справедливость утверждения леммы. Лемма доказана.

Определим число

$$\hat{T}=\inf\Big\{t \;\Big|\; \inf_{v(\cdot)}\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda} t^{1-p}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_l^1(t),v(s))\,ds \geqslant 1\Big\}.$$

В силу леммы 2 число $\hat{T}<\infty$.

Теорема 1. *Пусть $a=0$, $\delta_0>0$, где δ_0 определено в* (2.1)*. Тогда в игре $G(n,1)$ происходит r-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(s), s\in[0,\hat{T}]$, — произвольное управление убегающего. Рассмотрим функцию

$$H(t)=1-\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda}\hat{T}^{1-p}\int\limits_0^t \frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_l^1(\hat{T}),v(s))\,ds.$$

Обозначим через $T_0>0$ первый корень данной функции. Отметим, что T_0 существует в силу леммы 2 и определения $\hat{T}$. Кроме того, существует множество $\Lambda_0\in\Omega_I(r)$ такое, что для всех $j\in\Lambda_0$

$$1-\hat{T}^{1-p}\int\limits_0^{T_0}\frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_j^1(\hat{T}),v(s))\,ds\leqslant 0.$$

Поэтому существуют моменты $\tau_j\leqslant T_0, j\in\Lambda_0$, для которых

$$1-\hat{T}^{1-p}\int\limits_0^{\tau_j}\frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_j^1(\hat{T}),v(s))\,ds=0. \tag{2.4}$$

Для $j\notin\Lambda_0$ обозначим через τ_j — моменты времени, для которых выполнено условие (2.4), если такие моменты существуют. Задаем управления преследователей P_i, $i\in I$, полагая

$$u_i(s)=\begin{cases} v(s)-\lambda(\xi_i^1(\hat{T}),v(s))\xi_i^1(\hat{T}),\ \ s\in[0,\min\{\tau_i,\hat{T}\}],\\ v(s),\ \ s\in[\min\{\tau_i,\hat{T}\},\hat{T}].\end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши (1.3), (1.4) представимо в виде [20, формула (19)]

$$z_i(t)=\xi_i(t)+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(u_i(s)-v(s))\,ds.$$

Отсюда

$$\hat{T}^{1-p}z_i(\hat{T})=\xi_i^1(\hat{T})+\hat{T}^{1-p}\int\limits_0^{\hat{T}}\frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(u_i(s)-v(s))\,ds$$

$$=\xi_i^1(\hat{T})-\hat{T}^{1-p}\int\limits_0^{\hat{T}}\frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_i^1(\hat{T}),v(s))\xi_i^1(\hat{T})\,ds$$

$$= \xi_i^1(\hat{T})\Big(1 - \hat{T}^{1-p}\int\limits_0^{\tau_i} \frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_i^1(\hat{T}), v(s))\,ds\Big) = 0$$

для всех $i \in \Lambda_0$. Следовательно, $z_i(\hat{T}) = 0$ для всех $i \in \Lambda_0$. Теорема доказана.

Пусть далее $\mathrm{Int}A$, $\mathrm{co}A$ — внутренность и выпуклая оболочка множества A соответственно.

Лемма 3 [3, утверждение 1.3]. *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_I(n-r+1)} \mathrm{Intco}\{z_j^{p-1}, j \in \Lambda\}. \tag{2.5}$$

Тогда $\delta_0 > 0$ (см. (2.1)).

Теорема 2. *Пусть $a = 0$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и выполнено условие (2.5). Тогда в игре $G(n,1)$ происходит r-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость данной теоремы следует из леммы 3 и теоремы 1.

3. Многократная поимка убегающих при $a < 0$

Обозначим $E_\rho(z,\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{\Gamma(l\rho^{-1}+\mu)}$ — это обобщенная функция Миттаг — Лефлера [21, с. 117],

$$\delta_1 = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda(z_l^0, v). \tag{3.1}$$

Лемма 4. *Пусть $a < 0$, $\alpha \in (0,1)$, $\delta_1 > 0$, где δ_1 введено в (3.1). Тогда существует $T_1 > 0$ такой, что для любой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$ найдется множество $\Lambda \in \Omega_I(r)$ такое, что для всех $l \in \Lambda$ справедливо неравенство*

$$E_{1/\alpha}(aT_1^\alpha, 1) - \int\limits_0^{T_1} (T_1 - s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(T_1-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds \leqslant 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функции

$$h_l(t, v(\cdot)) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int\limits_0^{t} (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds.$$

Тогда

$$H(t, v(\cdot)) = \min_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \max_{l \in \Lambda} h_l(t, v(\cdot))$$

$$= E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{l \in \Lambda} \int\limits_0^{t} (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds.$$

Так как $\alpha \in (0,1)$, то из теоремы 4.1.1 [22, с. 101] следует, что $E_{1/\alpha}(z,\mu)$ не имеет отрицательных корней при $\mu \in [\alpha, +\infty)$. Кроме того, $E_{1/\alpha}(z,\mu) \geqslant 0$ для всех $z \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$. Значит

$E_{1/\alpha}(z,\mu) \geqslant 0$ для всех $z \in \mathbb{R}^1$, $\mu \in [\alpha, +\infty)$. Поэтому справедливы неравенства

$$\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \min_{l\in\Lambda} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds$$

$$\geqslant \max_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha) \min_{l\in\Lambda} \lambda(z_l^0, v(s))\,ds$$

$$\geqslant \frac{1}{C_n^r} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha) \sum_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \min_{l\in\Lambda} \lambda(z_l^0, v(s))\,ds$$

$$\geqslant \frac{1}{C_n^r} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha) \max_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \min_{l\in\Lambda} \lambda(z_l^0, v(s))\,ds$$

$$\geqslant \frac{\delta_1}{C_n^r} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha)\,ds.$$

В силу [21, гл. 3, формула (1.15)]

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha)\,ds = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1).$$

Поэтому

$$\min_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \max_{l\in\Lambda} h_l(t, v(\cdot)) \leqslant E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \frac{\delta_1}{C_n^r} t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1) = H_0(t).$$

Так как $a < 0$, то при $t \to +\infty$ справедливы следующие асимптотические оценки [22, формула (1.2.4)]:

$$E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) = -\frac{1}{at^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O\Big(\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big), \qquad E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1) = -\frac{1}{at^\alpha} + O\Big(\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big),$$

где под $O(g)$ при $t \to +\infty$ понимается конкретная функция G такая, что функция G/g является ограниченной на $(A, +\infty)$ при некотором $A > 0$. Следовательно,

$$H_0(t) = -\frac{1}{at^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + \frac{\delta_1}{aC_n^r} + O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big).$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to+\infty} H_0(t) = \delta_1/aC_n^r < 0$, то существует момент $T_1 > 0$ такой, что $H_0(T_1) < 0$. Поэтому $H(T_1, v(\cdot)) < 0$. Имеем $h_l(0, v(\cdot)) = 1$ для всех l, $\min\limits_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \max\limits_{l\in\Lambda} h_l(T_1, v(\cdot)) < 0$ для любой функции $v(\cdot)$. Лемма доказана.

Определим число

$$\hat{T} = \inf\big\{t > 0 \mid \inf_{v(\cdot)} \min_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \max_{l\in\Lambda} h_l(t, v(\cdot)) \leqslant 0\big\}.$$

В силу леммы 4 имеем $\hat{T} < +\infty$.

Теорема 3. *Пусть $a < 0$, $\alpha \in (0,1)$, $\delta_1 > 0$, где δ_1 определено в* (3.1). *Тогда в игре $G(n,1)$ происходит r-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего E. Рассмотрим функцию

$$H(t) = E_{1/\alpha}(a\hat{T}^{\alpha}, 1) - \max_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \min_{l\in\Lambda} \int\limits_0^t (\hat{T}-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(\hat{T}-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\, ds.$$

Обозначим через T_0 первый корень данной функции. Отметим, что T_0 существует в силу леммы 4 и определения $\hat{T}$. Кроме того, существует множество $\Lambda_0 \in \Omega_I(r)$ такое, что для всех $l \in \Lambda_0$

$$E_{1/\alpha}(a\hat{T}^{\alpha}, 1) - \int\limits_0^{T_0} (\hat{T}-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(\hat{T}-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\, ds \leqslant 0.$$

Поэтому существуют моменты $\tau_l \leqslant T_0$, $l \in \Lambda_0$, для которых

$$E_{1/\alpha}(a\hat{T}^{\alpha}, 1) - \int\limits_0^{\tau_l} (\hat{T}-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(\hat{T}-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\, ds = 0. \tag{3.2}$$

Для $l \notin \Lambda_0$ обозначим через τ_j моменты времени, для которых выполнено условие (3.2), если такие моменты существуют. Задаем управления преследователей P_i, $i \in I$, полагая

$$u_i(s) = \begin{cases} v(s) - \lambda(z_i^0, v(s))z_i^0, & s \in [0, \min\{\tau_i, \hat{T}\}], \\ v(s), & s \in (\min\{\tau_i, \hat{T}\}, \hat{T}]. \end{cases}$$

Решение задачи Коши (1.3), (1.4) представимо в виде [20, формула (19)]

$$z_i(t) = E_{1/\alpha}(at^{\alpha}, 1)z_i^0 - \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1}, \alpha)(u_i(s) - v(s))\, ds.$$

Отсюда, используя (3.2), получаем

$$z_i(\hat{T}) = E_{1/\alpha}(a\hat{T}^{\alpha}, 1)z_i^0 - \int\limits_0^{\hat{T}} (\hat{T}-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(\hat{T}-s)^{\alpha-1}, \alpha)(u_i(s) - v(s))\, ds$$

$$= z_i^0\Big(E_{1/\alpha}(a\hat{T}^{\alpha}, 1) - \int\limits_0^{\tau_i} (\hat{T}-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(\hat{T}-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_i^0, v(s))\Big)\, ds = 0$$

для всех $i \in \Lambda_0$. Теорема доказана.

Теорема 4 [15, теорема 1]. *Пусть $a < 0$, $\alpha \in (1, 2)$,*

$$\min\{\min_{v\in V} \max_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \min_{l\in\Lambda} \lambda(z_l^1, v),\ \min_{v\in V} \max_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \min_{l\in\Lambda} \lambda(-z_l^1, v)\} > 0.$$

Тогда в игре $G(n, 1)$ происходит r-кратная поимка.

4. Многократная поимка заданного числа убегающих

Предположение 1. *Для каждого $s \in \{0, \ldots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$ найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, такое что*

$$\delta_N(\beta) = \min_{v\in V} \max_{\Lambda\in\Omega_N(r)} \min_{l\in\Lambda} \lambda\Big(\frac{z_{l\beta}^{p-1}}{\Gamma(p)}, v\Big) > 0$$

для всех $\beta \in M$.

Теорема 5. *Пусть $a = 0$ и выполнено предположение* 1. *Тогда в игре $G(n, m)$ происходит r-кратная поимка не менее q убегающих.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие теоремы. Докажем, что любые $n - sr$ преследователей осуществляют r-кратную поимку не менее чем $q - s$ убегающих, где $s \in \{0, \dots, q-1\}$. При $s = 0$ получим утверждение теоремы. Доказывать будем методом математической индукции. Пусть $s = q - 1$, $N \subset I$, $|N| = n - (q-1)r$. В силу условия теоремы существует $\beta \in J$ такое, что $\delta_N(\beta) > 0$. Из теоремы 1 следует, что преследователи $P_l, l \in N$, осуществляют r-кратную поимку убегающего E_β.

Предположим, что утверждение доказано для всех $s \geqslant p + 1$. Докажем утверждение для $s = p$. Пусть $N \subset I$, $|N| = n - pr$. Тогда существует множество $M \subset J$, $|M| = q - p$, такое что $\delta_N(\beta) > 0$ для всех $\beta \in M$.

Пусть $v_j(t)$, $t \in [0, \infty)$, $j \in J$, — совокупность управлений убегающих E_j, $j \in J$. Для каждого $\beta \in M$ определим множества

$$J_\beta = \bigl\{l \in N \bigm| \text{преследователь } P_l \text{ ловит убегающего } E_\beta\bigr\}.$$

В силу теоремы 1 и условия данной теоремы для всех $\beta \in M$ справедливо неравенство $|J_\beta| \geqslant r$. Можно считать, что $M = \{1, \dots, q-p\}$. Возможны два случая.

1. $\Bigl|\bigcup\limits_{\beta=1}^{l} J_\beta\Bigr| \geqslant lr$ для всех $l = 1, \dots, q-p$. Тогда по теореме Холла [23, с. 65, теорема 5.1.1] для множеств $\{J_\beta, \beta \in M\}$ существует система различных представителей. Это означает, что существуют множества J'_β, $\beta \in M$, для которых

$$J'_\beta \subset J_\beta, \quad |J'_\beta| = r \text{ для всех } \beta \in M, \quad J'_{\beta_1} \cap J'_{\beta_2} = \varnothing \text{ для всех } \beta_1 \neq \beta_2.$$

Следовательно, каждая группа преследователей $P_l, l \in J'_\beta$, осуществляет r-кратную поимку убегающего E_β для всех $\beta \in M$. Поэтому группа преследователей P_l, $l \in N$, осуществляет r-кратную поимку не менее $q - p$ убегающих.

2. Существует $l \in \{1, \dots, q-p\}$, при котором $\Bigl|\bigcup\limits_{\beta=1}^{l}\Bigr| < lr$. Пусть l_0 — наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих данному неравенству. Отметим, что $l_0 > 1$ и $\Bigl|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1}\Bigr| \geqslant n_1 r$ для всех $n_1 \in \{1, \dots, l_0 - 1\}$. Поэтому для множеств J_β, $\beta = 1, \dots, l_0 - 1$, существует система J'_β различных представителей, такая что

$$J'_\beta \subset J_\beta, \quad |J'_\beta| = r \ \text{ для всех } \ \beta = 1, \dots, l-1, \quad J'_{\beta_1} \cap J'_{\beta_2} = \varnothing \ \text{ для всех } \ \beta_1 \neq \beta_2.$$

Следовательно, каждая группа преследователей J'_β осуществляет r-кратную поимку убегающего E_β. Поэтому преследователи $\bigcup\limits_{\beta=1}^{l_0-1} J'_\beta$ осуществляют r-кратную поимку $l_0 - 1$ убегающих. В дальнейшем можно считать, что $J'_\beta = J_\beta$ для всех $\beta = 1, \dots, l_0 - 1$.

Пусть $s_0 = p + l_0 - 1$. Тогда $s_0 > p$ и $s_0 \leqslant p + q - p - 1 = q - 1$. Рассмотрим множество $N_1 = N \setminus \bigcup\limits_{\beta=1}^{l_0-1} J'_\beta$. Имеем $|N_1| = n - pr - (l_0 - 1)r = n - s_0 r$. В силу условия теоремы по N_1 существует множество M_1, $M_1 \subset J$, $|M_1| = q - s_0$ и такое, что $\delta_{N_1}(\beta) > 0$ для всех $\beta \in M_1$. Отметим, что $\{1, \dots, l_0 - 1\} \cap M_1 = \varnothing$, ибо если β принадлежит данному пересечению, то существует номер $l \in N_1$, для которого P_l ловит убегающего E_β, где $\beta \in \{1, \dots, l_0 - 1\}$, что противоречит построению множества N_1. В силу индукционного предположения группа преследователей P_l, $l \in N_1$, осуществляет r-кратную поимку не менее чем $q - s_0$ убегающих. Следовательно, преследователи $P_l, l \in N$, осуществляют r-кратную поимку не менее $q - s_0 + l_0 - 1 = q - p$ убегающих. Что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Пусть* $a = 0$, V *— строго выпуклый компакт с гладкой границей и для каждого* $s \in \{0, \dots, q-1\}$ *выполнено следующее условие: для любого множества* $N \subset I, |N| = n - sr$, *найдется множество* $M \subset J$, $|M| = q - s$, *такое что*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(n-r+1)} \mathrm{Intco}\{z_{l\beta}^{p-1}, l \in \Lambda\} \text{ для всех } \beta \in M.$$

Тогда в игре $G(n, m)$ *происходит* r*-кратная поимка не менее* q *убегающих.*

Доказательство. Справедливость данной теоремы следует из леммы 3 и теоремы 5.

Теорема 7. *Пусть* $a < 0$, $\alpha \in (0, 1)$ *и выполнено предположение* 1. *Тогда в игре* $G(n, m)$ *происходит* r*-кратная поимка не менее* q *убегающих.*

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 5 с использованием теоремы 3.

Теорема 8. *Пусть* $a < 0$, $\alpha \in (1, 2)$ *и для каждого* $s \in \{0, \dots, q-1\}$ *выполнено следующее условие: для любого множества* $N \subset I$, $|N| = n - sr$ *найдется множество* $M \subset J$, $|M| = q - s$, *такое что*

$$\delta_N(\beta) = \min\{\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda(z_{l\beta}^1, v), \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda(-z_{l\beta}^1, v)\} > 0$$

для всех $\beta \in M$. *Тогда в игре* $G(n, m)$ *происходит* r*-кратная поимка не менее* q *убегающих.*

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 5 с использованием теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Чикрий А.А.** Конфликтно управлямые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
3. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
4. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
5. **Эйдельман С.Д., Чикрий А.А.** Динамические задачи сближения для уравнений дробного порядка// Укр. мат. журн. 2000. Т. 52. № 11. С. 1566–1583.
6. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Игровые задачи для линейных систем дробного порядка// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 262–278.
7. **Пшеничный Б.Н.** Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. **Григоренко Н.Л.** Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. вычислит. математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41–47.
9. **Петров Н.Н., Прокопенко В.А.** Об одной задаче преследования группы убегающих //Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 724–726.
10. **Сахаров Д.В.** О двух дифференциальных играх простого группового преследования // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 1. С. 50–59.
11. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 54–59.
12. **Петров Н.Н.** Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 747–754.
13. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 128–135.

14. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77, вып. 3. С. 433–440.
15. **Петров Н.Н.** Многократная поимка в одной задаче группового преследования с дробными производными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 156–164.
16. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** К задаче группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2016. Т. 132. С. 81–85.
17. **Петров Н.Н.** Об одной задаче преследования группы убегающих // Автоматика и телемеханика. 1996. №. 6. С. 48–54.
18. **Петров Н.Н., Нарманов А.Я.** Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования// Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, вып. 2. С. 193–198.
19. **Caputo M.** Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II // Geophys. R. Astr. Soc. 1967. No. 13. P. 529–539.
20. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка// Доповіді Національноі академіі наук Украіни. 2007. № 1. С. 50–55.
21. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
22. **Попов А.Ю., Седлецкий А.М.** Распределение корней функции Миттаг — Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
23. **Холл М.** Комбинаторика. М.: Мир. 1970. 424 с.

Поступила 6.05.2019
После доработки 19.06.2019
Принята к публикации 24.06.2019

Петров Николай Никандрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор
Институт математики, информационных технологий и физики,
Удмуртский государственный университет, г. Ижевск
e-mail: kma3@list.ru

Нарманов Абдигаппар Якубович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры геометрии
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, г. Ташкент
e-mail: narmanov@yandex.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes.* Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, 424 p. doi: 10.1007/978-94-017-1135-7 . Original Russian text published in Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyamye protsessy.* Kiev: Nauk. dumka, 1992, 384 p.
3. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* [Mathematical methods for control of several dynamic processes]. Moscow: Mosk. Gos. Univ. Publ., 1990, 197 p.
4. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob'ektov* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk; Udmurt State University Publ., 2009, 266 p. ISBN: 978-5-904524-17-3 .
5. Eidel'man S.D., Chikrii A.A. Dynamic game problems of approach for fractional-order equations. *Ukrainian Math. J.*, 2000, vol. 52, no. 11, pp. 1787–1806. doi: 10.1023/A:1010439422856 .
6. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 54–70. doi: 10.1134/S0081543810050056 .

7. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. *Kibernetika*, 1976, no 3, pp. 145–146 (in Russian).
8. Grigorenko N.L. Simple pursuit evasion game with a group of pursuers and one evsder. *Vestnik Moskov. Univ. Ser XV Vychisl. Matematika i Kibernetika,* 1983, no. 1, pp. 41–47 (in Russian).
9. Petrov N.N., Prokopenko V.A. On a problem of the pursuit of a group of evaders. *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 725–726 (in Russian).
10. Sakharov D.V. On two differential games of simple group pursuit. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki,* 2012, no. 1, pp. 50–59 (in Russian).
11. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 1, pp. 36–40. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.010 .
12. Petrov N.N. Multiple capture in Pontryagin's example with phase constraints. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 725–732. doi: 10.1016/S0021-8928(97)00095-6 .
13. Petrov N. N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example. *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 5, pp. 855–861. doi: 10.1134/S0005117916050088 .
14. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process. *J. Appl. Math. Mech.*, 2013, vol. 77, no. 3, pp. 314–320. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2013.09.007 .
15. Petrov N.N. Multiple capture in a group pursuit problem with fractional derivatives *Proc. Steklov Institute Math.*, 2019, vol. 305, suppl. 1, pp. 150–157. doi: 10.1134/S0081543819040151 .
16. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of group pursuit in linear recurrent differential games. *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 732–736. doi: 10.1007/s10958-018-3779-z .
17. Petrov N. N. On a Group Pursuit Problem. *Autom. Remote Control,* 1996, vol. 56, no. 6, pp. 808–813.
18. Petrov N.N., Narmanov A.Ya. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of a simple pursuit. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2018, vol. 28, no. 2, pp. 193–198 (in Russian). doi: 10.20537/vm180205 .
19. Caputo M. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1967, vol. 13, no. 5, pp. 529–539. doi: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x .
20. Chikrii A.A., Matichin I.I. An analog of the Cauchy formula for linear systems of arbitrary fractional order. *Dokl. NAN Ukrainy*, 2007, no. 1, pp. 50–55.
21. Dzhrbashyan M.M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* [Integral transforms and representations of functions in the complex domain]. Moscow: Nauka Publ., 1966, 671 p.
22. Popov A. Yu., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions. *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 190, no. 2, pp. 209–409. doi: 10.1007/s10958-013-1255-3 .
23. Hall M. *Combinatorial theory.* N Y: John Wiley & Sons, 1967, 440 p. ISBN: 0-471-31518-4 . Translated to Russian under the title *Kombinatorika.* Moscow: Mir Publ., 1970, 424 p.

Received May 6, 2019
Revised June 19, 2019
Accepted June 24, 2019

Funding Agency: The research of the first and second authors was supported by the Russian Federation for Basic Research (project no. 18-51-41005) and by Grant MRU-10-17 (Uzbekistan), respectively.

Nikolai Nikandrovich Petrov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: kma3@list.ru .

Abdigappar Yakubovich Narmanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174 Uzbekistan, e-mail: narmanov@yandex.ru .

Cite this article as: N. N. Petrov, A. Ya. Narmanov. Multiple capture of a given number of evaders in a problem with fractional derivatives and a simple matrix, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 188–199 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 519.837

УСЛОВИЯ КОАЛИЦИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ДИНАМИЧЕСКИХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ИГРАХ[1]

А. Н. Реттиева

В работе исследованы проблемы устойчивости коалиций в многокритериальных динамических играх. Для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша), а для определения кооперативного — арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. Условия внутренней и внешней устойчивости распространены для динамических игр с векторными функциями выигрыша. Введено понятие коалиционной устойчивости, учитывающее стимулы перехода игроков из одной коалиции в другую. Для иллюстрации предложенных концепций исследована динамическая многокритериальная модель управления биоресурсами. Получены условия внутренней и внешней устойчивости коалиций, а также коалиционной устойчивости.

Ключевые слова: динамические игры, многокритериальные игры, арбитражная схема Нэша, внутренняя и внешняя устойчивость, коалиционная устойчивость.

A. N. Rettieva. Coalitional stability conditions in multicriteria dynamic games.

We study the stability of coalitions in multicriteria dynamic games. We use the Nash bargaining solution (Nash products) to construct a noncooperative equilibrium and the Nash bargaining solution for the entire planning horizon to find a cooperative solution. Conditions for the internal and external stability are extended to dynamic games with vector payoff functions. The notion of coalitional stability, which takes into account the stimuli for the player to transfer to other coalitions, is introduced. To illustrate the presented approach, we consider a multicriteria dynamic model of bioresource management. Conditions for the internal, external, and coalitional stability are presented.

Keywords: dynamic games, multicriteria games, Nash bargaining solution, internal and external stability, coalitional stability.

MSC: 91A25, 91A80, 90B50, 91B76

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-200-216

Введение

Математические модели, учитывающие наличие нескольких целевых функций у участников конфликтно-управляемых процессов, наиболее приближены к реальности. Игроки часто хотят достичь одновременно нескольких целей, которые могут быть не сравнимы. Такие ситуации встречаются в экономических и экологических моделях. Например, предприятия хотят увеличить прибыль и уменьшить затраты на производство, в соглашениях по охране окружающей среды участники хотят увеличить производство и уменьшить затраты на очистку и т. д. Многокритериальный подход позволяет определить оптимальное поведение в таких ситуациях.

Ллойд Шепли [1] в 1959 г. ввел понятие многокритериальной игры, т. е. игры с векторными функциями выигрышей участников, а в качестве решения — оптимальность по Парето (сильную и слабую). В последние годы предложены другие концепции решения многокритериальных игр, такие как идеальное равновесие по Нэшу [2] и E-равновесие [3]. В кооперативных многокритериальных играх для распределения общего кооперативного выигрыша используется естественное расширение вектора Шепли.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке провинции Шаньдун “План двухсот талантов” (№ WST2017009).

Однако все предложенные концепции решений используются только в статических многокритериальных играх. Малоисследованной проблемой является определение оптимального поведения участников в динамической постановке. В работе [4] было формализовано понятие многокритериального некооперативного равновесия, а в [5] — многокритериального кооперативного равновесия с использованием арбитражной схемы Нэша. В [6] был исследован процесс формирования коалиции в многокритериальных динамических играх.

В кооперативной теории игр важными показателями целесообразности формирования коалиций являются понятия внутренней и внешней устойчивости [7]. Внутренняя устойчивость означает, что игроку невыгодно выходить из коалиции и становиться индивидуальным игроком. А внешняя устойчивость означает, что независимому игроку невыгодно присоединяться к коалиции. При этом данные понятия применяются в ситуации, когда может быть сформирована только одна коалиция. В работе эти условия устойчивости адаптированы для многокритериальных динамических игр.

В данной статье мы исследуем многокритериальные динамические игры с асимметричными участниками, в которых возможно формирование нескольких коалиций. Следовательно, должны учитываться стимулы перехода игроков из одной коалиции в другую. Карраро [8] ввел понятие интеркоалиционной устойчивости для такого анализа. В работе для многокритериальных динамических игр мы введим понятие коалиционной устойчивости, учитывающее возможность перехода множества игроков из одной коалиции в другую.

Для иллюстрации предложенных концепций устойчивости нами исследована динамическая многокритериальная модель управления биоресурсами с конечным горизонтом планирования. Построены некооперативное и кооперативное равновесия. Определены стратегии и выигрыши участников при формировании двух коалиций. Получены условия устойчивости коалиций и показано, что условия внутренней устойчивости не выполняются, а внешней, наоборот, выполняются для всех параметров задачи. Построены условия коалиционной внутренней и внешней устойчивости. Исследован асимптотический случай, в котором показано отсутствие устойчивых коалиционных разбиений.

1. Многокритериальная динамическая игра с асимметричными участниками

Рассмотрим многокритериальную динамическую игру, в которой участвуют агенты двух типов. Игроки $N_1 = \{1, \dots, n_1\}$ и $N_2 = \{1, \dots, n_2\}$ эксплуатируют некоторый общий возобновляемый ресурс и стремятся достигнуть k различных целей.

Пусть U_i, V_j — компактные пространства при $i \in N_1$, $j \in N_2$. Динамика развития ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{n_1 t}, v_{1t}, \dots, v_{n_2 t}), \quad x_0 = x. \tag{1.1}$$

Здесь $x_t \geq 0$ — размер ресурса в момент времени $t \geq 0$; $f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{n_1 t}, v_{1t}, \dots, v_{n_2 t})$ — непрерывная функция развития возобновляемого ресурса; $u_{it} \in U_i$, $v_{jt} \in V_j$ — стратегии (интенсивность эксплуатации) игроков i, j в момент времени $t \geq 0$, $i \in N_1$, $j \in N_2$.

Обозначим профили стратегий $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{n_1 t})$, $v_t = (v_{1t}, \dots, v_{n_2 t})$. Вектор-функции выигрышей игроков на конечном промежутке планирования $[0, m]$ имеют вид

$$I_i = \begin{pmatrix} I_i^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_i^1(u_t, v_t) \\ \dots \\ I_i^k = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_i^k(u_t, v_t) \end{pmatrix}, \quad i \in N_1, \quad J_j = \begin{pmatrix} J_j^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_j^1(u_t, v_t) \\ \dots \\ J_j^k = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_j^k(u_t, v_t) \end{pmatrix}, \quad j \in N_2, \tag{1.2}$$

где $g_i^l(u_t, v_t) \geq 0$, $q_j^l(u_t, v_t) \geq 0$ — непрерывные функции “мгновенного” выигрыша, $l = 1, \dots, k$, $i \in N_1$, $j \in N_2$; $\delta \in (0, 1)$ — общий коэффициент дисконтирования.

В представленной модели исследуем следующие варианты поведения игроков: некооперативное, кооперативное (формирование гранд-коалиции) и формирование двух коалиций из игроков каждого типа. Для полученного коалиционного разбиения распространим понятия внутренней и внешней устойчивости, а также введем понятие коалиционной устойчивости, учитывающее возможность перехода участников из одной коалиции в другую.

1.1. Многокритериальное равновесие по Нэшу

Для построения некооперативного равновесия в многокритериальной динамической игре используется подход, предложенный в [4]. А именно применяется конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша). Поэтому сначала определяются гарантированные выигрыши, которые играют роль точек статус-кво.

В работе [4] были предложены различные варианты построения гарантированных выигрышей для игр с двумя участниками. Было показано, что наилучшим для состояния эксплуатируемой системы и выгодным для участников способом построения является определение гарантированных выигрышей как равновесных по Нэшу решений в играх с соответствующими критериями всех участников. Исходя из этого в данной модели ограничимся именно этим способом определения гарантированных точек при динамике развития ресурса (1.1):

$G_1^1,\dots,G_{n_1}^1$, $Q_1^1,\dots,Q_{n_2}^1$ — это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре

$$\langle x, N_1, N_2, \{U_i\}_{i=1}^{n_1}, \{V_j\}_{j=1}^{n_2}, \{I_i^1\}_{i=1}^{n_1}, \{J_j^1\}_{j=1}^{n_2}\rangle,$$

$$\dots$$

$G_1^k,\dots,G_{n_1}^k$, $Q_1^k,\dots,Q_{n_2}^k$ — это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре

$$\langle x, N_1, N_2, \{U_i\}_{i=1}^{n_1}, \{V_j\}_{j=1}^{n_2}, \{I_i^k\}_{i=1}^{n_1}, \{J_j^k\}_{j=1}^{n_2}\rangle$$

Для построения выигрышей игроков в динамической многокритериальной игре используем произведения Нэша, при этом гарантированные выигрыши играют роль точек статус-кво:

$$\begin{aligned}
H_1(u_t,v_t) &= (I_1^1(u_t,v_t)-G_1^1)\times\dots\times(I_1^k(u_t,v_t)-G_1^k),\\
&\dots\\
H_{n_1} &= (I_1^1(u_t,v_t)-G_1^1)\times\dots\times(I_1^k(u_t,v_t)-G_1^k)\,;\\
M_1(u_t,v_t) &= (J_1^1(u_t,v_t)-Q_1^1)\times\dots\times(J_1^k(u_t,v_t)-Q_1^k),\\
&\dots\\
M_{n_2} &= (J_1^1(u_t,v_t)-Q_1^1)\times\dots\times(J_1^k(u_t,v_t)-Q_1^k)\,.
\end{aligned}$$

Следующее определение содержит концепцию некооперативного решения [4] для динамической многокритериальной игры с асимметричными участниками.

О п р е д е л е н и е 1. Профили стратегий $u_t^N=(u_{1t}^N,\dots,u_{n_1t}^N)$, $v_t^N=(v_{1t}^N,\dots,v_{n_2t}^N)$ являются многокритериальным равновесием по Нэшу в игре (1.1), (1.2), если

$$H_i(u_t^N,v_t^N)\ge H_i(u_{1t}^N,\dots,u_{i-1\,t}^N,u_{it},u_{i+1\,t}^N,\dots,u_{n_1t}^N,v_t^N)\quad \forall u_{it}\in U_i,\quad i\in N_1,$$

$$M_j(u_t^N,v_t^N)\ge M_j(u_t^N,v_{1t}^N,\dots,v_{i-1\,t}^N,v_{it},v_{i+1\,t}^N,\dots,v_{n_2t}^N)\quad \forall v_{jt}\in V_j,\quad j\in N_2\,.$$

1.2. Многокритериальное кооперативное равновесие

Теперь предположим, что игроки хотят действовать кооперативно, т. е. формируется гранд-коалиция. Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры [5]. При этом в качестве точки статус-кво выступают суммы некооперативных выигрышей, полученных при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий.

Некооперативные выигрыши в соответствии с определением 1 примут вид

$$I_1^N = \begin{pmatrix} I_1^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^1(u_t^N, v_t^N) \\ \dots \\ I_1^{kN} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^k(u_t^N, v_t^N) \end{pmatrix}, \ \dots, \ I_{n_1}^N = \begin{pmatrix} I_{n_1}^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_{n_1}^1(u_t^N, v_t^N) \\ \dots \\ I_{n_1}^{kN} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_{n_1}^k(u_t^N, v_t^N) \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$J_1^N = \begin{pmatrix} J_1^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_1^1(u_t^N, v_t^N) \\ \dots \\ J_1^{kN} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_1^k(u_t^N, v_t^N) \end{pmatrix}, \ \dots, \ J_{n_2}^N = \begin{pmatrix} J_{n_2}^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_{n_2}^1(u_t^N, v_t^N) \\ \dots \\ J_{n_2}^{kN} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_{n_2}^k(u_t^N, v_t^N) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Поскольку для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша, необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^{n_1} V_i^{1c} + \sum_{j=1}^{n_2} W_j^{1c} - \sum_{i=1}^{n_1} I_i^{1N} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{1N}\Big) \times \dots \times \Big(\sum_{i=1}^{n_1} V_i^{kc} + \sum_{j=1}^{n_2} W_j^{kc} - \sum_{i=1}^{n_1} I_i^{kN} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{kN}\Big) \\
&= \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big[\sum_{i=1}^{n_1} g_i^1(u_t^c, v_t^c) + \sum_{j=1}^{n_2} q_j^1(u_t^c, v_t^c)\Big] - \sum_{i=1}^{n_1} I_i^{1N} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{1N}\Big) \times \dots \\
&\times \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big[\sum_{i=1}^{n_1} g_i^k(u_t^c, v_t^c) + \sum_{j=1}^{n_2} q_j^k(u_t^c, v_t^c)\Big] - \sum_{i=1}^{n_1} J_i^{kN} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{kN}\Big) \\
&= \max_{u_t, v_t} \Big[\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big[\sum_{i=1}^{n_1} g_i^1(u_t, v_t) + \sum_{j=1}^{n_2} q_j^1(u_t, v_t)\Big] - \sum_{i=1}^{n_1} I_i^{1N} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{1N}\Big) \times \dots \\
&\times \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big[\sum_{i=1}^{n_1} g_i^k(u_t, v_t) + \sum_{j=1}^{n_2} q_j^k(u_t, v_t)\Big] - \sum_{i=1}^{n_1} J_i^{kN} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{kN}\Big)\Big],
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где некооперативные выигрыши определены в (1.3), (1.4).

Определение 2. Профили стратегий $u_t^c = (u_{1t}^c, \dots, u_{n_1 t}^c)$, $v_t^c = (v_{1t}^c, \dots, v_{n_2 t}^c)$ составляют многокритериальное кооперативное равновесие в игре (1.1), (1.2), если они являются решением задачи (1.5).

1.3. Формирование коалиций

В данной многокритериальной динамической игре, в отличие от [6; 9], участвуют игроки двух типов. Поэтому возможно формирование двух коалиций ($K \subseteq N_1$ и $L \subseteq N_2$) и присутствие индивидуальных (не входящих ни в одну коалицию) игроков обоих типов ($N_1 \backslash K$ и $N_2 \backslash L$). Размеры коалиций, устойчивых в классическом смысле (внутренне и внешне) и коалиционно устойчивых, являются предметом исследования.

Существуют различные подходы к определению оптимального поведения участников при формировании коалиции. В [6] были исследованы случаи информированных и не информированных участников, а в [9] — стратегии Курно — Нэша и Штакельберга.

В данной работе предположим, что все игроки информированы о факте заключения кооперативных соглашений и принимают решения независимо. При этом участники коалиций выбирают свои стратегии согласно кооперативной концепции (определение 2), а индивидуальные игроки — как некооперативное равновесие (определение 1).

Таким образом, для определения общих кооперативных выигрышей коалиций $K \subseteq N_1$ и $L \subseteq N_2$ применим арбитражную схему Нэша, т. е. решим следующую задачу:

$$\Big(\sum_{i\in K} V_i^{1K}(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{1N}\Big) \times \ldots \times \Big(\sum_{i\in K} V_i^{kK}(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{kN}\Big)$$

$$= \Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t \sum_{i\in K} g_i^1(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{1N}\Big) \times \ldots \times \Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t \sum_{i\in K} g_i^k(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{kN}\Big)$$

$$= \max_{u_{it},\, i\in K}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t \sum_{i\in K} g_i^1(u_t, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{1N}\Big) \times \ldots$$

$$\times \Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t \sum_{i\in K} g_i^k(u_t, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{kN}\Big)\Big], \tag{1.6}$$

$$\Big(\sum_{j\in L} W_j^{1L}(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{1N}\Big) \times \ldots \times \Big(\sum_{j\in L} W_j^{kL}(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{kN}\Big)$$

$$= \Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t \sum_{j\in L} q_j^1(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{1N}\Big) \times \ldots \times \Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t \sum_{j\in L} q_j^k(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{kN}\Big)$$

$$= \max_{v_{jt},\, j\in L}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t \sum_{j\in L} q_j^1(u_t^K, v_t, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{1N}\Big) \times \ldots$$

$$\times \Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t \sum_{j\in L} q_j^k(u_t^K, v_t, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{kN}\Big)\Big]. \tag{1.7}$$

Стратегии индивидуальных игроков определяем из решения задач

$$(I_i^1(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - G_i^1) \times \ldots \times (I_i^k(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - G_i^k)$$

$$= \max_{\tilde u_{it},\, i\in N_1\setminus K}\Big[(I_i^1(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t, \tilde v_t^N) - G_i^1) \times \ldots \times (I_i^k(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t, \tilde v_t^N) - G_i^k)\Big], \quad i \in N_1\setminus K,$$

$$(J_j^1(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - Q_j^1) \times \ldots \times (J_j^k(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N) - G_i^k)$$

$$= \max_{\tilde v_{jt},\, j\in N_2\setminus L}\Big[(J_j^1(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t) - Q_j^1) \times \ldots \times (J_j^k(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t) - G_i^k)\Big], \quad j \in N_2\setminus L, \tag{1.8}$$

при этом динамика развития ресурса принимает вид

$$x_{t+1} = f(u_t^K, v_t^L, \tilde u_t^N, \tilde v_t^N), \quad x_0 = x.$$

Обозначим полученные стратегии членов коалиций K и L как $u_t^K = (u_{it}^K)_{i\in K}$, $v_t^L = (v_{it}^L)_{i\in L}$, а индивидуальных игроков — как $u_t^{NK} = (u_{it}^N)_{i\in N_1\setminus K}$, $v_t^{NL} = (v_{it}^N)_{i\in N_2\setminus L}$.

1.4. Устойчивость коалиций

Понятия внутренней и внешней устойчивости, введенные в работе [7], широко используются для исследования вопросов целесообразности формирования коалиций. Распространим условия устойчивости для многокритериальных динамических игр (приведем определение для коалиции K, для второй коалиции — аналогично).

Определение 3. Коалиция K называется внутренне устойчивой, если не существует такого $i \in K$, что

$$I_i^K(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \leqq I_i^N(u_t^{K\setminus\{i\}}, u_t^{NK\setminus\{i\}}, v_t^L, v_t^{NL}). \tag{1.9}$$

Коалиция K называется внешне устойчивой, если не существует такого $i \in N_1 \backslash K$, что

$$I_i^N(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \leqq I_i^{K\cup\{i\}}(u_t^{K\cup\{i\}}, u_t^{NK\cup\{i\}}, v_t^L, v_t^{NL}). \tag{1.10}$$

Здесь $a \leqq b \Leftrightarrow a_j \leq b_j \quad \forall j = 1, 2$.

Таким образом, внутренняя устойчивость означает, что игроку невыгодно выходить из коалиции и становиться индивидуальным игроком. А внешняя устойчивость означает, что независимому игроку невыгодно присоединяться к коалиции.

Определение 4. Коалиция K является устойчивой, если выполнены условия (1.9), (1.10).

1.5. Коалиционная устойчивость

Традиционно понятия внутренней и внешней устойчивости применяются в ситуации, когда формируется только одна коалиция. В данной работе возможно формирование двух кооперативных соглашений, следовательно, должны учитываться стимулы перехода игроков из одной коалиции в другую. Carraro [8] ввел понятие интеркоалиционной устойчивости для такого анализа. В [10] было предложено расширение данной схемы на случай, когда не один, а несколько игроков могут переходить из одной коалиции в другую. Введем понятие коалиционной устойчивости, расширяющее понятие интеркоалиционной устойчивости, для многокритериальных динамических игр с коалиционной структурой.

Определение 5. Коалиция K называется коалиционно внутренне устойчивой, если

$$I_i^K(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \geqq I_i^{L\cup P}(u_t^{K\backslash P}, u_t^{NK\backslash P}, v_t^{L\cup P}, v_t^{NL\cup P}) \quad \forall i \in P \subset K, \quad |P| = p. \tag{1.11}$$

Коалиция K называется коалиционно внешне устойчивой, если

$$J_j^L(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \geqq J_j^{K\cup Q}(u_t^{K\cup Q}, u_t^{NK\cup Q}, v_t^{L\backslash Q}, v_t^{NL\backslash Q}) \quad \forall j \in Q \subset L, \quad |Q| = q. \tag{1.12}$$

Внутренняя коалиционная устойчивость означает, что никакому множеству участников коалиции K невыгодно выйти из нее и присоединиться к коалиции L. Внешняя коалиционная устойчивость означает, что никакому множеству участников коалиции L невыгодно выйти из нее и присоединиться к коалиции K.

Для коалиции L условия коалиционной устойчивости совпадают с (1.11), (1.12).

Определение 6. Коалиционное разбиение (K, L) является коалиционно устойчивым, если выполнены условия (1.11), (1.12).

Далее рассмотрим бикритериальную задачу управления биоресурсами для демонстрации предложенных концепций.

2. Многокритериальная задача управления биоресурсами

Исследуется динамическая бикритериальная модель управления биоресурсами. Игроки двух типов $N_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ и $N_2 = \{1, \ldots, n_2\}$ (страны или фирмы) эксплуатируют ресурс на протяжении конечного промежутка времени $[0, m]$. Динамика развития популяции имеет вид

$$x_{t+1} = \varepsilon x_t - u_{1t} - \ldots - u_{n_1 t} - v_{1t} - \ldots - v_{n_2 t}, \quad x_0 = x, \tag{2.1}$$

где $x_t \geq 0$ — размер популяции в момент времени $t \geq 0$; $\varepsilon \geq 1$ — коэффициент естественного роста популяции; $u_{it} \geq 0$, $v_{jt} \geq 0$ — стратегии (вылов) игроков i, j в момент времени $t \geq 0$, $i \in N_1$, $j \in N_2$.

Игроки стремятся достичь двух целей — максимизировать доход от продажи ресурса и минимизировать затраты на эксплуатацию. Предполагается, что цена на рынке для игроков двух типов различается, а затраты равны и зависят от интенсивности эксплуатации каждого игрока. Такая ситуация возможна, например, когда участники из разных стран ведут эксплуатацию в одном водоеме, а добытый ресурс продают на собственном рынке, что влечет различие в ценах. Тогда вектор-функции выигрышей на конечном промежутке планирования примут вид

$$I_i = \begin{pmatrix} I_i^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t p_1 u_{it} \\ I_i^2 = -\sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t c u_{it}^2 \end{pmatrix}, \quad i \in N_1, \quad \ldots, \quad J_j = \begin{pmatrix} J_j^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t p_2 v_{jt} \\ J_j^2 = -\sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t c v_{jt}^2 \end{pmatrix}, \quad j \in N_2, \tag{2.2}$$

где $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ — рыночная цена за единицу ресурса для игроков i, j, $i \in N_1$, $j \in N_2$; $c \geq 0$ — затраты на эксплуатацию и $\delta \in (0,1)$ — общий коэффициент дисконтирования.

Можно заметить, что представленный пример является линейно-квадратичной динамическая игрой, в которой можно было бы рассмотреть свертку критериев. Однако многокритериальный подход кажется более адекватным, чем сложение прибыли, выраженной в денежных единицах, и затрат, пропорциональных квадрату интенсивности эксплуатации.

2.1. Некооперативное поведение

Начнем с построения гарантированных выигрышей, используя третий вариант их определения [4]. $G_1^1, \ldots, G_{n_1}^1$, $Q_1^1, \ldots, Q_{n_2}^1$ — это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре $\langle x, N_1, N_2, \{U_i\}_{i=1}^{n_1}, \{V_j\}_{j=1}^{n_2}, \{I_i^1\}_{i=1}^{n_1}, \{J_j^1\}_{j=1}^{n_2} \rangle$. Используя принцип Беллмана, получим равновесные по Нэшу стратегии $u_{1t} = \ldots = u_{n_1 t} = v_{1t} = \ldots = v_{n_2 t} = \dfrac{\varepsilon - 1}{n_1 + n_2 - 1} x_t$ и размер популяции в равновесии по Нэшу

$$x_t = \Big(\frac{n_1 + n_2 - \varepsilon}{n_1 + n_2 - 1}\Big)^t x_0 \,.$$

Тогда гарантированные выигрыши примут вид $G_i^1 = p_1 A x_0$, $i \in N_1$, $Q_j^1 = p_2 A x_0$, $j \in N_2$, где

$$A = \frac{(\varepsilon - 1)(\delta(n_1 + n_2 - \varepsilon))^{m+1} + (n_1 + n_2 - 1)^{m+1}}{(n_1 + n_2 - 1)^{m+1}(\delta(n_1 + n_2 - \varepsilon) - n_1 - n_2 + 1)}. \tag{2.3}$$

Аналогично определяя равновесие по Нэшу в игре со вторыми критериями $\langle x, N_1, N_2, \{U_i\}_{i=1}^{n_1}, \{V_j\}_{j=1}^{n_2}, \{I_i^2\}_{i=1}^{n_1}, \{J_j^2\}_{j=1}^{n_2} \rangle$, получим вторые гарантированные выигрыши

$$G_i^2 = Q_j^2 = G x_0^2, \quad i \in N_1, \quad j \in N_2,$$

где

$$G = -c\Big(\frac{2(n_1+n_2) - \varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{4(n_1+n_2)^2 + \varepsilon^2 - 4(n_1+n_2)}}{(n_1+n_2)(-\varepsilon + \sqrt{4(n_1+n_2)^2 + \varepsilon^2 - 4(n_1+n_2)})}\Big)^2$$

$$\times \frac{(2\delta n)^{m+1} - (\varepsilon - \sqrt{4(n_1+n_2)^2 + \varepsilon^2 - 4(n_1+n_2)})^{m+1}}{(\varepsilon - \sqrt{4(n_1+n_2)^2 + \varepsilon^2 - 4(n_1+n_2)})^m (2\delta(n_1+n_2) - \varepsilon + \sqrt{4(n_1+n_2)^2 + \varepsilon^2 - 4(n_1+n_2)})}. \tag{2.4}$$

Согласно определению 1 для построения многокритериального равновесия по Нэшу необходимо решить следующие задачи:

$$(I_i^1(u_t^N, v_t^N) - p_1 A x)(I_i^2(u_t^N, v_t^N) - G x^2) = \max_{u_{it},\, i \in N_1} \big[(I_i^1(u_t, v_t^N) - p_1 A x)(I_i^2(u_t, v_t^N) - G x^2)\big]$$

$$= p_1 \max_{u_{it},\, i \in N_1} \Big[\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t u_{it} - A x\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m} \delta^t u_{it}^2 - G x^2\Big)\Big], \quad i \in N_1,$$

$$(J_j^1(u_t^N, v_t^N) - p_2 Ax)(J_j^2(u_t^N, v_t^N) - Gx^2) = \max_{v_{jt},\, j\in N_2}\big[(J_j^1(u_t^N, v_t) - p_2 Ax)(J_j^2(u_t^N, v_t) - Gx^2)\big]$$

$$= p_2 \max_{v_{jt},\, j\in N_2}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t v_{jt} - Ax\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t v_{jt}^2 - Gx^2\Big)\Big], \quad j \in N_2\,.$$

Рассматривая процесс последовательно, т. е. начиная с одношаговой игры и заканчивая m-шаговой, и предполагая линейный вид стратегий, получим, что многокритериальные равновесные стратегии по Нэшу у игроков обоих типов совпадают и имеют вид

$$u_{it}^N = v_{jt}^N = \gamma_t^N x_t = \frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^N}{1+(n_1+n_2)\gamma_1^N\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j}\, x_t, \quad i \in N_1, \quad j \in N_2, \tag{2.5}$$

а стратегия на последнем шаге γ_1^N определяется из уравнения

$$-2c\gamma_1^N \prod_{i=2}^{m}(\varepsilon - n\gamma_i^N)\Big[\sum_{i=0}^{m-1}\delta^i\gamma_{m-i}^N \prod_{j=m+1-i}^{m}(\varepsilon-(n_1+n_2)\gamma_j^N) - A\Big]$$

$$+\Big[-c\sum_{i=0}^{m-1}\delta^i(\gamma_{m-i}^N)^2\prod_{j=m+1-i}^{m}(\varepsilon-(n_1+n_2)\gamma_j^N)^2 - G\Big] = 0,$$

где A и G заданы в (2.3), (2.4).

2.2. Формирование гранд-коалиции

В соответствии с (2.5) определим выигрыши в многокритериальном равновесии по Нэшу

$$\begin{aligned} I_i^{1N}(x) &= p_1\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N x, \quad i \in N_1,\\ J_j^{1N}(x) &= p_2\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N x, \quad j \in N_2,\\ I_i^{2N}(x) &= J_j^{2N}(x) = -c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^N)^2x^2, \quad i \in N_1, \quad j \in N_2\,. \end{aligned}$$

Согласно определению 2 для построения многокритериального кооперативного равновесия необходимо решить следующую задачу:

$$(V_1^{1c}+\ldots+V_{n_1}^{1c}+W_1^{1c}+\ldots+W_{n_2}^{1c}-I_1^{1N}-\ldots-I_{n_1}^{1N}-J_1^{1N}-\ldots-J_{n_1}^{1N})$$

$$\times(V_1^{2c}+\ldots+V_{n_1}^{2c}+W_1^{2c}+\ldots+W_{n_2}^{2c}-I_1^{2N}-\ldots-I_{n_1}^{2N}-J_1^{2N}-\ldots-J_{n_1}^{2N})$$

$$=\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\Big(p_1\sum_{i\in N_1}u_{it}^c+p_2\sum_{j\in N_2}v_{jt}^c\Big)-Px\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t\Big(\sum_{i\in N_1}(u_{it}^c)^2+\sum_{j\in N_2}(v_{jt}^c)^2\Big)-Mx^2\Big)$$

$$=\max_{u_t,v_t}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\Big(p_1\sum_{i\in N_1}u_{it}+p_2\sum_{j\in N_2}v_{jt}\Big)-Px\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t\Big(\sum_{i\in N_1}(u_{it})^2+\sum_{j\in N_2}(v_{jt})^2\Big)-Mx^2\Big)\Big],$$

где $P=(n_1p_1+n_2p_2)\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N$; $M=-(n_1+n_2)c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^N)^2$.

Рассматривая процесс последовательно, т. е. начиная с одношаговой игры и заканчивая m-шаговой, и предполагая линейный вид стратегий, получим многокритериальные кооперативные стратегии

$$u_{it}^c = u_t^c = \gamma_t^c x_t, \quad i \in N_1, \quad v_{jt}^c = v_t^c = \theta_t^c x_t, \quad j \in N_2, \tag{2.6}$$

где

$$\gamma_t^c = \frac{p_1 \varepsilon^{t-1} \gamma_1^c}{p_1 + \gamma_1^c (p_1 n_1 + p_2 n_2) \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j}, \quad t = 2, \dots, m; \quad \theta_t^c = \frac{p_2}{p_1} \gamma_t^c, \quad t = 1, \dots, m,$$

а стратегия игрока на последнем шаге γ_1^c определяется из уравнения

$$p_1 \Big[-c \sum_{i=2}^{m} \delta^{m-i} (n_1 (\gamma_i^c)^2 + n_2 (\theta_i^c)^2) \prod_{j=i+1}^{m} (\varepsilon - n_1 \gamma_j^c - n_2 \theta_j^c)^2 - M \Big]$$

$$- 2c\gamma_1^c \prod_{j=2}^{m} (\varepsilon - n_1 \gamma_j^c - n_2 \theta_j^c) \Big[\sum_{i=1}^{m} \delta^{m-i} (n_1 p_l \gamma_i^c + n_2 p_2 \theta_i^c) \prod_{j=i+1}^{m} (\varepsilon - n_1 \gamma_j^c - n_2 \theta_j^c) - P \Big] = 0\,.$$

Исследуем асимптотическое некооперативное и кооперативное поведение в задаче управления биоресурсами.

Многокритериальные равновесные по Нэшу стратегии (2.5) при $t \to \infty$ примут вид

$$\gamma_t^N \to \frac{\varepsilon - 1}{n_1 + n_2},$$

а кооперативные (2.6) — $\gamma_t^c \to \dfrac{p_1(\varepsilon - 1)}{p_1 n_1 + p_2 n_2}, \quad \theta_t^c \to \dfrac{p_2(\varepsilon - 1)}{p_1 n_1 + p_2 n_2}$.

Таким образом, в обоих случаях $x_t \to x_0$, и разница — только в распределении общего вылова $(\varepsilon - 1)x_t$ между игроками. При некооперативном поведении он распределяется равномерно, а при кооперативном — пропорционально рыночным ценам за ресурс.

Заметим также, что интенсивность эксплуатации при некооперативном поведении при $p_2 > p_1$ больше, чем у участников коалиции K, но меньше, чем у участников коалиции L. При $p_1 > p_2$ ситуация противоположная.

2.3. Формирование коалиционного разбиения

Рассмотрим процесс формирования двух коалиций ($K \subseteq N_1$ и $L \subseteq N_2$). При этом участники коалиций определяют свои стратегии согласно задачам (1.6), (1.7), а индивидуальные игроки ($i \in N_1 \setminus K$, $j \in N_2 \setminus L$) — из решения задач (1.8). Обозначим размеры коалиций как $k = |K|$, $l = |L|$.

Таким образом, для определения общего кооперативного выигрыша коалиций K и L решаются следующие задачи:

$$\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K} u_{it}^K - P^K x \Big) \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K} (u_{it}^K)^2 - M^K x^2 \Big)$$

$$= \max_{u_{it},\, i \in K} \Big[\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K} u_{it} - P^K x \Big) \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K} (u_{it})^2 - M^K x^2 \Big) \Big],$$

$$\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{j \in L} v_{jt}^L - P^L x \Big) \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{j \in L} (v_{jt}^L)^2 - M^L x^2 \Big)$$

$$= \max_{v_{jt},\, j \in L} \Big[\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{j \in L} v_{jt} - P^L x \Big) \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{j \in L} (v_{jt})^2 - M^L x^2 \Big) \Big],$$

где $P^K = k \sum_{t=0}^{m} \delta^t \gamma_t^N$; $M^K = k \sum_{t=0}^{m} \delta^t (\gamma_t^N)^2$; $P^L = l \sum_{t=0}^{m} \delta^t \gamma_t^N$; $M^L = l \sum_{t=0}^{m} \delta^t (\gamma_t^N)^2$.
Для нахождения же оптимальных стратегий индивидуальных игроков решаются задачи (1.8)

$$\Big(p_1 \sum_{t=0}^{m} \delta^t \tilde{u}_{it}^N - G_i^1 \Big) \Big(-c \sum_{t=0}^{m} \delta^t (\tilde{u}_{it}^N)^2 - G_i^2 \Big)$$

$$= \max_{\tilde{u}_{it},\, i\in N_1\backslash K}\Big[\Big(p_1\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde{u}_{it}-G_i^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde{u}_{it})^2-G_i^2\Big)\Big],\quad i\in N_1\backslash K,$$

$$\Big(p_2\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde{v}_{jt}^N-Q_j^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde{v}_{jt}^N)^2-Q_j^2\Big)$$

$$= \max_{\tilde{v}_{jt}^N,\, j\in N_2\backslash L}\Big[\Big(p_2\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde{v}_{jt}-Q_j^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde{v}_{jt})^2-Q_j^2\Big)\Big],\quad j\in N_2\backslash L,$$

при следующей динамике развития популяции:

$$x_{t+1}=\varepsilon x_t-\sum_{i\in K}u_{it}^K-\sum_{j\in L}v_{jt}^L-\sum_{i\in N_1\backslash K}\tilde{u}_{it}^N-\sum_{j\in N_2\backslash L}\tilde{v}_{jt}^N,\quad x_0=x\,.$$

Аналогично рассматривая процесс, начиная с одношагового и заканчивая m-шаговым, и предполагая линейный вид стратегий, получим

Утверждение 1. *Стратегии участников коалиций K и L при формировании коалиционного разбиения в задаче* (2.1), (2.2) *принимают вид*

$$u_{it}^K=\gamma_t^K x_t,\quad i\in K,\quad v_{jt}^L=\theta_t^L x_t,\quad j\in L,$$

$$\begin{aligned}\gamma_t^K&=\frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^K}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j(k\gamma_1^K+l\theta_1^L+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N)},\quad t=2,\dots,m,\\ \theta_t^s&=\frac{\theta_1^L}{\gamma_1^K}\gamma_t^K,\quad t=2,\dots,m;\end{aligned}\tag{2.7}$$

стратегии игроков γ_1^K и θ_1^L на последнем шаге определяются из уравнений

$$\begin{aligned}&\Big[\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}k(\gamma_j^K)^2\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon-k\gamma_d^K-l\theta_d^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N)^2-M^K\Big]\\ &\quad+\ 2\gamma_1^K\prod_{j=2}^{m}(\varepsilon-k\gamma_j^K-l\theta_j^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_j^N)\\ &\times\Big[\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}k\gamma_j^K\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon-k\gamma_d^K-l\theta_d^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N)-P^K\Big]=0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}&\Big[\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}k(\theta_j^L)^2\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon-k\gamma_d^K-l\theta_d^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N)^2-M^L\Big]\\ &\quad+\ 2\theta_1^L\prod_{j=2}^{m}(\varepsilon-k\gamma_j^K-l\theta_j^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_j^N)\\ &\times\Big[\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}l\theta_j^L\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon-k\gamma_d^K-l\theta_d^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N)-P^L\Big]=0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Оптимальные стратегии индивидуальных игроков в задаче (2.1), (2.2) *совпадают и имеют вид*

$$\tilde{u}_{it}^N=\tilde{v}_{jt}^N=\gamma_t^N x_t,\quad i\in N_1\backslash K,\quad j\in N_2\backslash L,$$

$$\gamma_t^N = \frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^N}{1+\sum\limits_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j(k\gamma_1^K + l\theta_1^L + (n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N)}, \quad t=2,\dots,m; \tag{2.10}$$

стратегия на последнем шаге γ_1^N *определяется из уравнения*

$$\Big[-c\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}(\gamma_j^N)^2\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon - k\gamma_d^K - l\theta_d^L - (n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N)^2 - G\Big]$$

$$-\ 2c\gamma_1^N\prod_{j=2}^{m}(\varepsilon - k\gamma_j^K - l\theta_j^L - (n_1+n_2-k-l)\gamma_j^N)\gamma_j^N)$$

$$\times\Big[\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}\gamma_j^N\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon - k\gamma_d^K - l\theta_d^L - (n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N) - A\Big] = 0, \tag{2.11}$$

где A *и* G *заданы в* (2.3), (2.4).

Рассмотрим асимптотическое поведение при формировании коалиционного разбиения. Стратегии участников коалиций (2.7) при $t\to\infty$ примут вид

$$\gamma_t^K \to \frac{(\varepsilon-1)\gamma_1^K}{k\gamma_1^K + l\theta_1^L + (n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N}, \quad \theta_t^L \to \frac{(\varepsilon-1)\theta_1^L}{k\gamma_1^K + l\theta_1^L + (n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N},$$

а стратегии индивидуальных игроков (2.10) — $\gamma_t^N \to \dfrac{(\varepsilon-1)\gamma_1^N}{k\gamma_1^K + l\theta_1^L + (n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N}$.

Таким образом, при формировании коалиционного разбиения также $x_t \to x_0$ и игроки вылавливают только естественный прирост ресурса $(\varepsilon-1)x_t$.

2.4. Устойчивость коалиций

Согласно утверждению 1 стратегии участников коалиций K и L принимают вид u_t^K — для всех $i\in K$ и v_t^L — для всех $j\in L$; стратегии индивидуальных игроков обозначим как $u_t^{NK} = v_t^{NL} = \gamma_t^N x_t$. Рассмотрим условия устойчивости для коалиции K:

условия внутренней устойчивости (1.9)

$$I_i^{1K}(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \ge I_i^{1N}(u_t^{K\backslash\{i\}}, u_t^{NK\backslash\{i\}}, v_t^L, v_t^{NL}),$$

$$I_i^{2K}(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \ge I_i^{2N}(u_t^{K\backslash\{i\}}, u_t^{NK\backslash\{i\}}, v_t^L, v_t^{NL}) \quad \forall i\in K;$$

условия внешней устойчивости (1.10)

$$I_i^{1N}(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \ge I_i^{1K\cup\{i\}}(u_t^{K\cup\{i\}}, u_t^{NK\cup\{i\}}, v_t^L, v_t^{NL}),$$

$$I_i^{2N}(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \ge I_i^{2K\cup\{i\}}(u_t^{K\cup\{i\}}, u_t^{NK\cup\{i\}}, v_t^L, v_t^{NL}) \quad \forall i\in N_1\backslash K.$$

Упростив, получим, что условия внутренней устойчивости коалиции K имеют вид

$$(\gamma_1^K - \gamma_1^N)\Big(1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j\big((k-1)\gamma_1^K + l\theta_1^L + (n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N\big)\Big) \ge 0,$$

$$(\gamma_1^K - \gamma_1^N)\Big((\gamma_1^K + \gamma_1^N)\Big(1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j\big((k-1)\gamma_1^K + l\theta_1^L + (n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N\big)\Big)^2$$

$$- \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j (\gamma_1^K)^2 \Big(2 + \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j \big((2k-1)\gamma_1^K + l\theta_1^L + (2(n_1+n_2-k-l)+1)\gamma_1^N \big) \Big) \Big) \le 0; \qquad (2.12)$$

условия внешней устойчивости —

$$(\gamma_1^K - \gamma_1^N) \Big(1 + \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j \big(k\gamma_1^K + l\theta_1^L + (n_1+n_2-k-l+1)\gamma_1^N \big) \Big) \le 0,$$

$$(\gamma_1^K - \gamma_1^N) \Bigg((\gamma_1^K + \gamma_1^N) \Big(1 + \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j ((k-1)\gamma_1^K + l\theta_1^L + (n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N) \Big)^2$$

$$- \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j (\gamma_1^N)^2 \Big(2 + \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j \big((2k-1)\gamma_1^K + l\theta_1^L + (2(n_1+n_2-k-l)+1)\gamma_1^N \big) \Big) \Bigg) \le 0. \qquad (2.13)$$

Поскольку $\gamma_1^K \le \gamma_1^N$, то условие внутренней устойчивости (2.12) выполняется только для коалиций размера 1, а условия внешней устойчивости (2.13) выполняются всегда.

Следовательно, как и в большинстве эколого-экономических моделей оба условия устойчивости выполняются только для коалиций малой размерности (см., например, [11]).

2.5. Коалиционная устойчивость

Для проверки введенных условий устойчивости (1.11), (1.12) построим стратегии игроков и выигрыши коалиций для следующих случаев.

1. Подмножество игроков $P \subset K$, $|P| = p$, присоединяется к коалиции L. Таким образом, игроки формируют коалицию $L \cup P$, где $j \in L \subset N_2$ — игроки типа 2, $i \in P \subset K$ — игроки типа 1. При этом у игроков типа 1 остается коалиция $K \backslash P$, а все оставшиеся участники играют индивидуально.

2. Подмножество игроков $Q \subset L$, $|Q| = q$, присоединяется к коалиции K. Таким образом, игроки формируют коалицию $K \cup Q$, где $i \in K \subset N_1$ — игроки типа 1, $j \in Q \subset N_2$ — игроки типа 2. При этом у игроков типа 2 остается коалиция $L \backslash Q$, а все оставшиеся участники играют индивидуально.

Рассмотрим случай 1. Для определения кооперативных выигрышей новых коалиций $L \cup P$, $K \backslash P$ решаются следующие задачи:

$$\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K\backslash P} u_{it}^K - P^{K\backslash P} x \Big) \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K\backslash P} (u_{it}^K)^2 - M^{K\backslash P} x^2 \Big)$$

$$= \max_{u_{it},\, i \in K\backslash P} \Big[\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K\backslash P} u_{it} - P^{K\backslash P} x \Big) \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K\backslash P} (u_{it})^2 - M^{K\backslash P} x^2 \Big) \Big],$$

$$\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big(p_2 \sum_{j \in L} v_{jt}^L + p_1 \sum_{i \in P} \tilde{u}_{it}^K \Big) - P^{L\cup P} x \Big) \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big(\sum_{j \in L} (v_{jt}^L)^2 + \sum_{i \in P} (\tilde{u}_{it}^K)^2 \Big) - M^{L\cup P} x^2 \Big)$$

$$= \max_{\substack{\tilde{u}_{it},\ i \in P \\ v_{jt},\ j \in L}} \Big[\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big(p_2 \sum_{j \in L} v_{jt} + p_1 \sum_{i \in P} \tilde{u}_{it} \Big) - P^{L\cup P} x \Big) \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big(\sum_{j \in L} (v_{jt})^2 + \sum_{i \in P} (\tilde{u}_{it})^2 \Big) - M^{L\cup P} x^2 \Big) \Big],$$

где

$$P^{K\backslash P} = (k-p) \sum_{t=0}^{m} \delta^t \gamma_t^N, \quad M^{K\backslash P} = (k-p) \sum_{t=0}^{m} \delta^t (\gamma_t^N)^2,$$

$$P^{L\cup P}=(p_1p+p_2l)\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N,\quad M^{L\cup P}=(l+p)\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^N)^2;$$

индивидуальные игроки, как и ранее, решают задачи (1.8)

$$\Big(p_1\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde u_{it}^N-G_i^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde u_{it}^N)^2-G_i^2\Big)$$
$$=\max_{\tilde u_{it},\,i\in N_1\setminus K}\Big[\Big(p_1\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde u_{it}-G_i^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde u_{it})^2-G_i^2\Big)\Big],\quad i\in N_1\setminus K,$$
$$\Big(p_2\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde v_{jt}^N-Q_j^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde v_{jt}^N)^2-Q_j^2\Big)$$
$$=\max_{\tilde v_{jt},\,i\in N_2\setminus L}\Big[\Big(p_2\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde v_{jt}-Q_j^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde v_{jt})^2-Q_j^2\Big)\Big],\quad j\in N_2\setminus L,$$

при следующей динамике развития популяции

$$x_{t+1}=\varepsilon x_t-\sum_{i\in K\setminus P}u_{it}^K-\sum_{i\in P}\tilde u_{it}^K-\sum_{j\in L}v_{jt}^L-\sum_{i\in N_1\setminus K}\tilde u_{it}^N-\sum_{j\in N_2\setminus L}\tilde v_{jt}^N,\ x_0=x\,.$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Стратегии участников новой коалиции $L\cup P$ в задаче* (2.1), (2.2) *принимают вид*

$$\tilde u_{it}^K=\gamma_t^{L\cup P}x_t,\quad i\in P,\quad v_{jt}^L=\theta_t^{L\cup P}x_t,\quad j\in L,$$

$$\gamma_t^{L\cup P}=\frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^{L\cup P}}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((k-p)\gamma_1^{K\setminus P}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(p+\frac{p_2}{p_1}l)\gamma_1^{L\cup P})},\quad t=2,\dots,m,$$
$$\theta_t^{L\cup P}=\frac{p_2}{p_1}\gamma_t^{L\cup P},\quad t=1,\dots,m; \tag{2.14}$$

стратегии игроков, оставшихся в коалиции K, определяются как

$$u_{it}^K=\gamma_t^{K\setminus P}x_t,\quad i\in K\setminus P,$$

$$\gamma_t^{K\setminus P}=\frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^{K\setminus P}}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((k-p)\gamma_1^{K\setminus P}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(p+\frac{p_2}{p_1}l)\gamma_1^{L\cup P})},\quad t=2,\dots,m;$$

стратегии индивидуальных игроков совпадают и имеют вид

$$\tilde u_{it}^N=\tilde v_{jt}^N=\gamma_t^Nx_t,\quad i\in N_1\setminus K,\quad j\in N_2\setminus L,$$

$$\gamma_t^N=\frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^N}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((k-p)\gamma_1^{K\setminus P}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(p+\frac{p_2}{p_1}l)\gamma_1^{L\cup P})},\quad t=2,\dots,m;$$

стратегии игроков $\gamma_1^{K\setminus P}$, $\gamma_1^{L\cup P}$ и γ_1^N на последнем шаге определяются из уравнений, аналогичных (2.8), (2.11), *с соответствующими гарантированными выигрышами.*

Рассмотрим случай 2. Действуя аналогично, когда подмножество игроков $Q\subset L$, $|Q|=q$, присоединяется к коалиции K, получим

Утверждение 3. *Стратегии участников новой коалиции* $K\cup Q$ *в задаче* (2.1), (2.2) *принимают вид*

$$\tilde{v}_{jt}^{L}=\theta_t^{K\cup Q}x_t,\quad j\in Q,\quad u_{it}^{K}=\gamma_t^{K\cup Q}x_t,\quad i\in K,$$

$$\theta_t^{K\cup Q}=\frac{\varepsilon^{t-1}\theta_1^{K\cup Q}}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((l-q)\theta_1^{L\backslash Q}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(q+\frac{p_1}{p_2}k)\theta_1^{K\cup Q})},\quad t=2,\ldots,m,$$

$$\gamma_t^{K\cup Q}=\frac{p_1}{p_2}\theta_t^{K\cup Q},\quad t=1,\ldots,m; \tag{2.15}$$

стратегии игроков, оставшихся в коалиции L, *определяются как*

$$v_{jt}^{L}=\theta_t^{L\backslash Q}x_t,\quad j\in L\backslash Q,$$

$$\theta_t^{L\backslash Q}=\frac{\varepsilon^{t-1}\theta_1^{L\backslash Q}}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((l-q)\theta_1^{L\backslash Q}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(q+\frac{p_1}{p_2}k)\theta_1^{K\cup Q})},\quad t=2,\ldots,m;$$

стратегии индивидуальных игроков совпадают и имеют вид

$$\tilde{u}_{it}^{N}=\tilde{v}_{jt}^{N}=\gamma_t^{N}x_t,\quad i\in N_1\backslash K,\quad j\in N_2\backslash L,$$

$$\gamma_t^{N}=\frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^{N}}{1+\sum\limits_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((l-q)\theta_1^{L\backslash Q}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(q+\frac{p_1}{p_2}k)\theta_1^{K\cup Q})},\quad t=2,\ldots,m;$$

стратегии игроков $\theta_1^{L\backslash Q}$, $\theta_1^{K\cup Q}$ *и* γ_1^N *на последнем шаге определяются из уравнений, аналогичных* (2.9), (2.11), *с соответствующими гарантированными выигрышами.*

Условия коалиционной внутренней устойчивости (1.11) примут вид

$$\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^K\geq\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^{L\cup P},\quad \sum_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^K)^2\leq\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^{L\cup P})^2,$$

где γ_t^K определены в (2.7), $\gamma_t^{L\cup P}$ — в (2.14);

условия коалиционной внешней устойчивости (1.12) —

$$\sum_{t=0}^{m}\delta^t\theta_t^L\geq\sum_{t=0}^{m}\delta^t\theta_t^{K\cup Q},\quad \sum_{t=0}^{m}\delta^t(\theta_t^L)^2\leq\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\theta_t^{K\cup Q})^2,$$

где θ_t^L определены в (2.7), $\theta_t^{K\cup Q}$ — в (2.15).

Рассмотрим первое условие коалиционной внутренней устойчивости, оно примет вид

$$(\gamma_1^K-\gamma_1^{L\cup P})\Big(1+\sum_{j=0}^{m}\varepsilon^j(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N\Big)+(k-p)\gamma_1^K(\gamma_1^{K\backslash P}-\gamma_1^{L\cup P})+l\gamma_1^{L\cup P}\Big(\frac{p_2}{p_1}\gamma_1^K-\theta_1^L\Big)\geq 0\,.$$

Поскольку γ_t^K возрастает по k, то нам известно, что $\gamma_1^K\geq\gamma_1^{K\backslash P}$. Для сравнения остальных стратегий игроков при формировании коалиций K, L и при переходе игроков из коалиции K в коалицию L исследуем асимптотический случай ($t\to\infty$). Так как в асимптотике игроки вылавливают ровно естественный прирост ресурса, имеем

$$k\gamma_1^K+l\theta_1^L=(k-p)\gamma_1^{K\backslash P}+\Big(l\frac{p_2}{p_1}+p\Big)\gamma_1^{L\cup P}\,. \tag{2.16}$$

Используя возрастание γ_t^K по k и тот факт, что $\gamma_1^{L\cup P} = p_1/p_2\,\theta_1^{L\cup P}$, из (2.16) получим следующие условия:

$$p(\gamma_1^K - \gamma_1^{L\cup P}) \geq l(\theta_1^{L\cup P} - \theta_1^L), \quad l(\theta_1^L - \theta_1^{L\cup P}) \geq p(\gamma_1^{L\cup P} - \gamma_1^{K\setminus P})\,.$$

Поскольку θ_t^L возрастает по l, то из этих условий делаем вывод, что

$$\gamma_1^K \geq \gamma_1^{L\cup P}, \quad \gamma_1^{K\setminus P} \geq \gamma_1^{L\cup P}\,.$$

Таким образом, при $p_2/p_1\,\gamma_1^K - \theta_1^L \geq 0$, условие внутренней коалиционной устойчивости выполняется при любых параметрах задачи, а второе условие внутренней коалиционной устойчивости не выполняется.

Теперь рассмотрим первое условие коалиционной внешней устойчивости, оно примет вид

$$(\theta_1^L - \theta_1^{K\cup Q})\Big(1 + \sum_{j=0}^{m} \varepsilon^j (n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N\Big) + (l-q)\theta_1^L(\theta_1^{L\setminus Q} - \theta_1^{K\cup Q}) + k\theta_1^{K\cup Q}\Big(\frac{p_1}{p_2}\theta_1^L - \gamma_1^K\Big) \geq 0\,.$$

Поскольку θ_t^L возрастает по l, то нам известно, что $\theta_1^L \geq \theta_1^{L\setminus Q}$. Для сравнения остальных стратегий игроков при формировании коалиций K, L и при переходе игроков из коалиции L в коалицию K также рассмотрим асимптотический случай ($t \to \infty$). Так как в асимптотике игроки вылавливают ровно естественный прирост ресурса, имеем

$$k\gamma_1^K + l\theta_1^L = (l-q)\theta_1^{L\setminus Q} + \Big(k\frac{p_1}{p_2} + q\Big)\theta_1^{K\cup Q}. \tag{2.17}$$

Используя возрастание γ_t^K по k и то, что $\theta_1^{K\cup Q} = p_2/p_1\,\gamma_1^{K\cup Q}$, из (2.17) получим следующие условия:

$$q(\theta_1^L - \theta_1^{K\cup Q}) \geq k(\gamma_1^{K\cup Q} - \gamma_1^K), \quad k(\gamma_1^K - \gamma_1^{K\cup Q}) \geq q(\theta_1^{K\cup Q} - \theta_1^{L\setminus Q})\,.$$

Поскольку γ_t^K возрастает по k, то из этих условий делаем вывод, что

$$\theta_1^L \geq \gamma_1^{K\cup Q}, \quad \theta_1^{L\setminus Q} \geq \theta_1^{K\cup Q}\,.$$

Таким образом, при $p_1/p_2\,\theta_1^L - \gamma_1^K \geq 0$ условие внешней коалиционной устойчивости выполняется при любых параметрах задачи. При этом же второе условие внешней коалиционной устойчивости не выполняется.

Таким образом, мы получили следующий результат.

Утверждение 4. *В асимптотическом случае* ($t \to \infty$) *в задаче* (2.1), (2.2) *нет коалиционно устойчивых коалиций* (K, L).

Заключение

В работе предложены концепции определения оптимального поведения в многокритериальных динамических играх с асимметричными участниками и формированием коалиционного разбиения. Для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша), а для определения кооперативного — арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры.

Исследован процесс формирования коалиционного разбиения в многокритериальных динамических играх. В предложенной модели формируются две коалиции K, L и присутствуют индивидуальные игроки обоих типов в предположении информированности игроков о факте заключения кооперативных соглашений. Таким образом, участники коалиций определяют свои стратегии, используя арбитражную схему Нэша, а индивидуальные игроки выстраивают стратегии как многокритериальное равновесие по Нэшу в динамической игре с $(N_1 \setminus K) \cup (N_2 \setminus L)$ игроками.

Условия внутренней и внешней устойчивости адаптированы для многокритериальных динамических игр. Поскольку эти условия применяются при формировании только одной коалиции, а в представленной модели формируются два соглашения, то должны учитываться стимулы перехода игроков между коалициями. Поэтому в работе введено понятие коалиционной устойчивости, учитывающее возможность перехода множества игроков из одной коалиции в другую.

Исследована динамическая бикритериальная задача управления биоресурсами. Построены стратегии и выигрыши участников при некооперативном, кооперативном (формирование гранд-коалиции) поведении и при формировании двух коалиций.

Получены условия внутренней и внешней устойчивости. Показано, что в данной задаче управления биоресурсами, как и в большинстве эколого-экономических моделей, условия внутренней устойчивости выполняются только для коалиций малой размерности.

Построены условия коалиционной внутренней и внешней устойчивости. Показано, что в асимптотическом случае не существует устойчивых коалиционных разбиений. Следовательно, игрокам выгодно переходить из одной коалиции в другую. Поэтому дальнейшее исследование будет посвящено определению параметров модели, при которых выполняются условия коалиционной устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shapley L.S.** Equilibrium points in games with vector payoffs // Naval Research Logistic Quarterly. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 57–61. doi: 10.1002/nav.3800060107 .
2. **Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M.** Ideal equilibria in noncooperative multicriteria games // Math. Met. Oper. Res. 2000. Vol. 52, no. 1. P. 65–77. doi: 10.1007/s001860000069 .
3. **Pusillo L., Tijs S.** E-equilibria for multicriteria games // Annals ISDG. 2013. Vol. 12. P. 217–228. doi: 10.1007/978-0-8176-8355-91 .
4. **Rettieva A.N.** Multicriteria dynamic games // International Game Theory Review. 2017. Vol. 19, no. 1. Art.-no. 1750002. doi: 10.1142 /S021919891750002 .
5. **Rettieva A.N.** Dynamic multicriteria games with finite horizon // Mathematics. 2018. Vol. 6, iss. 9. Art.-no. 156. doi: 10.3390/math6090156 .
6. **Реттиева А.Н.** Формирование коалиций в динамических многокритериальных играх // Математическая теория игр и ее приложения. 2018. Т. 10, вып. 2. С. 40–61. doi: 10.17076/mgta2_4 .
7. **D'Aspremont C. et al.** On the stability of collusive price leadership // Can. J. Econ. 1983. Vol. 16, iss. 1. P. 17–25. doi: 10.2307/134972 .
8. **Carraro C.** The structure of international environmental agreements // FEEM/IPCC/Stanford EMF Conf. "International Environmental Agreements on Climate Change": Paper Presented. Venice, 1997. P. 309–328.
9. **Rettieva A.** Coalition stability in dynamic multicriteria games // Intern. Conf. on Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019): Mathematical Optimization Theory and Operations Research / eds. M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos. Cham: Springer, 2019. P. 697–714. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11548). doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_49 .
10. **Rettieva A.N.** Stable coalition structure in Bioresource management problem // Ecological Modelling. 2012. Vol. 235-236. P. 102–118. doi: 10.1016/j.ecolmodel.2012.03.015 .
11. **De Zeeuw A.** Dynamic effects on stability of international environmental agreements // J. Environmental Economics and Management. 2008. Vol. 55, iss. 2. P. 163–174. doi: 10.1016/j.jeem.2007.06.003.

Поступила 30.07.2019
После доработки 10.08.2019
Принята к публикации 19.08.2019

Реттиева Анна Николаевна
д-р физ.-мат. наук, доцент

зам. директора по научной работе
Институт прикладных математических исследований —
обособленное подразделение ФГБУН "Карельский научный центр РАН"
г. Петрозаводск;
Школа математики и статистики, Университет Циндао;
Институт прикладной математики Шандонга
г. Циндао, Китай,
e-mail: annaret@krc.karelia.ru

REFERENCES

1. Shapley L.S., Rigby F.D. Equilibrium points in games with vector payoffs. *Naval Research Logistic Quarterly*, 1959, vol. 6, no. 1, pp. 57–61. doi: 10.1002/nav.3800060107 .
2. Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M. Ideal equilibria in noncooperative multicriteria games. *Math. Met. Oper. Res.*, 2000, vol. 52, no. 1, pp. 65–77. doi: 10.1007/s001860000069 .
3. Pusillo L., Tijs S. E-equilibria for multicriteria games. *Annals ISDG*, 2013, vol. 12, pp. 217–228. doi: 10.1007/978-0-8176-8355-91_11 .
4. Rettieva A.N. Equilibria in dynamic multicriteria games. *International Game Theory Review*, 2017, vol. 19, no. 1, art.-no. 1750002. doi: 10.1142 /S0219198917500025 .
5. Rettieva A.N. Dynamic multicriteria games with finite horizon. *Mathematics*, 2018, vol. 6, no. 9, art.-no. 156. doi: 10.3390/math6090156 .
6. Rettieva A.N. Coalition formation in dynamic multicriteria games. *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, no. X, pp. 345–357.
7. D'Aspremont C. et al. On the stability of collusive price leadership. *Can. J. Econ.*, 1983, vol. 16, no. 1, pp. 17–25. doi: 10.2307/134972 .
8. Carraro C. The structure of international environmental agreements. In: Paper Presented at the *FEEM/IPCC/Stanford EMF Conference on "International Environmental Agreements on Climate Change"*, Venice, 1997, pp. 309–328.
9. Rettieva A. Coalition stability in dynamic multicriteria games. In: Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds) *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 11548, Cham, Springer, 2019, pp. 697–714. doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_49 .
10. Rettieva A.N. Stable Coalition Structure in Bioresource Management Problem. *Ecological Modelling*, 2012, vol. 235-236, pp. 102-118. doi: 10.1016/j.ecolmodel.2012.03.015 .
11. De Zeeuw A. Dynamic effects on stability of International Environmental Agreements. *J. Environmental Economics and Management*, 2008, vol. 55, no. 2, pp. 163–174. doi: 10.1016/j.jeem.2007.06.003 .

Received July 30, 2019
Revised August 10, 2019
Accepted August 19, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Shandong Province "Double-Hundred Talent Plan" (No. WST2017009).

Anna Nickolaevna Rettieva, Dr. Phys.-Math. Sci., School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao 266071, PR China; Institute of Applied Mathematics of Shandong, Qingdao 266071, PR China; Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, 185910 Russia; e-mail: annaret@krc.karelia.ru .

Cite this article as: A. N. Rettieva. Coalitional stability conditions in multicriteria dynamic games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 200–216 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 519.833

СТРАТЕГИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ В ИГРЕ "THE PRICE IS RIGHT"[1]

Т. В. Серёгина, А. А. Ивашко, В. В. Мазалов

Популярное телевизионное шоу "The Price is Right" представляет собой привлекательный ресурс для моделирования стратегического поведения в конкуренции за определенное вознаграждение. В данной работе структура этой игры используется как основа для различных теоретико-игровых постановок. Рассматривается некооперативная игра с оптимальной остановкой для конечного числа игроков. Каждый игрок получает очки, наблюдая суммы независимых случайных величин, равномерно распределенных на единичном отрезке. На очередном шаге игрок должен принять решение: остановиться или продолжить игру. Победителем становится игрок с наибольшей суммой очков, не превышающей 1. Если сумма очков каждого из игроков превысила 1, то побеждает игрок, получивший наименьшее число очков. В работе найдены оптимальные стратегии игроков в многошаговой модели игры с полной информацией об очках предшествующих игроков. Кроме того, сравниваются оптимальные стратегии игроков и выигрыши в играх с полной информацией и без информации. Введено понятие цены информации в данной игре.

Ключевые слова: оптимальная остановка, игра n лиц, равновесие по Нэшу, пороговая стратегия, полная информация, Showcase Showdown.

T. V. Seregina, A. A. Ivashko, V. V. Mazalov. Optimal stopping strategies in the game "The Price Is Right."

The popular TV show "The Price Is Right" is an attractive source of modeling the strategic behavior in a competitive environment for a specific reward. In this study, the structure of the show is used as a basis for several game-theoretic settings. We consider a noncooperative optimal stopping game for a finite number of players. Each player earns points by observing the sums of independent random variables uniformly distributed on the unit interval. At each step, the player must decide whether to stop or continue the game. The winner is the player with the maximal score not exceeding unity. If the scores of all players exceed this limit, the winner is the player with the lowest score. We characterize the optimal strategies of the players in the multi-step version of the game with complete information about the scores of the previous players. We also compare the optimal strategies and payoffs of the players in the games with complete information and with no information. The notion of information price is introduced.

Keywords: optimal stopping, n-person game, Nash equilibrium, threshold strategy, complete information, Showcase Showdown.

MSC: 60G40, 91A40, 91A06

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-217-231

Введение

При покупке редких товаров или аренде крайне лимитированных ресурсов распространены схемы предложения конкурентной цены. Здесь можно выделить различные аукционы, конкуренцию за вычислительные ресурсы или объемы хранилищ. Среди подобных схем существуют такие, в которых при покупке какого-либо товара или ресурса необходимо предложить цену как можно ближе к итоговой цене, но существенно не превышающую ее. При этом для участника торгов важно определить оптимальную стратегию для того, чтобы увеличить шансы выиграть торги. Подобные схемы используются в каждом выпуске популярного телевизионного шоу "The Price is Right", где участники по очереди вращают колесо один или два раза, получая очки. Каждый из игроков стремится получить наибольшее число очков, не превышающих заданную границу. Телевизионная игра "The Price is Right" описана в работах [2; 6]. Данное

[1]Работа частично поддержана грантом провинции Шаньдун (Shandong Province) "Double-Hundred Talent Plan" (No. WST2017009).

шоу имеет простые правила и привлекательные выигрыши для участников. Вместе с тем эта игра является удобной платформой для моделирования различных торговых схем и изучения стратегического поведения участников торгов. Шоу располагает данными, доступными для эмпирического анализа, которые можно использовать при верификации теоретических выкладок и интерпретации возможных расхождений. Телевизионное шоу было использовано для различных эмпирических исследований и как экспериментальная основа для изучения экономического поведения [3; 16].

В представленной работе предлагается теоретико-игровой подход к описанию данной игры и определению оптимального поведения ее участников. В соответствии с правилами игрового шоу "The Price is Right" рассматривается некооперативная игра n лиц с оптимальной остановкой. Здесь каждый игрок получает очки, наблюдая суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. На очередном шаге каждый игрок должен принять решение: остановиться на текущем наблюдении или продолжить и получить дополнительно значение следующей независимой случайной величины, которое прибавляется к полученным ранее очкам. Побеждает тот игрок, чья сумма очков окажется наиболее близкой, но не превышающей заданной границы. Если сумма очков каждого из игроков превысила заданную границу, то побеждает игрок, получивший наименьшее число очков. Каждый игрок стремится максимизировать вероятность своего выигрыша.

При этом возможны различные постановки задачи: а) игроки ходят независимо от своих противников, могут не знать о количестве очков и действиях друг друга в ходе игры (модель без информации), б) игроки ходят последовательно, видят количество очков своих предшественников и знают об их действиях (модель с полной информацией). Также игрокам может быть представлена возможность получать очки по итогам не только двух (как в телевизионном шоу), но и нескольких шагов игры.

Постановки данной задачи с отсутствием информации о поведении участников игры были рассмотрены в [7; 9]. В [9] были исследованы варианты игры с конечным и бесконечным числом шагов. Задача с полной информацией о действиях противников была сформулирована в рамках теории вероятностей в [17], и решение было найдено для двух игроков с двумя шагами.

В представленной работе найдено решение задачи для многошаговой игры с оптимальной остановкой при полной информации об очках и действиях предыдущих игроков. Игра без информации достигает равновесия по Нэшу — состояния, из которого никому из игроков не выгодно отклониться индивидуально от своей стратегии (см. [9]). В версии с полной информацией игра имеет равновесие по Нэшу, когда игроки принимают решения последовательно и каждый следующий игрок знает информацию о действиях его предшественников. В данной работе найдены и исследованы оптимальные стратегии игроков в модели игры с полной информацией. Также, в отличие от предыдущих работ, вычислены оптимальные выигрыши в обеих версиях игры, с полной информацией и без информации, для конечного и бесконечного числа шагов. Кроме того, проведено сравнение оптимальных стратегий в задаче с полной информацией и в задаче с отсутствием информации о действиях противников для различного числа шагов в игре. Установлена нижняя граница оптимальных порогов и обсуждается, как доступность информации влияет на пороговые значения и выигрыши. Показаны соотношения между порогами в играх разных типов информации для конечного и бесконечного числа шагов, а также определено понятие цены информации в данной игре.

Для получения оптимальных стратегий игроков используется метод динамического программирования, который позволяет решать сложную задачу, разбивая ее на более простые подзадачи, представленные рекурсивной последовательностью. Метод динамического программирования имеет приложения в различных областях, таких как игры выхода (quitting games [14]), задача о продаже дома (house-selling problem [4; 13]), задача поиска работы (job-search problem [10]), задача поиска партнера (mate choice problem [1]), игры Showcase Showdown [11; 12], и успешно используется для решения теоретико-игровых задач с оптимальной остановкой [8; 15].

Статья организована следующим образом. В разд. 1 описано решение игры n лиц с отсутствием информации о действиях противников. Приведены оптимальные стратегии и ожидаемые выигрыши игроков как в двухшаговой, так и в многошаговой модели. Далее, в разд. 2 и 3, представлены постановка и решение последовательной игры с полной информацией о действиях игроков. При этом рассмотрены как двухшаговый вариант задачи, так и игра с бесконечным числом шагов. В завершение сравниваются оптимальные стратегии игроков и выигрыши в играх с полной информацией и без информации.

1. Игра n участников с отсутствием информации

Рассмотрим двухшаговую игру n лиц. Игрок k независимо от остальных участников получает в качестве очков значение $x_1^{(k)}$ случайной величины $X_1^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$. Игрок должен принять решение: *остановиться* после первого шага или *продолжить* и получить дополнительные очки $x_2^{(k)}$ как значение случайной величины $X_2^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$. $X_1^{(k)}$ и $X_2^{(k)}$ — независимые равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные величины. Побеждает тот игрок, чья сумма очков окажется наиболее близкой, но не превышающей 1. Если сумма очков каждого из игроков превысила 1, то побеждает игрок, получивший наименьшее число очков. Игроки не знают ни значений наблюдений, ни решений, принятых другими игроками. Каждый игрок стремится максимизировать вероятность своего выигрыша. Решение данной задачи было получено в работе [7] для $n = 2, 3$. В [9] было найдено оптимальное решение для $n \geq 2$, согласно которому в двухшаговой игре n лиц с отсутствием информации значения оптимальных порогов $u^{(2,n,N)} = u$ могут быть найдены из следующего уравнения[2]:

$$u^{2(n-1)} = \frac{1 - u^{2n}}{n(u+1)} + \frac{u^{2n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}. \tag{1.1}$$

Обозначим через $h^{(2,n,N)}(x|u)$ и $H^{(2,n,N)}(x|u)$ выигрыши каждого из игроков при остановке и продолжении игры соответственно, если игрок получил на первом шаге число очков x, а остальные игроки используют стратегию u:

$$h^{(2,n,N)}(x|u) = (x - u + xu)^{n-1};$$
$$H^{(2,n,N)}(x|u) = \int\limits_x^u \Big(\frac{u^2 + y^2}{2}\Big)^{n-1} dy + \frac{1 - u^{2n}}{n(u+1)} + \frac{u^{2n-1} - (u-x)^{2n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}.$$

Тогда ожидаемый выигрыш для каждого игрока при использовании оптимальной стратегии $u^{(\omega)}$, $(\omega) = (2, n, N)$, вычисляется как

$$G^{(\omega)} = \int\limits_0^{u^{(\omega)}} H^{(\omega)}(z|u^{(\omega)})dz + \int\limits_{u^{(\omega)}}^1 h^{(\omega)}(z|u^{(\omega)})dz. \tag{1.2}$$

Покажем, что $G^{(2,n,N)} = 1/n$:

$$G^{(2,n,N)} = \int\limits_0^u H^{(2,n,N)}(z|u)dz + \int\limits_u^1 h^{(2,n,N)}(z|u)dz$$

$$= \int\limits_0^u \Big(\int\limits_z^u \Big(\frac{u^2 + y^2}{2}\Big)^{n-1} dy + \frac{1 - u^{2n}}{n(u+1)} + \frac{u^{2n-1} - (u-z)^{2n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}\Big)dz + \int\limits_u^1 (z - u + zu)^{n-1} dz$$

[2] Верхний индекс (m, n, N) или (m, n, F) следует понимать как “m-шаговая игра n лиц с отсутствием информации (N) или с полной информацией (F)” соответственно.

$$= \frac{u^{2n}}{n}\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big) + \int\limits_0^u \Big(\frac{1-u^{2n}}{n(u+1)} + \frac{u^{2n-1}-(u-z)^{2n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}\Big)dz + \frac{1-u^{2n}}{n(u+1)} = \frac{1}{n}.$$

В работе [9] была исследована также версия этой игры с бесконечным числом шагов. Значение оптимального порога $u^{(inf,n,N)} = u$ может быть найдено из следующего уравнения:

$$(e^u(u-1)+1)^{n-1} = \frac{e^{-u}\big(1-(e^u(u-1)+1)^n\big)}{n} + \int\limits_1^{u+1} (e^{z-1}-(z-u)e^u)^{n-1}dz. \qquad (1.3)$$

Выигрыши игрока при остановке и продолжении игры, если игрок получил на первом шаге число очков x, а остальные игроки используют стратегию $u^{(inf,n,N)} = u$, равны $h^{(inf,n,N)}(x|u)$ и $H^{(inf,n,N)}(x|u)$ соответственно и определяются по формулам

$$h^{(inf,n,N)}(x|u) = (1-e^u(1-x))^{n-1};$$

$$H^{(inf,n,N)}(x|u) = \int\limits_x^u H^{(inf,n,N)}(z|u)dz + \int\limits_u^1 h^{(inf,n,N)}(z|u)dz + \int\limits_1^{x+1} (e^{z-1}-(z-u)e^u)^{n-1}dz. \quad (1.4)$$

Дифференцируя (1.4) по x, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dH^{(inf,n,N)}(x|u)}{dx} = -H^{(inf,n,N)}(x|u) + (e^x-(x+1-u)e^u)^{n-1}$$

с граничным условием $H^{(inf,n,N)}(u|u) = h^{(inf,n,N)}(u|u) = (1-e^u(1-u))^{n-1}$. Его решение можно записать следующим образом:

$$H^{(inf,n,N)}(x|u) = e^{-x}\Bigg(e^u(1-e^u(1-u))^{n-1} - \int\limits_x^u e^z(e^z-(z+1-u)e^u)^{n-1}dz\Bigg).$$

Несложно видеть, что при $x=0$ при выборе оптимального порога u значение

$$H^{(inf,n,N)}(0|u) = 1/n$$

и представляет собой ожидаемый выигрыш игрока перед началом игры, т. е. $G^{(inf,n,N)}$. Это и понятно, игра симметрична, все игроки имеют одинаковые шансы и поэтому значение игры равно $1/n$.

Данная задача принадлежит классу задач с оптимальной остановкой, где оптимальным является так называемое правило продолжения на один шаг (one-stage look-ahead (OLA) stopping rule, см. в [5] более подробное описание). Согласно этому правилу сравниваются текущий выигрыш и ожидаемое вознаграждение при продолжении игры с остановкой на следующем шаге. В рассматриваемой задаче с оптимальной остановкой ожидаемый выигрыш $h^{(inf,n,N)}(x|u)$ игрока после первого шага является возрастающей функцией. В то же время ожидаемый выигрыш $H^{(inf,n,N)}(x|u)$ при продолжении игры еще на один шаг представляет собой невозрастающую функцию. Следовательно, в этой игре правило остановки OLA оптимально.

Значение ожидаемого выигрыша каждого игрока при использовании оптимальной стратегии $u^{(inf,n,N)}$ может быть получено из уравнения (1.2) для $(\omega) = (inf,n,N)$. Значения оптимальных порогов и оптимальных выигрышей для различных n представлены в таблице ниже. Как видно из таблицы, пороги в игре с бесконечным числом шагов выше, чем в двухшаговой игре.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что для $n \geq 2$, $u^{(2,n+1,N)} > u^{(2,n,N)}$ и $u^{(inf,n+1,N)} > u^{(inf,n,N)}$, и следовательно, $u^{(2,n,N)} > 1/2$ и $u^{(inf,n,N)} > 1/2$.

Оптимальные стратегии и выигрыши

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Игра без информации									
$u^{(2,n,N)}$	0.563	0.661	0.718	0.757	0.785	0.806	0.823	0.837	0.849
$G^{(2,n,N)}$	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	0.125	0.110	0.100
$u^{(inf,n,N)}$	0.633	0.718	0.767	0.800	0.823	0.841	0.856	0.867	0.877
$G^{(inf,n,N)}$	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	0.125	0.110	0.100
Игра с полной информацией									
$u_1^{(2,n,F)}$	0.532	0.649	0.711	0.752	0.781	0.804	0.821	0.835	0.847
$E(u_2^{(2,n,F)})$	0.599	0.705	0.752	0.783	0.806	0.824	0.838	0.850	0.860
$G_1^{(2,n,F)}$	0.454	0.305	0.231	0.186	0.156	0.135	0.118	0.106	0.095
$u_1^{(inf,n,F)}$	0.571	0.688	0.749	0.787	0.814	0.834	0.850	0.863	0.873
$G_1^{(inf,n,F)}$	0.425	0.286	0.218	0.176	0.149	0.128	0.113	0.101	0.092

Покажем это для случая с бесконечным числом шагов. Перепишем разность правой и левой части уравнения (1.3) в виде

$$g(n,y)=\int\limits_y^1(1-e^y(1-z))^{n-1}dz+\int\limits_1^{y+1}(e^{z-1}-(z-y)e^y)^{n-1}dz-(e^y(y-1)+1)^{n-1}.$$

Функция $g(n,y)$ убывает по y при $0\le y\le 1$.

Пусть $y=u^{(inf,n,N)}=u$. Тогда $g(n,u)=0$. Рассмотрим

$$g(n+1,u)=\int\limits_u^1(1-e^u(1-z))^{n}dz+\int\limits_1^{u+1}(e^{z-1}-(z-u)e^u)^{n}dz-(e^u(u-1)+1)^{n}$$

$$>(1-e^u(1-u))\left(\int\limits_u^1(1-e^u(1-z))^{n-1}dz+\int\limits_1^{u+1}(e^{z-1}-(z-u)e^u)^{n-1}dz-(e^u(u-1)+1)^{n-1}\right)$$

$$=(1-e^u(1-u))g(n,u)=0.$$

Следовательно, функция $g(n+1,y)$ обращается в нуль правее $y=u=u^{(inf,n,N)}$. Таким образом, $u^{(inf,n+1,N)}>u^{(inf,n,N)}$, и значит, пороги возрастают по n. А поскольку $u^{(inf,2,N)}>1/2$, то и все $u^{(inf,n,N)}>1/2$ для $n\ge 2$.

2. Двухшаговая игра с полной информацией

2.1. Игра двух лиц

Рассмотрим игру двух лиц с полной информацией о действиях противников. В отличие от постановки с отсутствием информации в этой игре участники последовательно получают очки. Пусть первым ходит игрок 1, а игрок 2 — вторым. Второму игроку известно общее число очков игрока 1. Такая постановка задачи была рассмотрена в работе [17] с помощью теории вероятностей. В данной статье задача исследуется с теоретико-игровой точки зрения. Находятся подробно не только оптимальные стратегии игроков, но и их выигрыши.

Приступая к игре, игрок 1 не знает, как поведет себя второй игрок при своем ходе. Предположим, что первый игрок для принятия решения использует следующую однопороговую стратегию: остановиться на первом шаге, если полученное значение случайной величины $X_1^{(1)}$ больше или равно пороговому значению $0 < u_1^{(2,2,F)} < 1$, и продолжить в противном случае.

Обозначим через $S^{(1)}$ сумму очков, полученных игроком 1 в результате использования стратегии $u_1^{(2,2,F)}$. $S^{(1)}$ равно $x_1^{(1)}$ — при остановке на первом шаге или $x_1^{(1)} + x_2^{(1)}$ — при продолжении:

$$S^{(1)} = \begin{cases} x_1^{(1)}, & \text{если } x_1^{(1)} \ge u_1^{(2,2,F)}, \\ x_1^{(1)} + x_2^{(1)}, & \text{если } x_1^{(1)} < u_1^{(2,2,F)}. \end{cases}$$

Второй игрок знает общее число очков первого игрока $S^{(1)}$. Руководствуясь этой информацией, игрок 2 останавливается на первом шаге, если $S^{(1)} > 1$ или если $x_1^{(2)} > S^{(1)}$, $S^{(1)} \le 1$; иначе он продолжает игру. Таким образом, стратегия игрока 2 имеет вид

$$u_2^{(2,2,F)} = \begin{cases} S^{(1)}, & \text{если } S^{(1)} \le 1, \\ 0, & \text{если } S^{(1)} > 1. \end{cases}$$

Найдем оптимальное поведение первого игрока. Обозначим через $S^{(2)}$ сумму очков, которую получит игрок 2 в результате игры. Вычислим выигрыш игрока 1 при остановке на первом шаге с числом очков $X_1^{(1)} = x$:

$$h_1^{(2,2,F)}(x) = P\{S^{(2)} < x\} + P\{S^{(2)} > 1\}$$
$$= P\{X_1^{(2)} < x, X_1^{(2)} + X_2^{(2)} < x\} + P\{X_1^{(2)} < x, X_1^{(2)} + X_2^{(2)} > 1\}$$
$$= \int_0^x \int_0^{x-x_1} dx_2 dx_1 + \int_0^x \int_{1-x_1}^1 dx_2 dx_1 = x^2.$$

Выигрыш игрока 1 при продолжении игры определяется как

$$H_1^{(2,2,F)}(x) = \int_x^1 h_1^{(2,2,F)}(z) dz = 1/3 - x^3/3.$$

Оптимальный порог $u_1^{(2,2,F)} = x$ может быть найден из уравнения $h_1^{(2,2,F)}(x) = H_1^{(2,2,F)}(x)$. Так как $h_1^{(2,2,F)}(x)$ возрастает, а $H_1^{(2,2,F)}(x)$ убывает по x, то существует единственное решение уравнения $u_1^{(2,2,F)} = x \approx 0.532$.

2.2. Игра n лиц

Рассмотрим игру n лиц с полной информацией, где очередной игрок получает свои очки только после предшествующих игроков. Игроки не знают значений наблюдений последующих участников, но знают значения наблюдений и решения своих предшественников. Каждый игрок стремится максимизировать вероятность своего выигрыша.

Обозначим через $S^{(i)}$ сумму очков, полученных игроком i ($i = 1, \dots, n$). $S^{(i)}$ равно $x_1^{(i)}$ — при остановке на первом шаге или $x_1^{(i)} + x_2^{(i)}$ — при продолжении. Также обозначим через $u_i^{(2,n,F)}$ пороговую стратегию игрока i. Тогда стратегия игрока n вычисляется по формуле

$$u_n^{(2,n,F)} = \max_{i=\overline{1,n-1}} \{S^{(i)} \cdot I\{S^{(i)} \le 1\}\}.$$

Далее стратегию игрока k, $k = 2, \dots, n-1$, определим как

$$u_k^{(2,n,F)} = \max\{\max_{i=\overline{1,k-1}} \{S^{(i)} \cdot I\{S^{(i)} \le 1\}\}; u_1^{(2,n-k+1,F)}\}.$$

Заметим, что выигрыш и оптимальная стратегия игрока зависят только от тех игроков, чьи суммы очков после второго шага были меньше 1.

Теорема 1. *В игре n лиц с полной информацией и двумя шагами оптимальная стратегия $u_1^{(2,n,F)} = v$ первого игрока может быть найдена из уравнения*

$$v^{2n-2} = \frac{1 - v^{2n-1}}{2n-1}, \tag{2.1}$$

а ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии вычисляется по формуле

$$G_1^{(2,n,F)}(v) = \int\limits_0^{u_1^{(2,2,F)}} H_2(x)dx + \int\limits_{u_1^{(2,2,F)}}^{u_1^{(2,3,F)}} H_3(x)dx + \dots + \int\limits_{u_1^{(2,n-1,F)}}^{v} H_n(x)dx + \int\limits_v^1 x^{2(n-1)}dx, \tag{2.2}$$

где $u_1^{(2,2,F)} < u_1^{(2,3,F)} < \dots < u_1^{(2,n,F)}$;

$$H_i(x) = \int\limits_x^{u_1^{(2,i,F)}} h_i(y)dy + H_{i+1}(u_1^{(2,i,F)}), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad H_n(x) = \int\limits_x^1 h_n(y)dy;$$

$$h_j(y) = h_{j+1}(y)\frac{y^2 + (u_1^{(2,j,F)})^2}{2y^2}, \quad j = i, \dots, n-1, \quad h_n(y) = y^{2(n-1)}.$$

Доказательство. Докажем теорему по индукции. Для $n = 2$ условие теоремы выполняется. Далее для $n = 3$ нетрудно показать, что $u_1^{(2,2,F)} < u_1^{(2,3,F)}$ и $u_1^{(2,3,F)}$ удовлетворяет уравнению (2.1), а ожидаемый выигрыш первого игрока находится из (2.2). Действительно, $G_1^{(2,n,F)}(v)$ достигает максимума при $v > u_1^{(2,2,F)}$, удовлетворяющем уравнению (2.1), а при $v < u_1^{(2,2,F)}$ мы получаем противоречие.

Пусть условие теоремы выполняется для игры с $n-1$ игроками и $u_1^{(2,2,F)} < u_1^{(2,3,F)} < \dots < u_1^{(2,n-1,F)}$, т. е. пороги первого игрока возрастают по n.

Рассмотрим игру n лиц. Предположим, что первый игрок для принятия решения об остановке/продолжении использует однопороговую стратегию v и $u_1^{(2,n-1,F)} < v < 1$. Найдем этот порог. Для простоты обозначим здесь $u_1^{(2,k,F)} = u_1^{[k]}$ и $G_1^{(2,k,F)} = G_1^{[k]}$, $k = 2, \dots, n$.

Ожидаемый выигрыш первого игрока может быть описан формулой

$$G_1^{[n]}(v) = \int\limits_0^{u_1^{[2]}} H_2(x)dx + \int\limits_{u_1^{[2]}}^{u_1^{[3]}} H_3(x)dx + \dots + \int\limits_{u_1^{[n-1]}}^{v} H_n(x)dx + \int\limits_v^1 x^{2(n-1)}dx.$$

Величина $H_i(x)$ представляет собой вероятность выигрыша первого игрока при продолжении игры на следующий шаг для x из соответствующего интервала. Она имеет вид

$$H_i(x) = \int\limits_x^{u_1^{[i]}} h_i(y)dy + \int\limits_{u_1^{[i]}}^{u_1^{[i+1]}} h_{i+1}(y)dy + \ldots + \int\limits_{u_1^{[n-1]}}^{1} h_n(y)dy = \int\limits_x^{u_1^{[i]}} h_i(y)dy + H_{i+1}(u_1^{[i]}), \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$H_n(x) = \int\limits_x^1 h_n(y)dy,$$

где $h_j(y)$ — вероятность выигрыша игрока 1 при остановке на первом шаге со значением y,

$$h_j(y) = P\Big\{ \bigcap_{k=2}^{n} \big(\{S^{(k)} < y\} \cup \{S^{(k)} > 1\}\big) \Big\} = y^{2(j-1)} \frac{\prod_{k=2}^{n-(j-1)} \big(y^2 + \big(u_1^{[n-k+1]}\big)^2\big)}{2^{n-j}}$$

$$= h_{j-1}(y)\frac{2y^2}{y^2 + (u_1^{[j-1]})^2}, \quad j = i, \dots, n-1, \quad h_n(y) = y^{2(n-1)}.$$

Функция $G_1^{[n]}(v)$ вогнута по v на $[0,1]$ (вторая производная неположительна) и достигает максимума в точке, абсцисса которой находится из уравнения, полученного приравниванием производной $G_1^{[n]}(v)$ по v к нулю, т. е. из $h_n(v) = H_n(v)$, или $v^{2n-2} = \dfrac{1 - v^{2n-1}}{2n-1}$.

Если же порог первого игрока удовлетворяет соотношению $u_1^{[n-2]} < v < u_1^{[n-1]}$, то его ожидаемый выигрыш вычисляется как

$$\hat{G}_1^{[n]}(v) = \int_0^{u_1^{[2]}} H_2(x)dx + \int_{u_1^{[2]}}^{u_1^{[3]}} H_3(x)dx + \dots + \int_{u_1^{[n-2]}}^{v} H_{n-1}(x)dx + \int_v^1 h_{n-1}(x)dx$$

и, следовательно, оптимальный порог выводится из уравнения $h_{n-1}(v) = H_{n-1}(v)$.

Функция $\hat{G}_1^{[n]}(v)$ вогнута на $[0,1]$ (вторая производная неположительна). Производная функции $\hat{G}_1^{[n]}(v)$ по v

$$\int_v^{u_1^{[n-1]}} y^{2(n-2)}\frac{(y^2 + (u_1^{[n-1]})^2)}{2}dy + \int_{u_1^{[n-1]}}^1 y^{2(n-1)}dy - v^{2(n-2)}\frac{(v^2 + (u_1^{[n-1]})^2)}{2}$$

меняет знак с положительного на отрицательный правее $u_1^{[n-1]}$. Действительно, производная в точке $u_1^{[n-1]}$ имеет вид $\dfrac{1 - (u_1^{[n-1]})^{2n-1}}{2n-1} - (u_1^{[n-1]})^{2n-2} > \dfrac{1 - (u^*)^{2n-1}}{2n-1} - (u^*)^{2n-2} = 0$, где неравенство справедливо для $u^* > u_1^{[n-1]}$, и выражение обращается в нуль при $u^* > u_1^{[n-1]}$, удовлетворяющем (2.1). При $v = 1$ производная имеет следующий вид:

$$\frac{(1-n)(2n-3) + (u_1^{[n-1]})^{2n-1}}{(2n-1)(2n-3)} - \frac{(n-1)(u_1^{[n-1]})^2}{2n-3} < \frac{(1-n)(2n-3)+1}{(2n-1)(2n-3)} = \frac{-(n-2)(2n-1)}{(2n-1)(2n-3)} < 0.$$

Это означает, что $G_1^{[n]}(v)$ достигает максимума в точке перегиба с абсциссой $v > u_1^{[n-1]}$.

Теорема доказана.

Значения оптимального порога $u_1^{(2,n,F)}$ и оптимальные выигрыши $G_1^{(2,n,F)}$, которые вычисляются по формулам (2.1) и (2.2), представлены для различных n в таблице выше. Заметим, что $u_1^{(2,n,F)} > 1/2$.

3. Многошаговая игра с полной информацией

3.1. Многошаговая игра двух лиц с бесконечным числом шагов

Рассмотрим многошаговую игру с полной информацией и двумя игроками. Пусть игроки один за другим получают последовательность сумм независимых и одинаково распределенных на отрезке $[0,1]$ случайных величин, $\{X_i^{(1)}\}$ и $\{X_i^{(2)}\}$, $i = 1, 2, \dots,$.

$$S_t^{(k)} = \sum_{i=1}^{t} X_i^{(k)}, \quad t = 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2. \tag{3.1}$$

Рассмотрим поведение каждого из игроков. Пусть игрок 2 использует стратегию $u_2^{(inf,2,F)} = u, 0 < u < 1$, и фиксирует сумму своих очков в первый момент, когда сумма $S_t^{(2)}$

превысит u. Обозначим эту итоговую сумму для игрока 2 через $S^{(2)}$. Второй игрок знает общее число очков первого игрока $S^{(1)}$. Исходя из этой информации второй игрок останавливается, если $S^{(2)} > S^{(1)}$ или $S^{(1)} > 1$, и продолжает, если $S^{(2)} \leq S^{(1)}$. Таким образом, стратегию игрока 2 находим по формуле

$$u_2^{(inf,2,F)} = u = S^{(1)} I\{S^{(1)} \leq 1\}.$$

Для вычисления выигрыша игрока найдем распределение $S^{(2)}$. Для $u \leq z \leq 1$ получим

$$P\{S^{(2)} \leq z\} = \sum_{t=1}^{\infty} P\{S_t^{(2)} \leq z\} = \sum_{t=1}^{\infty} P\{S_1^{(2)} < u, \ldots, S_{t-1}^{(2)} < u, S_t^{(2)} \in [u, z]\}$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{u^{t-1}}{(t-1)!}(z-u) = e^u(z-u);$$

тогда

$$P\{S^{(2)} > 1\} = 1 - P\{S^{(2)} \leq 1\} = 1 - e^u(1-u). \tag{3.2}$$

Найдем оптимальный порог $0 < u_1^{(inf,2,F)} < 1$ первого игрока. Выигрыш игрока 1 при остановке в момент времени t, если сумма его очков $S_t^{(1)} = x$, определим как

$$h_1^{(inf,2,F)}(x) = P\{S^{(2)} < x\} + P\{S^{(2)} > 1\}.$$

Вероятность $P\{S^{(2)} < x\} = 0$. Тогда, используя выражение из (3.2) для $u = x$, имеем

$$h_1^{(inf,2,F)}(x) = 1 - e^x(1-x).$$

Выигрыш первого игрока при продолжении игры получаем по формуле

$$H_1^{(inf,2,F)}(x) = \int_x^{u_1} H_1^{(inf,2,F)}(z)dz + \int_{u_1}^{1} h_1^{(inf,2,F)}(z)dz = \int_x^{u_1} H_1^{(inf,2,F)}(z)dz + 1 - e - u_1 - e^{u_1}(u_1 - 2).$$

Оптимальный порог $u_1^{(inf,2,F)} = x$ может быть найден из уравнения $h_1^{(inf,2,F)}(x) = H_1^{(inf,2,F)}(x)$, или

$$e^x(1-x) = e + x + e^x(x-2). \tag{3.3}$$

Так как $h_1^{(inf,2,F)}(x)$ возрастает по x, а $H_1^{(inf,2,F)}(x)$ убывает, то (3.3) имеет единственное решение. $x \approx 0.571$ — оптимальный порог $u_1^{(inf,2,F)}$ для первого игрока.

3.2. Многошаговая игра n лиц с бесконечным числом шагов

Рассмотрим многошаговую игру с полной информацией и n игроками. Пусть игроки один за другим получают последовательность сумм независимых и одинаково распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин вида (3.1), где $k = 1, \ldots, n$.

Обозначим через $S^{(k)}$ сумму очков, полученную игроком k $(k = 1, \ldots, n)$, а через $u_k^{(inf,n,F)}$ его пороговую стратегию. Тогда стратегию игрока n вычислим следующим образом:

$$u_n^{(inf,n,F)} = \max_{i=\overline{1,n-1}} \{S^{(i)} \cdot I\{S^{(i)} \leq 1\}\}.$$

Далее стратегию игрока k, $k = 2, \ldots, n-1$, найдем как

$$u_k^{(inf,n,F)} = \max\{\max_{i=\overline{1,k-1}} \{S^{(i)} \cdot I\{S^{(i)} \leq 1\}\}; u_1^{(inf,n-k+1,F)}\}.$$

Теорема 2. *В игре n лиц с полной информацией и бесконечным числом шагов оптимальная стратегия $u_1^{(inf,n,F)} = v$ может быть получена из уравнения*

$$(1 - e^v(1-v))^{n-1} = \int_v^1 (1 - e^y(1-y))^{n-1} dy,$$

а ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии находится по формуле

$$G_1^{(inf,n,F)}(v) = e^v(1 - e^v(1-v))^{n-1},$$

причем $u_1^{(inf,2,F)} < u_1^{(inf,3,F)} < \dots < u_1^{(inf,n,F)}$.

Доказательство возрастания порогов по n и вывод уравнения для нахождения оптимального порога проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Найдем ожидаемый выигрыш первого игрока $G_1^{(inf,n,F)}(u_1^{(inf,n,F)})$ при

$$u_1^{(inf,n-1,F)} < u_1^{(inf,n,F)} = u_1 < 1$$

в данной игре. Выигрыш игрока 1, если число его очков $S^{(1)} = x$, учитывая, что $P\{S^{(k)} < x | S^{(1)} = x\} = 0$, определим как

$$h_1^{(inf,n,F)}(x) = P\Big\{ \bigcap_{k=2}^{n} \Big(\{S^{(k)} > 1\} \Big) \Big\} = P(\{S^{(2)} > 1\})^{n-1} = (1 - e^x(1-x))^{n-1}.$$

Выигрыш первого игрока при продолжении игры вычислим как

$$H_1^{(inf,n,F)}(x) = \int_x^{u_1} H_1^{(inf,n,F)}(z) dz + \int_{u_1}^1 h_1^{(inf,n,F)}(z) dz.$$

Дифференцируя $H_1^{(inf,n,F)}(x)$ и учитывая граничное условие $H_1^{(inf,n,F)}(u_1) = h_1^{(inf,n,F)}(u_1)$, получим

$$H_1^{(inf,n,F)}(x) = e^{u_1 - x}(1 - e^{u_1}(1-u_1))^{n-1}.$$

$H_1^{(inf,n,F)}(0)$ представляет собой ожидаемый выигрыш $G_1^{(inf,n,F)}$ игрока 1 перед началом игры при использовании оптимального порога u_1, т. е.

$$G_1^{(inf,n,F)}(u_1) = H_1^{(inf,n,F)}(0) = e^{u_1}(1 - e^{u_1}(1-u_1))^{n-1}.$$

Теорема доказана.

Значения оптимальных поргов $u_1^{(inf,n,F)}$ и оптимальных выигрышей для различных n отражены в таблице, представленной ранее. Заметим из таблицы, что в игре с полной информацией оптимальные пороги игрока 1 в случае бесконечного числа шагов больше, чем пороги в случае двух шагов.

3.3. Сравнение стратегий в играх разного типа информации

Теорема 3. *Оптимальный порог первого игрока в игре с полной информацией меньше, чем для игроков в игре с отсутствием информации, т. е. выполняются соотношения*

$$\text{а)}\ \ u_1^{(2,n,F)} < u^{(2,n,N)}; \quad \text{б)}\ \ u_1^{(inf,n,F)} < u^{(inf,n,N)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай (а) с двумя шагами, доказательство случая (б) с бесконечным числом шагов проводится по такой же схеме.

Случай а). Оптимальные пороги $u^{(2,n,N)}$ и $u_1^{(2,n,F)}$ находятся из уравнений (1.1) и (2.1) соответственно. Обозначим как $h^{(2,n,N)}(x)$ и $h_1^{(2,n,F)}(x)$ левые части этих уравнений и как $H^{(2,n,N)}(x)$ и $H_1^{(2,n,F)}(x)$ их правые части соответственно. Эти функции имеют вид

$$h^{(2,n,N)}(x) = x^{2(n-1)}, \quad H^{(2,n,N)}(x) = \int\limits_x^1 (zx+z-x)^{n-1}dz + \int\limits_1^{x+1} \big(P\{S^{(k)} > z\}\big)^{n-1}dz,$$

$$h_1^{(2,n,F)}(x) = x^{2(n-1)}, \quad H_1^{(2,n,F)}(x) = \int\limits_x^1 z^{2(n-1)}dz,$$

где $S^{(k)}$ — общее число очков игрока k в игре с отсутствием информации.

Функции $h_1^{(2,n,N)}(x)$ и $h_1^{(2,n,F)}(x)$ совпадают и возрастают.

Очевидно, что $H_1^{(2,n,F)}(x)$ убывает по x. Рассмотрим разность функций

$$H^{(2,n,N)}(x) - H_1^{(2,n,F)}(x) = \left(\int\limits_x^1 (zx+z-x)^{n-1}dz - \int\limits_x^1 (z^2)^{n-1}dz\right) + \int\limits_1^{x+1} \big(P\{S^{(k)} > z\}\big)^{n-1}dz.$$

Выражение в скобках положительно, так как для $z > x$ $z^2 < zx + z - x$. Следовательно, $H^{(2,n,N)}(x) - H_1^{(2,n,F)}(x) > 0$; это означает, что $u_1^{(2,n,F)} < u^{(2,n,N)}$.

Теорема доказана.

Соотношения теоремы можно установить по данным таблицы, представленной выше. Таким образом, наличие информации уменьшает пороги оптимальной остановки первого игрока. В игре с полной информацией первый игрок становится более осторожным в своей стратегии, тогда как последующие игроки наблюдают очки предшественников и могут быть заинтересованы в увеличении своих собственных порогов.

З а м е ч а н и е 2. Из численных результатов (см. таблицу) заметим, что для $n \geq 2$ выполняется $G_1^{(2,n,F)} < G^{(2,n,N)} = 1/n$, так же как и $G_1^{(inf,n,F)} < G^{(inf,n,N)} = 1/n$.

З а м е ч а н и е 3. Наличие информации дает преимущество последнему игроку, так что он может ожидать больший выигрыш, чем в случае отсутствия информации.

Следующий пример демонстрирует это соотношение для двухшаговой игры двух лиц.

П р и м е р. Покажем, что $G^{(2,2,N)} < G_2^{(2,2,F)}$. Имеем $G^{(2,2,N)} = 1/2 = 0.5$.

Оптимальная стратегия второго игрока в двухшаговой игре с полной информацией — $u_2^{(2,2,F)} = S^{(1)} I\{S^{(1)} \leq 1\}$. Тогда его ожидаемый выигрыш определяется как

$$G_2^{(2,2,F)} = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^s H_2^{(2,2,F)}(z)dz + \int\limits_s^1 h_2^{(2,2,F)}(z)dz\right)dF(s),$$

где $F(s) = P(S^{(1)} < s)$ — функция распределения случайной величины $S^{(1)}$. Поскольку $h_2^{(2,2,F)}(z) = 1$ для $z \in [s,1]$, перепишем ожидаемый выигрыш второго игрока:

$$G_2^{(2,2,F)} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^s H_2^{(2,2,F)}(z)dz + (1-s)\right)dF(s) + \int\limits_1^2 dF(s).$$

Для $0 < z < 1$ имеем $H_2^{(2,2,F)}(z) = P(S^{(1)} < z + X_2^{(2)} < 1) = 1 - s$. Тогда

$$G_2^{(2,2,F)} = \int_0^1 \left(\int_0^s (1-s)dz + (1-s) \right) dF(s) + \int_1^2 dF(s) = 1 - \int_0^1 s^2 dF(s).$$

Для упрощения обозначений положим $u_1^{(2,2,F)} = u_1$ и $u^{(2,2,N)} = u$.
Для $0 \le s \le u_1$: $F(s) = P\{S^{(1)} < s\} = P\{X_1^{(1)} < s, X_1^{(1)} + X_2^{(1)} < s\} = s^2/2$;
для $u_1 < s \le 1$:

$$F(s) = P\{S^{(1)} < s\} = P\{u_1 \le X_1^{(1)} < s\} + P\{X_1^{(1)} \le u_1, X_1^{(1)} + X_2^{(1)} < s\}$$

$$= s - u_1 + \int_0^{u_1} (s-z)dz = s(1+u_1) - u_1 - \frac{u_1^2}{2}.$$

Тогда имеем $G_2^{(2,2,F)} = 0.546$. Таким образом, $G_1^{(2,2,F)} < G^{(2,2,N)} < G_2^{(2,2,F)}$.

Найдем ожидаемый порог второго игрока. Обозначим $u_2^{(2,2,F)} = u_2$, тогда

$$E(u_2) = \int_0^{u_1} s \cdot s ds + \int_{u_1}^1 s(1+u_1)ds = \frac{1}{2} + \frac{u_1}{2} - \frac{u_1^2}{2} - \frac{u_1^3}{6} = 0.599.$$

Получим, что $u_1 < u < E(u_2)$.

З а м е ч а н и е 4. Ожидаемый порог второго игрока $E(u_2^{(2,n,F)}) > u^{(2,n,N)}$.

Вычислим ожидаемый порог второго игрока в игре с полной информацией. Пусть $u_2^{(2,n,F)} = u_2^{[n]}$, $u_1^{(2,n,F)} = u_1^{[n]}$. Функцию распределения $S^{(1)}$ числа очков игрока 1 устанавливаем следующим образом:

$$F^{[n]}(s) = \begin{cases} \dfrac{s^2}{2}, & \text{если} \quad 0 \le s \le u_1^{[n]}, \\ s(1+u_1^{[n]}) - u_1^{[n]} - \dfrac{(u_1^{[n]})^2}{2}, & \text{если} \quad u_1^{[n]} < s \le 1, \\ 1 - \dfrac{(u_1^{[n]} - s + 1)^2}{2}, & \text{если} \quad 1 < s \le 1 + u_1^{[n]}, \\ 1, & \text{если} \quad 1 + u_1^{[n]} < s \le 2. \end{cases}$$

Заметим, что $u_2^{[n]} = \max\{\{S^{(1)} \cdot I\{S^{(1)} \le 1\}\}; u_1^{[n-1]}\}$, тогда ожидаемый порог второго игрока в игре n лиц вычисляется по формуле

$$E(u_2^{[n]}) = \int_0^{u_1^{[n-1]}} u_1^{[n-1]} s ds + \int_{u_1^{[n-1]}}^{u_1^{[n]}} s^2 ds + \int_{u_1^{[n]}}^1 s(1+u_1^{[n]})ds + \int_1^{1+u_1^{[n]}} u_1^{[n-1]}(1+u_1^{[n]} - s)ds$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{u_1^{[n]}}{2} - \frac{(u_1^{[n]})^2}{2} - \frac{(u_1^{[n]})^3}{6} + \frac{(u_1^{[n-1]})^3}{6} + \frac{u_1^{[n-1]}(u_1^{[n]})^2}{2}.$$

Как видно из таблицы, представленной выше, $u_1^{[n]} < u < E(u_2^{[n]})$. Таким образом, в игре с полной информацией порог игрока 1 ниже, а порог игрока 2 выше, чем соответствующие пороги в игре с отсутствием информации.

Численные результаты показывают, что в игре с полной информацией каждый последующий игрок имеет преимущество перед предыдущими в том смысле, что он получает больше информации и может использовать ее при принятии решения об остановке/продолжении игры.

З а м е ч а н и е 5. Разница между ожидаемыми выигрышами последнего игрока в игре с полной информацией и игрока в игре без информации представляет собой цену информации в игре. Обозначим через $PoI^{(m,n)} = G_n^{(m,n,F)} - G^{(m,n,N)}$ цену информации в m-шаговой игре n лиц.

В приведенном выше примере $PoI^{(2,2)} = G_2^{(2,2,F)} - G^{(2,2,N)} = 0.046$.

4. Заключение

Данная работа расширяет исследования некооперативной игры с оптимальной остановкой, прототипом которой является телевизионное шоу “The Price is Right”, где игроки по очереди могут получить одно или два числовых значения, чтобы быть как можно ближе к заданной границе, но не превышать ее. Была расширена последовательная постановка игры с полной информацией: на произвольное число участников в игре и на бесконечное число шагов.

Для игры с полной информацией, так же как и для случая с отсутствием информации показано, что оптимальный порог всегда больше половины, или половины предельного значения, установленного в игре. Для каждой игры с различным типом информации вычислены значения оптимальных порогов и ожидаемых выигрышей для различного числа участников.

Проведено сравнение игр с использованием различных типов информации. Для произвольного числа игроков были рассмотрены пороговые стратегии в игре с отсутствием информации и с полной информацией о действиях противников. Было установлено, что доступность информации в игре меняет оптимальную стратегию первого игрока, снижая ее значение. Оптимальный порог первого игрока и его ожидаемый выигрыш ниже, чем в игре с отсутствием информации для того же числа участников. Когда имеется доступ к информации о действиях и результатах предшественников, последующие игроки получают возможность увеличить значения своих порогов. Между тем их оптимальные пороги превышают пороговое значение в игре с отсутствием информации.

В дальнейшем следует также провести исследование для случая, когда доступна только частичная информация. Это может быть постановка, в которой каждый игрок знает общее число участников и свою очередь в игре. На своем ходе он также получает дополнительную информацию о количестве участников, чьи очки превысили заданную границу, однако игроку ничего не известно об очках, полученных предыдущими игроками. Интересно оценить, какие преимущества дает такая дополнительная информация игроку в сравнении с игрой без информации. С другой стороны, стоит исследовать, будет ли игрок, обладающий такой частичной информацией, оценивать выше свои шансы на выигрыш, и идти, таким образом, на больший риск, чем в случае, когда доступна вся информация о предыдущих игроках.

Эта игровая модель может быть расширена дальше. Хотя исследования в данной работе ограничены постановкой с одним раундом, можно рассмотреть игру с двумя или более раундами, когда каждый раунд сопровождается выбыванием одного или нескольких участников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Alpern S., Katrantzi I., Ramsey D.** Partnership formation with age-dependent preferences // European J. Operational Research. 2013. Vol. 225, iss. 1. P. 91–99. doi: 10.1016/j.ejor.2012.09.012 .
2. **Bennett R.W., Hickman K.A.** Rationality and the “Price is Right” // J. Economic Behavior & Organization. 1993. Vol. 21, iss. 1. P. 99–105. doi: 10.1016/0167- 2681(93)90042-N .
3. **Berk J., Hughson E., Vandezande K.** The Price is Right, but are the bids? An investigation of rational decision theory // The American Economic Review. 1996. Vol. 86, no. 4. P. 954–970.
4. **Bruss F.T., Ferguson T.S.** Multiple buying or selling with vector offers // J. Appl. Probability. 1997. Vol. 34. no. 4. P. 959–973. doi: 10.2307/3215010 .
5. **Chow Y.S., Robbins H., Siegmund D.** Great expectations: The theory of optimal stopping. Boston: Houghton Mifflin, 1971. 139 p.

6. **Coe P.R., Butterworth W.** Optimal stopping in "The Showcase Showdown" // The American Statistician. 1995. Vol. 49, no. 3. P. 271–275. doi: 10.2307/2684199 .
7. **Kaynar B.** Optimal stopping in a stochastic game // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2009. Vol. 23. P. 51–60. doi: 10.1017/S0269964809000059 .
8. **Krasnosielska-Kobos A.** Construction of Nash equilibrium based on multiple stopping problem in multi-person game // Math. Methods Oper. Research. 2016. Vol. 83, no. 1. P. 53–70. doi: 10.1007/s00186-015-0519-8 .
9. **Mazalov V.V., Ivashko A.A.** Equilibrium in n-person game of showcase showdown // Probability in the Engineering and Informational Sciences.2010. Vol. 24, no. 3. P. 397–403. doi: 10.1017/S0269964810000045 .
10. **Ramsey D.M.** A model of a 2-player stopping game with priority and asynchronous observation // Math. Methods Oper. Research. 2007. Vol. 66, no. 1. P. 149–164. doi: 10.1007/s00186-006-0136-7 .
11. **Sakaguchi M.** Equilibrium in two-player games of "Showcase Showdown" // Scientiae Mathematicae Japonicae. 2005. Vol. 61. P. 145–151.
12. **Sakaguchi M.** Players information in two-player games of "Score Showdown" // Game Theory Appl. 2007. Vol. 11. P. 111–124.
13. **Sofronov G.** An optimal sequential procedure for a multiple selling problem with independent observations // European J. Oper. Research. 2013. Vol. 225, no. 2. P. 332–336. doi: 10.1016/j.ejor.2012.09.042 .
14. **Solan E., Vieille N.** Quitting games // Math. Oper. Research. 2001. Vol. 2, no. 26, P. 265–285.
15. **Szajowski K., Tamaki M.** Shelf life of candidates in the generalized secretary problem // Oper. Research Letters. 2016. Vol. 44, no. 4. P. 498–502. doi: 10.1016/j.orl.2016.05.002 .
16. **Tenorio R., Cason T.N.** To spin or not to spin? Natural and laboratory experiments from "The Price is Right" // The Economic J. 2002. Vol. 112, iss. 476. P. 170–195. doi: 10.1111/1468-0297.0j678 .
17. **Tijms H.C.** Understanding probability: 2 edn. Cambridge: Cambridge University Press, 2007, 452 p.

Поступила 6.08.2019
После доработки 15.08.2019
Принята к публикации 19.08.2019

Серёгина Татьяна Валерьевна
канд. наук в области информатики и автоматики
Французская Национальная школа гражданской авиации;
Тулузская бизнес-школа
г. Тулуза, Франция
e-mail: ts.tseregina@gmail.com

Ивашко Анна Антоновна
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН;
Петрозаводский государственный университет
г. Петрозаводск
e-mail: aivashko@krc.karelia.ru

Мазалов Владимир Викторович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
директор
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
г. Петрозаводск;
Школа математики и статистики, Университет Циндао, Институт прикладной математики
Циндао, 266071, Китай
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

REFERENCES

1. Alpern S., Katrantzi I., Ramsey D. Partnership formation with age-dependent preferences. *European J. Operational Research*, 2013, vol. 225, iss. 1, pp. 91–99. doi: 10.1016/j.ejor.2012.09.012 .

2. Bennett R.W., Hickman K.A. Rationality and the “Price is Right”. *J. Economic Behavior & Organization*, 1993, vol. 21, iss. 1, pp. 99–105. doi: 10.1016/0167- 2681(93)90042-N .
3. Berk J., Hughson E., Vandezande K. The Price is Right, but are the bids? An investigation of rational decision theory. *The American Economic Review*, 1996, vol. 86, no. 4, pp. 954–970.
4. Bruss F.T., Ferguson T.S. Multiple buying or selling with vector offers. *J. Appl. Probability*, 1997, vol. 34, no. 4, pp. 959–973. doi: 10.2307/3215010 .
5. Chow Y.S., Robbins H., Siegmund D. *Great expectations: The theory of optimal stopping.* Boston: Houghton Mifflin, 1971, 139 p.
6. Coe P.R., Butterworth W. Optimal stopping in “The Showcase Showdown”. *The American Statistician*, 1995, vol. 49, no. 3, pp. 271–275. doi: 10.2307/2684199 .
7. Kaynar B. Optimal stopping in a stochastic game. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2009, vol. 23, pp. 51–60. doi: 10.1017/S0269964809000059 .
8. Krasnosielska-Kobos A. Construction of Nash equilibrium based on multiple stopping problem in multi-person game. *Math. Methods Oper. Research*, 2016, vol. 83, no. 1, pp. 53–70. doi: 10.1007/s00186-015-0519-8 .
9. Mazalov V.V., Ivashko A.A. Equilibrium in n-person game of showcase showdown. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2010, vol. 24, no. 3, pp. 397–403. doi: 10.1017/S0269964810000045 .
10. Ramsey D.M. A model of a 2-player stopping game with priority and asynchronous observation. *Math. Methods Oper. Research*, 2007, vol. 66, no. 1, pp. 149–164. doi: 10.1007/s00186-006-0136-7/.
11. Sakaguchi M. Equilibrium in two-player games of “Showcase Showdown”. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 2005, vol. 61, pp. 145–151.
12. Sakaguchi M. Players information in two-player games of “Score Showdown”. *Game Theory Appl.*, 2007, vol. 11, pp. 111–124.
13. Sofronov G. An optimal sequential procedure for a multiple selling problem with independent observations // European J. Oper. Research. 2013. Vol. 225, no. 2. P. 332–336. doi: 10.1016/j.ejor.2012.09.042 .
14. Solan E., Vieille N. Quitting games. *Math. Oper. Research*, 2001, vol. 2, no. 26, pp. 265–285.
15. Szajowski K., Tamaki M. Shelf life of candidates in the generalized secretary problem. *Oper. Research Letters*, 2016, vol. 44, no. 4, pp. 498–502. doi: 10.1016/j.orl.2016.05.002 .
16. Tenorio R., Cason T.N. To spin or not to spin? Natural and laboratory experiments from “The Price is Right” . *The Economic J.*, 2002, vol. 112, iss. 476, pp. 170–195. doi: 10.1111/1468-0297.0j678 .
17. Tijms H.C. *Understanding probability.* Cambridge: Cambridge University Press, 2007, 452 p.

Received August 6, 2019
Revised August 15, 2019
Accepted August 19, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Shandong Province “Double-Hundred Talent Plan” (No. WST2017009).

Tatiana Valerievna Seregina, PhD in Computer Science and Automation, École Nationale de l’Aviation Civile - Université de Toulouse, 31055 Toulouse Cedex 4, France, Toulouse Business School - Université Toulouse I, 31068 Toulouse Cedex 7, France, e-mail: ts.tseregina@gmail.com .

Anna Antonovna Ivashko, Cand. Phys.-Math. Sci., Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, 185910 Russia; Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, 185910 Russia, e-mail: aivashko@krc.karelia.ru .

Vladimir Viktorovich Mazalov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Institute of Applied Mathematics, Qingdao, 266071, China; Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, 185910 Russia, e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru .

Cite this article as: T. V. Seregina, A. A. Ivashko, V. V. Mazalov. Optimal stopping strategies in the game “The Price Is Right”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 217–231 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

К ПОСТРОЕНИЮ НЕУПРЕЖДАЮЩЕГО СЕЛЕКТОРА МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ[1]

Д. А. Серков, А. Г. Ченцов

В работе изучаются свойства многозначных отображений общего вида в аспекте возможности выделения из них неупреждающих селекторов. Свойство неупреждаемости формулируется для произвольной области определения заданием некоторого семейства “тестовых” подмножеств. Предложены достаточные условия существования неупреждающего селектора неупреждающего многозначного отображения: его значения должны быть непустыми компактами, а семейство “тестовых” подмножеств необходимо линейно упорядочить по включению. В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрена возможность их приложения к дифференциальной игре сближения-уклонения в форме П. Варайя и Дж. Лин.

Ключевые слова: квазистратегия, неупреждаемость, селектор, топология.

D. A. Serkov, A. G. Chentsov. On the construction of a nonanticipating selection of a multivalued mapping.

We study the properties of multivalued mappings of general form with respect to the possibility of finding their nonanticipating selections. The property of nonanticipation is formulated for an arbitrary domain by specifying some family of “test” subsets. Sufficient conditions for the existence of a nonanticipating selection of a nonanticipating multivalued mapping are proposed: the values of the mapping must be nonempty compact sets, and the family of “test” subsets must be totally ordered by inclusion. We illustrate the results by showing their applicability to the pursuit–evasion differential game in the form of P. Varaya and J. Lin.

Keywords: quasistrategy, nonanticipation, selection, topology.

MSC: 49N70, 54C65

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-232-246

Введение

Свойство неупреждаемости играет важную роль в теории дифференциальных игр (ДИ) в связи с построением идеализированных разрешающих стратегий. В ранних работах идеализированные стратегии — квазистратегии — определялись в виде операторов на функциональных пространствах управлений или траекторий со свойством физической осуществимости или неупреждаемости (см. [1–4] и др.). С другой стороны, в некоторых конструкциях, приводящих к неподвижным точкам операторов программного поглощения (см. [5]), естественным образом возникают неупреждающие многозначные отображения (МО) и, как следствие, многозначные квазистратегии. Вопрос о селекции МО с сохранением свойства неупреждаемости для отображений на пространствах обобщенных управлений рассматривался в [6], где существенно использовалась специфика управлений-мер. Данное исследование [6] было выполнено в связи с вопросом, поставленным Н. Н. Красовским одному из авторов. Известно, что в ДИ сближения-уклонения формализация в классе квазистратегий эквивалентна (см. [7]) позиционной формализации, т. е. формализации в классе процедур управления по принципу обратной связи (см. [8; 9]). Основополагающим фактом, касающимся структуры ДИ, является теорема

[1]Работа выполнена в рамках проекта “Новейшие методы математического моделирования в изучении нелинейных динамических систем” по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым президиумом Российской академии наук.

об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина. Как следствие было установлено существование седловой точки для типичных показателей качества. Важно отметить, что упомянутая позиционная формализация допускает естественную для инженерных приложений реализацию с применением пошаговых движений с дискретизацией во времени. В этой связи существенную роль сыграли процедуры управления с поводырем (моделью), предложенные Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным (см. [9, § 57]). Оказалось, что в упомянутых процедурах могут использоваться квазистратегии (см. [10]).

Процедуры, конструируемые на основе метода программных итераций (МПИ), доставляют квазистратегии в виде МО (см. [6; 11; 12]). При этом реализуется непрямая версия МПИ, приводящая к последовательности множеств в пространстве позиций или последовательности функций. Другой вариант МПИ (по смыслу, прямая версия) реализует (см. [13; 14]) итерационную последовательность непосредственно в пространстве МО. Таким образом, многозначные квазистратегии, разрешающие соответствующую игровую задачу, определяются конструктивно. В то же время при решении ДИ широко используются однозначные квазистратегии (см. [1–4]). Возникает естественный вопрос о селекции неупреждающих МО в духе [6], но не связываемых обязательно с преобразованием обобщенных управлений — борелевских мер. В частности, представляется интересным вариант, связанный с построениями [3] и реализуемый в виде реакции непосредственно на пространстве траекторий. Здесь также естественной является задача о построении неупреждающего селектора заданного МО.

В настоящей работе изучается вариант достаточно общей постановки такого рода: показано, что для неупреждающего (в широком смысле) МО со свойствами непустозначности и компактности множеств-значений существует неупреждающий селектор.

1. Определения и обозначения общего характера

В дальнейшем используется теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и т. п.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. *Семейством* называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — произвольные объекты, то через $\{x; y\}$ обозначаем (единственное) множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Тогда для произвольного объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z. Если a и b — некоторые объекты, то (см. [15, с. 67]) $(a, b) \triangleq \{\{a\}; \{a; b\}\}$ есть упорядоченная пара (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Если z есть УП, то через $\mathbf{pr}_1(z)$ и $\mathbf{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathbf{pr}_1(z), \mathbf{pr}_2(z))$.

Через $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}'(X)$ условимся обозначать соответственно семейства всех и всех непустых подмножеств (п/м) произвольного множества X. Если A и B — непустые множества, то обозначим через B^A множество всех отображений из A в B (см. [15, с. 77]). Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f \,|\, C) \in B^C$ есть сужение f на множество C: $(f \,|\, C)(x) \triangleq f(x)\ \ \forall x \in C$. В случае, когда $F \in \mathcal{P}'(B^A)$, полагаем $\big(F \,|\, C\big) \triangleq \{(f \,|\, C) \colon f \in F\}$. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, а B — множество, то через $\mathfrak{X}|_B$ будем обозначать сужение семейства $\mathfrak{X}$ на множество B: $\mathfrak{X}|_B \triangleq \{X \cap B \colon X \in \mathfrak{X}\}$. В качестве $\mathfrak{X}$ может использоваться топология некоторого множества, содержащего B.

В дальнейшем широко используется операция обобщенного декартова произведения (см., например, [15, гл. IV, §5]): если X и Y — непустые множества и $\alpha \in \mathcal{P}(Y)^X$, то

$$\prod_{x \in X} \alpha(x) \triangleq \{f \in Y^X \mid f(x) \in \alpha(x)\ \forall x \in X\}.$$

Назовем пару $(X, \prec)$ *частично упорядоченным множеством* (ЧУМ), если X — множество, $X \neq \varnothing$, и $\prec \in \mathcal{P}(X \times X)$ — отношение (нестрогого) частичного порядка на X. В частности, $(\mathcal{P}(X), \subset_X)$ — ЧУМ булеана множества X с отношением вложения: $\subset_X \triangleq \{w \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid \mathbf{pr}_1(w) \subset \mathbf{pr}_2(w)\}$. Для всякого ЧУМ $(X, \prec)$ и произвольного п/м $S \in \mathcal{P}(X)$ (множества X)

назовем S *цепью*, если это п/м линейно упорядочено (т. е. для любых двух элементов $x \in S$, $y \in S$ выполняется условие $(x \prec y) \vee (y \prec x)$). Заметим, что для всякого множества X, $X \neq \varnothing$, каждая цепь $\mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X))$ в ЧУМ $(\mathcal{P}(X), \subset_X)$ есть центрированное семейство (см. [16, п. 3.1, с. 196]).

Если X — непустое множество, а семейство $\tau \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ — топология на этом множестве, то для всякого элемента $x \in X$ через $N_\tau(x)$ будем обозначать семейство всех открытых окрестностей x, т. е. семейство всех открытых множеств (множеств из τ), содержащих x: $N_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$. Для любых двух непустых топологических пространств (ТП) (U, ξ) и (V, ζ) множество $C(U, \xi, V, \zeta)$ есть множество всех (ξ, ζ)-непрерывных отображений из множества V^U. Напомним, что в случае метризуемых ТП (U, ξ) и (V, ζ) ТП $C(U, \xi, V, \zeta)$ есть также множество всех секвенциально (ξ, ζ)-непрерывных отображений из множества V^U.

2. Основные конструкции

Фиксируем непустые множества X, Y и T, а также (непустые) множества $\Omega \in \mathcal{P}'(\mathrm{Y}^{\mathrm{T}})$, $\mathrm{Z} \in \mathcal{P}'(\mathrm{X}^{\mathrm{T}})$ и семейство $\mathcal{T} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathrm{T}))$; иными словами, $\mathcal{T}$ — непустое семейство непустых множеств. В терминах $\mathcal{T}$ определяется ключевое в настоящей работе понятие *неупреждаемости*: отображение $z \in \mathrm{Z}^\Omega$ называем *неупреждающим* (относительно $\mathcal{T}$), если $\forall \omega_1 \in \Omega$, $\forall \omega_2 \in \Omega$, $\forall A \in \mathcal{T}$ имеем

$$((\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A)) \Rightarrow ((z(\omega_1) \,|\, A) = (z(\omega_2) \,|\, A)). \tag{2.1}$$

Свойству (2.1) сопоставляем аналог для МО: отображение $\mathbf{z} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ называем *неупреждающим*, если $\forall \omega_1 \in \Omega$, $\forall \omega_2 \in \Omega$, $\forall A \in \mathcal{T}$ выполняется

$$((\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A)) \Rightarrow \Big(\big(\mathbf{z}(\omega_1) \,|\, A\big) = \big(\mathbf{z}(\omega_2) \,|\, A\big)\Big). \tag{2.2}$$

Основной вопрос, рассматриваемый в данной работе, состоит в следующем: при каких условиях МО $\mathbf{z}$ обладает неупреждающим селектором; иными словами, при каких условиях существует селектор $z \in \prod_{\omega \in \Omega} \mathbf{z}(\omega)$, неупреждающий в смысле (2.1)?

В связи с этой задачей введем некоторые дополнительные определения. Оснащаем множество МО $\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ частичным порядком $\sqsubseteq$, полагая для любых $\alpha_1 \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ и $\alpha_2 \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$

$$(\alpha_1 \sqsubseteq \alpha_2) \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} (\alpha_1(\omega) \subset \alpha_2(\omega) \ \forall \omega \in \Omega). \tag{2.3}$$

Если $\mathbf{z} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$, то $(\mathrm{DOM})[\mathbf{z}] \triangleq \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{z}(\omega) \neq \varnothing\}$. При $\omega \in \Omega$, $z \in \mathrm{Z}$ и $A \in \mathcal{P}'(\mathrm{T})$ обозначим

$$\begin{gathered}\Omega_0(\omega \,|\, A) \triangleq \{h \in \Omega \mid (\omega \,|\, A) = (h \,|\, A)\} \in \mathcal{P}'(\Omega),\\ \mathrm{Z}_0(z \,|\, A) \triangleq \{g \in \mathrm{Z} \mid (z \,|\, A) = (g \,|\, A)\} \in \mathcal{P}'(\mathrm{Z}).\end{gathered} \tag{2.4}$$

Таким образом, определены множества *ростков* отображений из Ω и Z соответственно. Заметим, что для любых $A \in \mathcal{T}$ и $A' \in \mathcal{T}$

$$(A \subset A') \Rightarrow \big((\Omega_0(\omega \,|\, A') \subset \Omega_0(\omega \,|\, A) \ \forall \omega \in \Omega) \ \& \ (\mathrm{Z}_0(z \,|\, A') \subset \mathrm{Z}_0(z \,|\, A) \ \forall z \in \mathrm{Z})\big). \tag{2.5}$$

Обозначим через $\mathbf{N}$ множество всех неупреждающих МО из $\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$:

$$\mathbf{N} \triangleq \Big\{\mathbf{z} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega \mid \forall A \in \mathcal{T} \ \forall \omega \in \Omega \ \forall \omega' \in \Omega \ \ ((\omega \,|\, A) = (\omega' \,|\, A)) \Rightarrow \Big(\big(\mathbf{z}(\omega) \,|\, A\big) = \big(\mathbf{z}(\omega') \,|\, A\big)\Big)\Big\}$$

$$= \Big\{\mathbf{z} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega \mid \big(\mathbf{z}(\omega) \,|\, A\big) = \big(\mathbf{z}(\omega') \,|\, A\big) \ \ \forall A \in \mathcal{T} \ \forall \omega \in \Omega \ \forall \omega' \in \Omega_0(\omega \,|\, A)\Big\}.$$

Среди всех таких отображений для нас наиболее важными будут мультиселекторы произвольно заданных МО: для $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ обозначим:

$$\mathbf{N}_0[\alpha] \triangleq \{\mathbf{z} \in \mathbf{N} \mid \mathbf{z} \sqsubseteq \alpha\}; \tag{2.6}$$

тогда в виде

$$\mathbf{N}^0[\alpha] \triangleq \{\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0[\alpha] \mid (\mathrm{DOM})[\mathbf{z}] = \Omega\} \tag{2.7}$$

получаем множество всех непустозначных неупреждающих мультиселекторов МО α.

З а м е ч а н и е 1. Элементы $\mathbf{N}_0[\alpha]$ можно рассматривать как абстрактные аналоги многозначных квазистратегий, широко используемых в теории дифференциальных игр (в этой связи отметим также и конструкции неупреждающих однозначных управляющих отображений (см. [1–4] и др.).

Введем (см. [13, (2.10)]) поточечно исполняемое “объединение” МО: если $\mathbb{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega)$, то полагаем, что $\bigvee\limits_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ определяется условием: $\forall \omega \in \Omega\ \big(\bigvee\limits_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z}\big)(\omega) \triangleq \bigcup_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z}(\omega)$. Заметим, что в виде $\bigvee\limits_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z}$ мы имеем точную верхнюю грань множества $\mathbb{M}$ в ЧУМ $(\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega, \sqsubseteq)$. Исходя из определения, без труда проверяем справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Если* $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ *и* $\mathbb{M} \in \mathcal{P}'(\mathbf{N}_0[\alpha])$, *то* $\bigvee\limits_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z} \in \mathbf{N}_0[\alpha]$. *Кроме того,*

$$\big(\forall \omega \in \Omega\ \ \exists \mathbf{z} \in \mathbb{M}\colon \mathbf{z}(\omega) \neq \varnothing\big) \Rightarrow \big(\bigvee_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z} \in \mathbf{N}^0[\alpha]\big). \tag{2.8}$$

Как следствие леммы 1 для $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ и $\mathbb{M} = \mathbf{N}_0[\alpha]$ мы получаем представление наибольшего элемента множества $\mathbf{N}_0[\alpha]$ в ЧУМ $(\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega, \sqsubseteq)$ (см. [13, (2.15)]):

$$(\mathrm{na})[\alpha] \triangleq \bigvee_{\mathbf{z}\in\mathbf{N}_0[\alpha]} \mathbf{z}. \tag{2.9}$$

З а м е ч а н и е 2. При дополнительных условиях топологического характера для построения МО (2.9) можно использовать итерационную процедуру (см. [14, теорема 6.1; 13, предложение 3.2]), реализующуюся в $\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$. Тогда (см. [14, (40); 13, (3.25)]) МО $(\mathrm{na})[\alpha]$ есть предел итерационной последовательности с начальным элементом α. В общем случае МО (2.9) также может быть представлено в форме предела, но на этот раз, вообще говоря, для несчетной (трансфинитной) процедуры с начальным элементом α (см. [17, (3.11); 18, предложение 5.2]).

В связи с (2.1), (2.6) и (2.7) введем в рассмотрение также множество $\mathbf{n}^0[\alpha]$, $\mathbf{n}^0[\alpha] \subset \mathrm{Z}^\Omega$, однозначных неупреждающих селекторов произвольного МО $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$:

$$\mathbf{n}^0[\alpha] \triangleq \big\{h \in \prod_{\omega\in\Omega} \alpha(\omega) \,\big|\, \forall A \in \mathcal{T}\ \ \forall \omega'' \in \Omega\ \ \omega' \in \Omega\ \big((\omega'' \mid A) = (\omega' \mid A)\big) \Rightarrow \big((h(\omega'') \mid A) = (h(\omega') \mid A)\big)\big\}$$

$$= \big\{h \in \prod_{\omega\in\Omega} \alpha(\omega) \,\big|\, h(\omega') \in \mathrm{Z}_0(h(\omega'') \mid A)\ \ \forall A \in \mathcal{T}\ \ \forall \omega'' \in \Omega\ \ \omega' \in \Omega_0(\omega'' \mid A)\big\}. \tag{2.10}$$

В связи с (2.7) и (2.10) отметим, что при любом $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ истинна импликация

$$(g \in \mathbf{n}^0[\alpha]) \Rightarrow \big((\{g(\omega)\})_{\omega\in\Omega} \in \mathbf{N}^0[\alpha]\big)\,. \tag{2.11}$$

В последующих построениях нам потребуется релаксированный вариант множества $\mathbf{n}^0[\alpha]$ — множество $\mathbf{n}^0_H[\alpha]$, $\mathbf{n}^0_H[\alpha] \subset \mathrm{Z}^\Omega$, всех однозначных селекторов МО α, удовлетворяющих свойству неупреждаемости (2.1) лишь на некотором п/м H множества Ω: пусть $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ и $H \in \mathcal{P}(\Omega)$, тогда множество $\mathbf{n}^0_H[\alpha]$ определяется в виде

$$\mathbf{n}^0_H[\alpha] \triangleq \big\{h \in \prod_{\omega\in\Omega} \alpha(\omega) \,\big|\, \forall A \in \mathcal{T}\ \ \forall \omega'' \in H\ \ \omega' \in H\ \big((\omega'' \mid A) = (\omega' \mid A)\big) \Rightarrow \big((h(\omega'') \mid A) = (h(\omega') \mid A)\big)\big\}$$

$$= \big\{h \in \prod_{\omega\in\Omega} \alpha(\omega) \,\big|\, h(\omega') \in \mathrm{Z}_0(h(\omega'') \mid A)\ \ \forall A \in \mathcal{T}\ \ \forall \omega'' \in H\ \ \forall \omega' \in H \cap \Omega_0(\omega'' \mid A)\big\}. \tag{2.12}$$

Заметим, что из определения (2.12) сразу следует изотонность отображения $\mathcal{P}(\Omega) \ni H \mapsto \mathbf{n}^0_H[\alpha] \in \mathcal{P}'(\mathrm{Z})$: для любых $H \in \mathcal{P}(\Omega)$, $H' \in \mathcal{P}(\Omega)$ истинна импликация

$$(H' \subset H) \Rightarrow (\mathbf{n}^0_H[\alpha] \subset \mathbf{n}^0_{H'}[\alpha]). \tag{2.13}$$

Введем отдельно обозначение для случая, когда $\alpha = \mathcal{Z}$, где $\mathcal{Z}$ — наибольший элемент (см. (2.3)) в решетке $(\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega, \sqsubseteq)$, т. е. постоянное на Ω отображение со значением Z:

$$\mathbf{n}^0_H \triangleq \{h \in \mathrm{Z}^\Omega \mid h(\omega') \in \mathrm{Z}_0(h(\omega) \,|\, A) \ \ \forall A \in \mathcal{T} \ \ \forall \omega \in H \ \ \forall \omega' \in H \cap \Omega_0(\omega \,|\, A)\}. \tag{2.14}$$

Таким образом, $\mathbf{n}^0_H$ — множество всех неупреждающих на H отображений из Z^Ω. Заметим, что при введенных обозначениях выполняются соотношения $\mathbf{n}^0[\alpha] = \mathbf{n}^0_\Omega[\alpha]$, $\mathbf{n}^0_H = \mathbf{n}^0_H[\mathcal{Z}]$, а также

$$\mathbf{n}^0_\varnothing[\alpha] = \prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega), \qquad \mathbf{n}^0_\varnothing = \mathrm{Z}^\Omega \neq \varnothing, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{n}^0_H[\alpha] = \Big(\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)\Big) \bigcap \mathbf{n}^0_H. \tag{2.16}$$

3. Достаточные условия существования неупреждающего селектора многозначного отображения

В настоящем разделе устанавливаются условия существования неупреждающего (однозначного) селектора МО. Этот раздел исследования — промежуточный этап, отвечающий случаю, когда упомянутое МО само является неупреждающим. С учетом результатов предыдущего раздела эти условия определяют основу построения неупреждающего селектора произвольного МО.

Пусть множество X (см. разд. 2) оснащено топологией τ_X. Далее полагаем, что на множестве $\mathrm{Z} \in \mathcal{P}'(\mathrm{X}^\mathrm{T})$ действует топология τ_Z, индуцированная топологией $\otimes^\mathrm{T}(\tau_\mathrm{X})$ тихоновской степени ТП $(\mathrm{X}, \tau_\mathrm{X})$ с индексным множеством T (см. [16, 2.3]), а на множестве Z^Ω — топология τ_{Z^Ω} тихоновской степени ТП $(\mathrm{Z}, \tau_\mathrm{Z})$ с индексным множеством Ω.

Определим для произвольно выбранного МО $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ семейство $\mathcal{H}_\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\Omega))$ вида

$$\mathcal{H}_\alpha \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathbf{n}^0_H[\alpha] \neq \varnothing\}. \tag{3.1}$$

Семейство $\mathcal{H}_\alpha$ не пусто при любом $\alpha \in \mathcal{P}'(\mathrm{Z})^\Omega$, так как в этом случае (см. (2.15)) оно содержит пустое множество, а также все синглетоны из семейства $\mathcal{P}'(\Omega)$.

Лемма 2. *Если* $(\mathrm{X}, \tau_\mathrm{X})$ *есть* T_1*-пространство, то для любых* $M \in \mathcal{P}'(\mathrm{T})$ *и* $h \in \mathrm{Z}$ *множество* $\mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ *замкнуто в* $(\mathrm{Z}, \tau_\mathrm{Z})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства замкнутости $\mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ покажем, что множество $\mathrm{Z} \setminus \mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ открыто. Выберем $g \in \mathrm{Z} \setminus \mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ и элемент $\xi \in M$ со свойством $h(\xi) \neq g(\xi)$. Так как $(\mathrm{X}, \tau_\mathrm{X})$ — T_1-пространство, найдется окрестность $O_\mathrm{X} \in N_{\tau_\mathrm{X}}(g(\xi))$ такая, что

$$h(\xi) \notin O_\mathrm{X}. \tag{3.2}$$

Определим открытое множество $O_\mathrm{Z} \in \tau_\mathrm{Z}$, полагая

$$O_\mathrm{Z} \triangleq \{f \in \mathrm{Z} \mid f(\xi) \in O_\mathrm{X}\}. \tag{3.3}$$

Из построения следует, что $O_\mathrm{Z} \in N_{\tau_\mathrm{Z}}(g)$. С учетом соотношений (3.2) и (3.3) рассуждениями “от противного” легко проверить равенство $O_\mathrm{Z} \cap \mathrm{Z}_0(h \,|\, M) = \varnothing$.

Итак, выполнены соотношения $O_\mathrm{Z} \in N_{\tau_\mathrm{Z}}(g)$, $O_\mathrm{Z} \subset \mathrm{Z} \setminus \mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$. В силу произвольного выбора g это означает (см. [16, 1.1, с. 33]), что множество $\mathrm{Z} \setminus \mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ является открытым. Следовательно, множество $\mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ замкнуто.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $(\mathrm{X}, \tau_\mathrm{X})$ *есть* T_2*-пространство и дано МО* $\beta \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$*, значения которого* $\beta(\omega)$ *компактны в* $(\mathrm{Z}, \tau_\mathrm{Z})$ *при всех* $\omega \in \Omega$*, тогда для любого* $H \in \mathcal{P}(\Omega)$ *множество* $\mathbf{n}_H^0[\beta]$ *компактно в* $(\mathrm{Z}^\Omega, \tau_{\mathrm{Z}^\Omega})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Выберем произвольно $H \in \mathcal{P}(\Omega)$ и установим замкнутость множества $\mathbf{n}_H^0$ (см. (2.14)) в ТП $(\mathrm{Z}^\Omega, \tau_{\mathrm{Z}^\Omega})$. Для доказательства замкнутости $\mathbf{n}_H^0$ покажем, что множество $\mathrm{Z}^\Omega \setminus \mathbf{n}_H^0$ открыто.

Выберем произвольно $\bar{\alpha} \in \mathrm{Z}^\Omega \setminus \mathbf{n}_H^0$. Тогда существуют $\omega_1 \in \Omega$, $\omega_2 \in \Omega$ и $A \in \mathcal{T}$ такие, что

$$(\omega_1 \in H) \ \& \ (\omega_2 \in H) \ \& \ ((\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A)) \ \& \ ((\bar{\alpha}(\omega_1) \,|\, A) \neq (\bar{\alpha}(\omega_2) \,|\, A)). \tag{3.4}$$

Обозначим для краткости $h_1 \triangleq \bar{\alpha}(\omega_1)$, $h_2 \triangleq \bar{\alpha}(\omega_2)$. Из (3.4) следует существование $\xi \in A$ такого, что $h_1(\xi) \neq h_2(\xi)$. Тогда, поскольку $(\mathrm{X}, \tau_\mathrm{X})$ — T_2-пространство, найдутся окрестности $O_{\mathrm{X}1} \in N_{\tau_\mathrm{X}}(h_1(\xi))$, $O_{\mathrm{X}2} \in N_{\tau_\mathrm{X}}(h_2(\xi))$ такие, что

$$O_{\mathrm{X}1} \cap O_{\mathrm{X}2} = \varnothing. \tag{3.5}$$

Определим открытые множества $O_{\mathrm{Z}1} \in \tau_\mathrm{Z}$, $O_{\mathrm{Z}2} \in \tau_\mathrm{Z}$ вида

$$O_{\mathrm{Z}1} \triangleq \{g \in \mathrm{Z} \mid g(\xi) \in O_{\mathrm{X}1}\}, \qquad O_{\mathrm{Z}2} \triangleq \{f \in \mathrm{Z} \mid f(\xi) \in O_{\mathrm{X}2}\}. \tag{3.6}$$

Из построения следует, что $O_{\mathrm{Z}1} \in N_{\tau_\mathrm{Z}}(h_1)$, $O_{\mathrm{Z}2} \in N_{\tau_\mathrm{Z}}(h_2)$. Зададим открытое множество $O_{\mathrm{Z}^\Omega} \in \tau_{\mathrm{Z}^\Omega}$ следующим образом:

$$O_{\mathrm{Z}^\Omega} \triangleq \{\delta \in \mathrm{Z}^\Omega \mid (\delta(\omega_1) \in O_{\mathrm{Z}1}) \ \& \ (\delta(\omega_2) \in O_{\mathrm{Z}2})\}. \tag{3.7}$$

По построению имеем $O_{\mathrm{Z}^\Omega} \in N_{\tau_{\mathrm{Z}^\Omega}}(\bar{\alpha})$. Рассуждением "от противного" легко проверить равенство $O_{\mathrm{Z}^\Omega} \cap \mathbf{n}_H^0 = \varnothing$.

В самом деле, пусть нашлось

$$\gamma \in \mathbf{n}_H^0 \tag{3.8}$$

такое, что $\gamma \in O_{\mathrm{Z}^\Omega}$. Из последнего включения получаем (см. (3.7)) $\gamma(\omega_1) \in O_{\mathrm{Z}1}$, $\gamma(\omega_2) \in O_{\mathrm{Z}2}$. Таким образом (см. (3.6)), выполнены включения $\gamma(\omega_1)(\xi) \in O_{\mathrm{X}1}$, $\gamma(\omega_2)(\xi) \in O_{\mathrm{X}2}$. Значит (см. (3.5)), имеем свойство $\gamma(\omega_1)(\xi) \neq \gamma(\omega_2)(\xi)$, из которого в силу включения $\xi \in A$ следует соотношение $(\gamma(\omega_1) \,|\, A) \neq (\gamma(\omega_2) \,|\, A)$, противоречащее (3.8). Действительно, по выбору ω_1, ω_2 имеем (см. (3.4)) $\omega_1 \in H$, $\omega_2 \in H$ и $(\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A)$, а тогда из (3.8) должно вытекать равенство $(\gamma(\omega_1) \,|\, A) = (\gamma(\omega_2) \,|\, A)$. Иначе говоря, $\gamma \notin \mathbf{n}_H^0$. Получено требуемое противоречие.

Итак, выполнены соотношения

$$O_{\mathrm{Z}^\Omega} \in N_{\tau_{\mathrm{Z}^\Omega}}(\bar{\alpha}), \qquad O_{\mathrm{Z}^\Omega} \subset \mathrm{Z}^\Omega \setminus \mathbf{n}_H^0.$$

В силу произвольного выбора $\bar{\alpha}$ это означает (см. [16, 1.1, с. 33]), что множество $\mathrm{Z}^\Omega \setminus \mathbf{n}_H^0$ является открытым. Следовательно, множество $\mathbf{n}_H^0$ замкнуто.

2. Выберем и зафиксируем МО β, удовлетворяющее условиям утверждения. Если при некотором $\omega \in \Omega$ окажется выполненным равенство $\beta(\omega) = \varnothing$, то, очевидно, выполняется равенство $\mathbf{n}_H^0[\beta] = \varnothing$, а вместе с ним и утверждение леммы. Исходя из этого, нам остается рассмотреть лишь случай $\beta \in \mathcal{P}'(\mathrm{Z})^\Omega$.

Из замкнутости множества $\mathbf{n}_H^0$ в $(\mathrm{Z}^\Omega, \tau_{\mathrm{Z}^\Omega})$ с учетом (2.16) имеем замкнутость его п/м $\mathbf{n}_H^0[\beta]$ в ТП $(\prod\limits_{\omega \in \Omega} \beta(\omega), \tau_{\mathrm{Z}^\Omega}|_{\prod\limits_{\omega\in\Omega}\beta(\omega)})$ как следа замкнутого множества. В силу непустоты и компактности значений $\beta(\omega)$ при любом $\omega \in \Omega$ само ТП $(\prod\limits_{\omega \in \Omega} \beta(\omega), \tau_{\mathrm{Z}^\Omega}|_{\prod\limits_{\omega\in\Omega}\beta(\omega)})$ компактно (см. [16, теорема 3.2.4]). Из (2.16) и из компактности этого ТП следует (см. [16, теорема 3.1.2]) искомая компактность $\mathbf{n}_H^0[\beta]$.

Лемма доказана.

Предложение 1. *Если* $(\mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}})$ — T_2*-пространство,* $\mathcal{T}$ — *цепь в ЧУМ* $(\mathcal{P}(\mathrm{T}), \subset_{\mathrm{T}})$, $\alpha \in \mathbf{N}$ *и множества* $\alpha(\omega)$ *непусты и компактны в* $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ *при любом* $\omega \in \Omega$, *то* $\mathbf{n}^0[\alpha]$ — *непустое компактное в* $(\mathrm{Z}^{\Omega}, \tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}})$ *множество.*

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что условия неупреждаемости α, непустоты его значений и линейной упорядоченности семейства $\mathcal{T}$ являются существенными: без любого из этих условий предложение 1 может, вообще говоря, не выполняться (существенность первых двух условий очевидна; относительно линейной упорядоченности $\mathcal{T}$ см. [19]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем и зафиксируем МО $\alpha \in \mathbf{N}$, удовлетворяющее условиям утверждения. Определим семейство $\mathcal{H}_\alpha \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\Omega))$, следуя (3.1). Это семейство непусто, так как пустое множество (см. (2.15)) и синглетоны элементов из Ω, очевидно, содержатся в нем. Обозначим $\preccurlyeq \triangleq \subset_\Omega \cap (\mathcal{H}_\alpha \times \mathcal{H}_\alpha)$.

В силу отмеченного выше равенства $\mathbf{n}^0[\alpha] = \mathbf{n}^0_\Omega[\alpha]$ компактность множества $\mathbf{n}^0[\alpha]$ сразу следует из леммы 3.

Схема доказательства непустоты множества $\mathbf{n}^0[\alpha]$ такова: сначала, пользуясь леммой Цорна, мы покажем, что в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$ существует максимальный элемент, а затем убедимся, что всякий такой максимальный элемент совпадает с Ω.

1. Пусть $\mathfrak{h}$ — цепь в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$. Обозначим через $\bar{H}$ объединение всех множеств из $\mathfrak{h}$

$$\bar{H} \triangleq \bigcup_{H \in \mathfrak{h}} H \tag{3.9}$$

и проверим, что $\bar{H} \in \mathcal{H}_\alpha$. Если это так, то $\bar{H}$ является верхней гранью цепи $\mathfrak{h}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$.

Нетрудно видеть, что при всяком $H \in \mathfrak{h}$ для α и H выполняются условия леммы 3. Следовательно, при всяком $H \in \mathfrak{h}$ множество $\mathbf{n}^0_H[\alpha]$ компактно в $(\mathrm{Z}^{\Omega}, \tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}})$. Из T_2-отделимости топологии τ_{X} в силу определений τ_{Z}, $\tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}}$ вытекает, что $\tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}}$ также является T_2-топологией. Отсюда, всякое компактное в $(\mathrm{Z}^{\Omega}, \tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}})$ множество замкнуто. Таким образом, семейство $\{\mathbf{n}^0_H[\alpha] \colon H \in \mathfrak{h}\}$ состоит из замкнутых в ТП $(\mathrm{Z}^{\Omega}, \tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}})$ множеств. В силу замкнутости $\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)$ в ТП $(\mathrm{Z}^{\Omega}, \tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}})$ всякое п/м $\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)$ замкнуто в ТП $(\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega), \tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}}|_{\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)})$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто в $(\mathrm{Z}^{\Omega}, \tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}})$. Таким образом, из замкнутости множеств семейства

$$\{\mathbf{n}^0_H[\alpha] \colon H \in \mathfrak{h}\} \subset \mathcal{P}(\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega))$$

в ТП $(\mathrm{Z}^{\Omega}, \tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}})$ следует их замкнутость и в ТП $(\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega), \tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}}|_{\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)})$.

Тогда с учетом линейной упорядоченности $\mathfrak{h}$ и свойства изотонности (см. (2.13)) можем заключить, что семейство $\{\mathbf{n}^0_H[\alpha] \colon H \in \mathfrak{h}\}$ также образует цепь (непустых по определению) п/м в ЧУМ $(\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega), \subset_{\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)})$. В частности, как уже отмечалось, это семейство будет центрированным.

Из непустоты и компактности значений $\alpha(\omega)$ при любом $\omega \in \Omega$ и свойств операции перехода к подпространству ТП (см. [16, 2.3.2]) следует компактность ТП $(\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega), \tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}}|_{\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)})$ (см. [16, теорема 3.2.4]).

Итак, $\{\mathbf{n}^0_H[\alpha] \colon H \in \mathfrak{h}\}$ — центрированное семейство замкнутых п/м компактного пространства. Следовательно (см. [16, теорема 3.1.1]),

$$\bigcap_{H \in \mathfrak{h}} \mathbf{n}^0_H[\alpha] \neq \varnothing. \tag{3.10}$$

Выберем произвольно $\beta \in \bigcap\limits_{H \in \mathfrak{h}} \mathbf{n}^0_H[\alpha]$ и покажем, что $\beta \in \mathbf{n}^0_{\bar{H}}[\alpha]$. Пусть $A \in \mathcal{T}$, $\omega_1 \in \bar{H}$ и $\omega_2 \in \bar{H}$ таковы, что

$$(\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A). \tag{3.11}$$

Поскольку $\bar{H}$ — объединение множеств из цепи $\mathfrak{h}$, то найдется множество $S \in \mathfrak{h}$ такое, что $\omega_1 \in S$ и $\omega_2 \in S$. По выбору β имеем включение $\beta \in \mathbf{n}^0_S[\alpha]$. Отсюда с учетом (2.12) и (3.11) получим равенство $(\beta(\omega_1)\,|\,A)$=$(\beta(\omega_2)\,|\,A)$. Так как ω_1, ω_2 были выбраны произвольно, имеем (см. (2.12)) включение $\beta \in \mathbf{n}^0_{\bar{H}}[\alpha]$. В силу произвольного выбора β получаем соотношение

$$\bigcap_{H\in\mathfrak{h}} \mathbf{n}^0_H[\alpha] \subset \mathbf{n}^0_{\bar{H}}[\alpha]. \tag{3.12}$$

Итак (см. (3.10), (3.12)), $\mathbf{n}^0_{\bar{H}}[\alpha] \neq \varnothing$ и имеет место включение $\bar{H} \in \mathcal{H}_\alpha$. Исходя из соотношений $H \preccurlyeq \bar{H}$, очевидно выполненных для всех $H \in \mathfrak{h}$ (см. (3.9)), заключаем, что $\bar{H}$ есть верхняя грань $\mathfrak{h}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$.

Так как цепь $\mathfrak{h}$ выбиралась произвольно, можно воспользоваться леммой Цорна. Обозначим через $\hat{H}$ некоторый максимальный элемент в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$: $\hat{H} \in \mathcal{H}_\alpha$ и при этом $\forall H \in \mathcal{H}_\alpha$

$$(\hat{H} \preccurlyeq H) \Rightarrow (\hat{H} = H). \tag{3.13}$$

2. Покажем, что $\hat{H} = \Omega$. Предположим противное: существует $\hat{\omega} \in \Omega\backslash\hat{H}$. Пусть произвольно выбран селектор $\beta \in \prod\limits_{\omega\in\Omega} \alpha(\omega)$ МО α, удовлетворяющий (см. (3.1)) включению

$$\beta \in \mathbf{n}^0_{\hat{H}}[\alpha]. \tag{3.14}$$

Наметим схему дальнейшего рассуждения. Покажем сначала, что, изменяя значение функции β разве лишь в точке $\hat{\omega}$, можно получить новую функцию $\hat{\beta}$, удовлетворяющую включению

$$\hat{\beta} \in \mathbf{n}^0_{\hat{H}\cup\{\hat{\omega}\}}[\alpha]. \tag{3.15}$$

В этом случае (см. (3.15)) $\mathbf{n}^0_{\hat{H}\cup\{\hat{\omega}\}}[\alpha] \neq \varnothing$ и, значит, $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\} \in \mathcal{H}_\alpha$. Следовательно, коль скоро $\hat{\omega} \notin \hat{H}$, элемент $\hat{H}$ не будет максимальным в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$, что противоречит выбору $\hat{H}$ (см. (3.13)).

Для реализации данной схемы введем семейство

$$\mathbb{A} \triangleq \{B \in \mathcal{T} \mid \exists \omega \in \hat{H}\colon (\omega\,|\,B) = (\hat{\omega}\,|\,B)\}. \tag{3.16}$$

Возможны лишь два случая:

a) $\mathbb{A} = \varnothing$ и **b)** $\mathbb{A} \neq \varnothing$.

Рассмотрим случай **a)**. Легко проверяется, что в этом случае для любых $A \in \mathcal{T}$ и $\omega_1 \in \hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$, $\omega_2 \in \hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$ посылка условия неупреждаемости (см. (2.1)) $(\omega_1\,|\,A) = (\omega_2\,|\,A)$ истинна только при условиях, что $\{\omega_1; \omega_2\} \subset \hat{H}$ или $\{\omega_1; \omega_2\} = \{\hat{\omega}\}$. Но при выполнении любого из этих условий в силу выбора функции β (см. (3.14)) уже сама эта функция, очевидно, удовлетворяет равенству $(\beta(\omega_1)\,|\,A) = (\beta(\omega_2)\,|\,A)$. Таким образом, истинна импликация (2.1). Поскольку A, ω_1 и ω_2 выбирались произвольно, выполняется включение $\beta \in \mathbf{n}^0_{\hat{H}\cup\{\hat{\omega}\}}[\alpha]$. Итак, в случае **a)** мы имеем включение $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\} \in \mathcal{H}_\alpha$, противоречащее максимальности $\hat{H}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$ (см. (3.13)). Приходим к выводу, что случай **a)** невозможен.

Пусть теперь имеет место случай **b)**: $\mathbb{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{T})$. В целях подходящего изменения значения функции β в точке $\hat{\omega}$ введем далее вспомогательное семейство $\Xi \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\alpha(\hat{\omega})))$.

Для этого, учитывая (3.16), определим сначала семейство $\Lambda \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\hat{H}))$ вида $\Lambda \triangleq \{\mathrm{M}(B)\colon B \in \mathbb{A}\}$, где

$$\mathrm{M}(B) \triangleq \{\omega \in \hat{H} \mid (\omega\,|\,B) = (\hat{\omega}\,|\,B)\} = \Omega_0(\hat{\omega}\,|\,B) \cap \hat{H} \qquad \forall B \in \mathbb{A}. \tag{3.17}$$

Для произвольных $\bar{B} \in \mathbb{A}$ и $\bar{\omega} \in \mathrm{M}(\bar{B})$ обозначим $\delta \triangleq (\beta(\bar{\omega})\,|\,\bar{B})$. Тогда по выбору β выполняется включение $\delta \in \big(\alpha(\bar{\omega})\,|\,\bar{B}\big)$. Отсюда в силу (3.17) и неупреждаемости МО α (см.

(2.2)) вытекают равенство $\big(\alpha(\bar\omega)\,|\,\bar B\big)=\big(\alpha(\hat\omega)\,|\,\bar B\big)$ и как следствие включение $\delta\in\big(\alpha(\hat\omega)\,|\,\bar B\big)$. С учетом последнего включения по выбору δ и определению $\mathrm{Z}_0(\beta(\bar\omega)\,|\,\bar B)$ (см. (2.4)) получим соотношение $\mathrm{Z}_0(\beta(\bar\omega)\,|\,\bar B)\cap\alpha(\hat\omega)\neq\varnothing$. Итак, по итогам произвольного выбора $\bar B$ и $\bar\omega$ имеем соотношения

$$\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B)\cap\alpha(\hat\omega)\neq\varnothing\qquad\forall B\in\mathbb{A}\qquad\forall\omega\in\mathrm{M}(B).\tag{3.18}$$

Поскольку $\mathrm{M}(B)\neq\varnothing$ при $B\in\mathbb{A}$, то ввиду неупреждаемости β на $\hat H$ выводим

$$\forall B\in\mathbb{A}\ \ \exists!\mathbb{S}\in\mathcal{P}'(\mathrm{Z})\colon \mathbb{S}=\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B)\cap\alpha(\hat\omega)\qquad\forall\omega\in\mathrm{M}(B).\tag{3.19}$$

В самом деле, фиксируем $B'\in\mathbb{A}$ и $\omega_*\in\mathrm{M}(B')$. Тогда $\omega_*\in\hat H$ и $(\omega_*\,|\,B')=(\hat\omega\,|\,B')$. Пусть $\mathbb{S}_*\triangleq\mathrm{Z}_0(\beta(\omega_*)\,|\,B')\cap\alpha(\hat\omega)$. В силу (3.18) $\mathbb{S}_*\in\mathcal{P}'(\mathrm{Z})$. Выберем произвольно $\omega^*\in\mathrm{M}(B')$, получая $\omega^*\in\hat H$ и $(\omega^*\,|\,B')=(\hat\omega\,|\,B')$. В этом случае $(\omega^*\,|\,B')=(\omega_*\,|\,B')$ и вследствие неупреждаемости β на $\hat H$ (см. (3.14)) $(\beta(\omega^*)\,|\,B')=(\beta(\omega_*)\,|\,B')$. Отсюда согласно (2.4) следует $\mathrm{Z}_0(\beta(\omega^*)\,|\,B')=\mathrm{Z}_0(\beta(\omega_*)\,|\,B')$, а тогда

$$\mathrm{Z}_0(\beta(\omega^*)\,|\,B')\cap\alpha(\hat\omega)=\mathrm{Z}_0(\beta(\omega_*)\,|\,B')\cap\alpha(\hat\omega).$$

Поскольку выбор ω^* был произвольным, то

$$\mathrm{Z}_0(\beta(\omega_*)\,|\,B')\cap\alpha(\hat\omega)=\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B')\cap\alpha(\hat\omega)\quad\forall\omega\in\mathrm{M}(B').$$

Таким образом, установили свойство: существует $\mathbb{S}\in\mathcal{P}'(\mathrm{Z})\colon\mathbb{S}=\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B')\cap\alpha(\hat\omega)\ \ \forall\omega\in\mathrm{M}(B')$. Свойство единственности $\mathbb{S}$ очевидно, так как $\mathrm{M}(B')\neq\varnothing$. Поскольку выбор B' был произвольным, установлена справедливость (3.19).

С учетом этого для всякого $B\in\mathbb{A}$ определим $\mathrm{S}(B)\in\mathcal{P}'(\mathrm{Z})$ как

$$\mathrm{S}(B)\triangleq\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B)\cap\alpha(\hat\omega)\qquad\forall\omega\in\mathrm{M}(B).\tag{3.20}$$

Таким образом, определено непустое (см. условие **b)**) семейство $\Xi\triangleq\{\mathrm{S}(G)\colon G\in\mathbb{A}\}$. Отметим соотношения, следующие из (3.19), (3.20): при $B\in\mathbb{A}$

$$\big(\mathrm{S}(B)\,|\,B\big)\triangleq\big((\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B)\cap\alpha(\hat\omega))\,|\,B\big)\subset\big(\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B)\,|\,B\big)\cap\big(\alpha(\hat\omega)\,|\,B\big)$$

$$=\{(\beta(\omega)\,|\,B)\}\cap\big(\alpha(\hat\omega)\,|\,B\big)=\{(\beta(\omega)\,|\,B)\}\cap\big(\alpha(\omega)\,|\,B\big)=\{(\beta(\omega)\,|\,B)\}\qquad\forall\omega\in\mathrm{M}(B).$$

При этом $\varnothing\neq\big(\mathrm{S}(B)\,|\,B\big)\subset\{(\beta(\omega)\,|\,B)\}\ \ \forall B\in\mathbb{A}\ \ \forall\omega\in\mathrm{M}(B)$. Тогда имеем

$$\big(\mathrm{S}(B)\,|\,B\big)=\{(\beta(\omega)\,|\,B)\}\qquad\forall B\in\mathbb{A}\qquad\forall\omega\in\mathrm{M}(B).\tag{3.21}$$

Напомним, что по условию теоремы $\mathcal{T}$ — цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}(\mathrm{T}),\subset_{\mathrm{T}})$. Следовательно, ее подсемейство $\mathbb{A}$ также есть цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}(\mathrm{T}),\subset_{\mathrm{T}})$. Тогда, опираясь на свойство изотонности (2.5) и определение (3.20), можно проверить, что для любых $B\in\mathbb{A}$, $B'\in\mathbb{A}$ выполняется импликация $(B'\subset_{\mathrm{T}}B)\Rightarrow(\mathrm{S}(B)\subset\mathrm{S}(B'))$. Значит, семейство Ξ есть цепь в $(\mathcal{P}(\mathrm{Z}),\subset_{\mathrm{Z}})$. Отсюда с учетом (3.18), (3.20) заключаем, что Ξ — центрированное семейство непустых п/м $\alpha(\hat\omega)$.

По условию теоремы $\alpha(\hat\omega)$ — компактное множество в топологическом пространстве $(\mathrm{Z},\tau_{\mathrm{Z}})$. Согласно определению и лемме 2 множество $\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B)$ замкнуто в $(\mathrm{Z},\tau_{\mathrm{Z}})$ при любом $B\in\mathbb{A}$. Следовательно (см. (3.20)), элементы семейства Ξ замкнуты в ТП $\big(\alpha(\hat\omega),\tau_{\mathrm{Z}}|_{\alpha(\hat\omega)}\big)$. Итак, Ξ — центрированное семейство замкнутых п/м компактного пространства. Следовательно (см. [16, теорема 3.1.1]),

$$\bigcap_{S\in\Xi}S\triangleq\bigcap_{B\in\mathbb{A}}\mathrm{S}(B)\neq\varnothing.\tag{3.22}$$

Воспользуемся (3.22) и выберем элемент $\hat\chi\in\alpha(\hat\omega)$, удовлетворяющий включению

$$\hat\chi\in\bigcap_{B\in\mathbb{A}}\mathrm{S}(B).\tag{3.23}$$

Отметим соотношение, сразу следующее из определения (3.23) и равенств (3.21):

$$(\hat{\chi} \,|\, B) = (\beta(\omega) \,|\, B) \qquad \forall B \in \mathbb{A} \qquad \forall \omega \in \mathrm{M}(B). \tag{3.24}$$

Переопределим функцию β в точке $\hat{\omega}$, порождая тем самым новое отображение $\hat{\beta} \in \mathrm{Z}^{\Omega}$: при $\omega \in \Omega$

$$\hat{\beta}(\omega) \triangleq \begin{cases} \beta(\omega), & \omega \neq \hat{\omega}, \\ \hat{\chi}, & \omega = \hat{\omega}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Из (3.24) и определения (3.25), очевидно, следуют равенства

$$(\hat{\beta}(\hat{\omega}) \,|\, B) = (\beta(\omega) \,|\, B) \qquad \forall B \in \mathbb{A} \qquad \forall \omega \in \mathrm{M}(B). \tag{3.26}$$

Здесь учитывается тот факт, что $\mathrm{M}(B) \subset \hat{H}$ при $B \in \mathbb{A}$ и $\hat{\omega} \notin \hat{H}$. Кроме того, так как $\hat{\omega} \notin \hat{H}$, функция $\hat{\beta}$ наследует (см. (3.25)) неупреждаемость β на множестве $\hat{H}$:

$$\hat{\beta} \in \mathbf{n}^0_{\hat{H}}[\alpha]. \tag{3.27}$$

С целью проверки неупреждаемости функции $\hat{\beta}$ на множестве $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$ выберем произвольно $\zeta_1 \in \hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$, $\zeta_2 \in \hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$ и $E \in \mathcal{T}$, для которых выполняется равенство

$$(\zeta_1 \,|\, E) = (\zeta_2 \,|\, E). \tag{3.28}$$

Согласно (3.27) два случая очевидны (см. (3.14)) — их рассмотрение можно опустить: $\{\zeta_1; \zeta_2\} \subset \hat{H}$, $\{\zeta_1; \zeta_2\} \subset \{\hat{\omega}\}$. Рассмотрим единственный (с точностью до переобозначений) оставшийся вариант: пусть

$$(\zeta_1 \in \hat{H}) \;\&\; (\zeta_2 \in \{\hat{\omega}\}). \tag{3.29}$$

Тогда из (3.28), (3.29) следует равенство $(\zeta_1 \,|\, E) = (\hat{\omega} \,|\, E)$. Из этого равенства в силу определения (3.16) выводим включение

$$E \in \mathbb{A}, \tag{3.30}$$

а также в силу определения (3.17) — включение

$$\zeta_1 \in \mathrm{M}(E). \tag{3.31}$$

Из соотношений (3.30), (3.31) в силу (3.26) вытекает равенство $(\hat{\beta}(\hat{\omega}) \,|\, E) = (\beta(\zeta_1) \,|\, E)$, из которого с учетом (3.25), (3.29) получаем соотношения $(\hat{\beta}(\zeta_2) \,|\, E) = (\hat{\beta}(\hat{\omega}) \,|\, E) = (\beta(\zeta_1) \,|\, E) = (\hat{\beta}(\zeta_1) \,|\, E)$. Аналогичным образом проверяется равенство $(\hat{\beta}(\zeta_2) \,|\, E) = (\hat{\beta}(\zeta_1) \,|\, E)$ при $\zeta_2 \in \hat{H}$ и $\zeta_1 \in \{\hat{\omega}\}$. В итоге (см. (3.28)) имеем импликацию

$$((\zeta_1 \,|\, E) = (\zeta_2 \,|\, E)) \Rightarrow ((\hat{\beta}(\zeta_1) \,|\, E) = (\hat{\beta}(\zeta_2) \,|\, E)).$$

Так как множество E и элементы ζ_1, ζ_2 множества $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$ выбирались произвольно, установлено включение (3.15). Значит, $\mathbf{n}^0_{\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}}[\alpha] \neq \varnothing$ и как следствие (см. (3.1)) $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\} \in \mathcal{H}_\alpha$, где $\hat{\omega} \notin \hat{H}$. Последнее противоречит максимальности элемента $\hat{H}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$ (см. (3.13)). Итак, случай **b)** также невозможен.

Мы показали, что во всех возможных случаях предположение $\hat{H} \neq \Omega$ влечет противоречие с максимальностью $\hat{H}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$. Следовательно, имеет место равенство $\hat{H} = \Omega$. Отсюда $\Omega \in \mathcal{H}_\alpha$; иными словами, $\mathbf{n}^0_{\Omega}[\alpha] \neq \varnothing$.

Предложение доказано.

4. Эквивалентность существования неупреждающих селектора и мультиселектора

В этом разделе мы на основании результатов разд. 3 установим эквивалентность существования неупреждающих селектора и мультиселектора для МО достаточно общего вида. Вначале отметим одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{a} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^{\Omega}$, $\mathbf{a}(\omega)$ *компактно в* $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ *для всякого* $\omega \in \Omega$. *Тогда* $(\mathrm{na})[\mathbf{a}](\omega)$ *компактно в* $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ *для всякого* $\omega \in \Omega$.

Справедливость данной леммы нетрудно установить, пользуясь соотношениями [13, (3.25)].

Предложение 2. *Пусть* $\mathcal{T}$ *— цепь в ЧУМ* $(\mathcal{P}(\mathrm{T}), \subset_{\mathrm{T}})$, $\mathbf{a} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^{\Omega}$, $(\mathrm{DOM})[\mathbf{a}] = \Omega$ *и* $\mathbf{a}(\omega)$ *компактно в* $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ *для всякого* $\omega \in \Omega$. *Тогда*

$$(\mathbf{n}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing) \Leftrightarrow (\mathbf{N}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing). \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $\mathbf{a} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^{\Omega}$ со свойствами $(\mathrm{DOM})[\mathbf{a}] \neq \varnothing$ и компактности множеств $\mathbf{a}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. С учетом (2.11) имеем импликацию

$$(\mathbf{n}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing) \Rightarrow (\mathbf{N}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing). \tag{4.2}$$

Проверим обратную импликацию. Пусть $\mathbf{N}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing$. Рассмотрим МО $\alpha \triangleq (\mathrm{na})[\mathbf{a}]$. Для α выполнены все условия предложения 1: $\alpha \in \mathbf{N}$, множества $\alpha(\omega)$ непусты (см. (2.8)) и компактны в $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ при любом $\omega \in \Omega$ (лемма 4). Поэтому в силу предложения 1 $\mathbf{n}^0[\alpha] \neq \varnothing$. Но по выбору α очевидно имеем вложение $\mathbf{n}^0[\alpha] \subset \mathbf{n}^0[\mathbf{a}]$. Следовательно, $\mathbf{n}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing$. Итак, выполняется импликация

$$(\mathbf{N}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing) \Rightarrow (\mathbf{n}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing). \tag{4.3}$$

Импликации (4.2) и (4.3) при произвольном выборе МО $\mathbf{a}$ дают искомое утверждение (4.1).

Предложение доказано.

5. Один частный случай

Рассмотрим пример реализации общих построений разд. 2–4, имея в виду, что в дальнейшем $\mathrm{T} \triangleq [t_0, \vartheta]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$; $\vartheta \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая); в качестве $\mathcal{T}$ используем семейство всех отрезков $[t_0, t]$, $t \in \mathrm{T}$. Данная конкретизация соответствует варианту, используемому в теории дифференциальных игр (см. [1–5]). При этом $\mathcal{T}$ является цепью в ЧУМ $(\mathcal{P}(\mathrm{T}), \subset_{\mathrm{T}})$. В качестве X и Y используем непустые множества, оснащаемые метриками ρ_{X} и ρ_{Y} соответственно, так что $(\mathrm{X}, \rho_{\mathrm{X}})$, $(\mathrm{Y}, \rho_{\mathrm{Y}})$ — метрические пространства. Полагаем далее, что τ_{X} и τ_{Y} — топологии на X и на Y, порожденные метриками ρ_{X} и ρ_{Y} соответственно. Мы полагаем здесь, что Ω и Z суть непустые множества в пространствах непрерывных отображений из T в X и в Y соответственно (при этом T оснащается обычной $|\cdot|$-топологией τ_{T}, а X и Y — топологиями τ_{X} и τ_{Y}). Полагаем, что Z компактно в топологии равномерной сходимости пространства $C(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}})$. Данную топологию обозначаем через θ, а метрику равномерной сходимости, порождающую θ, — через $\mathbf{r}$. Сходимость последовательностей из $C(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}})$ в метрике $\mathbf{r}$ обозначаем, как обычно, через $\rightrightarrows$.

Введем в рассмотрение конкретный вариант отображения $\mathbf{a}$, связанный с естественным обобщением дифференциальной игры сближения-уклонения (см. [8; 9]). Для этого оснащаем $\mathbb{H} \triangleq \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ естественной (метризуемой) топологией $\tau_{\mathbb{H}} \triangleq \tau_{\mathrm{X}} \otimes \tau_{\mathrm{Y}}$.

В этой связи напомним, что (см. [20, с. 17]) $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{T} \triangleq (\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \times \mathrm{T} = \mathbb{H} \times \mathrm{T}$; данное множество оснащается естественной метризуемой топологией $\tau_{\mathbb{H} \times \mathrm{T}}$, отвечающей произведению ТП $(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{H}})$, $(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}})$.

Фиксируем множество $M \in \mathcal{P}'(\mathbb{H} \times \mathrm{T})$, замкнутое в ТП $(\mathbb{H} \times \mathrm{T}, \tau_{\mathbb{H}\times\mathrm{T}})$. Кроме того, фиксируем множество $N \in \mathcal{P}'(\mathbb{H} \times \mathrm{T})$, для которого замкнуты в $(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{H}})$ все множества-сечения $N\langle t\rangle \triangleq \{h \in \mathbb{H} \mid (t,h) \in N\}$, $t \in \mathrm{T}$. Напомним, что $\mathrm{Z} \subset C(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}}) \subset \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$. С учетом этого введем (метризуемую) топологию $\theta_{\mathrm{Z}} \triangleq \theta|_{\mathrm{Z}}$, индуцированную из $(C(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}}), \theta)$. Отметим, что сходимость последовательности в метризуемом ТП равносильна сходимости этой последовательности в смысле метрики, порождающей топологию данного пространства. Кроме того, для метризуемого ТП компактность множеств в данном ТП, понимаемая как компактность соответствующих подпространств, эквивалентна (см. [16, 4.1.17]) секвенциальной компактности, понимаемой как возможность выделения из последовательности элементов соответствующего множества сходящейся подпоследовательности (см. [21, 2.7.43]).

Введем в рассмотрение следующий вариант отображения $\mathbf{a} \in \mathcal{P}(Z)^{\Omega}$:

$$\mathbf{a}(\omega) \triangleq \{z \in \mathrm{Z} \mid \exists t \in \mathrm{T}\colon ((z(t), \omega(t), t) \in M) \ \&\ ((z(\xi), \omega(\xi)) \in N\langle \xi\rangle \ \ \forall \xi \in [t_0, t[)\} \quad \forall \omega \in \Omega; \quad (5.1)$$

напомним (см. [20, с. 17]), что $(x, y, t) \triangleq ((x, y), t)$ при $x \in \mathrm{X}$, $y \in \mathrm{Y}$ и $t \in \mathrm{T}$.

З а м е ч а н и е 4. Данная схема отвечает на идейном уровне построениям [3]. В самом деле, под Z и Ω мы можем понимать пучки траекторий двух управляемых систем в одном и том же (для простоты) фазовом пространстве $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$. При этом условие компактности Z можно связать с использованием обобщенных управлений-мер [22–24] в одной из управляемых систем (полагаем, что управление в этой системе формирует игрок I). Относительно множества Ω это условие не предполагается выполненным. Следуя идее [3], мы рассматриваем вариант реагирования траекторией (траекториями, в многозначном варианте) системы игрока I на траекторию игрока II, формирующего управление второй системой. Упомянутое реагирование, как и в [3], подчинено условию неупреждаемости (физической осуществимости). При этом реагирование траекторией на траекторию (а не управлением на управление) имеет своей целью выделить наиболее существенные моменты решения.

Предложение 3. *Отображение* $\mathbf{a}$ *компактнозначно в* $(\mathrm{Z}, \theta_{\mathrm{Z}})$: *при любом* $\omega \in \Omega$ *множество* $\mathbf{a}(\omega)$ *компактно в ТП* $(\mathrm{Z}, \theta_{\mathrm{Z}})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\omega \in \Omega$ и рассмотрим множество $\mathbf{a}(\omega)$, $\mathbf{a}(\omega) \subset \mathrm{Z}$. Покажем сначала, что $\mathbf{a}(\omega)$ замкнуто в топологии θ. Итак, пусть

$$(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{a}(\omega)^{\mathbb{N}}, \qquad z \in C(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}}) \quad (5.2)$$

таковы, что $(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightrightarrows z$. Тогда по свойствам Z имеем $z \in \mathrm{Z}$ и согласно (5.1) для некоторой последовательности $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{T}^{\mathbb{N}}$ получаем свойство: для всякого $j \in \mathbb{N}$

$$((z_j(t_j), \omega(t_j), t_j) \in M) \ \&\ ((z_j(\xi), \omega(\xi)) \in N\langle\xi\rangle \ \ \forall \xi \in [t_0, t_j[).$$

В силу компактности $(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}})$ можно полагать последовательность $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ сходящейся: $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \to t^0$, где $t^0 \in \mathrm{T}$. Получили, что

$$((t_i)_{i\in\mathbb{N}} \to t^0) \ \&\ ((z_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightrightarrows z) \ \&\ (\rho_Y(\omega(t_i), \omega(t^0)))_{i\in\mathbb{N}} \to 0). \quad (5.3)$$

Из двух первых положений (5.3) имеем свойство

$$(\rho_X(z_i(t_i), z(t^0)))_{i\in\mathbb{N}} \to 0. \quad (5.4)$$

Тогда (см. последнее положение (5.3) и (5.4)) последовательность $((z_j(t_j), \omega(t_j)))_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}}$ сходится в метрике, порождающей топологию $\tau_{\mathbb{H}}$, т. е. сходится в ТП $(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{H}})$. Учитывая еще раз первое положение в (5.3), имеем сходимость последовательности $(z_j(t_j), \omega(t_j), t_j)_{j\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ к $(z(t^0), \omega(t^0), t^0)$ в топологии $\tau_{\mathbb{H}} \otimes \tau_{\mathrm{T}}$. В силу замкнутости M получаем, что

$$(z(t^0), \omega(t^0), t^0) \in M. \quad (5.5)$$

Пусть $\zeta \in [t_0, t^0[$, а $m \in \mathbb{N}$ таково, что $t_j \in]\zeta, \vartheta]$ при $j \in \mathbb{N}$, $j \geq m$ (с учетом первого положения в (5.3) такой выбор m, очевидно, возможен). Тогда в силу (5.1) $(z_j(\zeta), \omega(\zeta)) \in N\langle\zeta\rangle$ при $j \in \mathbb{N}$, $j \geq m$. Поскольку $N\langle\zeta\rangle$ замкнуто в $(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{H}})$, то с учетом второго положения в (5.3) и определения топологии $\tau_{\mathbb{H}}$ имеем включение $(z(\zeta), \omega(\zeta)) \in N\langle\zeta\rangle$. Поскольку выбор ζ был произвольным, установлено, что

$$(z(t), \omega(t)) \in N\langle t\rangle \qquad \forall t \in [t_0, t^0[. \tag{5.6}$$

С учетом (5.1), (5.5) и (5.6) получаем включение $z \in \mathbf{a}(\omega)$. Коль скоро выбор (5.2) также был произвольным, установлено требуемое свойство замкнутости $\mathbf{a}(\omega)$ в топологии θ. Поскольку $\mathbf{a}(\omega) \subset \mathrm{Z}$ (см. (5.1)), то $\mathbf{a}(\omega)$ есть п/м Z, замкнутое в $(\mathrm{Z}, \theta_{\mathrm{Z}})$. В силу компактности последнего ТП имеем требуемое утверждение.

Предложение доказано.

Отметим, что $\tau_{\mathrm{Z}} \subset \theta_{\mathrm{Z}}$ (доказательство данного свойства подобно обоснованию [16, предложение 2.2.6]). Поэтому всякое п/м Z, компактное в $(\mathrm{Z}, \theta_{\mathrm{Z}})$, компактно и в ТП $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$. Следовательно, при условиях, определяющих предложение 3, имеем свойство: МО $\mathbf{a}$ (5.1) компактнозначно в смысле $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$, что позволяет использовать это МО в лемме 4.

Итак, при условиях, определяющих предложение 3, для МО $\mathbf{a}$ (5.1) справедливо свойство: $(\mathrm{na})[\mathbf{a}](\omega)$ компактно в ТП $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ для каждого $\omega \in \Omega$; если к тому же $(\mathrm{DOM})[(\mathrm{na})[\mathbf{a}]] = \Omega$, то согласно предложению 1 $\mathbf{n}^0[(\mathrm{na})[\mathbf{a}]] \neq \varnothing$ и как следствие $\mathbf{n}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Roxin Emilio**. Axiomatic approach in differential games // J. Optim. Theory Appl. 1969. Vol. 3, № 3. P. 153–163.
2. **Ryll-Nardzewski C. R.** A theory of persuit and evasion. Adv. in game theory // Ann. Math. Stud. 1964. P. 113–126.
3. **Varaiya P., Lin Jiguan**. Existence of saddle points in differential games // SIAM J. Control. 1969. Vol. 7, № 1. P. 141–157.
4. **Elliott Robert J., Kalton Nigel J.** The existence of value in differential games of pursuit and evasion // J. Diff. Eq. 1972. Vol. 12, № 3. P. 504–523.
5. **Ченцов А. Г.** Об игровой задаче на минимакс функционала // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, № 5. С. 1047–1050.
6. **Ченцов А. Г.** Селекторы многозначных стратегий в дифференциальных играх. Деп. в ВИНИТИ, № 3101-78 / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1978. 45 с.
7. **Ченцов А. Г.** Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения-уклонения // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 10. С. 1801–1808.
8. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
9. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
10. **Кряжимский А. В., Ченцов А. Г.** О структуре игрового управления в задачах сближения и уклонения. Деп. в ВИНИТИ, № 1729-80 / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. 72 с.
11. **Ченцов А. Г.** К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.
12. **Ченцов А. Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99 (141), № 3. С. 394–420.
13. **Ченцов А. Г.** Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций, I // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 4. С. 470–480.
14. **Ченцов А. Г.** Неупреждающие селекторы многозначных отображений // Дифференц. уравнения и процессы управления. 1998. № 2. С. 1–64. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j019.pdf.
15. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
16. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.

17. **Serkov D. A.** Unlocking of predicate: application to constructing a non-anticipating selection // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2017. Vol. 27, № 2. P. 283–291.
18. **Серков Д. А.** К построению множества истинности предиката // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2017. № 2 (50). С. 37–53.
19. **Serkov D. A.** On a condition of existence of non-anticipating selections // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, № 32. P. 267–270.
20. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 432 с.
21. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publ., 2002. 408 p.
22. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
23. **Гамкрелидзе Р. В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. 256 с.
24. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

Поступила 15.05.2019
После доработки 19.06.2019
Принята к публикации 24.06.2019

Серков Дмитрий Александрович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: serkov@imm.uran.ru

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор, чл.-корр. РАН, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Emilio Roxin. Axiomatic approach in differential games. *J. Optim. Theory. Appl.*, vol. 3, no. 3, pp. 153–163. doi: 10.1007/BF00929440 .
2. Ryll-Nardzewski C. A theory of persuit and evasion. In: *Adv. in game theory*, Melvin Dresher, Lloyd S. Shapley, Albert William Tucker (eds), Princeton University Press, 1964, vol. 52, pp. 113–126. doi: 10.1515/9781400882014-010 .
3. Varaiya P., Lin J. Existence of Saddle Points in Differential Games. *SIAM J. Control*, 1969, vol. 7, no. 1, pp. 141–157. doi: 10.1137/0307011 .
4. Elliott Robert J., Kalton Nigel J. The existence of value in differential games of pursuit and evasion. *J. Diff. Eq.*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 504–523. doi: 10.1016/0022-0396(72)90022-8 .
5. Chentsov A.G. On the game problem on minimax of a functional. *Dokl. AN SSSR*, 1976, vol. 230, pp. 1047–1050 (in Russian).
6. Chentsov A.G. *Selektory mnogoznachnykh strategii v differentsial'nykh igrakh* [Selections of multivalued strategies in differential games]. Sverdlovsk, 1978, 45 p. Available from VINITI, no. 3101-78.
7. Chentsov A.G. On an alternative in a class of quasistrategies for a differential approach-evasion game. *Diff. Eq.* (1980), 1981, vol. 16, no. 10, pp. 1167–1171.
8. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. doi: 10.1016/0021-8928(70)90158-9 .

9. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
10. Kryazhimskiy A.V., Chentsov A.G. *O strukture igrovogo upravleniya v zadachakh sblizheniya i ukloneniya* [On the structure of the game control in the approach-evasion problems]. Sverdlovsk, 1979, 72 p. Available from VINITI, no. 1729-80.
11. Chentsov A.G. On a game problem of guidance. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, no. 1, pp. 73–77.
12. Chentsov A.G. On a game problem of converging at a given instant of time. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 28, no. 3, pp. 353–376. doi: 10.1070/SM1976v028n03ABEH001657 .
13. Chentsov A.G. Nonanticipating multivalued mappings and their construction by the method of programmed iterations. I. *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 4, pp. 498–509. doi: 10.1023/A:1019275422741 .
14. Chentsov A.G. Non-anticipating selections of multivalued mappings. *Differentsial'nyye Uravneniya i Protsessy Upravleniya*, 1998, no. 2, pp. 29–64 (in Russian).
15. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory.* Amsterdam: North-Holland, 1967, 417 p. Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv.* Moscow: Mir Publ., 1970, 416 p.
16. Engelking R. *General Topology.* Sigma series in pure mathematics, vol. 6. Berlin: Heldermann Verlag. 1989, 535 p. ISBN: 3885380064 . Translated to Russian inder the title *Obshchaya topologiya.* Moscow: Mir Publ., 1986, 752 p.
17. Serkov D.A. Unlocking of predicate: application to constructing a non-anticipating selection. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki.*, 2017, vol. 27, no. 2, pp. 283–291 (in Russian). doi: 10.20537/vm170211 .
18. Serkov D.A. On the construction of a predicate truth set. *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 50, pp. 45–61 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2017-50-06 .
19. Serkov D.A. On a condition of existence of non-anticipating selections. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 267–270. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.393 .
20. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis.* Acad. Press Inc., 1960, 361 p. Translated to Russian under the title *Osnovy sovremennogo analiza.* Moscow: Mir Publ., 1964, 430 p.
21. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002, 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0 .
22. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations.* N Y: Acad. Press, 1972. ISBN: 9781483259192 .
23. Gamkrelidze R.V. *Principles of optimal control theory.* Springer, 1978, 175 p. ISBN: 978-1-4684-7398-8 . Original Russian text published in Gamkrelidze R.V. *Osnovy optimal'nogo upravleniya.* Tbilisi: Tbilis. univ. Publ., 1975, 256 p.
24. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimization of Guarantee in Control Problems.* Moscow: Nauka Publ., 1981, 288 p. (in Russian)

Received May 15, 2019
Revised June 19, 2019
Accepted June 24, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Presidium of the Russian Academy of Sciences within the project "Newest Methods of Mathematical Modeling in the Study of Nonlinear Dynamic Systems."

Dmitrii Aleksandrovich Serkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: serkov@imm.uran.ru .

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Cite this article as: D. A. Serkov, A. G. Chentsov. On the construction of a nonanticipating selection of a multivalued mapping, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 232–246 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.983.54

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЭТОГО РЕШЕНИЯ

В. П. Танана, А. И. Сидикова

В статье изучается задача об определении граничного условия в уравнении теплопроводности для полого шара из композиционного материала, состоящего из двух однородных составных частей. В качестве граничных условий внутри шара при $r = r_0$ рассматривается условие Дирихле. В обратной задаче температура внутри шара считается неизвестной на бесконечном интервале времени. Для ее отыскания измеряется температура теплового потока в разделе сред в точке $r = r_1$. В работе проведено аналитическое исследование прямой задачи, позволившее дать строгую постановку обратной задачи и определить функциональные пространства, в которых естественно решать обратную задачу. Основная трудность, на решение которой направлена статья, заключается в получении оценки погрешности приближенного решения. Для этого используется метод проекционной регуляризации, который позволяющий получить точные по порядку оценки.

Ключевые слова: оценка погрешности, модуль непрерывности, преобразование Фурье, некорректная задача.

V. P. Tanana, A. I. Sidikova. Approximate solution of an inverse boundary value problem for a system of differential equations of parabolic type and estimation of the error of this solution.

We study the problem of finding a boundary condition in the heat equation for a hollow ball made of a composite material consisting of two homogeneous components. The Dirichlet condition is considered as boundary conditions inside the ball at $r = r_0$. In the inverse problem, the temperature inside the ball is assumed to be unknown on an infinite time interval. For finding it, the temperature of the heat flux at the media interface for $r = r_1$ is measured. We analyze the direct problem, which allows us to give a strict formulation of the inverse problem and determine the functional spaces in which it is natural to solve the inverse problem. Estimating the error of the approximate solution presents a major difficulty, which is dealt with in this paper by the method of projection regularization. Using this method, we find order-exact estimates.

Keywords: error estimation, modulus of continuity, Fourier transform, ill-posed problem.

MSC: 35R30

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-247-264

Введение

В различных отраслях современной техники нашли широкое применение композиционные материалы. Дальнейшие успехи в развитии многих направлений приборостроения в большей степени связан с увеличением доли использования таких материалов, а при создании новой аэрокосмической и специальной техники их роль становится решающей [1].

Прогресс в приборостроении идет по пути усложнения изучаемых моделей и постановок задач [2]. Исходя из модельных представлений механики композиционный материал можно определить как неоднородную среду, описываемую с помощью разрывных по координатам функций. В статье исследуется и решается обратная задача об определении температуры на внутренней стенке полого шара, состоящего из композитных материалов. Поскольку к решению подобных задач предъявляются высокие требования точности, то необходимо получение гарантированных оценок, которые существенно повышают надежность численных результатов.

В связи с этим в работе проведено аналитическое исследование прямой задачи, которое позволило применить к обратной граничной задаче преобразование Фурье по времени. Далее использован метод проекционной регуляризации [3], с помощью которого получено приближенное решение, а также точная по порядку оценка погрешности этого решения. Отметим, что изучению и решению обратной граничной задачи теплопроводности для отрезка, состоящего из двух кусков с различными коэффициентами теплопроводности, посвящена работа [4]; достаточно широкий класс обратных граничных задач представлен в [5–9].

1. Постановка задачи и исследование прямой задачи

Рассмотрим тепловой процесс, который описывается системой уравнений [10; 11]

$$\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial t} = a_1^2\Big(\frac{\partial^2 u_1(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial r}\Big), \quad r_0 < r < r_1, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial t} = a_2^2\Big(\frac{\partial^2 u_2(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}\Big), \quad r_1 < r < r_2, \quad t > 0, \tag{1.2}$$

где $a_1, a_2 > 0,\ a_1 \neq a_2$;

$$u_1(r,0) = 0, \quad r_0 \le r \le r_1, \quad u_2(r,0) = 0, \quad r_1 \le r \le r_2, \tag{1.3}$$

$$u_1(r_0,t) = q(t), \quad t \ge 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u_2(r_2,t)}{\partial r} = 0, \quad t \ge 0, \tag{1.5}$$

$$u_1(r_1,t) = u_2(r_1,t), \quad \frac{a_1 \partial u_1(r_1,t)}{\partial r} = \frac{a_2 \partial u_2(r_1,t)}{\partial r}, \quad t \ge 0; \tag{1.6}$$

здесь $q(t) \in C^2[0,+\infty)$, $q(0) = q'(0) = 0$ и существует число $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \ge t_0$

$$q(t) = 0. \tag{1.7}$$

В прямой задаче (1.1)–(1.6) требуется найти функцию

$$u(r,t) = \begin{cases} u_1(r,t), & r_0 \le r \le r_1, \quad t > 0, \\ u_2(r,t), & r_1 \le r \le r_2, \quad t > 0. \end{cases}$$

Сделав замену $u(r,t) = v(r,t) + q(t)$, перейдем к задаче

$$\begin{gathered} \frac{\partial v_1(r,t)}{\partial t} = a_1^2\Big(\frac{\partial^2 v_1(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_1(r,t)}{\partial r}\Big) - q'(t), \quad r_0 < r < r_1, \quad t > 0, \\ \frac{\partial v_2(r,t)}{\partial t} = a_2^2\Big(\frac{\partial^2 v_2(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_2(r,t)}{\partial r}\Big) - q'(t), \quad r_1 < r < r_2, \quad t > 0, \\ v_1(r,0) = 0, \quad r_0 \le r \le r_1, \quad v_2(r,0) = 0, \quad r_1 \le r \le r_2, \\ v_1(r_0,t) = 0, \quad \frac{\partial v_2(r_2,t)}{\partial r} = 0, \quad t \ge 0, \\ v_1(r_1,t) = v_2(r_1,t), \quad \frac{a_1 \partial v_1(r_1,t)}{\partial r} = \frac{a_2 \partial v_2(r_1,t)}{\partial r}, \quad t \ge 0. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Введем оператор $A : C[r_0,r_2] \to C[r_0,r_2]$,

$$AU(r) = \begin{cases} \dfrac{a_1^2}{r^2}\dfrac{d}{dr}\Big(r^2\dfrac{dU_1(r)}{dr}\Big), & r \in [r_0,r_1], \\ \dfrac{a_2^2}{r^2}\dfrac{d}{dr}\Big(r^2\dfrac{dU_2(r)}{\partial r}\Big), & r \in [r_1,r_2], \end{cases} \tag{1.9}$$

$D(A)=\Big\{U(r),\ AU(r)\in C[r_0,r_2],\ U_1(r_0)=0,\ U_2'(r_2)=0,\ U_1(r_1)=U_2(r_1),\ a_1U_1'(r_1)=a_2U_2'(r_1)\Big\}.$

Решая задачу Штурма — Лиувилля

$$AU(r)+\lambda^2U(r)=0,\quad U(r)=\begin{cases}U_1(r), & r\in[r_0,r_1],\\ U_2(r), & r\in[r_1,r_2],\end{cases}\quad U(r)\in D(A),$$

аналогично [4, с. 475; 10, гл. 5, п. 2], определим последовательность собственных значений λ_n этой задачи, где λ_n– положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg}\frac{\lambda(r_1-r_0)}{a_1}+\frac{\cos\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}+\dfrac{r_2\lambda}{a_2}\sin\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}}{\sin\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}-\dfrac{r_2\lambda}{a_2}\cos\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}}=\frac{(a_1-a_2)}{\lambda\,r_1},\tag{1.10}$$

и соответствующие им собственные функции $\{\varphi_n(r)\}$:

$$\varphi_n(r)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{\lambda_n(r-r_0)}{a_1}}{r\sin\dfrac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}}, & r_0\le r\le r_1,\\[3ex] \dfrac{\sin\dfrac{\lambda_n(r_2-r)}{a_2}-\dfrac{r_2\lambda_n}{a_2}\cos\dfrac{\lambda_n(r_2-r)}{a_2}}{r\Big(\sin\dfrac{\lambda_n(r_2-r_1)}{a_2}-\dfrac{r_2\lambda_n}{a_2}\cos\dfrac{\lambda_n(r_2-r_1)}{a_2}\Big)}, & r_1\le r\le r_2.\end{cases}\tag{1.11}$$

Лемма 1. *Пусть оператор A определен формулой* (1.9)*. Тогда оператор A симметричен на множестве $D(A)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $\vartheta(r)=(\vartheta_1(r),\ \vartheta_2(r))$, $\phi(r)=(\phi_1(r),\ \phi_2(r))\in D(A)$. Необходимо показать, что

$$\int\limits_{r_0}^{r_1}\vartheta_1(r)\,\frac{a_1^2}{r^2}\big(r^2\phi_1'(r)\big)'r^2\frac{dr}{a_1}+\int\limits_{r_1}^{r_2}\vartheta_2(r)\,\frac{a_2^2}{r^2}(r^2\phi_2'(r))'r^2\frac{dr}{a_2}$$
$$=\int\limits_{r_0}^{r_1}\phi_1(r)\,\frac{a_1^2}{r^2}\big(r^2\vartheta_1'(r)\big)'r^2\frac{dr}{a_1}+\int\limits_{r_1}^{r_2}\phi_2(r)\,\frac{a_2^2}{r^2}(r^2\vartheta_2'(r))'r^2\frac{dr}{a_2}.$$

Проинтегрировав левую часть этого равенства дважды по частям, получим $(A\vartheta(r),\phi(r))=(\vartheta(r),A\phi(r))$.

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что собственные функции оператора A ортогональны в пространстве $L_2(r_0,r_2)$. Обозначим через X подпространство $L_2(r_0,r_2)$, определяемое формулой

$$X=\overline{\langle\{\varphi_n(r)\}\rangle},\tag{1.12}$$

где $\overline{\langle\{\varphi_n(r)\}\rangle}$ — замыкание в $L_2(r_0,r_2)$ линейной оболочки $\langle\{\varphi_n(r)\}\rangle$, порожденной $\{\varphi_n(r)\}$.

Лемма 2. *Существуют числа $c_1,c_2>0$ такие, что для любого n $c_1n\le\lambda_n\le c_2n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем уравнение (1.10):

$$\frac{\sin\lambda\Big(\dfrac{r_1-r_0}{a_1}+\dfrac{r_2-r_1}{a_2}\Big)-\dfrac{\lambda r_2}{a_2}\cos\lambda\Big(\dfrac{r_1-r_0}{a_1}+\dfrac{r_2-r_1}{a_2}\Big)}{\sin\dfrac{\lambda(r_1-r_0)}{a_1}\Big(\sin\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}-\dfrac{\lambda r_2}{a_2}\cos\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}\Big)}=\frac{(a_1-a_2)}{\lambda r_1}.$$

Умножив обе части предыдущего равенства на $a_2/\sqrt{a_2^2+r_2^2\lambda^2}$ и введя обозначения

$$\sin\widetilde{\xi}(\lambda)=\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+r_2^2\lambda^2}},\quad \cos\widetilde{\xi}(\lambda)=\frac{\lambda r_2}{\sqrt{a_2^2+r_2^2\lambda^2}},\tag{1.13}$$

получим

$$\Big|\cos\Big(\Big(\frac{r_1-r_0}{a_1}+\frac{r_2-r_1}{a_2}\Big)\lambda+\widetilde{\xi}(\lambda)\Big)\Big|$$

$$=\Big|\frac{a_1-a_2}{r_1}\Big|\cdot\frac{1}{|\lambda|}\cdot\Big|\sin\frac{\lambda(r_1-r_0)}{a_1}\Big|\cdot\Big|\cos\lambda\Big(\widetilde{\xi}(\lambda)+\frac{r_2-r_1}{a_2}\Big)\Big|\le\frac{1}{\lambda}\Big|\frac{a_1-a_2}{r_1}\Big|,$$

$$\Big|\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\Big(\frac{r_1-r_0}{a_1}+\frac{r_2-r_1}{a_2}\Big)\lambda+\widetilde{\xi}(\lambda)\Big)\Big|\le\frac{|a_1-a_2|}{\lambda r_1}.\tag{1.14}$$

Обозначим: $\sigma_n=\dfrac{\pi}{2}-\Big(\dfrac{r_1-r_0}{a_1}+\dfrac{r_2-r_1}{a_2}\Big)\lambda_n+\widetilde{\xi}(\lambda_n)$; тогда из (1.13) следует $|\widetilde{\xi}(\lambda_n)|\le a_2/r_2\lambda_n$, а из (1.14) будем иметь существование некоторого числа $d_1>0$ такого, что $\forall n\ \ |\sigma_n|\le d_1/\lambda_n$.

Так как $\cos\Big(\Big(\dfrac{r_1-r_0}{a_1}+\dfrac{r_2-r_1}{a_2}\Big)\lambda_n+\widetilde{\xi}(\lambda_n)\Big)\to 0$ при $\lambda_n\to\infty$, то

$$\lambda_n=\frac{a_1\,a_2\,(\pi/2+\pi n+\xi_n)}{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)},\tag{1.15}$$

где $\xi_n=\sigma_n-\widetilde{\xi}(\lambda_n)$.

Из вышесказанного следует существование чисел $c_1,c_2>0$ таких, что для любого n выполняется неравенство $c_1/n\le|\xi_n|\le c_2/n$.

Лемма доказана.

Рассмотрим функции $\psi_n(r)=\varphi_n(r)/\|\varphi_n(r)\|$, $r_0\le r\le r_2$. Тогда для любого n имеем $\psi_n(r)$, $A\psi_n(r)\in C[r_0,r_2]$, а последовательность $\{\psi_n(r)\}$ ортонормирована.

Лемма 3. *Существует число $d_2>0$ такое, что для любых n и $r\in[r_0,r_2]$ $|\psi_n(r)|\le d_2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим $\|\varphi_n(r)\|^2$ по формуле

$$\|\varphi_n(r)\|^2=\int\limits_{r_0}^{r_1}r^2(\varphi_n^1(r))^2d\Big(\frac{r}{a_1}\Big)+\int\limits_{r_1}^{r_2}r^2(\varphi_n^2(r))^2d\Big(\frac{r}{a_2}\Big).$$

Учитывая, что $\sin\dfrac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}=(-1)^n\cos\Big(\dfrac{\lambda_n(r_2-r_1)}{a_2}+\xi_n\Big)$, получим

$$\|\varphi_n(r)\|^2=\frac{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}{2a_1a_2\sin^2(\lambda_n(r_1-r_0)/a_1)}.$$

Тогда $$|\psi_n(r)|=\frac{|\varphi_n(r)|}{\|\varphi_n(r)\|}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2a_1a_2}\,|\sin(\lambda_n(r-r_0)/a_1)|}{r\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}, & r_0\le r\le r_1,\\[2ex] \dfrac{\sqrt{2a_1a_2}\,|\cos(\lambda_n(r_2-r)/a_2+\xi_n)|}{r\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}, & r_1\le r\le r_2.\end{cases}$$

Из предыдущего равенства следует $d_2=\dfrac{\sqrt{2a_1a_2}}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}$.

Лемма доказана.

Возьмем $t_1=t_0+2$. Для доказательства применимости преобразования Фурье прямую задачу разобьем на две: первая при $t\in[0,t_1)$, вторая при $t\in[t_0,\infty)$.

Лемма 4. *Существует решение $v(r,t)$ задачи* (1.8), *удовлетворяющее условиям*

$$v(r,t)\in C([r_0,r_2]\times[0,t_1]),\quad \begin{cases} a_1\dfrac{\partial v_1(r,t)}{\partial r}\\ a_2\dfrac{\partial v_2(r,t)}{\partial r}\end{cases}\in C((r_0,r_2]\times(0,t_1]),$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_1(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_0,r_1)\times(0,t_1])\\ \dfrac{\partial^2 v_2(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_1,r_2)\times(0,t_1])\end{cases}\quad \textit{и для любого}\ \ t\in[0,t_1]\quad \begin{cases}a_1^2\dfrac{\partial^2 v_1(r,t)}{\partial r^2}\\ a_2^2\dfrac{\partial^2 v_2(r,t)}{\partial r^2}\end{cases}\in L_2(r_0,r_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ряд

$$v(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\int\limits_0^t g_n(\theta)e^{-\lambda_n^2(t-\theta)}d\theta\Bigg)\psi_n(r). \tag{1.16}$$

Введем обозначения:

$$P_n(t)=\int\limits_0^t g_n(\theta)\,e^{-\lambda_n^2(t-\theta)}d\theta, \tag{1.17}$$

$$g_n(\theta)=\frac{-\sqrt{2a_1a_2}\,q'(\theta)}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}\Bigg(\frac{r_0\sin((r_1-r_0)\lambda_n/a_1)}{\lambda_n}$$
$$+\frac{a_1-a_2}{\lambda_n^2}\sin^2\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}+\frac{(-1)^n a_2}{\lambda_n^2}\sin\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}\Bigg).$$

Проинтегрировав равенство (1.17) по частям, получим

$$P_n(t)=\frac{-\sqrt{2a_1a_2}}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}\Bigg(\frac{r_0\sin((r_1-r_0)\lambda_n/a_1)}{\lambda_n}+\frac{a_1-a_2}{\lambda_n^2}\sin^2\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}$$
$$+\frac{(-1)^n a_2}{\lambda_n^2}\sin\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}\Bigg)\cdot\Bigg(\frac{q'(t)}{\lambda_n^2}-\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^t q''(\theta)e^{-\lambda_n^2(t-\theta)}d\theta\Bigg).$$

Представим $\psi_n(r)=\gamma_n(r)/r$, где $\gamma_n(r)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2a_1a_2}\,\sin\left(\lambda_n(r-r_0)/a_1\right)}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}, & r_0\le r\le r_1,\\ \dfrac{\sqrt{2a_1a_2}\,\cos\left(\lambda_n(r_2-r)/a_2+\xi_n\right)}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}, & r_1\le r\le r_2.\end{cases}$

Тогда ряд (1.16) перепишем в виде $v(r,t)=\dfrac{1}{r}w(r,t),\quad w(r,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n(t)\,\gamma_n(r).$

Поскольку

$$\frac{\partial v(r,t)}{\partial r}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial w(r,t)}{\partial r}-\frac{1}{r^2}w(r,t),\quad \frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial r^2}=\frac{2}{r^3}\,w(r,t)-\frac{2}{r^2}\,\frac{\partial w(r,t)}{\partial r}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial r^2},$$

то необходимо доказать, что $w(r,t)\in C([r_0,r_2]\times[0,t_1])$, $\begin{cases} a_1\dfrac{\partial w_1(r,t)}{\partial r}\\ a_2\dfrac{\partial w_2(r,t)}{\partial r}\end{cases}\in C((r_0,r_2]\times(0,t_1])$,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w_1(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_0,r_1)\times(0,t_1])\\ \dfrac{\partial^2 w_2(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_1,r_2)\times(0,t_1])\end{cases}\quad \text{и для любого}\ \ t\in[0,t_1]\quad \begin{cases}a_1^2\dfrac{\partial^2 w_1(r,t)}{\partial r^2}\\ a_2^2\dfrac{\partial^2 w_2(r,t)}{\partial r^2}\end{cases}\in L_2(r_0,r_2).$$

Из того, что $e^{-\lambda_n^2 t}\displaystyle\int_0^t q''(\theta)\,e^{\lambda_n^2\theta}d\theta \in C[0,t_1]$, и из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ по признаку Вейерштрасса получим равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(t)\,\gamma_n(r) \quad \text{на} \quad [r_0,r_2]\times[0,t_1].$$

С учетом того что $q'(t)\in C[0,t_1]$ и $P_n(t)\in C[0,t_1]$, имеем $w(r,t)\in C([r_0,r_2]\times[0,t_1])$.

Аналогично доказываем, что $\partial w(r,t)/\partial r = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(P_n(t)\gamma_n(r))'_r$,

$$a_1\partial w_1(r,t)/\partial r \in C([r_0,r_1]\times(0,t_1]), \quad a_2\partial w_2(r,t)/\partial r \in C([r_1,r_2]\times(0,t_1]).$$

Теперь перейдем к исследованию $\partial^2 w(r,t)/\partial r^2$. Так как

$$\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial r^2} = \begin{cases} -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\,a_1^{-2}P_n(t)\gamma_n^1(r) & \text{при} \quad r\in(r_0,r_1), \\ -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\,a_2^{-2}P_n(t)\gamma_n^2(r) & \text{при} \quad r\in(r_1,r_2), \end{cases}$$

то интересующий нас ряд на промежутке (r_0,r_1) будет иметь вид

$$\partial^2 w_1(r,t)/\partial r^2 = \frac{\sqrt{2a_1a_2}}{a_1^2\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}\sum_{n=1}^{\infty}\biggl(\frac{a_1-a_2}{\lambda_n^2}\sin\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}\sin\frac{\lambda_n(r-r_0)}{a_1}$$

$$+\frac{r_0\sin((r-r_0)\lambda_n/a_1)}{\lambda_n}+\frac{(-1)^n a_2}{\lambda_n^2}\sin\frac{\lambda_n(r-r_0)}{a_1}\biggr)\cdot\biggl(q'(t)-\int\limits_0^t q''(\theta)e^{-\lambda_n^2(t-\theta)}d\theta\biggr), \tag{1.18}$$

а на промежутке (r_1,r_2)

$$\partial^2 w_2(r,t)/\partial r^2 = \frac{\sqrt{2a_1a_2}}{a_2^2\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}\sum_{n=1}^{\infty}\biggl[\frac{r_0(-1)^n\cos((r_2-r)\lambda_n/a_2+\xi_n)}{\lambda_n}$$

$$+\frac{a_1-a_2}{\lambda_n^2}\sin\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}(-1)^n\cos\Bigl(\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}+\xi_n\Bigr)+\frac{a_2}{\lambda_n^2}\cos\Bigl(\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}+\xi_n\Bigr)\biggr]$$

$$\times\biggl(q'(t)-\int\limits_0^t q''(\theta)e^{-\lambda_n^2(t-\theta)}d\theta\biggr). \tag{1.19}$$

Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса функциональные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}\sin\dfrac{\lambda_n(r-r_0)}{a_1}}{\lambda_n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\lambda_n(r-r_0)}{a_1}}{\lambda_n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}}{\lambda_n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\dfrac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}\cos\Bigl(\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}+\xi_n\Bigr)}{\lambda_n^2}$$

сходятся равномерно на $[r_0,r_2]$.

Воспользовавшись результатом

$$(-1)^n \cos\Big(\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}+\xi_n\Big)$$

$$=(-1)^n\Big(\cos\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}-\cos\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,2\sin^2\frac{\xi_n}{2}-\sin\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,\sin\xi_n\Big),$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos\Big(\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}+\xi_n\Big)}{\lambda_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}}{\lambda_n}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,2\sin^2\dfrac{\xi_n}{2}}{\lambda_n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,\sin\xi_n}{\lambda_n}.$$

Из леммы 2 следует, что

$$\left|\frac{(-1)^n\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,2\sin^2\dfrac{\xi_n}{2}}{\lambda_n}\right|\le\frac{c_1}{\lambda_n^3},\qquad\left|\frac{(-1)^n\sin\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,\sin\xi_n}{\lambda_n}\right|\le\frac{c_2}{\lambda_n^2}.$$

В этом случае ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,2\sin^2\dfrac{\xi_n}{2}}{\lambda_n},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,\sin\xi_n}{\lambda_n}$$

сходятся равномерно на промежутке $[r_1,r_2]$ по признаку Вейерштрасса. По признаку Дирихле для любого $\varepsilon>0$ может быть доказана равномерная сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda_n(r-r_0)/a_1)}{\lambda_n}\quad\text{на}\quad[r_0+\varepsilon,r_1-\varepsilon]\quad\text{и}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}}{\lambda_n}\quad\text{на}\quad[r_1+\varepsilon,r_2-\varepsilon].$$

Подробное доказательство этого факта приведено в работе [4, лемма 2].

Из (1.18), (1.19) и ортогональности последовательности $\{\psi_n(r)\}$ вытекает, что для любого $t\in[0,t_1]$ $\ v(r,t)\in H^2[r_0,r_2]$.

Лемма доказана.

Из леммы 4 следует следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $q(t)$ *удовлетворяет условию* (1.7)*. Тогда существует решение* $u(r,t)$ *задачи* (1.1)–(1.6) *такое, что* $u(r,t)$ *удовлетворяет начальному условию* (1.3)*, граничным условиям* (1.4), (1.5)*, условиям сопряжения* (1.6)*, а также выполняются условия*

$$u(r,t)\in C([r_0,r_2]\times[0,t_1]),\quad\begin{cases}a_1\dfrac{\partial u_1(r,t)}{\partial r}\\ a_2\dfrac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}\end{cases}\in C([r_0,r_2]\times(0,t_1]),\quad\begin{cases}a_1^2\dfrac{\partial^2u_1(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_0,r_1)\times(0,t_1])\\ a_2^2\dfrac{\partial^2u_2(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_1,r_2)\times(0,t_1])\end{cases}$$

и для любого фиксированного $t\in[0,t_1]$ *справедливо* $Au(r,t)\in X$ *(см.* (1.9), (1.12)*).*

Из теоремы 1 следует справедливость условий

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{t_1} a_1\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial x}e^{-i\tau t}dt=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a_1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{t_1} u_1(r,t)e^{-i\tau t}dt\right), \quad r\in[r_0,r_1],\ |\tau|\ge 0,\\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{t_1} a_2\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}e^{-i\tau t}dt=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a_2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{t_1} u_2(r,t)e^{-i\tau t}dt\right), \quad r\in[r_1,r_2],\ |\tau|\ge 0,\\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{t_1} a_i^2\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2}e^{-i\tau t}dt=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{a_i^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{t_1} u(r,t)e^{-i\tau t}dt\right), \quad r\in(r_0,r_1)\cup(r_1,r_2).
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Для окончательного обоснования применимости преобразования Фурье по t на полупрямой $[0,\infty)$ для решения задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) необходимо формулу (1.20) распространить на $[t_0,\infty)$.

2. Исследование скорости убывания функций $v(r,t), \partial v(r,t)/\partial r,\ \partial^2 v(r,t)/\partial r^2$

В данном разделе использована методика, приведенная в [12, разд. 5.1].

Рассмотрим вспомогательную задачу, использующую условие (1.7)

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_1(r,t)}{\partial t}=\frac{a_1^2\partial^2 v_1(r,t)}{\partial r^2}, \quad r_0<r\le r_1, \quad t\ge t_0,\\
\frac{\partial v_2(r,t)}{\partial t}=\frac{a_2^2\partial^2 v_2(r,t)}{\partial r^2}, \quad r_1\le r<r_2, \quad t\ge t_0,\\
v(r,t_0)=f(r), \quad r_0\le r\le r_2,\\
v_1(r_0,t)=0, \quad \frac{\partial v_2(r_2,t)}{\partial r}=0, \quad t\ge t_0,\\
v_1(r_1,t)=v_2(r_1,t), \quad \frac{a_1\partial v_1(r_1,t)}{\partial r}=\frac{a_2\partial v_2(r_1,t)}{\partial r}, \quad t\ge t_0.
\end{gathered}
$$

Решение этой задачи имеет вид

$$
v(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}\psi_n(r), \tag{2.1}
$$

$$
b_n=\frac{\sqrt{2a_1a_2}\sin(\lambda_n(r_1-r_0)/a_1)}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}\int\limits_{r_0}^{r_2}\rho(r)\,f(r)\,\varphi_n(r)dr,
$$

где $\rho(r)=\begin{cases} r^2/a_1 \text{ при } r_0\le r\le r_1,\\ r^2/a_2 \text{ при } r_1\le r\le r_2,\end{cases}$ $\varphi_n(r)$ и λ_n введены соответственно в (1.11) и (1.15).

Лемма 5. *Пусть* b_n *определяется формулой* (2.1), *тогда существует число* $d_3>0$ *такое, что для любого* n $\quad |b_n|\le d_3/\lambda_n^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.1) и леммы 3 имеем $b_n=(f(r),\psi_n(r))$; $A\psi_n(r)=-\lambda_n^2\psi_n(r)$. Поэтому

$$
(f(r),A\psi_n(r))=-\lambda_n^2(f(r),\psi_n(r))=(Af(r),\psi_n(r)).
$$

Тогда $(f(r),\psi_n(r))=-1/\lambda_n^2\cdot(Af(r),\psi_n(r))$. Поскольку $Af(r)\in L_2(r_0,r_2)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2<\infty$.

Соответственно, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Откуда следует, что существует $d_3 > 0$ такое, что для любого n $|(f(r), \psi_n(r))| \le d_3/\lambda_n^2$.

Лемма доказана.

Теперь перейдем к оценке скорости убывания решения $v(r,t)$ при $t \to \infty$.

Из лемм 3, 5 и соотношения (2.1) следует, что при $t \ge t_0 + 1$

$$|v(r,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} d_2 d_3 \lambda_n^{-2} e^{-\lambda_n^2 (t-t_0)}, \quad |v'_r(r,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} d_2 d_3 \lambda_n^{-1} e^{-\lambda_n^2 (t-t_0)}$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует $d_4(\varepsilon)$ такое, что

$$|v''_{rr}(r,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} d_4(\varepsilon) e^{-\lambda_n^2 (t-t_0)}, \quad r \in [r_0 + \varepsilon, r_1 - \varepsilon] \cup [r_1 + \varepsilon, r_2 - \varepsilon].$$

Поскольку $e^{-\lambda_n^2 (t-t_0)} = e^{-\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 (t-t_0-1)}$, то получим существование числа $d_5 > 0$ такого, что для любого $t \ge t_0 + 2$

$$\sup_{r \in [r_0, r_2]} \{|v(r,t)|, \ |v'_r(r,t)|\} \le d_5 e^{-(t-t_0-1)}$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует $d_6(\varepsilon)$ такое, что для любых $r \in [r_0 + \varepsilon, r_1 - \varepsilon] \cup [r_1 + \varepsilon, r_2 - \varepsilon]$ и $t \ge t_0 + 2$ справедливо соотношение

$$|v''_{rr}(r,t)| \le d_6(\varepsilon) e^{-(t-t_0-1)}.$$

Из теоремы 1 и леммы 5 следует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существует решение* $u(r,t)$ *задачи* (1.1)–(1.6) *такое, что* $u(r,t)$ *удовлетворяет начальному условию* (1.3), *граничным условиям* (1.4), (1.5), *условиям сопряжения* (1.6), *а также выполняются условия*

$$u(r,t) \in C([r_0, r_2] \times (0,\infty)), \quad \begin{cases} a_1 \dfrac{\partial u_1(r,t)}{\partial r} \\ a_2 \dfrac{\partial u_2(r,t)}{\partial r} \end{cases} \in C([r_0, r_2] \times (0,\infty)),$$

$$\begin{cases} a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1(r,t)}{\partial r^2} \in C((r_0, r_1) \times (0,\infty)) \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2(r,t)}{\partial r^2} \in C((r_1, r_2) \times (0,\infty)) \end{cases}$$

и для любого фиксированного $t \in [0, t_1]$ *справедливо* $u(r,t), Au(r,t) \in X$ (*см.* (1.9), (1.12)).

Тогда на основании теоремы, доказанной в [13, гл. XIV, теорема 3], получим

Теорема 3. *Пусть* $u(r,t)$ *определена формулой* (2.1). *Тогда для любого* τ, $|\tau| \ge 0$, *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a_1 \frac{\partial u_1(r,t)}{\partial x} e^{-i\tau t} dt = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u_1(r,t) e^{-i\tau t} dt \right), \quad r \in [r_0, r_1], \ |\tau| \ge 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a_2 \frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r} e^{-i\tau t} dt = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a_2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u_2(r,t) e^{-i\tau t} dt \right), \quad r \in [r_1, r_2], \ |\tau| \ge 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a_i^2 \frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} e^{-i\tau t} dt = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{a_i^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u(r,t) e^{-i\tau t} dt \right), \quad r \in (r_0, r_1) \cup (r_1, r_2), \ i = 1, 2.$$

3. Постановка обратной граничной задачи

Предположим, что в условии (1.4) функция $q(t)$ не известна, а вместо нее в точке r_1 измеряется температура $f(t)$, соответствующая данному процессу

$$u_2(r_1, t) = f(t), \quad t \geq 0. \tag{3.1}$$

Требуется, используя $f(t)$, определить функцию $q(t)$ такую, что при подстановке ее в условие (1.4), решение $u(r,t)$ задачи (1.1)–(1.6) удовлетворяет соотношению (3.1).

Пусть $M_d \subset L_2(0;\infty)$, тогда

$$M_d = \left\{ q(t)\colon q(t) \in C^2(0;\infty),\ \int\limits_0^{+\infty} |q(t)|^2 dt + \int\limits_0^{+\infty} |q''(t)|^2 dt \leq d^2 \right\},$$

где d — известное положительное число.

Так как обратная задача некорректно поставлена, то дополнительно предположим, что при $f(t) = f_0(t) \in C[0,\infty)$ существует решение $q_0(t)$ обратной задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6), (3.1), принадлежащее множеству M_d, но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t) \in C[0;\infty) \cap L_1(0,\infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\int\limits_0^{\infty} |f_\delta(t) - f_0(t)|^2 dt \leq \delta^2. \tag{3.2}$$

Требуется, используя f_δ, δ и M_d, найти приближенное решение q_δ задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6), (3.1) и оценить величину $\|q_\delta - q_0\|_{L_2(0,\infty)}$.

4. Сведение обратной граничной задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6), (3.1) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

При решении обратной граничной задачи очень важно не только получить приближенное решение, но и оценить его погрешность. Для этого будем использовать преобразование Фурье функции $u(r,t)$ по переменной t. Введем оператор F, отображающий $L_2(0;\infty)$ в $L_2(-\infty;\infty)$, который определим следующим образом:

$$\hat{q}(\tau) := F_t[q(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} q(t) e^{-it\tau} dt, \quad q(t) \in L_2(0;\infty). \tag{4.1}$$

Отметим, что введенное преобразование для функции $q(t)$ совпадает со стандартным преобразованием Фурье функции

$$\tilde{q}(t) = \begin{cases} q(t), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Тем самым все стандартные свойства введенного преобразования совпадают с аналогичными свойствами преобразования Фурье.

Из теоремы 3 следует применимость преобразования F, определяемого формулой (4.1), к решению задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6), (3.1). Таким образом, сведем ее к следующей

$$i\tau \hat{u}_1(r,\tau) = a_1^2 \Big(\frac{\partial^2 \hat{u}_1(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{u}_1(r,\tau)}{\partial r} \Big), \quad r_0 < r < r_1, \quad \tau \in (-\infty, \infty), \tag{4.2}$$

$$i\tau \hat{u}_2(r,\tau) = a_2^2 \Big(\frac{\partial^2 \hat{u}_2(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{u}_2(r,\tau)}{\partial r} \Big), \quad r_1 < r < r_2, \quad \tau \in (-\infty, \infty), \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_2(r_2,\tau)}{\partial r}=0,\quad \hat{u}_1(r_1,\tau)=\hat{u}_2(r_1,\tau),\quad a_1\frac{\partial \hat{u}_1(r_1,\tau)}{\partial r}=a_2\frac{\partial \hat{u}_2(r_1,\tau)}{\partial r}\quad -\infty<\tau<\infty, \tag{4.4}$$

где $\hat{u}_1(r,\tau)=F[u_1(r,t)]$, $\hat{u}_2(r,\tau)=F[u_2(r,t)]$, $\hat{u}(r,\tau)=\begin{cases}\hat{u}_1(r,\tau), & r\in[r_0,r_1],\\ \hat{u}_2(r,\tau), & r\in[r_1,r_2].\end{cases}$

Решения уравнений (4.2), (4.3) имеют вид

$$\hat{u}_1(r,\tau)=A_1(\tau)\,\frac{a_1^3}{i\sqrt{\mu^3}}\,\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{r\sqrt{\mu}}{a_1}\right)}{r}+A_2(\tau)\,\frac{a_1^2}{i\mu}\,\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{r\sqrt{\mu}}{a_1}\right)}{r},$$

$$\hat{u}_2(r,\tau)=B_1(\tau)\,\frac{a_2^3}{i\sqrt{\mu^3}}\,\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{r\sqrt{\mu}}{a_2}\right)}{r}+B_2(\tau)\,\frac{a_2^2}{i\mu}\,\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{r\sqrt{\mu}}{a_2}\right)}{r},$$

где $\mu=i\tau$, $\sqrt{\mu}=\pm(1+i)\sqrt{\tau}/\sqrt{2}$.

Решая задачу (4.2)–(4.4), сведем ее к задаче вычисления значений неограниченного оператора T:

$$T(\tau)\hat{f}(\tau)=\hat{q}(\tau),\quad -\infty<\tau<\infty, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}T(\tau)=\Bigg[&a_2r_1\sqrt{\mu}\operatorname{sh}\left(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)-r_1r_2\mu\operatorname{ch}\left(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)\\ &+(1-a_1)\operatorname{sh}\left(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}\right)\left(a_2\operatorname{sh}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)-r_2\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)\right)\Bigg]\\ &\times\left[a_2r_0\sqrt{\mu}\operatorname{sh}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)-r_0r_2\mu\operatorname{ch}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)\right]^{-1}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

В дальнейшем, учитывая, что $|T(\tau)|\to\infty$ при $\tau\to\infty$, воспользуемся $\sqrt{i\tau}=(1+i)\sqrt{\tau}/\sqrt{2}$.

Преобразуем формулу (4.6), разделив числитель и знаменатель на $\sqrt{r_2^2\mu-a_2^2}$.

Пусть $\beta(\mu)$ определена формулой

$$\operatorname{sh}\beta(\mu)=\frac{a_2}{\sqrt{r_2^2\mu-a_2^2}}. \tag{4.7}$$

Из свойств функции $\operatorname{Arsh}\beta(\mu)$, доказанных в [14, гл. II], следует, что эта функция отображает комплексную плоскость $\mathbb{C}$, из которой выброшены лучи $1\le y<\infty$ и $-\infty<y\le -1$ в полосу $-\dfrac{\pi}{2}<v<\dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, из (4.7) следует существование функции $\beta(\mu)$:

$$\beta(\mu)\to 0\ \text{ при }\ \mu\to\infty, \tag{4.8}$$

а из (4.6) получаем, что

$$\begin{aligned}T(\tau)=\Bigg[&r_1\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\left(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\right)\\ &+(a_1-1)\operatorname{sh}\left(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\right)\Bigg]\cdot\left[r_0\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\right)\right]^{-1},\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$D(T)=\{\hat{f}(\tau)\colon \hat{f}(\tau)\in L_2(0,\infty)\ \text{ и }\ T\hat{f}(\tau)\in L_2(0,\infty)\}. \tag{4.10}$$

Из (4.6) и (4.10) имеем, что оператор T линеен, неограничен, замкнут и инъективен.

Возьмем $\hat{q}_0(\tau)=T\hat{f}_0(\tau)$, $\hat{f}_0(\tau)=F[f_0(t)]$, $\hat{f}_\delta(\tau)=F[f_\delta(t)]$. Из формулы (3.2) следует, что

$$\|\hat{f}_\delta-\hat{f}_0\|\le\delta. \tag{4.11}$$

Множество M_d при преобразовании F перейдет в множество $\widehat{M}_d \supset F[M_d]$, определяемое формулой

$$\widehat{M}_d = \Big\{ \hat{q}(\tau) \colon \hat{q}(\tau) \in L_2(0,\infty), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+\tau^4)|\hat{q}(\tau)|^2 d\tau \le 2d^2 \Big\}. \tag{4.12}$$

Из того, что $q_0(t) \in M_d$, получаем

$$\hat{q}_0(\tau) \in \widehat{M}_d. \tag{4.13}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия, сформулированные в теореме* 1. *Тогда для любого* $q(t)$, *удовлетворяющему условию* (1.7), *существует единственное решение задачи* (1.1)–(1.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теорем 1, 2, формул (4.9), (4.10) и инъективности оператора T.

5. Решение задачи (4.5), (4.9)–(4.13)

Лемма 6. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют числа* τ_ε, $b_1(\varepsilon)$ *и* $b_2(\varepsilon) > 0$ *такие, что для любого* τ, $|\tau| \ge \tau_\varepsilon$, *справедливо следующее соотношение*:

$$b_1(\varepsilon)\,\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}}{\sqrt{\tau}} \le |T(\tau)| \le b_2(\varepsilon)\,\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}}{\sqrt{\tau}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем равенство (4.9) в виде

$$|T(\tau)| \le \frac{\Big|r_1 \operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1} + \dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|r_0 \operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu)\Big)\Big|}$$

$$+ \frac{\Big|(a_1-1)\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}\Big)\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|r_0\sqrt{\mu}\,\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu)\Big)\Big|}. \tag{5.1}$$

Поскольку $\beta(\mu) = \beta_1(\mu) + i\beta_2(\mu)$, $|\sqrt{\mu}| = \sqrt{\tau}$, то для получения оценки сверху, воспользуемся формулами $|\operatorname{ch} z_1| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x_1 - \sin^2 y_1}$ — для числителя и $|\operatorname{ch} z_2| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x_2 + \cos^2 y_2}$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ — для знаменателя.

Таким образом, получим оценку сверху для частного:

$$\frac{\Big|\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1} + \dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu)\Big)\Big|} \le \frac{\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1} + \dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2} - \beta_1(\mu)\Big)}{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2} - \beta_1(\mu)\Big)}.$$

Далее

$$\frac{\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1} + \dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2} - \beta_1(\mu)\Big)}{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2} - \beta_1(\mu)\Big)}$$

$$= \frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)}\Big(1+e^{\frac{-2(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}-\frac{2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}{e^{\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)}\Big(1-e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}.$$

Так как из (4.8) и вышесказанного следует, что для любого $\eta>0$ найдется $\tau_1>0,\ \tau_1\ge\tau_\varepsilon$, например $\tau_1=\dfrac{a_2^2}{2(r_2-r_1)^2}\ln^2\dfrac{1}{\eta}$ такое, что для любого $|\tau|\ge\tau_1$

$$\sup\Big\{e^{\frac{-2(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}-\frac{2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)};\ e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big\}<\eta,$$

то для любого $\tau,\ |\tau|\ge\tau_1$, будет верно неравенство

$$\frac{\Big|\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}\le\frac{1+\eta}{1-\eta}\,e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}. \tag{5.2}$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{\Big|\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}\ge\frac{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}+\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}.$$

Тогда при $|\tau|\ge\tau_1$

$$\frac{\Big|\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}\ge\frac{1-\eta}{1+\eta}\,e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}. \tag{5.3}$$

Пусть $\eta=\dfrac{\varepsilon}{8+3\varepsilon}$, тогда согласно (5.2), (5.3) для любого $\varepsilon>0$ существует число $\tau_\varepsilon>0$ такое, что для любого $\tau,\ |\tau|\ge\tau_\varepsilon$, справедливо неравенство

$$\Big(1-\frac{\varepsilon}{4+2\varepsilon}\Big)e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\le\frac{\Big|\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}$$

$$\le\Big(1+\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\Big)e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}. \tag{5.4}$$

Для оценки сверху второго слагаемого в формуле (5.1) используем формулы $|\operatorname{sh}z_1|=\sqrt{\operatorname{ch}^2x_1-\cos^2y_1},\ \ |\operatorname{ch}z_2|=\sqrt{\operatorname{ch}^2x_2-\sin^2y_2},\ z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2$ — для числителя и $|\operatorname{ch}z_3|=\sqrt{\operatorname{sh}^2x_3+\cos^2y_3},\ z_3=x_3+iy_3$ — для знаменателя. Тогда

$$\frac{\Big|\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}\Big)\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}\le\frac{\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}\Big)\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\sqrt{\tau}\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}.$$

Затем

$$\frac{\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}\Big)\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\sqrt{\tau}\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}$$

$$=\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\Big(1+e^{\frac{-2(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\Big)\Big(1+e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}{2\sqrt{\tau}\Big(1-e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}.$$

Рассуждая аналогично, получим оценку снизу

$$\frac{\Big|\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}\Big)\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}\geq\frac{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}\Big)\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\sqrt{\tau}\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}.$$

Далее

$$\frac{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}\Big)\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\sqrt{\tau}\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}$$

$$=\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\Big(1-e^{\frac{-2(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\Big)\Big(1-e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}{2\sqrt{\tau}\Big(1+e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}.$$

Если $1-e^{\frac{-2(r_1-r_0)\sqrt{\tau_1/2}}{a_1}}\leq 1/2$, то для любого τ, $|\tau|\geq\tau_1$, верно неравенство

$$\frac{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}\Big)\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\sqrt{\tau}\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}\geq\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}(1-\eta)}{4\sqrt{\tau}\,(1+\eta)}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{4\sqrt{\tau}}\Big(1-\frac{\varepsilon}{4+2\varepsilon}\Big)\,e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\leq\frac{\Big|\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}\Big)\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}$$

$$\leq\frac{4}{3\sqrt{\tau}}\Big(1-\frac{8\varepsilon+20}{3\varepsilon^2+20\varepsilon+32}\Big)\,e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}.$$

Пусть ε такое, что

$$\frac{4}{3}\Big(1-\frac{8\varepsilon+20}{3\varepsilon^2+20\varepsilon+32}\Big)\leq 2.$$

Тогда из (5.1), (5.4) и предыдущего неравенства будет следовать: для любого $\varepsilon>0$ существуют числа τ_ε, $b_1(\varepsilon)$ и $b_2(\varepsilon)>0$ такие, что для любого τ, $|\tau|\geq\tau_\varepsilon$, выполняется утверждение леммы.

Лемма доказана.

Для решения задачи (4.5) воспользуемся методом проекционной регуляризации (см. [12, гл. 4, п. 4.1]). В основе этого метода лежит регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha\colon \alpha > \tau_\varepsilon\}$, определяемое формулой

$$T_\alpha \hat{f}(\tau) = \begin{cases} T\hat{f}(\tau), & -\alpha \le \tau \le -\tau_\varepsilon, \quad \tau_\varepsilon \le \tau \le \alpha, \\ 0, & |\tau| > \alpha. \end{cases} \tag{5.5}$$

Приближенное значение $\hat{q}_\delta^\alpha(\tau)$ задачи (4.5) зададим формулой

$$\hat{q}_\delta^\alpha(\tau) = T_\alpha \hat{f}_\delta(\tau), \quad |\tau| \ge \tau_\varepsilon. \tag{5.6}$$

Для выбора параметра регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta, r)$ в (5.6) рассмотрим оценку

$$\|\hat{q}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{q}_0(t)\| \le \|\hat{q}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{q}_0^\alpha(\tau)\| + \|\hat{q}_0^\alpha(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\|, \text{ где } \hat{q}_0^\alpha(\tau) = T_\alpha \hat{f}_0(\tau). \tag{5.7}$$

Поскольку из (4.11), (5.5) и (5.6) следует, что $\|\hat{q}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{q}_0^\alpha(\tau)\| \le \sqrt{2}\|T_\alpha\|\delta$, то перейдем к оценке $\|T_\alpha\|$.

Лемма 7. *При сформулированных выше условиях и $\alpha \ge \tau_\varepsilon$ справедливо соотношение*

$$b_1(\varepsilon)\, e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\alpha/2}}{2a_1}} \le \|T_\alpha(\tau)\| \le b_2(\varepsilon)\, e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\alpha/2}}{a_1}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению норма оператора $\|T_\alpha\| = \sup\limits_{\tau_\varepsilon \le |\tau| \le \alpha} |T(\tau)|$. Учитывая, что

$$\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}{\sqrt{|\tau|}} = \frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{2a_1}}\, e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{2a_1}}}{\sqrt{|\tau|}},$$

получим существование $\tau_2 > \tau_1$ такого, что для любого τ, $|\tau| \ge \tau_2$, $e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{2a_1}}/\sqrt{|\tau|} \ge 1$; тогда

$$\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}{\sqrt{|\tau|}} \ge e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{2a_1}}. \tag{5.8}$$

Запишем теперь равенство

$$\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}{\sqrt{|\tau|}} = \frac{e^{\frac{2(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}{\sqrt{|\tau|}\, e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}.$$

Существует $\tau_3 > \tau_2$ такое, что для любого τ, $|\tau| \ge \tau_3$, справедливо $e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}/\sqrt{|\tau|} \ge 1$; тогда

$$\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}{\sqrt{|\tau|}} \le e^{\frac{2(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}. \tag{5.9}$$

Из леммы 6, соотношений (5.8), (5.9) получим утверждение леммы.

Лемма доказана.

Введем

$$\omega^2(\alpha) = \sup\Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{-\alpha} |\hat{q}_0(\tau)|^2 d\tau + \int\limits_{\alpha}^{\infty} |\hat{q}_0(\tau)|^2 d\tau \colon \hat{q}_0(\tau) \in \hat{M}_d \Bigg\}. \tag{5.10}$$

Тогда

$$\sup\{\|\hat{q}_0^\alpha(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\| \colon \hat{q}_0(\tau) \in \hat{M}_d\} = \omega(\alpha). \tag{5.11}$$

Согласно (4.12) при условии $\hat{q}_0(\tau) \in \hat{M}_d$ имеем

$$\int_{\alpha}^{\infty} (1+\tau^4)|\hat{q}_0(\tau)|^2 d\tau \le 2d^2.$$

Из (5.10) и предыдущего соотношения очевидно, что $\omega^2(\alpha) = 2d^2/(1+\alpha^4)$.

Таким образом, из (5.7), (5.11), предыдущего равенства и леммы 7 получим

$$\|\hat{q}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\| \le \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{1+\alpha^4}} + b_2(\varepsilon) e^{\frac{(r_1-r_0)}{a_1}\sqrt{\alpha/2}}\delta.$$

Параметр регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta)$ в формуле (5.6) выберем из условия

$$\frac{d}{\sqrt{1+\alpha^4}} = b_1(\varepsilon) e^{\frac{(r_1-r_0)}{2a_1}\sqrt{\alpha/2}}\delta. \tag{5.12}$$

Учитывая вышесказанное, имеем

$$\|\hat{q}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\| \le \frac{2\sqrt{2}d}{\sqrt{1+\overline{\alpha}^4(\delta)}}. \tag{5.13}$$

Так как функция $\sqrt{1+\alpha^4} e^{\frac{(r_1-r_0)}{2a_1}\sqrt{\alpha/2}}$ строго возрастает по α и изменяется от 0 до ∞, то существует единственное решение $\overline{\alpha}(\delta)$ уравнения (5.12).

Для представления оценки (5.13) в классе элементарных функций рассмотрим два уравнения

$$e^{\frac{(r_1-r_0)}{a_1}\sqrt{\alpha/2}} = \frac{b_2(\varepsilon)d}{\delta}, \quad e^{\frac{(r_1-r_0)}{2a_1}\sqrt{\alpha/2}} = \frac{b_1(\varepsilon)d}{\delta}. \tag{5.14}$$

Решения уравнений (5.14) обозначим через $\overline{\alpha}_1(\delta)$ и $\overline{\alpha}_2(\delta)$ соответственно.

Тогда при достаточно малых значениях δ справедливы соотношения

$$\overline{\alpha}_2(\delta) \le \overline{\alpha}(\delta) \le \overline{\alpha}_1(\delta). \tag{5.15}$$

С учетом (5.14) будем иметь

$$\overline{\alpha}_1(\delta) = \frac{4a_1^2}{(r_1-r_0)^2} \ln^2 \frac{b_2(\varepsilon)d}{\delta} \quad \text{и} \quad \overline{\alpha}_2(\delta) = \frac{a_1^2}{2(r_1-r_0)^2} \ln^2 \frac{b_1(\varepsilon)d}{\delta},$$

а из (5.15) получаем

$$\overline{\alpha}(\delta) \sim \ln^2 \delta \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{5.16}$$

Решение задачи (4.5), (4.9)–(4.13) выразим формулой $\hat{q}_\delta(\tau) = \hat{q}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\tau)$.

Тогда из соотношения (5.13) следует, что

$$\|\hat{q}_\delta(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\| \le \frac{2\sqrt{2}d}{\sqrt{1+\overline{\alpha}_1^4(\delta, r)}}.$$

Окончательно решение $q_\delta(t)$ обратной задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6), (3.1) определим формулой

$$q_\delta(t) = \begin{cases} ReF^{-1}[\overline{q}_\delta(\tau)], & t \in [0, t_0], \\ 0, & t > t_0, \end{cases}$$

где F^{-1} — оператор, обратный F.

С учетом вышесказанного для $q_\delta(t)$ будет справедлива оценка

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\| \le \frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{1+\overline{\alpha}_1^4(\delta, r)}}. \tag{5.17}$$

Теорема 5. *Существует число* $l > 0$ *такое, что для любого достаточно малого* δ *справедлива следующая оценка для приближенного решения* $q_\delta(t)$ *обратной задачи*:

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\| \le l \cdot d \cdot \ln^{-4} \delta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (5.16) и (5.17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.** Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. М.: Наука. Физматлит, 1997. 288 с.
2. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с
3. **Танана В.П., Данилин А.Р.** Об оптимальности регуляризующих алгоритмов при решении некорректных задач // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 2. С. 1323–1326.
4. **Танана В.П., Ершова А.А.** О решении обратной граничной задачи для композитных материалов // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2018. Т. 28, № 4. С. 474–488.
5. **Кабанихин С. И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
6. **Иванов В. К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
7. **Танана В.П.** Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 2. С. 117–132.
8. **Тихонов А.Н., Гласко В.Б.** К вопросу о методах определения температуры поверхности тела // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. №4. С. 910–914.
9. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некоторые задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 285 с.
10. **Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А. Н.** Сборник задач по математической физике. М.: Изд-во технико-теорет. литературы, 1956. 683 с.
11. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Изд-во высшая школа, 1967. 599 с.
12. **Tanana V., Sidikova A.** Optimal methods for ill-posed problems with applications to heat conduction: with applications to heat conduction. Berlin: De Gruyter, 2018. 130 p. ISBN: 978-3-11-057721-1 .
13. **Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа. Т. 2. М.: Физматлит., 2006. 864 с.
14. **Привалов И.И.** Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 432 с.

Поступила 28.06.2019
После доработки 22.08.2019
Принята к публикации 26.06.2019

Танана Виталий Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Южно-Уральский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: tananavp@susu.ru

Сидикова Анна Ивановна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Южно-Уральский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: sidikovaai@susu.ru

REFERENCES

1. Wildemann V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of inelastic deformation and fracture of composite materials]. Moscow: Nauka Publ., 1997, 288 p. ISBN: 5-02-015078-9 .

2. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extremal methods for the solution of ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 288 p. ISBN: 5-02-013774-X .
3. Tanana V.P., Danilin A.R. The optimality of regularizing algorithms in the solution of ill-posed problems. *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 7, pp. 1323–1326 (in Russian).
4. Tanana V.P., Ershova A.A. On the solution of an inverse boundary value problem for composite materials. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2018, vol. 28, no. 4, pp. 474–488 (in Russian).
5. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-posed problems.* Berlin: de Gruyter, 2012, 459 p. ISBN: 978-3-11-022400-9 . Original Russian text published in Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi.* Novosibirsk: Sib. Nauch. Izd-vo, 2009, 457 p.
6. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Theory of linear ill-posed problems and its applications. Utrecht: VSP, 2002, 281 p. ISBN: 9789067643672 . Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya. Moscow: Nauka Publ., 1978, 206 p.
7. Tanana V.P. On the order-optimality of the projection regularization method in solving inverse problems. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2004, vol. 7, no. 2, pp. 117–132 (in Russian).
8. Tikhonov V.N., Glasko V.B. Methods of determining the surface temperature of a body. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1967, vol. 7, no. 4, pp. 267–273. DOI: 10.1016/0041-5553(67)90161-9 .
9. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis.* Translations of Mathematical Monographs, 64. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1986, 290 p. ISBN: 9780821845172 . Original Russian text published in Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekotorye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza.* Moscow: Nauka Publ., 1980, 285 p.
10. Budak B.M., Samarskii A.A., Tikhonov A. N. *Sbornik zadach po matematicheskoi fizike* [Collection of problems in mathematical physics]. Moscow: Tekhniko-Teoret. Literatura Publ., 1956, 683 p.
11. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conduction]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1967, 599 p.
12. Tanana V., Sidikova A. *Optimal methods for ill-posed problems: with applications to heat conduction.* Berlin: De Gruyter, 2018. 130 p. ISBN: 978-3-11-057721-1 .
13. Fikhtengol'ts G.M. *Osnovy matematicheskogo analiza* [The Fundamentals of Mathematical Analysis]. Vol. 2. Moscow: Fiz. Mat. Lit. Publ., 2006, 864 p.
14. Privalov I.I. *Vvedenie v teoriyu funktsii kompleksnogo peremennogo* [Introduction to the theory of functions of a complex variable]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 432 p. ISBN(14th ed.): 5-06-003612-X .

Received June 28, 2019
Revised August 22, 2019
Accepted August 26, 2019

Vitalii Pavlovich Tanana, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., South Ural State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: tananavp@susu.ru .

Anna Ivanovna Sidikova, Cand. Phys.-Math. Sci, South Ural State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: sidikovaai@susu.ru .

Cite this article as: V. P. Tanana, A. I. Sidikova. Approximate solution of an inverse boundary value problem for a system of differential equations of parabolic type and estimation of the error of this solution, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 247–264 .

Том 25 № 3 2019

УДК 519.857

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ И ВОЗМОЖНОЙ ПОЛОМКЕ[1]

В. И. Ухоботов

Рассматривается линейная задача управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи. Известно только, что ее значения принадлежат заданному связному компакту. Задан момент окончания процесса управления. Терминальная составляющая платы зависит от модуля линейной функции фазовых переменных. Интегральная составляющая платы задается интегралом от степени управления. Считается, что возможна одна поломка, которая приводит к изменению динамики управляемого процесса. Время наступления поломки заранее не известно. Управление строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата. Противной стороной выступает помеха и момент наступления поломки. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным.

Ключевые слова: управление, помеха, поломка.

V. I. Ukhobotov. On a control problem under a disturbance and a possible breakdown.

A linear control problem is considered in the presence of an uncontrolled disturbance. It is only known that the values of the disturbance belong to a given connected compact set. The terminal time of the control process is fixed. The terminal component of the payoff depends on the modulus of a linear function of the phase variables, and the integral component is given by an integral of a power of the control. We admit the possibility of one breakdown leading to a change in the dynamics of the control process. The time of the breakdown is not known in advance. The construction of the control is based on the principle of minimizing the guaranteed result. The opponents are the disturbance and the time of the breakdown. Necessary and sufficient conditions for the optimality of an admissible control are found.

Keywords: control, disturbance, breakdown.

MSC: 91A23, 91A24, 91A80

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-265-278

Введение

Задача управления с возможными нарушениями в динамике в результате поломки может быть рассмотрена в рамках подхода, который основывается на принципе оптимизации гарантированного результата [1]. Такой подход естественен, если известен только промежуток времени, когда может произойти поломка. К числу первых работ, посвященных задачам управления с поломкой в такой постановке, относится исследование [2].

Линейную задачу управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи и с фиксированным моментом окончания процесса управления с помощью линейной замены переменных [3] можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений стоит только сумма управления и помехи, значения которых принадлежат заданным множествам, зависящим от времени. Важный класс составляют задачи, когда в приведенном виде как терминальное множество, так и воздействия управления и помехи описываются одним и тем же выпуклым компактом, который может быть параллельно перенесен и гомотетично растянут. Такую динамику имеют после замены переменных известные дифференциальные игры "изотропные ракеты" [4], контрольный пример Л.С. Понтрягина [5], в которых помехой является управление второго игрока-противника. Для таких дифференциальных игр в [5] построен альтернированный интеграл. В [6] представлен альтернированный интеграл для однотипных игр

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 19-11-00105).

с произвольным выпуклым замкнутым терминальным множеством и построены оптимальные позиционные управления игроков. В [7] первый игрок, выводя фазовую точку на круг заданного радиуса, минимизирует интегральную плату, которая задается интегралом от выпуклой функции, зависящей от нормы его управления.

В случае, если в линейной задаче управления с помехой терминальная составляющая платы является значением в момент окончания процесса управления модуля линейной функции от фазовых переменных, линейная замена переменных приводит к однотипной задаче, когда множества значений управления и помехи суть отрезки, зависящие от времени. В работе [8] рассмотрена такая задача, когда плата является суммой как терминальной составляющей, так и интеграла от выпуклой функции. Найдены необходимые условия, которым удовлетворяет оптимальное управление. В [9] рассмотрена аналогичная задача, в которой интегральная составляющая платы является интегралом от степени нормы управления. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых управление является оптимальным.

В настоящей работе рассматривается линейная задача управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи с заданным моментом окончания процесса управления. Терминальная составляющая платы зависит от модуля линейной функции фазовых переменных в момент окончания процесса управления. Интегральная составляющая платы задается интегралом от степени управления. Считается, что возможна одна поломка, которая приводит к изменению динамики управляемого процесса. Время наступления поломки заранее не известно. Управление строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным.

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемый процесс

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\xi + \phi C(t)\chi + \eta, \quad x(t_0) = x_0; \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t_0 \le t \le p. \tag{1.1}$$

Здесь p — заданный момент окончания процесса управления; t_0 — начальный момент времени; $\xi \in M \subset \mathbb{R}^d$; $\phi \in \mathbb{R}$ и $\chi \in N \subset \mathbb{R}^\rho$ являются управлениями. Множества M и N суть связные компакты, симметричные относительно начала координат. Помеха η принадлежит связному компакту $Q \subset \mathbb{R}^m$. Непрерывные при $t_0 \le t \le p$ матрицы $A(t)$ и $C(t)$ имеют размерности $m \times m$ и $m \times \rho$ соответственно. Далее, $B(t) = B_1(t)$ при $t_0 \le t < \tau \le p$ и $B(t) = B_2(t)$ при $\tau \le t \le p$. Здесь $B_j(t)$, $j = 1, 2$ непрерывные при $t_0 \le t \le p$ матрицы размерности $m \times d$.

Такая ситуация может иметь место, когда в момент времени $t_0 \le \tau \le p$ происходит поломка и меняется динамика процесса. Момент поломки τ заранее не известен.

Определим допустимое управление. Задано число $q > 1$. Обозначим через $L_q[t_0, p]$ пространство измеримых функций $\phi : [t_0, p] \to \mathbb{R}$ с суммируемой на отрезке $[t_0, p]$ степенью $|\phi(r)|^q$. Допустимым управлением являются неотрицательная функция $\phi(\cdot) \in L_q[t_0, p]$ и произвольные функции $\chi : [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \to N$ и $\xi : [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \to M$. Помеха реализуется в виде произвольной функции $\eta : [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \to Q$.

Такое определение допустимого управления продиктовано следующим соображением. В задачах управления механическими системами переменного состава, движение в которых описывается уравнением Мещерского [10], возможен случай, когда закон изменения реактивной массы нужно задавать программным образом, а управлять можно только направлением относительной скорости ее отделения. В этом случае приходим к сформулированному выше допустимому управлению.

Следуя [3], движения системы (1.1), порожденные допустимыми управлением и помехой, определим с помощью ломаных.

Возьмем разбиение ω отрезка $[t_0, p]$ с диаметром $d(\omega)$:

$$\omega : t_0 < t_1 < \ldots < t_l < t_{l+1} = p, \quad d(\omega) = \max(t_{i+1} - t_i), \quad i = \overline{0, l}.$$

Построим $x_\omega(t)$ при $t_0 < t \le t_1$ как решение задачи Коши:

$$\dot{x}_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + B(t,\tau)\xi(t_0, x_\omega(t_0)) + \phi(t)C(t)\xi(t_0, x_\omega(t_0)) + \eta(t_0, x_\omega(t_0)), \quad x_\omega(t_0) = x_0.$$

Обозначим $x_1 = x_\omega(t_1)$. Построим $x_\omega(t)$ при $t_1 < t \le t_2$ как решение задачи Коши:

$$\dot{x}_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + B(t,\tau)\xi(t_1, x_\omega(t_1)) + \phi(t)C(t)\xi(t_1, x_\omega(t_1)) + \eta(t_1, x_\omega(t_1)), \quad x_\omega(t_1) = x_1.$$

Далее, предположим, что $x_\omega(t)$ построено при $t_{i-1} < t \le t_i$, $i \le l$. Обозначим $x_i = x_\omega(t_i)$. Построим $x_\omega(t)$ при $t_i < t \le t_{i+1}$ как решение задачи Коши

$$\dot{x}_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + B(t,\tau)\xi(t_i, x_\omega(t_i)) + \phi(t)C(t)\xi(t_i, x_\omega(t_i)) + \eta(t_i, x_\omega(t_i)), \quad x_\omega(t_i) = x_i. \tag{1.2}$$

Здесь обозначено $B(t,\tau) = B_1(t)$ при $t_0 \le t < \tau$ и $B(t,\tau) = B_2(t)$ при $\tau \le t \le p$.

Можно показать, что семейство ломаных (1.2), определенных на отрезке $[t_0, p]$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным [11, с. 56]. По теореме Арцела [12, с. 104], из любой последовательности ломаных (1.2) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$. Под движением, реализовавшимся при допустимых $\phi(t)$, $\xi(t,x)$, $\eta(t,x)$ и моменте поломки τ из начального состояния $x(t_0) = x_0$, будем понимать любой равномерный предел последовательности ломаных (1.2), у которых диаметр разбиения $d(\omega)$ стремится к нулю.

Показателем качества управления является величина

$$G\left(|\langle \psi_0, x(p)\rangle| - C\right) + \int_{t_0}^{p} \phi^q(r)dr. \tag{1.3}$$

Здесь $\psi_0 \in \mathbb{R}^m$ — заданный вектор; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$; C — заданное число; $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — заданная функция.

Управление строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата [1] показателя качества (1.3).

2. Переход к одномерной однотипной задаче

Следуя [3, с. 160], перейдем к новой управляемой системе, в уравнениях движения которой отсутствует фазовый вектор. Рассмотрим при $t_0 \le t \le p$ решение $\psi(t)$ задачи Коши:

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi, \quad \psi(t_0) = \psi_0. \tag{2.1}$$

Здесь $A^*(t)$ — транспонированная матрица. Положим

$$\beta_-(t) = \min_{\eta \in Q}\langle \psi(t), \eta\rangle, \quad \beta_+(t) = \max_{\eta \in Q}\langle \psi(t), \eta\rangle. \tag{2.2}$$

Тогда из связности компакта Q следует [13, с. 333, теорема 4], что

$$\langle \psi(t), \eta\rangle = \frac{1}{2}(\beta_+(t) + \beta_-(t)) + \beta(t)v, \quad |v| \le 1, \quad \beta(t) = \frac{1}{2}(\beta_+(t) - \beta_-(t)) \ge 0. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$b_j(t) = \max_{\xi \in M}\langle \psi(t), B_j(t)\xi\rangle, \quad j = 1, 2; \quad c(t) = \max_{\chi \in N}\langle \psi(t), C(t)\chi\rangle. \tag{2.4}$$

Из связности и из симметрии компактов M и N имеем, что $b_j(t) \ge 0$, $c(t) \ge 0$ и

$$\langle \psi(t), B_j(t)\xi\rangle = -b_j(t)u_*, \quad |u_*| \le 1; \quad \langle \psi(t), C(t)\chi\rangle = -c(t)u^*, \quad |u^*| \le 1. \tag{2.5}$$

Следовательно, при $\phi(t) \geq 0$

$$\langle \psi(t), B_j(t)\xi\rangle + \langle \psi(t), \phi(t)C(t)\chi\rangle = -b_j(t)u_* - \phi(t)c(t)u^* = -(b_j(t) + \phi(t)c(t))u, \quad |u| \leq 1.$$

Последнее равенство можно показать, заметив, что множество всех возможных значений выражения $-b_j(t)u_* - \phi(t)c(t)u^*$ при $|u_*| \leq 1$, $|u^*| \leq 1$ совпадает с отрезком $[-b_j(t) - \phi(t)c(t), b_j(t) + \phi(t)c(t)]$. Отметим, что функции (2.2) и (2.4) являются непрерывными [14, с. 84, лемма 3.5]. Следовательно, непрерывной является и функция $\beta(t)$ (2.3).

Перейдем к новой переменной

$$z = \langle \psi(t), x\rangle + \frac{1}{2}\int\limits_t^p (\beta_+(r) + \beta_-(r))dr - C. \tag{2.6}$$

Тогда из (2.1) и (2.6) следует, что $z(p) = \langle \psi_0, x(p)\rangle - C$, а ломаная $z_\omega(t)$, отвечающая ломаной (1.2), определяется равенствами

$$\dot{z}_\omega(t) = -(b(t,\tau) + \phi(t)c(t))u_i + \beta(t)v_i, \quad |u_i| \leq 1, \quad |v_i| \leq 1.$$

Здесь обозначено $b(t,\tau) = b_1(t)$ при $t_0 \leq t < \tau$ и $b(t,\tau) = b_2(t)$ при $\tau \leq t \leq p$. Таким образом, получили одномерную однотипную задачу управления

$$\dot{z} = -(b(t,\tau) + \phi(t)c(t))u + \beta(t)v, \quad z(t_0) = z_0; \quad \phi(t) \geq 0, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1 \tag{2.7}$$

с критерием качества

$$G(|z(p)|) + \int\limits_{t_0}^p \phi^q(r)dr \to \min_u \max_{v,\ \tau}. \tag{2.8}$$

В этой задаче допустимым управлением являются неотрицательная функция $\phi(\cdot) \in L_q[t_0, p]$ и произвольная функция $u(t,z)$ с $|u(t,z)| \leq 1$. Допустимой помехой является произвольная функция $v(t,z)$ с $|v(t,z)| \leq 1$. Движение $z(t)$ определяется как равномерный предел последовательности ломаных

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int\limits_{t_i}^t (b(r,\tau) + \phi(r)c(r))dr\ u(t_i, z_\omega(t_i)) + \int\limits_{t_i}^t \beta(r)dr\ v(t_i, z_\omega(t_i)), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \tag{2.9}$$

у которых $z_\omega(t_0) = z_0$ и диаметр разбиения $d(\omega) \to 0$.

Определение. Решением задачи (2.7), (2.8) называются допустимое управление $\phi_0(t)$, $u_0(t,z)$ и число V_0 такие, что

1) для любых допустимой помехи $v(t,z)$, момента поломки $t_0 \leq \tau \leq p$ и любого движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$, порожденного $\phi_0(t)$, $u_0(t,z)$ и $v(t,z)$, выполнено неравенство

$$G(|z(p)|) + \int\limits_{t_0}^p \phi_0^q(r)dr \leq V_0;$$

2) для любого допустимого управления $\phi(t)$, $u(t,z)$ и для любого числа $V < V_0$ найдутся допустимая помеха $v(t,z)$ и момент поломки $t_0 \leq \tau \leq p$ такие, что для движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$, порожденного $\phi(t)$, $u(t,z)$ и $v(t,z)$, выполнено неравенство

$$G(|z(p)|) + \int\limits_{t_0}^p \phi^q(r)dr > V.$$

3. Условия окончания в однотипной задаче

Рассмотрим уравнения движения (2.7) в более общем случае, когда z, u, v принадлежат пространству $\mathbb{R}^n$, а $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем неотрицательную функцию $\phi(\cdot) \in L_q[t_0, p]$, число $\varepsilon \geq 0$ и рассмотрим задачу управления с помехой и с возможной поломкой

$$\dot{z} = -a(t,\tau)u + \beta v, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1 \tag{3.1}$$

с условием окончания

$$|z(p)| \leq \varepsilon. \tag{3.2}$$

Здесь обозначено

$$a(t,\tau) = b(t,\tau) + c(t)\phi(t). \tag{3.3}$$

Для полноты изложения считаем, что функции $b_i(t) \geq 0$, $i = 1, 2$, $\beta(t) \geq 0$ и $c(t) \geq 0$ суммируемы на отрезке $[t_0, p]$, причем $c(t) \in L_\gamma[t_0, p]$. Здесь $\gamma = \dfrac{q}{q-1}$. Перепишем уравнение ломаной (2.9) для уравнения (3.1)

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int\limits_{t_i}^{t} a(r,\tau)dr\ u(t_i, z_\omega(t_i)) + \int\limits_{t_i}^{t} \beta(r)dr\ v(t_i, z_\omega(t_i)), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}. \tag{3.4}$$

При $t_0 \leq t \leq p$ определим функции

$$D(t) = \min_{t \leq \tau \leq p} \left(\int\limits_{t}^{\tau} b_1(r)dr + \int\limits_{\tau}^{p} b_2(r)dr \right), \quad f(t) = \int\limits_{t}^{p} (\beta(r) - c(r)\phi(r))dr - D(t), \tag{3.5}$$

$$F(t) = \max_{t \leq s \leq p} f(s). \tag{3.6}$$

Отметим, что эти функции являются непрерывными. Обозначим

$$\varrho(z) = \frac{z}{|z|} \text{ при } |z| > 0 \text{ и } \varrho(0) \text{ — любое с ограничением } |\varrho(0)| = 1. \tag{3.7}$$

Теорема 1. *Помеха $v = \varrho(z)$ с некоторым моментом поломки $t_0 \leq \tau \leq p$ обеспечивает выполнение неравенства*

$$|z(p)| \geq \max(F(t_0); |z_0| + f(t_0)) \tag{3.8}$$

для любого управления $|u(t,z)| \leq 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный момент поломки $t_0 \leq \tau \leq p$. Подставим помеху $v = \varrho(z)$ в формулу (3.4). Тогда из (3.7) и неравенства треугольника следует, что любая ломаная $z_\omega(t)$ в точках t_i ее разбиения ω удовлетворяет неравенству

$$|z_\omega(t_{i+1})| \geq \left| z_\omega(t_i) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \beta(r)dr \varrho(z) \right| - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} a(r,\tau)dr = |z_\omega(t_i)| - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (a(r,\tau) - \beta(r))dr.$$

Просуммируем эти неравенства. Для любой точки t_i разбиения ω получим

$$|z_\omega(p)| \geq |z_\omega(t_i)| - \int\limits_{t_i}^{p} (a(r,\tau) - \beta(r))dr. \tag{3.9}$$

Пусть последовательность ломаных $z_{\omega_k}(t)$, у которых диаметры разбиений стремятся к нулю, равномерно сходится на отрезке $[t_0, p]$ к рассматриваемому движению $z(t)$. Тогда из (3.9) получим, что

$$|z(p)| \geq |z(t)| - \int_t^p (a(r,\tau) - \beta(r))dr \tag{3.10}$$

для любого $t_0 \leq t \leq p$.

Пусть $|z_0| + f(t_0) \geq F(t_0)$. Из (3.3) и (3.5) следует, что существует момент поломки $t_0 \leq \tau \leq p$ такой, что $f(t_0) = \int\limits_{t_0}^{p} (\beta(r) - a(r,\tau))dr$. Отсюда и из формулы (3.10) при $t = t_0$ имеем неравенство (3.8).

Пусть $|z_0| + f(t_0) < F(t_0)$. Из формул (3.3), (3.5) и (3.6) следует, что существуют числа $t_0 \leq s \leq \tau \leq p$ такие, что

$$F(t_0) = \int_s^p (\beta(r) - a(r,\tau))dr.$$

Отсюда и из неравенства (3.10) при $t = s$ получим, что $|z(p)| \geq |z(s)| + F(t_0) \geq F(t_0)$. Стало быть, неравенство (3.8) выполнено. □

Теорема 2. *Управление $u = \varrho(z)$ обеспечивает выполнение неравенства*

$$|z(p)| \leq \max(F(t_0); |z_0| + f(t_0)) \tag{3.11}$$

для любой помехи $|v(t,z)| \leq 1$ и при любом моменте поломки $t_0 \leq \tau \leq p$ для любого реализовавшегося движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.5) и (3.6) следует, что $f(p) = 0$ и $F(t) \geq F(p) = 0$ при всех $t_0 \leq t \leq p$. Поэтому, если $|z(p)| = 0$, то неравенство (3.11) выполнено.

Пусть $|z(p)| > 0$. Покажем, что существует число $t_0 \leq t_* < p$ такое, что

$$|z(t_*)| \leq \max(F(t_0); |z_0| + f(t_0)) - f(t_*), \tag{3.12}$$

$$|z(t)| > F(t) - f(t) \text{ для всех } t_* < t \leq p. \tag{3.13}$$

Неравенство (3.12) выполнено при $t_* = t_0$. Поэтому, если неравенство (3.13) выполнено при всех $t_0 < t \leq p$, то искомым числом t_* будет t_0.

Пусть неравенство (3.13) нарушается для некоторых чисел $t_0 < t < p$. Обозначим через t_* верхнюю грань этих чисел. Поскольку $f(p) = F(p) = 0$ и $|z(p)| > 0$, то $t_0 < t_* < p$. Далее, неравенство (3.13) выполнено при всех $t_* < t \leq p$, а при $t = t_*$ в нем достигается равенство. Отсюда, учитывая монотонность функции $F(t)$, получим, что

$$|z(t_*)| = F(t_*) - f(t_*) \leq F(t_0) - f(t_*).$$

Следовательно, неравенство (3.12) выполнено.

Зафиксируем число $t_* < t^* < p$. Поскольку $F(t) \geq f(t)$, то из неравенства (3.13) следует, что существует число $\delta > 0$, для которого

$$|z(t)| \geq 2\delta \text{ при всех } t^* \leq t \leq p. \tag{3.14}$$

Пусть последовательность ломаных $z_{\omega_k}(t)$, у которых диаметры разбиений стремятся к нулю, равномерно сходится на отрезке $[t_0, p]$ к рассматриваемому движению $z(t)$. Тогда из неравенств (3.13) и (3.14), используя равномерную сходимость $z_{\omega_k}(t) \to z(t)$, получим

$$|z_{\omega_k}(t)| \geq \delta \text{ при всех } t^* \leq t \leq p \tag{3.15}$$

для всех достаточно больших номеров k. Из неравенства (3.15), используя свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега [12, с. 282], имеем

$$|z_{\omega_k}(t)| - \int\limits_t^s a(r,\tau)dr > 0 \text{ при всех } t^* \le t < s \le t + d(\omega_k) \le p. \tag{3.16}$$

Отбрасывая ненужные номера k, считаем, что неравенства (3.15) и (3.16) выполнены для всех номеров k.

Рассмотрим ломаную $z_{\omega_k}(t)$. Пусть $t_{i_k-1} < t^* \le t_{i_k} < \ldots < t_{l_k+1} = p$ — это часть точек разбиения ω_k. Используя неравенство (3.15), из формулы (3.7) получим, что

$$u(t_j, z_{\omega_j}(t_j)) = \frac{z_{\omega_j}(t_j)}{|z_{\omega_j}(t_j)|}, \quad j = \overline{i_k, l_k}.$$

Подставим это управление в формулу (3.4). Получим

$$|z_{\omega_k}(t_{j+1})| \le \left| |z_{\omega_k}(t_j)| - \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} a(r,\tau)dr \right| + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \beta(r)dr, \quad j = \overline{i_k, l_k}.$$

Отсюда и из неравенства (3.16) следует, что

$$|z_{\omega_k}(t_{j+1})| \le |z_{\omega_k}(t_j)| - \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} a(r,\tau)dr + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \beta(r)dr, \quad j = \overline{i_k, l_k}.$$

Просуммируем эти неравенства. Имеем

$$|z_{\omega_k}(p)| \le |z_{\omega_k}(t_{i_k})| + \int\limits_{t_{i_k}}^{p} (\beta(r) - a(r,\tau))dr.$$

Перейдем к пределу в этом неравенстве и учтем, что $t_{i_k} \to t^*$. В получившемся неравенстве перейдем к пределу при $t^* \to t_*$. В результате

$$|z(p)| \le |z(t_*)| + \int\limits_{t_*}^{p} (\beta(r) - a(r,\tau))dr.$$

Отсюда, используя формулы (3.5) и неравенство (3.12), выводим требуемое неравенство (3.11). □

Из этих теорем получим, что если выполнены неравенства

$$|z_0| + f(t_0) \le \varepsilon, \quad F(t_0) \le \varepsilon, \tag{3.17}$$

то управление $u = \varrho(z)$ обеспечивает выполнение неравенства (3.2) для любой помехи $|v(t,z)| \le 1$, для любого момента поломки $t_0 \le \tau \le p$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$. Если же одно из неравенств (3.17) не выполнено, то помеха $v = \varrho(z)$ при некотором моменте поломки обеспечивает выполнение противоположного неравенства $|z(p)| > \varepsilon$ для любого управления $|u(t,z)| \le 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$.

4. Условия оптимальности в однотипной задаче

Учитывая формулы (3.5) и (3.6), перепишем условия (3.17) в следующем виде:

$$|z_0| + \int_{t_0}^{p} (\beta(r) - c(r)\phi(r))dr - D(t_0) - \varepsilon \le 0, \tag{4.1}$$

$$\int_{t}^{p} (\beta(r) - c(r)\phi(r))dr - D(t) - \varepsilon \le 0 \ \text{ для всех } \ t_0 \le t \le p. \tag{4.2}$$

Здесь

$$\varepsilon \ge 0, \quad \phi(\cdot) \in L_q[t_0, p], \quad \phi(t) \ge 0. \tag{4.3}$$

Далее будем считать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 1. *Функция $G : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ является непрерывной, строго возрастает, и $G(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +\infty$.*

Рассмотрим задачу

$$g(\varepsilon, \phi(\cdot)) = G(\varepsilon) + \int_{t_0}^{p} \phi^q(r)dr \to \min_{\varepsilon,\ \phi(\cdot)} \tag{4.4}$$

с ограничениями (4.1)–(4.3).

Теорема 3. *Пусть $\varepsilon_0 \ge 0$ и $\phi_0(t)$ — решение задачи* (4.1)–(4.4). *Тогда решением задачи* (2.7), (2.8) *являются функции $\phi_0(t)$, $u = \varrho(z)$ и число $V_0 = g(\varepsilon_0, \phi_0(\cdot))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится по аналогии с доказательством теоремы 2 из [9]. □

З а м е ч а н и е 1. Поскольку функция (3.7) удовлетворяет условию $|\varrho(z)| = 1$, то теорема 3 остается справедливой и для случая, когда ограничение на управление u в задаче (2.7), (2.8) имеет вид равенства $|u| = 1$.

Теорема 4. *Решение в задаче* (4.1)–(4.4) *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится по аналогии с доказательством теоремы 3 из [9]. □

З а м е ч а н и е 2. Если дополнительно к предположению 1 функция $G : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ является выпуклой, то решение в задаче (4.1)–(4.4) существует и единственно. Единственность следует из того, что связи (4.1) и (4.2) являются линейными относительно неизвестных $\varepsilon \ge 0$ и $\phi(t) \ge 0$, а функционал (4.4) выпуклый по этим неизвестным, причем по $\phi(t)$ он строго выпуклый.

Приведем достаточные условия, при выполнении которых число ε_0 и функция $\phi_0(t)$ являются решением задачи (4.1)–(4.4). Доказательства теорем, как и доказательства аналогичных теорем в работе [9], базируются на применении правила множителей Лагранжа. Однако наличие слагаемого $D(t)$ в условиях (4.1) и (4.2) потребовало внесение некоторых изменений в эти доказательства.

Теорема 5. *Пусть число ε_0 и функция $\phi_0 : [t_0, p] \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям* (4.1)–(4.3). *Пусть существуют число $\lambda \ge 0$ и неубывающая на отрезке $[t_0, p]$ функция $\theta(t)$ такие, что $\theta(t_0) = 0$ и*

$$\int_{t_0}^{p} \theta(r)(\beta(r) - c(r)\phi_0(r))dr - \int_{t_0}^{p} D(r)d\theta(r) = \theta(p)\varepsilon_0, \tag{4.5}$$

$$\lambda\Bigg(\int\limits_{t_0}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_0(r))dr+|z_0|-D(t_0)-\varepsilon_0\Bigg)=0, \tag{4.6}$$

$$G(\varepsilon_0)-(\lambda+\theta(p))\varepsilon_0\le G(\varepsilon)-(\lambda+\theta(p))\varepsilon \text{ \textit{при любом} } \varepsilon\ge 0, \tag{4.7}$$

$$\phi_0(t)=\left(\frac{c(t)}{q}(\lambda+\theta(t))\right)^{1/(q-1)} \quad \text{\textit{при}} \ \ t\in[t_0,p]. \tag{4.8}$$

Тогда число ε_0 *и функция* $\phi_0(t)$ *являются решением задачи* (4.1)–(4.4).

Доказательство. Возьмем произвольные число $\varepsilon\ge 0$ и функцию $\phi(\cdot)\in L_q[t_0,p]$, $\phi(t)\ge 0$. Запишем функцию Лагранжа

$$\Lambda(\varepsilon,\phi(\cdot))=G(\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{p}\phi^q(r)dr+\int\limits_{t_0}^{p}\Bigg(\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi(r))dr-D(t)-\varepsilon\Bigg)d\theta(t)$$

$$+\lambda\Bigg(\int\limits_{t_0}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi(r))dr+|z_0|-D(t_0)-\varepsilon\Bigg). \tag{4.9}$$

Второй интеграл в этой формуле является интегралом Римана — Стилтьеса. Поскольку число $\lambda\ge 0$, а функция $\theta(t)$ не убывает, то для любых ε и $\phi(t)$, удовлетворяющих условиям (4.1)–(4.3), выполнено неравенство

$$\Lambda(\varepsilon,\phi(\cdot))\le G(\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{p}\phi^q(r)dr.$$

Применяя формулу интегрирования по частям в интеграле Римана — Стилтьеса [15, с. 134], получим, что

$$\int\limits_{t_0}^{p}\theta(r)(\beta(r)-c(r)\phi(r))dr-\int\limits_{t_0}^{p}(D(r)+\varepsilon)d\theta(r)=\int\limits_{t_0}^{p}\Bigg(\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi(r))dr-D(t)-\varepsilon\Bigg)d\theta(t).$$

Здесь учтено, что $\theta(t_0)=0$. Поэтому формула (4.9) примет вид

$$\Lambda(\varepsilon,\phi(\cdot))=G(\varepsilon)-(\lambda+\theta(p))\varepsilon$$

$$+\int\limits_{t_0}^{p}(\phi^q(r)-(\lambda+\theta(r))c(r)\phi(r)+(\lambda+\theta(r))\beta(r))dr-\int\limits_{t_0}^{p}D(r)d\theta(r)+\lambda(|z_0|-D(t_0)). \tag{4.10}$$

Минимальное значение функции Лагранжа по $\phi(\cdot)\in L_q[t_0,p]$, $\phi(t)\ge 0$ находится из условия минимума подынтегрального выражения

$$\mu(\phi)=\phi^q-(\lambda+\theta(r))c(r)\phi\to\min,\quad \phi\ge 0.$$

Функция $\mu(\phi)$ является выпуклой. Приравнивая к нулю ее производную, получим, что минимальное значение функции Лагранжа доставляет неотрицательная функция (4.8). Далее, можно показать [11, с. 63], что функция (4.8) принадлежит пространству $L_q[t_0,p]$. Минимизация функции Лагранжа (4.10) по переменной ε дает условие (4.7). Далее, из условий (4.5) и (4.6) следует, что

$$\Lambda(\varepsilon_0,\phi_0(\cdot))=G(\varepsilon_0)+\int\limits_{t_0}^{p}\phi_0^q(r)dr.$$

Возьмем число ε и функцию $\phi(t)$, которые удовлетворяют условиям (4.1)–(4.3). Тогда имеем

$$G(\varepsilon_0) + \int\limits_{t_0}^{p} \phi_0^q(r)dr = \Lambda(\varepsilon_0, \phi_0(\cdot)) \leq \Lambda(\varepsilon, \phi(\cdot)) \leq G(\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{p} \phi^q(r)dr. \qquad \square$$

Теорема 6. *Пусть дополнительно к предположению* 1 *функция* $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *является выпуклой. Тогда для решения* ε_0, $\phi_0(t)$ *задачи* (4.1)–(4.4) *найдутся число* $\lambda \geq 0$ *и неубывающая функция* $\theta : [t_0, p] \to \mathbb{R}$ *с* $\theta(t_0) = 0$, *которые удовлетворяют условиям* (4.5)–(4.8).

Доказательство. Возьмем последовательность разбиений

$$\omega_l : t_0 = t_0^{(i)} < t_1^{(i)} < \ldots < t_{k_i}^{(i)} < t_{k_i+1}^{(i)} = p,$$

у которых диаметры $d(\omega_i)$ стремятся к нулю. Запишем неравенства

$$\int\limits_{t_j}^{p} (\beta(r) - c(r)\phi(r))dr - D(t_j) - \varepsilon \leq 0, \quad j = \overline{1, k_i}. \tag{4.11}$$

Рассмотрим оптимизационную задачу (4.4) с ограничениями (4.1), (4.3) и (4.10). Эти ограничения являются совместными. Аналогично теореме 4 доказывается, что в этой задаче существует единственное решение ε_i, $\phi_i(t)$. Рассматриваемая задача является задачей выпуклого программирования, связи в которой удовлетворяют условию Слейтера [16, с. 53]. По теореме Куна — Таккера [16, с. 90–91] существует набор множителей Лагранжа $\lambda^{(i)} \geq 0$, $\lambda_j^{(i)} \geq 0$, $j = \overline{1, k_i}$, такой, что выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\lambda^{(i)} \Bigg(\int\limits_{t_0}^{p} (\beta(r) - c(r)\phi_i(r))dr + |z_0| - D(t_0) - \varepsilon_i \Bigg) = 0, \tag{4.12}$$

$$\lambda_j^{(i)} \Bigg(\int\limits_{t_j^{(i)}}^{p} (\beta(r) - c(r)\phi_i(r))dr - D(t_j^{(i)}) - \varepsilon_i \Bigg) = 0, \quad j = \overline{1, k_i}, \tag{4.13}$$

и условие минимума функции Лагранжа $\Lambda_i(\varepsilon_i, \phi_i(\cdot)) \leq \Lambda_i(\varepsilon, \phi(\cdot))$ для любых ε и $\phi(\cdot)$, которые удовлетворяют (4.3). Здесь

$$\Lambda_i(\varepsilon, \phi(\cdot)) = G(\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{p} \phi^q(r)dr + \lambda^{(i)} \Bigg(\int\limits_{t_0}^{p} (\beta(r) - c(r)\phi(r))dr + |z_0| - D(t_0) - \varepsilon \Bigg)$$

$$+ \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^{(i)} \Bigg(\int\limits_{t_j^{(i)}}^{p} (\beta(r) - c(r)\phi(r))dr - D(t_j^{(i)}) - \varepsilon \Bigg).$$

С помощью функции

$$\theta_i(t) = \begin{cases} \lambda_1^{(i)} + \ldots + \lambda_{k_i}^{(i)}, & t_{k_i}^{(i)} < t \leq p, \\ \lambda_1^{(i)} + \ldots + \lambda_{k_i - 1}^{(i)}, & t_{k_i - 1}^{(i)} < t \leq t_{k_i}^{(i)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^{(i)}, & t_1^{(i)} < t \leq t_2^{(i)} \\ 0, & t_0 \leq t \leq t_1^{(i)}, \end{cases} \tag{4.14}$$

запишем функцию Лагранжа $\Lambda_i(\varepsilon, \phi(\cdot))$ формулой (4.9) при $\lambda = \lambda^{(i)}$, $\theta(t) = \theta_i(t)$. Поэтому она может быть записана формулой (4.10) при $\lambda = \lambda^{(i)}$, $\theta(t) = \theta_i(t)$.

Минимизируя по ε функцию $\Lambda_i(\varepsilon, \phi(\cdot))$, получим неравенство

$$G(\varepsilon_i) - (\lambda^{(i)} + \theta_i(p))\varepsilon_i \le G(\varepsilon) - (\lambda^{(i)} + \theta_i(p))\varepsilon \ \text{ для любого числа } \ \varepsilon \ge 0. \tag{4.15}$$

Минимизируя по $\phi \ge 0$ подынтегральное выражение в формуле для функции Лагранжа $\Lambda_i(\varepsilon, \phi(\cdot))$, получим равенство

$$\phi_i(t) = \Big(\frac{c(t)}{q}(\lambda^{(i)} + \theta_i(t))\Big)^{1/(q-1)}. \tag{4.16}$$

Можно считать, что $\lambda^{(i)} + \theta_i(p) > 0$ для всех достаточно больших номеров i. В самом деле, пусть $\lambda^{(i_m)} + \theta_{i_m}(p) = 0$ для некоторой подпоследовательности $i_m \to \infty$. Из неотрицательности множителей Лагранжа и из формулы (4.14) получим, что все $\lambda^{(i_m)}$ и $\theta_{i_m}(t)$ равны 0 для любого $t \in [t_0, p]$. Учитывая предположение 1, из формулы (4.15) получим, что все $\varepsilon_{i_m} = 0$. Из формулы (4.16) следует, что $\phi_{i_m}(t) = 0$ для любого $t \in [t_0, p]$. Стало быть, $\varepsilon = 0$ и $\phi(t) = 0$ удовлетворяют условиям (4.1) и (4.4). Далее, учитывая, что диаметры разбиений ω_{i_m} стремятся к нулю, а $\varepsilon_{i_m} = 0$ и $\phi_{i_m}(t) = 0$ удовлетворяют неравенствам (4.11), получим, что $\varepsilon = 0$ и $\phi(t) = 0$ удовлетворяют условию (4.2). Стало быть, $\varepsilon = 0$ и $\phi(t) = 0$ являются решением задачи (4.1)–(4.4). В этом случае условия (4.5)–(4.8) выполнены при $\lambda = 0$ и $\theta(t) = 0$.

Будем считать, что $\lambda^{(i)} + \theta_i(p) > 0$ для всех номеров i. Поскольку решение ε_0 и $\phi_0(t)$ задачи (4.1)–(4.4) удовлетворяет ограничениям (4.11), то $g(\varepsilon_i, \phi_i(\cdot)) \le g(\varepsilon_0, \phi_0(\cdot))$. Из этого неравенства и из формулы (4.4) следует неравенство $G(\varepsilon_i) \le g(\varepsilon_0, \phi_0(\cdot))$. Отсюда, используя предположение 1, получим, что последовательность чисел ε_i ограничена сверху. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что $\varepsilon_i \to \varepsilon_* \ge 0$.

Покажем, что существует число $B > 0$ такое, что

$$\lambda^{(i)} \le B, \quad \theta_i(p) \le B \text{ для всех } i \ge 1. \tag{4.17}$$

По условию теоремы функция $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ является непрерывной и выпуклой. Поэтому [14, с. 61] существуют числа $B_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$|G(\varepsilon) - G(\varepsilon_*)| \le B_0|\varepsilon - \varepsilon_*| \text{ для всех } |\varepsilon - \varepsilon_*| < 3\delta, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.18}$$

Поскольку $\varepsilon_i \to \varepsilon_*$, то $|\varepsilon_i - \varepsilon_*| < \delta$ для всех i, начиная с некоторого номера. Производя перенумеровку, считаем, что неравенство $|\varepsilon_i - \varepsilon_*| < \delta$ выполнено для всех $i \ge 1$. Возьмем $\varepsilon = \varepsilon_* + 2\delta$. Тогда из неравенств (4.15) и (4.18) получим, что

$$(\lambda^{(i)} + \theta_i(p))(\varepsilon - \varepsilon_i) \le G(\varepsilon) - G(\varepsilon_i) \le |G(\varepsilon) - G(\varepsilon_*)| + |G(\varepsilon_i) - G(\varepsilon_*)| \le B_0(|\varepsilon - \varepsilon_*| + |\varepsilon_i - \varepsilon_*|) \le 3B_0\delta.$$

Поскольку $\varepsilon - \varepsilon_i > \delta$, то из предыдущего неравенства следует, что $\lambda^{(i)} + \theta_i(p) \le 3B_0$. Отсюда и из того, что $\lambda^{(i)} \ge 0$ и $\theta_i(p) \ge 0$, получим неравенства (4.17) с $B = 3B_0$.

Каждая из функций (4.14) не убывает на отрезке $[t_0, p]$ и удовлетворяет равенству $\theta_i(0) = 0$. Отсюда и из второго неравенства (4.17) получим, что $0 \le \theta_i(t) \le B$ для всех $t \in [t_0, p]$. Далее, полная вариация [12, с. 313] функции (4.14) равна $\theta_i(p) - \theta_i(t_0) \le B$. Согласно второй теореме Хелли [12, с. 346] из последовательности функций (4.14) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[t_0, p]$ к некоторой функции $\theta(t)$. Предельная функция не убывает и удовлетворяет равенству $\theta(t_0) = 0$.

Поскольку $0 \le \lambda^{(i)} \le B$, то из последовательности чисел $\lambda^{(i)}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не вводя новых обозначений, считаем, что

$$\lim_{i\to\infty} \theta_i(t) = \theta(t) \text{ для всех } t \in [t_0, p] \ \text{ и } \ \lim_{i\to\infty} \lambda^{(i)} = \lambda \ge 0. \tag{4.19}$$

Из формул (4.16) и (4.19) получим, что $\lim\limits_{i\to\infty}\phi_i(t)=\phi_*(t)$ для любого $t\in[t_0,p]$, где предельная функция $\phi_*(t)$ задается формулой (4.8). Поэтому она принадлежит пространству $L_q[t_0,p]$.

Из формул (4.16) и (4.17) следует, что

$$0\le c(t)\phi_i(t)\le\Big(\frac{2B}{q}\Big)^{1/(1-q)}c^l(t)\ \text{ при всех }\ t\in[t_0,p]. \tag{4.20}$$

Зафиксируем число $t\in[t_0,p]$. Пусть $t_j^{(i)}\le t<t_{j+1}^{(i)}$. Тогда из неравенства (4.11) получим, что

$$D(t_j^{(i)})+\varepsilon_i\ge\int\limits_{t_j^{(i)}}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_i(r))dr=\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_i(r))dr$$

$$+\int\limits_{t_j^{(i)}}^{t}c(r)\phi_i(r)dr-\int\limits_{t_j^{(i)}}^{t}\beta(r)dr. \tag{4.21}$$

Далее, учитывая, что диаметры разбиений ω_i стремятся к нулю, имеем

$$0\le\int\limits_{t_j^{(i)}}^{t}c(r)\phi_i(r)dr\le\Big(\frac{2B}{q}\Big)^{1/(1-q)}\int\limits_{t_j^{(i)}}^{t}c^l(r)dr\to0,\quad\int\limits_{t_j^{(i)}}^{t}\beta(r)dr\to0.$$

Здесь использованы неравенство (4.20) и теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. По теореме Лебега [12, с. 284]

$$\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_i(r))dr\to\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_*(r))dr.$$

Поэтому, переходя в неравенстве (4.21) к пределу, получим

$$\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_*(r))dr\le D(t)+\varepsilon_*\ \text{ при любом }\ t\in[t_0,p].$$

Стало быть, ε_* и $\phi_*(t)$ удовлетворяют условию (4.2). Поскольку ε_i и $\phi_i(t)$ удовлетворяют неравенству (4.1), то их пределы ε_* и $\phi_*(t)$ также удовлетворяют этому неравенству. Покажем, что выполнены условия (4.5)–(4.7).

Перейдем к пределу в равенстве (4.12). Получим равенство (4.6). Из формул (4.13) и (4.14) следует равенство

$$\int\limits_{t_0}^{p}\theta_i(r)(\beta(r)-c(r)\phi_i(r))dr-\int\limits_{t_0}^{p}D(r)d\theta_i(r)=\theta_i(p)\varepsilon_i. \tag{4.22}$$

Из неравенств (4.17) и (4.20) имеем

$$0\le c(t)\phi_i(t)\theta_i(t)\le c^l(t)\Big(\frac{2B}{q}\Big)^{1/(q-1)}B.$$

Поэтому, переходя в равенстве (4.22) к пределу и применяя теорему Лебега и первую теорему Хелли [12, с. 344], выводим равенство (4.5). Зафиксируем число $\varepsilon\ge0$ и перейдем к пределу в неравенстве (4.15). Получим неравенство (4.7) при $\varepsilon_0=\varepsilon_*$.

По теореме 4 пределы ε_* и $\phi_*(t)$ являются решением задачи (4.1)–(4.4). В силу единственности $\varepsilon_*=\varepsilon_0$ и $\phi_*(t)=\phi_0(t)$. □

З а м е ч а н и е 3. Подставляя в формулы (2.5) $u_*=u^*=\varrho(z)$, где z определяется формулой (2.6), найдем управления ξ и χ в исходной задаче (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. **Никольский М.С.** Задача о переправе с возможной остановкой двигателя // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. С. 1937–1940.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Наука, 1967. 479 с.
5. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
6. **Ухоботов В.И.** Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 196–204.
7. **Ухоботов В.И., Гущин Д.В.** Однотипные дифференциальные игры с выпуклой интегральной платой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 251–258.
8. **Ухоботов В.И.** Необходимые условия оптимальности в линейной задаче управления с помехой и платой, зависящей от модуля линейной функции // Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, №1. С. 80–87.
9. **Ухоботов В.И.** Об одной линейной задаче управления при наличии помехи // Вестн. ЮУрГУ. Сер. "Математика. Механика. Физика". 2017. Т. 9, № 2. С. 36–46. doi: 10.14529/mmph170205.
10. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
11. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2005. 124 с.
12. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
13. **Кудрявцев Л.Д.** Курс математического анализа. М.: Высш. шк., 1981. Т. 1. 687 с.
14. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
15. **Рисс Ф., Секельфальви–Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
16. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.

Поступила 21.05.2019
После доработки 1.07.2019
Принята к публикации 8.07.2019

Ухоботов Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет,
г. Челябинск
e-mail: ukh@csu.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 520 p.
2. Nikol'skii M.S. The crossing problem with possible engine shutoff. *Diff. Eq.*, 1993, vol. 29, no. 11, pp. 1681–1684.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1987, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
4. Isaacs R. *Differential games.* N Y: John Wiley & Sons, 1965, 408 p. ISBN: 0471428604 . Translated to Russian under the title *Differentsial'nye igry.* Moscow: Mir Publ., 1974, 456 p.
5. Pontrjagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. doi: 10.1070/SM1981v040n03ABEH001815 .
6. Ukhobotov V.I. One type differential games with convex goal. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 196–204 (in Russian).

7. Ukhobotov V.I., Gushchin D.V. Single–type differential games with convex integral. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. S178–S185. doi: 10.1134/S0081543811090136 .
8. Ukhobotov V.I. Necessary conditions of optimality in linear control problem under interference with a payoff depending on the modulus of a linear function. *Chelyabinsk Phys. Math. J.*, 2017, vol. 2, no. 1, pp. 80–87 (in Russian).
9. Ukhobotov V.I. On a linear control problem under interference. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 36–46 (in Russian). doi: 10.14529/mmph170205 .
10. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* [Theory of motion control. Linear systems]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 475 p.
11. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineinykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami* [Method of one-dimensional projecting in linear differential games with integral constraints]. Chelyabinsk: Chelyabinsk State University, 2005, 124 p. ISBN: 5-7271-0725-3 .
12. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis. Vol.* 1, 2. Mineola; N Y: Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830 . Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza, Vypusk* 1, 2. Moscow: MGU Publ., 1954, 154 p.; 1960, 118 p.
13. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza; Tom 1* [A course in mathematical analysis; Vol. 1; Textbook]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1981, 687 p.
14. Pshenichnyi B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 320 p.
15. Riesz F., Sz.-Nagy B. *Leçcons d'analyse fonctionnelle.* Budapest: Akademiai Kiado, 1972. Translated to Russian under the title *Lektsii po funktsional'nomu analizu.* Moscow: Mir Publ., 1979, 287 p.
16. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Studies in Mathematics and its Applications, vol. 6. Amsterdam; N Y; Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979, 460 p. ISBN: 0444851674 . Original Russian text published in Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 479 p.

Received May 21, 2019
Revised July 1, 2019
Accepted July 8, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00105).

Viktor Ivanovich Ukhobotov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ukh@csu.ru .

Cite this article as: V. I. Ukhobotov. On a control problem under a disturbance and a possible breakdown, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 265–278 .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 519.65

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

В. Т. Шевалдин

Работа посвящена построению новых локальных экспоненциальных сплайнов с равноотстоящими узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_3(D)$ третьего порядка вида

$$\mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta) \quad (\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$$

и установлению порядковых оценок сверху для погрешности аппроксимации этими сплайнами в равномерной метрике на соболевском классе трижды дифференцируемых функций $W_\infty^{\mathcal{L}_3}$. В частности, для дифференциального оператора $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2-\beta^2)$ приведена общая схема построения локальных сплайнов с дополнительными узлами, приводящая в одном случае к известным формосохраняющим сплайнам, а в другом — к новым интерполяционным локальным сплайнам, точным на ядре оператора $\mathcal{L}_3(D)$.

Ключевые слова: локальные экспоненциальные сплайны, линейный дифференциальный оператор, аппроксимация, интерполяция.

V. T. Shevaldin. Algorithms for the construction of third-order local exponential splines with equidistant knots.

We construct new local exponential splines with equidistant knots corresponding to a third-order linear differential operator $\mathcal{L}_3(D)$ of the form

$$\mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta) \quad (\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}).$$

We also establish upper order estimates for the error of approximation by these splines in the uniform metric on the Sobolev class of three times differentiable functions $W_\infty^{\mathcal{L}_3}$. In particular, for the differential operator $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2-\beta^2)$, we give a general scheme for the construction of local splines with additional knots, which leads in one case to known shape-preserving splines and in another case to new local interpolation splines exact on the kernel of $\mathcal{L}_3(D)$.

Keywords: local exponential splines, linear differential operator, approximation, interpolation.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-279-287

Введение

Теория локальных сплайнов берет начало с работы [1] Т. Лича и Л. Шумейкера, в которой были построены локальные полиномиальные сплайны с произвольными узлами на оси $\mathbb{R}$, сохраняющие пространство алгебраических многочленов заданной степени. Существенный вклад в развитие практических методов этой теории внесла монография [2] Ю. С. Завьялова, Б. И. Квасова и В. Л. Мирошниченко. Следует также отметить исследования Н. П. Корнейчука [3] по нахождению точных констант в теории локальной аппроксимации полиномиальными сплайнами в случае, если узлы сплайна расположены равномерно.

Данная статья посвящена уточнению и дальнейшему развитию методов локальной аппроксимации экспоненциальными сплайнами из монографии автора [4]. Цель исследования — получение новых формул для параметров гладких экспоненциальных сплайнов третьего порядка с равноотстоящими узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору вида

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta),$$

где D — символ дифференцирования и $\beta,\ \gamma,\ \delta$ — произвольные действительные числа.

В первом разделе статьи мы обобщаем соответствующие исследования Т. Лича и Л. Шумейкера [1] в полиномиальном случае на экспоненциальные сплайны с равноотстоящими узлами, сохраняющие ядро оператора $\mathcal{L}_3$, т. е. всевозможные линейные комбинации экспонент $e^{\beta x},\ e^{\gamma x}$ и $e^{\delta x}$, уточняя при этом некоторые результаты Е. В. Стрелковой (Шевалдиной) [5;6] (см. также [4, гл. 1]). В этом разделе приводятся явные формулы для параметров таких сплайнов.

Во втором разделе рассматриваются локальные экспоненциальные сплайны, соответствующие оператору $\mathcal{L}_3$ вида

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2) \quad (\beta > 0).$$

Используя идеи работ [7] Ю. Н. Субботина и [8] Б. И. Квасова (обе работы посвящены локальным параболическим сплайнам), в конструкцию локальных сплайнов мы добавляем к основным узлам дополнительные узлы (посередине между основными), что позволяет, в частности, в одном случае строить известные формосохраняющие сплайны [9], а в другом — новые локальные интерполяционные экспоненциальные сплайны, близкие по форме к эрмитовым параболическим сплайнам Б. И. Квасова [8].

В третьем разделе статьи приводятся порядковые оценки погрешности аппроксимации построенными в предыдущих разделах локальными экспоненциальными сплайнами с равноотстоящими узлами. А именно доказано, что на классе трижды дифференцируемых функций $W_\infty^{\mathcal{L}_3}$ в случае равномерной сетки узлов сплайнов с шагом $h > 0$ величина такой погрешности аппроксимации в равномерной метрике равна $O(h^3)$.

Отметим, что практически вся необходимая библиография по данной тематике содержится в монографии [4] автора статьи. Кроме того, там изложена теория локальных тригонометрических сплайнов третьего порядка, другие более общие результаты по локальной аппроксимации и рассмотрены локальные сплайны с произвольным (не обязательно равномерным) расположением узлов не только на оси $\mathbb{R}$, но и на любом отрезке этой оси с определенным выбором граничных условий. Все эти вопросы в настоящей статье мы затрагивать не будем.

1. Экспоненциальные сплайны третьего порядка, точные на ядре дифференциального оператора

Пусть D — оператор дифференцирования и

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta) \tag{1.1}$$

— линейный дифференциальный оператор третьего порядка, корнями характеристического многочлена которого являются числа $\beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$. В данном разделе будем считать, что все эти числа попарно различны и не равны нулю. Экспоненциальный базисный сплайн (B-сплайн) на отрезке $[-3h/2; 3h/2]$ $(h > 0)$ с равноотстоящими узлами $-3h/2,\ -h/2,\ h/2,\ 3h/2$ определим как обычно (см., например, [4, гл. 3]) формулой

$$B(x) = m\begin{cases} (\gamma-\delta)e^{\beta(x+\frac{3h}{2})} + (\delta-\beta)e^{\gamma(x+\frac{3h}{2})} + (\beta-\gamma)e^{\delta(x+\frac{3h}{2})}, & x \in \Big[-\dfrac{3h}{2}; -\dfrac{h}{2}\Big], \\ -(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta(x+\frac{h}{2})} - (\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} - & \\ -\,(\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta(x+\frac{h}{2})}, & x \in \Big[-\dfrac{h}{2}; \dfrac{h}{2}\Big], \\ (\gamma-\delta)e^{(\gamma+\delta)h}e^{\beta(x-\frac{h}{2})} + (\delta-\beta)e^{(\delta+\beta)h}e^{\gamma(x-\frac{h}{2})} + & \\ +\,(\beta-\gamma)e^{(\beta+\gamma)h}e^{\delta(x-\frac{h}{2})}, & x \in \Big[\dfrac{h}{2}; \dfrac{3h}{2}\Big], \\ 0, & x \notin \Big[-\dfrac{3h}{2}; \dfrac{3h}{2}\Big]. \end{cases} \tag{1.2}$$

В данном разделе будем считать, что нормализующий множитель $m = m(h)$ равен 1. Несложно понять, что

$$B\Big(\frac{3h}{2}\Big) = B\Big(-\frac{3h}{2}\Big) = 0, \quad B'\Big(\frac{3h}{2}\Big) = B'\Big(-\frac{3h}{2}\Big) = 0, \quad \operatorname{supp} B = \Big[-\frac{3h}{2}; \frac{3h}{2}\Big] \quad \text{и} \quad B \in C^1(\mathbb{R}).$$

Для функции $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим

$$y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

Здесь α — фиксированное действительное число, причем, не ограничивая общности, будем считать, что $-1/2 \le \alpha < 1/2$. Рассмотрим функционал

$$I_{j+\alpha} = C_1 y_{j+\alpha} + C_2 y_{j+\alpha+1} + C_3 y_{j+\alpha+2},$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}$. Локальный экспоненциальный сплайн $S(x)$ с равноотстоящими узлами $(1/2+j)h$ $(j \in \mathbb{Z})$ определим на всей оси $\mathbb{R}$ (см. [4, гл. 1]) формулой

$$S(x) = S(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} I_{j+\alpha} B(x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Параметры $C_1,\ C_2$ и C_3 функционала $I_{j+\alpha}$ будем определять по аналогии с [1], исходя из равенств

$$S(e^{\beta\,\cdot}, x) = e^{\beta x}, \quad S(e^{\gamma\,\cdot}, x) = e^{\gamma x}, \quad S(e^{\delta\cdot}, x) = e^{\delta\, x} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.4}$$

Теорема 1. *Имеют место следующие равенства*:

$$C_1 = \frac{e^{(\gamma+\delta)h} e^{\frac{\beta h}{2} - \beta h\alpha}}{(\gamma-\delta)(e^{\beta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\beta h} - e^{\delta h})^2} + \frac{e^{(\beta+\delta)h} e^{\frac{\gamma h}{2} - \gamma h\alpha}}{(\delta-\beta)(e^{\gamma h} - e^{\beta h})^2 (e^{\gamma h} - e^{\delta h})^2}$$

$$+ \frac{e^{(\beta+\gamma)h} e^{\frac{\delta h}{2} - \delta h\alpha}}{(\beta-\gamma)(e^{\delta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\delta h} - e^{\beta h})^2},$$

$$C_2 = -\frac{(e^{\delta h} + e^{\gamma h}) e^{\frac{\beta h}{2} - \beta h\alpha}}{(\gamma-\delta)(e^{\beta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\beta h} - e^{\delta h})^2} - \frac{(e^{\delta h} + e^{\beta h}) e^{\frac{\gamma h}{2} - \gamma h\alpha}}{(\delta-\beta)(e^{\gamma h} - e^{\beta h})^2 (e^{\gamma h} - e^{\delta h})^2}$$

$$-\frac{(e^{\beta h} + e^{\gamma h}) e^{\frac{\delta h}{2} - \delta h\alpha}}{(\beta-\gamma)(e^{\delta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\delta h} - e^{\beta h})^2},$$

$$C_3 = -\frac{e^{\frac{\beta h}{2} - e^{\beta h\alpha}}}{(\gamma-\delta)(e^{\beta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\beta h} - e^{\delta h})^2} + \frac{e^{\frac{\gamma h}{2} - \gamma h\alpha}}{(\delta-\beta)(e^{\gamma h} - e^{\beta h})^2 (e^{\gamma h} - e^{\delta h})^2}$$

$$+ \frac{e^{\frac{\delta h}{2} - \delta h\alpha}}{(\beta-\gamma)(e^{\delta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\delta h} - e^{\beta h})^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in [(l-1/2)h; (l+1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$. Тогда из (1.3) получаем

$$S(x) = I_{l-1+\alpha} B(x-(l-1)h) + I_{l+\alpha} B(x - lh) + I_{l+\alpha+1} B(x-(l+1)h).$$

Не ограничивая общности считаем $l = 0$, и пусть $-h/2 \le x \le h/2$. Используя (1.2), имеем

$$S(x) = (C_1 y_{\alpha-1} + C_2 y_\alpha + C_3 y_{\alpha+1}) \Big[(\gamma-\delta) e^{\gamma h + \delta h} e^{\beta(x+\frac{h}{2})}$$

$$+ (\delta-\beta) e^{\delta h + \beta h} e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} + (\beta-\gamma) e^{\beta h + \gamma h} e^{\delta(x+\frac{h}{2})}\Big]$$

$$+ (C_1 y_\alpha + C_2 y_{\alpha+1} + C_3 y_{\alpha+2}) \Big[-(\gamma-\delta)(e^{\gamma h} + e^{\delta h}) e^{\beta(x+\frac{h}{2})}$$

$$- (\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} - (\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta(x+\frac{h}{2})}\Big]$$

$$+ (C_1 y_{\alpha+1} + C_2 y_{\alpha+2} + C_3 y_{\alpha+3})\Big[(\gamma-\delta)e^{\beta(x+\frac{h}{2})} + (\delta-\beta)e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} + (\beta-\gamma)e^{\delta(x+\frac{h}{2})}\Big].$$

Равенства (1.4) приводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_1,\ C_2$ и C_3 (более подробные выкладки см. в [5; 6]):

$$C_1 + C_2 e^{\beta h} + C_3 e^{2\beta h} = Y_1 = \frac{e^{\frac{\beta h}{2}-\beta h\alpha}}{(\gamma-\delta)(e^{\delta h}-e^{\beta h})(e^{\gamma h}-e^{\beta h})},$$

$$C_1 + C_2 e^{\gamma h} + C_3 e^{2\gamma h} = Y_2 = \frac{e^{\frac{\gamma h}{2}-\gamma h\alpha}}{(\delta-\beta)(e^{\beta h}-e^{\gamma h})(e^{\delta h}-e^{\gamma h})},$$

$$C_1 + C_2 e^{\delta h} + C_3 e^{2\delta h} = Y_3 = \frac{e^{\frac{\delta h}{2}-\delta h\alpha}}{(\beta-\gamma)(e^{\gamma h}-e^{\delta h})(e^{\beta h}-e^{\delta h})}.$$

Решая полученную систему уравнений, получаем утверждение теоремы 1. □

2. Экспоненциальные сплайны с дополнительными узлами

В настоящем разделе мы будем рассматривать только дифференциальный оператор третьего порядка вида

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D(D^2-\beta^2) \quad (\beta > 0) \tag{2.1}$$

и связанные с ним гладкие экспоненциальные сплайны с равноотстоящими узлами. Вначале изложим один вариант общей схемы построения локальных сплайнов с дополнительными узлами, основанный на связи линейных дифференциальных операторов с постоянными действительными коэффициентами и соответствующих конечных разностей (см., например, [10]). Узлы сплайна $x_j = jh$ $(j\in\mathbb{Z})$ будем называть *основными*, а узлы $x_{j+1/2} = (j+1/2)h$ $(j\in\mathbb{Z})$ — *дополнительными*.

Пусть $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $y_j = f(jh)$ $(j\in\mathbb{Z})$. Дифференциальному оператору $\mathcal{L}_2(D) = D^2-\beta^2$ поставим в соответствие разностный оператор

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j = y_{j+2} - (2\operatorname{ch}\beta h)y_{j+1} + y_j \quad (j\in\mathbb{Z}),$$

определенный на пространстве последовательностей $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Он обращается в нуль на сеточных значениях (с шагом h) функций $e^{\beta x}$ и $e^{-\beta x}$ (или, что то же самое, функций $\operatorname{ch}\beta x$ и $\operatorname{sh}\beta x$) из ядра оператора $\mathcal{L}_3(D)$ вида (2.1). На любом отрезке $[jh;(j+1)h]$ $(j\in\mathbb{Z})$ локальный экспоненциальный сплайн $S(x)$ будем искать в виде

$$S(x) = S(f,x) = a + b\operatorname{sh}\beta(x-jh) + c\operatorname{ch}\beta(x-jh) + \frac{d}{\beta^2}\Big\{\operatorname{ch}\Big[\beta\Big(x-\Big(j+\frac{1}{2}\Big)h\Big)_+\Big] - 1\Big\}, \tag{2.2}$$

где $x_+ = \max\{0;x\}$ и $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Числа a,b,c и d находим из условий

1) $S(jh) = y_j + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1}$,

2) $S((j+1)h) = y_{j+1} + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j$,

3) $(D^2-\beta^2)S\Big|_{x\in(jh;(j+1/2)h)} = A\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j$,

4) $(D^2-\beta^2)S\Big|_{x\in((j+1/2)h;(j+1)h)} = C\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + D\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j$,

где k, A, B, C и D — некоторые действительные числа (об их выборе скажем чуть позже). После несложных вычислений имеем

$$\begin{aligned}
&a = -\frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big),\\
&c = \frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big) + y_j + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1},\\
&d = (C-A)\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + (D-B)\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j,\\
&b = \frac{1}{\operatorname{sh}\beta h}\Big\{y_{j+1} + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j + \frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big)\\
&- \operatorname{ch}\beta h\Big[\frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big) + y_j + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1}\Big]\\
&- \frac{\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - 1}{\beta^2}\big[(C-A)\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + (D-B)\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big]\Big\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, на отрезке $[jh;(j+1)h]$ $(j \in \mathbb{Z})$ локальный сплайн $S(x)$ вида (2.2) может быть записан в виде

$$\begin{aligned}
S(x) = &-\frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big)\\
&+ \operatorname{ch}\beta(x-jh)\Big[\frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big) + y_j + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1}\Big]\\
&+ \frac{\operatorname{sh}\beta(x-jh)}{\operatorname{sh}\beta h}\Big\{y_{j+1} + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j - \operatorname{ch}\beta h y_j - k\operatorname{ch}\beta h\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1}\\
&+ \frac{1}{\beta^2}(1-\operatorname{ch}\beta h)\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big)\\
&- \Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - 1\Big)\big[(C-A)\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + (D-B)\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big]\Big\}\\
&+ \frac{\operatorname{ch}(\beta(x-(j+1/2)h)_+) - 1}{\beta^2}\big[(C-A)\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + (D-B)\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big]. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Числа k, A, B, C и D будем искать из соображений гладкости сплайна $S(x)$, а именно, исходя из равенства

$$S'((j+1)h-0) = S'((j+1)h+0) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

Вычисляя левую и правую производные сплайна $S(x)$ в основных узлах по формуле (2.3) и приравнивая в полученном равенстве коэффициенты при $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1}$, $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j$ и $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j+1}$, получим следующую систему из трех линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{aligned}
&\Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - 1\Big)A + \Big(\operatorname{ch}\beta h - \operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}\Big)C = k\beta^2,\\
&\Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - \operatorname{ch}\beta h\Big)B + \Big(1 - \operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}\Big)D = -k\beta^2,\\
&\frac{\beta}{\operatorname{sh}\beta h}(1 - 2k\operatorname{ch}\beta h) + \frac{1}{\beta\operatorname{sh}\beta h}\Big[\Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - \operatorname{ch}\beta h\Big)A + \Big(1 - \operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}\Big)C\Big]\\
&= \frac{\operatorname{ch}\beta h}{\beta\operatorname{sh}\beta h}\Big[\Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - \operatorname{ch}\beta h\Big)B + \Big(1 - \operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}\Big)D\Big] + \frac{\operatorname{sh}\beta h}{\beta}B + \frac{\operatorname{sh}\frac{\beta h}{2}}{\beta}(D-B).
\end{aligned}\right. \qquad (2.4)$$

Поскольку уравнений три, а неизвестных — пять, то у нас есть две свободы выбора неизвестных коэффициентов. В данном разделе мы рассмотрим два случая решения системы (2.4).

П е р в ы й с л у ч а й. Положим $B = C = 0$. Тогда

$$A = D = \frac{k\beta^2}{\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2} - 1}, \quad k = \frac{1}{8\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}\operatorname{ch}^2\dfrac{\beta h}{4}}.$$

Сплайны с равноотстоящими узлами с такими параметрами совпадают со сплайнами из работы [9]. Они, как следует из [9], обладают хорошими аппроксимативными и формосохраняющими свойствами. На их основе Е. В. Стрелковой (Шевалдиной) построены более общие экспоненциальные сплайны, соответствующие оператору $\mathcal{L}_3(D)$ вида (2.1), с произвольным неравномерным расположением узлов на числовой оси (свойства таких сплайнов помимо [9] см., например, в [4, гл. 3]).

В т о р о й с л у ч а й. Положим $k = 0$. Тогда из (2.4) получаем три линейных уравнения

$$\begin{cases} A\Big(\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2} - 1\Big) + C\Big(\operatorname{ch}\beta h - \operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}\Big) = 0, \\ B\Big(\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2} - \operatorname{ch}\beta h\Big) + D\Big(1 - \operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}\Big) = 0, \\ \beta^2 + \Big(\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2} - \operatorname{ch}\beta h\Big)(A + D) + \Big(1 - \operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}\Big)(B + C) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

относительно четырех неизвестных A, B, C и D. Недостающее уравнение для этих неизвестных будем искать из точности схемы (2.2) на функции, равной константе. Тогда из (2.2) приходим к уравнениям

$$\begin{cases} A + B = \dfrac{\beta^2}{4\operatorname{sh}^2\dfrac{\beta h}{2}}, \\ C + D = A + B. \end{cases} \tag{2.6}$$

Система (2.5), (2.6) имеет единственное решение

$$A = D = \frac{\operatorname{sh}\dfrac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\dfrac{\beta h}{4}} m, \quad B = C = -m,$$

где $m = \dfrac{\beta^2}{8\operatorname{sh}^2\dfrac{\beta h}{4}\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{4}}$. Таким образом, сплайн $S(x)$ вида (2.2) представляется в виде

$$\begin{aligned} S(x) = {} & -\frac{m}{\beta^2}\left[\frac{\operatorname{sh}\dfrac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\dfrac{\beta h}{4}}\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} - \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\right] + \operatorname{ch}\beta(x - jh)\left[y_j + \frac{m}{\beta^2}\left(\frac{\operatorname{sh}\dfrac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\dfrac{\beta h}{4}}\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} - \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\right)\right] \\ & + \frac{\operatorname{sh}\beta(x - jh)}{\operatorname{sh}\beta h}\left[y_{j+1} - \operatorname{ch}\beta h y_j + \frac{(1 - \operatorname{ch}\beta h)m}{\beta^2}\left(\frac{\operatorname{sh}\dfrac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\dfrac{\beta h}{4}}\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} - \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\right)\right. \\ & \left. + \frac{m(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - 1)}{\beta^2}\left(1 + \frac{\operatorname{sh}\dfrac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\dfrac{\beta h}{4}}\right)\big(\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} - \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big)\right] \\ & - \frac{\operatorname{ch}(\beta(x - (j + \frac{1}{2})h)_+) - 1}{\beta^2}\left(1 + \frac{\operatorname{sh}\dfrac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\dfrac{\beta h}{4}}\right)\big(\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} - \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j\big), \quad x \in [jh; (j+1)h] \quad (j \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Этот сплайн является интерполяционным в том смысле, что

$$S(jh) = y_j = f(jh),$$

он имеет узлы “склейки” в точках $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{(j+1/2)h\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и сохраняет все ядро оператора $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2-\beta^2)$, т.е.

$$S(1,x) = 1, \quad S(e^{\beta};x) = e^{\beta x}, \quad S(e^{-\beta};x) = e^{-\beta x} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

3. Оценки погрешности аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами

Пусть

$$W_\infty^{\mathcal{L}_3} = \{f:\ f''\in AC,\ \|\mathcal{L}_3(D)f\|_{L_\infty}\le 1\}$$

— класс трижды почти всюду дифференцируемых функций, соответствующих оператору вида (1.1). Здесь AC — класс локально абсолютно непрерывных функций и $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R})$ — класс функций, существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ с обычным определением нормы

$$\|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Любую функцию $f\in W_\infty^{\mathcal{L}_3}$ можно представить в виде

$$f(x) = \lambda_1 e^{\beta x} + \lambda_2 e^{\gamma x} + \lambda_3 e^{\delta x} + \int\limits_0^x \varphi_3(x-t)\mathcal{L}_3(D)f(x)\,dt,$$

где λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in\mathbb{R}$ и φ_3 — решение линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_3(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям: $\varphi_3(0) = \varphi_3'(0) = 0$, $\varphi_3''(0) = 1$. Несложно понять, что это решение имеет вид

$$\varphi_3(x) = \frac{e^{\beta x}}{(\beta-\delta)(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma x}}{(\gamma-\delta)(\gamma-\beta)} + \frac{e^{\delta x}}{(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Здесь, как и в первом разделе, мы считаем, что числа β, γ, $\delta\in\mathbb{R}$ являются попарно различными и не равными нулю. В случае оператора $\mathcal{L}_3(D)$ вида (2.1) для любой функции $f\in W_\infty^{\mathcal{L}_3}$ имеет место равенство

$$f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{\beta x} + \lambda_3 e^{-\beta x} + \int\limits_0^x \varphi_3(x-t)\mathcal{L}_3(D)f(t)\,dt,$$

где λ_1, λ_2, $\lambda_3\in\mathbb{R}$ и

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{\beta^2}(\operatorname{ch}\beta x - 1).$$

Теорема 2. *Для любой функции $f\in W_\infty^{\mathcal{L}_3}$ и локальных экспоненциальных сплайнов $S(x)$ вида* (1.3)*, удовлетворяющих условиям* (1.4)*, и вида* (2.7) *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in W_\infty^{\mathcal{L}_3}} \|f-S\|_C = O(h^3) \quad (h\to 0).$$

Доказательство. В случае оператора $\mathcal{L}_3(D)$ вида (1.1) для любой функции $f\in W_\infty^{\mathcal{L}_3}$ по формуле (1.3) построим локальный экспоненциальный сплайн $S(x)$, параметры

C_1, C_2 и C_3 которого выберем исходя из равенств теоремы 1. Поскольку этот сплайн сохраняет все три линейно независимые функции $e^{\beta x}$, $e^{\gamma x}$ и $e^{\delta x}$ из ядра оператора $\mathcal{L}_3$, то разность $S(x)-f(x)$ не будет содержать неинтегральных слагаемых (см. [5; 6] и [4, доказательство теоремы 1.3]) и может быть записана в виде

$$S(x)-f(x)=\int\limits_a^b K_1(x,t)\mathcal{L}_3(D)f(t)\,dt, \quad x\in\Big[\Big(l-\frac{1}{2}\Big)h;\Big(l+\frac{1}{2}\Big)h\Big] \quad (l\in\mathbb{Z}),$$

где $[a;b]=[(l-1+\alpha)h;(l+2+\alpha)h]$ и $K_1(x,t)$ — некоторое непрерывное по обеим переменным ядро. Отсюда стандартным образом (см. [4, теоремы 1.3–1.6]) получаем утверждение теоремы 2 для сплайнов вида (1.3), удовлетворяющих равенствам (1.4).

Во втором случае для оператора $\mathcal{L}_3(D)=D(D^2-\beta^2)$ и сплайнов вида (2.7) доказательство теоремы 2 вполне аналогично. Здесь разность $S(x)-f(x)$, поскольку интерполяционный экспоненциальный сплайн из второго раздела точен на всем ядре оператора $\mathcal{L}_3(D)$, может быть записана в виде

$$S(x)-f(x)=\int\limits_{(l-1)h}^{(l+2)h} K_2(x,t)\mathcal{L}_3(D)f(t)\,dt, \quad x\in[lh;(l+1)h] \quad (l\in\mathbb{Z}),$$

где $K_2(x,t)$ — некоторое непрерывное по обеим переменным ядро; и снова методом [4, теоремы 1.3–1.6] получаем равенство

$$\sup_{f\in W_\infty^{\mathcal{L}_3}}\|f-S\|_C=O(h^3) \quad (h\to 0). \qquad \square$$

Заключение

Новые явные формулы для параметров локальных экспоненциальных сплайнов, аппроксимирующих трижды почти всюду дифференцируемые функции с максимальным порядком точности в зависимости от шага равномерной сетки, полученные в настоящей работе, могут оказаться полезными для специалистов в вычислительной математике, имеющих дело с аппроксимацией различных быстро растущих функций и поверхностей сложной формы. В практических приложениях локальных экспоненциальных сплайнов из первого раздела статьи выбор параметра $\alpha:\ -1/2\le\alpha<1/2$, характеризующего сдвиг узлов сплайна по сравнению с точками интерполяции аппроксимируемой функции, может быть осуществлен исходя из конкретных особенностей рассматриваемой задачи. Более точные оценки погрешности аппроксимации можно получить, исследуя знаки ядер $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$ как функций от переменной t при фиксированном $x\in\mathbb{R}$ (см., например, [5–7; 9]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lyche T., Schumaker L.L.** Local spline approximation methods // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 15, № 4. P. 294–325.
2. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
3. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
4. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2014. 198 с.
5. **Шевалдина Е.В.** Аппроксимация локальными $\mathcal{L}$-сплайнами четного порядка, сохраняющими ядро дифференциального оператора // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 2. С. 62–73.
6. **Шевалдина Е.В.** Локальные $\mathcal{L}$-сплайны, сохраняющие ядро дифференциального оператора // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 111–121.

7. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
8. **Квасов Б.И.** Интерполяция эрмитовыми параболическими сплайнами // Изв. ВУЗов. Математика. 1984. № 5. С. 25–32.
9. **Kostousov K.V., Shevaldin V.T.** Approximation by local exponential splines // Proc. Steklov Institute Math. 2004. Suppl. 10. P. 147–157.
10. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.

Поступила 14.06.2019
После доработки 10.07.2019
Принята к публикации 5.08.2019

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lyche T., Schumaker L.L. Local spline approximation methods. *J. Approx. Theory*, 1975, vol. 15, no 4, pp. 294–325. ISBN: 10.1016/0021-9045(75)90091-X .
2. Zavyalov Yu.S, Kvasov B.I., Miroshnichencko V.L. *Metody splain-funktsii* [Methods of Spline-Functions]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p.
3. Korneichuk N.P. *Splainy v teorii priblizheniya* [Splines in approximation theory]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 352 p.
4. Shevaldin V.T. *Approksimatsiya lokal'nymi splainami* [Approximation by local splines]. Ekaterinburg: Ural Branch of RAS Publ., 2014, 198 p.
5. Shevaldina E.V. Approximation by local $\mathcal{L}$-splines of even order preserving the kernel of differential operator. *Izv. of Tula state University. Natural Sciences*, 2009, no. 2, pp. 62–73 (in Russian).
6. Shevaldina E.V. Local $\mathcal{L}$-splines preserving the differential operator kernel. *Num. Anal. Appl.*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 90–99. doi: 10.1134/S1995423910010106 .
7. Subbotin Yu.N. Inheritance of monotonicity and convexity in local approximations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1993, vol. 33, no. 7, pp. 879–884.
8. Kvasov B.I. Interpolation by parabolic Hermitian splines. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1984, vol. 28, no. 5, pp. 29–37.
9. Kostousov K.V., Shevaldin V.T. Approximation by local exponential splines. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2004, suppl. 10, pp. 147–157.
10. Shevaldin V.T. Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1985, vol. 164, pp. 233–273.

Received June 14, 2019
Revised July 10, 2019
Accepted August 5, 2019

Shevaldin Valerii Trifonovich, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. T. Shevaldin. Algorithms for the construction of third-order local exponential splines with equidistant knots, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 279–287 .

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN (print) 0134–4889

ISSN (online) 2658–4786

Редакторы Н. Н. Моргунова, Н. М. Юркова
TEX-редактор Г. Ф. Корнилова

Английский редактор Е. В. Васильева

Отв. за выпуск А. Е. Эльберт

Поддержка электронных версий журнала
С. Е. Желтышева, Н. Н. Моргунова

Выпускающие редакции Л. К. Бабинцева, Р. Х. Комарова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 3.09.19. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 33. Уч.-изд. л. 32,0 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
http://journal.imm.uran.ru

ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226